

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE TÚNEIS PELO
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Autor: Marcello Claudio Teixeira
DEZEMBRO DE 1992

Aos meus pais,

Cada passo quem ilumina,
Faz a vida ser o exemplo!
Mostra a fé que determina
Cada sonho, qual seu tempo.

AGRADECIMENTOS

À Maria Clara e Marcellinho, minha esposa e filho, que, com compreensão e carinho neste menor tempo de convivência, estiveram sempre presentes.

Aos meus irmãos, Roque e Marthinha, que dividindo o tempo e as obrigações, com apoio e incentivo, tornaram possível minha dedicação à elaboração deste trabalho.

Ao Professor Fernando Amorim de Paula pela excelente orientação, grande interesse e amizade.

Ao Professor Gabriel Oliveira Ribeiro que, como co-orientador, esteve sempre à disposição com suas sugestões, esclarecimentos e conhecimento.

Ao Professor Wilson S. Venturini pelo programa de computador e valiosos esclarecimentos.

Aos colegas, professores e funcionários do Departamento de Estruturas pelo convívio e incentivo.

RESUMO

Esta dissertação apresenta a análise bidimensional elastoplástica de túneis pelo Método dos Elementos de Contorno na sua forma direta, utilizando-se a derivada da integral de domínio das tensões iniciais, na expressão das tensões nos pontos internos, segundo o conceito de Mikhlin. É feita uma revisão dos conceitos de plasticidade e descritas várias formas de execução de aberturas subterrâneas. São utilizados quatro critérios de escoamento de maneira unificada, Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager e o processo das tensões iniciais para o algoritmo não-linear que não inclui a restrição de incompressibilidade das deformações inelásticas. Pode-se estudar problemas de Estado Plano de Deformação ou de Tensão, alterando-se apenas o coeficiente de Poisson.

Túneis revestidos são estudados através da técnica de sub-regiões utilizando-se a solução fundamental de Kelvin para domínios infinitos bidimensionais em túneis profundos e a solução fundamental do semi-plano em túneis superficiais.

Foram incluídos quatro exemplos de aplicação com o objetivo de esclarecer as diversas formas de emprego do método numérico comparando-se os resultados obtidos entre as análises elástica e plástica.

ABSTRACT

In this dissertation a two-dimensional elasto-plastic tunnelling analysis, using the Direct Boundary Element Method, is presented. Mikhlin's concept for the derivative of the singular integral of the inelastic term, in the expressions for the stresses at internal points, is employed. A review of the theory of plasticity and a description of several construction procedures for underground openings are also done. Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb and Drucker-Prager yield criteria in a unified form are used in association with the initial stress process in a non-linear algorithm which does not include the assumption of incompressibility of the inelastic strains. With this process, plane stress problems can be solved by the plane strain expressions simply changing Poisson's ratio.

Lined tunnels are analysed using the sub-regions technique. Kelvin's fundamental solution for 2D infinite domain is employed in the analysis of deep tunnels and the half-plane fundamental solution for shallow tunnels.

Four example problems are discussed to demonstrate the accuracy and versatility of the method comparing results for elastic and elastoplastic analysis.

ÍNDICE

I.	INTRODUÇÃO.....	1
II.	AS ABERTURAS DE TÚNEIS	
	2.1 - Deformações em Escavações Subterrâneas....	11
	2.2 - Efeito Tridimensional da Frente de Escavação.....	13
	2.3 - Estado Inicial de Tensões no Maciço.....	14
	2.4 - Métodos de Dimensionamento.....	16
	2.5 - A Construção de Túneis.....	17
III.	COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DOS MATERIAIS	
	3.1 - Conceitos da Teoria da Plasticidade.....	22
	3.2 - Lei de Endurecimento.....	26
	3.3 - Lei do Escoamento Plástico.....	28
	3.4 - Critérios de Escoamento.....	33
	3.4.1 - Critério de Tresca.....	36
	3.4.2 - Critério de Von Mises.....	37
	3.4.3 - Critério de Mohr-Coulomb.....	38
	3.4.4 - Critério de Drucker-Prager.....	39
	3.5 - Formulação Matricial.....	42
	3.6 - Forma Unificada dos Critérios de Escoamento.....	45
	3.6.1 - Vetor de Fluência para o Critério de Tresca.....	49
	3.6.2 - Vetor de Fluência para o Critério de Von Mises.....	49
	3.6.3 - Vetor de Fluência para o Critério de Mohr-Coulomb.....	49
	3.6.4 - Vetor de Fluência para o Critério de Drucker-Prager.....	50
	3.7 - Expressões para o Estado Plano.....	50

3.8 - Singularidades na Superfície de Escoamento.....	52
IV. EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA ELASTOPLASTICIDADE	
4.1 - Introdução.....	54
4.2 - Identidade de Somigliana Estendida para o Caso Inelástico.....	55
4.3 - Soluções Fundamentais.....	61
4.4 - Tensões nos Pontos Internos.....	66
4.5 - Equação Integral de Contorno.....	73
4.6 - Tensões no Contorno.....	80
V. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	
5.1 - Introdução.....	88
5.2 - Transformação das Equações Integrais em um Sistema Algébrico.....	89
5.3 - Elemento de Contorno Linear.....	94
5.4 - Integração Analítica para os Coeficientes de Influência nos Pontos Singulares.....	96
5.4.1 - Integração Analítica dos Termos da Matriz g.....	96
5.4.2 - Integração Analítica dos Termos da Matriz h.....	103
5.5 - Células Triangulares Lineares.....	109
5.6 - Algoritmo para Análise Não-Linear.....	121
5.7 - Movimento de Corpo Rígido.....	125
5.8 - Sub-Regiões.....	126
VI. EXEMPLOS NUMÉRICOS	
6.1 - Introdução.....	128
6.2 - Túnel Profundo e Superficial sem Revestimento.....	131
6.3 - Túnel Profundo com Espessura do Revestimento Variável.....	136
6.4 - Retro-análise para Túnel não Revestido.....	146
6.5 - Túnel Superficial Revestido com	

	Carregamento na Superfície livre.....	149
VII.	CONCLUSÕES.....	153
VIII.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	155
IX.	APÊNDICE.....	166

CAPÍTULO I

Introdução:

A análise elastoplástica em projeto de túneis produz, além de um dimensionamento econômico, um coeficiente de segurança mais confiável. A influência da característica tridimensional da frente de escavação pode ser amenizada através de técnicas construtivas adequadas, permitindo que o problema seja estudado como estado plano de deformação. A monitoração dos deslocamentos por meio de medidas de convergência, de uso comum neste tipo de obra, permite uma contínua aferição da segurança da escavação prevista em projeto. Como consequência, consegue-se uma otimização na velocidade e comprimento do avanço. O processamento de todas essas informações requer uma ferramenta ágil e precisa como o Método dos Elementos de Contorno.

Rabcewicz (1964) revolucionou a filosofia das escavações subterrâneas observando que um escoramento rompido durante a construção, era substituído por outro mais esbelto e suficientemente seguro. O maciço vizinho à abertura se plastifica transformando-se em um arco auto-portante ou, então, aliviando as tensões sobre o

escoramento. Usando-se este raciocínio pode-se obter revestimentos bem mais esbeltos através de sua aplicação no devido tempo. O conceito do Novo Método Austríaco de Abertura de Túneis (NATM) incentivou vários pesquisadores na justificativa deste fenômeno. Rabcewicz usou o modelo de Kastner (1962) apud Széchy (1970) para mostrar, de maneira simplificada, o fenômeno do alívio de tensões. Outras justificativas apareceram através de dois caminhos: os analíticos ou em forma fechada e os numéricos, notadamente pelo Método dos Elementos Finitos e pelo Método dos Elementos de Contorno.

Dentre os caminhos analíticos Höeg (1968) apresentou expressões para as tensões e deslocamentos no revestimento de túneis circulares submetidos a carregamento externo não hidrostático após a colocação do suporte, sendo que este não se desloca em relação ao maciço. Estas expressões são baseadas na Teoria da Elasticidade e na função de Michell generalizada, mostrada em Timoshenko e Goodier (1970). Foram também usadas as equações das cascas cilíndricas. Peck *et alii* (1972) estenderam o trabalho de Höeg para revestimentos que se deslocam em relação ao maciço. Hendron e Aiyer (1972) apresentaram expressões para análise elastoplástica de túneis circulares, revestidos ou não, submetidos a carregamento hidrostático. O material do maciço foi considerado obedecendo ao critério de escoamento de Mohr-Coulomb. Mais tarde, Einstein e Schwartz (1979) complementaram os trabalhos de Höeg e Peck para condição de alívio de tensões por escavação, onde considerou-se o efeito dos deslocamentos antes da abertura. Teixeira (1986) desenvolveu as equações destes trabalhos, apresentando também as tensões e deslocamentos no interior do maciço. Detournay e Fairhurst (1987) desenvolveram um procedimento semi-analítico para análise elastoplástica bidimensional de aberturas circulares em rochas sujeitas a carregamento não hidrostático. Os autores chamaram a atenção para as hipóteses restritivas das condições de contorno para que o

problema seja estaticamente determinado. Outra restrição obriga a região plastificada circundar totalmente a abertura levando os valores admissíveis de K_0 , que representa a relação entre as tensões originais horizontal e vertical, para uma faixa próxima da unidade. Foi utilizada a função de escoamento de Mohr-Coulomb.

O trabalho pioneiro em métodos numéricos de análise elastoplástica de túneis é devido a Reyes e Deere (1966) que usaram o Método dos Elementos Finitos para estudar o comportamento de um túnel circular profundo, não revestido, escavado em rocha. Foi usado o critério de escoamento de Drucker-Prager, comportamento elástico perfeitamente plástico para o maciço rochoso e carregamento horizontal proporcional ao vertical. Goodman (1966) analisou a distribuição de tensões para túneis circulares em maciços rochosos heterogêneos. Observou que, quando um túnel é escavado através de contato vertical entre duas rochas com módulos elásticos diferentes, as tensões aumentam na rocha mais rígida e diminuem na rocha mais fraca. Zienkiewicz et alii (1968-69) apresentaram primeiro um modelo de material que não resiste à tração, chamado de *No Tension*, e depois o modelo elastoplástico de Drucker-Prager para estudar um túnel revestido de forma elíptica, empregando um algoritmo incremental e iterativo para análise não-linear que foi chamado de *processo das tensões iniciais*. Neste processo o sistema de equações é resolvido uma única vez, economizando-se significativamente o esforço computacional. O algoritmo introduz na região plastificada um campo de *tensões iniciais*, de forma incremental e iterativa, que é monitorado pelo critério de escoamento, dando origem às tensões plásticas.

Caso o carregamento seja tensões in situ, elas são consideradas através da superposição de dois carregamentos. O primeiro se refere às tensões originais antes da abertura e o segundo às tensões no contorno, com o sentido contrário, de tal maneira que a soma dos dois carregamentos

anulam as tensões na face do túnel simulando os efeitos da escavação. Resolve-se o problema para o segundo carregamento e depois soma-se o primeiro carregamento para obter-se a tensão real no ponto considerado.

Backer *et alii* (1969) analisaram o mesmo túnel de Reyes e Deere com técnica numérica diferente, visando acelerar o processo iterativo. Almeida (1977) apresentou um estudo sobre os aspectos envolvidos em escavações subterrâneas e os métodos de dimensionamento; abordou os conceitos de plasticidade ligados à Mecânica dos Solos e fez uma revisão dos modelos tensão-deformação para uso no Método dos Elementos Finitos. Finalmente descreveu o Método dos Elementos Finitos aplicado a túneis, através do elemento isoparamétrico e do critério de escoamento de Drucker-Prager. Utilizou o processo das tensões iniciais para o algoritmo não-linear e fez a aplicação de um programa computacional por ele desenvolvido. Os exemplos apresentados foram os mesmos de Reyes e Deere (1966) e de Zienkiewicz *et alii* (1969). Owen e Hinton (1980) apresentaram minucioso programa de computador para resolver vários problemas, entre eles os problemas planos não-lineares. Foi mostrada a implementação do algoritmo do processo das tensões iniciais bem como a forma unificada dos critérios de escoamento sugerida por Nayak e Zienkiewicz (1972).

A primeira publicação relacionando equações integrais e materiais com comportamento não-linear é devido a Swedlow e Cruse (1971). Foram apresentadas as equações constitutivas elastoplásticas para materiais encruáveis e fluência plástica compressível e anisotrópica. Desenvolveu-se a identidade de Somigliana estendida, incorporando-se a parcela correspondente à integral de volume das deformações plásticas. Os autores reconheceram as dificuldades introduzidas pela presença desta integral de domínio em problemas de plasticidade. Somente a expressão dos deslocamentos foi mostrada e não se incluiu

nenhuma aplicação da teoria. Riccardella (1973) baseou-se no trabalho anterior e implementou um algoritmo para elastoplasticidade bidimensional usando o critério de Von Mises. Ao calcular as tensões nos pontos internos ele observou a natureza fortemente singular da integral de volume das deformações plásticas. Esta dificuldade foi contornada, integrando-se analiticamente o termo da deformação plástica e depois obtendo-se as derivadas. Pela dificuldade nas integrações, somente interpolação constante foi utilizada. Outros trabalhos se seguiram como Mendelson (1973) e Mendelson e Albers (1975) apresentando alguns resultados para problemas elastoplásticos, através de várias formulações integrais, incluindo a formulação direta. Entretanto para esta formulação, estes resultados estavam incorretos pela maneira como o termo da deformação plástica foi considerado. Mukherjee (1977) corrigiu em parte as incorreções anteriores para problemas de estado plano de deformação. Foi usada a hipótese de incompressibilidade das deformações plásticas não sendo admitida, portanto, variação de volume.

Brady e Bray (1978) e Brady (1979) propuseram a análise de túneis pelo estado plano de deformação completa empregando o Método dos Elementos de Contorno, que se constitui em resolver dois problemas planos desacoplados, somando-se ao final as soluções. Um deles é o estado plano de deformação convencional e o outro, chamado de problema do anti-plano, leva em conta os deslocamentos paralelos ao eixo da abertura, que ocorrem quando as tensões originais na rocha não coincidem com o plano da seção transversal do túnel.

A formulação correta do Método dos Elementos de Contorno para problemas inelásticos foi proposta pela primeira vez por Bui (1978). Ele usou o conceito de Mikhlin (1965) para a derivada da integral de domínio singular na expressão das tensões nos pontos internos. Baseados neste artigo, Telles e Brebbia (1979) mostraram a implementação

numérica do Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas elastoplásticos bi e tridimensionais sem, entretanto, a inclusão de exemplos. Os mesmos autores (1980a-b) apresentaram os processos das deformações iniciais e das tensões iniciais para estados planos de deformação e de tensão. No primeiro trabalho somente o critério de escoamento de Von Mises foi utilizado para estado plano de deformação. No segundo generalizou-se a teoria incluindo-se os critérios de Tresca, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager e o estado plano de tensão. Incluiu-se também um exemplo de aplicação para túneis profundos.

Banerjee e Cathie (1980) propuseram uma maneira diferente para a solução do problema elastoplástico. Utilizando o processo das tensões iniciais, as tensões nos pontos internos foram calculadas através dos esquemas de diferenciação numérica do Método das Diferenças Finitas ou do Método dos Elementos Finitos. Um número significativo de pontos internos foi exigido para que as tensões internas pudessem ser calculadas a partir dos deslocamentos com base em um esquema de diferenças finitas. Houve, então, um considerável aumento no esforço computacional, além de uma perda de precisão, como pôde ser visto nos exemplos comparativos.

Telles e Brebbia (1981) complementaram seus trabalhos anteriores utilizando a solução fundamental do semi-plano em problemas de domínio semi-infinito. Um exemplo de túnel superficial foi mostrado. Venturini e Brebbia (1981) compararam a solução pelo Método dos Elementos de Contorno com aquela obtida por Zienkiewicz et alii (1968) pelo Método dos Elementos Finitos, para materiais que não resistem à tração. Foi a primeira vez que esta técnica foi aplicada a túneis e, também, a maneira de se introduzir forças concentradas protendidas. Telles (1983) reuniu os trabalhos anteriores, com as formulações elástica, inelástica, elastoplástica e viscoplástica do Método dos Elementos de Contorno. Foram empregadas as

soluções fundamentais de Kelvin e do semi-plano e vários exemplos foram mostrados. Venturini (1983) apresentou diferentes formas de enfoque de problemas geomecânicos. Estado plano de deformação completa, materiais não resistentes à tração, problemas com descontinuidades, elastoplasticidade e viscoplasticidade foram tratados e vários exemplos incluídos. Brebbia *et alli* (1984) publicaram importante trabalho abrangendo várias aplicações lineares e não-lineares para problemas de Potencial e Mecânica dos Sólidos.

A partir daí grande parte das publicações voltaram-se para aspectos específicos do método visando o seu aprimoramento. Banerjee e Davies (1984) introduziram uma técnica de aceleração do algoritmo iterativo em uma aproximação pelo processo das tensões iniciais. A aceleração consiste em se usar a trajetória anterior das tensões iniciais para se obter a estimativa inicial do incremento corrente. Eles, entretanto, se restringiram a problemas de domínio semi-infinito. Banerjee e Raveendra (1986) generalizaram o trabalho anterior para formas geométricas complexas. Além da utilização da aceleração da convergência do algoritmo não-linear, foi aplicada uma correção no equilíbrio para se minimizar o erro acumulado. As soluções bi e tridimensionais não lineares foram obtidas com funções de forma quadráticas para representação local da geometria e das funções.

Swoboda *et alii* (1987) mostraram uma análise pelo Método dos Elementos Finitos acoplada ao Método dos Elementos de Contorno (FEBEM) para escavações de túneis. O comportamento do maciço foi considerado viscoplástico enquanto o concreto projetado do revestimento foi suposto com comportamento viscoelástico. Os elementos de contorno foram usados na parte elástica do maciço, conseguindo-se uma enorme economia no tempo de cálculo quando comparada com a análise pelo Método dos Elementos Finitos. Valores característicos foram obtidos a partir da retro-análise,

que consiste em se utilizar valores medidos no campo para aferição do modelo numérico, como a viscosidade da rocha e uma função de fluência adequada. Varadarajan *et alii* (1987) compararam resultados pelo Método dos Elementos Finitos com aqueles obtidos pelo FEBEM. O exemplo utilizado foi uma abertura circular subterrânea com comportamento elastoplástico. Para a análise elástica as tensões obtidas pelo FEBEM são maiores e mais precisas. Para a análise elastoplástica, as tensões obtidas na zona plástica são quase as mesmas. A redução das tensões devido ao escoamento é maior, portanto, para o FEBEM. Este fato leva a um aumento no número de iterações, maiores regiões plastificadas e deslocamentos maiores para a análise com o FEBEM. Henry e Banerjee (1988) propuseram uma formulação diferente para o Método dos Elementos de Contorno para elastoplasticidade bi e tridimensionais, usando integrais particulares. Com isso, as taxas de tensões iniciais são introduzidas no sistema de elementos de contorno por meio destas integrais particulares, eliminando-se a necessidade da integração numérica no domínio plástico.

Carrer e Telles (1989) apresentaram o Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas elastoplásticos com o uso de procedimentos implícitos. Esta alternativa é mais geral que aquela explícita, a qual pode ser tomada como um caso particular, e tem duas características principais: reduzido número de iterações e aumento do esforço computacional para cada incremento de carga.

Banerjee *et alii* (1989) usaram dois algoritmos para a solução de problemas elastoplásticos e termoplásticos. O primeiro é o procedimento iterativo convencional do processo das tensões iniciais e o segundo é uma nova aproximação do tipo rigidez variável onde a solução de contorno incremental é obtida de forma direta (não iterativa).

Huang e Du (1989) mostraram uma expressão para as tensões no domínio que evita o cálculo do valor principal

de Cauchy na integral. Este método alcança alguma melhora na precisão e eficiência no processo numérico. Um resultado numérico para problema elastoplástico axissimétrico foi apresentado e comparado com resultado analítico.

