

DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DE FATORES DE INTENSIDADE  
DE TENSÃO NA MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR  
USANDO A INTEGRAL J E PROCESSOS ADAPTATIVOS

Carlos Alberto Cimini Junior

Às minhas grandes paixões,

Simone e Pedro.

### AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãos, pelo incentivo e confiança.

Aos professores Estevam Barbosa de Las Casas e Edgardo Taroco pela indispensável orientação, alto padrão dos ensinamentos transmitidos e incansável disposição para a discussão científica.

Aos professores Eduardo Bauzer Medeiros e Ana Maria Gontijo pela amizade, apoio e incentivo.

Aos bolsistas de iniciação científica do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG por proporcionarem um ambiente extremamente agradável dentro do qual grande parte deste trabalho foi desenvolvida.

Aos colegas dos Departamentos de Engenharia de Estruturas e Mecânica, pelo apoio.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para esta realização.

## RESUMO

O trabalho apresenta uma técnica de determinação de fatores de intensidade de tensão mediante o cálculo numérico da integral J. Inicialmente foi feita a dedução da formulação da integral J para problemas planos da Mecânica da Fratura Elástica Linear, incluindo uma formulação alternativa para carregamento no domínio. Em seguida, utilizando o Método dos Elementos Finitos em conjunto com um processo adaptativo de minimização de erro baseado na relocação nodal, determinou-se os fatores de intensidade de tensão para vários exemplos, cada um explicitando um aspecto particular do método apresentado. Os resultados obtidos se aproximaram daqueles observados na literatura disponível, situando-se dentro de uma faixa de erro aceitável para problemas de Engenharia.

**ABSTRACT**

This report presents a technique for the calculation of stress intensity factors using the J integral numerical evaluation. The formulation of the J integral was deduced for plane problems in Linear Elastic Fracture Mechanics, including an alternative formulation for domain loading. Using the Finite Element Method in conjunction with an adaptive remeshing process, stress intensity factors were determined for several examples, each one pointing out a particular aspect of the presented method. The results are similar to those obtained in the literature and were within Engineering acceptable margin of errors.

## SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO 2 - MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR .....	4
2.1 As origens da mecânica da fratura .....	4
2.1.1 A evolução do projeto estrutural .....	4
2.1.2 A teoria de Griffith .....	8
2.2 Conceitos básicos de mecânica da fratura .....	10
2.2.1 Modos de fratura .....	10
2.2.2 Fatores de intensidade de tensão .....	12
2.2.3 Integral J independente do caminho .....	14
2.3 Validade da teoria .....	16
CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA ELASTOSTÁTICA BIDIMENSIONAL .....	18
3.1 Formulação variacional do equilíbrio .....	18
3.2 Leis de conservação .....	22
3.2.1 Considerando apenas o carregamento no contorno .....	22
3.2.2 Considerando carregamento no contorno e no domínio .....	27
CAPÍTULO 4 - DECRÉSCIMO DA ENERGIA POTENCIAL .....	32
4.1 Considerando apenas o carregamento de contorno .....	32
4.2 Considerando carregamento no contorno e no domínio .....	35

CAPÍTULO 5 - PROCESSOS ADAPTATIVOS PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	38
5.1 Introdução .....	38
5.2 O conceito de adaptividade .....	38
5.3 Melhoria adaptativa de malhas .....	40
5.4 Algoritmo baseado no método r .....	41
5.5 Estimativa de erro .....	43
CAPÍTULO 6 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL .....	48
6.1 Introdução .....	48
6.2 O sistema SDP .....	48
6.3 O pós-processador baseado no processo adaptativo r .....	50
6.4 O pós-processador para a determinação da integral J .....	54
CAPÍTULO 7 - RESULTADOS NUMÉRICOS .....	59
7.1 Introdução .....	59
7.2 Exemplo 1 - Lâmina retangular com fissura central .....	60
7.3 Exemplo 2 - Lâmina retangular com furo central fissurado .....	64
7.4 Exemplo 3 - Lâmina retangular com fissura inclinada na borda ...	67
7.5 Exemplo 4 - Disco em rotação com furo central fissurado .....	69
CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE EXTENSÃO .....	75
APÊNDICE A - DEMONSTRAÇÃO LOCAL DO EQUILÍBRIO A PARTIR DA LEI DE CONSERVAÇÃO .....	78
APÊNDICE B - OBTENÇÃO DA FORMULAÇÃO DE BAKKER A PARTIR DA FORMULAÇÃO APRESENTADA NESTE TRABALHO .....	81

APÊNDICE C - OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO DA INTEGRAL J PROPOSTA POR RICE .....	83
APÊNDICE D - INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO DA INTEGRAL J .....	85
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	89
BIBLIOGRAFIA .....	94



## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

A falha catastrófica por propagação de fissura é um fenômeno problemático no projeto e análise de materiais estruturais em muitos campos da engenharia. Esse tipo de falha é de fundamental importância na indústria aeroespacial, onde se exige um alto nível de segurança associado a estruturas extremamente leves. A geração de energia elétrica envolvendo processos nucleares é outra área onde as consequências de uma falha desse tipo devem ser rigorosamente analisadas. Tais falhas apresentam, também, destacada importância nas estruturas metálicas marítimas, particularmente naquelas utilizadas para a exploração de petróleo. A necessidade da obtenção de métodos que determinem de que maneira a presença de fissuras influi no comportamento do material levou ao desenvolvimento da mecânica da fratura.

Todas as estruturas convivem com fissuras em uma determinada proporção. Estas podem estar presentes sob a forma de defeitos básicos nos materiais constituintes, podem ser induzidas durante o processo de fabricação ou podem surgir durante a vida útil do componente. Um dos objetivos da mecânica da fratura, então, é o de estabelecer critérios que permitam determinar se um nível de carregamento é suportado com segurança por um elemento estrutural fissurado. Sob esse aspecto, o avanço mais significativo foi a introdução do fator de intensidade de tensão como um parâmetro simples para definir a estabilidade na propagação da fissura.

O caminho frequentemente empregado nesta análise consiste em estudar o estado de tensões e deformações próximo ao extremo da fissura, avaliar os fatores de intensidade de tensão correspondentes e com-

pará-los com os valores admissíveis do material empregado. Esse procedimento implica em trabalhar em regiões próximas à singularidade com a consequente dificuldade de quantificar campos de tensões e deformações que apresentam gradientes elevados. Infelizmente, soluções analíticas só existem para casos relativamente simples, o que leva a uma necessidade de se determinar tais campos através de técnicas numéricas, das quais pode-se destacar o método dos elementos finitos.

Durante as duas últimas décadas, a técnica dos elementos finitos estabeleceu-se firmemente como uma ferramenta versátil para a solução numérica de problemas de engenharia e pareceria, a princípio, ser o método ideal para o estudo do comportamento de fissuras em materiais. Entretanto, a menos que se utilizem malhas extremamente refinadas, surgem problemas na determinação dos campos de tensões e deformações singulares na vizinhança da ponta da fissura. Portanto, algumas adaptações ou desenvolvimentos devem ser feitos de maneira a habilitar a aplicação do método dos elementos finitos na solução eficiente de problemas de fratura.

Com a introdução da integral  $J$  independente do caminho, a mecânica da fratura experimentou grande avanço e uma série de novos procedimentos tanto teóricos como experimentais foram desenvolvidos baseados nas propriedades da mencionada integral.

Neste trabalho inicialmente é apresentada, no Capítulo 2, uma breve revisão bibliográfica sobre a mecânica da fratura elástica linear, observando primeiramente os aspectos históricos (incluindo a teoria de Griffith). Em seguida são definidos conceitos básicos tais como fatores de intensidade de tensão e a integral  $J$  independente do caminho e é delimitada a validade da teoria.

O Capítulo 3 é dedicado à dedução de leis de conservação na elastostática bidimensional através de formulação variacional considerando inicialmente carregamento no contorno e, em seguida, incluindo carregamento no domínio.

No Capítulo 4 é deduzido o decréscimo da energia potenci-

al a partir das leis de conservação obtidas no Capítulo anterior, considerando os dois casos citados. A integral  $J$  é, então, relacionada a este decréscimo.

Uma breve revisão bibliográfica é feita no Capítulo 5 com respeito a processos adaptativos dentro do método dos elementos finitos, ressaltando a descrição do estimador de erro utilizado, e o Capítulo 6 é dedicado a esclarecer como foi implementado o procedimento proposto.

Finalmente, no Capítulo 7, são analisadas aplicações práticas através de quatro exemplos, cada um ressaltando um aspecto do método, e no Capítulo 8 são relatadas as conclusões obtidas com este trabalho e sugestões para extensões do mesmo.

## CAPÍTULO 2

### MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR

#### 2.1. As origens da mecânica da fratura

##### 2.1.1. A evolução do projeto estrutural

Como ilustrado na Fig. 2.1, a evolução do projeto estrutural passou por uma série de estágios até chegar à mecânica da fratura conforme é conhecida nos dias de hoje. Os primeiros trabalhos, tais como as pirâmides ou as catedrais da Europa, se basearam em tentativas de projetos anteriores, bem ou mal sucedidos, num processo essencialmente de tentativa e erro. Somente com o desenvolvimento dos conceitos de tensão e deformação durante o século XIX que procedimentos quantitativos de projeto e cálculo puderam se tornar possíveis (Timoshenko, 1953). Entretanto, a extensão lógica de tais conceitos no tratamento da concentração de tensões levava a um dilema - a existência de comportamento singular e, conseqüentemente, de tensões infinitas, que somente foi resolvido através da introdução dos fundamentos da mecânica da fratura.

Inglis (1913), no início deste século, obteve uma relação para a concentração de tensões nas extremidades de um furo elíptico em uma lâmina uniformemente tracionada conforme mostrado na Fig. 2.2. Este resultado, representado como o terceiro estágio da Fig. 2.1, relaciona a tensão máxima  $\sigma$ , atuando na extremidade do furo, à tensão nominal remota  $\sigma_{nom}$ . Constata-se que esta relação depende da razão  $L/R$ , onde  $L$  é o semi-comprimento do furo e  $R$  o raio de curvatura no ponto de interesse.

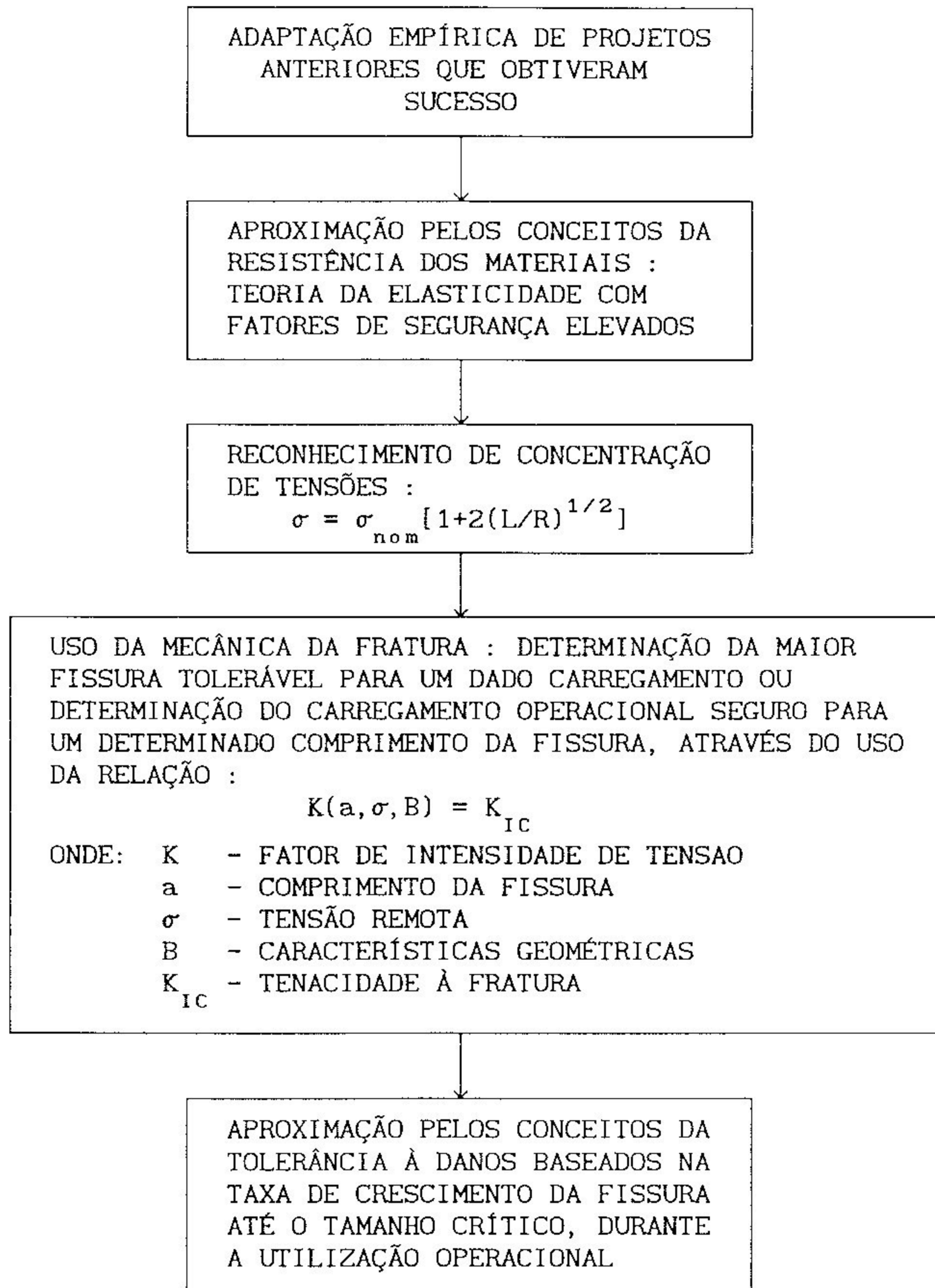


Figura 2.1 - A evolução do projeto estrutural

Observa-se, ainda, que  $\sigma = 3\sigma_{nom}$  para um furo circular desconsiderando efeitos de bordo, onde  $L=R$ . Porém, considerando que a extremidade de uma fissura real é extremamente afilada, onde  $R$  tende para zero, esperaria-se uma tensão infinita neste ponto. Isto sugere que um corpo contendo uma fissura não seria capaz de suportar um carregamento aplicado.

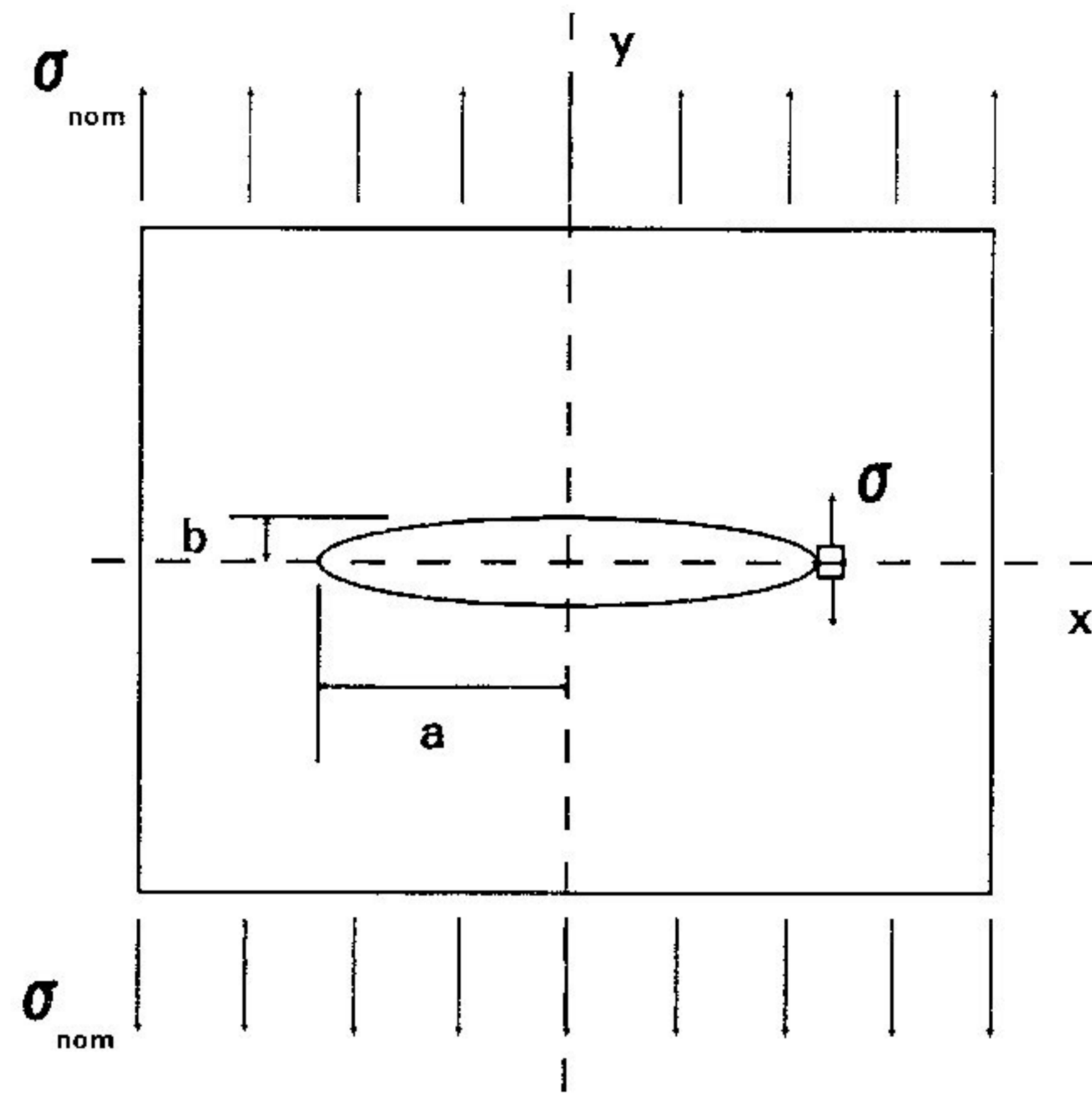


Figura 2.2 - Fissura elíptica em um campo de tração

O paradoxo resultante da aplicação do resultado de Inglis foi resolvido por Griffith (1920 e 1924), cujos primeiros trabalhos utilizando o vidro apareceram por volta de 1920, e será apresentado com mais detalhes no item seguinte. Entretanto, salvo algumas poucas contribuições - como, por exemplo, o trabalho de Westergaard (1939) - a mecânica da fratura permaneceu por algum tempo como uma curiosidade científica, não sendo considerada relevante no projeto estrutural. Uma das razões para tal fato pode ter sido a aparente não aplicação da teoria de Griffith a materiais utilizados na engenharia cujos valores de resistência à fratura são de ordem de magnitude superior à do vidro. Esta situação permaneceu até algum tempo após a Segunda Grande Guerra quando, nos Estados Unidos, acidentes envolvendo severos graus de fratura nos navios Liberty, em fuselagens de mísseis e em outras estruturas incentivaram estudos mais intensivos nesta área e, na Europa, os desastres com os aeroplanos Comet levaram ao desenvolvimento de trabalhos adicionais. Tudo isto resultou numa nova grande contribuição ao assunto dada por Irwin (1948) quando generalizou as idéias de Griffith para aplicações a metais e a outros materiais utilizados na engenharia - uma idéia que foi independentemente sugerida por Orowan (1948 e 1955).

O passo-chave subsequente, que foi a conexão do fator de intensidade de tensão ao balanço de energia de Griffith, também foi dado por Irwin (1957). Sob a utilização das terminologias Griffith-Irwin ou Mecânica da Fratura Elástica Linear, esta teoria coincide com o quarto estágio da evolução indicada na Fig. 2.1 e representa a tecnologia atualmente aplicada à maioria dos problemas de fratura.

O quinto estágio apresentado na Fig. 2.1 representa o tipo de atividade que foi iniciado na última década. Ele é o reconhecimento explícito de que as fissuras existem em toda estrutura de engenharia, quer sejam originárias de defeitos iniciais no material, de defeitos de fabricação, ou das condições de utilização da estrutura. Com o incremento na aplicação de ensaios não destrutivos mais intensivos e refinados, a integridade da estrutura pode ser avaliada levando em consideração as fissuras existentes. Isto é feito através de uma combinação de ensaios não destrutivos com análises de mecânica da fratura que :

- 1) assumem um tamanho inicial para a fissura ;
- 2) estimam a razão de crescimento subcrítico da fissura ;
- 3) determinam o tamanho crítico da fissura para uma instabilidade da mesma (falha por fratura).

Por esta aproximação, admite-se que exista uma fissura na estrutura cujo máximo tamanho seja o mínimo comprimento detectável pelos ensaios não destrutivos. O crescimento desta fissura, então, permite um intervalo entre as inspeções que levaria a uma identificação da mesma antes que ela pudesse atingir seu tamanho crítico. Este procedimento é genericamente conhecido por "tolerância a danos" (damage tolerance).

Atualmente o conceito de tolerância a danos é largamente utilizado na indústria aeroespacial. Entretanto parece que sua utilização será provavelmente estendida no futuro. Esforços têm sido feitos para a implementação da prevenção de fissuras em trilhos de linhas férreas e em plataformas "offshore", por exemplo. Porém está claro que tais procedimentos podem ser aplicados a qualquer tipo de estrutura de enge-

nharia onde, em primeiro lugar, o crescimento de pequenos defeitos iniciais a um tamanho crítico é motivo de preocupações, e, em segundo lugar, ensaios não destrutivos possam detectar fissuras subcríticas com segurança.

### 2.1.2. A teoria de Griffith

A idéia básica da teoria de fratura de Griffith (1920 e 1924) admite que exista uma força para o crescimento da fissura (resultante do decréscimo da energia potencial armazenada no corpo) contrabalançada por uma resistência ao crescimento da mesma, inerente ao corpo. A resistência ao crescimento da fissura, pelo menos no vidro, está associada com a necessidade de se suprir a energia de superfície para as recém-formadas superfícies da fissura. Aplicando o desenvolvimento matemático de Inglis (1913), então existente, juntamente com os princípios de conservação da energia ao caso de uma lâmina de vidro tracionada com uma fissura central conforme apresentado na Fig. 2.3, Griffith postulou que uma fissura se tornaria instável somente quando o decréscimo da energia de deformação elástica devido a um incremento no comprimento da fissura excedesse a razão de incremento da energia de superfície associada às recém-formadas superfícies da fissura.

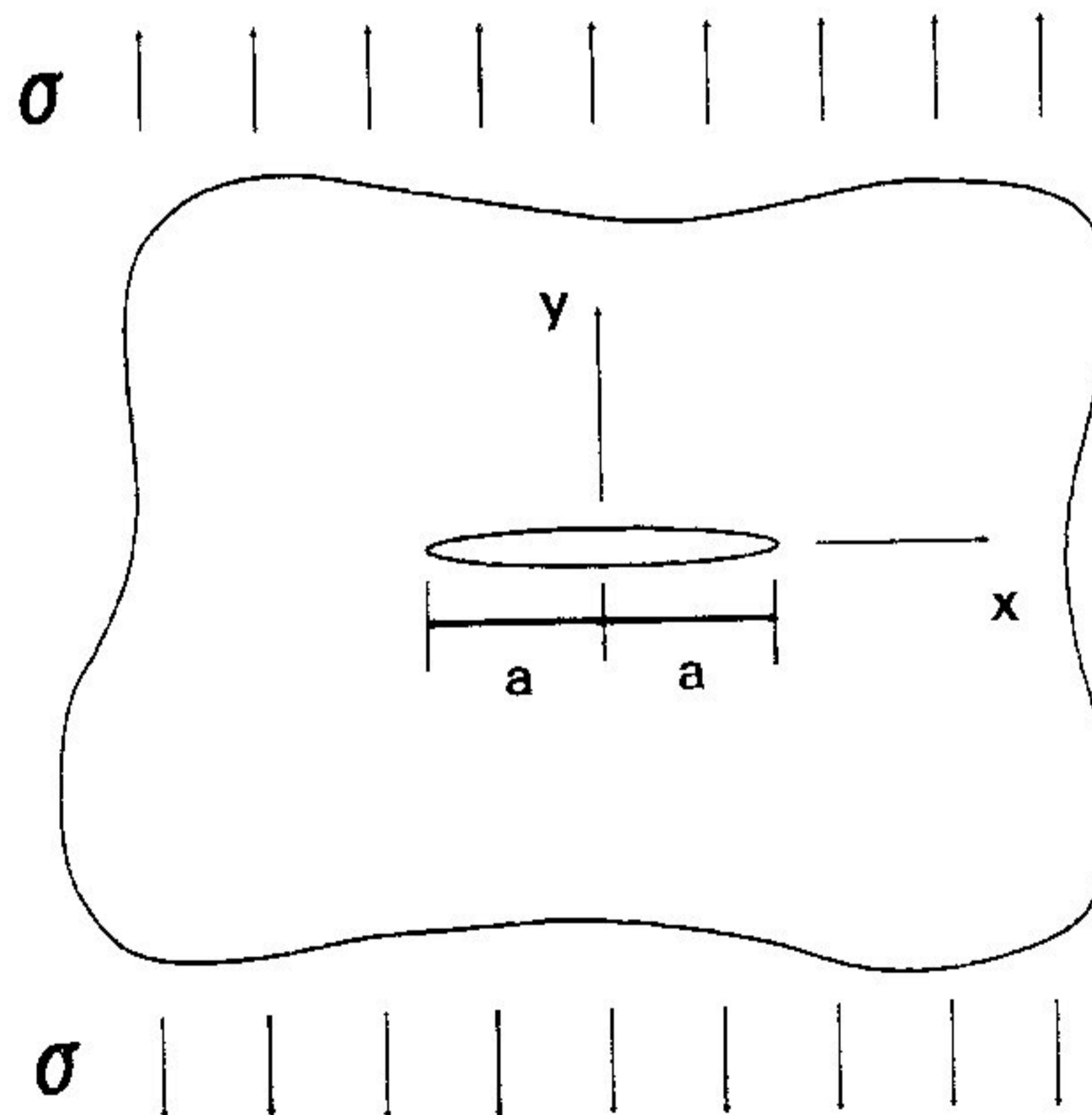


Figura 2.3 - Lâmina tracionada com fissura central



A energia de deformação liberada na formação de uma fissura de comprimento  $2a$  em um corpo inicialmente homogêneo é dada por :

$$U = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2E} \pi a^2 & \text{para estado plano de tensão} \\ \frac{\sigma^2}{2E} \pi a^2 (1-\nu^2) & \text{para estado plano de deformação} \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $E$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, e o aumento correspondente na energia de superfície é dado por :

$$W = 2 a \gamma \quad (2.2)$$

onde  $\gamma$  é a densidade de energia de superfície ou tensão de superfície. Estes termos em energia são representados em função do comprimento da fissura na Fig. 2.4.

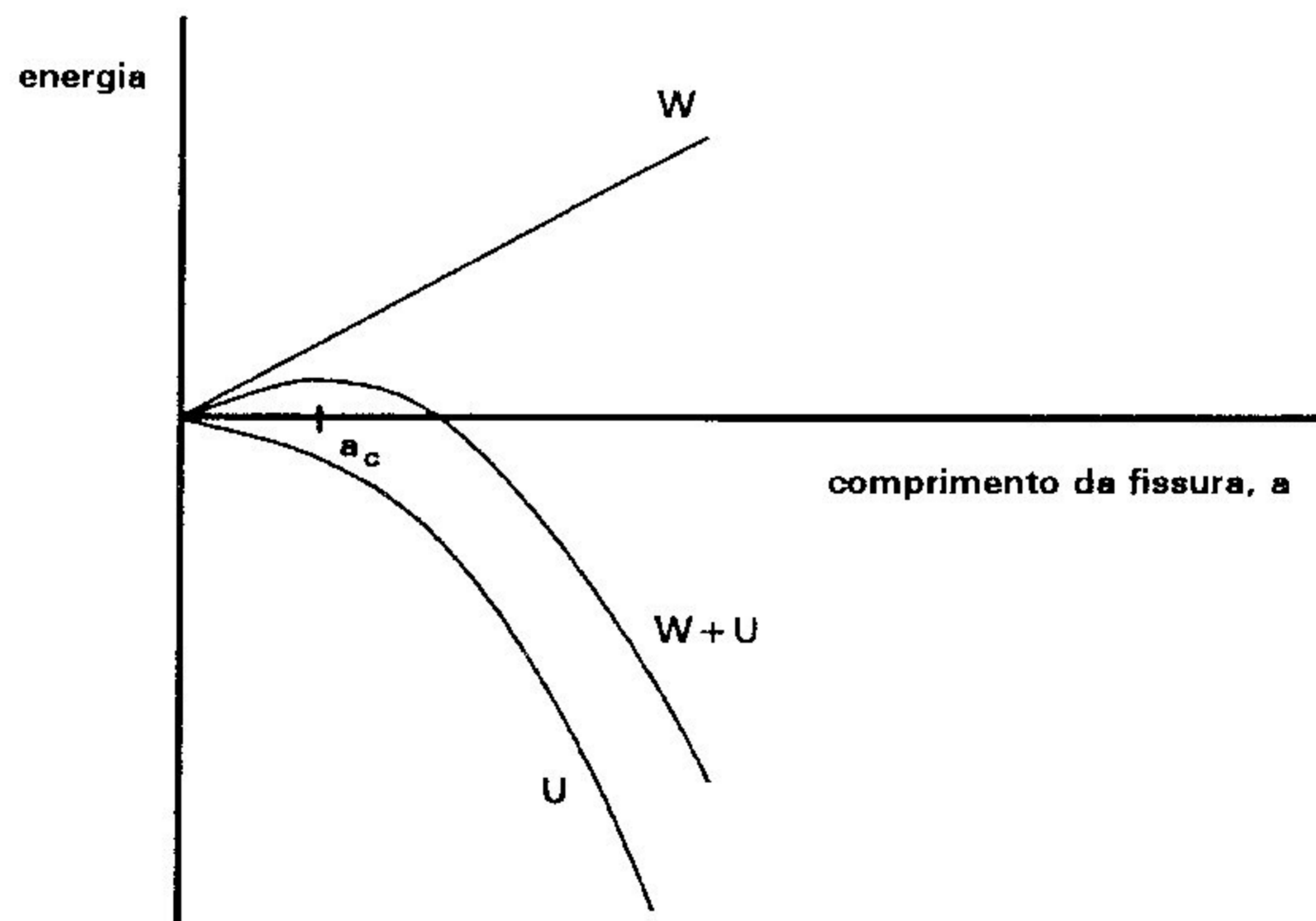


Figura 2.4 - Variação das energias de superfície e de deformação com o comprimento da fissura

É facilmente observável, a partir da Fig. 2.4, que a fissura se torna instável a partir de um comprimento crítico  $a_c$  quando :

$$\frac{\partial}{\partial a} (W + U) = 0 \quad (2.3)$$

Ou, definindo a taxa de decréscimo da energia potencial por :

$$G = - \frac{\partial U}{\partial a} \quad (2.4)$$

e a força de resistência ao crescimento da fissura por :

$$R = \frac{\partial W}{\partial a} \quad (2.5)$$

então, da Eq.(2.3), resulta, para crescimento instável da fissura, que :

$$G = R \quad (2.6)$$

Para  $0 \leq a \leq a_c$ , o aumento na fissura requer introdução de energia no sistema, enquanto que para  $a > a_c$ , a propagação ocorre de maneira instável.

Deve ser observado que a formulação de Griffith não envolve a distribuição de tensões ao redor da extremidade da fissura. Dessa forma, a formulação de energia é estritamente aplicável a apenas materiais frágeis. Porém tanto Irwin (1948) como Orowan (1948 e 1955) sugeriram extensões às expressões de Griffith que consideram deformações plásticas limitadas na vizinhança do extremo da fissura, o que permitiu que esta formulação fosse estendida aos materiais utilizados na engenharia, estabelecendo os conceitos básicos da mecânica da fratura, conforme se verá a seguir.

## 2.2. Conceitos básicos de mecânica da fratura

### 2.2.1. Modos de fratura

Uma fissura presente em um corpo sujeito a carregamentos externos pode se deformar segundo três modos diferentes. Irwin observou que existem três movimentos relativos independentes entre as superfícies superior e inferior da fissura, conforme mostrado na Fig. 2.5, definidos por :

- Modo I (modo de abertura); no qual as duas superfícies da fissura se separam simetricamente com respeito aos planos  $x_1x_2$  e  $x_1x_3$  ;
- Modo II (modo de deslizamento); no qual as duas superfícies da fissura deslizam uma em relação à outra simetricamente com respeito ao plano  $x_1x_2$  e anti-simetricamente com respeito ao plano  $x_1x_3$  ;
- Modo III (modo de rasgamento); no qual as duas superfícies da fissura também deslizam uma em relação à outra, porém anti-simetricamente com respeito aos planos  $x_1x_2$  e  $x_1x_3$  .

Dessa forma, observa-se que qualquer deformação da fissura pode ser representada por uma superposição apropriada destes três casos. Segue-se também que, para cada um dos três movimentos independentes representados na Fig. 2.5, existe associado um campo de tensões na extremidade da fissura.