Saleh *et alii* (1989) apresentaram uma forma de monitoramento de aberturas subterrâneas baseada no Método dos Elementos de Contorno permitindo conhecer as áreas críticas do meio instrumentado. A técnica monitora a variação das deformações com o tempo pela instalação de inclusões cilíndricas de concreto, instrumentadas com hastes vibratórias imersas no concreto.

Ohkami *et alii* (1991) propuseram uma forma de identificação das propriedades de maciços ortotrópicos pelo Método dos Elementos de Contorno. Usando a retro-análise em meio elástico ortotrópico eles determinaram as constantes elásticas e as tensões iniciais através da minimização do erro entre os deslocamentos medidos e os calculados.

Neves e Brebbia (1991) apresentaram o Método da Múltipla Reciprocidade em problemas de elasticidade, que pode ser estendido para elastoplasticidade uma vez que o processo iterativo considera elástico o problema dentro de cada incremento. Os problemas elastoplásticos são analisados pelo Método dos Elementos de Contorno, permitindo a transformação de integrais de domínio em integrais de contorno. A aproximação consiste na aplicação repetida do teorema da reciprocidade usando uma sequência de soluções fundamentais de ordem mais alta. A vantagem desta técnica sobre a de Galerkin é que ela pode ser aplicada a qualquer variação das forças de volume e não somente a variações lineares ou constantes. A técnica também não exige a inversão da matriz cheia para se determinar os coeficientes das soluções particulares localizadas, como acontece no Método da Dupla Reciprocidade.

Nesta dissertação é usada a formulação direta do

Método dos Elementos de Contorno, aplicada a problemas de elastoplasticidade bidimensional, utilizando-se a derivada da integral de domínio das tensões iniciais, na expressão das tensões nos pontos internos, segundo o conceito de Mikhlin (1965). O problema não-linear é resolvido através do processo das tensões iniciais que não inclui a restrição de incompressibilidade das deformações inelásticas que aparece no processo das deformações iniciais. Desta forma, quatro critérios de escoamento podem ser empregados, Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager, de maneira unificada, segundo Nayak e Zienkiewicz (1972). Este processo permite, ainda, estudar problemas de Estado Plano de Tensão ou Estado Plano de Deformação, alterando-se apenas o coeficiente de Poisson. Túneis revestidos e meios heterogêneos, mas que tenham partes homogêneas bem definidas, são analisados através da técnica de sub-regiões. A simulação do comportamento de túneis profundos foi feita utilizando-se a solução fundamental de Kelvin para domínios infinitos e de túneis superficiais com a solução fundamental do semi-plano devida a Melan.

Nos exemplos objetivou-se esclarecer as diversas formas de utilização do método numérico, como a influência da rigidez relativa entre o meio e o suporte. As avaliações das tensões in situ foi conseguida através de retro-análise, comparando-se os deslocamentos medidos e calculados. Comparou-se, também, os efeitos da análise elastoplástica, sobre as tensões e deslocamentos obtidos no comportamento elástico. Finalmente é mostrado um exemplo de túnel superficial revestido, de forma elíptica, com carregamento uniformemente distribuído na superfície limite do semi-plano, aplicando-se a solução fundamental do problema de Flamant.

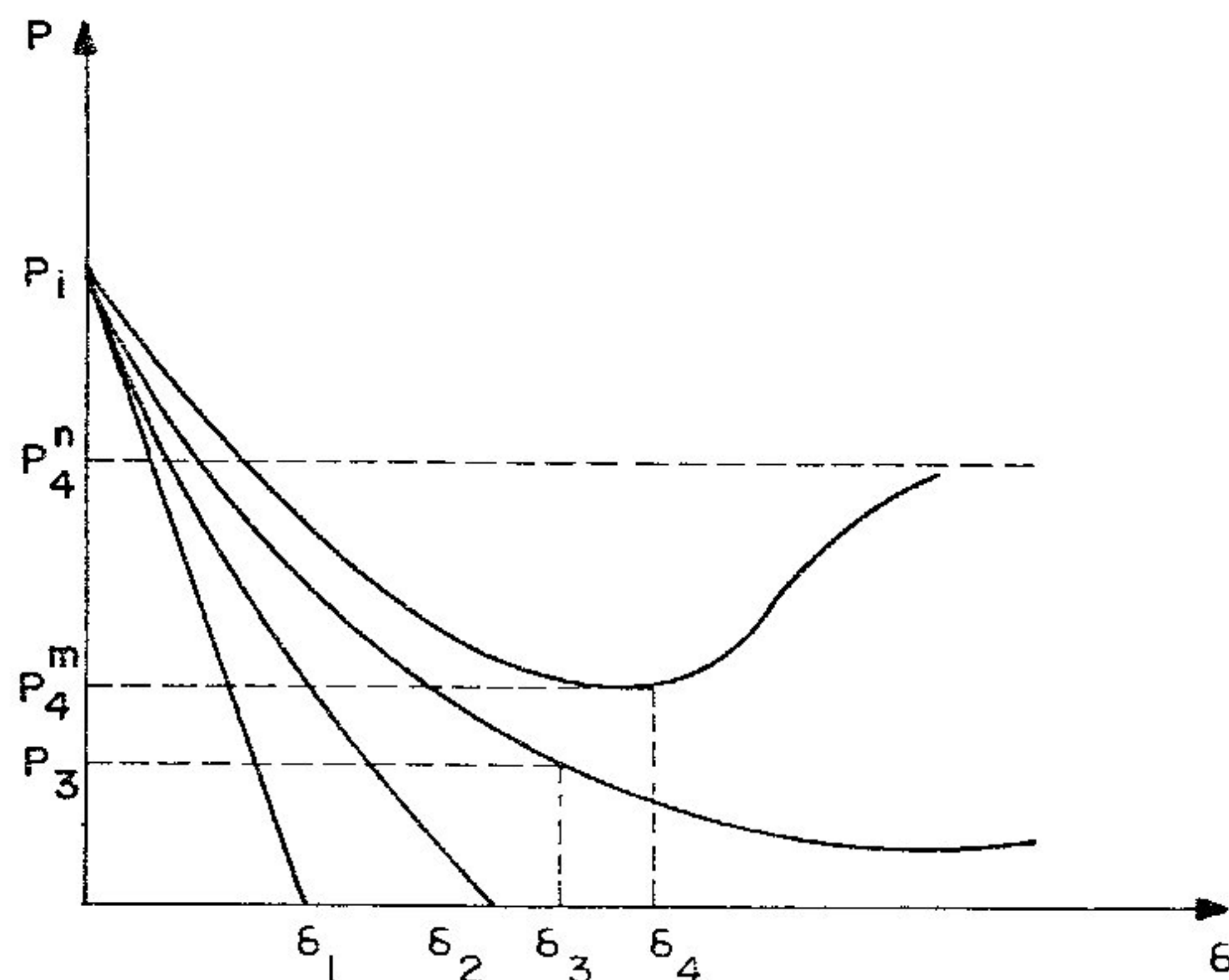
CAPÍTULO II

AS ABERTURAS DE TÚNEIS:

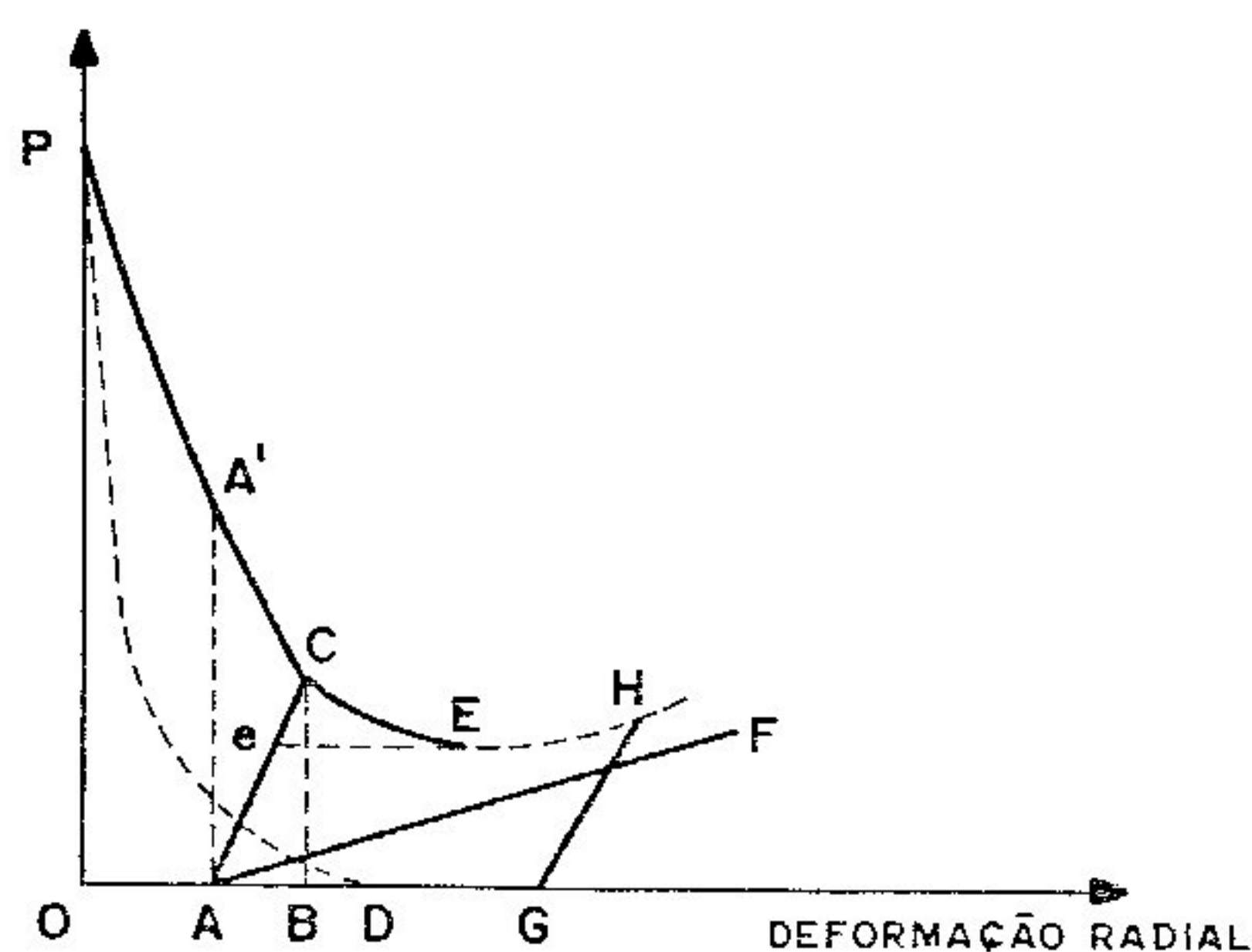
2.1 Deformações em Escavações Subterrâneas

Uma escavação subterrânea consiste na retirada das tensões iniciais que atuam na superfície da abertura antes da sua instalação. Isto provoca uma perturbação no estado de tensões iniciais que se estende até uma certa distância onde não se faz mais sentir a sua presença. O novo estado de equilíbrio não se atinge instantaneamente e, por isso, interessa observar a variação das tensões nas paredes do túnel em função do acréscimo das deformações. As curvas que relacionam estas grandezas são conhecidas como curvas características. Sousa(1986) mostrou a forma de várias destas curvas, como se vê na figura 2.1. A curva 1 corresponde a um comportamento elástico linear, para a condição de maciço auto-portante. A curva 2 tem uma condição semelhante à curva 1 tendo, entretanto, um comportamento não-linear a partir de determinado valor da deformação. A curva 3 se refere a material elastoplástico onde as deformações excessivas exigem a colocação de um suporte para um valor de tensão especificado. Finalmente, a

curva 4 representa uma situação onde a tensão aumenta a partir de certo ponto, o que obriga a aplicação do suporte antes da ocorrência do mesmo, evitando-se a desarticulação do conjunto. Em todas estas curvas observa-se que a instalação do revestimento deve aguardar o momento onde a deformação alcança um valor adequado às características do material. Com isso, a pressão sobre ele é bem menor que aquela pressão inicial presente antes da abertura.



Curvas Características para diferentes tipos de Rochas
 Figura 2.1

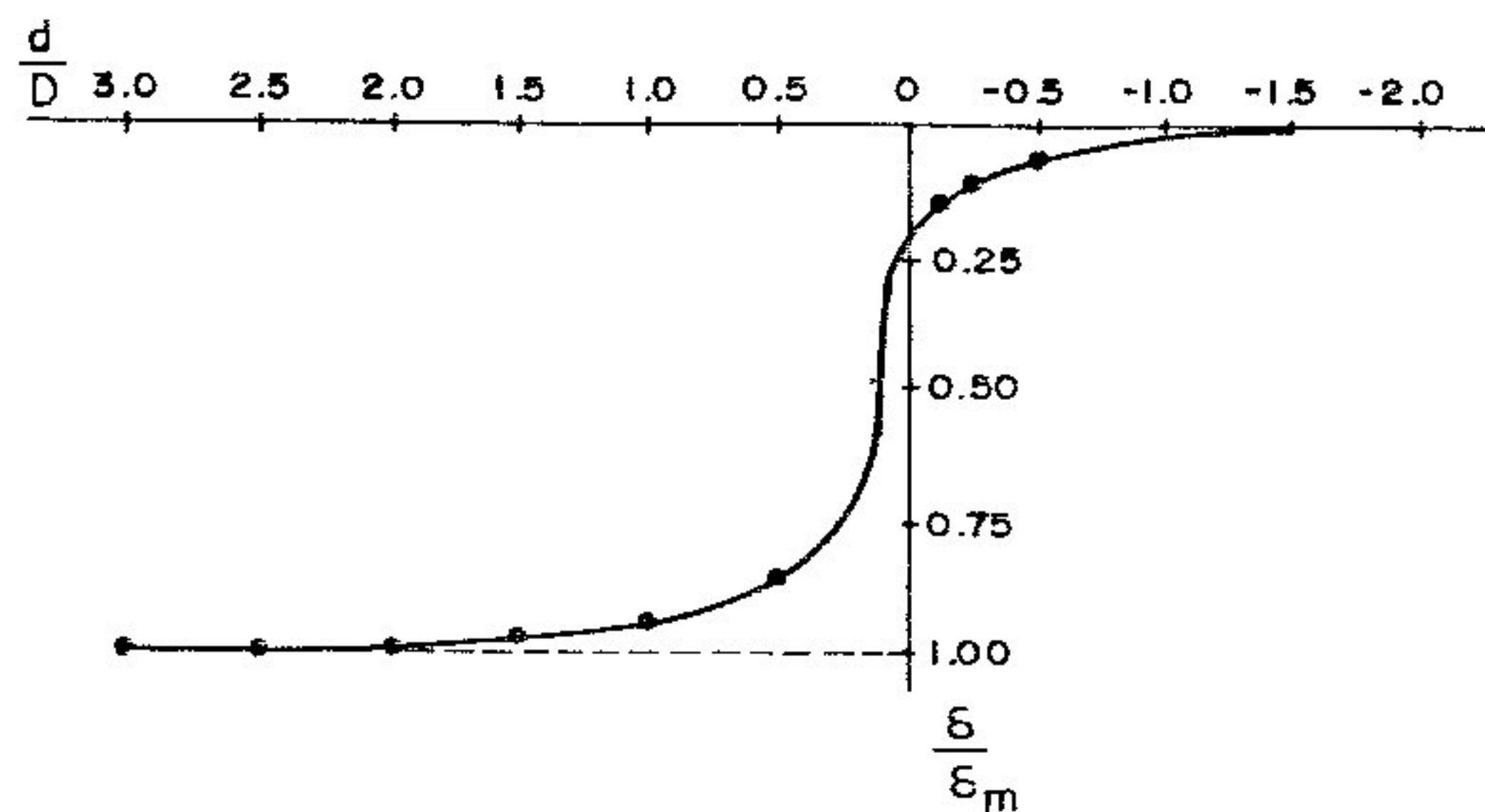


Esboço Qualitativo da Interação Maciço-Revestimento
 Figura 2.2

Na figura 2.2 faz-se um esboço qualitativo da interação maciço-suporte. Ao se atingir a deformação \overline{OA} , o revestimento é introduzido. Se for considerado um suporte incompressível é transferida a tensão dada por $\overline{AA'}$. Entretanto o suporte se deforma até conseguir uma posição de equilíbrio em C. Neste caso, a pressão que se transfere é dada por \overline{BC} , cujo valor é bem menor que $\overline{AA'}$. Deve-se ter o cuidado de não se aplicar um revestimento excessivamente flexível, evitando-se a situação inadequada mostrada por AF onde o suporte foi considerado com comportamento elástico linear. Conclui-se que em projetos de túneis o dimensionamento do suporte é tão importante quanto o instante de sua aplicação. Para túneis em solo o maciço deforma-se rapidamente e o revestimento deve ser colocado de imediato, ao contrário de túneis em rocha, quando a monitoração dos deslocamentos através de medidas de convergência indica o momento correto de sua instalação.

2.2 Efeito Tridimensional da Frente de Escavação

Quando se estuda o equilíbrio plano de um túnel escolhe-se uma seção transversal suficientemente afastada da frente de escavação, onde a hipótese de Estado Plano de Deformação é uma aproximação bastante aceitável. Por outro lado, próximo à frente, acontecem deslocamentos verticais que atingem um valor máximo a determinada distância dela, não sendo mais válida a hipótese de estado plano. Análises tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos, de seções circulares de diâmetro D, indicaram uma lei de variação dos deslocamentos como mostra a figura 2.3. Há um acréscimo lento destes deslocamentos a partir de uma distância de dois diâmetros além da frente de escavação; próximo a ela há um brusco aumento e depois voltam a crescer lentamente. Isto demonstra a vantagem da colocação do suporte a pequena distância da frente de escavação.



Efeito Tridimensional na Frente de Escavação

Figura 2.3

2.3 Estado Inicial de Tensões no Maciço

O estado inicial de tensões no maciço pode ser do tipo gravitacional, tectônico ou residual. Tensões gravitacionais são devidas ao peso próprio do maciço acima da abertura, as tectônicas dependem da história geológica do meio e as residuais dependem das tensões remanescentes após a causa ter sido removida. Para maciços elásticos lineares homogêneos e isotrópicos com camadas depositadas horizontalmente sem variação horizontal de dimensão e com temperatura constante, desde o início da deposição ou, então, camadas que nunca tenham sido submetidas a cargas temporárias, é válida a relação:

$$K_0 = \frac{\sigma'_{ho}}{\sigma'_{vo}} = \frac{\nu}{1-\nu}$$

onde σ'_{ho} e σ'_{vo} são as tensões originais horizontal e vertical e ν é o coeficiente de Poisson. Entretanto, esta situação particular raramente é encontrada. Várias expressões são mostradas na literatura para se justificar a

relação entre as tensões horizontal e vertical sendo que esta pode ser estimada pelo peso do material acima da abertura. O coeficiente K_0 para solos, geralmente é expresso em função do ângulo de atrito interno do material e de sua razão de sobreadensamento (OCR). Segundo Mayne e Kulhawy (1982) este coeficiente pode ser escrito por:

$$K_0 = (1 - \text{sen}\phi) \cdot \text{OCR}^{\text{sen}\phi}$$

onde ϕ é o ângulo de atrito interno do material. Para rochas Bieniawski(1984) relaciona várias expressões para σ_{ho} em função da profundidade, mostradas na figura 2.4. De qualquer maneira, a forma mais confiável de se determinar as tensões originais presentes no maciço onde o túnel vai ser escavado é através de medições in situ pelos ensaios de *fratura hidráulica*, *célula espada* ou *pressiômetro*. Goodman(1989) descreve estes métodos chamando a atenção das vantagens e desvantagens de todos eles. Todas as técnicas de medição de tensões perturbam o meio ao criar a resposta que pode, então, ser medida e analisada, usando-se modelos teóricos para a estimativa do tensor das tensões in situ.

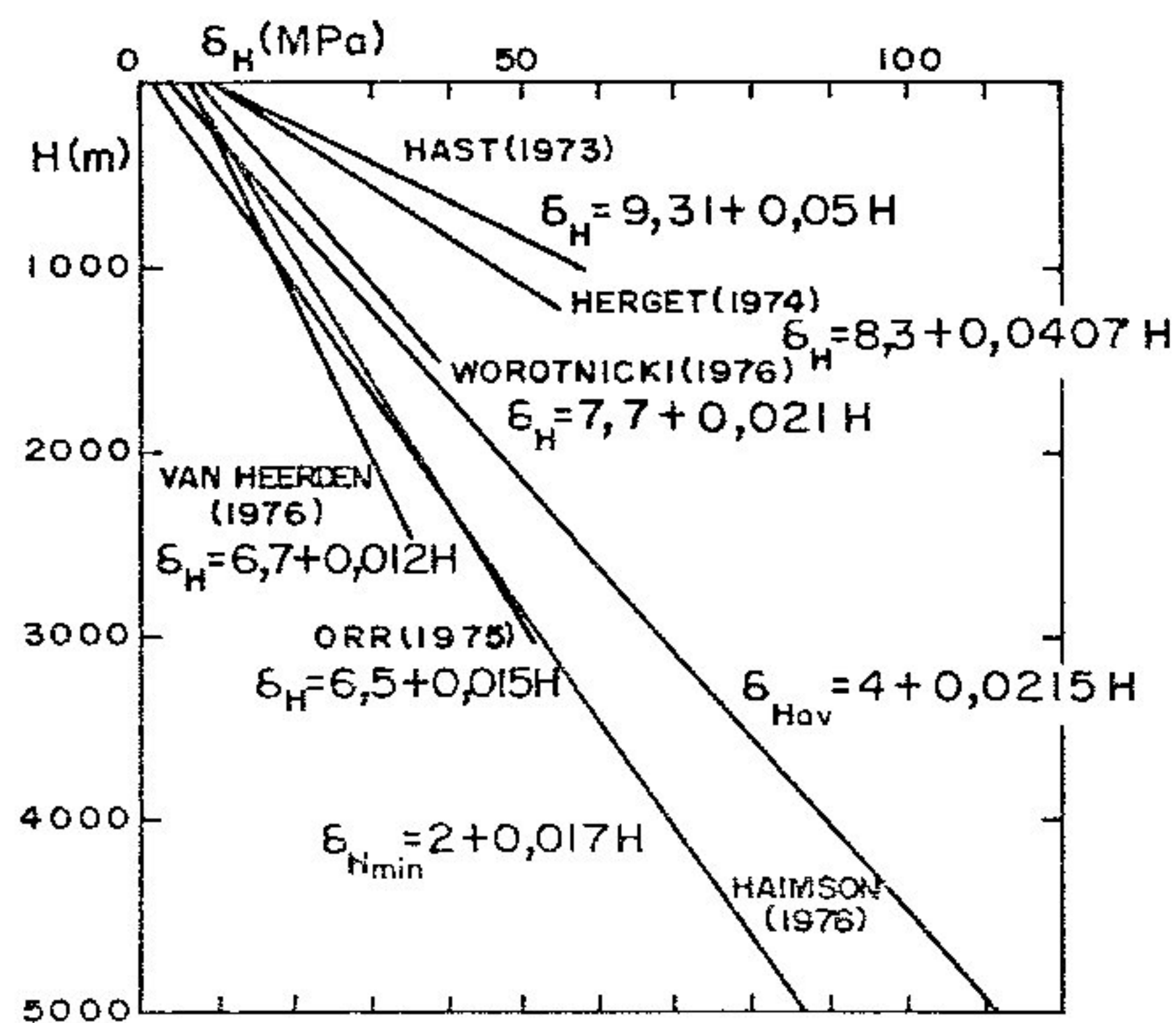


Figura 2.4

2.4 Métodos de Dimensionamento

Os métodos de dimensionamento de túneis podem ser divididos em:

- a) Métodos de Ruptura
- b) Métodos de Apoios Elásticos
- c) Métodos das Zonas Plásticas
- d) Método da Rigidez Relativa Meio-Suporte
- e) Métodos Numéricos

Nos métodos de ruptura considera-se o carregamento como a parte do maciço que se desprende e transfere a carga para o revestimento, que é admitido indeformável. Terzaghi (1943) estabeleceu uma expressão para as tensões verticais a partir da resistência ao cisalhamento do material do meio, que se desenvolve durante a escavação. A pressão vertical cresce com a profundidade, tendendo para certo valor constante. Széchy (1970) descreve outras teorias que podem ser incluídas como métodos de ruptura. Entre elas pode-se mencionar a de Bierbäumer que sugere uma expressão para a pressão vertical, considerando-se uma parábola acima da abertura como a região de influência nas paredes do túnel. Enquanto as teorias de Terzaghi e Bierbäumer levam em conta a profundidade do túnel, a teoria de Kommerell considera que a altura do maciço que exerce pressão depende da deformação do sistema de suporte. Outra teoria descrita em Széchy (1970) que é independente da profundidade, é devida a Protodiakonov, usada na construção dos metrô da Comunidade dos Estados Independentes (CEI), e considera a existência de uma área em forma parabólica que delimita a região de influência sobre o revestimento do túnel.

Os Métodos dos Apoios Elásticos considera o maciço como apoio elástico segundo a hipótese de Winkler, ou seja, o deslocamento no ponto considerado é proporcional à carga aplicada e este coeficiente de proporcionalidade é calculado a partir da rigidez do solo ou rocha. O carregamento é estimado segundo os critérios dos métodos de

ruptura. Incluem-se neste grupo os Métodos de Zurabov-Bugaieva, Bodrov-Gorelik, Bugaieva, Davidov, poligonal, entre outros.

O Método das Zonas Plásticas utiliza as investigações de Fenner e foi desenvolvido por Kastner. Considera-se um problema axissimétrico, onde a pressão sobre a cavidade é hidrostática. A abertura não é revestida e a região plastificada é um anel. Hendron e Aiyer (1972) estenderam o método para várias condições de contorno e para túneis revestidos incluindo-se, ainda, a condição de aumento de volume na deformação.

O Método da Rigidez Relativa parte das equações de equilíbrio da Teoria da Elasticidade usando a função de tensão de Michell. Esta função de tensão é simplificada pelas condições de periodicidade e contorno no infinito. O revestimento é tratado pela Teoria das Cascas Cilíndricas e pode ter aderência total ao maciço ou não. Leva-se em conta a rigidez relativa entre o meio e o suporte introduzindo-se os coeficientes adimensionais de compressibilidade e flexibilidade que norteiam o dimensionamento. Os trabalhos que enfocam este método são os de Höeg (1968), Peck et alii (1972), Schwartz e Einstein (1979) e Teixeira (1986).

Exceto os métodos de ruptura, as demais teorias consideram a interação do solo ou da rocha com o revestimento. A teoria das zonas plásticas tem uma forte restrição que consiste em se considerar só o carregamento hidrostático; esta hipótese não está de acordo com a maioria dos casos práticos onde a pressão horizontal é diferente da vertical.

2.5 A Construção de Túneis

A forma antiga de abertura de túneis seguia a técnica de mineração para exploração subterrânea que se baseava no *conceito de escoramento da escavação*. Cada passo dessa escavação era seguido de um pesado escoramento e, à curta distância, pela execução do revestimento, em geral de

alvenaria de pedras ou de tijolos, que era dimensionado para suportar todas as cargas que se desenvolviam no decorrer das obras. Resultava um revestimento bastante espesso, às vezes economicamente inviável, mas nem por isso suficientemente seguro. Os vazios que se formavam atrás do suporte causavam deformações excessivas no maciço levando à sua desarticulação. Esta foi a principal razão de inúmeros insucessos verificados em obras deste tipo. São bastante conhecidos os métodos de abertura de túneis baseados no conceito de escoramento da escavação. São eles: o inglês, o alemão, o belga e o antigo método austríaco entre outros. Todos eles estavam fundamentados na parcialização da escavação, subdividindo-a em seções equivalentes àquelas correntemente utilizadas em galerias de mineração.

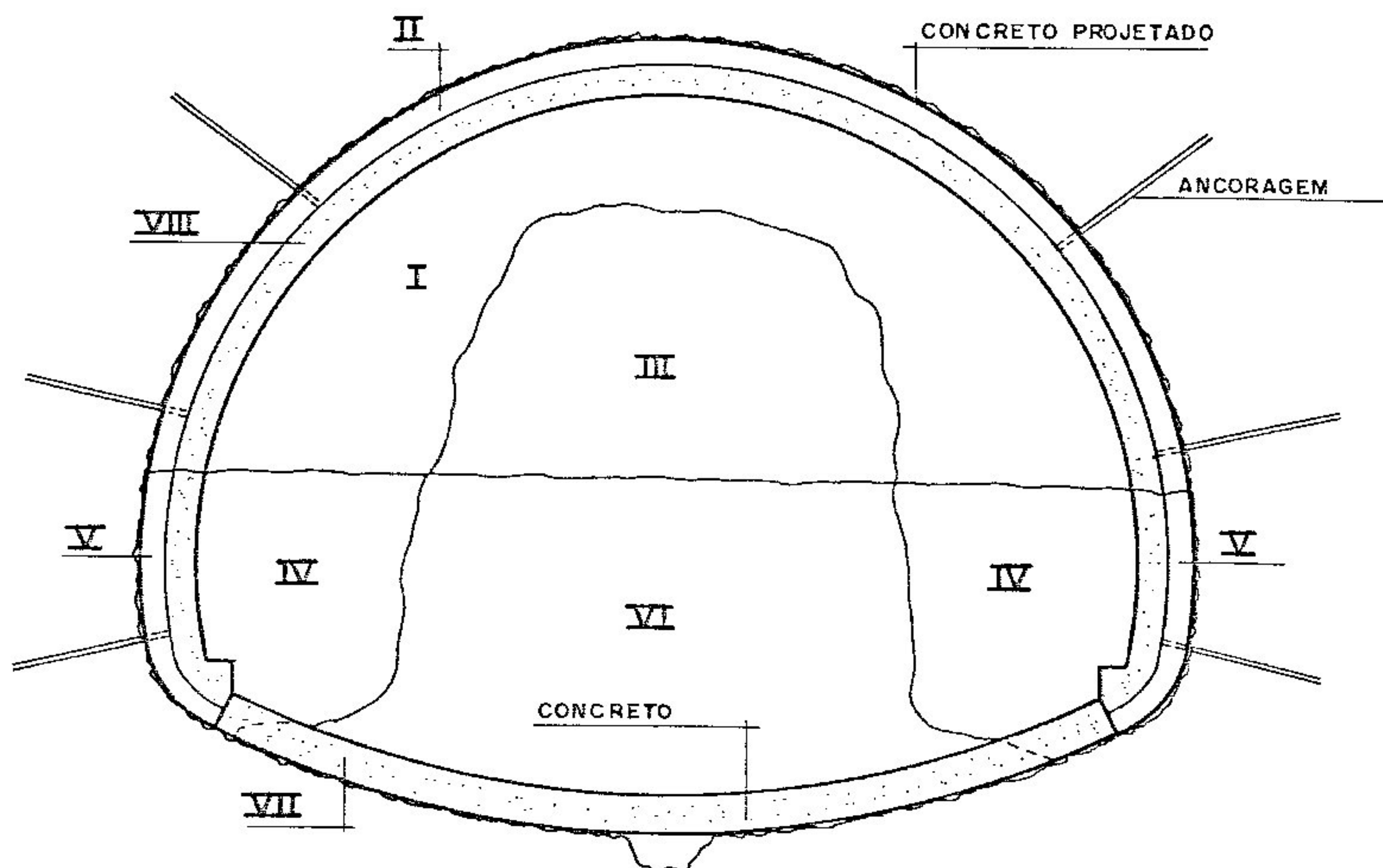
Por outro lado, o moderno conceito de construção subterrânea conhecido como o *Novo Método Austríaco de Abertura de Túneis (NATM)* foi concebido observando-se a regra secular de mineração que diz que o alívio de tensões aumenta toda vez que o escoramento é substituído. Rabcewicz imaginou que esta regra, usada ocasionalmente toda vez que o escoramento se rompia, poderia ser utilizada de forma proposital através da instrumentação das deformações. Então, o conceito de escoramento da escavação cedeu lugar ao conceito de estabilização da escavação através do alívio controlado das tensões. A aplicação imediata, junto à frente de avanço, de uma fina camada de concreto projetado denominado de revestimento de 1ª fase, desperta as resistências intrínsecas do maciço por meio de sua interação com o suporte, reduzindo os esforços envolvidos e estabilizando a escavação. Este revestimento de 1ª fase é constituído de um arco de concreto projetado combinado ou não com o uso de cambotas, chumbadores e tirantes. Em certas condições os tirantes são altamente eficientes por aplicar uma protensão na região vizinha à abertura melhorando sensivelmente sua característica. O uso de cambotas deve ser evitado tanto quanto possível pois a sua eficiência é muito questionável além de prejudicar a

produtividade da construção.

O revestimento é dimensionado pelo Método dos Elementos Finitos ou pelo Método dos Elementos de Contorno, sendo adotado coeficiente de segurança baixo, próximo da unidade, por razões econômicas. A evolução dos deslocamentos dos pontos da superfície do revestimento de 1ª fase é acompanhada por meio de observação e instrumentação adequadas, que são capazes de prever possíveis ruínas. Extensômetros múltiplos colocados na direção radial igualmente espaçados monitoram o comportamento da região vizinha à cavidade. Leituras periódicas permitem avaliar a velocidade das deformações que, em geral, são decrescentes, indicando a tendência de estabilização. Entretanto a sua não convergência indica uma situação de anomalia, requerendo a intervenção no processo de estabilização.

Estabilizada a escavação, ou seja, cessados os deslocamentos dos pontos da superfície do túnel, verificados pela instrumentação, aplica-se o revestimento de 2ª fase, em geral de concreto simples, que irá incrementar o coeficiente de segurança necessário ao padrão de exploração da obra. Este revestimento de 2ª fase poderá ser totalmente dispensado em alguns casos e esta é uma tendência das construções atuais. Neste caso, o revestimento de 1ª fase deve ser dimensionado com coeficiente de segurança adequado. Quando o revestimento de 2ª fase é aplicado antes da convergência, mas próximo dela, o maciço irá sentir o aumento da rigidez do suporte com a diminuição dos deslocamentos na superfície da abertura. A tendência do movimento do maciço para o interior da cavidade continua apesar dos deslocamentos no suporte terem cessados. Há, então, um adensamento automático do maciço vizinho aumentando a sua resistência e encontrando uma nova posição de equilíbrio. Os esquemas construtivos são importantes ao garantir aos modelos matemáticos uma correta correspondência com o comportamento real. As escavações do tipo *calota-bancada* são as mais comuns dando aos serviços,

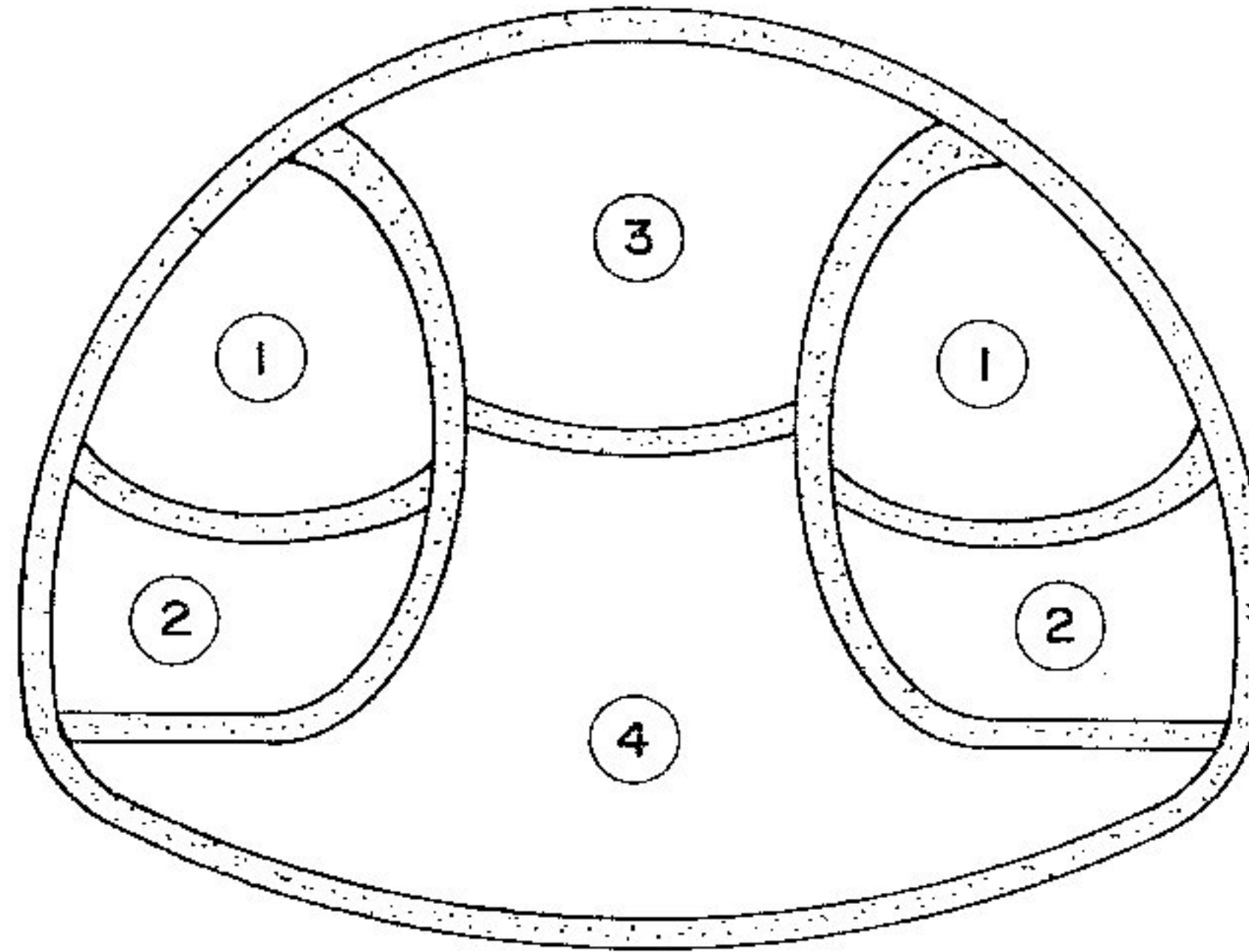
além de uma forma racional de avanço, o fator de segurança necessário. A figura 2.5 mostra a seqüência construtiva de um túnel de seção transversal singela.



Seqüência Construtiva de um Túnel de Seção Singela
Figura 2.5

Escava-se a calota superior mostrada em (I) e, em seguida, aplica-se o concreto projetado (II). Retira-se a bancada (III) e escava-se a região (IV) distantes da frente de avanço da defasagem definida em projeto. Ainda nesta região há a introdução do revestimento (V). Um pouco mais atrás deste trecho escava-se a região (VI) e, em seguida, fecha-se o arco invertido de concreto projetado indicado em (VII). O revestimento de 2ª fase pode ou não ser implementado ao seu devido tempo. Para grandes seções esta técnica deve ser reavaliada. A alternativa de parcialização da construção em várias seções singelas, conforme a

sequência descrita anteriormente, deve ser considerada. As paredes internas provisórias são demolidas chegando-se à seção final de projeto. A figura 2.6 mostra esta técnica.



Seqüência Construtiva de Túnel com Escavação Parcializada
Figura 2.6

Os resultados obtidos no início da construção do túnel pela leitura das medidas de convergência e de outros dispositivos instalados pela instrumentação são avaliados e comparados com os valores previstos no projeto preliminar. Os parâmetros do maciço são aferidos e os novos valores estimados são processados. O projeto preliminar é, então, revisado e utilizado no trecho seguinte. Este procedimento é contínuo de tal maneira que a diferença entre o valor medido e o calculado é passo a passo minimizado.