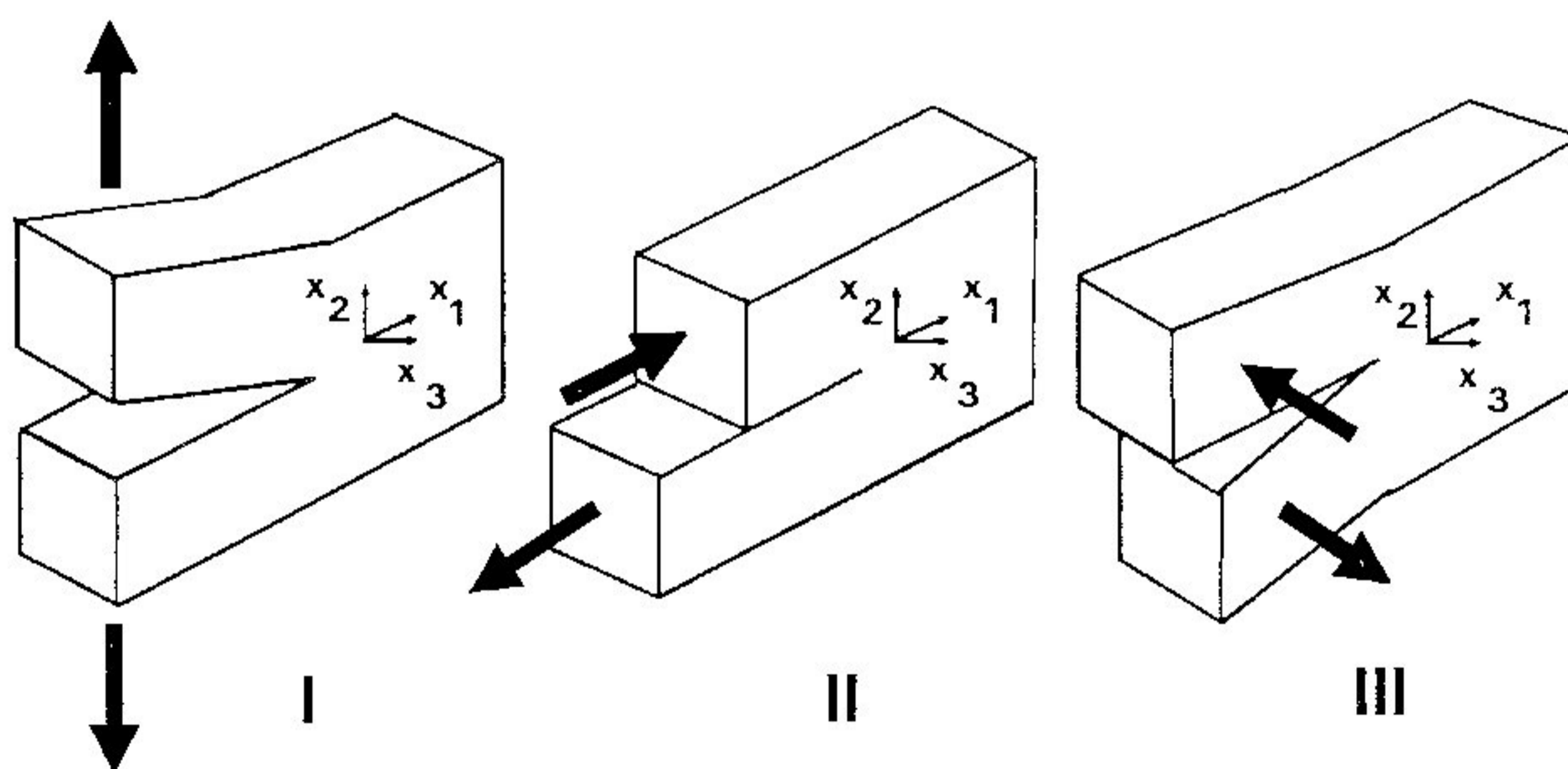


Figura 2.5 - Modos fundamentais de fratura

### 2.2.2. Fatores de intensidade de tensão

Irwin (1957), usando as soluções de Westergaard (1939), mostrou que as componentes de tensão na região da extremidade da fissura, correspondentes aos três modos de deformação, podem ser expressas sob a forma:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} f_1(\theta) \quad (2.7)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} f_2(\theta) \quad (2.8)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{(2\pi r)^{1/2}} f_3(\theta) \quad (2.9)$$

onde  $r$  é a distância radial a partir da extremidade da fissura e os termos  $f_i(\theta)$  são funções apenas do ângulo polar  $\theta$  (Fig. 2.6). Pode-se notar que o campo de tensões possui uma singularidade na extremidade da fissura, onde  $r$  tende para zero. Os parâmetros  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$  (de Kies, um dos colaboradores de Irwin) são conhecidos por fatores de intensidade de tensão correspondentes aos três modos de fratura e caracterizam o campo de tensões na extremidade da mesma.

De posse destes parâmetros, a propagação da fissura pode, então ser monitorada através da comparação dos mesmos com os valores críticos  $K_c$  para estado plano de tensão e  $K_{IC}$  para estado plano de deformação. As quantidades  $K_c$  e  $K_{IC}$ , denominadas tenacidade à fratura, são determinadas experimentalmente e consideradas propriedades do material. Valores típicos de tais grandezas para diversos tipos de materiais podem ser encontradas em May (1968).

Os fatores de intensidade de tensão variam com o comprimento da fissura, com a geometria do corpo e com a distribuição e inten-

sidade do carregamento. Um considerável volume de trabalho relacionado à determinação experimental de fatores K para problema específicos tem sido constantemente publicado, como, por exemplo, os trabalhos de Sih (1973), Rooke e Cartwright (1976) e Murakami (1987).

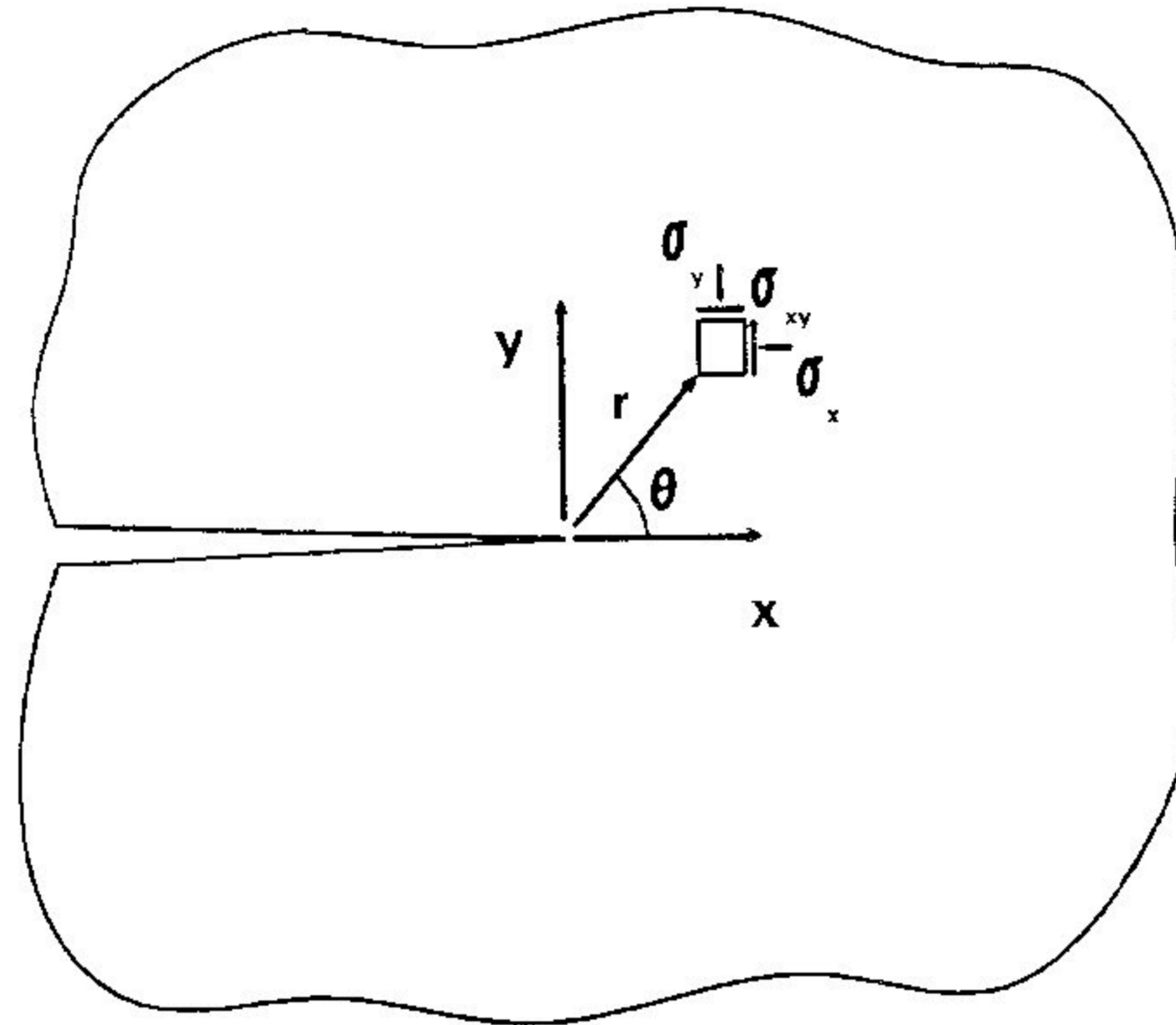


Figura 2.6 - Eixos de coordenadas para uma fissura plana

Baseado nas informações dadas pelas Eqs. (2.7) a (2.9), pode-se deduzir que os fatores de intensidade de tensão estão relacionados com a taxa de decréscimo da energia potencial através das equações :

$$G_I = \frac{\kappa + 1}{8\mu} K_I^2 \quad (2.10)$$

$$G_{II} = \frac{\kappa + 1}{8\mu} K_{II}^2 \quad (2.11)$$

$$G_{III} = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (2.12)$$

com :

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{para estado plano de tensão} \\ 3 - 4\nu & \text{para estado plano de deformação} \end{cases} \quad (2.13)$$

onde  $\mu$  é o módulo de elasticidade transversal, dado por :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.14)$$

Isto leva as Eqs. (2.10) a (2.12) a se reduzirem a :

$$G_I = \frac{\kappa'}{E} K_I^2 \quad (2.15)$$

$$G_{II} = \frac{\kappa'}{E} K_{II}^2 \quad (2.16)$$

$$G_{III} = \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.17)$$

com :

$$\kappa' = \begin{cases} 1 & \text{para estado plano de tensão} \\ 1 - \nu^2 & \text{para estado plano de deformação} \end{cases} \quad (2.18)$$

### 2.2.3. Integral J independente do caminho

Em 1968, Rice (1968) introduziu uma integral de linha independente do caminho, a integral J, que ficou conhecida por seu nome, apesar de concepções similares terem sido independentemente apresentadas por Sanders (1960), Eshelby (1969) e Cherepanov (1969). Tal integral permitiu uma análise aproximada do campo de concentração de tensões e deformações próximo à extremidade da fissura, em problemas bidimensionais, na presença de deformação plástica. A forma da integral J é dada por :

$$J = \int_{\Gamma} [ W dy - t \cdot \frac{\partial u}{\partial x} ds ] \quad (2.19)$$

- onde:  $x, y$  - coordenadas retangulares normais à frente de propagação da fissura (Fig. 2.7) ;
- $\Gamma$  - curva contornando a extremidade da fissura ;
- $ds$  - incremento ao longo do contorno  $\Gamma$  ;
- $t$  - vetor de tensões definido de acordo com a normal externa ao longo de  $\Gamma$  ;
- $u$  - vetor de deslocamentos ;
- $W$  - densidade de energia de deformação dada pela relação :

$$W = W(x, y) = W(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon \quad (2.20)$$

Para o caso de um contorno fechado, Rice demonstrou que esta integral de linha é idêntica a zero e, para o caso de qualquer contorno iniciando e terminando nas faces superior e inferior da fissura, tal integral é constante, daí a terminologia "independente do caminho".

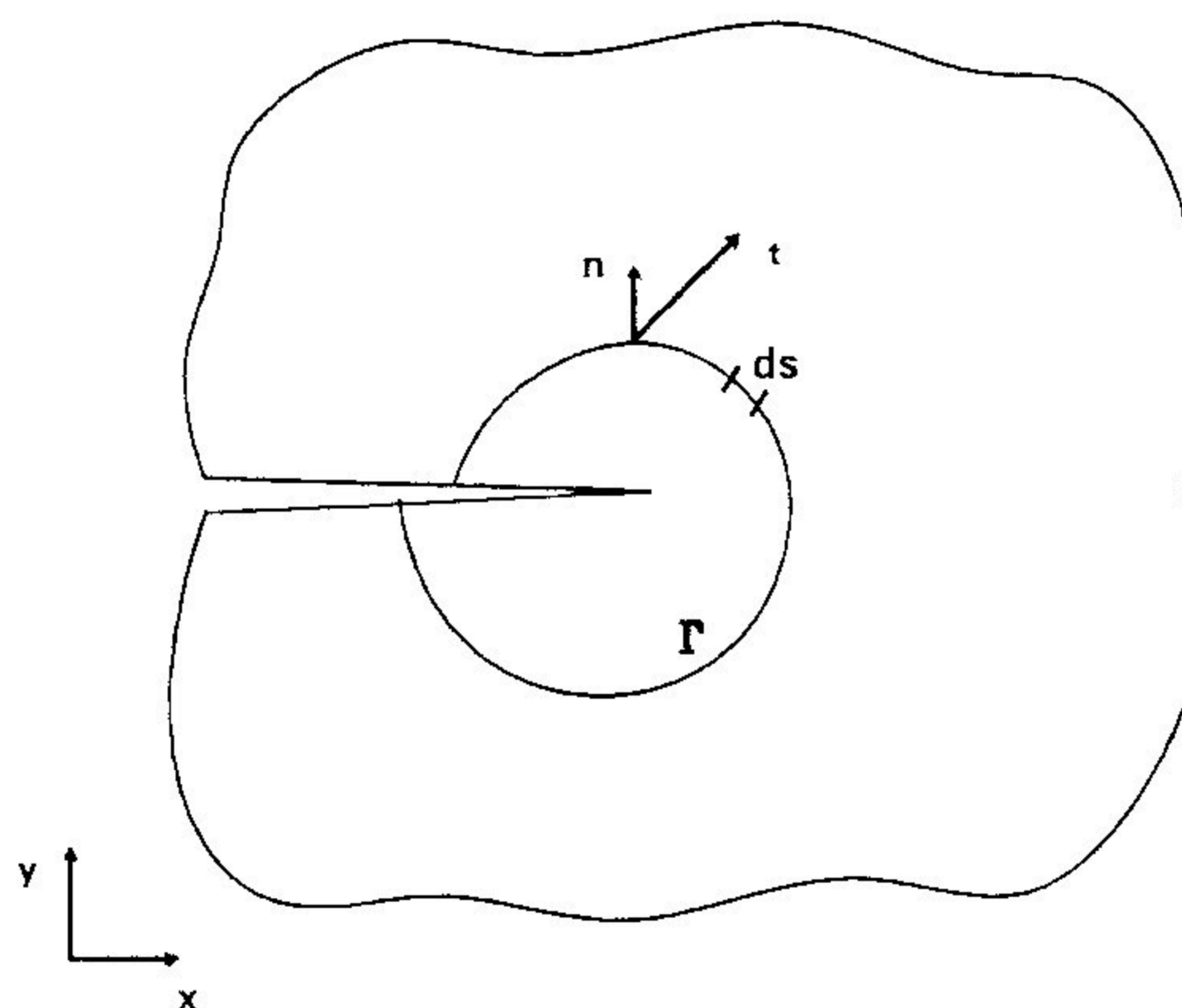


Figura 2.7 - Caminho para avaliação da integral J

Esta integral é válida também para materiais elásticos não lineares e é de grande importância para análise elasto-plástica, quando os fatores de intensidade de tensão perdem seu significado.

Para problemas de fratura elástica linear é possível de-

monstrar que, para cada modo de fratura particular :

$$G = J \quad (2.21)$$

donde, usando a Eq. (2.4), conclui-se que a integral  $J$  nada mais é do que a taxa de decréscimo da energia potencial armazenada no corpo, a partir de agora designada por  $\Pi$ , ou seja :

$$J = - \frac{\partial \Pi}{\partial a} \quad (2.22)$$

Dessa maneira, a integral  $J$  pode ser relacionada aos fatores de intensidade de tensão através das Eqs. (2.15) a (2.17) para os três modos de fratura. Este fato, associado à propriedade de independência do caminho da mencionada integral, permite a determinação de fatores de intensidade de tensão para um determinado problema de fratura mediante apenas uma análise do equilíbrio para o problema em questão seguida pela avaliação de tal integral em um contorno suficientemente afastado da região da extremidade da fissura, onde se produzem singularidades. Aí reside a grande vantagem na utilização da integral  $J$  na análise de problemas de fratura.

A derivação da integral  $J$  a partir de uma formulação variacional incluindo carregamento no domínio, bem como a demonstração das propriedades da mesma, são objeto do Capítulo 4.

### 2.3. Validade da teoria

Conforme apresentado nos itens anteriores, para um sólido elástico linear fissurado submetido a um sistema de forças, o campo singular na extremidade da fissura é representado pelos fatores de intensidade de tensão. Devido à elevada ordem de grandeza das tensões nesta vizinhança, ocorre deformação plástica do material e o campo na extremidade da fissura deixa de ser linear impossibilitando a utilização desta solução. Portanto, o uso da mecânica da fratura elástica linear somente é válido quando a plastificação que ocorre próxima à extremidade da fissura for limitada a uma pequena região, o que caracteriza seu emprego à



materiais frágeis. Para o caso de ocorrer uma plastificação moderada nesta região, conhecida por plastificação em pequena escala (small-scale yielding), resultados aceitáveis podem ser obtidos através da mecânica da fratura elástica linear, porém introduzindo correções no comprimento da fissura (Larsson, 1985).

## CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO VARIACIONAL E LEIS DE CONSERVAÇÃO NA ELASTOSTÁTICA  
BIDIMENSIONAL3.1. Formulação variacional do equilíbrio

Seja uma lâmina plana de espessura constante e material elástico, representada pela região bidimensional  $\Omega$  conforme indicado na Fig. 3.1, submetida a um sistema de cargas autoequilibradas  $\mathbf{a}$  no domínio  $\Omega$  e  $\mathbf{b}$  em seu contorno  $\partial\Omega$ , de normal  $\mathbf{n}$ .

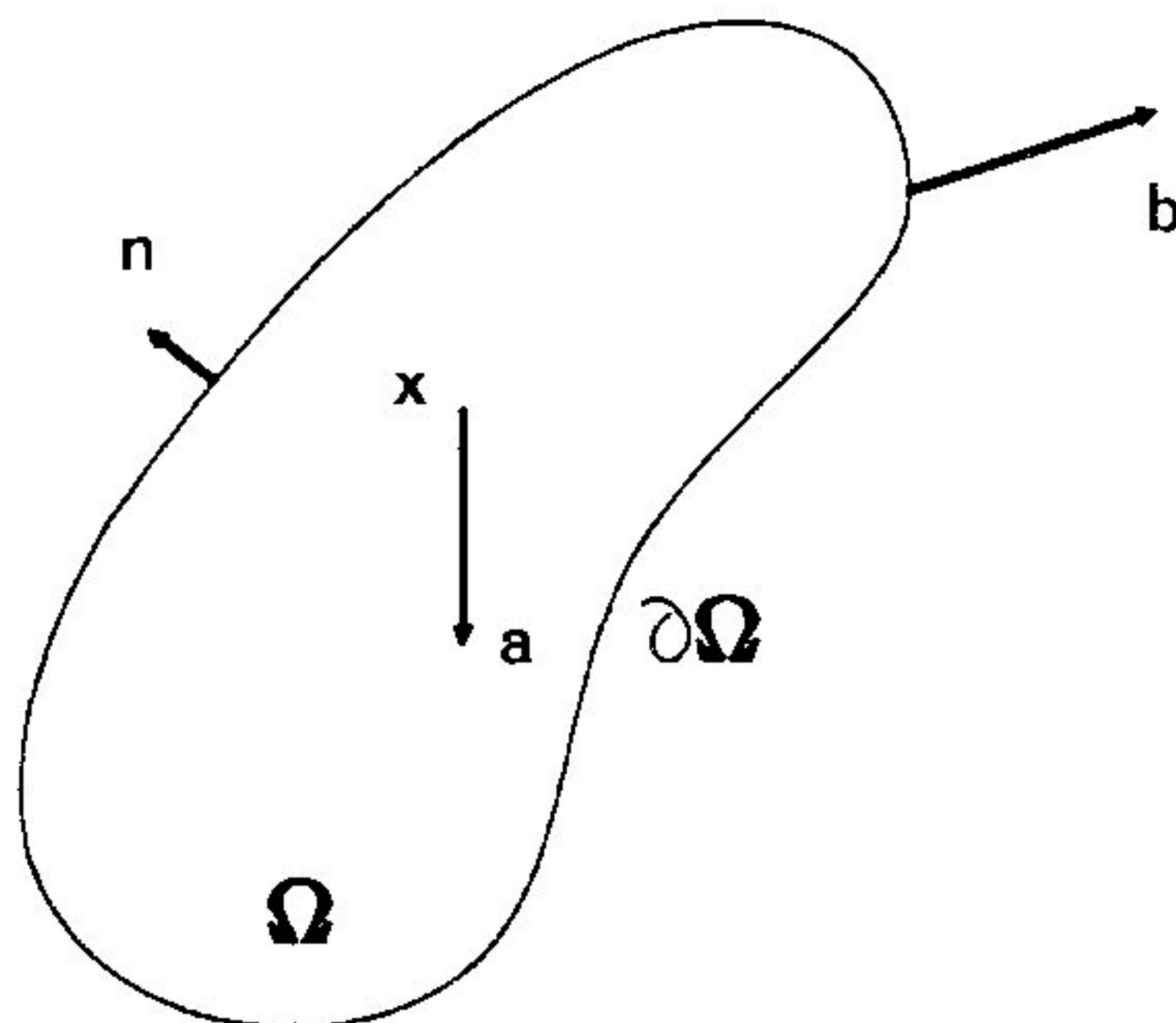


Figura 3.1 - Domínio submetido a carregamento genérico

Quanto ao comportamento do material, admite-se que exista uma função potencial  $\phi$  a partir da qual pode-se obter a relação constitutiva entre as tensões  $\mathbf{T}$  e deformações  $\mathbf{E}$ .

O problema consiste em obter o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  que satisfaça as relações :

$$\text{a) cinemática : } \mathbf{E} = (\nabla \mathbf{u})^S = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (3.1)$$

$(\nabla \mathbf{u})^S$  parte simétrica do tensor gradiente do deslocamento.

$$\text{b) constitutivas : } \mathbf{T} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}} = \phi_{\mathbf{E}} \quad (3.2)$$

$$\phi = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} = \mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{\lambda}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{I})^2 \quad (3.3)$$

$\mu$ ,  $\lambda$  constantes de Lamé,  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{I}$ , produto escalar dos tensores deformação e identidade no plano.

$$\text{c) equilíbrio : } \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{a} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.4)$$

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{b} \quad \text{em } \partial \Omega \quad (3.5)$$

Designando por  $\nu$  o espaço vetorial associado ao plano que contém  $\Omega$  e por  $\text{Sim.}$  o espaço de tensores simétricos do plano, tem-se :

$$\mathbf{u} : \mathbf{x} \in \Omega \longrightarrow \nu \quad (3.6)$$

$$\phi : \mathbf{E} \in \text{Sim.} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{T} \in \text{Sim.} \quad (3.8)$$

Para resolver o problema proposto variacionalmente introduz-se os funcionais energia de deformação  $U$  e trabalho das cargas externas  $V$ , funções do campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  :

$$U(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \phi \, d\Omega \quad (3.9)$$

$$V(\mathbf{u}) = \int_{\partial \Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\partial \Omega + \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \quad (3.10)$$

Considerando que a energia potencial  $\Pi$  armazenada no domínio  $\Omega$  é dada pela relação :

$$\Pi(\mathbf{u}) = U(\mathbf{u}) - V(\mathbf{u}) \quad (3.11)$$

o funcional da energia potencial pode ser expresso por :

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \quad ; \quad \mathbf{u} \in \text{Kin.} \mathbf{u} \quad (3.12)$$

onde  $\text{Kin.} \mathbf{u}$  é o espaço das funções admissíveis do funcional  $\Pi$ .

A solução do problema é dada pela condição de nulidade da primeira variação do funcional da energia potencial que estabelece o equilíbrio de T com o sistema de cargas  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  (Gelfand e Fomin, 1963), ou seja :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \delta\phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \text{Var.} \mathbf{u} \quad (3.13)$$

onde  $\text{Var.} \mathbf{u}$  representa o espaço das variações admissíveis de  $\mathbf{u}$  suficientemente regulares e que satisfaçam as condições de contorno, neste caso coincidente com  $\text{Kin.} \mathbf{u}$ . A relação  $\delta\Pi = 0$  é denominada condição de equilíbrio, uma vez que a partir dela e admitindo a continuidade necessária para que as derivadas tenham sentido, é possível se chegar nas expressões de equilíbrio local, conforme é feito a seguir.

Partindo da Eq. (3.13) e levando em conta a relação :

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}} \delta\mathbf{E} \quad (3.14)$$

chega-se na seguinte expressão :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{E}} \delta\mathbf{E} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega = 0 \quad (3.15)$$

Considerando que a relação cinemática dada pela Eq. (3.1) permite que se escreva, intercambiando as operações variação e gradiente :

$$\delta\mathbf{E} = (\nabla\delta\mathbf{u})^S = \frac{1}{2} (\nabla\delta\mathbf{u} + \nabla\delta\mathbf{u}^T) \quad (3.16)$$

e utilizando a relação constitutiva dada pela Eq.(3.2), a Eq.(3.15) pode ser reescrita como :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \left[ \frac{1}{2} (\nabla\delta\mathbf{u} + \nabla\delta\mathbf{u}^T) \right] d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (3.17)$$

Uma vez garantido que o tensor de tensões  $\mathbf{T}$  é simétrico, Eq.(3.8), é possível estabelecer a relação tensorial :

$$\mathbf{T} \cdot \left[ \frac{1}{2} (\nabla\delta\mathbf{u} + \nabla\delta\mathbf{u}^T) \right] = \mathbf{T} \cdot (\nabla\delta\mathbf{u})^S = \mathbf{T} \cdot (\nabla\delta\mathbf{u}) \quad (3.18)$$

e a Eq.(3.17) passa a :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot (\nabla\delta\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (3.19)$$

Porém, a partir do cálculo tensorial, pode-se escrever que :

$$\mathbf{T} \cdot (\nabla\delta\mathbf{u}) = \text{div}(\mathbf{T}\delta\mathbf{u}) - \text{div}\mathbf{T} \cdot \delta\mathbf{u} \quad (3.20)$$

Levando a Eq.(3.20) na Eq.(3.19) obtém-se :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{T} \delta\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \text{div}\mathbf{T} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} d\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega = 0 \quad (3.21)$$

Utilizando o teorema da divergência resulta :

$$\delta\Pi = - \int_{\Omega} (\text{div}\mathbf{T} + \mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T} \mathbf{n} - \mathbf{b}) \cdot \delta\mathbf{u} d\partial\Omega = 0 \quad (3.22)$$

Como a Eq.(3.22) deve ser satisfeita para qualquer  $\delta\mathbf{u}$ , tem-se que:

$$\text{div} \mathbf{T} + \mathbf{a} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.23)$$

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{b} \quad \text{em } \partial\Omega \quad (3.24)$$

Desta forma chegou-se às relações de equilíbrio local dadas pelas Eqs. (3.4) e (3.5), a partir de uma formulação variacional.

### 3.2. Leis de conservação

#### 3.2.1. Considerando apenas o carregamento no contorno

Ao efetuar a variação do funcional de energia para estudar o equilíbrio da lâmina, admitiu-se que o domínio  $\Omega$  estava fixo, o que permitiu introduzir a operação variação dentro do símbolo integral variando diretamente os correspondentes integrandos, Eq. (3.13). A seguir é feita a análise da variação da energia potencial armazenada na lâmina num contexto mais geral, admitindo que o domínio  $\Omega$  varie.

Através de uma translação conhecida  $\delta \mathbf{x}$ , cada ponto  $\mathbf{x}$  de  $\Omega$  passa a uma nova posição  $\mathbf{x}^*$  e o domínio  $\Omega$  de contorno  $\partial\Omega$ , a um novo domínio  $\Omega^*$  de contorno  $\partial\Omega^*$ , conforme mostrado na Fig. 3.2.

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} \quad (3.25)$$

$$\Omega \longrightarrow \Omega^* = \Omega + \delta \Omega \quad (3.26)$$

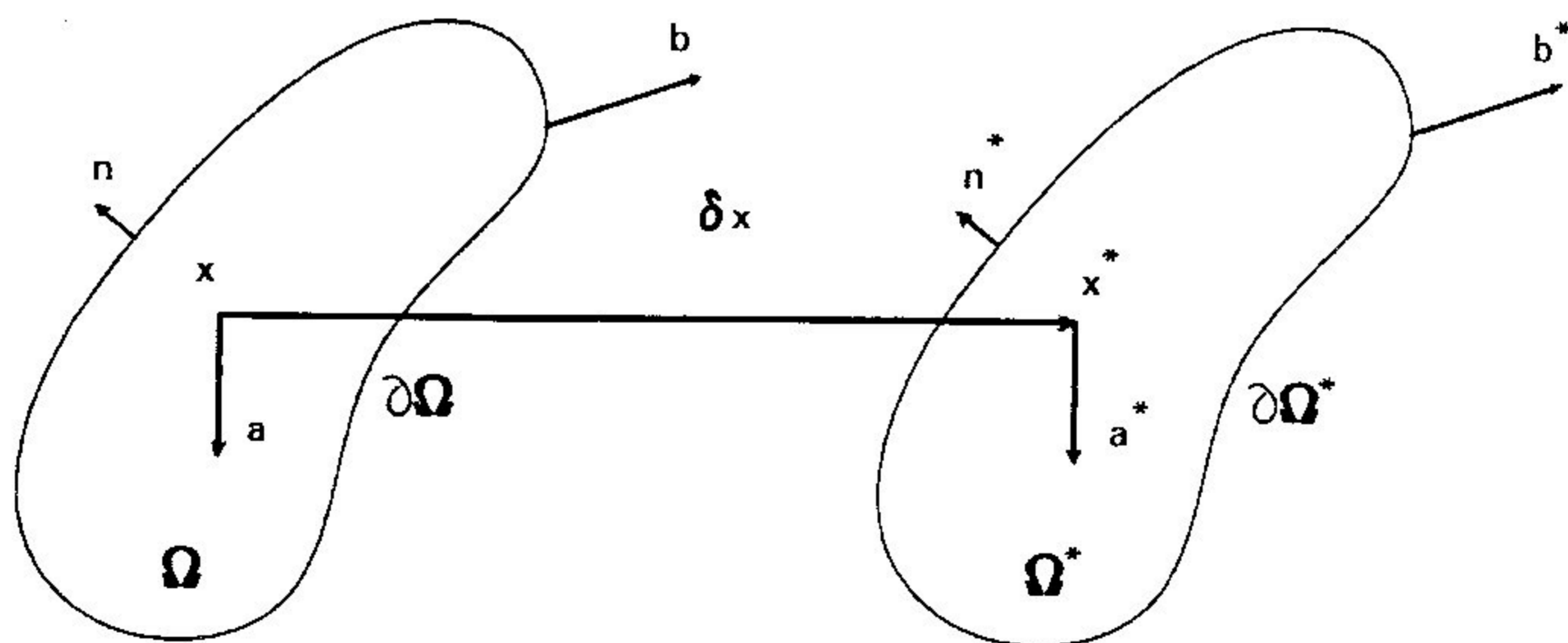


Figura 3.2 - Translação do domínio

Admite-se, dessa forma, também conhecida a maneira como se tranforma o sistema de cargas  $\mathbf{b}$  quando se passa de  $\Omega$  a  $\Omega^*$  :

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b} \quad (3.27)$$

Considerando nulo o carregamento no domínio, o funcional de energia potencial pode ser reescrito como :

$$\Pi(\mathbf{u}_\Omega, \Omega) = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{u}_\Omega, \Omega) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_\Omega d\partial\Omega \quad (3.28)$$

enfatizando, nesse caso, que  $\Pi$  é função implícita e explícita do domínio  $\Omega$  e que, fixando  $\Omega$ , ter-se-á o correspondente funcional  $\Pi$  para esse mesmo domínio, conforme Eq.(3.12).

De maneira similar pode-se escrever o funcional de energia potencial para o domínio transformado  $\Omega^*$ , considerando que a função vetorial deslocamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  em  $\Omega$  passa a ser uma nova função  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*)$  em  $\Omega^*$ , como :

$$\Pi^* = \int_{\Omega^*} \phi^* d\Omega^* - \int_{\partial\Omega^*} \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{u}^* d\partial\Omega^* \quad (3.29)$$

e a variação total de  $\Pi$ ,  $\Pi^* - \Pi$ , como :

$$\Pi^* - \Pi = \int_{\Omega^*} \phi^* d\Omega^* - \int_{\Omega} \phi d\Omega - \left[ \int_{\partial\Omega^*} \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{u}^* d\partial\Omega^* - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\partial\Omega \right] \quad (3.30)$$

Supondo o vetor  $\delta\mathbf{x}$  constante, ou seja, que a transformação do domínio  $\Omega$  em  $\Omega^*$  seja um movimento de corpo rígido, conforme mostrado na Fig. 3.2 :

$$\delta\mathbf{x} \equiv \text{constante} \quad (3.31)$$

e admitindo que :

$$\delta\mathbf{b} = 0 \quad (3.32)$$

resulta em :

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{b} \quad (3.33)$$

Assim reescreve-se a Eq. (3.30) na seguinte forma :

$$\Pi^* - \Pi = \int_{\Omega^*} \phi^* d\Omega^* - \int_{\Omega} \phi d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) d\partial\Omega \quad (3.34)$$

Considerando que a diferença  $(\mathbf{u}^* - \mathbf{u})$  é designada pela variação total (Haug et al, 1987), ilustrada na Fig. 3.3 :

$$(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u} \quad (3.35)$$

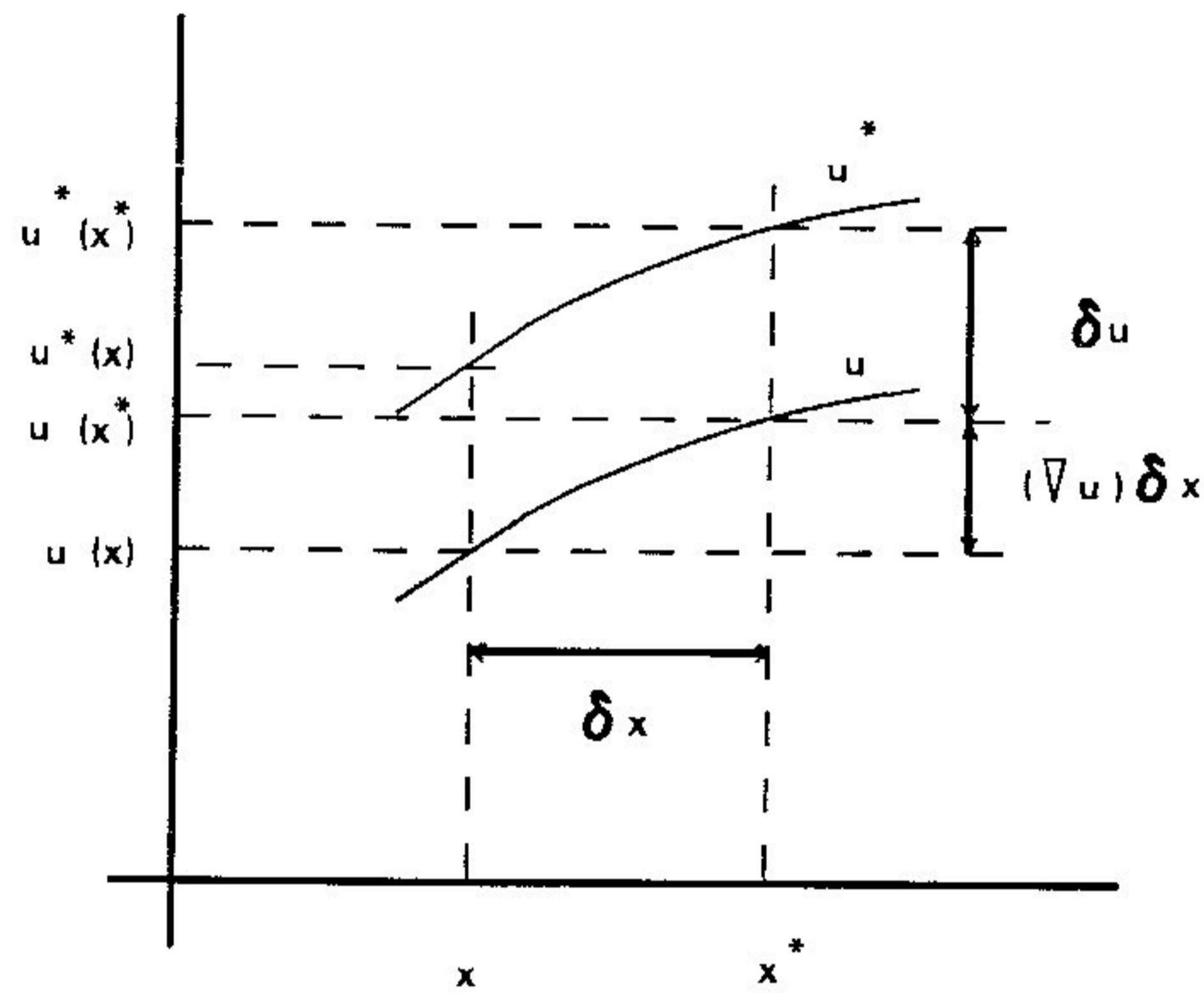


Figura 3.3 - Variação total de  $\mathbf{u}$

e que o mesmo ocorre para o funcional da energia de deformação (Haug et al, 1987), conforme Figs. 3.4 e 3.5:

$$\int_{\Omega^*} \phi^* d\Omega^* - \int_{\Omega} \phi d\Omega = \int_{\Omega} \delta\phi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \phi \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega \quad (3.36)$$

segue-se que a Eq. (3.34) passa a ter a seguinte forma :

$$\Pi^* - \Pi = \int_{\Omega} \delta\phi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \phi \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot [(\nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}] d\partial\Omega \quad (3.37)$$

$$\Pi^* - \Pi = \int_{\Omega} \delta\phi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \phi \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot [(\nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{x}] d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\partial\Omega \quad (3.38)$$



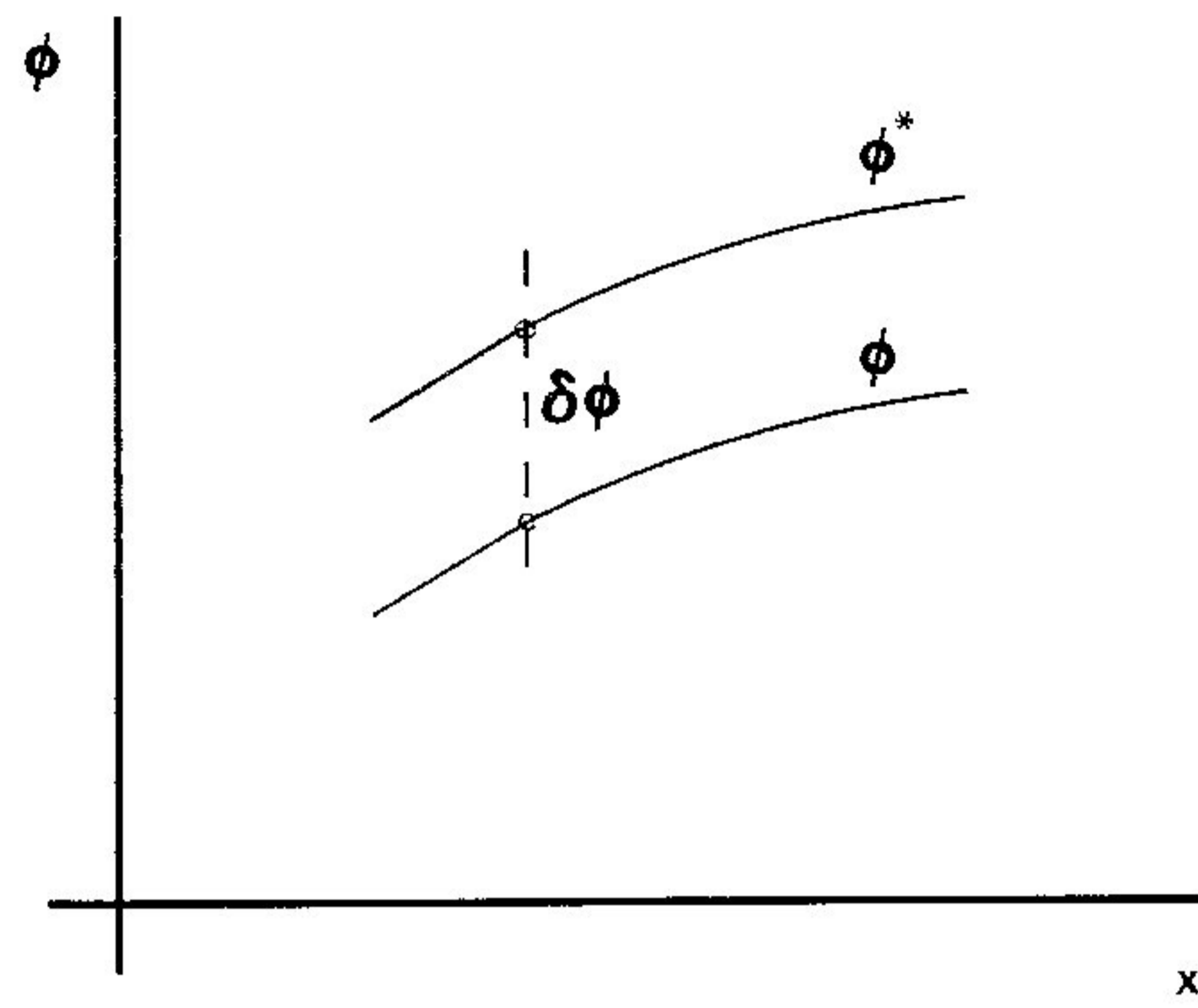


Figura 3.4 - Parcela da integral de  $\delta\phi \, d\Omega$  no domínio  $\Omega$

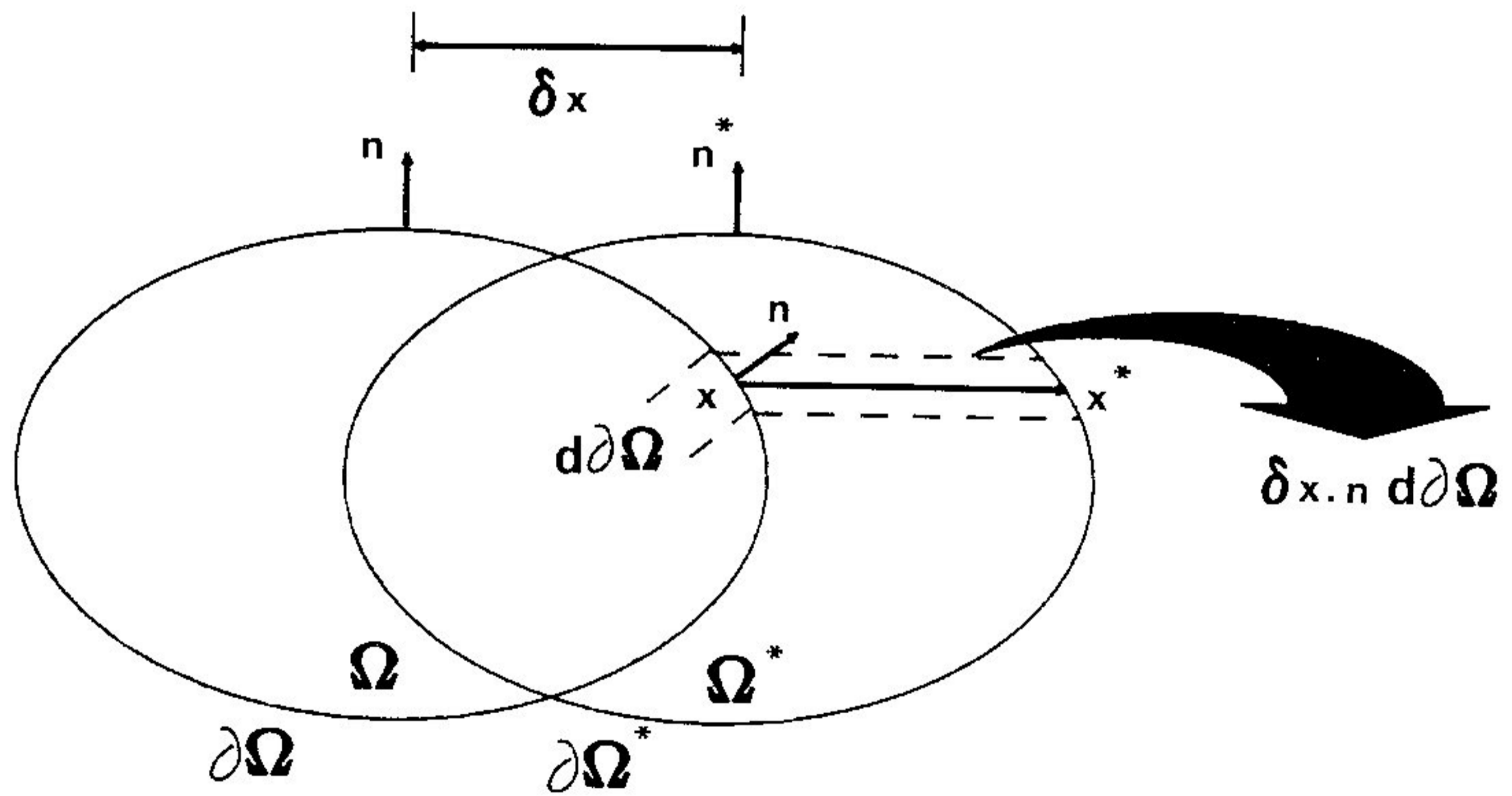


Figura 3.5 - Parcela da integral de  $\phi \, \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega$  no contorno  $\partial\Omega$

Porém, da Eq.(3.13), considerando nulo o carregamento no domínio :

$$\int_{\Omega} \delta\phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\partial\Omega = \delta\Pi \quad (3.39)$$

e a Eq.(3.38) passa, então, a :

$$\Pi^* - \Pi = \delta\Pi + \int_{\partial\Omega} \{ \phi \, \delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{b} \cdot [(\nabla\mathbf{u})\delta\mathbf{x}] \} \, d\partial\Omega \quad (3.40)$$

Introduzindo as condições de equilíbrio ( $\delta\Pi = 0$  e, no contorno  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{b}$ ) a variação total  $\Pi^* - \Pi$  se reduz a :

$$\Pi^* - \Pi = \int_{\partial\Omega} \{ \phi \, \delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{T} \mathbf{n}) \cdot [(\nabla\mathbf{u}) \delta\mathbf{x}] \} \, d\partial\Omega \quad (3.41)$$

Como  $\delta\mathbf{x}$  não depende de  $\mathbf{x}$ , Eq.(3.31),  $\Pi^* - \Pi$  pode ser reescrito como:

$$\Pi^* - \Pi = \delta\mathbf{x} \cdot \int_{\partial\Omega} [ \phi \mathbf{I} - (\nabla\mathbf{u})^T \mathbf{T} ] \mathbf{n} \, d\partial\Omega \quad (3.42)$$

Finalmente :

$$\Pi^* - \Pi = \delta\mathbf{x} \cdot \int_{\partial\Omega} \Sigma \mathbf{n} \, d\partial\Omega \quad (3.43)$$

onde o tensor :

$$\Sigma = \phi \mathbf{I} - (\nabla\mathbf{u})^T \mathbf{T} \quad (3.44)$$

é conhecido na literatura como tensor momento-energia (Eshelby, 1975).

Como  $\delta\mathbf{x}$  é constante, o que significa uma translação rígida de  $\Omega$  para  $\Omega^*$ , e as cargas  $\mathbf{b}$  acompanham a translação ( $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}$ ), se espera que a energia potencial se conserve, ou seja :

$$\Pi^* - \Pi = 0 \quad \therefore \quad \Pi^* = \Pi \quad (3.45)$$

Portanto reescreve-se a Eq. (3.43) como :

$$\Pi^* - \Pi = \delta \mathbf{x} \cdot \int_{\partial \Omega} \Sigma \mathbf{n} \, d\partial \Omega = 0 \quad (3.46)$$

Utilizando o teorema da divergência :

$$\int_{\partial \Omega} \Sigma \mathbf{n} \, d\partial \Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} \Sigma \, d\Omega = 0 \quad (3.47)$$

donde vem que :

$$\operatorname{div} \Sigma = 0 \quad (3.48)$$

As relações expressas pelas Eqs. (3.47) e (3.48) somente são válidas no caso de não haver singularidades no domínio  $\Omega$ . Conclui-se então que a invariância da energia potencial armazenada no domínio  $\Omega$  livre de carregamento no domínio e onde não se verificam singularidades, relacionada a uma translação constante e arbitrária  $\delta \mathbf{x}$ , implica na nulidade do fluxo do tensor momento-energia no seu contorno fechado  $\partial \Omega$ .

No Apêndice A, item 1, demonstra-se que o equilíbrio é satisfeito localmente a partir da Eq. (3.48).

As Eqs. (3.47) e (3.48) permitem ainda que se façam algumas considerações a respeito do tensor momento-energia  $\Sigma$ . Na verdade o campo tensorial representado por este tensor é um campo solenoidal donde se deduz que seu fluxo ao longo de qualquer contorno fechado resulta nulo. Mais ainda, caso tal contorno envolva alguma descontinuidade ou defeito no contínuo, o fluxo de  $\Sigma$  ao longo de tal contorno resultará numa força associada a esse defeito (Irwin, 1957; Eshelby, 1975; Knowles e Sternberg, 1972).

### 3.2.2. Considerando carregamento no contorno e no domínio

Reformulando o problema anterior na presença de carregamento no domínio implica no estabelecimento de novas relações para os funcionais de energia potencial :

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \quad (3.49)$$

$$\Pi^*(\mathbf{u}^*) = \int_{\Omega^*} \phi^* \, d\Omega^* - \int_{\partial\Omega^*} \mathbf{b}^* \cdot \mathbf{u}^* \, d\partial\Omega^* - \int_{\Omega^*} \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{u}^* \, d\Omega^* \quad (3.50)$$

onde  $\mathbf{a}$  é o vetor que representa o carregamento no domínio  $\Omega$ , função contínua e derivável do vetor posição  $\mathbf{x}$ .

Para se determinar a variação total de  $\Pi$ ,  $\Pi^* - \Pi$ , falta estudar o termo :

$$- \left[ \int_{\Omega^*} \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{u}^* \, d\Omega^* - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \right]$$

Analogamente à Eq. (3.36) pode-se escrever :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{u}^* \, d\Omega^* - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \\ \int_{\Omega} [(\mathbf{a}^* - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \delta\mathbf{x}] \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.51)$$

Porém admitindo que o carregamento  $\mathbf{a}$  no domínio seja contínuo e derivável e sabendo que, a exemplo da Eq. (3.27), ele se modifica segundo a relação :

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{a} + \delta\mathbf{a} \quad (3.52)$$

e recordando a Eq. (3.35) se segue que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{u}^* \, d\Omega^* - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = \\ \int_{\Omega} [\delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{a} \cdot (\nabla\mathbf{u})\delta\mathbf{x} + \mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{u} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \delta\mathbf{x}] \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.53)$$

Somando-se e subtraindo-se o termo  $\mathbf{u} \cdot (\nabla\mathbf{a})\delta\mathbf{x}$  no integrando e levando em consideração a relação tensorial :

$$\mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{x} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{a}) \delta \mathbf{x} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \delta \mathbf{x} =$$

$$(\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{x} + (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{x} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \delta \mathbf{x} =$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{x} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \delta \mathbf{x} = \operatorname{div} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \delta \mathbf{x}] \quad (3.54)$$

a Eq. (3.53) se reduz, após aplicar o teorema da divergência, a :

$$\int_{\Omega^*} \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{u}^* \, d\Omega^* - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} \{ \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{a}) \delta \mathbf{x} + \operatorname{div} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \delta \mathbf{x}] \} \, d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} [ \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{x} ] \, d\Omega + \int_{\partial \Omega} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, d\partial \Omega \quad (3.55)$$

A variação total da energia potencial é então dada pela subtração da Eq. (3.55) da Eq. (3.38), donde se escreve :

$$\begin{aligned} \Pi^* - \Pi &= \int_{\Omega} \delta \phi \, d\Omega + \int_{\partial \Omega} \phi \, \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, d\partial \Omega \\ &\quad - \int_{\partial \Omega} \mathbf{b} \cdot [(\nabla \mathbf{u}) \delta \mathbf{x}] \, d\partial \Omega - \int_{\partial \Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\partial \Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \delta \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{x} \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\partial \Omega} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} \, d\partial \Omega \quad (3.56) \end{aligned}$$

Porém, tem-se que :

$$\int_{\Omega} \delta \phi \, d\Omega - \int_{\partial \Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\partial \Omega - \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega = \delta \Pi \quad (3.57)$$

Usando a Eq. (3.57), a Eq. (3.56) se reduz a :

$$\begin{aligned} \Pi^* - \Pi = \delta\Pi - \int_{\Omega} \delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla\mathbf{a})^T \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{x} \, d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega} \{[\phi - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})] \delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{b} \cdot [(\nabla\mathbf{u})\delta\mathbf{x}] \} \, d\partial\Omega \end{aligned} \quad (3.58)$$

Se há uma translação rígida do domínio e das cargas aplicadas as Eqs.(3.31) e (3.32) se verificam. Admitindo, ainda, que :

$$\delta\mathbf{a} = 0 \quad (3.59)$$

e, introduzindo as condições de equilíbrio ( $\delta\Pi = 0$  e, no contorno  $\partial\Omega$ ,  $\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{b}$ ), é de se esperar que a energia potencial armazenada  $\Pi$  se conserve, ou seja :

$$\Pi^* - \Pi = \left[ \int_{\Omega} (\nabla\mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \{[\phi - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})] \mathbf{I} - (\nabla\mathbf{u})^T \mathbf{T}\} \mathbf{n} \, d\partial\Omega \right] \cdot \delta\mathbf{x} = 0 \quad (3.60)$$

Lembrando que  $\delta\mathbf{x}$  foi considerado constante de direção arbitrária, vem :

$$\int_{\Omega} (\nabla\mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \{[\phi - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})] \mathbf{I} - (\nabla\mathbf{u})^T \mathbf{T}\} \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0 \quad (3.61)$$

relação que expressa a lei de conservação na presença de carregamento  $\mathbf{b}$  no contorno e  $\mathbf{a}$  no domínio. A Eq.(3.61) pode ser reescrita como :

$$\int_{\Omega} (\nabla\mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0 \quad (3.62)$$

onde, utilizando o mesmo conceito do item 3.2.1., foi designado por  $\bar{\Sigma}$  o tensor momento-energia equivalente ao caso onde também se verifica carregamento no domínio :

$$\bar{\Sigma} = [\phi - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})] \mathbf{I} - (\nabla\mathbf{u})^T \mathbf{T} \quad (3.63)$$

Se  $\mathbf{a} = \text{constante}$  tem-se que  $(\nabla\mathbf{a}) = 0$  e a Eq.(3.62) se reduz a :

$$\int_{\partial\Omega} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0 \quad (3.64)$$

Aplicando o teorema da divergência chega-se à lei de conservação para o caso onde se verifica carregamento constante no domínio:

$$\int_{\partial\Omega} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\partial\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{\Sigma} \, d\Omega = 0 \quad (3.65)$$

$$\operatorname{div} \bar{\Sigma} = 0 \quad (3.66)$$

No Apêndice A, item 2.1, demonstra-se que o equilíbrio é satisfeito localmente a partir da Eq.(3.66).

A relação representada pela Eq.(3.61) pode ser considerada como uma formulação alternativa àquela apresentada por Bakker (1985):

$$- \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} [\phi \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T}] \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0 \quad (3.67)$$

De fato, mediante uma simples integração por partes é possível se obter esta equivalência, conforme demonstrado no Apêndice B. Mas o mais importante é ressaltar aquilo que está por trás destas duas formulações. A expectativa é a de que a equação aqui apresentada (Eq.(3.61)) seja mais adequada ao tratamento numérico que será dado ao problema do que a de Bakker (Eq.(3.67)), pois nesta última aparece o termo singular  $\nabla \mathbf{u}$  na integral de domínio, ausente na primeira, o que sugere uma maior imprecisão numérica nos resultados. Em compensação a expressão de Bakker leva a uma impressão de maior facilidade na implementação computacional, uma vez que nela um número menor de termos estão envolvidos. Estas questões pretendem ser adequadamente tratadas ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

## CAPÍTULO 4

## DECRÉSCIMO DE ENERGIA POTENCIAL

4.1. Considerando apenas o carregamento de contorno

A seguir é analisada uma lâmina plana contendo uma fissura passante suposta reta e livre de tensões, conforme indicado na Fig. 4.1.

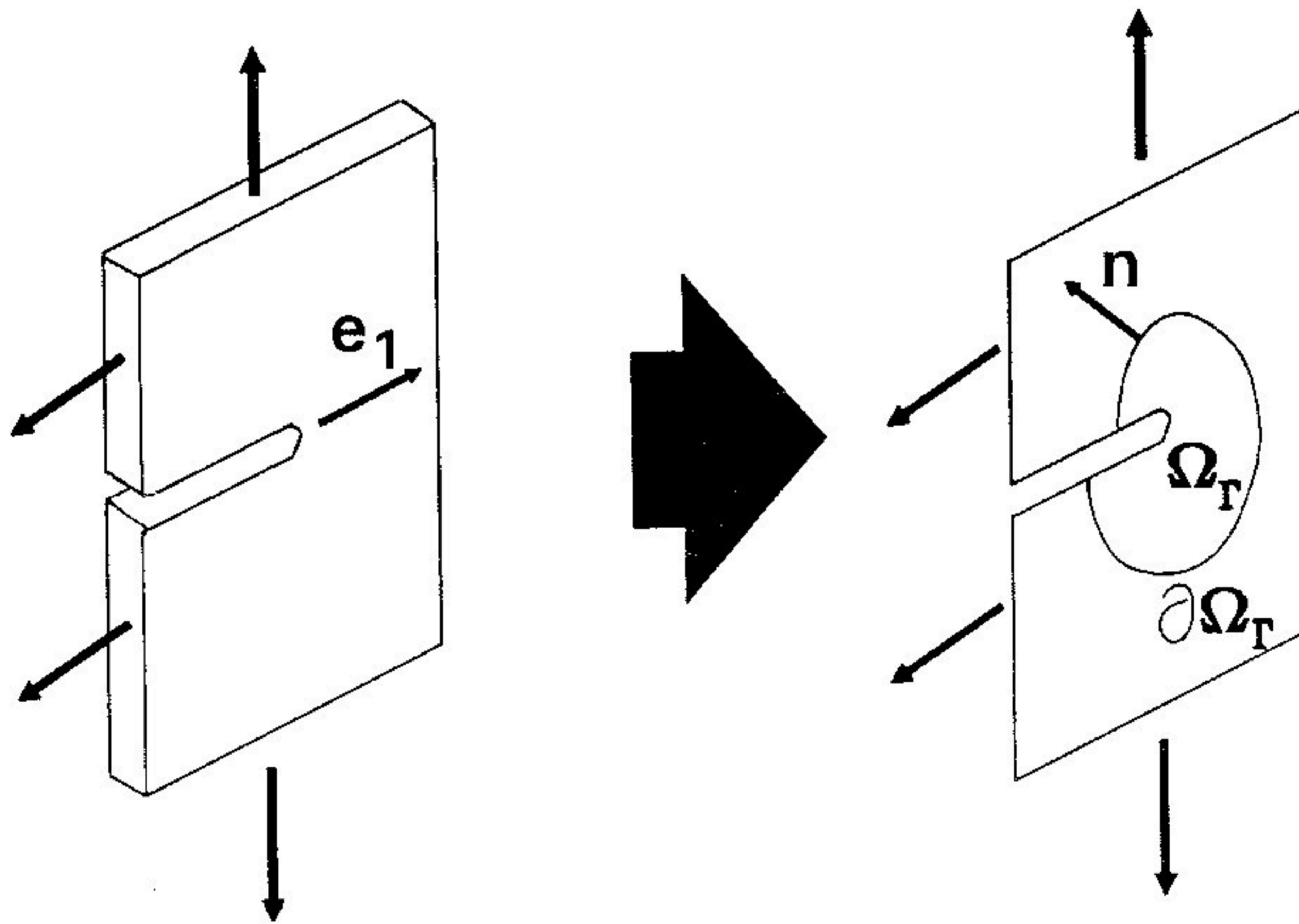


Figura 4.1 - Modelo de lâmina contendo uma fissura

Designa-se por  $\Omega_T$  o subdomínio de contorno  $\partial\Omega_T$  que foi decomposto na união de subcontornos  $\Gamma \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_v \cup \Gamma_-$ , onde  $\Gamma$  é uma curva envolvendo o extremo da fissura,  $\Gamma_+$  e  $\Gamma_-$  representam, respectivamente, a parte superior e inferior da fissura e  $\Gamma_v$  representa o vértice da mesma, conforme mostrado na Fig. 4.2.



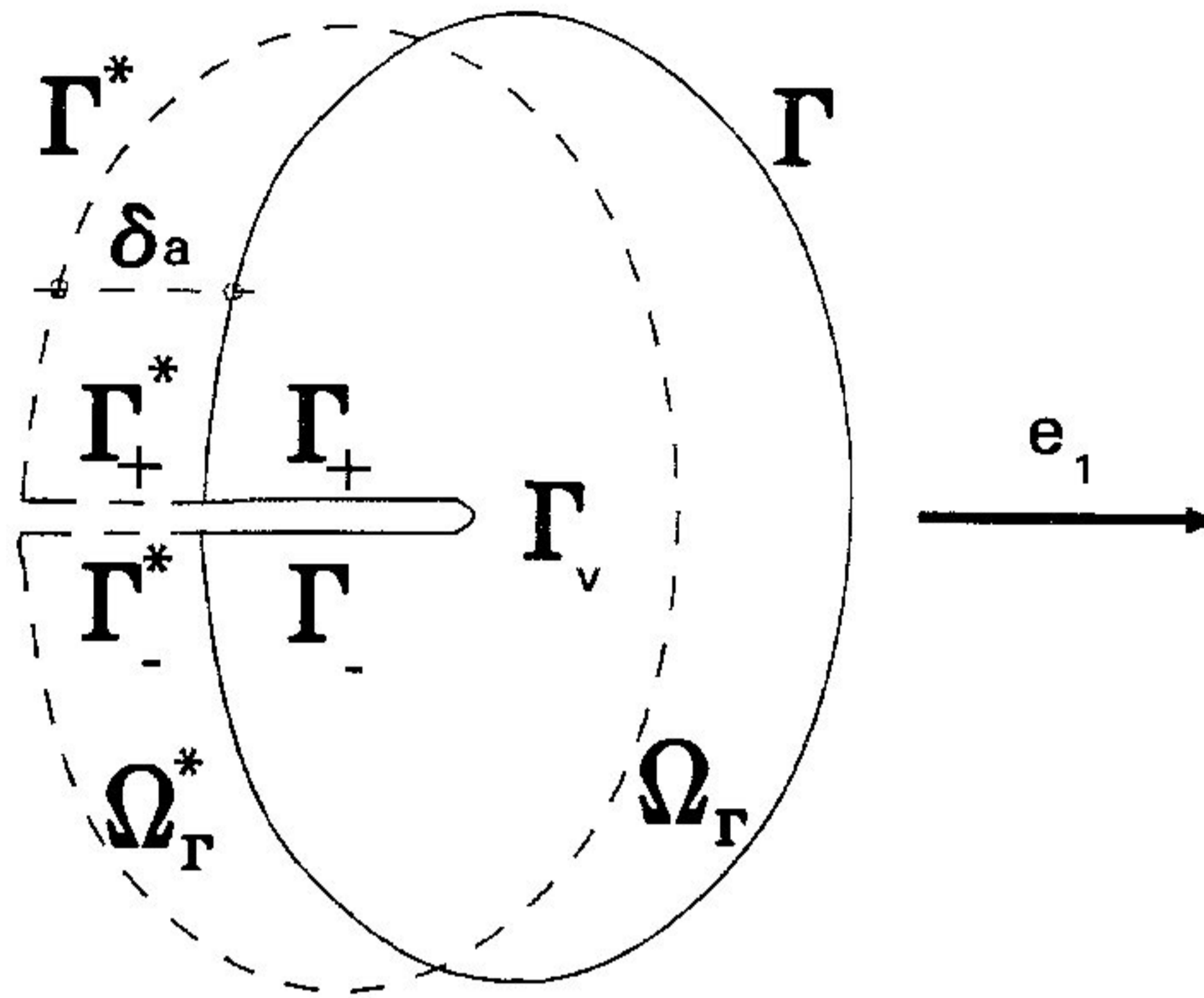


Figura 4.2 - Translação do domínio  $\Omega_{\Gamma}$

Admite-se que as únicas cargas exteriores são aplicadas no contorno  $\Gamma$ . Determinado o estado de tensões da lâmina, substitui-se a parte exterior a  $\Omega_{\Gamma}$  pelo esforço  $\mathbf{t}$  que é transmitido ao longo de  $\Gamma$ .