CAPÍTULO III

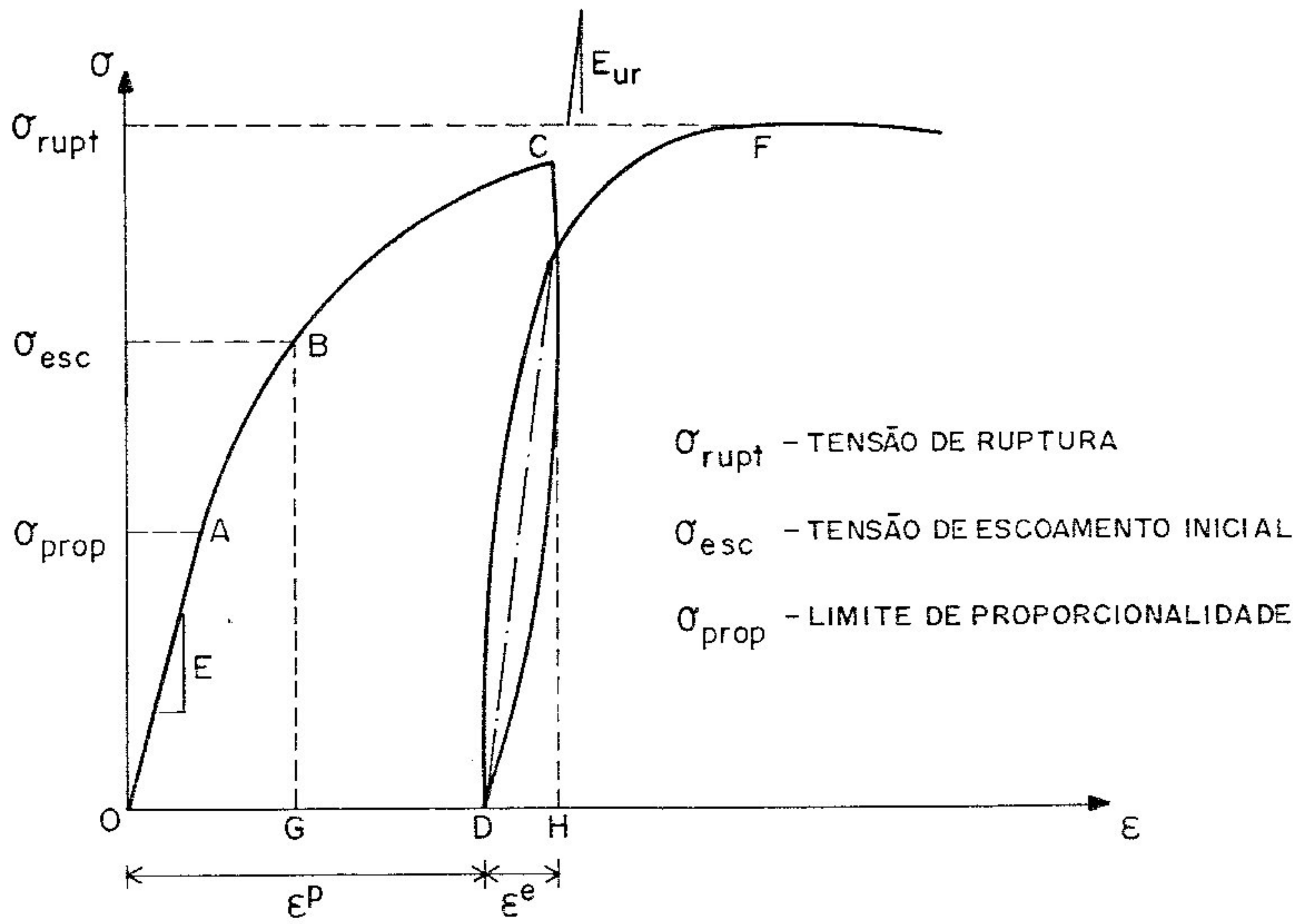
COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO DOS MATERIAIS:

3.1 Conceitos da Teoria da Plasticidade

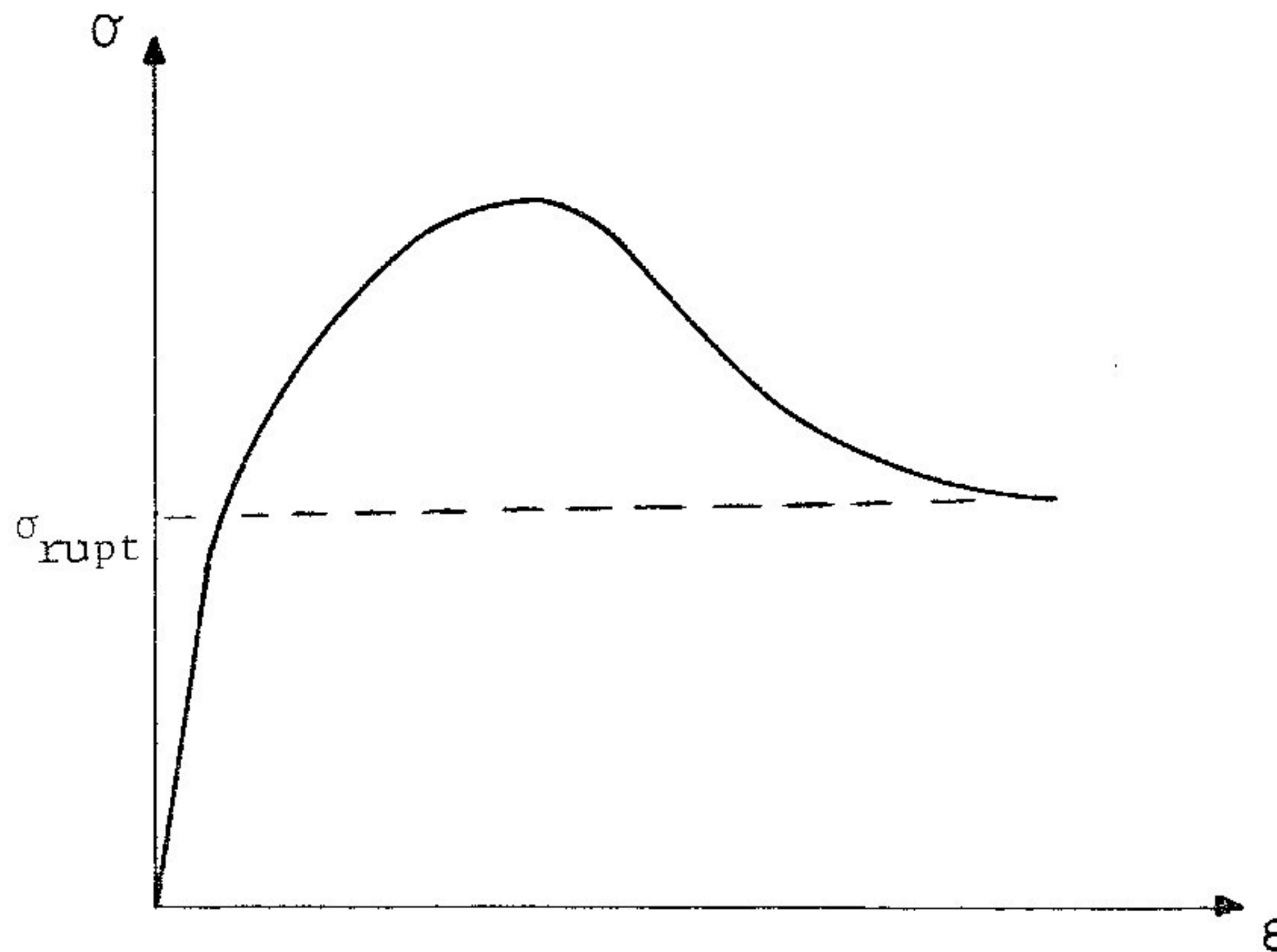
O comportamento tensão-deformação dos solos pode ser mostrado, de forma simplificada, a partir de um estado de tensões uniaxial como o ensaio de compressão simples. A curva tensão-deformação obtida neste ensaio pode ser dividida em três trechos. O primeiro deles representa um comportamento elástico linear onde as tensões são proporcionais às deformações, caracterizado por uma linha reta. Na figura 3.1.1 este trecho é representado pela reta OA onde o ponto A corresponde ao limite de proporcionalidade do material σ_p . O trecho seguinte, curva AB da figura mencionada, corresponde a um comportamento elástico não-linear. Isto quer dizer que, apesar das tensões e deformações não serem proporcionais, ainda assim a retirada do carregamento restitui o estado inicial indeformado. Neste trecho AB são válidas as equações da teoria da elasticidade devendo-se, entretanto, considerar a variação do módulo de elasticidade. O ponto B corresponde à tensão de escoamento inicial σ_{esc} . O terceiro trecho se

refere ao domínio plástico, ou seja, deformações permanentes aparecem ao descarregar-se o corpo de prova. Por exemplo, ao retirar-se o carregamento em C a curva segue a linha CD no sentido descendente. No final do descarregamento aparece uma deformação residual \overline{OD} . Recarregando-se o corpo de prova a partir de D obtém-se uma trajetória ligeiramente desviada da anterior. Esta diferença de trajetória é geralmente desprezada nas análises, sendo substituída por uma linha reta. Verifica-se que o módulo de elasticidade de descarregamento-recarregamento E_{ur} é sensivelmente maior que o módulo elástico inicial E. Aumentando-se o carregamento a curva apresenta-se como um prolongamento daquela anterior ao descarregamento até atingir a tensão de ruptura do material σ_r . O colapso é representado na figura 3.1.1 pelo ponto F. O aumento de tensões após o início do escoamento é chamado de encruamento ou endurecimento. Outra curva tensão-deformação típica de solos é mostrada na figura 3.1.2 onde há uma diminuição de tensões após a resistência de pico. Este comportamento é chamado de enfraquecimento ou amolecimento.

No domínio elástico não há dissipação de energia no processo de descarregamento desde que todo o trabalho é restituído. Ao contrário, no domínio plástico o trabalho restituído é dado pela área CDH dissipando-se o trabalho que é dado pela área OABCD. Conclui-se que a dissipação de energia no domínio plástico é diferente de zero. São válidas, ainda, as equações de equilíbrio e compatibilidade usadas no regime elástico havendo, entretanto, a necessidade de reavaliação das relações tensão-deformação que determinam a lei constitutiva dos materiais.



Curva Tensão-Deformação de um Solo com Endurecimento
 Figura 3.1.1



Curva Tensão-Deformação de um Solo com Amolecimento
 Figura 3.1.2

Observa-se que o limite elástico para um estado uniaxial de tensão é dado pelo valor da tensão de escoamento. Entretanto para um estado plano ou triplo de tensões o problema é bem mais complexo. A fronteira entre os domínios elástico e plástico não é mais definido por somente um valor de tensão mas por uma combinação delas, chamada de tensão de escoamento efetiva, que representa o critério de escoamento adotado. O comportamento elastoplástico de um material é definido quando se conhece:

- a) a relação tensão-deformação na fase elástica;
- b) a superfície de escoamento que indica o início da fase plástica;
- c) uma lei de endurecimento ou enfraquecimento que estabelece as condições dos estados plásticos subseqüentes;
- d) uma lei de escoamento plástico relacionando os incrementos de deformação com as tensões e incrementos de tensões.

Para os materiais elásticos perfeitamente plásticos não é necessária a definição do item (c).

No regime elástico as tensões se relacionam com as deformações pela expressão:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{kl} \quad (3.1.1)$$

onde σ_{ij} e ϵ_{ij} são as componentes das tensões e das deformações respectivamente e C_{ijkl} é o tensor das constantes elásticas que, para materiais isotrópicos, é dado por:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.1.2)$$

onde G e ν são o módulo de elasticidade transversal e o

coeficiente de Poisson respectivamente e δ_{ij} é o delta de Kronecker definido por:

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= 0 \quad \text{para } i \neq j \\ \delta_{ij} &= 1 \quad \text{para } i = j\end{aligned}$$

3.2 Lei de Endurecimento

Para os materiais que apresentam a característica de endurecimento haverá uma nova tensão de escoamento para um novo carregamento e esta situação é representada por uma nova superfície de escoamento. Desta forma são definidas as superfícies de escoamento subseqüentes, correspondentes aos vários carregamentos ocorridos. A função e a superfície de escoamento são chamadas, para este caso, de função e superfície de carregamento. A posição da superfície de escoamento será, então, dependente do valor instantâneo do parâmetro de endurecimento κ que pode ser a deformação plástica volumétrica, o trabalho plástico realizado ou o índice de vazios, como é usual em solos.

A superfície de escoamento varia em tamanho e forma, de acordo com o estado de tensões. O aumento significará um endurecimento do material enquanto a diminuição o seu enfraquecimento. Em aplicações de plasticidade à mecânica dos solos, admite-se que durante o escoamento plástico, a superfície de carregamento expande-se ou contrai-se em relação à origem, mantendo a forma, o centro e a orientação da superfície de escoamento. Esse comportamento é chamado de endurecimento ou enfraquecimento isotrópico. Outra possibilidade, menos comum, tem a superfície de carregamento com o mesmo tamanho, forma e orientação da superfície de escoamento. Entretanto ela sofre uma translação em relação à outra. Esse comportamento é chamado de endurecimento cinemático que permite a consideração do efeito Bauschinger. Após a primeira deformação plástica, os materiais podem perder a simetria da curva tensão-deformação e os níveis de escoamento à tração e à compressão ficam diferentes.

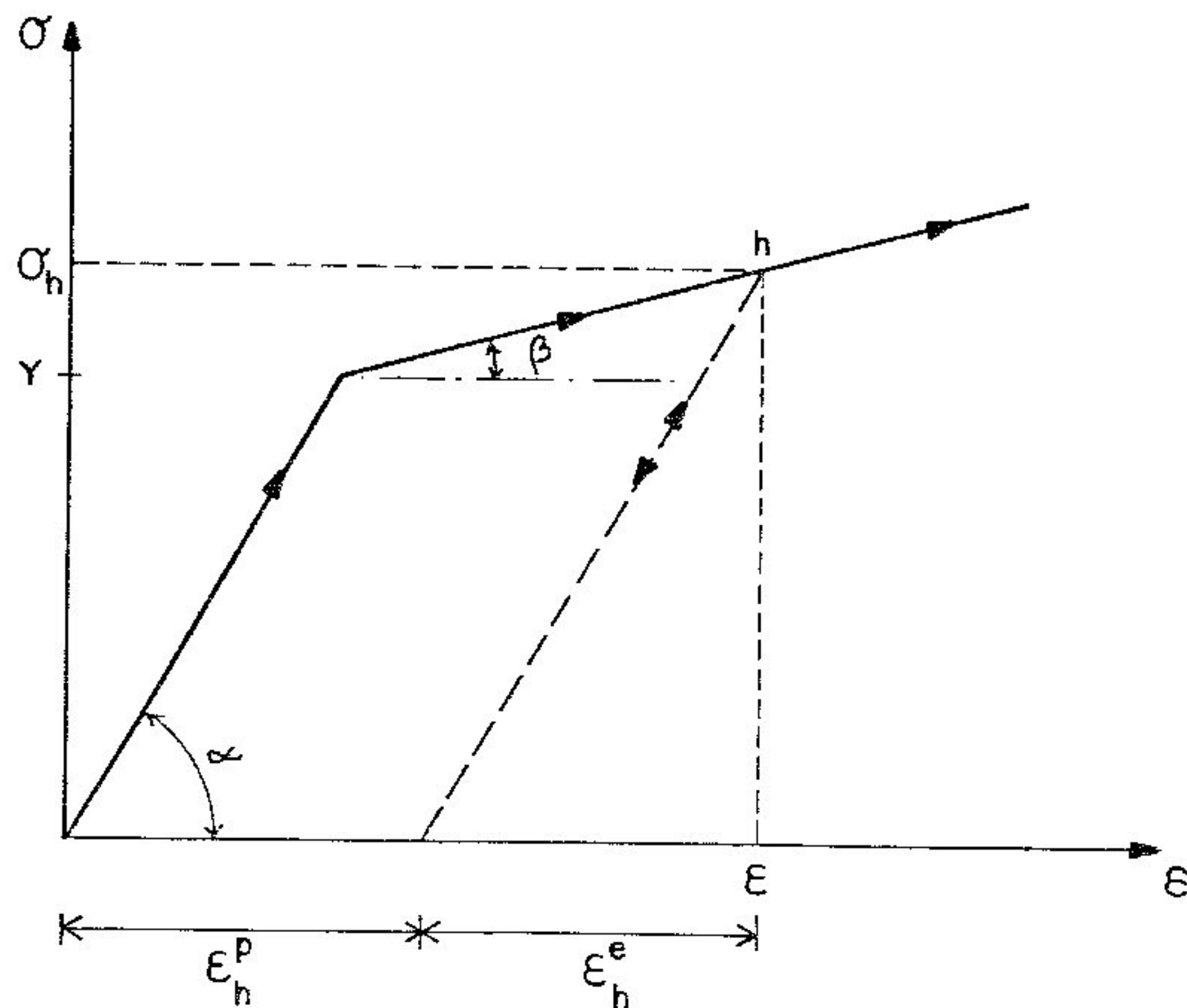


Diagrama Tensão-Deformação Simplificado
 Figura 3.2.1

A figura 3.2.1 mostra um diagrama tensão-deformação simplificado com um trecho elástico e outro plástico com endurecimento linear. No regime elástico tem-se: $\sigma - Y < 0$, sendo Y a tensão de escoamento inicial. Desde que σ exceda à tensão de escoamento Y a nova tensão de escoamento σ_0 deve satisfazer:

$$\sigma - \sigma_0 < 0 \quad (3.2.1)$$

onde σ_0 tem um valor inicial igual a Y e varia de acordo com o aumento da deformação plástica ϵ^p , ou seja:

$$\sigma_0 = Y + \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \epsilon^p \quad (3.2.2)$$

sendo $E = \text{tg}\alpha$ e $E_T = \text{tg}\beta$.

De uma forma mais geral pode-se relacionar o trabalho de

endurecimento com a tensão de escoamento instantânea σ_0 . O parâmetro de endurecimento κ representa o trabalho de endurecimento total:

$$\kappa = \int \sigma \, d\varepsilon^P \quad (3.2.3)$$

Ainda:
$$\sigma_0 = \psi \left[\int \sigma \, d\varepsilon^P \right] \quad (3.2.4)$$

Então:
$$\frac{d\kappa}{d\varepsilon^P} = \sigma \quad (3.2.5a)$$

$$\frac{d\kappa}{d\psi} = \frac{d\kappa}{d\varepsilon^P} \frac{d\varepsilon^P}{d\psi} \quad (3.2.5b)$$

Logo:
$$\frac{d\kappa}{d\psi} = \sigma \frac{d\varepsilon^P}{d\psi} \quad (3.2.6a)$$

$$\frac{d\psi}{d\kappa} = \frac{1}{\sigma} \frac{d\psi}{d\varepsilon^P} = \frac{H'}{\sigma} \quad (3.2.6b)$$

onde H' é a inclinação instantânea do diagrama tensão-deformação no regime plástico. Para o caso simplificado da figura 3.2.1 onde o trabalho de endurecimento é linear o valor de H' é constante e vale:

$$H' = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad (3.2.7)$$

3.3 Lei do Escoamento Plástico

A função de escoamento que determina o início do comportamento plástico do material tem a seguinte forma geral:

$$F(\sigma, \kappa) \leq 0 \quad (3.3.1)$$

onde κ é o parâmetro de endurecimento do material obtido

experimentalmente. Quando $F(\sigma, \kappa) < 0$ o material se encontra no regime elástico e o ponto referente ao estado de tensões se coloca dentro da superfície de escoamento. O sinal de igualdade corresponde ao domínio plástico com o ponto referente ao estado de tensões sobre a superfície de escoamento. Para materiais com endurecimento, quando o ponto referente ao estado de tensões atinge a superfície de escoamento, ela se expande, fazendo com que este ponto permaneça sobre esta superfície.