Considerando que a variação total da energia potencial armazenada no domínio  $\Omega_{\Gamma}$  quando, mediante uma translação conhecida  $\delta\mathbf{x}$ , se passa a uma nova posição  $\Omega_{\Gamma}^*$  (Fig. 4.2) é da mesma forma que a da Eq. (3.46), deduzida no capítulo anterior, pode-se escrever que :

$$\Pi^* - \Pi = \delta\mathbf{x} \cdot \int_{\partial\Omega_{\Gamma}} \Sigma \mathbf{n} \, d\partial\Omega_{\Gamma} \quad (4.1)$$

Decompondo-se a integral do segundo membro da Eq. (4.1) no somatório de integrais :

$$\Pi^* - \Pi = \delta\mathbf{x} \cdot \int_{\Gamma} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma + \delta\mathbf{x} \cdot \int_{\Gamma_v} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma + \delta\mathbf{x} \cdot \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (4.2)$$

Porém, de acordo com a Fig. 4.2, a translação  $\delta\mathbf{x}$  assume os seguintes valores no contorno :

$$\delta \mathbf{x} = -\delta a \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (4.3)$$

$$\delta \mathbf{x} = 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_v \quad (4.4)$$

$$-\delta a \mathbf{e}_1 \leq \delta \mathbf{x} \leq 0 \quad \mathbf{x} \in \Gamma_+ \cup \Gamma_- \quad (4.5)$$

e a Eq. (4.2) passa a :

$$\Pi^* - \Pi = -\delta a \left[ \int_{\Gamma} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma \right] \cdot \mathbf{e}_1 \quad (4.6)$$

Observa-se que a projeção do fluxo do tensor  $\Sigma$  na direção  $\mathbf{e}_1$  resulta nula nos contornos  $\Gamma_+$  e  $\Gamma_-$  que coincidem com a parte superior e inferior da fissura :

$$\left[ \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma \right] \cdot \mathbf{e}_1 = \left\{ \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} [\phi \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T}] \mathbf{n} \, d\Gamma \right\} \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \quad (4.7)$$

uma vez que a primeira parcela  $\phi \mathbf{I} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1$  se anula devido à ortogonalidade de  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{e}_1$  enquanto que na segunda parcela  $\mathbf{T} \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_1$ , admitiu-se que a fissura estava livre de tensões e que, portanto,  $\mathbf{T} = 0$  nos contornos  $\Gamma_+$  e  $\Gamma_-$ .

A divisão de ambos os membros da Eq. (4.6) por  $-\delta a$  resulta em :

$$-\frac{\Pi^* - \Pi}{\delta a} = \left[ \int_{\Gamma} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma \right] \cdot \mathbf{e}_1 = J \quad (4.8)$$

A expressão anterior permite concluir que o decréscimo da energia potencial  $\Pi^* - \Pi$  correspondente ao incremento  $\delta a$  da fissura é dado pela projeção do fluxo do tensor momento-energia ao longo do contorno  $\Gamma$  na direção  $\mathbf{e}_1$  de propagação da fissura.

Tal projeção de fluxo nada mais é do que a integral  $J$  independente do caminho introduzida por Rice (1968) e representa a força

concentrada no extremo da fissura correspondente ao incremento virtual  $\delta a$  da mesma.

No Apêndice C é mostrado que, partindo-se desta formulação, é possível obter-se a formulação para a integral J tal qual foi proposta por Rice. No Apêndice D, item 1, demonstra-se a independência do caminho da referida integral.

#### 4.2. Considerando carregamento no contorno e no domínio

Considera-se, agora, que a lâmina fissurada analisada no item anterior esteja também submetida a um carregamento genérico  $\mathbf{a}$  no domínio, o que leva a expressão para a variação da energia potencial a ter a forma, de acordo com a Eq. (3.60) :

$$\Pi^* - \Pi = \delta \mathbf{x} \cdot \left\{ \int_{\partial \Omega_{\Gamma}} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\partial \Omega_{\Gamma} + \int_{\Omega_{\Gamma}} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega_{\Gamma} \right\} \quad (4.9)$$

Levando em conta as Eqs. (4.3), (4.4) e (4.5) e as mesmas justificativas apresentadas no item anterior, e sabendo-se que (Fig. 4.2) :

$$\delta \mathbf{x} = -\delta a \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\Gamma} \quad (4.10)$$

pode-se reecrevar a Eq. (4.9) como :

$$\Pi^* - \Pi = -\delta a \left\{ \int_{\Gamma} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_{\Gamma}} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega_{\Gamma} \right\} \cdot \mathbf{e}_1 \quad (4.11)$$

A divisão de ambos os membros da Eq. (4.11) por  $-\delta a$  leva a:

$$\bar{J} = - \frac{\Pi^* - \Pi}{\delta a} = \left[ \int_{\Gamma} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_{\Gamma}} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega_{\Gamma} \right] \cdot \mathbf{e}_1 \quad (4.12)$$

onde representa-se por  $\bar{J}$  a grandeza equivalente à integral J para o caso onde se considera a inclusão de carregamento no domínio. Verifica-se

que  $\bar{J}$  difere de  $J$ , nesta formulação, de uma integral no domínio  $\Omega_\Gamma$  interior ao caminho  $\Gamma$ , além do tensor momento-energia  $\bar{\Sigma}$  diferir de  $\Sigma$  do termo  $-(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})$ , conforme Eqs. (3.44) e (3.63). Uma representação das contribuições das integrais de contorno e de domínio no valor de  $\bar{J}$  em função da distância  $R$  à ponta da fissura é ilustrada pela Fig. 4.3.

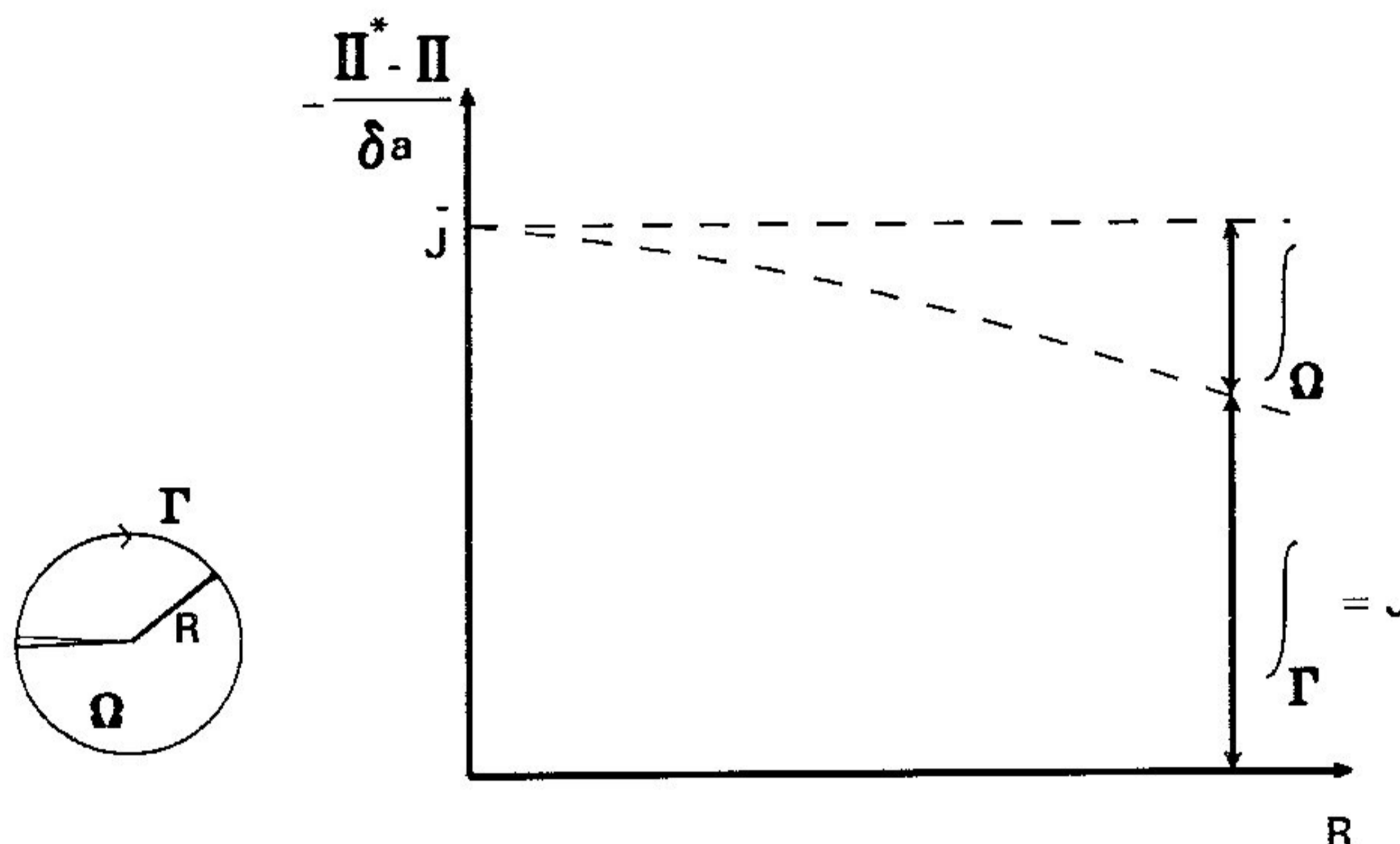


Figura 4.3 - Contribuições das integrais de contorno e de domínio no valor de  $\bar{J}$  em função da distância  $R$

Observa-se ainda que para carregamento constante no domínio tem-se que  $\nabla \mathbf{a} = 0$  o que leva a integral no domínio  $\Omega_\Gamma$  a se anular e, conseqüentemente, a independência do caminho para  $\bar{J}$  é verificada de forma trivial (Apêndice C, item 1), uma vez que a lei de conservação estabelecida pela Eq. (3.66) deve ser respeitada qualquer caminho fechado não envolvendo singularidades.

Para o caso de  $\nabla \mathbf{a}$  ser diferente de zero, a lei de conservação estabelece que o resultado da integral em um contorno fechado deve se igualar ao valor da integral no domínio com sinal trocado. No Apêndice C, item 2, é demonstrada a independência do caminho para  $\bar{J}$  quando o carregamento  $\mathbf{a}$  no domínio é variável.

Conforme comentado ao final do Capítulo 3, esta formulação

é alternativa àquela apresentada por Bakker (1985), cuja expressão para  $\bar{J}$  pode ser escrita como :

$$\bar{J} = - \frac{\Pi^* - \Pi}{\delta a} = \left[ \int_{\Gamma} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega_{\Gamma}} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} \, d\Omega_{\Gamma} \right] \cdot \mathbf{e}_1 \quad (4.13)$$

onde  $\Sigma$  é o tensor momento-energia tal qual proposto por Eshelby (1975) e dado pela Eq.(3.44). Isto leva à equivalência :

$$\left[ \int_{\Gamma} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_{\Gamma}} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega_{\Gamma} \right] \cdot \mathbf{e}_1 = \left[ \int_{\Gamma} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_{\Gamma}} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} \, d\Omega_{\Gamma} \right] \cdot \mathbf{e}_1 \quad (4.14)$$

ou ainda :

$$\left\{ \int_{\Gamma} [(\phi - \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \sigma] \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_{\Gamma}} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega_{\Gamma} \right\} \cdot \mathbf{e}_1 = \left\{ \int_{\Gamma} [\phi \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \sigma] \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega_{\Gamma}} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} \, d\Omega_{\Gamma} \right\} \cdot \mathbf{e}_1 \quad (4.15)$$

Espera-se que a formulação aqui apresentada (Eq.(4.12)) leve a melhores resultados numéricos devido à ausência do termo singular  $\nabla \mathbf{u}$  na integral de domínio presente na formulação de Bakker.

## CAPÍTULO 5

## PROCESSOS ADAPTATIVOS PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

5.1. Introdução

Boa parte da grande utilização do método dos elementos finitos se deve ao tratamento sistemático que ele proporciona a um grande número de problemas físicos além da flexibilidade que ele permite na construção do modelo discreto. Porém tal flexibilidade deve ser usada tendo em mente que a qualidade dos resultados obtidos está intimamente ligada à discretização do modelo. Mesmo para analistas experientes, a definição de uma malha eficiente para um dado problema pode se transformar numa tarefa demorada, envolvendo aproximações de tentativa e erro e quase sempre resultando numa malha contendo uma quantidade de pontos nodais superior àquela necessária para atingir a precisão desejada ou mesmo numa discretização incapaz de representar adequadamente o problema. Outra dificuldade é a grande quantidade de dados a ser manipulada pelo usuário, o que constitui uma importante fonte de erros na definição do modelo.

5.2. O conceito de adaptatividade

Adaptatividade (ou adaptação) é um conceito utilizado em diferentes disciplinas com diferentes significados, normalmente relacionados à idéia de "aprendizado". A Biologia, a Filosofia, as Ciências Sociais, a Teoria de Controle, a Análise Numérica, a Robótica e a Inteligência Artificial, entre outras áreas do conhecimento humano, desenvolveram conceitos particulares para fenômenos que, apesar de distintos, apresentam características comuns.

O processo de obtenção de dados de projeto (normalmente tensões e deformações) na análise estrutural usando um programa de elementos finitos é de natureza adaptativa e a compreensão deste fato abriu a possibilidade de se criar mecanismos para auxiliar o analista a melhorar sua performance através do controle de alguns parâmetros na análise. Um primeiro cálculo usando o MEF indicará ao engenheiro experiente as modificações a serem implementadas num modelo deficiente: regiões onde a malha é obviamente muito grosseira (ou muito refinada), problemas relacionados à orientação dos elementos na malha, regiões onde uma rápida mudança no tamanho dos elementos pode afetar significativamente os resultados (problemas de suavização da transição dos tamanhos dos elementos na malha), uma provável má representação de materiais e carregamentos, o uso inadequado dos vários tipos de elementos, etc. Após detectar as características indesejáveis do modelo inicial a partir dos resultados da primeira execução do programa e melhorá-lo, o analista usa a discretização modificada para obter uma análise mais real do problema e repete o ciclo até estar satisfeito com os resultados obtidos. O critério para se considerar o processo completo pode ser uma análise simplificada para se verificar pontos-chave tais como o equilíbrio, uma observação dos resultados obtidos usando recursos gráficos, uma comparação com resultados experimentais ou qualquer checagem que o analista considerar apropriada para o problema em questão.

O uso dos resultados para gerar uma entrada de dados mais apropriada coincide com a definição de adaptatividade. Cada vez que o analista usa informações coletadas a partir da última execução do programa (um sistema de "feedback") a fim de melhorar a discretização, ele está gerando um problema matemático completamente novo a ser resolvido pelo MEF, num processo tipicamente adaptativo. A informação básica a partir da qual se melhora a malha, chamada genericamente de erro, é desconhecida "a priori", a não ser em casos muito especiais, e os critérios usados pelo analista para decidir quando os resultados são confiáveis o bastante são medidas da performance do processo. A constante interferência do engenheiro caracteriza uma adaptação "ativa" e o fato da solução exata ser desconhecida torna impossível se medir o erro, deixando como único caminho para se melhorar a solução, um controle sobre os vários parâmetros envolvidos na discretização.

De forma a viabilizar a convergência deste processo, se assume que o erro total pode ser aproximado pelo erro de discretização, sendo as outras componentes desprezíveis, a partir de onde um algoritmo para redefinição adaptativa da malha é proposto. Esta é a idéia básica que está por trás dos métodos adaptativos de melhoria de malha.

### 5.3. Melhoria adaptativa de malhas

Uma primeira idéia para melhoria da malha, que ocorre quase que naturalmente, é a subdivisão das áreas ou elementos que possuem um erro considerável, de maneira a se obter uma melhor discretização do domínio. Esta aproximação é conhecida por "método h" e se espera uma convergência dos resultados para a solução exata do problema matemático, desconsiderando arredondamentos. Para se implementar o método h, um algoritmo eficiente deve ser desenvolvido para realizar o refinamento pela subdivisão dos elementos selecionados até que a precisão desejada seja atingida. Este algoritmo deve conter restrições especiais de forma a evitar elementos muito distorcidos, assegurar a imposição de condições de contorno corretas nos nós recém gerados, justapor elementos recém criados em contornos irregulares, etc. Babuška e Rheinboldt (1978) ilustraram a aplicação de um algoritmo de refinamento usando o método h para um domínio em forma de "L".

Uma aproximação diferente da anterior para o refinamento de malhas é o "método p", onde a ordem do polinômio de interpolação é aumentada nos elementos onde o erro estimado indica a necessidade de melhoria na solução de forma a atingir a precisão desejada. Peano et al (1978) e Kelly et al (1983) usaram o método p juntamente com funções hierárquicas de interpolação, de maneira que a matriz de rigidez do elemento primário (de menor ordem) está contida na matriz de rigidez do elemento refinado (de maior ordem). Peano descreveu procedimentos iterativos projetados para modificar a solução obtida com a malha menos refinada considerando o efeito do aumento da ordem da função de interpolação resultando num algoritmo eficiente que tira vantagem das características das hierarquias.



Uma outra alternativa, conhecida por "método r", consiste em melhorar uma dada malha através de mudanças na distribuição espacial dos elementos, mantendo o mesmo (ou aproximadamente o mesmo) número de pontos nodais e o mesmo tipo de elemento. Esta aproximação evita as complicações resultantes da divisão de elementos e de se lidar com elementos que possuam funções de interpolação de diferentes ordens dentro da mesma malha. Outra vantagem deste método é que ele evita a super-precisão localizada que pode ser imposta ao modelo através de uma malha inicial muito refinada em determinadas regiões do domínio. Como desvantagem, esse método não leva a uma solução geral próxima da solução ótima, mas a uma solução próxima da solução ótima para um dado número de pontos nodais, desde que possui, como restrição, um erro máximo definido pelo usuário para um número fixo de pontos nodais. O que tal método proporciona, em resumo, é uma equidistribuição do erro dentro do domínio. Diaz et al (1983) derivaram um critério para a relocação dos nós baseado em estimativas do erro de interpolação do MEF, e mostraram algumas aplicações interessantes para o mesmo.

Neste trabalho optou-se, por razões de coerência com a simplicidade, pela utilização de um algoritmo baseado no método r, descrito em detalhes no item 5.4.

Uma visão geral sobre refinamentos adaptativos pode ser encontrada no trabalho de Noor e Babuška (1987).

#### 5.4. Algoritmo baseado no método r

O modelo discreto definido será responsável pela introdução de um erro (de discretização) nos resultados obtidos. Uma forma de se obter uma melhora nesses resultados, em termos de precisão, mantendo o número de pontos nodais da malha inicial é recorrer a um processo adaptativo baseado no método r ("remeshing") de redefinição da localização dos graus de liberdade no domínio.

Para um dado número de graus de liberdade, a malha ótima é aquela em que o erro de discretização é igual em todos os elementos.

Para que esse princípio fosse atingido, foi desenvolvido um algoritmo, posteriormente convertido em programa, que busca a equidistribuição do erro no domínio. Tal algoritmo consiste, basicamente, nos passos :

- 1) criar uma malha inicial e determinar as tensões via MEF;
- 2) baseado nas tensões obtidas, perfazer uma estimativa do erro de discretização em cada elemento, utilizando um estimador de erro;
- 3) se a distribuição dos erros estimados no passo 2 é uniforme em todo o domínio, ou se um limite pré-determinado de ciclos é alcançado, parar o processo; caso contrário continuar;
- 4) utilizar os erros estimados para aumentar o diâmetro dos elementos com erro baixo e diminuí-lo para erro elevado;
- 5) proceder uma nova análise pelo MEF e retornar ao passo 2.

O estimador de erro usado é o proposto por Zienkiewicz e Zhu (1987), descrito mais detalhadamente no item 5.5, e o elemento para o qual o programa foi desenvolvido é o elemento triangular de 3 nós para problemas planos, dentro do conceito de simplicidade assumido. O passo 4 é realizado com cada ponto nodal tendo sua posição redefinida considerando o erro em todos os elementos que o contém. A nova distância do nó em relação ao centro de gravidade dos elementos é calculada levando em consideração o erro estimado, cujo inverso funciona como um peso. Assim sendo, elementos com erro maior que a média terão seus diâmetros diminuídos e vice-versa.

Para se assegurar a integridade do domínio durante o processo de relocação dos pontos nodais, pode-se restringir as novas coordenadas de um dado nó a uma curva (por exemplo, pode-se forçar o nó a se posicionar sempre sobre um arco de círculo definido por ele próprio e dois nós vizinhos e que delimite parte do contorno). Uma outra opção de restrição é se eliminar pontos nodais selecionados do processo de relocação (como, por exemplo, nós localizados nos cantos do domínio).

A avaliação feita no passo 3, quanto à qualidade dos resultados, é baseada em uma medida da dispersão dos erros locais. Ela está representada, no programa desenvolvido, pelo cálculo de um índice de performance, IP, que é dado pela relação :

$$IP = \frac{\max e_i}{\min e_i} ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.1)$$

onde  $e_i$  é o erro estimado no passo 2 para os N elementos do modelo discreto. O fato de IP tender para a unidade indica a convergência do processo. Os critérios de parada dados pelo usuário são ou um limite imposto a IP ou um número máximo de ciclos (passo 3).

### 5.5. Estimativa de erro

O uso do método dos elementos finitos na resolução do problema físico acarreta a introdução de três tipos de erro. O primeiro deles é o erro introduzido pelas simplificações ocorridas na construção do modelo matemático do problema, o segundo está relacionado aos erros de truncamento introduzidos pelos cálculos computacionais e o terceiro resulta da discretização do problema, originalmente contínuo, e que se traduz no não cumprimento das equações diferenciais.

Particularmente neste trabalho optou-se pela adoção da estimativa de erro sugerida por Zienkiewicz e Zhu (1987), que se inclui no terceiro tipo de erro mencionado no parágrafo anterior. Tal tipo de estimativa, também conhecida por estimativa "a posteriori", tem se tornado popular nas implementações computacionais de procedimentos adaptativos.

Considere-se um problema da elasticidade linear plana, representado pelo domínio bidimensional  $\Omega$ , de contorno  $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$ , cuja equação de equilíbrio é dada por :

$$L^T \sigma + f = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (5.2)$$

onde  $L$  é o operador diferencial linear,  $\sigma$ , o campo de tensões, e  $f$ , o vetor das forças externas por unidade de área.

A relação entre os campos de deformações  $\epsilon$  e tensões  $\sigma$  é dada pela expressão :

$$\sigma = D\epsilon \quad (5.3)$$

onde  $D$  é a matriz constitutiva do material.

Pode-se escrever o campo de deformação  $\epsilon$  em função do vetor dos deslocamentos  $u$ , solução procurada para o problema proposto, através da relação :

$$\epsilon = Lu \quad (5.4)$$

Portanto, das Eqs.(5.3) e (5.4), a relação entre o campo de tensões  $\sigma$  e o vetor dos deslocamentos  $u$  resulta em :

$$\sigma = DLu \quad (5.5)$$

Dessa forma, a Eq.(5.2) pode ser reescrita, utilizando a Eq.(5.5), como :

$$L^T DLu + f = 0 \quad (5.6)$$

Esta equação, juntamente com as condições de contorno :

$$Tn - \bar{t} = 0 \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (5.7)$$

$$u = u_p \quad \text{em } \Gamma_u \quad (5.8)$$

definem o conjunto de equações que regem o problema de elasticidade plana proposto. Nas Eqs.(5.7) e (5.8),  $T$  é o tensor de tensões,  $n$  é o vetor

normal ao contorno,  $\bar{\mathbf{t}}$  é o vetor das forças prescritas no subcontorno  $\Gamma_\sigma$ , e  $\mathbf{u}_p$  é o vetor dos deslocamentos prescritos no subcontorno  $\Gamma_u$ .

Sabe-se que o método dos elementos finitos utiliza-se para representar a solução exata do vetor dos deslocamentos  $\mathbf{u}$ , uma solução aproximada  $\hat{\mathbf{u}}$  do tipo :

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} \quad (5.9)$$

onde  $\mathbf{N}$  é a matriz das funções de interpolação e  $\bar{\mathbf{u}}$ , vetor dos deslocamentos nodais aproximados.

Após o tratamento variacional das Eqs. (5.6), (5.7) e (5.8) e utilizando-se a aproximação descrita pela Eq. (5.9), obtém-se o sistema de equações algébricas a ser solucionado :

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F} \quad (5.10)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez do problema e  $\mathbf{F}$ , o vetor das forças nodais equivalentes.

As deformações e tensões aproximadas são, então, dadas pelas relações :

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{L}\mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} \quad (5.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\mathbf{L}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} \quad (5.12)$$

A solução aproximada em deslocamentos  $\hat{\mathbf{u}}$  pode ser estendida a tensões  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ . Define-se, então, o erro como sendo a função  $\mathbf{e}$ , resultante da diferença entre as soluções exatas e aproximadas, para deslocamentos:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \quad (5.13)$$

e para tensões :

$$\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.14)$$

Tais expressões, porém, são geralmente difíceis de se quantificar, visto que a solução exata é desconhecida na maioria dos problemas, sendo mais conveniente lançar mão das várias medidas integrais disponíveis. Uma das mais comuns é a norma de energia, que no caso específico da elasticidade plana, é dada pela expressão :

$$e = \left[ \int_{\Omega} (\mathbf{L}\mathbf{e})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{e}) \, d\Omega \right]^{1/2} \quad (5.15)$$

Substituindo a Eq.(5.13) na Eq.(5.15) vem :

$$e = \left[ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \, d\Omega \right]^{1/2} = \left[ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \, d\Omega \right]^{1/2} \quad (5.16)$$

Esta norma será utilizada ao longo deste trabalho. Conforme visto anteriormente, o erro de discretização pode ser escrito em função da diferença entre os campos de tensões exatas e aproximadas. A estimativa proposta por Zienkiewicz e Zhu consiste em aproximar o campo de tensões exatas  $\boldsymbol{\sigma}$  por um campo de tensões contínuas (suavizadas)  $\boldsymbol{\sigma}^*$ , obtido a partir de uma interpolação similar à dos deslocamentos :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \quad (5.17)$$

onde  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$  é a matriz das tensões nodais, e  $\mathbf{N}$  é a mesma matriz das funções de interpolação utilizada na Eq.(5.9).

Considerando, então, contínuo o campo de tensões, pode-se obter uma estimativa da norma de energia do erro :

$$e = \left[ \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \, d\Omega \right]^{1/2} \quad (5.18)$$

com as tensões nodais  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$  sendo obtidas ponderando-se a diferença entre os campos de tensões  $\boldsymbol{\sigma}^*$  e  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , em relação às funções de interpolação :

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega = 0 \quad (5.19)$$

Introduzindo-se a Eq. (5.17) na Eq. (5.19), obtém-se :

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\mathbf{N} \bar{\sigma}^* - \hat{\sigma}) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{N}^T \mathbf{N} \bar{\sigma}^* - \mathbf{N}^T \hat{\sigma}) d\Omega = 0 \quad (5.20)$$

$$\bar{\sigma}^* = \mathbf{A}^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \hat{\sigma} d\Omega \quad (5.21)$$

sendo  $\mathbf{A}$  a matriz quadrada e simétrica :

$$\mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (5.22)$$

A Fig. 5.1 ilustra o significado físico desta estimativa de erro, relacionando-a com a diferença entre o campo de tensões suavizadas e o campo de tensões resultante da análise via método dos elementos finitos.

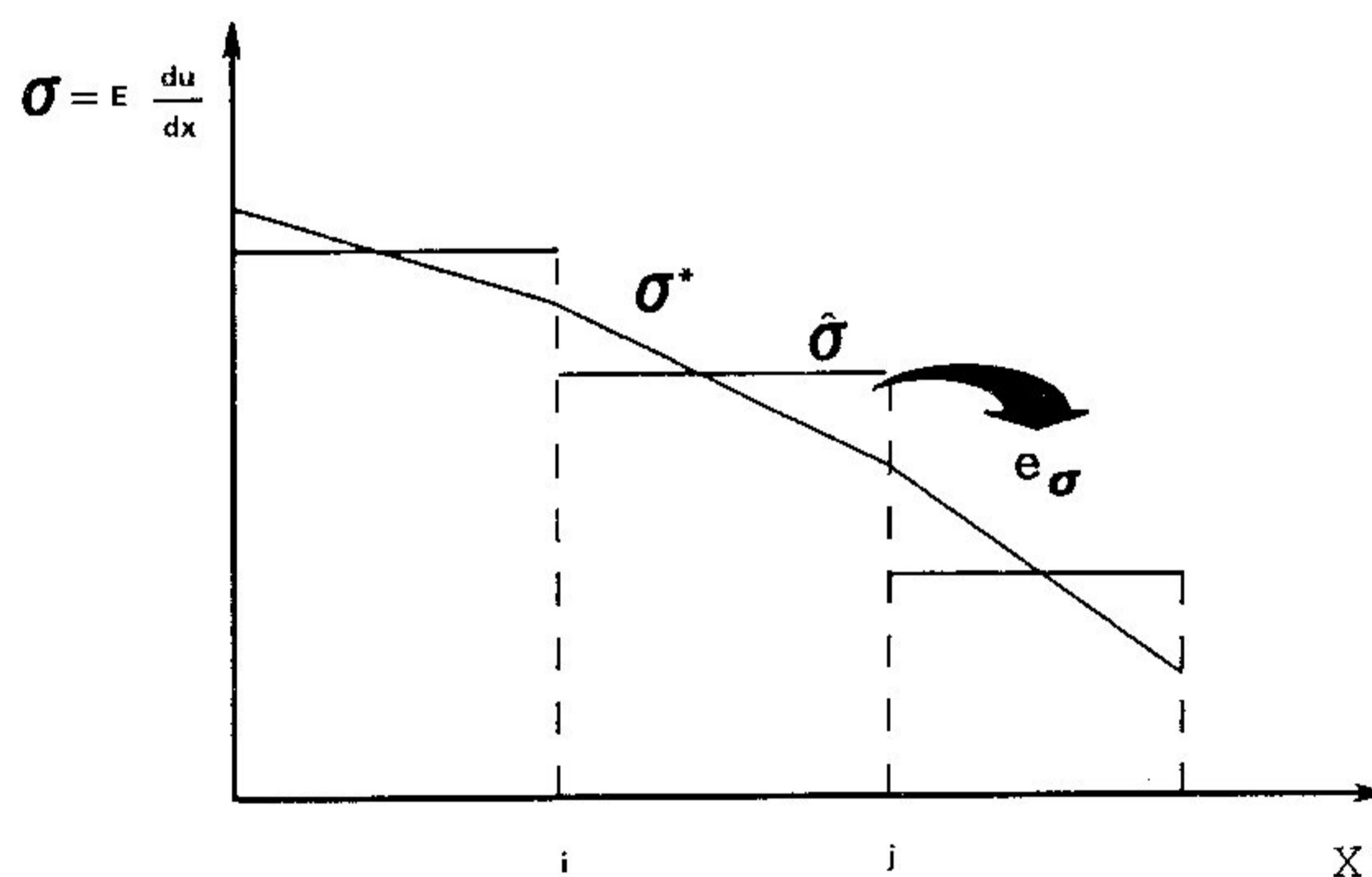


Figura 5.1 - Natureza da estimativa do erro para tensões ( $e_\sigma$ ) para um problema unidimensional e funções de interpolação lineares.

## CAPÍTULO 6

### IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

#### 6.1. Introdução

A implementação das rotinas computacionais foi realizada utilizando o sistema SDP (Sistema para Desenvolvimento de Programas baseados no método dos elementos finitos) como ambiente computacional, aproveitando suas facilidades e sem perder as características de portabilidade desejáveis nos pós-processadores. Tal utilização evitou uma duplicação de esforços, uma vez que se aplicaram rotinas auxiliares já existentes no SDP como, por exemplo, as rotinas para álgebra linear, rotinas de integração numérica, rotinas-padrão de gerenciamento de arquivos, leitura, impressão, etc., no desenvolvimento dos programas pós-processadores.

Mantendo o compromisso com a simplicidade, o elemento triangular de deformação constante para estado plano de tensão foi escolhido como elemento-padrão nos cálculos e desenvolvimentos computacionais implementados. Tal fato contribuiu para uma avaliação da precisão do método numérico e será comentado no Capítulo 8 deste trabalho.

Toda a implementação computacional foi efetuada em ambiente operacional DOS utilizando um micro-computador do tipo IBM/PC-AT e, como linguagem de programação, o FORTRAN 77.

#### 6.2. O sistema SDP

Desenvolvido como objeto da tese de doutoramento de



Gouvêa (1986), sob a orientação de Feijóo, o sistema SDP (Feijóo e Gouvêa, 1985) proporciona uma diversificada gama de ferramentas computacionais para o desenvolvimento de programas que utilizam o método dos elementos finitos na análise de problemas de engenharia. O SDP utiliza a idéia de rede integrada de programas, onde uma análise pode ser efetuada através de diversos programas individuais conectados entre si por um banco de dados, de tal maneira que o usuário possa escolher os procedimentos e algoritmos mais adequados à solução de seu problema específico. Neste tipo de concepção, um sistema de gerenciamento de dados que permita uma comunicação rápida e segura entre os diversos módulos é de fundamental importância. O SDP, então, é composto por um conjunto de procedimentos para gerenciamento de memória, rotinas utilitárias, bibliotecas de procedimentos de cálculo e, mais recentemente, geradores de malha e pré e pós-processadores gráficos. Existem, ainda, normas de programação e de documentação que permitem uma fácil identificação e leitura das rotinas, além de assegurar a portabilidade do sistema e sua utilização simultânea em vários centros de pesquisa.

Na verdade, tanto a rotina que efetua a relocação dos nós baseada no método adaptativo  $r$  quanto a que calcula a integral  $J$  podem ser consideradas como programas pós-processadores que somente serão executados após efetuada a análise de equilíbrio do problema. Sob esta ótica, foram utilizados, sem modificações, os três módulos básicos do SDP, ilustrados na Fig. 6.1, que executam a análise do equilíbrio :

- PREISO - procedimento que efetua a leitura e gravação das características geométricas e de material do modelo discreto ;
- PROISO - procedimento que efetua o cálculo e gravação das matrizes de rigidez e dos vetores de esforços elementares ;
- SOL - procedimento que efetua a montagem da matriz de rigidez e do vetor de carregamento globais e calcula o vetor dos deslocamentos nodais.

De posse do vetor de deslocamentos nodais, solução do problema, efetua-se um pós-processamento que irá determinar as grande-

zas utilizadas numa análise de engenharia, tais como tensões, deformações, gradientes de deslocamento, etc., em todo o domínio. Tais grandezas são necessárias, como dados de entrada, tanto para o cálculo da estimativa do erro de discretização no programa adaptativo como para a determinação da integral  $J$ , conforme descrito nos itens 6.3 e 6.4 deste Capítulo.

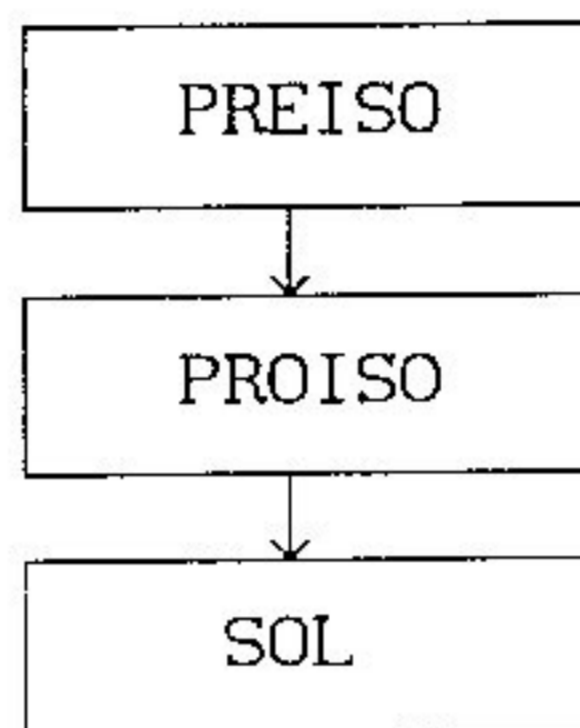


Figura 6.1 - Procedimentos básicos do SDP para análise de equilíbrio

Os procedimentos gráficos foram também intensivamente utilizados na verificação da qualidade dos resultados obtidos e na avaliação do modelo discreto idealizado. Tais procedimentos consistem em uma rotina de preparação de massa de dados a partir da saída do programa SDP (SDPGRAFC), uma rotina principal pré-processadora gráfica (PREGRAF2) (Ballesté, Guimarães e Feijóo, 1991) e rotinas gráficas para visualização de campos escalares (CAMPOESC), vetoriais (CAMPOVET) e tensoriais (CAMPOTEN).

### 6.3. O pós-processador baseado no processo adaptativo $r$

Utilizando os conceitos descritos no Capítulo 5, mais especificamente em seu item 5.4, foi desenvolvido um procedimento adaptativo baseado no método  $r$  de relocação nodal, conforme ilustrado na Fig. 6.2, já disponível na época em que este trabalho foi iniciado (Las Casas, 1990).

Este procedimento incorpora os módulos PREAD, POSISO e

ADA ao procedimento básico para a análise de equilíbrio, descrito na Fig. 6.1., e é iterativo, uma vez que para cada nova estimativa dos erros de discretização, uma análise prévia de equilíbrio deve ser realizada de maneira a se obter as tensões elementares (e não apenas os deslocamentos nodais) em todo o domínio. Após cada ciclo é feita uma verificação para saber se os critérios de parada (número máximo de ciclos ou valor limite para o índice de performance IP) foram satisfeitos. Caso contrário, repete-se uma nova análise de equilíbrio, utilizando os dados da malha recém-definida.

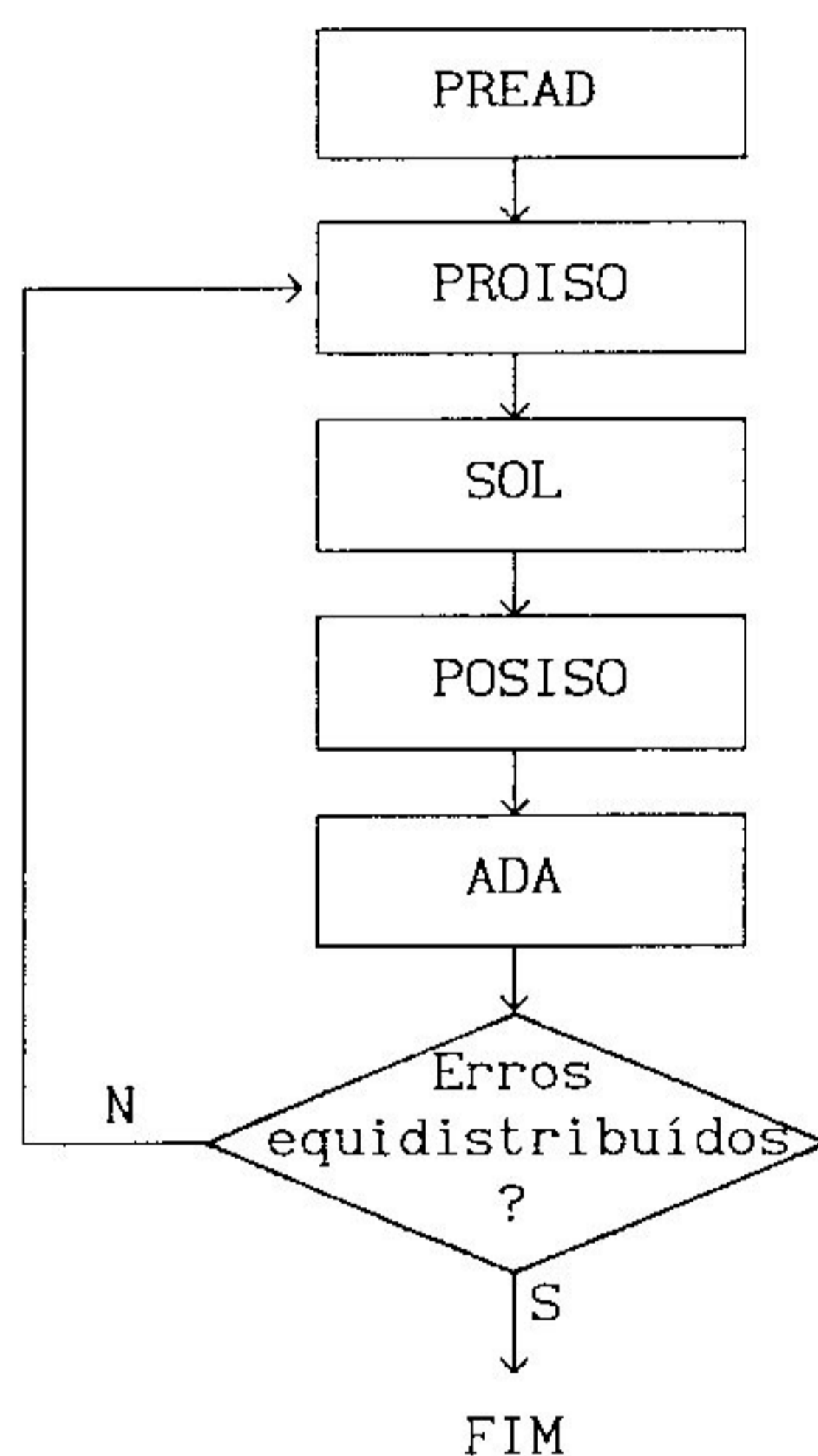


Figura 6.2 - Procedimento adaptativo baseado no método r

Os módulos introduzidos são descritos a seguir :

**PREAD** - procedimento idêntico ao procedimento PREISO descrito no item 6.2, porém incorporando a leitura dos parâmetros que qualificarão a redefinição nodal adaptativa tais como nós que devem ser excluídos do processo, nós que têm sua relocalização restrita por uma lei linear ou quadrática, número

máximo de ciclos e limite para o índice de performance IP, estes dois últimos caracterizando o critério de parada ;

POSISO - procedimento básico do SDP que efetua o cálculo das tensões e deformações elementares em todo o domínio ;

ADA - procedimento que efetua a estimativa do erro elementar de discretização e a relocação dos nós, baseada nesta estimativa, conforme os passos 2, 3 e 4 do algoritmo descrito no item 5.4 do Capítulo 5.

Nesse ponto é importante uma descrição mais detalhada do passo 4 do algoritmo contido no item 5.4 do Capítulo 5. É nele que ocorre efetivamente o processo de relocação dos pontos nodais através de uma varredura de todos os nós do domínio (excetuando-se os nós com restrições definidos pelo usuário), para os quais são identificados, individualmente, todos os elementos adjacentes. De posse desta informação e do erro estimado para cada elemento no passo 2 deste mesmo algoritmo, é realizado o processo de relocação nodal, que consiste na determinação do deslocamento nodal  $\Delta x_k^i$  em relação às coordenadas nodais anteriores  $x_k^i$  do ponto genérico  $i$ . Tal deslocamento é dado pela relação (Fig. 6.3) :

$$\Delta x_k^i = \frac{\sum_{j=1}^N (x_k^i - x_{CG_k}^j) e_j}{\sum_{j=1}^N e_j} \quad (6.1)$$

onde :

$i$  - índice do ponto nodal genérico (varia de 1 até o número de nós do modelo) ;

$j$  - índice do elemento genérico (varia de 1 até N) ;

$k$  - índice do número do grau de liberdade (varia de 1 a 2, no plano) ;

$N$  - número de elementos que contêm o ponto nodal genérico  $i$  ;

$x_k^i$  - coordenada  $k$  inicial do ponto nodal genérico  $i$  ;

- $\Delta x_k^i$  - deslocamento  $k$  do ponto nodal genérico  $i$  ;
- $x_{CG_k}^j$  - coordenada  $k$  do Centro de Gravidade do elemento genérico  $j$  contendo o ponto nodal genérico  $i$  ;
- $e_j$  - erro de discretização do elemento genérico  $j$  contendo o ponto nodal genérico  $i$  .

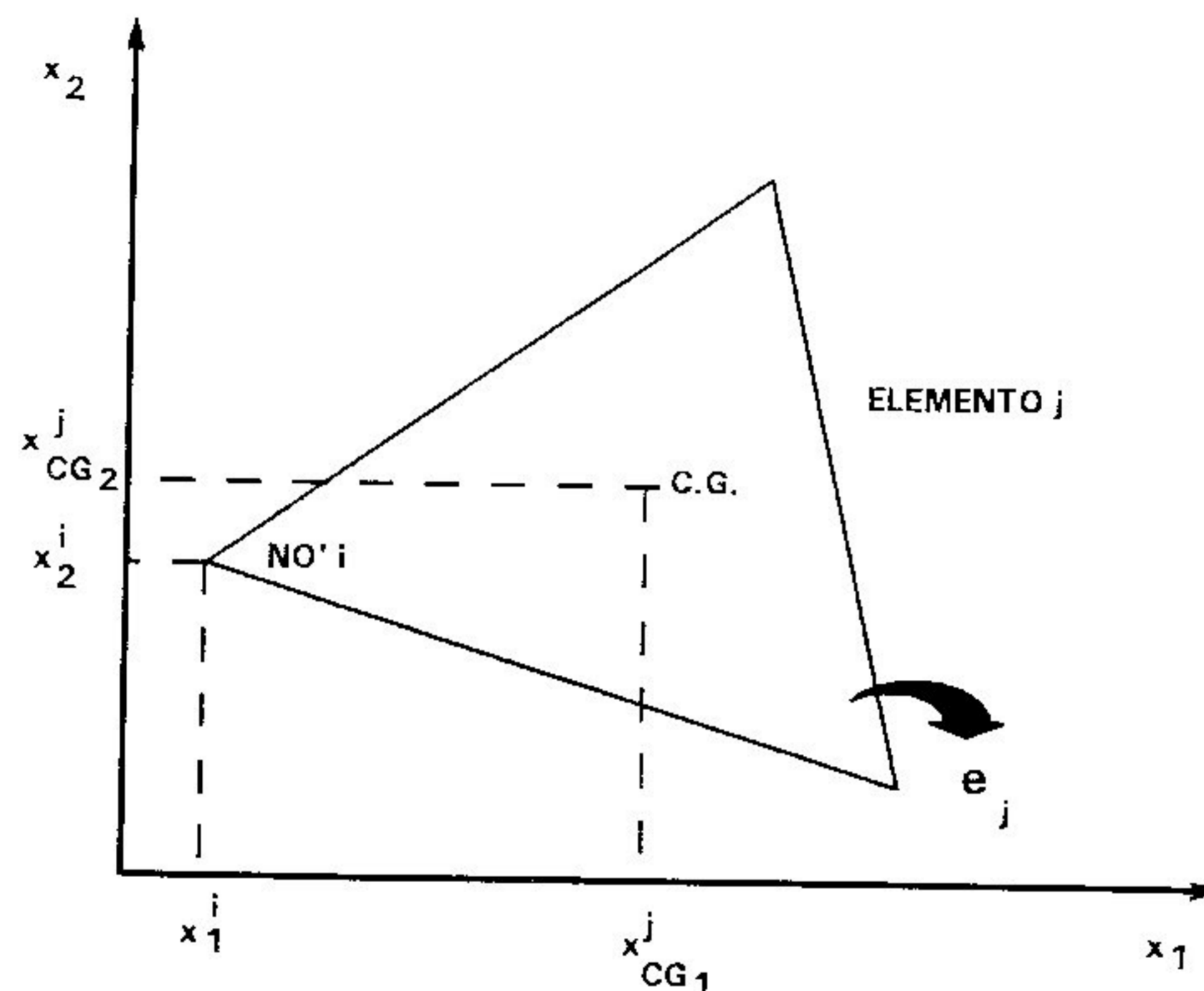


Figura 6.3 - Elemento genérico  $j$

As novas coordenadas nodais são obtidas através da soma dos deslocamentos nodais às suas respectivas coordenadas iniciais :

$$\begin{bmatrix} x_k^i \\ x_k^i \end{bmatrix}_{\text{nova}} = x_k^i + \Delta x_k^i \quad (6.2)$$

Na realidade, pode-se dizer que ocorre uma "atração" em cada ponto nodal do domínio para os centros de gravidade dos elementos que o contêm. Para um determinado ponto nodal, cada elemento adjacente exerce uma "força de atração" proporcional ao seu erro de discretização, o que leva a um deslocamento deste nó na direção do centro de gravidade dos elementos que possuem maior erro. Consequentemente o efeito global deste processo se traduz com uma maior concentração nodal nas regiões onde existam erros de discretização elevados. No caso de problemas de

fratura esta região coincide com a região de singularidade da extremidade da fissura, para onde tenderão a convergir os nós após cada ciclo do processo de relocação.

É importante salientar que o algoritmo implementado considera as restrições à relocação nodal impostas pelo usuário. Tais restrições se resumem a :

- 1) exclusão de ponto nodal do processo de relocação ;
- 2) restrição linear que força o ponto nodal a ser relocado numa reta definida por ele próprio mais dois pontos nodais imediatamente vizinhos ;
- 3) restrição quadrática que força o ponto nodal a ser relocado numa circunferência ou curva de segundo grau definida por ele próprio mais dois pontos nodais imediatamente vizinhos.

#### 6.4. O pós-processador para a determinação da integral J

Após realizar a análise de equilíbrio utilizando os módulos básicos do SDP e de posse dos deslocamentos nodais, foi primeiramente desenvolvido um módulo pós-processador, denominado POSISOJ, para efetuar o cálculo dos tensores de tensões, deformações e gradiente do deslocamento, e gravá-los no banco de dados. Este módulo usa a estrutura do módulo básico POSISO, que calcula e armazena o tensores de tensões e deformações, sendo modificado para também calcular e armazenar o tensor gradiente do deslocamento. O cálculo e gravação de tais tensores completa a determinação das grandezas derivadas dos deslocamentos necessárias para se determinar a integral J.

Em seguida desenvolveu-se um outro módulo, POSINTJ, para o cálculo efetivo da integral J. Para o caso de problemas com carregamento apenas no contorno, tal módulo requer, além dos parâmetros gravados nos módulos anteriores, uma entrada de dados onde o usuário insere o caminho para a avaliação numérica de J, definido através de uma seqüência nodal,

de acordo com a Fig. 6.4. A integral  $J$  pode então ser transformada num somatório das contribuições dos  $N$  segmentos formados pela seqüência de nós :

$$J = \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_1 \cdot \int_{\Gamma_i} \Sigma_i \mathbf{n}_i d\Gamma = \sum_{i=1}^N J_i \quad (6.3)$$

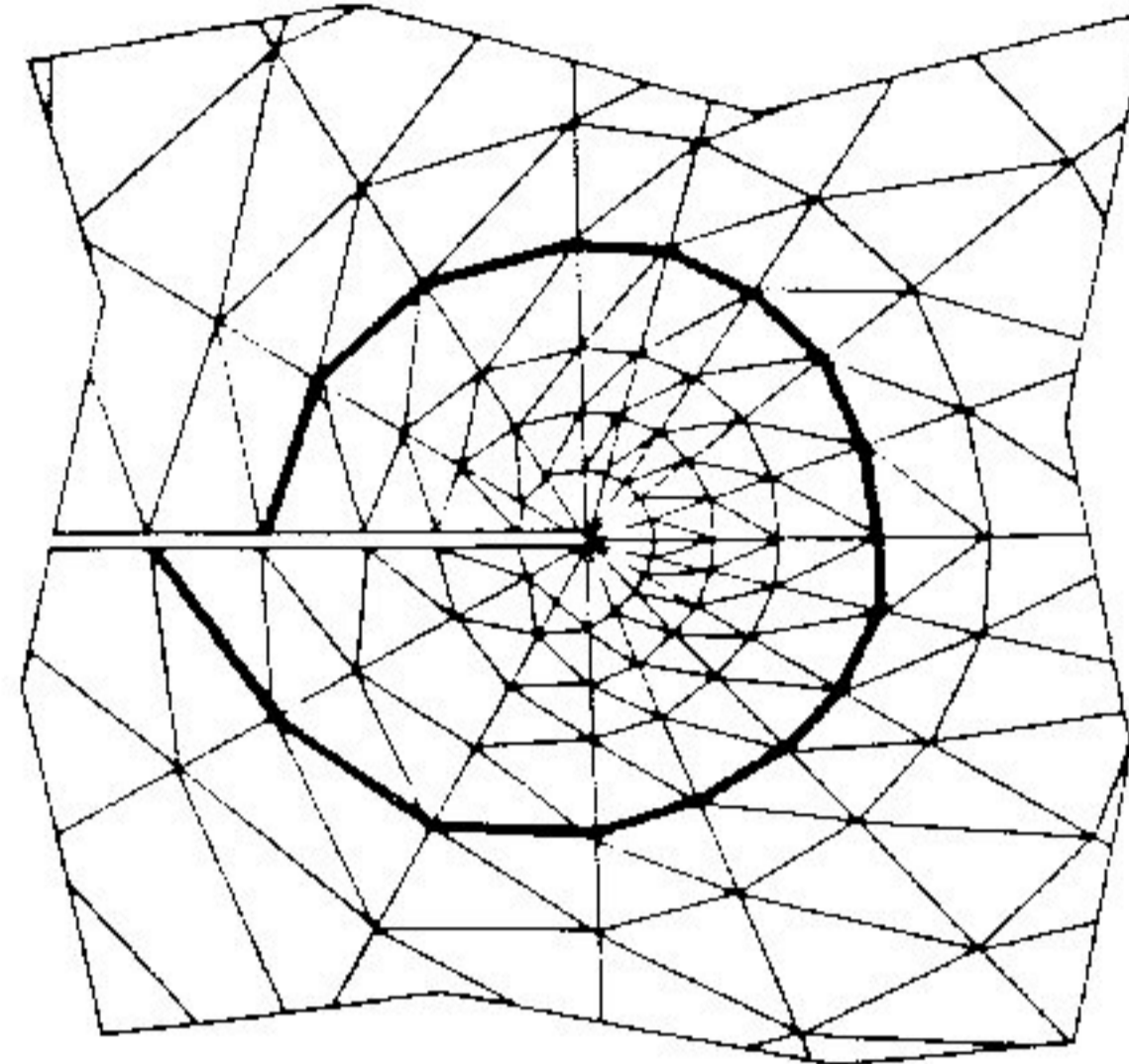


Figura 6.4 - Caminho para cálculo da integral  $J$

Considerando a Eq.(6.3), as contribuições  $J_i$  dadas por cada segmento são calculadas empregando o algoritmo descrito a seguir, onde são detalhadas as aproximações numéricas consideradas. O valor final de  $J$  é obtido totalizando-se as  $N$  contribuições  $J_i$ .

Algoritmo para cálculo da contribuição  $J_i$  do segmento genérico  $i$  :

- 1) Recuperação das coordenadas nodais dos dois extremos do segmento e de todos os elementos adjacentes a esses dois extremos ;
- 2) Recuperação das grandezas vetor de deslocamentos, relativo aos dois extremos do segmento, e tensores de tensões, deformações e gradiente do deslocamento, relativos aos elementos adjacentes a estes dois extremos e já calculadas anteriormente ;
- 3) Cálculo dos valores médios dos tensores mencionados no passo 3 para cada extremo do segmento, considerando média aritmética simples entre

os valores relativos a todos os elementos adjacentes a cada extremo ;

- 4) Cálculo do escalar energia potencial para os dois extremos do segmento considerando os valores médios dos tensores de tensões e deformações, mencionados anteriormente ;
- 5) Cálculo do tensor momento-energia para os dois extremos do segmento considerando o escalar energia potencial e os tensores de tensões e transposto do gradiente do deslocamento, mencionados anteriormente ;
- 6) Cálculo do vetor normal externo e do comprimento do segmento ;
- 7) Integração do tensor momento-energia contraído com o vetor normal externo ao longo de todo o comprimento do segmento.

Com relação ao passo 2 do algoritmo, é importante salientar que para elementos triangulares de deformação constante aqui utilizados, as grandezas referidas são constantes, daí a opção da média aritmética para a representação destas grandezas no ponto.

A integração mencionada no passo 7 leva em consideração uma variação linear para o tensor momento-energia ao longo do segmento.

Para o caso onde também se considera carregamento no domínio, deve-se efetuar uma integral a mais no domínio interno ao caminho escolhido e, para isso, são requeridos parâmetros extras na entrada de dados do módulo POSINTJ. Tais parâmetros se resumem a um código indicando qual o tipo de formulação a ser utilizada (a de Bakker ou aquela apresentada neste trabalho) além da relação de todos os elementos internos ao caminho escolhido, domínio onde será calculada a integral complementar. Esta integração é efetuada utilizando-se o método numérico da quadratura de Gauss a partir de rotinas utilitárias disponíveis no SDP.

Foi implementado nos módulos básicos do SDP (PREISO, PROISO e SOL), descritos no item 6.2 do Capítulo 6, apenas um tipo de carregamento no domínio - cargas centrífugas - para ser utilizado na análise de um disco fissurado de espessura constante em rotação, proble-



ma específico de interesse imediato. Tal tipo de carregamento varia linearmente com o raio segundo a expressão (Ugural e Fenster, 1981) :

$$\mathbf{a} = \rho\omega^2 \mathbf{r} \quad (6.4)$$

representada na Fig. 6.5, onde  $\rho$  é a massa específica do material e  $\omega$  é a velocidade angular constante.

As integrais no domínio a serem calculadas, tanto para a formulação de Bakker quanto para aquela aqui apresentada, foram facilmente implementadas uma vez que ficaram faltando determinar apenas as grandezas  $\mathbf{a}$  e  $\nabla\mathbf{a}$  para se efetuar o cálculo. Representando-se por  $r$  o módulo do vetor  $\mathbf{r}$ , o vetor  $\mathbf{a}$  pode ser decomposto em suas componentes cartesianas, de acordo com a Fig. 6.5 :

$$\mathbf{a} = (\rho\omega^2 r \cos\theta, \rho\omega^2 r \sin\theta) \quad (6.5)$$

Porém, da mesma Fig. 6.5 :

$$x_1 = r \cos\theta \quad (6.6)$$

$$x_2 = r \sin\theta \quad (6.7)$$

o que reduz a Eq. (6.5) a :

$$\mathbf{a} = (\rho\omega^2 x_1, \rho\omega^2 x_2) \quad (6.8)$$

onde pode-se determinar o valor de  $\mathbf{a}$  para qualquer ponto  $(x_1, x_2)$  do domínio de modo simples. Além disso, o gradiente de  $\mathbf{a}$  fica reduzido ao tensor :

$$\nabla\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \rho\omega^2 & 0 \\ 0 & \rho\omega^2 \end{bmatrix} = \rho\omega^2 \mathbf{I} \quad (6.6)$$

onde  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade no plano.

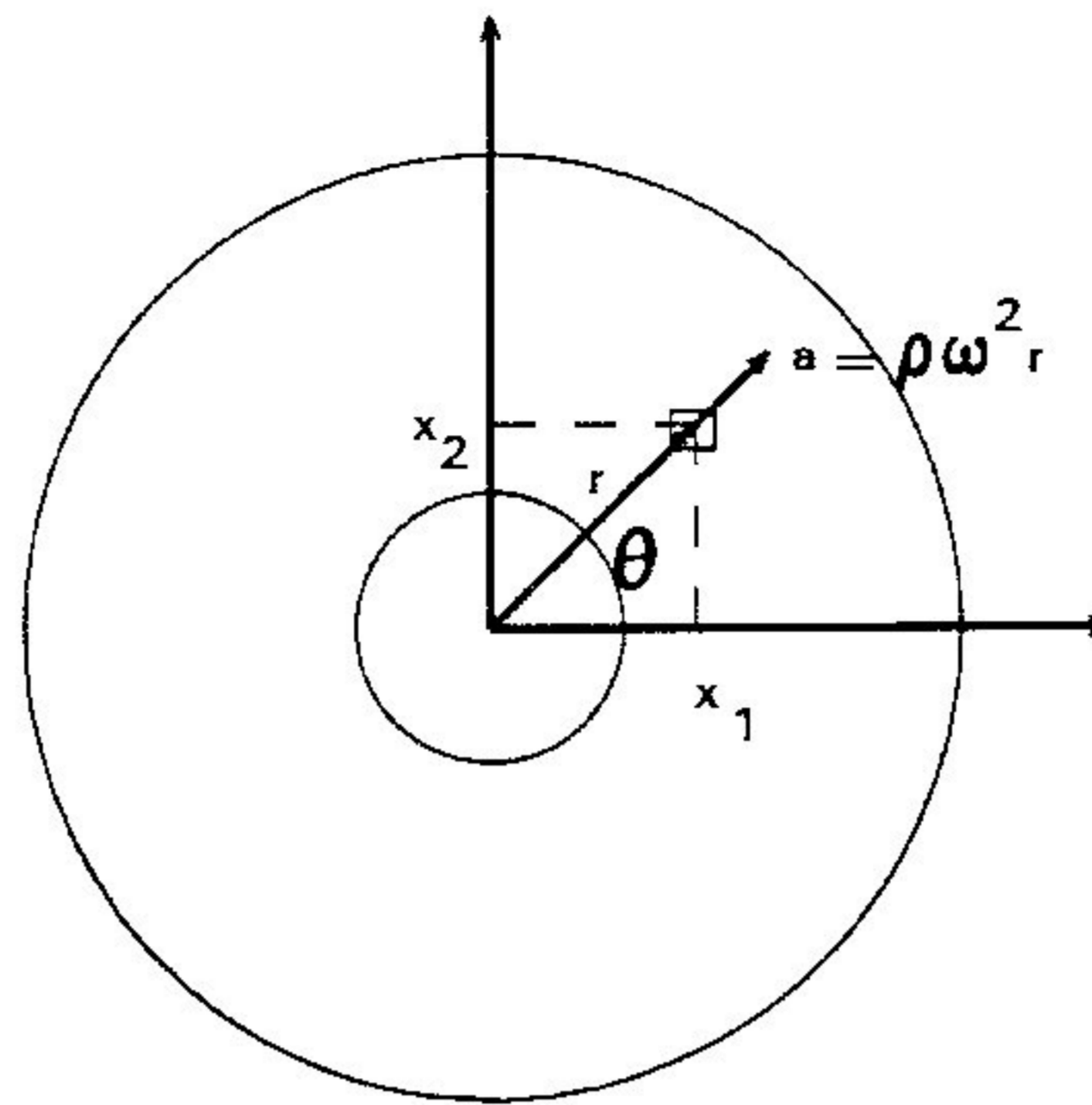


Figura 6.5 - Carregamento centrífugo

## CAPÍTULO 7

### RESULTADOS NUMÉRICOS

#### 7.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados quatro exemplos de aplicação numérica do método descrito, cada um ressaltando uma característica particular do mesmo. Em todos os exemplos foram utilizados valores para o fator de intensidade de tensão obtidos na literatura, com a finalidade de balizar e validar o método apresentado.

Inicialmente é estudado um problema clássico de fratura - uma lâmina retangular plana fissurada submetida à tração. Neste mesmo exemplo são apresentados resultados para o caso de tensões biaxiais e, em seguida, demonstra-se como a aplicação de um método adaptativo do tipo  $r$  pode melhorar a qualidade dos resultados.

O segundo exemplo repete a configuração do primeiro, acrescentando-se, porém, um furo central à lâmina com a finalidade de se estudar a influência do mesmo no fator de intensidade de tensão, na presença de tensões biaxiais.

O terceiro exemplo apresenta uma lâmina retangular tracionada com uma fissura inclinada em uma de suas bordas, com o objetivo de mostrar a potencialidade do método descrito no estudo de problemas que apresentam modos de fratura I e II combinados.

O quarto e último exemplo apresenta resultados para um disco de espessura constante girando a velocidade angular constante, com um furo central de onde se propagam duas fissuras simétricas radiais. O

objetivo deste exemplo, além estudar a influência do carregamento de domínio na determinação de fatores de intensidade de tensão, é o balizamento das duas formulações implementadas e uma comparação entre as mesmas.

Os elementos utilizados na idealização dos modelos discretos são, conforme mencionado anteriormente, elementos triangulares de deformação constante. Foram adotados em todos os exemplos os valores  $E = 210000 \text{ N/mm}^2$  para o módulo de elasticidade e  $\nu = 0,3$  para o coeficiente de Poisson, caracterizadores do material empregado.

Todos os exemplos apresentam lâminas ou discos de espessura constante  $t = 1 \text{ mm}$ , sendo por isso considerados casos de estado plano de tensões, onde a expressão que relaciona a integral  $J$  e o fator de intensidade de tensão  $K$  para os modos de fratura I e II pode ser derivada a partir da substituição das Eqs. (2.15) e (2.16) na Eq. (2.21), o que leva a :

$$J_i = \frac{K_i^2}{E} \quad ; \quad i = I, II \quad (7.1)$$

ou ainda :

$$K_i = \sqrt{J_i E} \quad ; \quad i = I, II \quad (7.2)$$

As unidades adotadas para  $J$  e  $K$  são  $[\text{N/mm}]$  e  $[\text{N.mm}^{-3/2}]$ , respectivamente.

## 7.2. Exemplo 1 - Lâmina retangular com fissura central

Considerou-se, inicialmente, uma lâmina retangular de comprimento  $2L = 480 \text{ mm}$  e largura  $2W = 240 \text{ mm}$ , contendo uma fissura central de comprimento  $2a = 20 \text{ mm}$  e submetida a tensões  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  em suas bordas perpendiculares e paralelas à fissura, respectivamente, conforme ilustrado na Fig. 7.1.

A simetria do problema permite modelar apenas a quarta parte do domínio para se efetuar a análise via MEF, o que foi feito utilizando a malha apresentada na Fig. 7.2 contendo 247 graus de liberdade.