Supondo-se a existência de uma função de potencial plástico Q que descreve o comportamento plástico do material, pode-se relacionar a direção dos vetores da deformação incremental plástica com o gradiente desta função. Como eles são perpendiculares, tem-se:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.3.2)$$

que é a lei do escoamento plástico não-associada ou regra de fluência não-associada. Quando as funções F e Q são as mesmas tem-se a lei do escoamento plástico associada ou regra de fluência associada:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.3.3)$$

que relaciona incrementos de deformação plástica com o gradiente da função de escoamento. $d\lambda$ é um fator de proporcionalidade escalar, maior do que zero, e que varia durante o processo de deformação, sendo chamado de *multiplicador plástico*. Desai e Siriwardane (1984) mostraram vários estudos da função de potencial plástico Q para representar o comportamento não-associativo de diversos materiais geológicos. Estas funções são compostas da função de escoamento e de um fator de correção.

Considerando o emprego da regra de fluência

associada, algumas considerações mais detalhadas devem ser introduzidas. Devido à fluência plástica, alguns materiais apresentam um grau de endurecimento nesta fase e duas hipóteses foram feitas para definir este comportamento. Na primeira hipótese Hill apud Desai e Siriwardane (1984) supõe que o endurecimento depende somente do trabalho plástico e é independente da trajetória das deformações. A segunda hipótese supõe que a deformação plástica é a medida do endurecimento. Com relação à primeira hipótese, o trabalho de endurecimento obedece aos seguintes postulados, conhecidos como postulados da estabilidade de Drucker:

- 1) Durante a aplicação das tensões, o trabalho feito pelas forças externas é positivo;
- 2) Durante um ciclo de aplicação e remoção das tensões, o trabalho feito pelas forças externas é nulo ou positivo.

Para se estabelecer as expressões matemáticas relacionadas com os postulados acima, a partir de um estado de tensões σ_{ij} , considera-se um acréscimo de tensão $d\sigma_{ij}$, que causa um pequeno acréscimo de deformação $d\epsilon_{ij}$. Então, de acordo com o primeiro postulado, tem-se:

$$d\sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij} \geq 0 \quad (3.3.4a)$$

Mas a deformação total é a soma das deformações elástica e plástica, ou seja:

$$d\sigma_{ij} \cdot (d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p) \geq 0 \quad (3.3.4b)$$

O segundo postulado permite escrever:

$$d\sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (3.3.4c)$$

Algumas condições adicionais devem ser satisfeitas para se garantir a descrição adequada do comportamento da deformação plástica e foram propostas por Prager apud Desai

e Siriwardane (1984):

a) **Condição de Continuidade:** uma variação infinitesimal $d\sigma_{ij}$ no estado de tensões σ_{ij} , causa um carregamento, um descarregamento ou um carregamento neutro, dependendo se a trajetória de tensões está dirigida para o interior, para o exterior ou tangente à superfície de escoamento. Para se evitar descontinuidades nas relações tensão-deformação esta condição exige que o carregamento neutro não cause deformação plástica;

b) **Condição de Unicidade:** para um dado sistema de incrementos infinitesimais de forças, os incrementos de tensões e deformações resultantes são únicos;

c) **Condição de Irreversibilidade:** devido à irreversibilidade das deformações plásticas, o trabalho feito por elas é positivo (ver equação 3.3.4c);

d) **Condição de Consistência:** um carregamento a partir de um estado plástico causa outro estado plástico. Esta condição exige que o critério de escoamento seja satisfeito enquanto o material estiver em um estado plástico.

As condições de Prager e as hipóteses feitas, levam a importantes restrições no comportamento elastoplástico de um material. A condição de continuidade exige que a componente tangencial da tensão não provoque deformação plástica, razão pela qual somente a componente normal à superfície de escoamento é responsável por essa deformação. Este fato obriga que o incremento de deformação plástica seja perpendicular à superfície de escoamento no espaço de tensões instantâneo. No caso de um ponto singular ele deve estar entre as normais, segundo mostra a figura 3.3.1. Este fato é conhecido como *regra de normalidade* representado pela equação (3.3.3). Outra conclusão importante a partir da condição de irreversibilidade é que

a superfície de escoamento deve ser convexa em relação à origem do espaço de tensões, pois qualquer raio vetor para um ponto da superfície de escoamento, deve fazer um ângulo agudo com sua normal, para o exterior à superfície, naquele ponto. A prova matemática desta conclusão encontra-se em Desai e Siriwardane (1984).

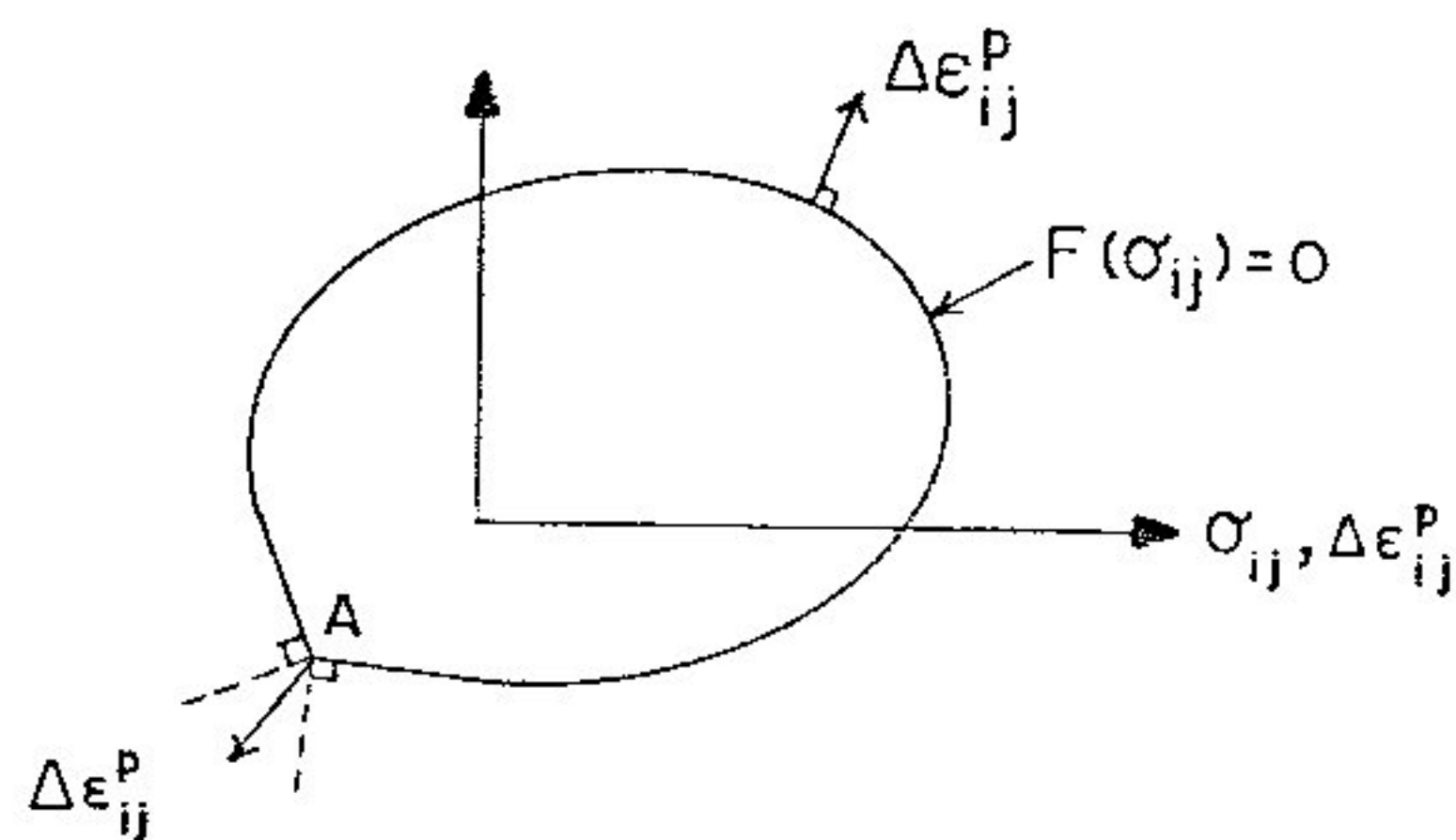


Figura 3.3.1

Os postulados de Drucker e as condições de convexidade e normalidade são válidos somente para materiais com endurecimento ou elásticos-perfeitamente plásticos, chamados de materiais estáveis. Exclui-se, portanto, os materiais com amolecimento, que são chamados de materiais instáveis.

Quando se utiliza a regra de fluência associada, material elástico perfeitamente plástico e critério de escoamento de Mohr-Coulomb aparece o fenômeno da dilatância, que acompanha o cisalhamento de um solo com ângulo de atrito não nulo. A resistência ao cisalhamento é devida à coesão e ao ângulo de atrito interno, sendo que a parcela relativa ao atrito interno corresponde ao atrito interno propriamente dito e ao entrosamento entre partículas. O aumento de volume durante o cisalhamento, que é a dilatância, é ocasionado pela parcela referente ao entrosamento.

3.4 Critérios de Escoamento

Na ausência de forças de volume, o equilíbrio estático de forças e momentos de um paralelepípedo infinitesimal em torno de um ponto de um corpo satisfaz à equação:

$$\sigma_{ij,i} = 0 \quad (3.4.1)$$

onde a vírgula indica derivada parcial, ou seja:

$$\sigma_{ij,i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \quad (3.4.2)$$

e σ_{ij} são as componentes do tensor de tensões. Conhecendo-se estas componentes em um ponto, as forças de superfície neste ponto são dadas por:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.4.3)$$

onde n_j são os cossenos diretores da normal ao plano considerado. Pode-se escolher um sistema de eixos especial de tal maneira que as tensões de cisalhamento sejam nulas. Estas direções são chamadas de *direções principais* e as tensões normais agindo em cada um dos planos perpendiculares às direções principais são chamadas de *tensões principais*. As direções principais podem ser obtidas considerando-se a relação:

$$p_i = \lambda n_i \quad (3.4.4)$$

que indica que o vetor das forças de superfície p_i é paralelo ao vetor normal. Levando-se (3.4.4) em (3.4.3) vem:

$$(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij})n_i = 0 \quad (3.4.5)$$

Para que (3.4.5) tenha solução diferente da trivial é necessário que o determinante deste sistema seja nulo:

$$|\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \quad (3.4.6)$$

que expandido dá a equação cúbica:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (3.4.7)$$

onde: $I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{13}\sigma_{31} - \sigma_{23}\sigma_{32} - \sigma_{12}\sigma_{21} \quad (3.4.8)$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} + \sigma_{13}\sigma_{21}\sigma_{32} - \sigma_{11}\sigma_{23}\sigma_{32} - \sigma_{12}\sigma_{21}\sigma_{33} - \sigma_{13}\sigma_{31}\sigma_{22}$$

As soluções de (3.4.7) fornecem os valores das tensões principais. Como elas são as mesmas, independentemente do sistema de eixos escolhido, e a solução da equação cúbica é única, os valores dos coeficientes desta equação I_1 , I_2 e I_3 devem ser os mesmos em qualquer sistema de eixos adotado. Por isso I_1 , I_2 e I_3 são chamados de invariantes do tensor de tensões. Em função das tensões principais eles podem ser escritos como:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 \quad (3.4.9)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Para a obtenção da solução de (3.4.7) é necessário

promover-se uma troca de variáveis. Esta troca corresponde a uma mudança no sistema de eixos coordenados do espaço de tensões. Este novo sistema de eixos é formado pelo eixo hidrostático $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ das tensões principais e de um plano, perpendicular à este eixo, que passa no ponto sob consideração. A posição do ponto neste plano é definida pelo ângulo formado pela reta relativa ao estado de cisalhamento puro e a reta que passa pelo ponto sob consideração, que concorrem no traço do eixo hidrostático no plano. Fazendo-se, então:

$$\bar{\lambda} = \lambda - \frac{I_1}{3} \quad (3.4.10)$$

$$\bar{\lambda}^3 - J_2 \bar{\lambda} - J_3 = 0 \quad (3.4.11)$$

onde:

$$J_2 = \frac{I_1^2}{3} - I_2$$

$$J_3 = I_3 + \frac{1}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3 \quad (3.4.12)$$

são chamados de 2° e 3° invariantes do tensor dos desvios de tensão, respectivamente. Uma nova troca de variáveis em (3.4.11) é necessária:

$$\bar{\lambda} = 2 \left(\frac{J_2}{3} \right)^{1/2} \text{sen}\theta \quad (3.4.13)$$

Da relação trigonométrica $[4 \text{sen}^3\theta - 3 \text{sen}\theta] = -\text{sen}3\theta$ chega-se à expressão para o ângulo θ , também conhecido como *ângulo de Lode*:

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsen \left[-\frac{J_3}{2} \left(\frac{3}{J_2} \right)^{3/2} \right] \quad (3.4.14)$$

As tensões principais são expressas em relação aos invariantes:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sqrt{J_2} \left(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}\theta \right) \\
\sigma_2 &= \sqrt{J_2} \left(2 \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}\theta \right) \\
\sigma_3 &= -\sqrt{J_2} \left(\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen}\theta \right)
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

3.4.1 Critério de Tresca:

A maior tensão de cisalhamento não deve ultrapassar a metade da tensão limite de tração ou compressão simples:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma_0}{2} \quad \text{ou} \quad \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_0 \tag{3.4.16}$$

onde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ são as tensões principais. A equação (3.4.16) pode ser escrita em função dos invariantes de tensão usando-se (3.4.15). Tem-se, então:

$$2 \sqrt{J_2} \cos\theta \leq \sigma_0 \tag{3.4.17}$$

As expressões (3.4.16) e (3.4.17) são equivalentes.

3.4.2 Critério de Von Mises

O material resiste até que a tensão octaédrica de cisalhamento atinja um valor limite, constante para cada material.

$$\tau_{\text{oct}} \leq k = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_0 \quad (3.4.18)$$

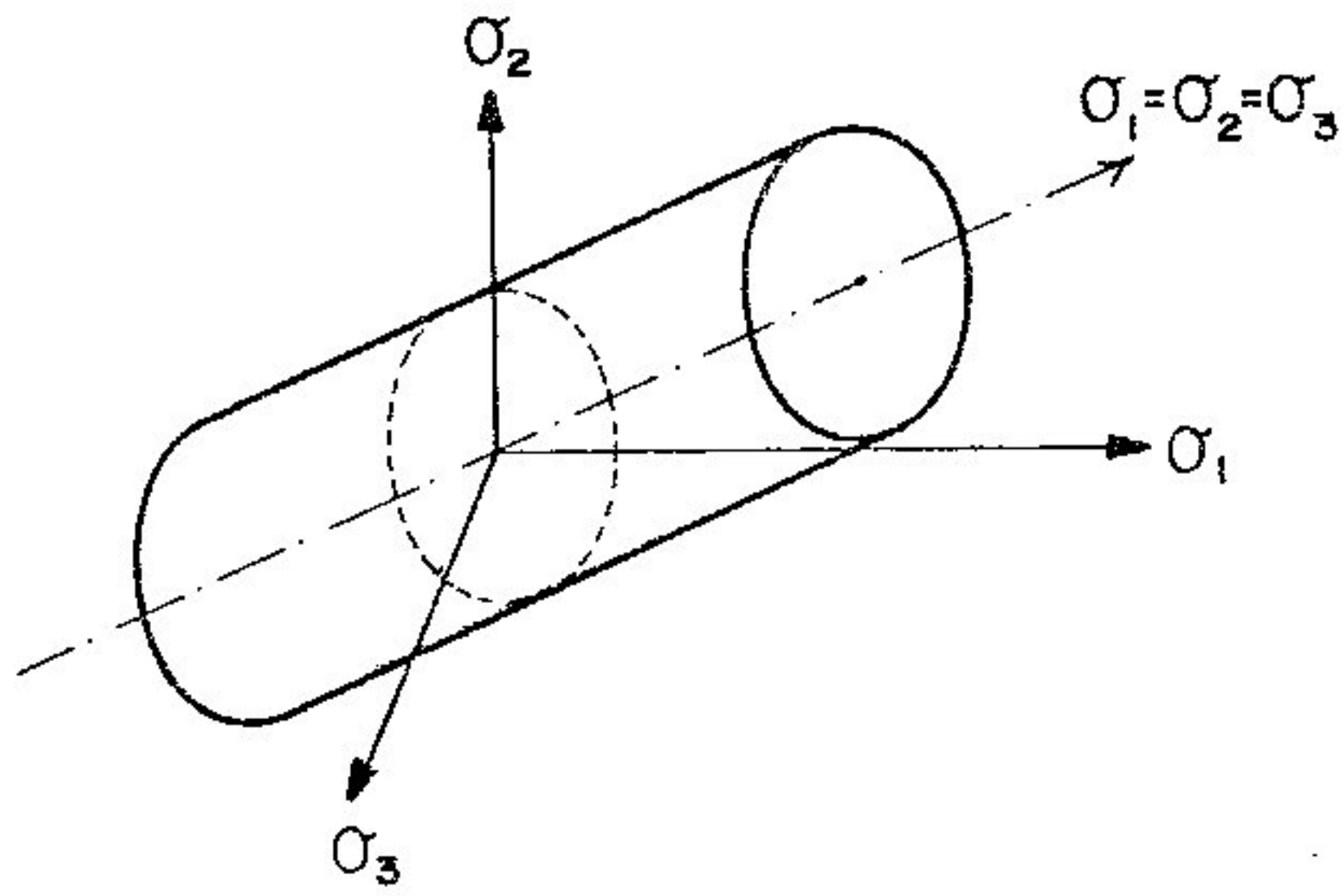
A tensão de cisalhamento octaédrica é dada por:

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 \right)^{1/2} \quad (3.4.19)$$

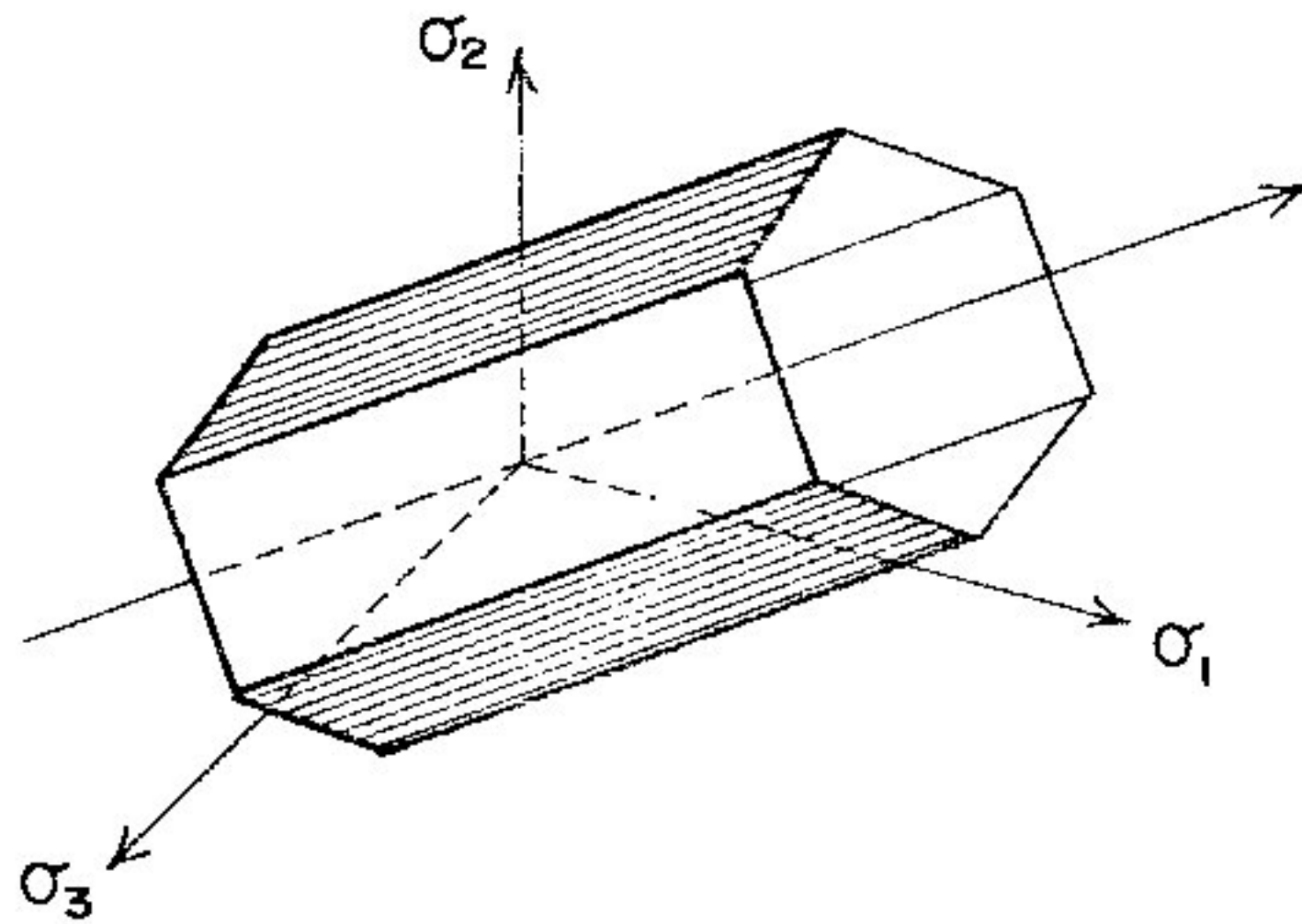
Levando (3.4.15) e (3.4.19) em (3.4.18) vem:

$$\sqrt{3J_2} \leq \sigma_0 \quad (3.4.20)$$

O valor de $k = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_0$ ajusta o critério de Von Mises ao de Tresca. Pode-se construir as superfícies de escoamento no espaço de tensões principais σ_1 , σ_2 e σ_3 resultando um prisma de base hexagonal regular e um cilindro circular reto circunscrito ao prisma para os critérios de Tresca e Von Mises, respectivamente. O eixo hidrostático é também o eixo comum ao prisma e ao cilindro. As figuras 3.4.1 e 3.4.2 mostram estas superfícies.



Superfície de Escoamento de Von Mises
 Figura 3.4.1



Superfície de Escoamento de Tresca
 Figura 3.4.2

3.4.3 Critério de Mohr-Coulomb

A tensão de cisalhamento deve ser menor ou no máximo igual a $(c - \sigma_{nn} \operatorname{tg}\varphi)$ onde σ_{nn} é a tensão normal que atua no plano de cisalhamento, c é a coesão e φ é o ângulo de atrito interno do material.

$$\tau_{ns} \leq c - \sigma_{nn} \operatorname{tg}\varphi \quad (3.4.21)$$

Usando-se o círculo de Mohr pode-se modificar (3.4.21) e

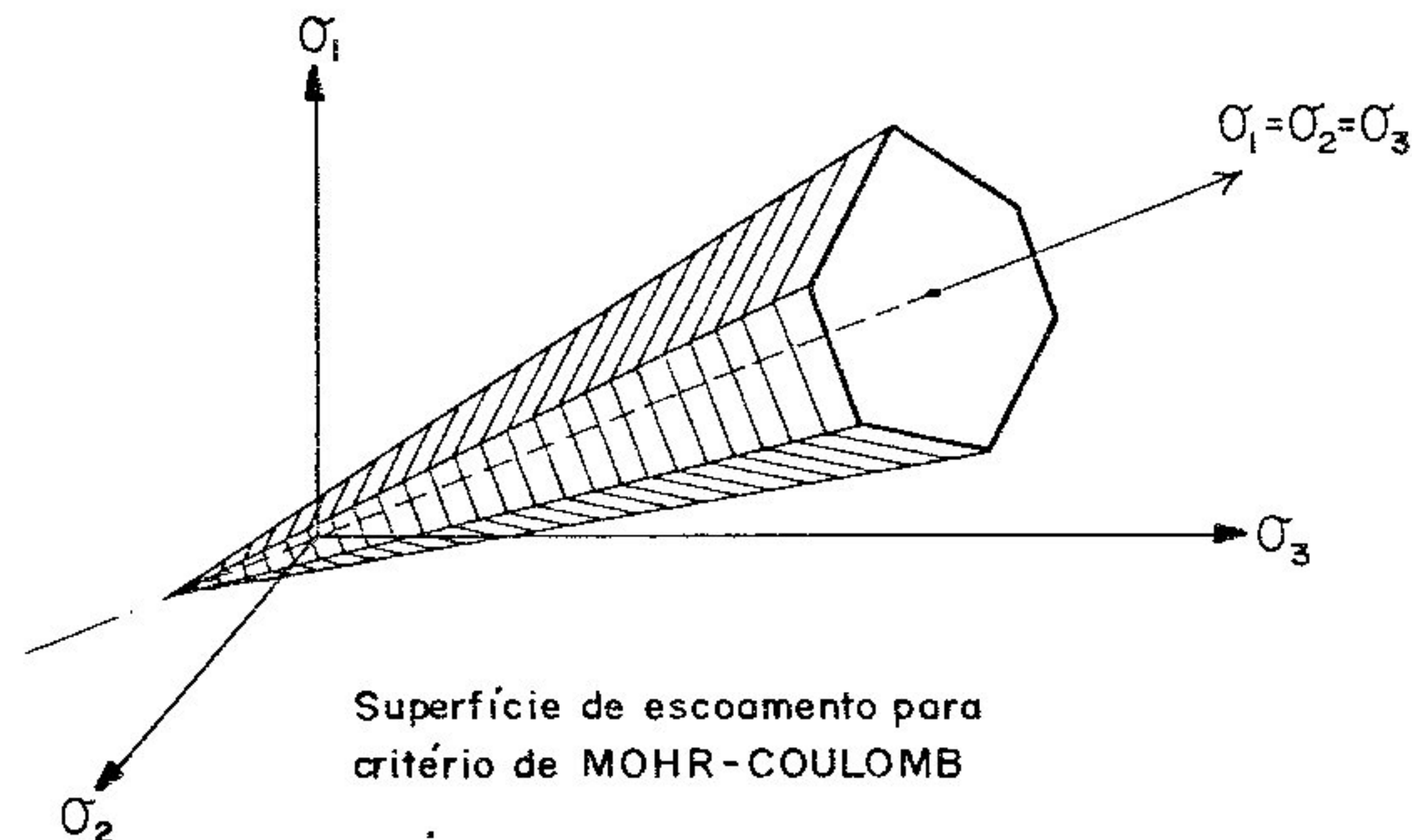
exprimí-la em função das tensões principais:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \operatorname{sen} \varphi \leq 2 c \cos \varphi \quad (3.4.22)$$

Levando-se (3.4.15) em (3.4.22) vem:

$$\frac{I_1}{3} \operatorname{sen} \varphi + \sqrt{J_2} \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \right) \leq c \cos \varphi \quad (3.4.23)$$

A superfície de escoamento é uma pirâmide de base hexagonal irregular cujo eixo é o eixo hidrostático.



Superfície de Escoamento de Mohr-Coulomb

Figura 3.4.3

3.4.4 Critério de Drucker-Prager

O critério de Drucker-Prager é uma aproximação do critério de Mohr-Coulomb a partir de uma modificação do critério de Von Mises:

$$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} \leq k' \quad (3.4.24)$$

Vários valores de α e k' simulam situações diferentes para o critério de Mohr-Coulomb. A superfície de escoamento para o critério de Drucker-Prager é um cone circular reto cujo eixo é o eixo hidrostático. Para um cone circunscrito à pirâmide do critério de Mohr-Coulomb, tangenciando as arestas mais salientes tem-se:

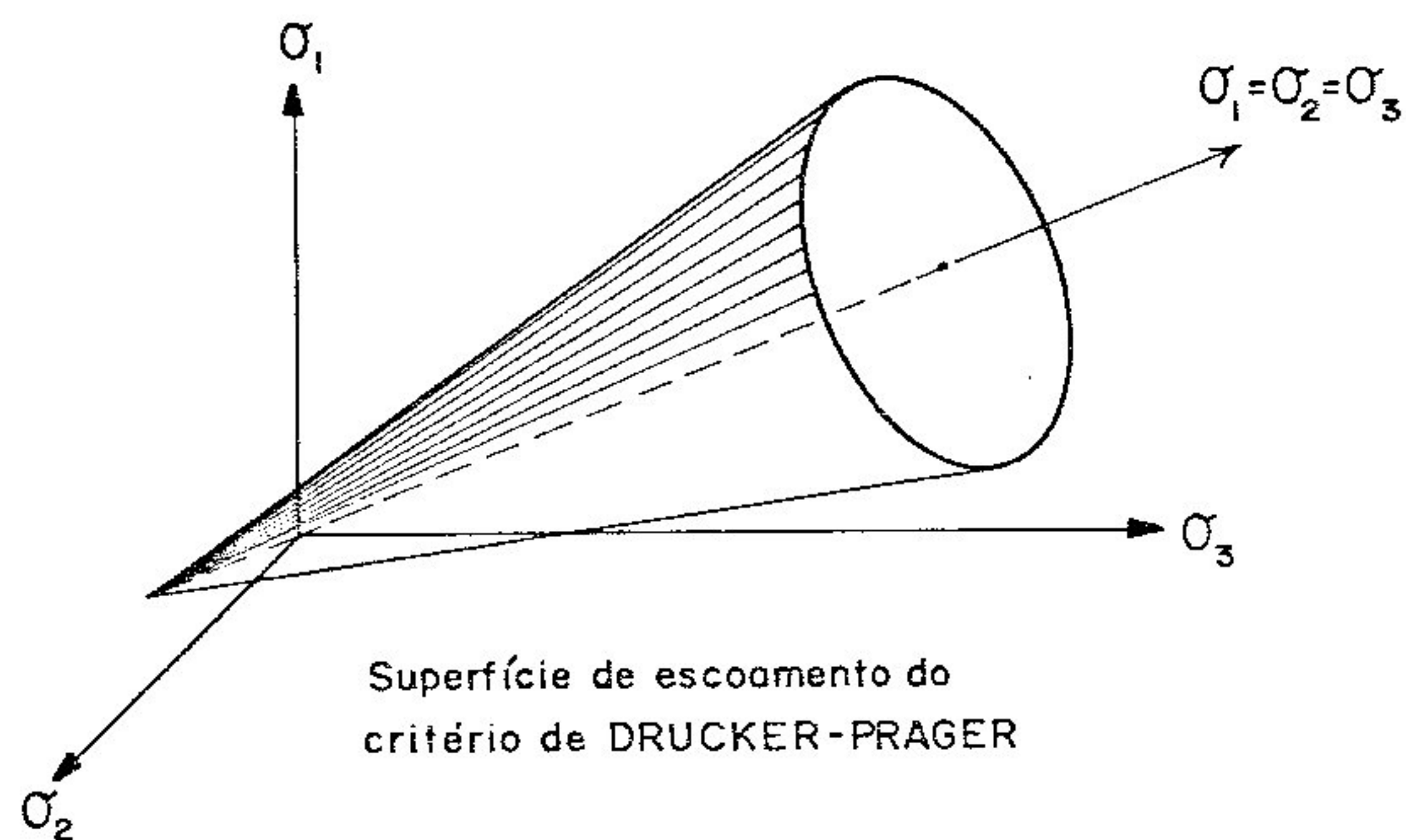
$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{3} (3 - \operatorname{sen}\varphi)} \quad ; \quad k' = \frac{6 c \operatorname{cos}\varphi}{\sqrt{3} (3 - \operatorname{sen}\varphi)} \quad (3.4.25)$$

Se o cone tangencia as arestas menos salientes da pirâmide vem:

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{3} (3 + \operatorname{sen}\varphi)} \quad ; \quad k' = \frac{6 c \operatorname{cos}\varphi}{\sqrt{3} (3 + \operatorname{sen}\varphi)} \quad (3.4.26)$$

Outra alternativa é a simulação do critério de Mohr-Coulomb para estado plano de deformação:

$$\alpha = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{3} (3 + \operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2}} \quad ; \quad k' = \frac{\sqrt{3} c \operatorname{cos}\varphi}{(3 + \operatorname{sen}^2\varphi)^{1/2}} \quad (3.4.27)$$



Superfície de Escoamento de Drucker-Prager
figura 3.4.4

FÓRMULA GERAL: $a_1 J'_1 + a_2 J'_2 \leq a_3$ (em função dos invariantes de tensão)					
Coeficiente Critérios	a_1	J'_1	a_2	J'_2	a_3
Tresca	-	-	2	$\sqrt{2} \cos\theta$	σ_0
Von Mises	-	-	$\sqrt{3}$	$\sqrt{J_2}$	σ_0
Mohr- Coulomb	$\frac{1}{3} \text{sen}\varphi$	I_1	1	$\frac{\sqrt{J_2} [\cos\theta - \frac{\text{sen}\theta \text{sen}\varphi}{\sqrt{3}}]}{\sqrt{3}}$	$c \cos\varphi$
Drucker- Prager	α	I_1	1	$\sqrt{J_2}$	k'

RESUMO (em função das tensões principais)	
Tresca	$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_0$
Von Mises	$\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \leq \sigma_0$
Mohr- Coulomb	$(\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \text{sen}\varphi \leq 2 c \cos\varphi$
Drucker- Prager	$\alpha (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{6} \right]^{1/2} \leq k'$

3.5 Formulação Matricial

A equação (3.3.1) pode ser escrita na forma:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = f(\sigma_{ij}) - \psi(\kappa) = 0 \quad (3.5.1)$$

Então:

$$dF = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad (3.5.2)$$

Chamando-se:

$$a_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.5.3)$$

Pode-se escrever (3.5.2) como:

$$a_{ij} d\sigma_{ij} - \frac{d\psi}{d\kappa} d\kappa = 0 \quad (3.5.4)$$

onde a_{ij} é chamado de *vetor de fluência*. De (3.2.5):

$$d\kappa = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p$$

Logo:

$$a_{ij} d\sigma_{ij} = \frac{d\psi}{d\kappa} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p \quad (3.5.5)$$

Levando (3.3.3) e (3.5.3) em (3.5.5) vem:

$$a_{ij} d\sigma_{ij} = \frac{d\psi}{d\kappa} \sigma_{ij} a_{ij} d\lambda \quad (3.5.6)$$

Sabe-se que :

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \Rightarrow \epsilon_{ij}^e = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^p \quad (3.5.7)$$

sendo ϵ_{ij} a deformação total, que corresponde à soma das deformações elástica ϵ_{ij}^e e plástica ϵ_{ij}^p .

De (3.1.1) e (3.5.7):

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (3.5.8)$$

Levando (3.5.8) em (3.5.6):

$$a_{ij} C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) = \frac{d\psi}{d\kappa} \sigma_{ij} a_{ij} d\lambda$$

ou:

$$a_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} = \frac{d\psi}{d\kappa} \sigma_{ij} a_{ij} d\lambda + a_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^p \quad (3.5.9)$$

De (3.3.3) e (3.5.3) em (3.5.9) tem-se:

$$a_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} = d\lambda \left[\frac{d\psi}{d\kappa} \sigma_{ij} a_{ij} + a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} \right]$$

Assim:

$$d\lambda = \frac{1}{\gamma'} a_{ij} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (3.5.10)$$

onde

$$\gamma' = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + \frac{d\psi}{d\kappa} \sigma_{ij} a_{ij} \quad (3.5.11)$$

Como $f(\sigma_{ij})$ é uma função homogênea de grau um pode-se aplicar o teorema de Euler, segundo Owen e Hinton (1980):

$$\sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = f(\sigma_{ij}) \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} a_{ij} = f(\sigma_{ij}) = \sigma_e \quad (3.5.12)$$

$f(\sigma_{ij})$ é uma função escalar de σ_{ij} e representa uma tensão equivalente ou efetiva σ_{ef} . Esta tensão efetiva é que monitora o nível de tensões para a determinação do início do escoamento. Como consequência pode-se definir a deformação plástica equivalente ou efetiva ε_e^p cujo incremento produz um incremento na energia de deformação

plástica como se segue (ver também 3.2.5a):

$$\sigma_e d\varepsilon_e^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = d\kappa \quad (3.5.13)$$

Levando (3.5.12) em (3.5.11):

$$\gamma' = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + \frac{d\psi}{d\kappa} \sigma_e \quad (3.5.14)$$

De (3.5.13):

$$\frac{\sigma_e}{d\kappa} = \frac{1}{d\varepsilon_e^p} \quad (3.5.15)$$

De (3.5.15) em (3.5.14) vem:

$$\gamma' = a_{ij} C_{ijkl} a_{kl} + \frac{d\psi}{d\varepsilon_e^p} \quad (3.5.16)$$

Se ψ é definido como a tensão de escoamento uniaxial, então:

$$\frac{d\psi}{d\varepsilon_e^p} = H'$$

como foi mostrado em (3.2.6b).

De (3.5.3) e (3.3.3) em (3.5.8) vem:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - a_{kl} d\lambda) \quad (3.5.17)$$

Levando (3.5.10) em (3.5.17) tem-se:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left(d\varepsilon_{kl} - \frac{a_{mn} C_{mnop} a_{op} d\varepsilon_{kl}}{\gamma'} \right)$$

ou:

$$d\sigma_{ij} = [C_{ijkl} - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{op} C_{opkl}] d\epsilon_{kl} \quad (3.5.18)$$

Assim:

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\epsilon_{kl} \quad (3.5.19)$$

onde

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{op} C_{opkl} \quad (3.5.20)$$

Para a formulação em tensões iniciais, a expressão (3.5.20) deve ser modificada. As tensões plásticas são consideradas através de um campo de *tensões iniciais*, introduzido de forma incremental. Tem-se que (ver 4.2.8):

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij}^o \quad (3.5.21)$$

onde $\dot{\sigma}_{ij}$ é a taxa de tensão real e $\dot{\sigma}_{ij}^e$ e $\dot{\sigma}_{ij}^o$ são as taxas das tensões elástica e *inicial* respectivamente. Mas:

$$d\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad (3.5.22)$$

onde $d\sigma_{ij}^e$ são os incrementos de tensão elástica. Então (3.5.19) deve ser reescrito como:

$$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^e - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{kl} d\sigma_{kl}^e \quad (3.5.23)$$

Estas expressões são válidas para o caso tridimensional.

3.6 Forma Unificada dos Critérios de Escoamento

Para a determinação de C_{ijkl}^{ep} dada pela equação (3.5.20) é necessário expressar-se o vetor de fluência a_{ij} de forma adequada para implementação numérica como foi sugerido por Nayak e Zienkiewicz (1972).

De (3.5.3):

$$\underline{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial J_2^{1/2}} \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.6.1)$$

De (3.4.8) vem:

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} = \left\{ \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{33}}, \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{23}}, \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{31}} \right\}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \underline{\sigma}} = \{ 1, 1, 1, 0, 0, 0 \} \quad (3.6.2)$$

Ainda:

$$J_2^{1/2} = \left(\frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{3} - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \right)^{1/2}$$

Observar que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ devido a reciprocidade das tensões de cisalhamento.