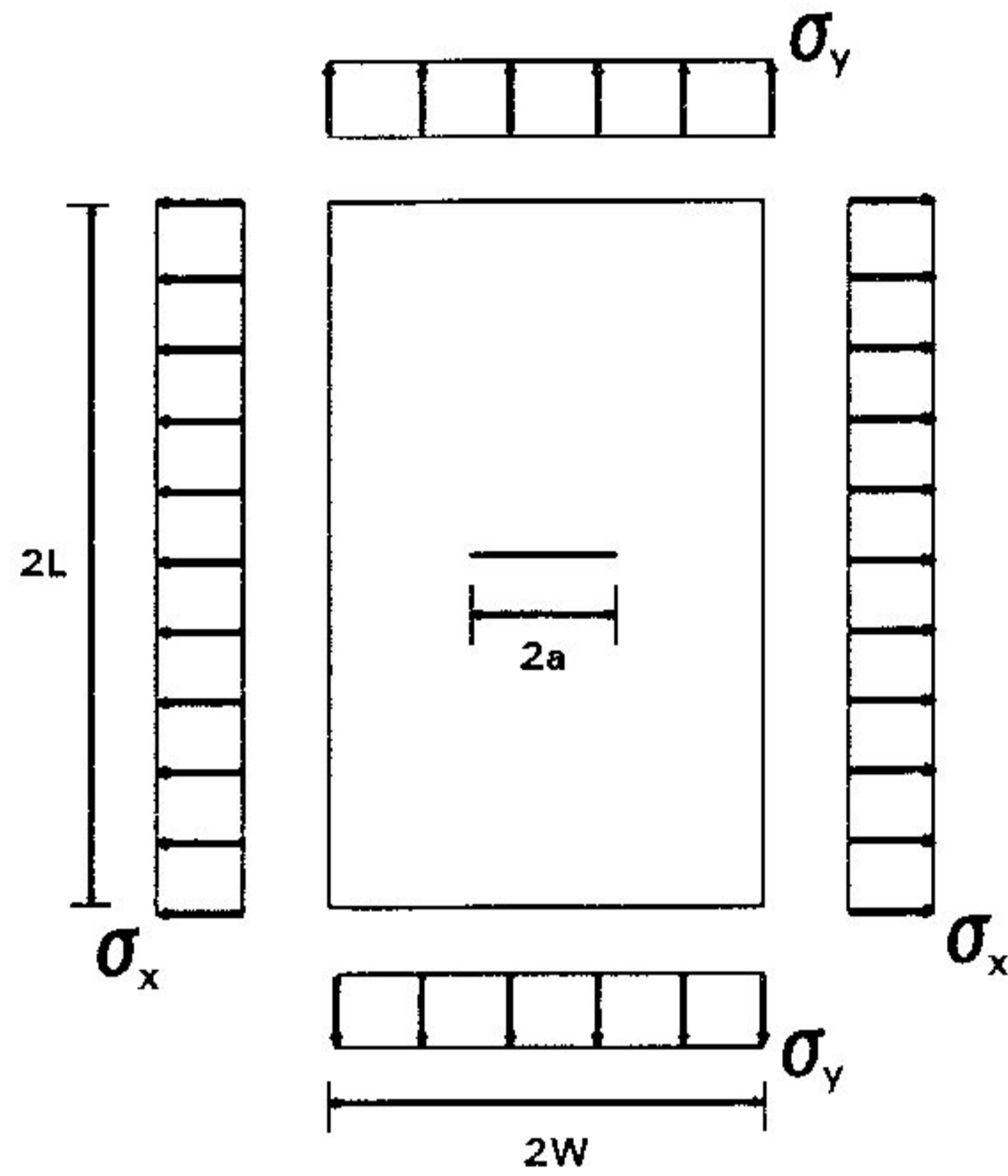


Figura 7.1 - Lâmina retangular com fissura central

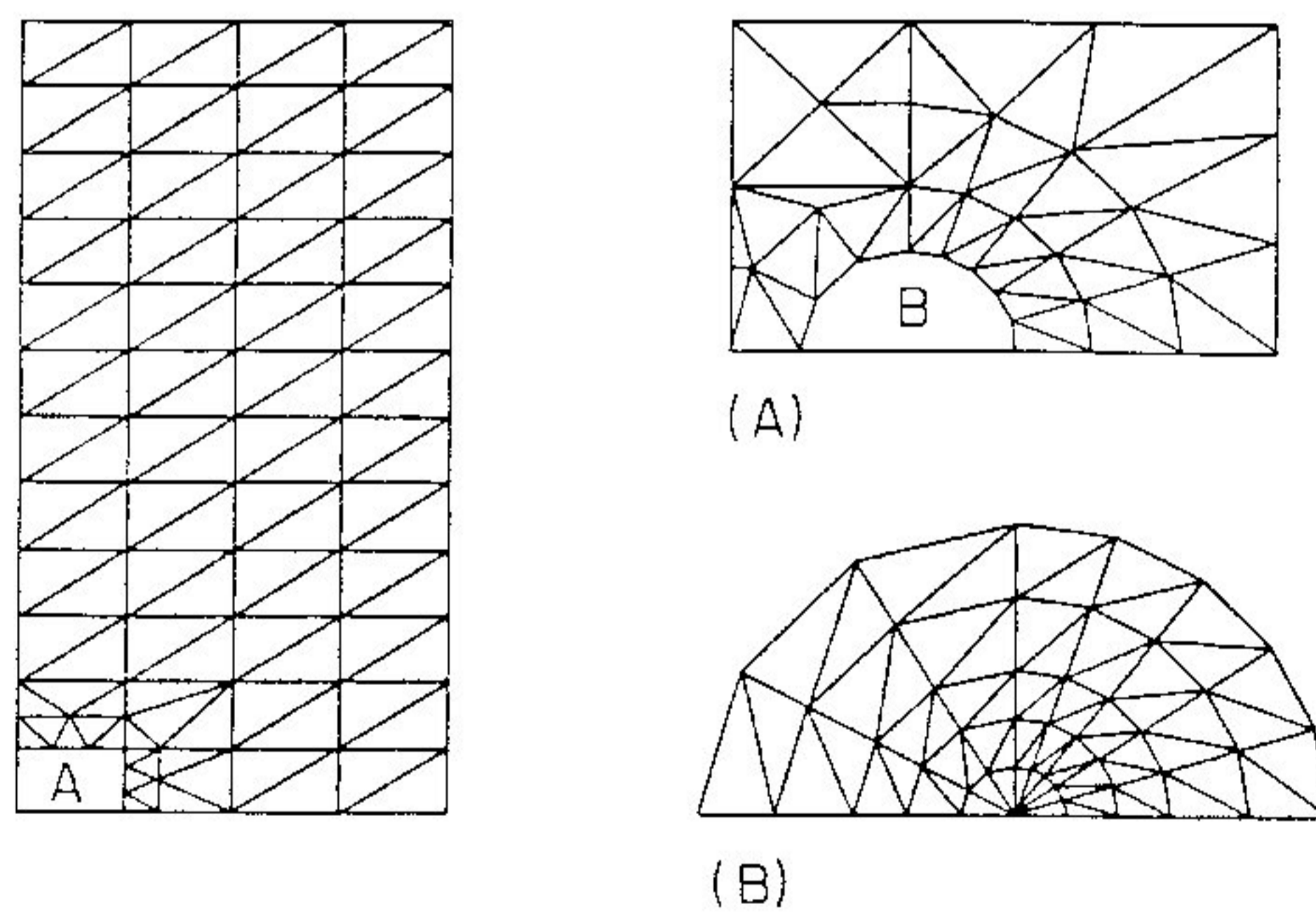


Figura 7.2 - Malha inicial utilizada para o Exemplo 1

A lâmina foi analisada para três tipos de carregamento:

$$a) \sigma_x = 0 \text{ N/mm}^2 \text{ e } \sigma_y = 100 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$b) \sigma_x = 100 \text{ N/mm}^2 \text{ e } \sigma_y = 100 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$c) \sigma_x = -100 \text{ N/mm}^2 \text{ e } \sigma_y = 100 \text{ N/mm}^2 ;$$

utilizando-se os caminhos apresentados na Fig. 7.3, entre os quais um caminho fechado não envolvendo singularidade onde o valor para a integral  $J$  deve se anular.

A Tab. 7.1 apresenta os valores de  $K_I$  calculados a partir da determinação numérica da integral  $J$  para os caminhos e tipos de carregamento considerados. Para o tipo de carregamento a) foi feita, ainda, uma comparação entre os valores de  $K_I$  calculados com o valor  $K_I = 562,4$  obtido conforme Hellan (1985), observando-se aí uma boa concordância entre os mesmos (erros entre 4% e 5%). Os resultados obtidos para os carregamentos b) e c) também se mostraram próximos aos valores calculados para o carregamento a), o que sugere que, para este tipo de configuração, tensões na direção de propagação da fissura não têm influência no fator de intensidade de tensão para o modo I de fratura,  $K_I$ . Os caminhos fechados apresentaram valores para  $J$  próximos de zero, conforme se esperava.

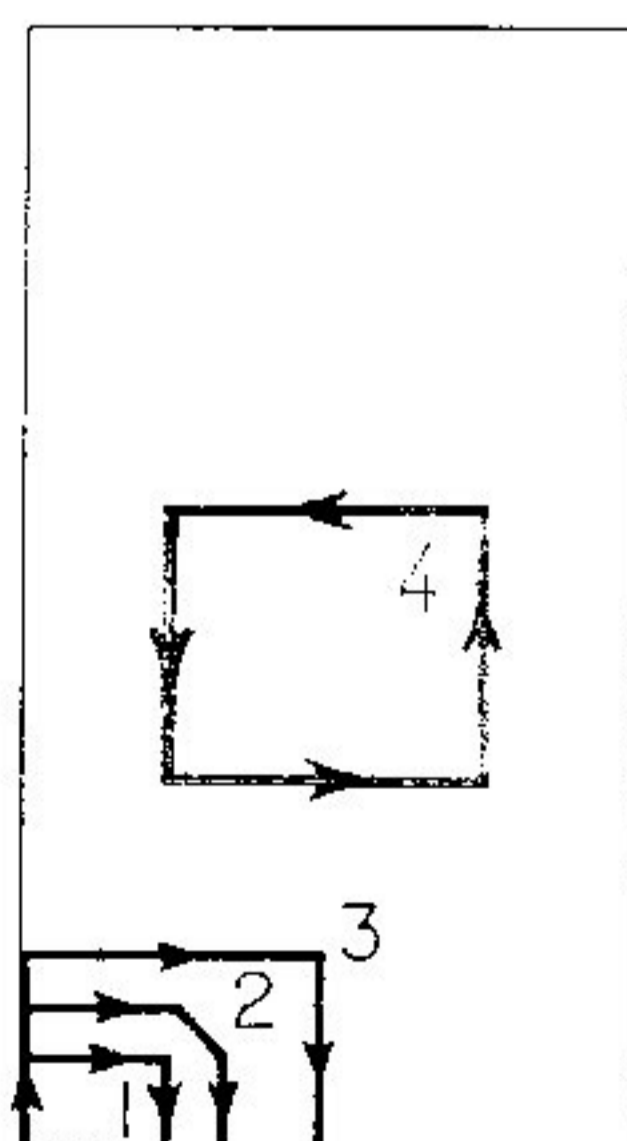
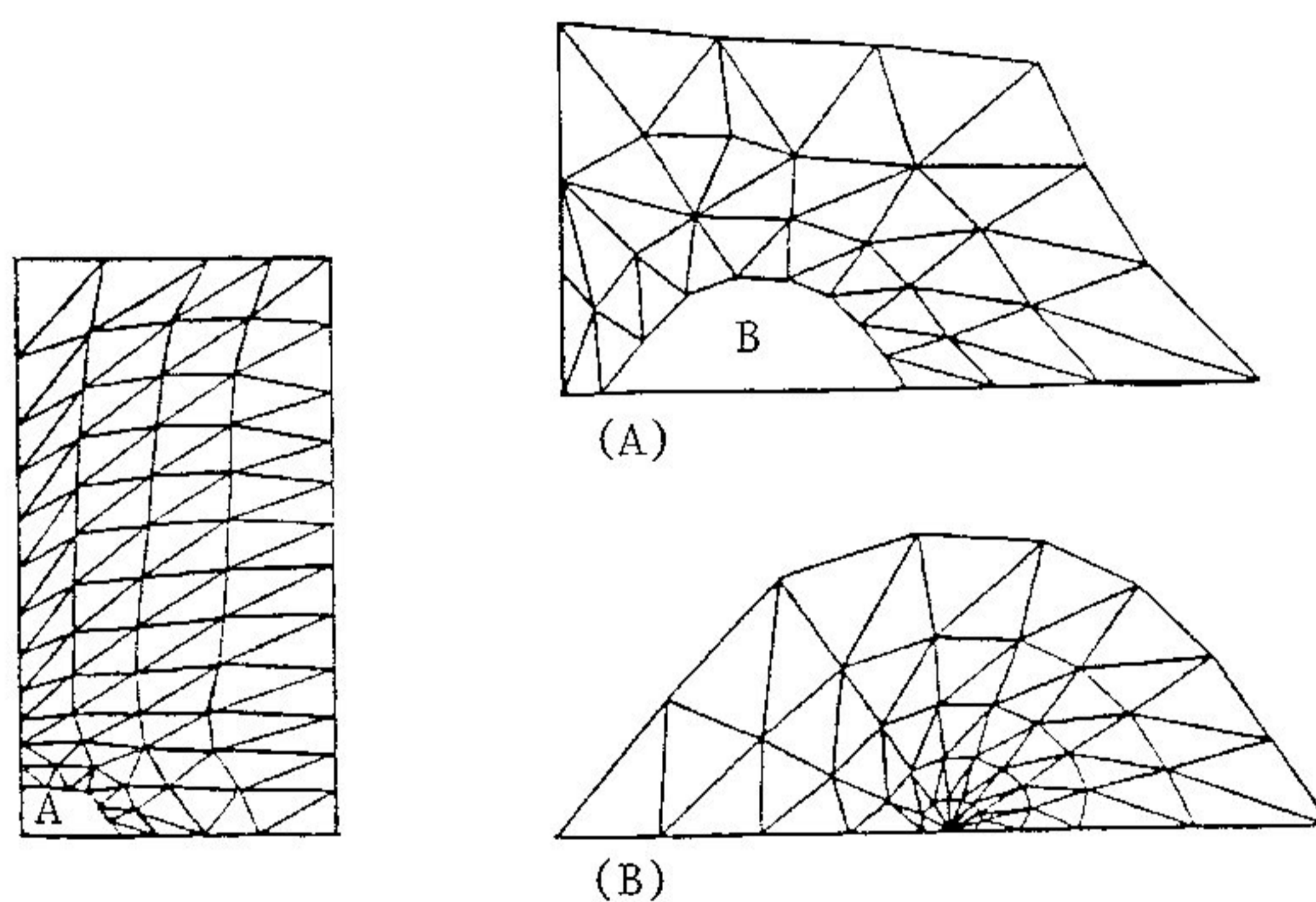


Figura 7.3 - Caminhos utilizados na avaliação de  $J$  para o Exemplo 1

CAMINHO	C A R R E G A M E N T O						
	a			b		c	
	J	$K_I$	Erro %	J	$K_I$	J	$K_I$
1	1,371	536,6	-4,59	1,373	537,0	1,369	536,1
2	1,367	535,8	-4,73	1,323	527,0	1,412	544,5
3	1,360	534,3	-4,99	1,288	520,0	1,432	548,3
4	0,000	-	-	-0,001	-	0,001	-
Hellian	-	562,4	-	-	-	-	-

Tabela 7.1 - Resultados para o Exemplo 1

Figura 7.4 - Malha utilizada para o Exemplo 1 considerando 5 ciclos do processo adaptativo  $r$ 

Em seguida, a malha apresentada na Fig. 7.2 foi submetida a cinco ciclos do processo adaptativo  $r$ , conservando o mesmo número de graus de liberdade, procedimento que resultou na malha mostrada na Fig. 7.4. Utilizando esta nova malha foi refeita a análise anterior, apenas para o carregamento a), nos mesmos caminhos (Fig. 7.3). Os resultados obtidos estão condensados na Tab. 7.2 onde são novamente compara-

dos ao valor calculado segundo Hellan. Observou-se aí uma sensível redução dos erros percentuais, restritos ao intervalo de 2% a 4%, refletindo a utilização de um processo adaptativo do tipo  $r$  para a melhoria da qualidade de resultados obtidos.

CAMINHO	CARREGAMENTO a		
	J	$K_I$	Erro %
1	0,7187	549,4	-2,31
2	0,7065	544,7	-3,14
3	0,6978	541,4	-3,74
4	-0,0010	-	-
Hellan	-	562,4	-

Tabela 7.2 - Resultados para o Exemplo 1 considerando 5 ciclos do processo adaptativo  $r$

### 7.3. Exemplo 2 - Lâmina retangular com furo central fissurado

Em seguida foi estudado o problema de uma lâmina retangular de comprimento  $2L = 720$  mm e largura  $2W = 360$  mm, com um furo circular central de raio  $R = 45$  mm de onde se propagam duas fissuras de comprimento  $c = 9$  mm, radiais e simetricamente opostas. A lâmina está submetida, a exemplo do problema anterior, a tensões perpendiculares  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  em suas bordas, conforme mostrado na Fig. 7.5.

Para se efetuar a análise do equilíbrio via MEF, utilizou-se a malha com 497 graus de liberdade apresentada na Fig. 7.6, onde as características de simetria do problema são aproveitadas. O cálculo da integral J foi efetuado nos caminhos representados na Fig. 7.7.



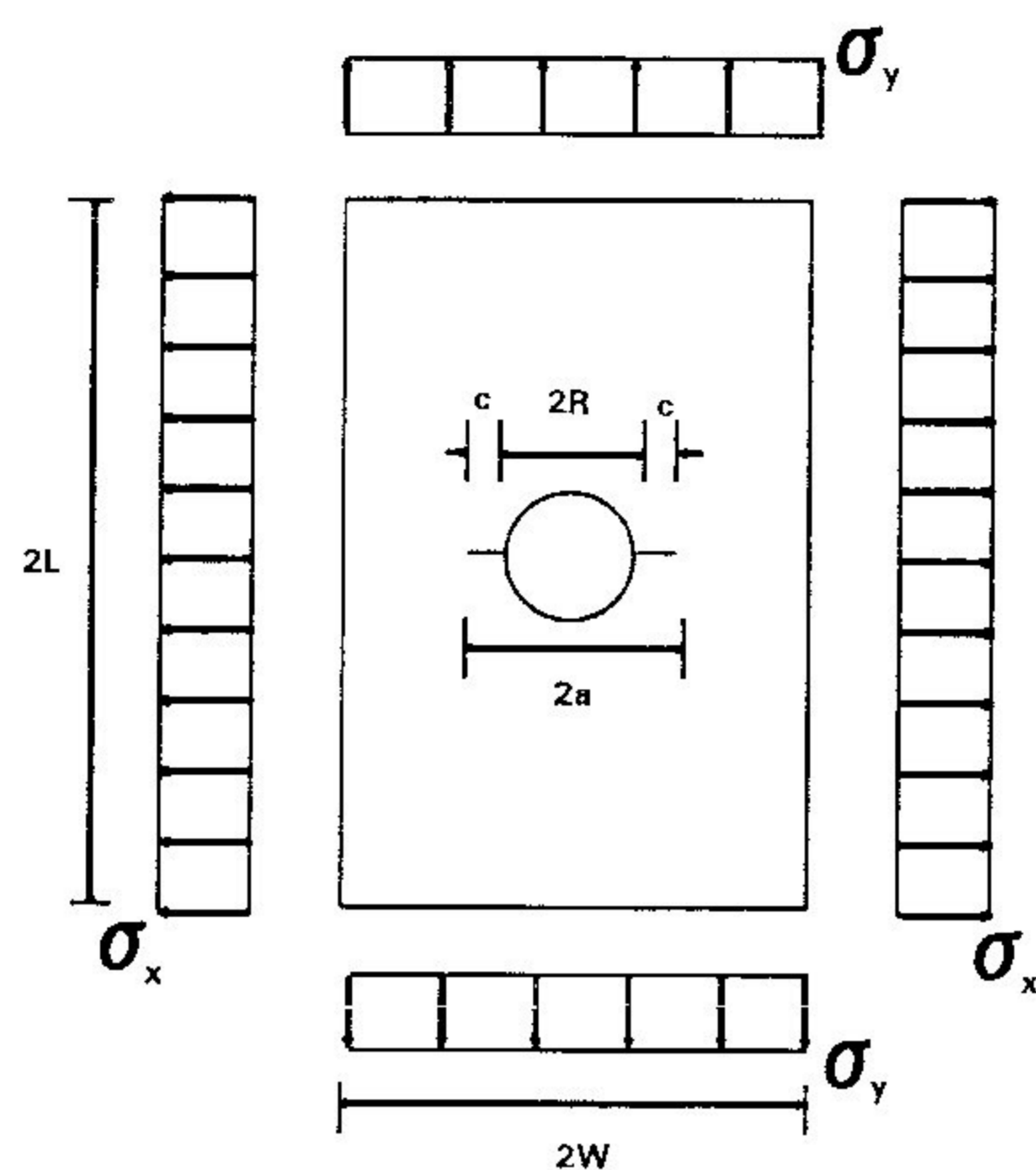


Figura 7.5 - Lâmina retangular com furo central fissurado

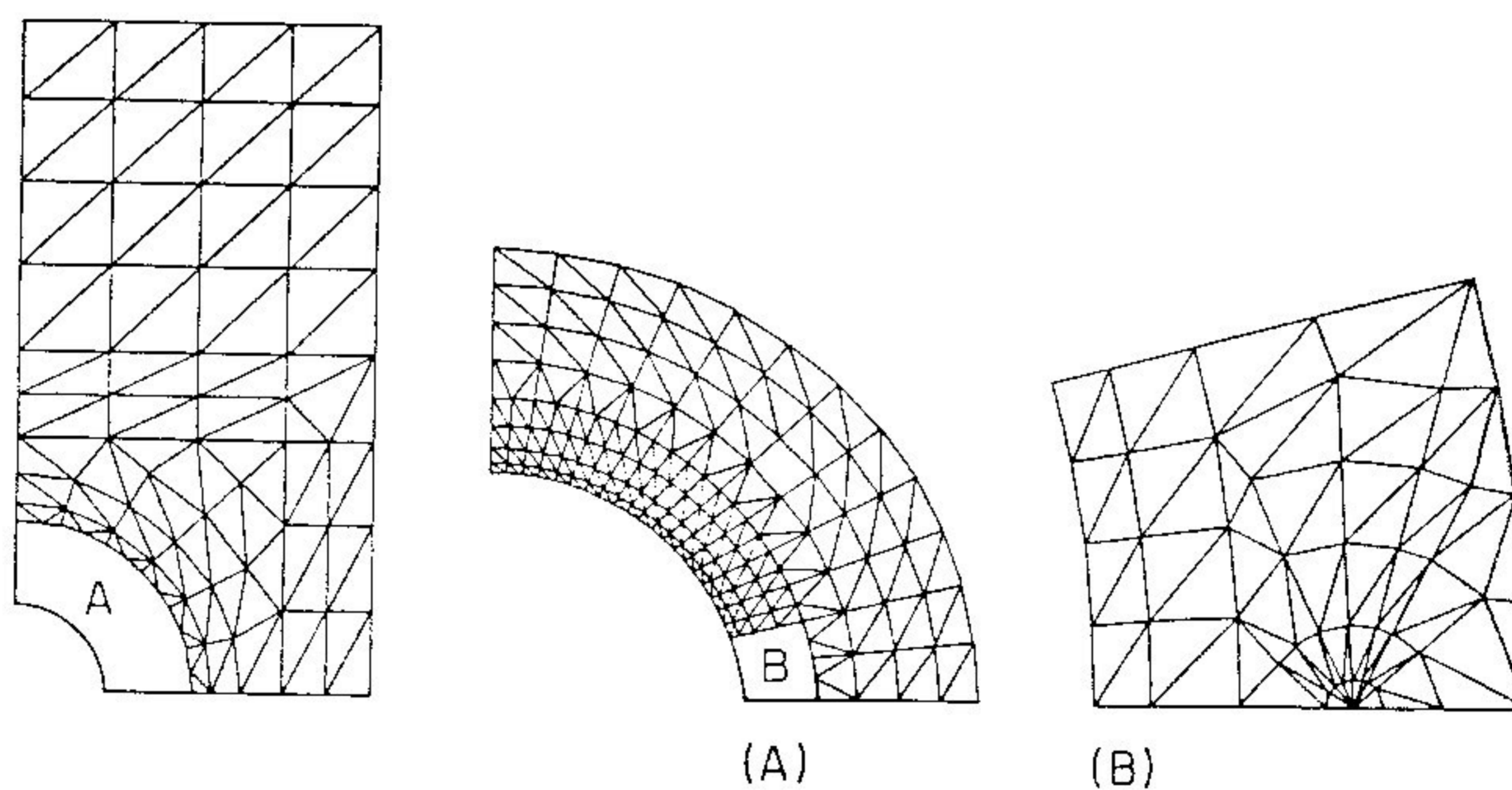


Figura 7.6 - Malha utilizada para o Exemplo 2

Visando novamente estudar a influência de carregamento na direção de propagação da fissura, a exemplo do problema anterior, foram considerados os mesmos três tipos de carregamento :

$$\text{a) } \sigma_x = 0 \text{ N/mm}^2 \text{ e } \sigma_y = 100 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$\text{b) } \sigma_x = 100 \text{ N/mm}^2 \text{ e } \sigma_y = 100 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$\text{c) } \sigma_x = -100 \text{ N/mm}^2 \text{ e } \sigma_y = 100 \text{ N/mm}^2 .$$

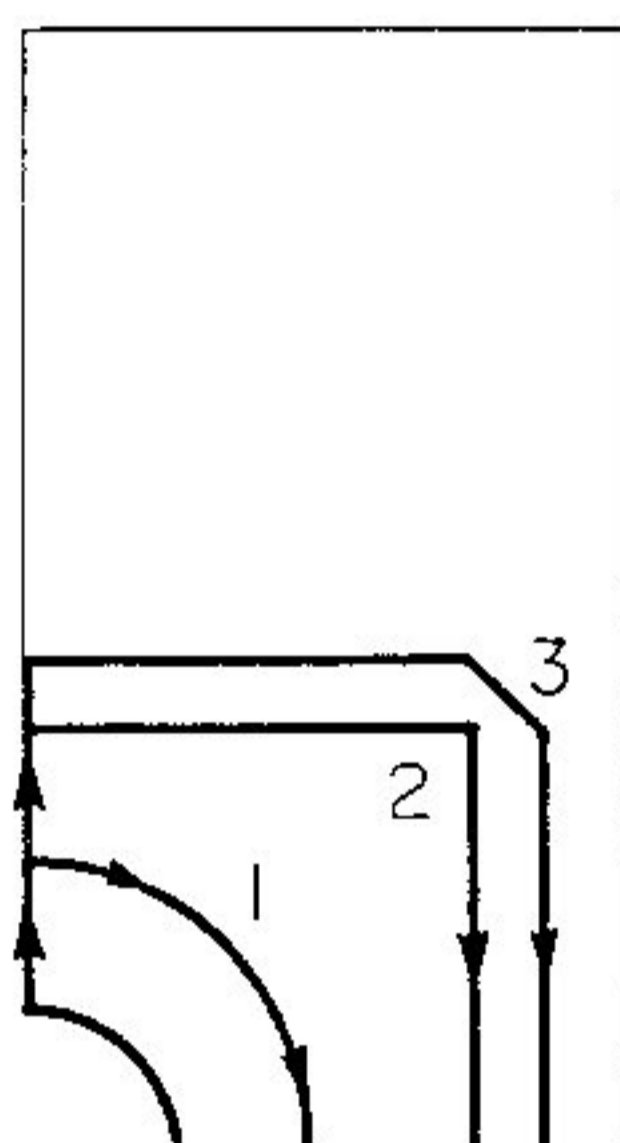


Figura 7.7 - Caminhos utilizados na avaliação de J para o Exemplo 2

A Tab. 7.3 apresenta os resultados para este problema, considerando, para os três caminhos escolhidos, os três tipos de carregamento. Para o carregamento a) foi feita uma comparação entre os fatores de intensidade de tensão calculados e o valor  $K_I = 1403$  obtido por Newman (Murakami, 1987), onde se observaram erros percentuais inferiores a 2%. Para o caso de carregamento b), onde se verifica tensão de tração na direção de propagação da fissura, pode-se observar que os fatores de intensidade de tensão calculados diminuíram seu valor, contrariamente ao caso de carregamento c) (tensão de compressão na direção de propagação da fissura) onde tais fatores aumentaram. Estes fatos mostram que, para esta configuração, tração na direção de propagação da fissura tende a estabilizá-la, enquanto que compressão nesta direção tende a torná-la mais crítica.

CAMINHO	C A R R E G A M E N T O						
	a			b		c	
	J	$K_I$	Erro %	J	$K_I$	J	$K_I$
1	9,519	1414	0,74	5,860	1109	18,60	1976
2	9,274	1396	-0,57	5,467	1072	18,06	1948
3	9,027	1377	-1,90	5,296	1055	17,56	1920
Newman	-	1404	-	-	-	-	-

Tabela 7.3 - Resultados para o Exemplo 2

7.4. Exemplo 3 - Lâmina retangular com fissura inclinada na borda

O terceiro problema de aplicação do método foi o de uma lâmina retangular de comprimento  $2L = 100$  mm e largura  $2W = 50$  mm , contendo uma fissura de comprimento  $a = 10$  mm inclinada de  $\theta = 45^\circ$  , propagando da borda para o interior. A lâmina descrita está submetida a uma tensão de tração  $\sigma = 100$  N/mm<sup>2</sup> , conforme indicado na Fig. 7.8.

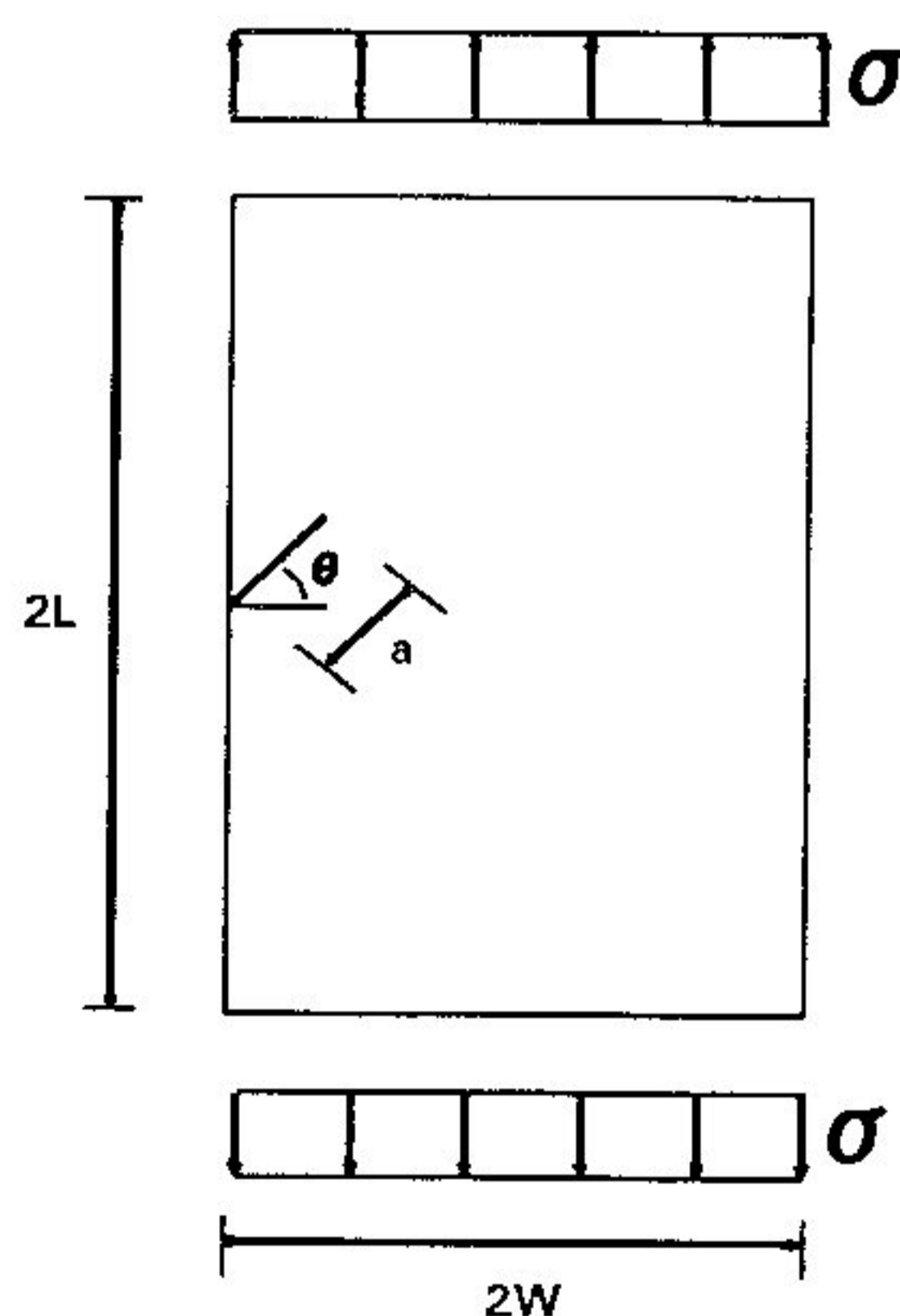


Figura 7.8 - Lâmina retangular com fissura inclinada na borda

A Fig. 7.9 representa o modelo discreto utilizado na análise via MEF contendo 361 graus de liberdade e os caminhos onde se avaliou a integral  $J$  são mostrados na Fig. 7.10.

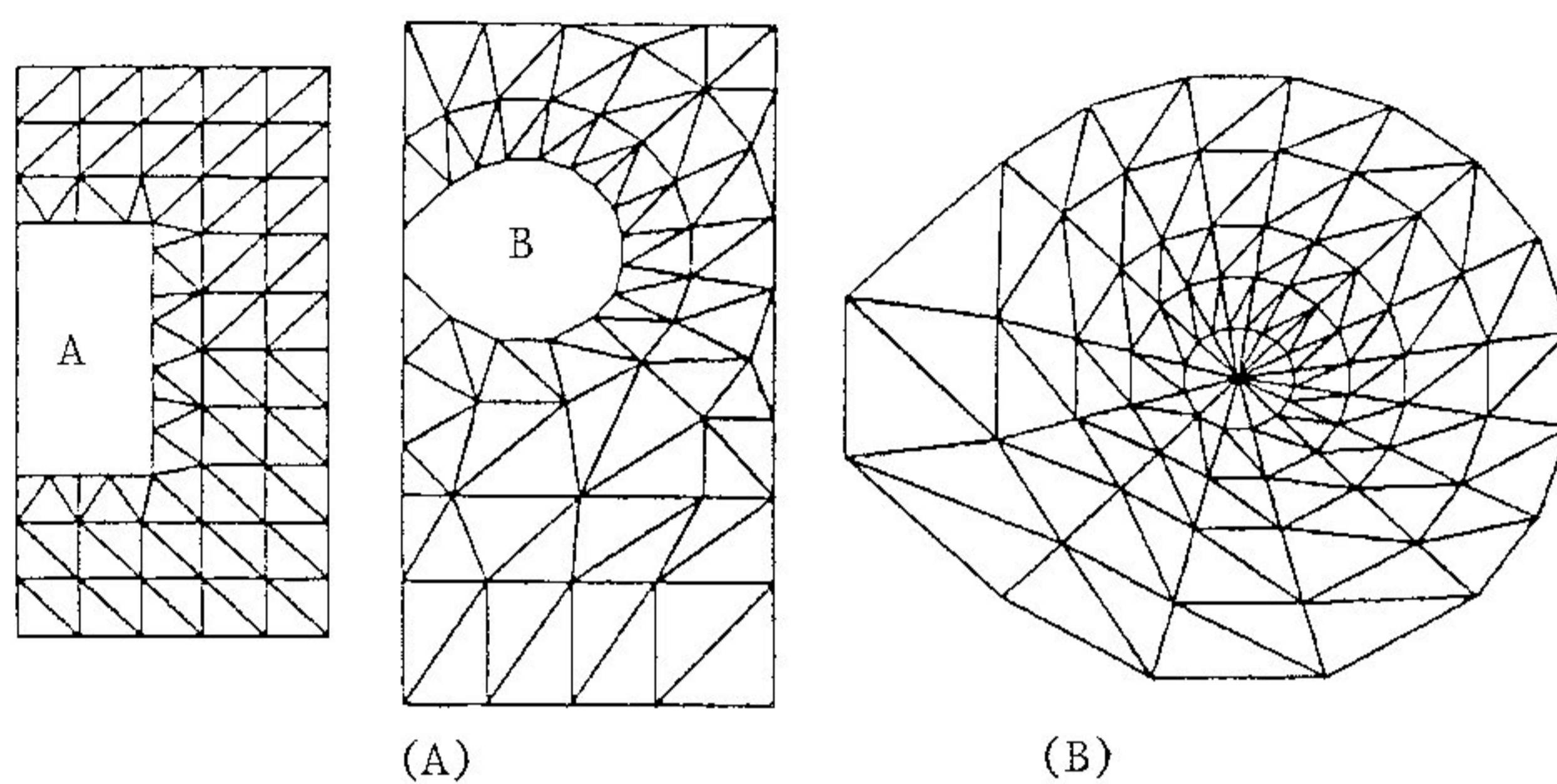


Figura 7.9 - Malha utilizada para o Exemplo 3

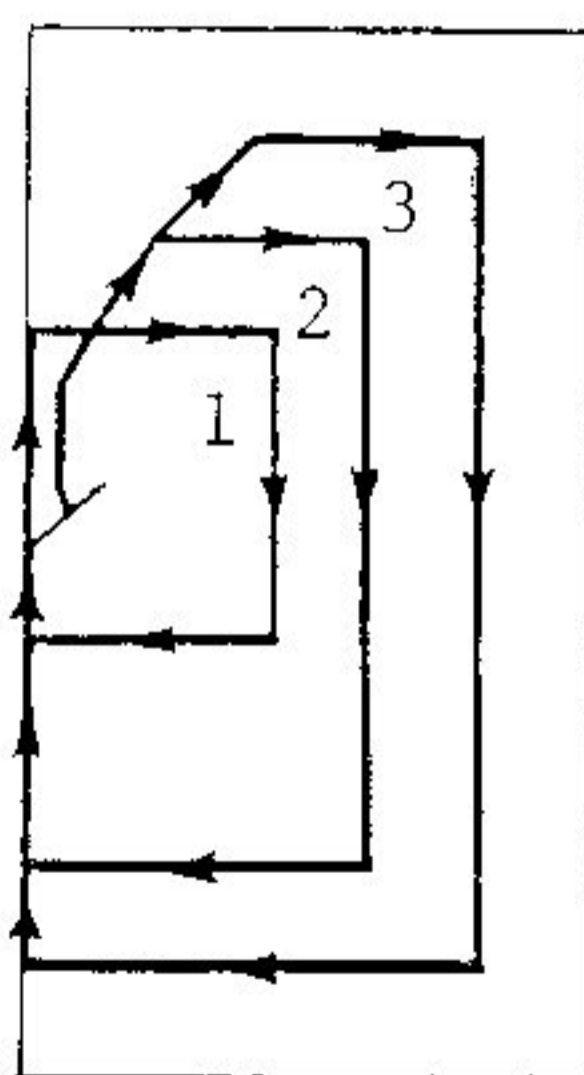


Figura 7.10 - Caminhos utilizados na avaliação de  $J$  para o Exemplo 3

A Tab. 7.4 compara os fatores de intensidade de tensão calculados com o valor  $K = 448,4$  obtido por Freese e apresentado por

Kisu, Yuuki e Matsumoto (1986). Observa-se, ainda nesta tabela, que os valores calculados para a integral J e seus respectivos fatores de intensidade de tensão correspondem à combinação dos modos de fratura I e II, segundo a relação (Owen e Fawkes, 1983) :

$$K = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} \quad (7.3)$$

CAMINHO	J	$K_I$	$K_{II}$	K	Erro %
1	1,111	-	-	483,0	-4,15
2	1,121	-	-	485,3	-3,69
3	1,130	-	-	487,1	-3,33
Freese	-	448,4	229,8	503,9	-

Tabela 7.4 - Resultados para o Exemplo 3

#### 7.5. Exemplo 4 - Disco em rotação com furo central fissurado

Considerou-se, como último exemplo, um disco de material de massa específica  $\rho = 7,3 \times 10^{-6} \text{ N/mm}^3$ , de raio externo  $r_e = 90 \text{ mm}$  e com um furo central de raio  $r_i = 45 \text{ mm}$  de onde se propagam simetricamente duas fissuras radialmente opostas de comprimento  $c = 9 \text{ mm}$  cada. O disco, representado na Fig. 7.11, gira a uma velocidade angular constante de  $\omega = 3141,6 \text{ rd/s}$ , que corresponde a 30000 rpm, aproximadamente.

Aproveitando a simetria do problema foi idealizada, inicialmente, uma malha sem considerar as fissuras com 336 graus de liberdade (Fig. 7.12) com o objetivo de balizar a implementação do carregamento do tipo centrífugo no SDP. A Fig. 7.13 apresenta os resultados da análise do equilíbrio via MEF, plotados em termos de tensões radiais ( $\sigma_r$ ) e tangenciais ( $\sigma_\theta$ ) juntamente com resultados analíticos (Ugural e Fenster, 1981) com os quais se observou uma boa concordância.

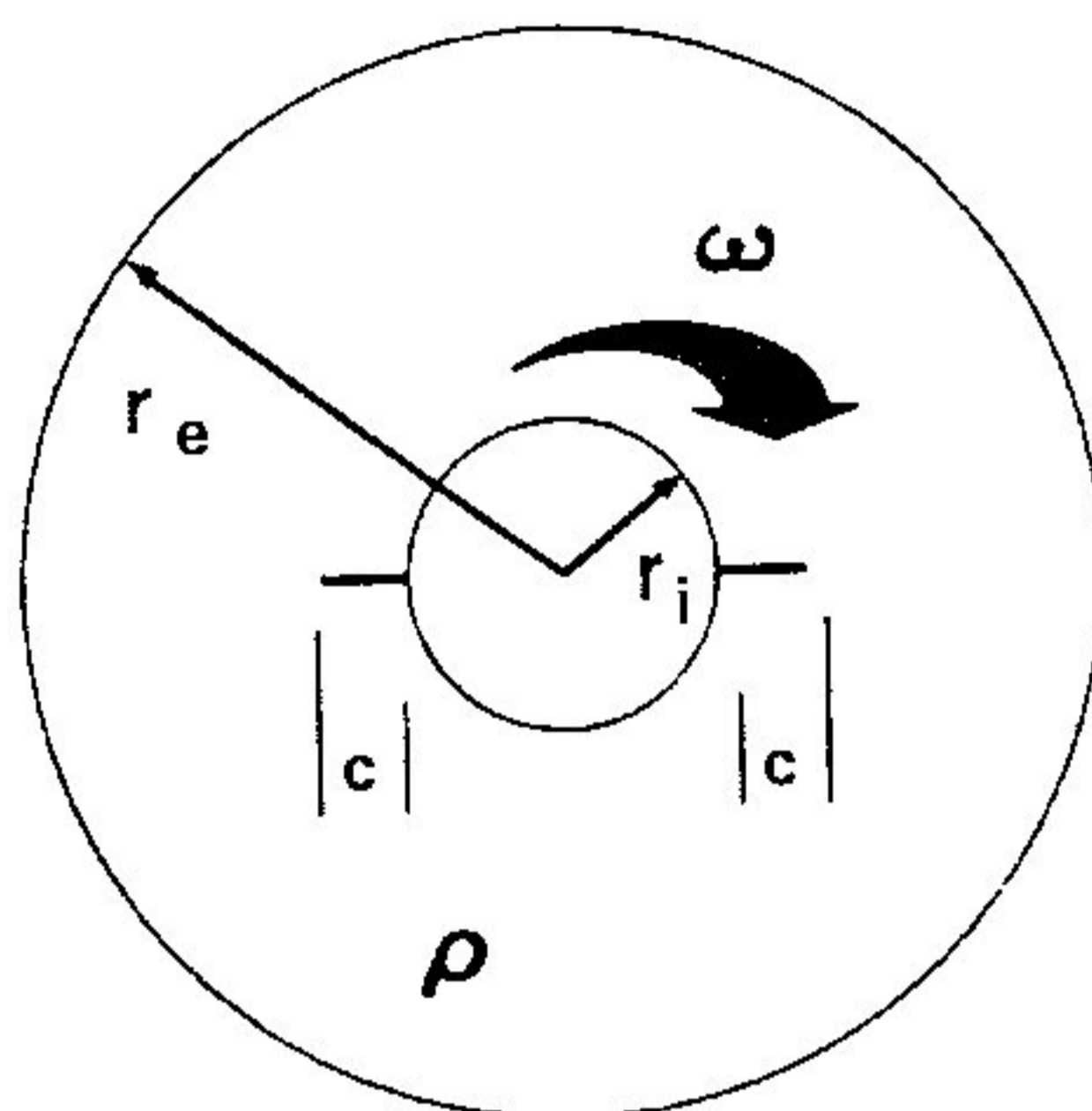


Figura 7.11 - Disco em rotação com furo central fissurado

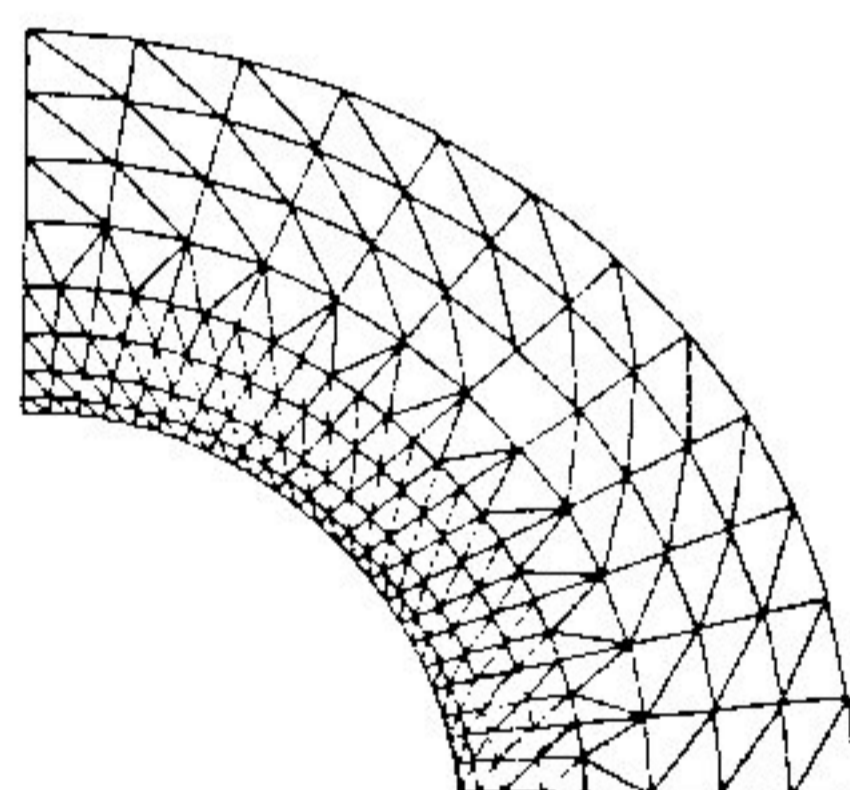


Figura 7.12 - Malha utilizada para o Exemplo 4 sem considerar fissuras no domínio

Após ter-se comprovado uma implementação correta do carregamento centrífugo no SDP, foi idealizada uma segunda malha com 387 graus de liberdade (Fig. 7.14), agora considerando a presença de fissuras no domínio. A integral  $J$  foi então avaliada nos caminhos apresentados na Fig. 7.15, utilizando-se as formulações de Bakker e aquela apresentada neste trabalho.

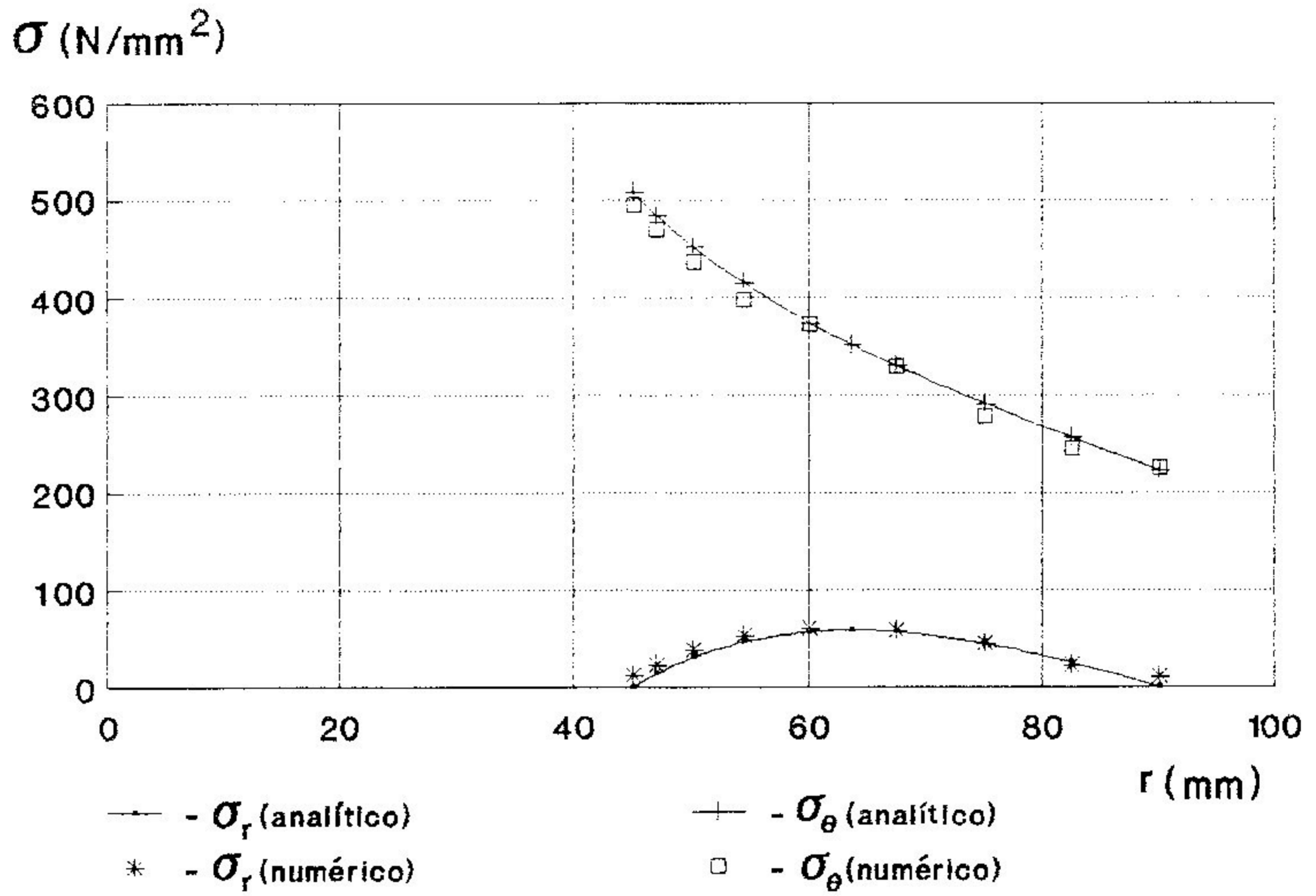


Figura 7.13 - Resultados para o Exemplo 4 sem considerar fissuras no domínio

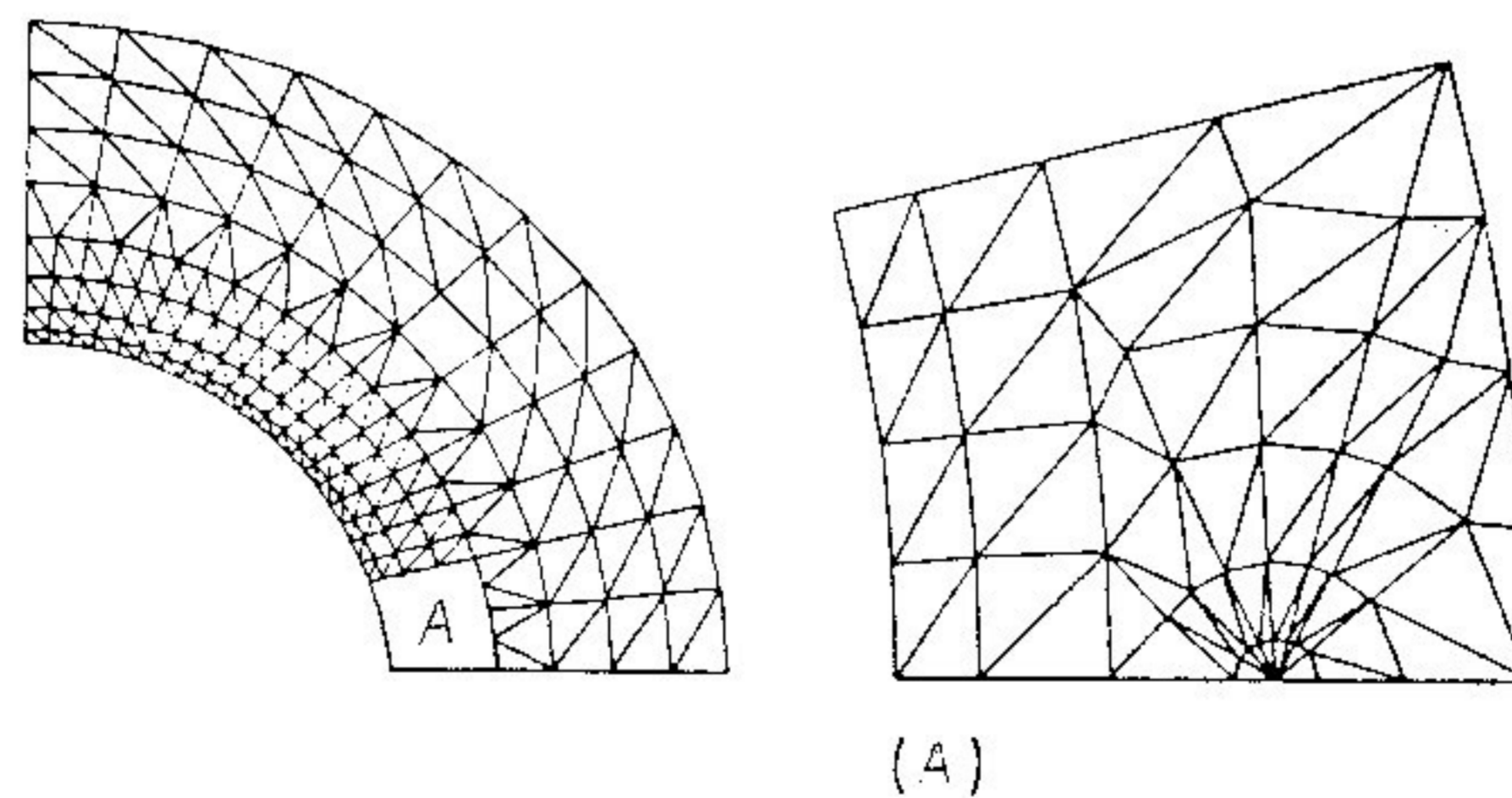


Figura 7.14 - Malha utilizada para o Exemplo 4 considerando fissuras no domínio

A Tab. 7.5 e Fig. 7.16 apresentam os resultados obtidos utilizando a formulação de Bakker, enquanto que na Tab. 7.6 e Fig. 7.17 são apresentados resultados de acordo com a formulação introduzida neste trabalho. Os fatores de intensidade de tensão calculados são comparados, em ambas as formulações, com o valor  $K_I = 3013$ , obtido por Murakami e Nisitani (Murakami, 1987).

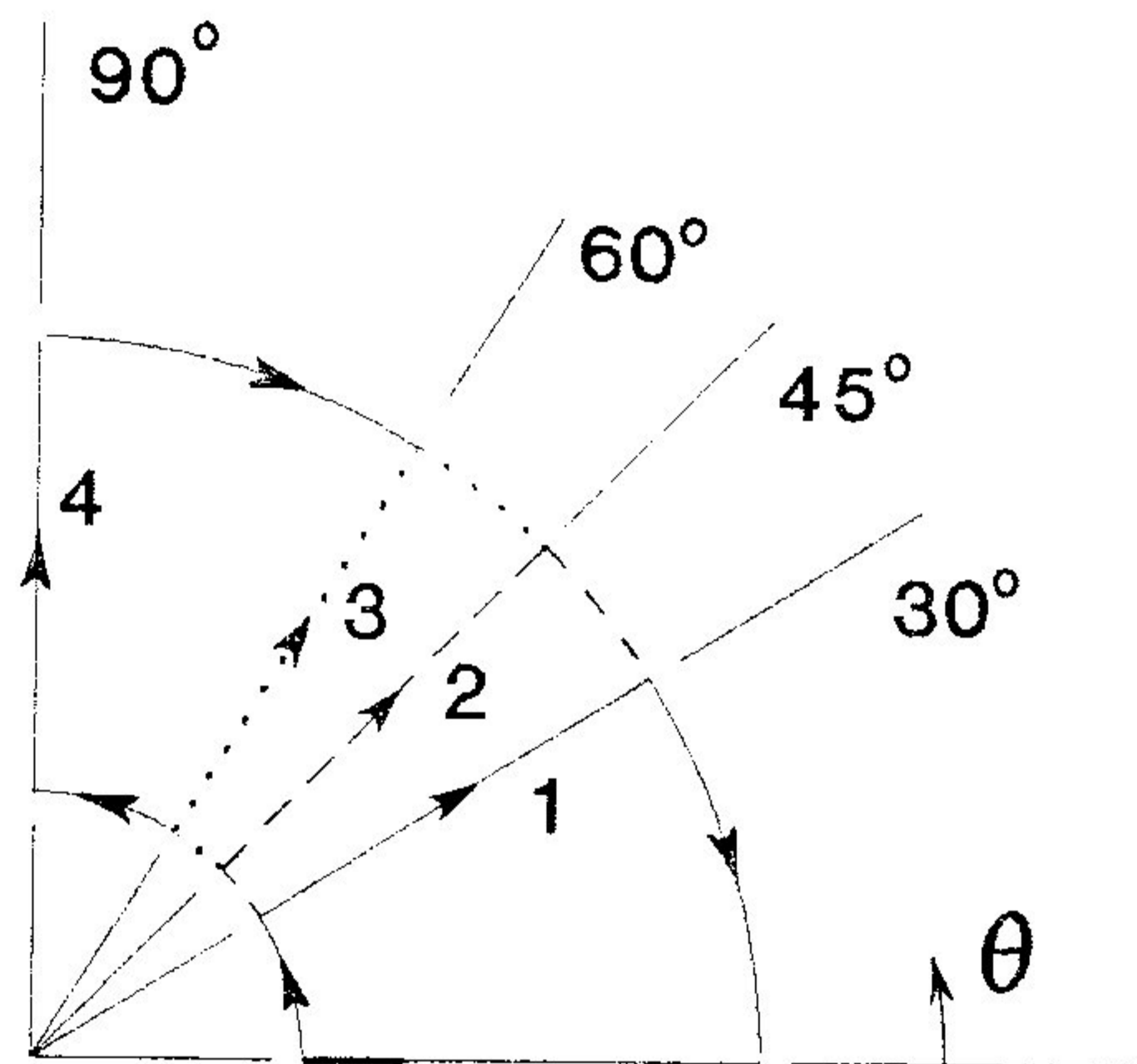


Figura 7.15 - Caminhos utilizados na avaliação de  $J$  para o Exemplo 4

Observa-se que as duas formulações levam a valores de fatores de intensidade de tensão próximos entre si e ao apresentado por Murakami, com erros percentuais inferiores a 5%, contrariando a expectativa de se obter uma melhor qualidade no cálculo numérico da integral  $J$  através da formulação introduzida neste trabalho, devido à ausência do termo singular  $\nabla u$  na integral de domínio. Uma possível justificativa seria a de que a parcela de contribuição da integral de domínio na formulação de Bakker é inferior em proporção à formulação aqui apresentada, o que compensaria o erro introduzido pelo termo singular  $\nabla u$  (Figs. 7.16 e 7.17).



CAMINHO	Int. no Cont.	Int. no Domínio	$\bar{J}$	$K_I$	Erro %
1	33,88	6,78	40,66	2922	-3,01
2	30,62	11,22	41,84	2964	-1,61
3	27,98	14,83	42,81	2998	-0,49
4	27,48	17,67	45,15	3079	2,20
Murakami	-	-	-	3013	-

Tabela 7.5 - Resultados para o Exemplo 4 - formulação de Bakker

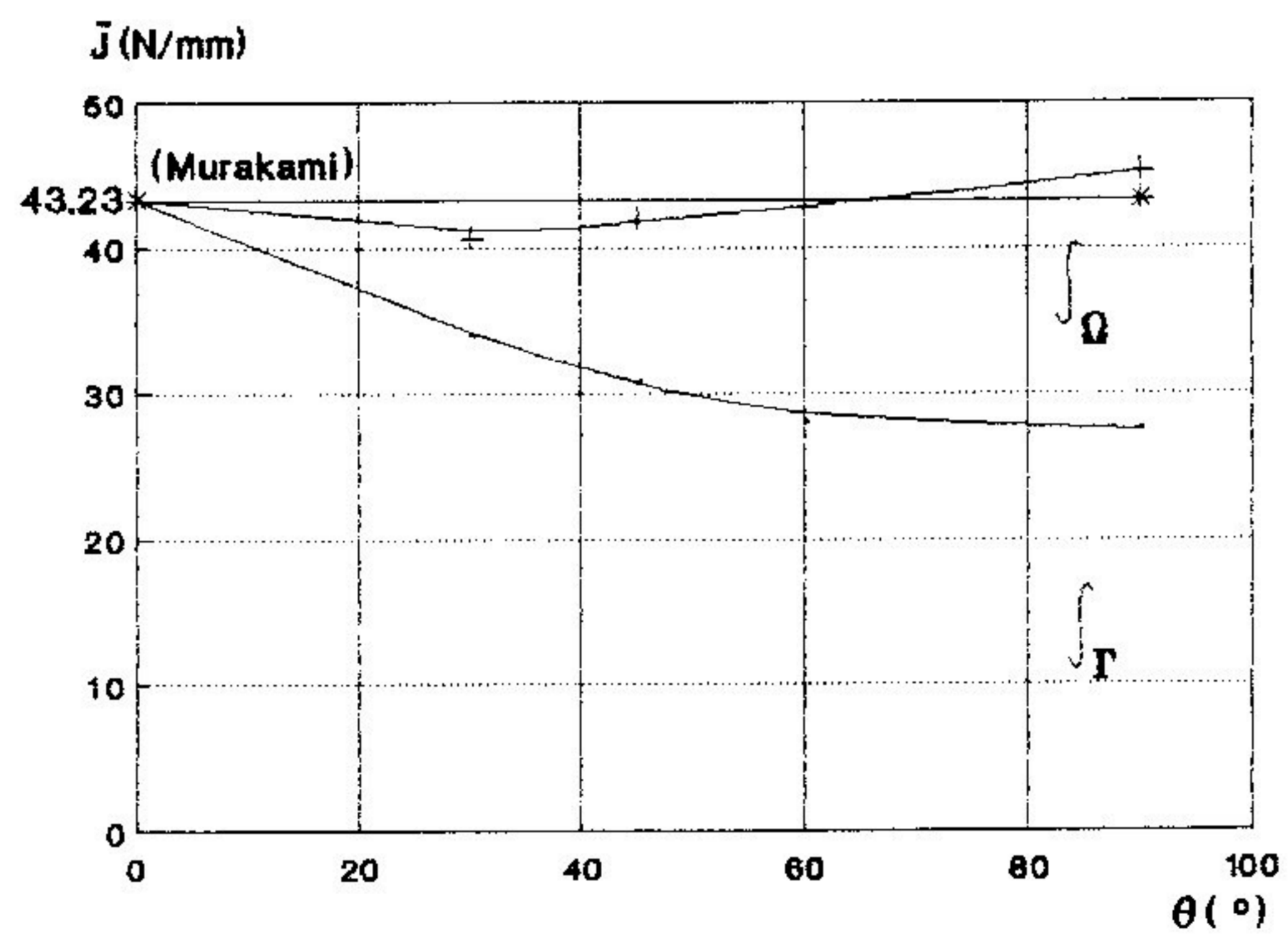


Figura 7.16 - Resultados gráficos para o Exemplo 4 - formulação de Bakker

CAMINHO	Int. no Cont.	Int. no Dominio	$\bar{J}$	$K_I$	Erro %
1	25,01	16,05	41,06	2936	-2,54
2	18,39	24,17	42,56	2990	-0,78
3	13,00	30,86	43,86	3035	0,73
4	10,15	36,78	46,93	3139	4,19
Murakami	-	-	-	3013	-

Tabela 7.6 - Resultados para o Exemplo 4 - formulação deste trabalho

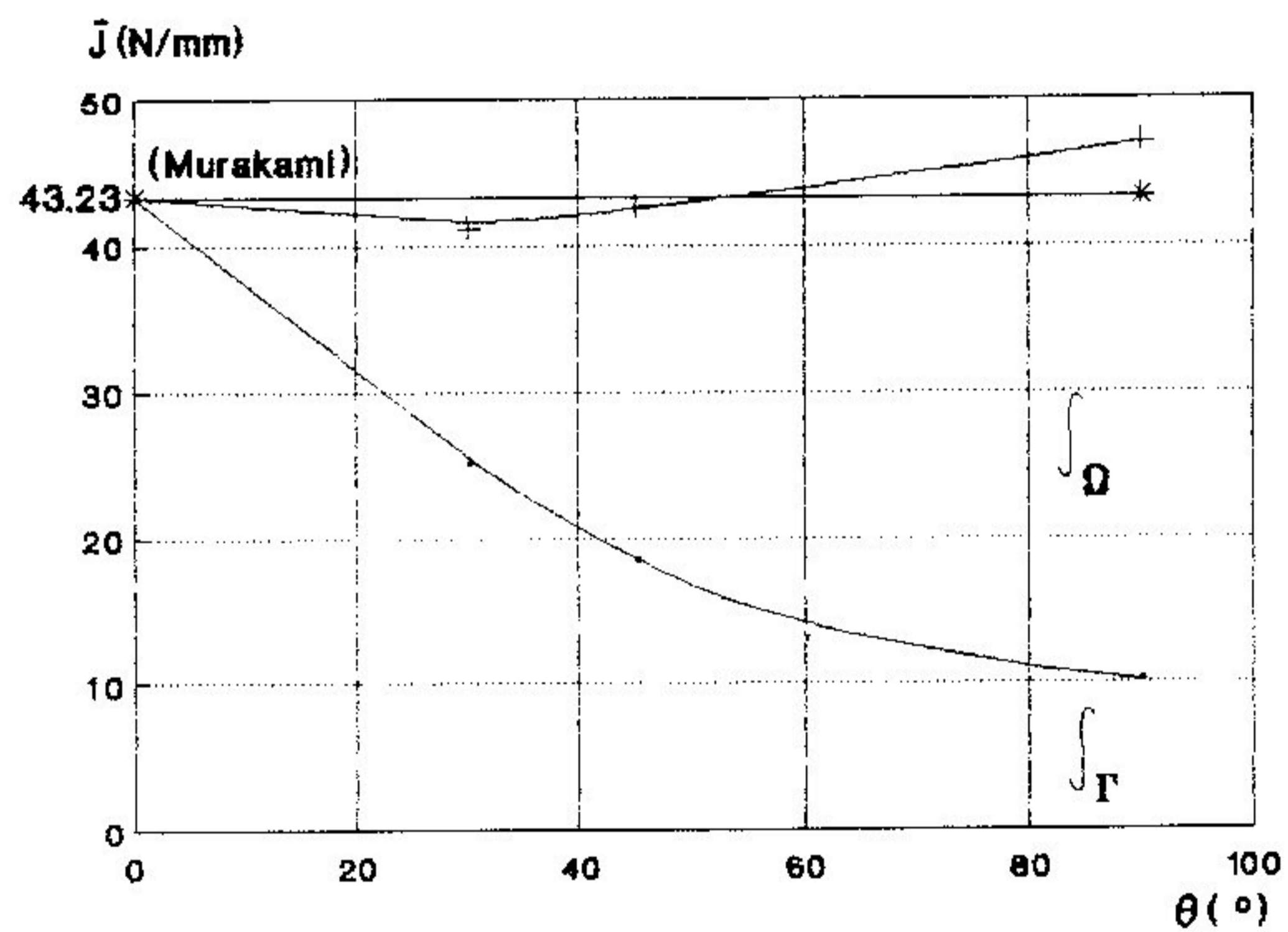


Figura 7.17 - Resultados gráficos para o Exemplo 4 - formulação deste trabalho

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE EXTENSÃO

O grande atrativo no uso da integral  $J$  na determinação de fatores de intensidade de tensão em problemas de fratura reside no fato de que é possível se obter a taxa de decréscimo da energia potencial associada à propagação da fissura com apenas uma análise do equilíbrio seguida por uma integração. Além disso sua propriedade de independência do caminho permite uma integração sobre contornos suficientemente afastados do vértice da fissura, região de singularidade nos campos de tensão e deformação.