Então:

$$\frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial \underline{\sigma}} = \left\{ \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial \sigma_{33}}, \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial \sigma_{23}}, \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial \sigma_{31}} \right\}$$

ou:

$$\frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{1}{2J_2^{1/2}} \{ \bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33}, 2\sigma_{12}, 2\sigma_{23}, 2\sigma_{31} \} \quad (3.6.3)$$

onde

$$\bar{\sigma}_{ii} = \sigma_{ii} - \frac{I_1}{3}$$

De 3.4.12 vem:

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{11}} = \left(\bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{33} - \sigma_{23}^2 + \frac{J_2}{3} \right)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{22}} = \left(\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{33} - \sigma_{31}^2 + \frac{J_2}{3} \right)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{33}} = \left(\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} - \sigma_{12}^2 + \frac{J_2}{3} \right)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{12}} = 2 \left(\sigma_{23} \sigma_{31} - \sigma_{12} \bar{\sigma}_{33} \right)$$

(3.6.4)

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{23}} = 2 \left(\sigma_{12} \sigma_{31} - \sigma_{23} \bar{\sigma}_{11} \right)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{31}} = 2 \left(\sigma_{12} \sigma_{23} - \sigma_{31} \bar{\sigma}_{22} \right)$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \underline{\sigma}} = \left\{ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{33}}, \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{23}}, \frac{\partial J_3}{\partial \sigma_{31}} \right\}$$

De (3.4.14):

$$\text{sen}3\theta = - \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (3.6.5)$$

Diferenciando-se (3.6.5) vem:

$$3 \cos 3\theta \partial \theta = - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(- \frac{3J_3}{J_2^2} \partial(J_2^{1/2}) + \frac{1}{J_2^{3/2}} \partial J_3 \right) \quad (3.6.6)$$

ou:

$$\partial\theta = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \left(\frac{3J_3}{J_2^2} \partial(J_2^{1/2}) - \frac{1}{J_2^{3/2}} \partial J_3 \right) \quad (3.6.7)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\sigma} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \left(\frac{3J_3}{J_2^2} \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial\sigma} - \frac{1}{J_2^{3/2}} \frac{\partial J_3}{\partial\sigma} \right) \quad (3.6.8)$$

De (3.6.8) em (3.6.1) vem:

$$\begin{aligned} \underline{a}^T = \frac{\partial F}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial\sigma} + \left(\frac{\partial F}{\partial J_2^{1/2}} - \frac{\tan 3\theta}{J_2^{1/2}} \frac{\partial F}{\partial\theta} \right) \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial\sigma} - \\ - \left(\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{\partial F}{J_2^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial\theta} \right) \frac{\partial J_3}{\partial\sigma} \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

Resumindo:

$$\underline{a} = C_1 \underline{a}_1 + C_2 \underline{a}_2 + C_3 \underline{a}_3 \quad (3.6.10)$$

onde:

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} \quad ; \quad C_2 = \frac{\partial F}{\partial J_2^{1/2}} - \frac{\tan 3\theta}{J_2^{1/2}} \frac{\partial F}{\partial\theta}$$

$$C_3 = - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{\partial F}{J_2^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial\theta}$$

$$\underline{a}_1^T = \frac{\partial I_1}{\partial\sigma} \quad ; \quad \underline{a}_2^T = \frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial\sigma} \quad ; \quad \underline{a}_3^T = \frac{\partial J_3}{\partial\sigma}$$

são dados por (3.6.2) , (3.6.3) e (3.6.4) respectivamente.

Para obter-se as expressões de C_1 , C_2 e C_3 considera-se cada um dos critérios de escoamento adotados.

3.6.1 Vetor de Fluência para o Critério de Tresca

$$F = 2 J_2^{1/2} \cos\theta - \sigma_0$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 2 \cos\theta \left(1 + \tan 3\theta \tan\theta \right) \quad (3.6.11)$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3}}{J_2} \frac{\text{sen}\theta}{\cos 3\theta} \quad (3.6.12)$$

3.6.2 Vetor de Fluência para o Critério de Von Mises

$$F = \sqrt{3J_2} - \sigma_0$$

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = \sqrt{3} \quad (3.6.13)$$

$$C_3 = 0$$

Observa-se que $\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$

3.6.3 Vetor de Fluência para o Critério de Mohr-Coulomb

$$F = \frac{I_1}{3} \text{sen}\varphi + \sqrt{J_2} \left(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \text{sen}\varphi \text{sen}\theta \right) - c \cos\varphi$$

$$C_1 = \frac{1}{3} \text{sen}\varphi \quad (3.6.14)$$

$$C_2 = \cos\theta \left((1 + \tan 3\theta \tan\theta) + \frac{\text{sen}\varphi}{\sqrt{3}} (\tan 3\theta - \tan\theta) \right) \quad (3.6.15)$$

$$C_3 = \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi \cos\theta}{2 \cos 3\theta J_2} \quad (3.6.16)$$

3.6.4 Vetor de Fluência para o Critério de Drucker-Prager

$$F = \alpha I_1 + J_2^{1/2} - k'$$

$$C_1 = \alpha$$

$$C_2 = 1.0 \quad (3.6.17)$$

$$C_3 = 0$$

3.7 Expressões para Estado Plano

Para Estado Plano de Deformação ou Estado Plano de Tensão algumas componentes se anulam. As componentes remanescentes são mostradas a seguir:

A expressão (3.1.1) tem a seguinte forma explícita:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix}$$

Para Estado Plano de Deformação:

$$\underline{\sigma}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{33}\} \text{ sendo } \epsilon_{33} = 0$$

Para Estado Plano de Tensão:

$$\underline{\sigma}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}\} \text{ sendo } \sigma_{33} = 0$$

Para Estado Plano de Deformação (3.1.1) tem a forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix}$$

pois $\sigma_{33} = \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})$ e $\epsilon_{33} = 0$.

Para Estado Plano de Tensão tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{2G}{1-\nu} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix}$$

com $\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$ e $\sigma_{33} = 0$

Vetor de Fluência \underline{a}^T é encontrado usando-se:

$$\underline{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{33}} \right\}$$

ou de acordo com a expressão (3.6.10),

$$\underline{a}_1^T = \{1, 0, 1, 1\}$$

$$\underline{a}_2^T = \frac{1}{2J_2^{1/2}} \{ \bar{\sigma}_{11}, 2\sigma_{12}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33} \}$$

$$\underline{a}_3^T = \left\{ \left(\bar{\sigma}_{22} \bar{\sigma}_{33} + \frac{J_2}{3} \right); (-2\sigma_{12} \bar{\sigma}_{33}); \left(\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{33} + \frac{J_2}{3} \right); \left(\bar{\sigma}_{11} \bar{\sigma}_{22} + \frac{J_2}{3} \right) \right\}$$

Os invariantes dos desvios de tensão se tornam:

$$J_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + \sigma_{12}^2$$

$$J_3 = \bar{\sigma}_{33} (\bar{\sigma}_{33}^2 - J_2)$$

Para a formulação em tensões iniciais é conveniente escrever a expressão do vetor de fluência como:

$$a_{ij} = \underline{a} = [a_{11} ; 2a_{12} ; a_{22} ; a_{33}]$$

Chamando-se de $\bar{d} = C_{ijkl} a_{kl}$, para Estado Plano de Deformação vem:

$$\bar{d}^T = 2 G \{ (a_{11} + \omega) ; (a_{12}) ; (a_{22} + \omega) ; (a_{33} + \omega) \}$$

onde

$$\omega = \frac{\nu}{1-2\nu} (a_{11} + a_{22} + a_{33})$$

Para Estado Plano de Tensão:

$$\bar{d}^T = 2 G \{ (a_{11} + \omega) ; (a_{12}) ; (a_{22} + \omega) \}$$

onde

$$\omega = \frac{\nu}{1-\nu} (a_{11} + a_{22})$$

3.8 Singularidades na Superfície de Escoamento

Para as superfícies de escoamento de Tresca e Mohr-Coulomb o vetor de fluência não é definido para $\theta = \pm 30^\circ$ podendo-se observar que as constantes C_2 e C_3 tendem para infinito. Para se evitar essa dificuldade toma-se $|\theta| \leq 29^\circ$. Na vizinhança dos cantos os valores de C_1 , C_2 e C_3 são aqueles utilizados no critério de Von Mises, quando se

tratar da superfície de Tresca. Analogamente, estas mesmas constantes, para a superfície de Mohr-Coulomb, são obtidas analiticamente substituindo-se $\theta = 30^\circ$ na expressão de F e depois encontrando-se as derivadas, isto é:

$$C_1 = \frac{1}{3} \operatorname{sen} \varphi ; C_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[1 \mp \frac{\operatorname{sen} \varphi}{3} \right] ; C_3 = 0$$

Este artifício corresponde a se arredondar os cantos da superfície de escoamento quando $29^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$.

CAPÍTULO IV

EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA ELASTOPLASTICIDADE

4.1 Introdução

Foram mostradas até agora as equações básicas da Teoria da Elasticidade e da Plasticidade. Elas podem ser utilizadas indistintamente no Método dos Elementos Finitos ou no Método dos Elementos de Contorno. Inicia-se agora a formulação integral para materiais que apresentem um comportamento elastoplástico. A Identidade de Somigliana é obtida através da técnica dos Resíduos Ponderados incluindo-se o termo relativo às tensões iniciais. O problema é resolvido pelo processo das tensões iniciais porque ele não inclui a restrição de incompressibilidade das deformações plásticas presente no processo das deformações iniciais. Com isso permite-se estudar os critérios de Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager de maneira unificada segundo Nayak e Zienkiewicz (1972). Outra facilidade desta formulação é focar o Estado Plano de Tensão como Estado Plano de Deformação alterando-se somente o coeficiente de Poisson do material. Mostra-se também como se consideram as regiões infinitas e semi-infinitas ressaltando-se as soluções

fundamentais respectivas. As tensões nos pontos internos incluem o termo livre obtido ao se derivar a integral singular de domínio das tensões iniciais, segundo o conceito de Mikhlin (1965).

4.2 Identidade de Somigliana Estendida

Para o Caso Inelástico

As equações de equilíbrio de um ponto no interior de um corpo podem ser expressas em notação indicial como:

$$\dot{\sigma}_{ij,i} + \dot{b}_j = 0 \quad (4.2.1)$$

onde o ponto(\cdot) indica que a equação é incremental. As condições de contorno são:

a) essenciais ou deslocamentos prescritos:

$$\dot{u}_i = \dot{\bar{u}}_i \text{ em } \Gamma_1$$

b) naturais ou forças de superfície prescritas:

$$\dot{p}_i = \dot{\bar{p}}_i \text{ em } \Gamma_2$$

onde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ é a superfície do corpo de volume Ω .

A equação de resíduos ponderados mostrada em Brebbia (1978) para o processo incremental é:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\dot{\sigma}_{ij,i} + \dot{b}_j) u_j^* d\Omega &= \int_{\Gamma_2} (\dot{p}_j - \dot{\bar{p}}_j) u_j^* d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_1} (\dot{\bar{u}}_j - \dot{u}_j) p_j^* d\Gamma \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

u_j^* e p_j^* correspondem aos deslocamentos e forças de superfície do campo de ponderação. Sabe-se também que:

$$p_j^* = \sigma_{ij}^* n_i \quad (4.2.3)$$

sendo n_i os cossenos diretores da direção normal para fora do contorno do corpo.

Integrando-se por partes a integral à esquerda da equação (4.2.2) vem:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_i} u_j^* d\Omega = \int_{\Omega} [\dot{\sigma}_{ij} u_j^*]_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} u_{j,i}^* d\Omega \quad (4.2.4)$$

Aplicando-se o teorema da divergência na primeira integral à direita do sinal de igualdade de (4.2.4) vem:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_i} u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma} \dot{\sigma}_{ij} n_i u_j^* d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} u_{j,i}^* d\Omega \quad (4.2.5)$$

Tem-se ainda: $\dot{p}_j = \dot{\sigma}_{ij} n_i$ e $\epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} [u_{j,i}^* + u_{i,j}^*]$; logo:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_i} u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma} \dot{p}_{ij} u_j^* d\Gamma - \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega \quad (4.2.6)$$

Levando (4.2.6) em (4.2.2) e simplificando vem:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}_j u_j^* d\Omega &= - \int_{\Gamma_2} \dot{\bar{p}}_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \dot{p}_j u_j^* d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_1} (\dot{\bar{u}}_j - \dot{u}_j) p_j^* d\Gamma \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Tem-se que: $\dot{\sigma}_{ij} = 2G \dot{\epsilon}_{ij}^e + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk}^e \delta_{ij}$

Mas: $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^0$ ou $\dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^0$

$$\text{Assim: } \dot{\sigma}_{ij} = \left(2G\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} \right) - \left(2G\dot{\epsilon}_{ij}^0 + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk}^0 \delta_{ij} \right)$$

ou

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij}^0 \quad (4.2.8)$$

$$- \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^e \epsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^0 \epsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}_j u_j^* d\Omega = \quad (4.2.9)$$

$$- \int_{\Gamma_2} \dot{\bar{p}}_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \dot{p}_j u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\dot{\bar{u}}_j - \dot{u}_j) p_j^* d\Gamma$$

Pelo Teorema de Betti pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^e \epsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega \quad (4.2.10)$$

Então:

$$- \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^0 \epsilon_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}_j u_j^* d\Omega = \quad (4.2.11)$$

$$- \int_{\Gamma_2} \dot{\bar{p}}_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \dot{p}_j u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\dot{\bar{u}}_j - \dot{u}_j) p_j^* d\Gamma$$

Integrando-se novamente por partes a primeira integral de (4.2.11) vem:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} [\sigma_{ij}^* \dot{u}_j]_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij,i}^* \dot{u}_j d\Omega \quad (4.2.12)$$

Aplicando-se novamente o teorema da divergência na primeira integral à direita do sinal de igualdade em (4.2.12) e levando em (4.2.11) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \sigma_{ij,i}^* \dot{u}_j \, d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^* \, d\Omega + \int_{\Omega} \dot{b}_j u_j^* \, d\Omega = \\
 & = - \int_{\Gamma_2} \dot{p}_j u_j^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \dot{p}_j u_j^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \dot{u}_j p_j^* \, d\Gamma + \quad (4.2.13) \\
 & \quad + \int_{\Gamma_2} \dot{u}_j p_j^* \, d\Gamma
 \end{aligned}$$

De (4.2.1):

$$\sigma_{ij,i}^* = - b_j^* \quad (4.2.14)$$

Levando-se (4.2.14) em (4.2.13) e simplificando-se vem:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} b_j^* \dot{u}_j \, d\Omega &= \int_{\Gamma} u_j^* \dot{p}_j \, d\Gamma - \int_{\Gamma} p_j^* \dot{u}_j \, d\Gamma + \int_{\Omega} u_j^* \dot{b}_j \, d\Omega + \\
 & \quad + \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}^0 \, d\Omega
 \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Como \dot{b}_j e $\dot{\sigma}_{ij}^0$ são as forças de volume e as tensões iniciais conhecidas, a equação (4.2.15) tem incógnitas no domínio devidas somente à primeira integral. Supondo-se que as forças de volume b_j^* correspondam à uma carga concentrada P_j aplicada no ponto $s \in \Omega$ em cada uma das três direções ortogonais pode-se escrever:

$$b_j^* = \delta(s, q) P_j \quad (4.2.16)$$

onde $\delta(s, q)$ representa a função Delta de Dirac, s é o ponto singular ou ponto de aplicação da carga e $q \in \Omega$ é o ponto campo onde se quer calcular os deslocamentos. A função Delta de Dirac tem as seguintes propriedades:

$$\delta(s, q) = 0, \text{ se } s \neq q$$

$$\delta(s, q) = \infty, \text{ se } s = q$$

$$\int_{\Omega} g(q) \delta(s, q) d\Omega = g(s) \quad \text{para } s \in \Omega$$

Por isso a primeira integral de (4.2.15) pode ser representada por:

$$\int_{\Omega} b_j^* u_j d\Omega = u_j(s) P_j$$

Na equação (4.2.15) as cargas concentradas representadas por (4.2.16) são aplicadas simultaneamente. Supondo-se que cada carga concentrada atue independentemente, os deslocamentos e forças de superfície do campo de ponderação são:

$$u_j^* = u_{ij}^*(s, Q) P_i \quad \text{e} \quad p_j^* = p_{ij}^*(s, Q) P_i$$

Os pontos s e q são pontos internos ao domínio enquanto que S e Q são pontos fonte e campo no contorno, respectivamente. Logo, a equação (4.2.15) pode ser, reescrita para cada direção i de aplicação da carga, considerada unitária, chegando-se à Identidade de Somigliana estendida para o caso inelástico:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(s) = & \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, Q) \dot{p}_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) + \\ & (4.2.17) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) \dot{b}_j(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} \varepsilon_{jki}^*(s, q) \dot{\sigma}_{jk}^0(q) d\Omega(q) \end{aligned}$$

Para que (4.2.14) e (4.2.16) sejam válidas é necessário que as funções de ponderação sejam solução do problema fundamental da equação de Navier:

$$G u_{j,kk}^* + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj}^* + \delta(s, q) P_j = 0 \quad (4.2.18)$$

Telles (1983) mostrou que a equação (4.2.17) pode ser ligeiramente modificada para solução de problemas com domínio semi-infinito. Neste caso substitui-se o contorno Γ por Γ' no qual não se inclui a parte descarregada do contorno do corpo sob análise, que coincide com o limite do semi-plano. Então:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i(s) = & \int_{\Gamma'} u_{ij}^*(s, Q) \dot{p}_j(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma'} p_{ij}^*(s, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) + \\ & (4.2.19) \\ & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) \dot{b}_j(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} \varepsilon_{jki}^*(s, q) \dot{\sigma}_{jk}^0(q) d\Omega(q) \end{aligned}$$

As equações (4.2.17) e (4.2.19) relacionam a taxa dos deslocamentos de um ponto fonte, onde é aplicada uma carga unitária (ponto s), com as taxas dos deslocamentos e forças de superfície de um ponto campo (ponto q). $u_{ij}^*(s, q)$ e $p_{ij}^*(s, q)$ representam os deslocamentos e forças de superfície na direção j no ponto campo q correspondente a uma carga unitária aplicada na direção i no ponto fonte s .