A formulação variacional do problema permite obter expressões genéricas para o decréscimo da energia potencial correspondente a um incremento na fissura, fator que viabiliza sua extensão de maneira simples a casos mais gerais de grande interesse e caracteriza a potencialidade do método. Isto fica evidenciado neste trabalho quando introduz-se a consideração de carregamento no domínio. Além disso, pode-se associar tal formulação àquela utilizada em problemas de análise de sensibilidade, estreitamente ligada à otimização estrutural, considerando que a propagação de uma fissura nada mais é do que uma variação na forma do domínio (Cimini Jr., Taroco e Las Casas, 1991a). Desta forma é, a princípio, possível utilizar ferramentas típicas da área de otimização em problemas de mecânica da fratura.

A formulação para o cálculo do decréscimo da energia potencial em problemas onde se inclui carregamento no domínio, alternativa àquela apresentada por Bakker (1985), demonstrou ser de fácil implementação para o carregamento considerado (cargas centrífugas), ao contrário do que inicialmente se esperava. Também contrariamente às expectativas

iniciais, a qualidade dos resultados numéricos obtidos com esta formulação não foi superior, para o problema analisado, à obtida mediante a formulação de Bakker, fato que pode ser explicado pela proporção das contribuições das integrais de contorno e de domínio em ambas as formulações (na formulação de Bakker a integral de domínio, fonte esperada de erro no cálculo numérico devido à presença do termo singular  $\nabla u$ , contribui menos, proporcionalmente, do que a integral de domínio na formulação aqui apresentada). Entretanto, ambas as formulações apresentaram resultados com boa concordância entre si e com a literatura.

A utilização do método dos elementos finitos para a solução numérica do problema do equilíbrio se mostrou apropriada quando associado ao processo adaptativo  $r$  ou para malhas adequadamente discretizadas onde se privilegia a região de singularidade em termos de refinamento, uma vez que os resultados se mostraram bastante sensíveis ao modelo discreto empregado (Cimini Jr., Las Casas e Taroco, 1991b) e ao caminho utilizado (Cimini Jr., Taroco e Las Casas, 1991c). É importante salientar que um modelagem adequada do problema físico real corresponde a grande parte do sucesso de uma análise numérica, uma vez que simplificações são introduzidas no processo de modelagem matemática e, em seguida, na implementação do algoritmo numérico.

O uso do elemento triangular de deformação constante, estabelecido como parâmetro de simplicidade e precisão, não comprometeu a qualidade dos resultados, sempre situados numa faixa de erro aceitável sob o ponto de vista de aplicações na Engenharia. A simplicidade almejada com o uso deste tipo de elemento foi verificada pela facilidade na implementação das rotinas de cálculo da integral  $J$  no SDP, onde a média aritmética representativa das grandezas relevantes no ponto se mostrou adequada ao elemento utilizado. A precisão atingida permite reforçar a potencialidade do método, antevendo resultados ainda melhores com o emprego de elementos de ordem superior.

Os exemplos numéricos evidenciaram a versatilidade do método, apresentando resultados para associação de processos adaptativos, influência de carregamento na direção da fissura, combinação de modos de fratura I e II e presença de carregamento no domínio, todos compatíveis

com aqueles apresentados na literatura.

Várias extensões podem ser sugeridas como complemento ao trabalho apresentado. Sob o ponto de vista teórico, a formulação variacional apresentada permite que se trate de outros problemas de interesse, tais como:

- variação de espessura do domínio;
- separação de modos de fratura combinados;
- mecânica da fratura em problemas de impacto;
- emprego de materiais anisotrópicos (materiais compostos);
- plasticidade.

Uma outra linha que se pode seguir é a da melhoria da qualidade dos resultados numéricos via MEF, o que pode ser obtido mediante:

- uso intensivo de outras técnicas adaptativas, combinadas ou não;
- obtenção de norma para o erro de discretização que considere parâmetros específicos da mecânica da fratura;
- utilização de elementos de ordem superior ou de elementos que incluam a singularidade.

## APÊNDICE A

## DEMONSTRAÇÃO LOCAL DO EQUILÍBRIO A PARTIR DA LEI DE CONSERVAÇÃO

- 1) Tomar-se-á, primeiramente, o tensor momento-energia para o caso onde foi considerado apenas carregamento no contorno (item 3.2.1). Dessa forma :

$$\operatorname{div} \Sigma = \operatorname{div} [\phi \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T}] = \nabla \phi - [(\nabla^2 \mathbf{u})^T \mathbf{T} + (\nabla \mathbf{u})^T \operatorname{div} \mathbf{T}]$$

Do equilíbrio local, tem-se que :

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = 0$$

Então :

$$\operatorname{div} \Sigma = \nabla \phi - (\nabla^2 \mathbf{u})^T \mathbf{T}$$

Porém, das relações constitutivas e cinemáticas :

$$\nabla \phi = \mathbf{T} \nabla \mathbf{E} = \mathbf{T} \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla^2 \mathbf{u}) + (\nabla^2 \mathbf{u})^T] \right\}$$

Portanto :

$$\operatorname{div} \Sigma = \mathbf{T} \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla^2 \mathbf{u}) + (\nabla^2 \mathbf{u})^T] \right\} - (\nabla^2 \mathbf{u})^T \mathbf{T}$$

$$\operatorname{div} \Sigma = \frac{1}{2} \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u})^T - \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u})$$

Sabendo que os tensores  $\mathbf{T}$  e  $(\nabla^2 \mathbf{u})$  são simétricos :

$$\operatorname{div} \Sigma = \frac{1}{2} \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u}) - \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u})$$

$$\operatorname{div} \Sigma = \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u}) - \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u}) = 0$$

conforme se queria demonstrar.

2) Considerando, agora, o tensor momento-energia para o caso onde foi também utilizado carregamento no domínio (item 3.2.2), pode-se escrever :

$$\operatorname{div} \bar{\Sigma} = \operatorname{div} \{ [\phi - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})] \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T} \} =$$

$$\nabla [\phi - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})] - [(\nabla^2 \mathbf{u})^T \mathbf{T} + (\nabla \mathbf{u})^T \operatorname{div} \mathbf{T}]$$

Do equilíbrio local, tem-se que :

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{a} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = -\mathbf{a}$$

Então :

$$\operatorname{div} \bar{\Sigma} = \nabla [\phi - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})] - [(\nabla^2 \mathbf{u})^T \mathbf{T} + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a}] =$$

$$\nabla \phi - \nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) - (\nabla^2 \mathbf{u})^T \mathbf{T} + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} =$$

$$\nabla \phi - [(\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a}] - (\nabla^2 \mathbf{u})^T \mathbf{T} + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a}$$

Porém, das relações constitutivas e cinemáticas :

$$\nabla \phi = \mathbf{T} \nabla \mathbf{E} = \mathbf{T} \left\{ -\frac{1}{2} [(\nabla^2 \mathbf{u}) + (\nabla^2 \mathbf{u})^T] \right\}$$

Portanto :

$$\operatorname{div} \bar{\Sigma} =$$

$$\mathbf{T} \left\{ -\frac{1}{2} [(\nabla^2 \mathbf{u}) + (\nabla^2 \mathbf{u})^T] \right\} - (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} - (\nabla^2 \mathbf{u})^T \mathbf{T} + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} =$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u})^T - (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} - \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a}$$

Sabendo que os tensores  $\mathbf{T}$  e  $(\nabla^2 \mathbf{u})$  são simétricos :

$$\operatorname{div} \bar{\Sigma} = \frac{1}{2} \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u}) - (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} - \mathbf{T} (\nabla^2 \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a}$$

$$\operatorname{div} \bar{\Sigma} = - (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u}$$

$$2.1) \mathbf{a} \equiv \text{cte.} \quad \Rightarrow \quad \nabla \mathbf{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \bar{\Sigma} = 0$$

$$2.2) \mathbf{a} \equiv \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad \Rightarrow \quad \nabla \mathbf{a} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \bar{\Sigma} = -(\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u}$$

conforme se queria demonstrar.



## APÊNDICE B

OBTENÇÃO DA FORMULAÇÃO DE BAKKER A PARTIR DA FORMULAÇÃO APRESENTADA  
NESTE TRABALHO

A expressão dada pela Eq.(3.62) é tomada como ponto de partida para a obtenção da expressão de Bakker para o caso em que se considera carregamento no domínio :

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0$$

onde :

$$\bar{\Sigma} = [\phi - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})] \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T}$$

Substituindo, a expressão anterior na primeira equação :

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \{[\phi - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})] \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T}\} \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0$$

Separando o termo  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})$  :

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} [\phi \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T}] \mathbf{n} \, d\partial\Omega - \int_{\partial\Omega} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0$$

e aplicando o teorema da divergência neste termo :

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} [\phi \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T}] \mathbf{n} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \text{div} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] \, d\Omega = 0$$

Porém tem-se do cálculo tensorial que :

$$\operatorname{div} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I}] = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{I} = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})$$

e ainda que :

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a}$$

o que permite reescrever a expressão original como :

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} [\phi \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T}] \mathbf{n} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} [(\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a}] \, d\Omega = 0$$

Desdobrando ao terceiro termo do primeiro membro vem :

$$\int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} [\phi \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T}] \mathbf{n} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} \, d\Omega = 0$$

onde uma simplificação leva a :

$$\int_{\partial\Omega} [\phi \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T}] \mathbf{n} \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} \, d\Omega = 0$$

que pode ser reescrita como :

$$- \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} [\phi \mathbf{I} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T}] \mathbf{n} \, d\partial\Omega = 0$$

que coincide com a expressão proposta por Bakker (Eq. (3.67)).

## APÊNDICE C

## OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO DA INTEGRAL J PROPOSTA POR RICE

A expressão dada pela Eq.(4.8) é tomada como ponto de partida para a obtenção da expressão para a integral J tal qual foi proposta por Rice (1968) :

$$J = \left\{ \int_{\Gamma} [\phi \mathbf{n} - (\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{T} \mathbf{n}] d\Gamma \right\} \cdot \mathbf{e}_1 = \int_{\Gamma} [\phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_1] d\Gamma$$

Porém, do equilíbrio, tem-se que :

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{em } \Gamma$$

Então :

$$J = \int_{\Gamma} [\phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{t} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_1] d\Gamma = \int_{\Gamma} \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_1 d\Gamma$$

De acordo com a Fig. C.1 :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = n_1 = \cos \theta = \frac{dx_2}{d\Gamma} \quad \therefore \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 d\Gamma = dx_2$$

e sabendo que :

$$(\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}$$

tem-se :

$$J = \int_{\Gamma} \phi \, dx_2 - \int_{\Gamma} t \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \, d\Gamma$$

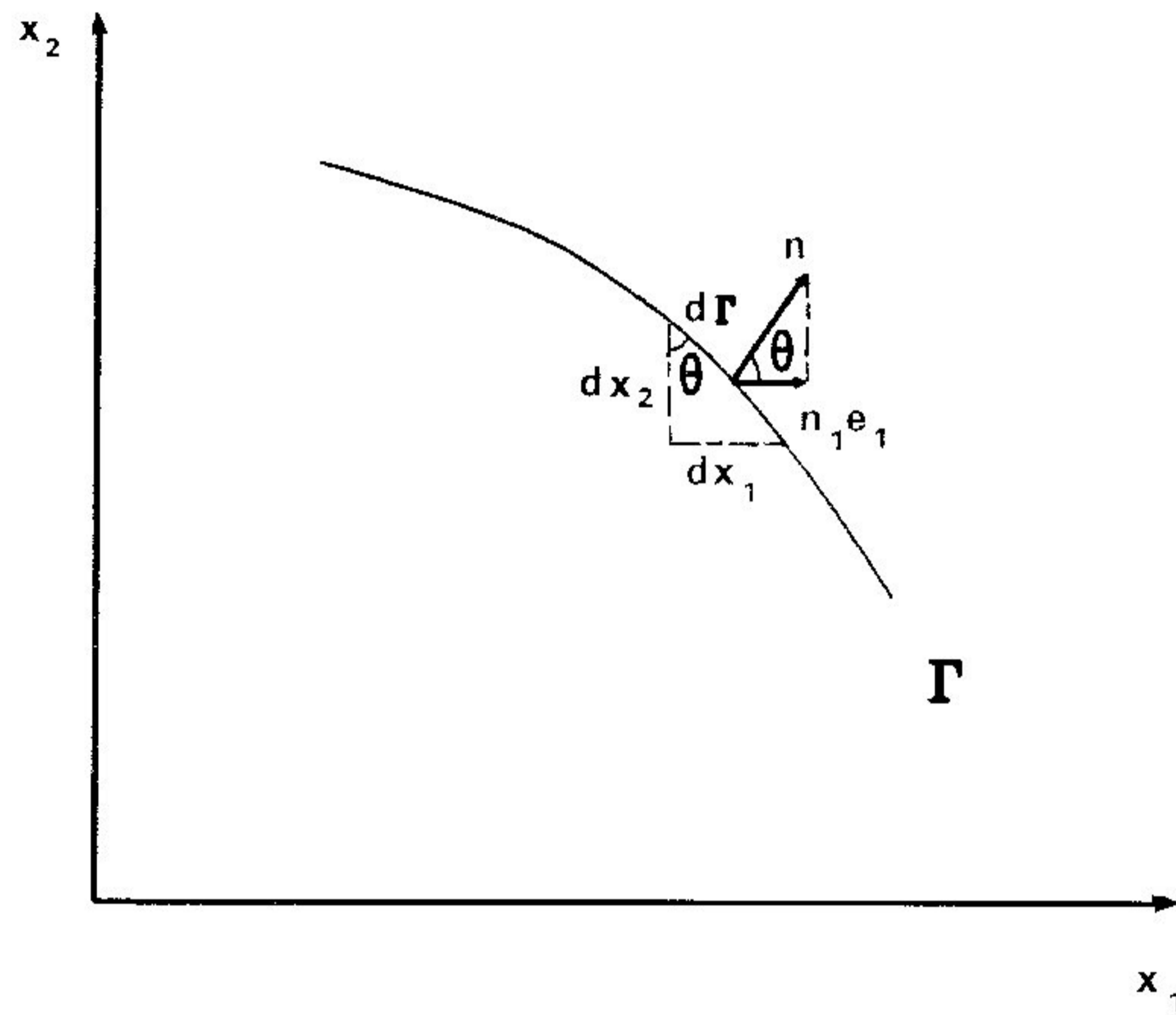


Figura C.1 - Elemento do caminho  $\Gamma$

Usando-se a notação equivalente :

$$\phi \equiv W ; \quad x_1 \equiv x ; \quad x_2 \equiv y \quad \text{e} \quad d\Gamma \equiv ds$$

chega-se à Eq. (1.19), conforme proposta por Rice (1968) :

$$J = \int_{\Gamma} \left[ W \, dy - t \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \, ds \right]$$

## APÊNDICE D

## INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO DA INTEGRAL J

1) Considerando apenas o carregamento de contorno

Para o caso de um contorno fechado, a integral J é idêntica a zero de maneira a satisfazer a lei de conservação estabelecida. De fato, considerando-se a integral J no caminho  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ , de acordo com a Fig. D.1, fechado e sem conter singularidades, e supondo a fissura reta e livre de tensões, seu resultado deve ser nulo, ou seja (Eq.(4.8)) :

$$J = \left[ \int_{\Gamma} \Sigma \cdot n \, d\Gamma \right] \cdot e_1 = 0$$

onde  $\Sigma$  é o tensor momento-energia dado pela expressão (Eq.(3.44)):

$$\Sigma = \phi I - \nabla u^T T$$

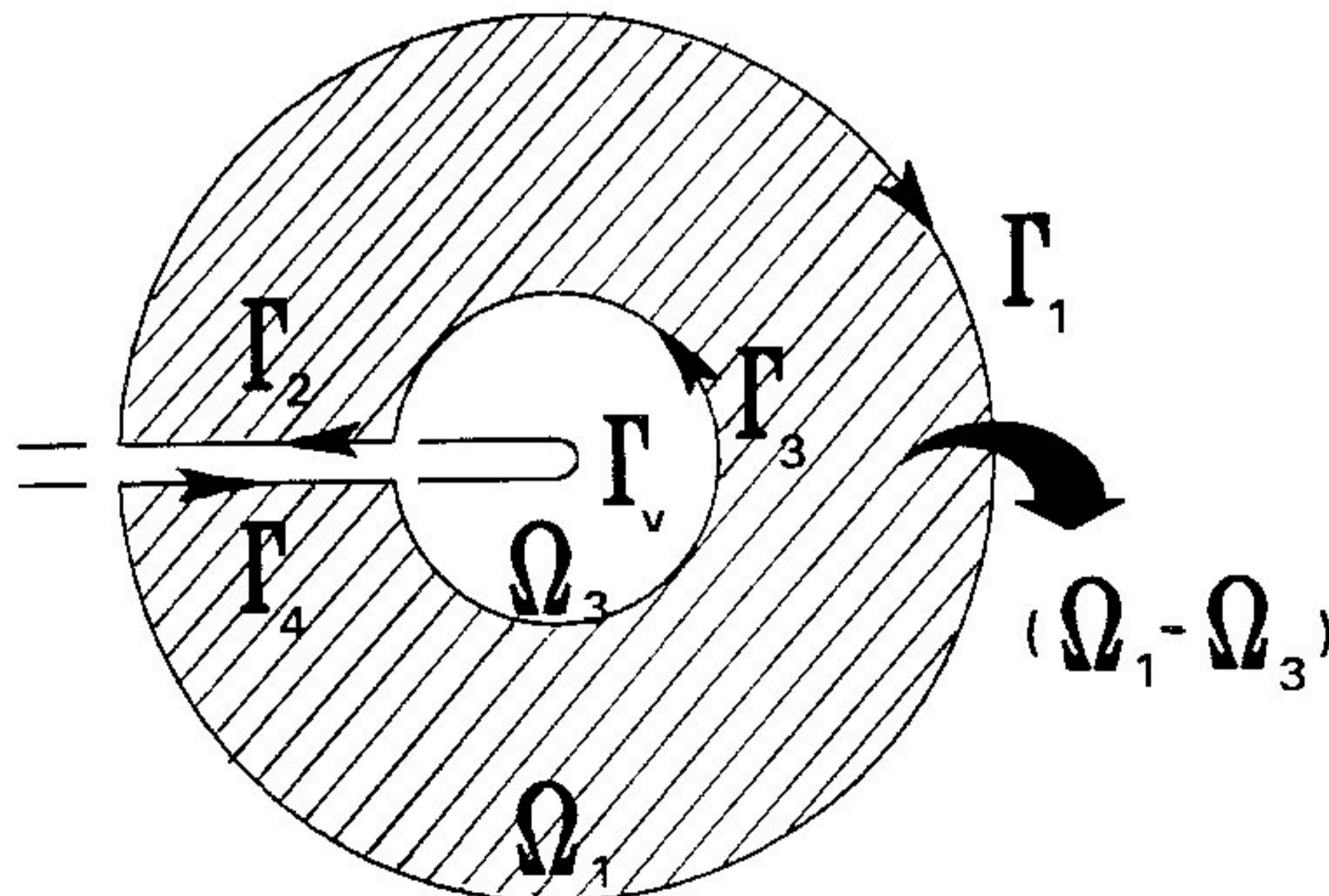


Figura D.1 - Caminho fechado para determinação da integral J

Dividindo-se esta integral na soma das integrais nos sub-caminhos  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  resulta na expressão:

$$\left[ \int_{\Gamma_1} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma \right] \cdot \mathbf{e}_1 + \left[ \int_{\Gamma_2} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma \right] \cdot \mathbf{e}_1 + \left[ \int_{\Gamma_3} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma \right] \cdot \mathbf{e}_1 + \left[ \int_{\Gamma_4} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma \right] \cdot \mathbf{e}_1 = 0$$

Tem-se, porém, que as integrais nos caminhos  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_4$  são idênticas a zero, uma vez que o tensor momento-energia se anula nestes contornos (a parcela  $\phi \mathbf{In} \cdot \mathbf{e}_1$  se anula devido à ortogonalidade entre  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{e}_1$  e a parcela  $\mathbf{Tn} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_1$  se anula devido ao tensor de tensões ser nulo, pois a fissura foi considerada livre de tensões). Então :

$$\left[ \int_{\Gamma_1} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma \right] \cdot \mathbf{e}_1 + \left[ \int_{\Gamma_3} \Sigma \mathbf{n} \, d\Gamma \right] \cdot \mathbf{e}_1 = J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_3} = 0$$

donde se observa que :

$$J_{\Gamma_1} = - J_{\Gamma_3}$$

Como o sentido de integração é oposto ao longo dos contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$ , pode-se escrever :

$$J_{\Gamma_1} = J_{\Gamma_{-3}}$$

onde  $\Gamma_{-3}$  corresponde a  $\Gamma_3$  tomado no sentido inverso ao longo do contorno.

Desta forma, diminuindo  $\Gamma_{-3}$  até um contorno arbitrário  $\Gamma_v$  (Fig. D.1), coincidente com a extremidade da fissura, leva a integral  $J$  no caminho  $\Gamma_1$  a caracterizar a energia ali armazenada. Como a escolha do caminho  $\Gamma_1$  é arbitrária, conclui-se que  $J$  é independente do caminho escolhido.

2) Considerando carregamento no contorno e no domínio

Para este caso a integral  $\bar{J}$  incorpora uma integral no domínio (Eq. (4.12)). Porém, considerando ainda a Fig. D.1, a integral  $\bar{J}$  se anula nos caminhos  $\Gamma_2$  e  $\Gamma_4$  pelos mesmos motivos explicados no item anterior mais o fato deles não envolverem domínio. Dessa maneira, pode-se escrever :

$$\left[ \int_{\Gamma_1} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_1} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega \right] \cdot \mathbf{e}_1 + \left[ \int_{\Gamma_3} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_3} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega \right] \cdot \mathbf{e}_1 = 0$$

onde  $\bar{\Sigma}$  é o tensor momento-energia para o caso de carregamento no domínio dado pela expressão (Eq. (3.63)):

$$\bar{\Sigma} = (\phi - \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} - \nabla \mathbf{u}^T \mathbf{T}$$

Portanto :

$$\left[ \int_{\Gamma_1} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_1} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega \right] \cdot \mathbf{e}_1 = - \left[ \int_{\Gamma_3} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_3} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega \right] \cdot \mathbf{e}_1$$

Como o sentido de integração é oposto para os caminhos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_3$ , conclui-se que :

$$\left[ \int_{\Gamma_1} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_1} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega \right] \cdot \mathbf{e}_1 = \left[ \int_{\Gamma_{-3}} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_3} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega \right] \cdot \mathbf{e}_1$$

onde  $\Gamma_{-3}$  corresponde a  $\Gamma_3$  quando se toma o sentido inverso ao longo do contorno. Pode-se, então escrever :

$$\left[ \int_{\Gamma_{-3}} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma \right] \cdot \mathbf{e}_1 = \left[ \int_{\Gamma_1} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{(\Omega_1 - \Omega_3)} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega \right] \cdot \mathbf{e}_1$$

Observa-se nesta expressão que a integral no contorno  $\Gamma_{-3}$  se iguala à integral no contorno  $\Gamma_1$  mais a integral no domínio  $(\Omega_1 - \Omega_3)$

hachurado na Fig. D.1. Novamente considerando o conceito da diminuição do contorno  $\Gamma_{-3}$  até um contorno arbitrário  $\Gamma_v$ , coincidente com a extremidade da fissura e não envolvendo domínio, obtém-se a igualdade entre os domínios  $(\Omega_1 - \Omega_3)$  e  $\Omega_1$ , uma vez que o domínio  $\Omega_3$  tende a zero durante este procedimento. Então :

$$\left[ \int_{\Gamma_v} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma \right] \cdot \mathbf{e}_1 = \left[ \int_{\Gamma_1} \bar{\Sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma + \int_{\Omega_1} (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{u} \, d\Omega \right] \cdot \mathbf{e}_1 = \bar{J}_{\Gamma_1}$$

A integral  $\bar{J}_{\Gamma_1}$  caracteriza, então, o estado de energia na extremidade da fissura e, como a escolha do caminho  $\Gamma_1$  é arbitrária, conclui-se que  $\bar{J}$  é independente do caminho.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 BABUŠKA, I., RHEINBOLDT, W.C. A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.12, p.1597-1615, 1978.
- 2 BAKKER, A. The J-Concept: Theoretical Basis and Its Use in EPFM. In: LARSSON, L.H. (ed.), **Elastic-Plastic Fracture Mechanics**, p.13-53. Brussels and Luxembourg, 1985.
- 3 BALLESTÉ, A., GUIMARÃES, A.C.S., FEIJÓO, R.A. **PREGRAF2 - Pré-Processador Gráfico - 2D**. Manual do Usuário, GDSEM - Grupo de Desenvolvimento de Software em Engenharia Mecânica, Departamento de Pesquisa e Desenvolvimento, Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC/CNPq, 1991.
- 4 CIMINI JR., C.A., TAROCO, E., LAS CASAS, E.B. Fatores de Intensidade de Tensão em Componentes Estruturais Mediante Avaliação Numérica da Integral J. In: Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, 25, 1991, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: UFRGS, 1991a. v.1, p.I-365-I-373.
- 5 CIMINI JR., C.A., LAS CASAS, E.B., TAROCO, E. Determinação de Fatores de Intensificação de Tensões Mediante o Cálculo da Integral J Usando um Processo Adaptativo R. In: Congresso Íbero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para a Engenharia - MECOM, 12, 1991, Santa Fe. **Anais...** Santa Fe: AMCA, 1991b. v.12, p.427-436.

- 6 CIMINI JR., C.A., TAROCO, E., LAS CASAS, E.B. A Integral J na Determinação de Fatores de Intensificação de Tensões para Discos Fissurados em Rotação. In: Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM, 11, 1991, São Paulo. **Anais...** São Paulo: ABCM, 1991c. v.1, p.21-24.
- 7 CHEREPANOV, G.P. On Crack Propagation in Solids. **International Journal of Solids and Structures**, v.5, p.863-871, 1969.
- 8 DIAZ, A.R., KIKUCHI, N., PAPALAMBROS, P., TAYLOR, J. Design of an Optimal Grid for Finite Element Methods. **Journal of Structural Mechanics**, p.215, 1983.
- 9 ESHELBY, J.D. Energy Relations and the Energy-Momentum Tensor in Continuum Mechanics. In: KANNINEN, M.F. et al (ed.), **Inelastic Behavior of Solids**. New York: McGraw-Hill, 1969, p.77-115.
- 10 ESHELBY, J.D. The Elastic Energy-Momentum Tensor. **Journal of Elasticity**, v.5, p.321-335, 1975.
- 11 FEIJÓO, R.A., GOUVÊA, J.P. El Sistema SDP. In: Congreso Ibero-Americano de Métodos Computacionales en Ingeniería, 1, 1985, Madri. **Anais...** Madri: [s.n.], 1985.
- 12 GELFAND, I.M., FOMIN, S.V. **Calculus of Variations**. N.Jersey: Prentice Hall, 1963.
- 13 GOUVÊA, J.P. **SDP - Um Sistema para Desenvolvimento de Programas Baseados no Método dos Elementos Finitos**. Rio de Janeiro: PUC, 1986. Tese (DSc), Departamento de Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1986.
- 14 GRIFFITH, A.A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v.A221, p.163-197, 1920.

- 15 GRIFFITH, A.A. The Theory of Rupture. In: International Conference of Applied Mechanics, 1, 1924, Delft. **Proceedings...** Delft: [s.n.], 1924. p.55-63.
- 16 HAUG, E.J., CHOI, K.K., KOMKOV, V. **Design Sensitivity Analysis of Structural Systems.** Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1986.
- 17 HELLAN, K. **Introduction to Fracture Mechanics.** Singapore: McGraw-Hill, 1985.
- 18 INGLIS, C.E. Stress in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners. **Transactions of the Institute of Naval Architects,** v.55, p.219-241, 1913.
- 19 IRWIN, G.R. Fracture Dynamics. **Fracturing of Metals,** American Society for Metals, Cleveland, p.147-166, 1948.
- 20 IRWIN, G.R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. **Journal of Applied Mechanics,** v.24, p.361-364, 1957.
- 21 KELLY, D.W., GAGO, J.P.S.R., ZIENKIEWICZ, O.C. A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I - Error Analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering,** v.19, p.1593-1619, 1983.
- 22 KISU H., YUUKI, R., MATSUMOTO, T. On the Improvement of the Boundary Element Analysis for the Crack Problems. In: International Conference on Computational Mechanics, 1986, Tokyo. **Proceedings...** G. Yagawa e S.N. Atluri (eds.). Tokyo: Springer-Verlag, 1986. v.1, p.V-107-V-112.
- 23 KNOWLES, J.K., STERNBERG, E. On a Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics. **Archive for Rational Mechanics and Analysis,** v.44, p.187-211, 1972.

- 24 LARSSON, L.H. **Introduction to Advanced Seminar ASFMA on Elastic-Plastic Fracture Mechanics**. D. Reidel Publising Company, 1985.
- 25 LAS CASAS, E.B. Um Processo Adaptativo Misto Global para o Método dos Elementos Finitos. **Revista Brasileira de Engenharia - Caderno de Estruturas**, v.6, no.2, p.41-47, 1990.
- 26 MAY, M.J. Fracture Toughness. **The Iron and Steel Institute**, cap.7, p.101-104, 1968.
- 27 MURAKAMI, Y. (ed.). **Stress Intensity Factors Handbook**. Committee on Fracture Mechanics, The Society of Materials Science, Japan: Pergamon Press, 1987.
- 28 NOOR, A.K., BABUŠKA I. Quality Asssesment and Control of Finite Element Solutions. **Finite Element in Analysis and Design**, v.3, p.1-27, 1987.
- 29 OROWAN, E. Fracture and Strength of Solids. **Reports on Progress in Physics**, v.XII, p.185, 1948.
- 30 OROWAN, E. Energy Criteria of Fracture. **Weld J. Res. Suppl.**, v.20, p.157s, 1955.
- 31 OWEN, D.R.J., FAWKES, A.J. **Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications**. Swansea: Pineridge Press, 1983.
- 32 PEANO, A., FANELLI, M., RICCIONI, R., SARDELLA, R. Self-Adaptive Convergence at Crack Tip of a Dam Buttress. In: International Conference in Numerical Methods in Fracture Mechanics, 1978, Swansea. **Proceedings...** Swansea:[s.n.], 1978. p.9-13.
- 33 RICE, J.R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration By Notches and Cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v.35, p.379-386, 1968.

- 34 ROOKE, D.P., CARTWRIGHT, D.J. **Compendium of Stress Intensity Factors.** London (Uxbridge): Her Majesty's Stationery Office, 1976.
- 35 SANDERS, J.L. On the Griffith-Irwin Fracture Theory. **Journal of Applied Mechanics**, v.27, p.352-353, 1960.
- 36 SIH, G.C. **Handbook of Stress Intensity Factors.** Bethlehem: Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, 1973.
- 37 TIMOSHENKO, S.P. **History of the Strength of Materials.** New York: McGraw-Hill, 1953.
- 38 UGURAL, A.C., FENSTER, S.K. **Advanced Strength and Applied Elasticity: The SI Version.** New York: Elsevier Science Publishing Co., 1981.
- 39 WESTERGAARD, H.M. Bearing Pressures and Cracks. **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, v.61, p.A49-A53 1939.
- 40 ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU, J.Z. A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.24, p.337-357, 1987.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 BROEK, D. **Elementary Engineering Fracture Mechanics**. Leyden: Noordhoff, 1982.
- 2 HELLAN, K. **Introduction to Fracture Mechanics**. Singapore: McGraw-Hill, 1985.
- 3 KANNINEN, M.F., POPELAR, C.H. **Advanced Fracture Mechanics**. Oxford, 1985.
- 4 LAS CASAS, E.B. **R-H Mesh Improvement Algorithms for the Finite Element Method**. PhD Thesis, Purdue University, 1988.
- 5 OWEN, D.R.J., FAWKES, A.J. **Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications**. Swansea: Pineridge Press, 1983.
- 6 TAROCO, E. **Leyes de Conservacion e Integrales Independientes del Camino en Mecanica de la Fractura**. Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento, no.008/91, Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC/CNPq, Rio de Janeiro, 1991.