4.3 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

No presente trabalho pretende-se utilizar duas diferentes soluções fundamentais. No estudo de túneis profundos emprega-se a solução fundamental de Kelvin para domínios infinitos bidimensionais e para túneis superficiais a solução fundamental do semi-plano. Então, para túneis profundos o domínio Ω^* é um meio elástico infinito e que corresponde a se tomar o contorno Γ^* no infinito. Neste caso a solução da equação de Navier (4.2.18) é devida a Kelvin apud Love (1944):

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left((3 - 4\nu) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right) \quad (4.3.1)$$

para domínios tridimensionais. Como trata-se aqui de domínios bidimensionais, a expressão a ser utilizada é:

$$u_{ij}^*(s, q) = - \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left((3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right) \quad (4.3.2)$$

que é válida para estado plano de deformação, e

$$p_{ij}^*(s, q) = - \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + \beta r_{,i} r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\} \quad (4.3.3)$$

onde $\alpha = 2$ e $\beta = 3$ para problemas tridimensionais;
 $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ para estado plano de deformação;
 r é a distância do ponto fonte (s) ao ponto campo (q)
e suas derivadas são tomadas em relação às coordenadas de q . Então:

$$r = (r_i r_i)^{1/2}$$

$$r_i = x_i(q) - x_i(s)$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(q)} = \frac{r_i}{r} \quad (4.3.4)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,i} n_i$$

Considerando-se o tensor das deformações como:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad (4.3.5)$$

e a lei de Hooke generalizada:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} \quad (4.3.6)$$

Usando-se (4.3.1) ou (4.3.2) em (4.3.5) obtém-se:

$$\epsilon_{jki}^*(s, q) = - \frac{1}{8\alpha\pi(1-\nu)Gr^\alpha} \left((1-2\nu)(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik}) - r_{,i} \delta_{jk} + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right) \quad (4.3.7)$$

Levando-se (4.3.7) em (4.3.6) vem:

$$\sigma_{jki}^*(s, q) = - \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left((1-2\nu)(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik} - r_{,i} \delta_{jk}) + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right) \quad (4.3.8)$$

As expressões anteriores também são válidas para estado plano de tensão desde que se altere o coeficiente de Poisson segundo a relação:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu} \quad (4.3.9)$$

No caso de análise do comportamento de túneis superficiais é vantajosa a utilização da solução fundamental do semi-plano ou do semi-espço, pois não é necessária a discretização da superfície livre, conforme mostrado em (4.2.19). Esta condição de contorno está considerada na solução, exceto quando se tem cargas ali aplicadas. Neste caso, somente a região carregada deve ser discretizada. A solução fundamental do semi-espço é devida a Mindlin (1936). Como esta dissertação se restringe a problemas bidimensionais, esta solução não será abordada e sim a solução fundamental do semi-plano devida a Melan apud Telles (1983), que é a soma da solução fundamental de Kelvin e de uma parte complementar, ou seja:

$$(\)^* = (\)^k + (\)^c \quad (4.3.10)$$

onde $(\)^*$ é a solução fundamental do semi-plano;

$(\)^k$ é a solução fundamental de Kelvin;

$(\)^c$ é a parte complementar devida a Melan;

Pode-se resumir a parte complementar para os deslocamentos, a partir da figura 4.3.1, como:

$$u_{ij}^c = K_d \left\{ - [8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)] \ln R \delta_{ij} + \frac{(3-4\nu)}{R^2} r_i r_j (1-\delta_{ij}) + (j-i) \left[\frac{4c\bar{x}R_1 r_2}{R^4} - 4(1-\nu)(1-2\nu)\theta \right] + \frac{(3-4\nu)R_i^2}{R^2} \delta_{ij} + (i+j-3) \left[\frac{2c\bar{x}}{R^2} - \frac{4c\bar{x}R_i^2}{R^4} \right] \right\} \quad (4.3.11)$$

$$\text{onde} \quad K_d = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \quad \text{e} \quad \theta = \arctan\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad (4.3.12)$$

A parte complementar para as tensões é:

$$\begin{aligned}
\sigma_{111}^c &= -K_s \left\{ \frac{(3\bar{x}+c)(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2R_1(R_1^2+2c\bar{x})-4\bar{x}r_2^2(1-2\nu)}{R^4} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{16c\bar{x}R_1r_2^2}{R^6} \right\} \\
\sigma_{121}^c &= -K_s r_2 \left\{ -\frac{1-2\nu}{R^2} + \frac{2[\bar{x}^2-2c\bar{x}-c^2+2\bar{x}R_1(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}R_1^2}{R^6} \right\} \\
\sigma_{221}^c &= -K_s \left\{ \frac{(3c+\bar{x})(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[R_1(r_2^2+2c^2)-2cr_2^2-4\bar{x}r_2^2(1-2\nu)]}{R^4} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{16c\bar{x}R_1r_2^2}{R^6} \right\} \\
\sigma_{112}^c &= -K_s r_2 \left\{ -\frac{1-2\nu}{R^2} - \frac{2[c^2+6c\bar{x}-\bar{x}^2-2\bar{x}R_1(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}r_2^2}{R^6} \right\}
\end{aligned}
\tag{4.3.13}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{122}^c &= -K_s \left\{ \frac{(3\bar{x}+c)(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[R_1(r_2^2+2c\bar{x})-2\bar{x}R_1^2(1-2\nu)]}{R^4} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{16c\bar{x}R_1r_2^2}{R^6} \right\} \\
\sigma_{222}^c &= -K_s r_2 \left\{ -\frac{3(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[r_2^2-4c\bar{x}-2c^2-2\bar{x}R_1(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}R_1^2}{R^6} \right\}
\end{aligned}$$

onde

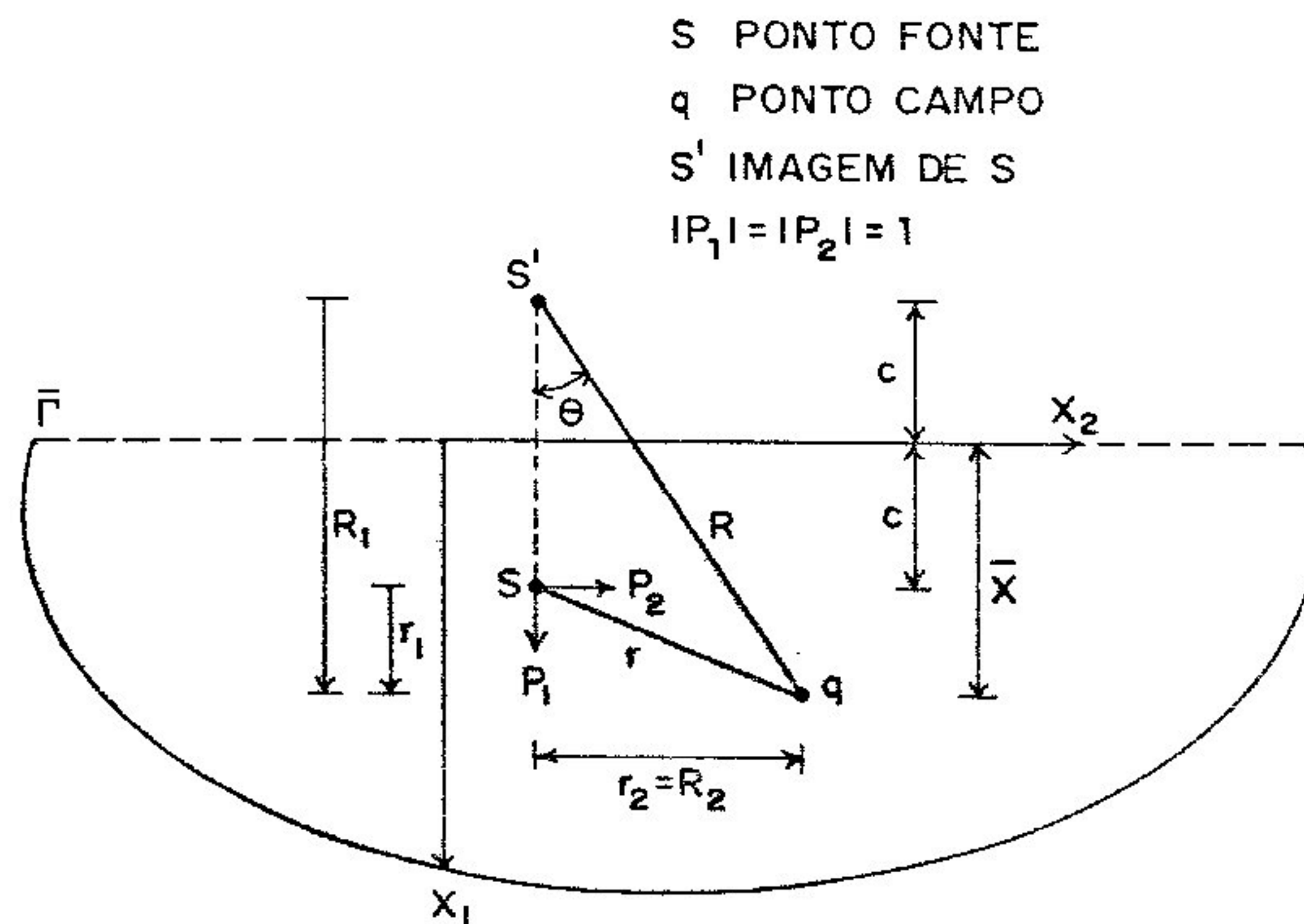
$$K_s = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}$$

Considera-se, ainda, as seguintes relações:

$$p_{ij}^c = \sigma_{jki}^c n_k$$

$$\varepsilon_{jki}^c = \frac{1}{2G} [\sigma_{jki}^c - \nu \sigma_{lli}^c \delta_{ik}] \quad (4.3.14)$$

Um caso particular na aplicação da solução do semi-plano é conhecido como o problema de Flamant apud Timoshenko e Goodier (1970) ou Love (1944), onde a carga aplicada está sobre a superfície, ou seja, o ponto fonte está sobre o limite do semi-plano e tem-se $c = 0$ na figura (4.3.1). Quando $c > 0$ o problema não apresenta singularidade para a parte complementar pois a imagem do ponto fonte está fora do domínio. Para o caso limite de $c = 0$ a singularidade aparece de uma forma bastante forte. Para se evitar isso, utiliza-se as expressões do problema de Flamant onde a singularidade é bem mais fraca, da mesma ordem da solução de Kelvin.



Carga Unitária Aplicada no Semi-Plano
 Figura 4.3.1

A solução para o problema de Flamant é:

$$u_{ij}^* = -K'_d \{ 2(1-\nu) \ln r \delta_{ij} + (1-2\nu)(j-i)\theta - r_{,i}r_{,j} \} \quad (4.3.15)$$

$$p_{ij}^* = -\frac{2}{\pi r} \{ r_{,i}r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \} \quad (4.3.16)$$

onde

$$K'_d = \frac{1}{2\pi G}$$

$$\varepsilon_{jki}^* = -\frac{1}{\pi Gr} \{ r_{,i}r_{,j}r_{,k} - \nu r_{,i} \delta_{ij} \} \quad (4.3.17)$$

$$\sigma_{jki}^* = -\frac{2}{\pi r} r_{,i}r_{,j}r_{,k} \quad (4.3.18)$$

4.4 Tensões nos Pontos Internos

Derivando-se (4.2.17) em relação às coordenadas do ponto fonte e tendo em vista (4.3.5), obtêm-se as tensões nos pontos internos com a equação (4.3.6). Exceto a última integral de (4.2.17), as derivadas das funções de ponderação são facilmente obtidas fornecendo os seguintes tensores:

$$u_{ijk}^* = G \left[\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right] + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_\ell} \delta_{ij} \quad (4.4.1)$$

$$p_{ijk}^* = G \left[\frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{jk}^*}{\partial x_i} \right] + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial p_{lk}^*}{\partial x_\ell} \delta_{ij} \quad (4.4.2)$$

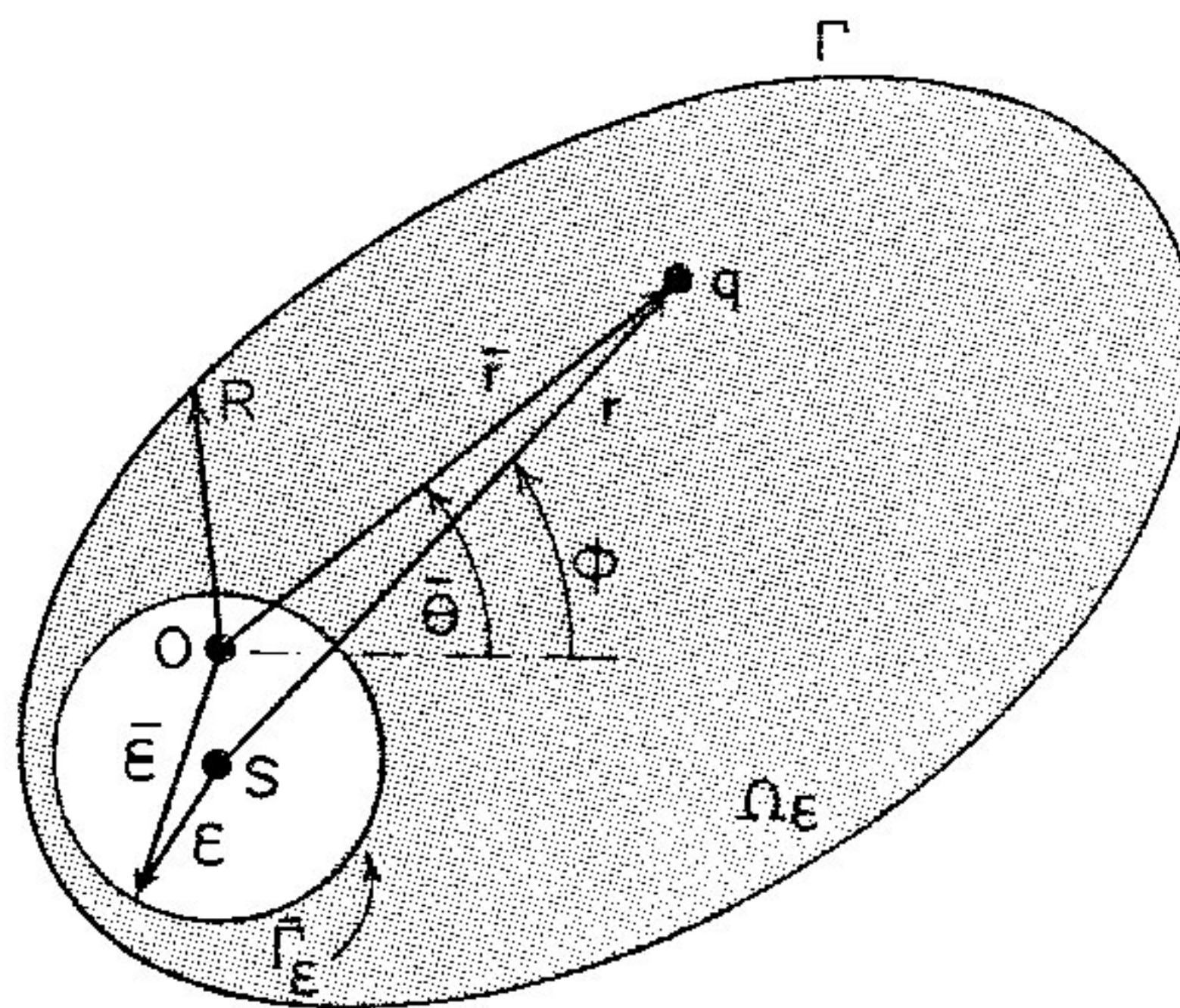
sendo as derivadas indicadas relativas ao ponto fonte.

Entretanto a integral de domínio das tensões iniciais apresenta uma forte singularidade que precisa ser explicada de forma mais detalhada. Na figura (4.4.1) retira-se do domínio Ω um círculo de raio ε , contorno $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ e centro no

ponto singular, obtendo-se o domínio Ω_ϵ . O incremento dado na coordenada retangular x_m do ponto singular s faz variar, além da posição relativa de s e q definida por r e ϕ , o contorno $\bar{\Gamma}_\epsilon$, indicando sua dependência das coordenadas do ponto fonte. Segundo Mikhlin (1965) ou Parton e Perlin (1982) a derivada desta integral singular tem a seguinte forma:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \int_{\Omega_\epsilon} \epsilon_{jki}^* \dot{\sigma}_{jk}^0 d\Omega \right) = \int_{\Omega} \frac{\partial \epsilon_{jki}^*}{\partial x_m} \dot{\sigma}_{jk}^0 d\Omega - \dot{\sigma}_{jk}^0(s) \int_{\Gamma_1} \epsilon_{jki}^* r_{,m} d\Gamma \quad (4.4.3)$$

A primeira integral à direita de (4.4.3) deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy, Γ_1 é um círculo de raio unitário com centro no ponto fonte e $r_{,m}$ é a derivada de r em relação às coordenadas do ponto campo.



Efeito do Acréscimo da Coordenada do Ponto Fonte (s)

Figura 4.4.1

Observar que:

$$\frac{\partial r}{\partial x_m(s)} = -r_{,m} = -\frac{\partial r}{\partial x_m(q)}$$

Vale mencionar que a derivada da penúltima integral de (4.2.17), integral de domínio das forças de volume \dot{b}_j , pode ser interpretada da mesma maneira que a integral das tensões iniciais. Neste caso, entretanto, a integral de contorno em Γ_1 se anula por causa da fraca singularidade de u_{ij}^* . O tensor presente no integrando da primeira integral à direita de (4.4.3) é:

$$\varepsilon_{ijkl}^* = G \left[\frac{\partial \varepsilon_{kli}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{klj}^*}{\partial x_i} \right] + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \varepsilon_{klm}^*}{\partial x_m} \delta_{ij} \quad (4.4.4a)$$

A segunda parcela à direita de (4.4.3) é representada por:

$$g_{ij}[\dot{\sigma}_{kl}^0] = -\dot{\sigma}_{jk}^0(s) \int_{\Gamma_1} \varepsilon_{jki}^* r_{,m} d\Gamma$$

Para a solução fundamental de Kelvin tem-se:

$$g_{ij}[\dot{\sigma}_{kl}^0] = -\frac{1}{8(1-\nu)} \left[2\dot{\sigma}_{ij}^0 + (1-4\nu) \dot{\sigma}_{ll}^0 \delta_{ij} \right] \quad (4.4.4b)$$

As equações (4.4.4a) e (4.4.4b) são válidas para estado plano de deformação. Em (4.4.4b) não está incluída a parcela das tensões iniciais de (4.2.8). Quando se utiliza a tensão elástica $\dot{\sigma}_{ij}^e = \dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}^0$ a parcela relativa às tensões iniciais é somada em (4.4.4b) e se torna:

$$g_{ij}^e[\dot{\sigma}_{kl}^0] = -\frac{1}{8(1-\nu)} \left[2\dot{\sigma}_{ij}^0 + (1-4\nu) \dot{\sigma}_{ll}^0 \delta_{ij} \right] + \dot{\sigma}_{ij}^0 \quad (4.4.4c)$$

Expandindo resulta:

$$g_{11}^e = \frac{1}{8(1-\nu)} [(5-4\nu) \dot{\sigma}_{11}^0 - (1-4\nu) \dot{\sigma}_{22}^0]$$

$$g_{22}^e = \frac{1}{8(1-\nu)} [-(1-4\nu) \dot{\sigma}_{11}^0 + (5-4\nu) \dot{\sigma}_{22}^0]$$

$$g_{12}^e = \frac{1}{8(1-\nu)} [(6-8\nu)] \dot{\sigma}_{12}^0$$

Para o problema de Flamant emprega-se a expressão (4.3.17). Então, o valor do termo livre é:

$$g_{11} = g_{12} = 0$$

$$g_{22} = -\frac{1}{4(1-\nu)} [\dot{\sigma}_{22}^0 - \dot{\sigma}_{11}^0] \quad (4.4.5a)$$

Analogamente como foi feito para a solução de Kelvin as expressões do termo livre quando se trabalha com as tensões elásticas para o problema de Flamant passa a ser:

$$g_{11}^e = \dot{\sigma}_{11}^0$$

$$g_{12}^e = \dot{\sigma}_{12}^0$$

$$g_{22}^e = \frac{1}{8(1-\nu)} [2\dot{\sigma}_{11}^0 + (6-8\nu) \dot{\sigma}_{22}^0] \quad (4.4.5b)$$

onde foi feita a modificação:

$$g_{ij}^e = g_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}^0$$

Assim, a representação integral das tensões nos pontos internos para o caso inelástico é:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{ij}(s) = & \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(s, Q) \dot{p}_k(Q) d\Gamma(Q) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(s, Q) \dot{u}_k(Q) d\Gamma(Q) + \\
& + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(s, Q) \dot{b}_k(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijkl}^*(s, q) \dot{\sigma}_{kl}^0(q) d\Omega(q) + \\
& + \sigma_{ij} [\dot{\sigma}_{kl}^0(q)] \quad (4.4.6)
\end{aligned}$$

A equação (4.4.6) é a forma correta das tensões nos pontos internos para o caso inelástico, proposta pela primeira vez por Bui (1978). Completando as expressões do campo de ponderação tem-se para a solução fundamental de Kelvin:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijkl}^* = & \left[\frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} \right] \\
& \{ (1-2\nu) [\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{jk}\delta_{li} - \delta_{ij}\delta_{kl} + \beta\delta_{ij}{}^r{}_{,k}{}^r{}_{,l}] + \\
& \beta\nu [\delta_{li}{}^r{}_{,j}{}^r{}_{,k} + \delta_{jk}{}^r{}_{,l}{}^r{}_{,i} + \delta_{ik}{}^r{}_{,l}{}^r{}_{,j} + \delta_{jl}{}^r{}_{,i}{}^r{}_{,k}] + \\
& + \beta\delta_{kl}{}^r{}_{,i}{}^r{}_{,j} - \beta\gamma{}^r{}_{,i}{}^r{}_{,j}{}^r{}_{,k}{}^r{}_{,l} \} \quad (4.4.7)
\end{aligned}$$

Para problemas tridimensionais: $\alpha = 2$; $\beta = 3$; $\gamma = 5$

Para problemas bidimensionais: $\alpha = 1$; $\beta = 2$; $\gamma = 4$

Para a solução fundamental do semi-plano, levando-se em consideração (4.3.10), a parte complementar do tensor de 4ª ordem (ε_{ijkl}^C) pode ser obtida a partir das expressões das derivadas de ε_{ijk}^C como está em (4.4.4a) ou, então, a partir das derivadas de σ_{ijk}^C . Como as expressões das derivadas das tensões foram desenvolvidas por Telles (1983) preferiu-se este caminho para se estabelecer ε_{ijkl}^C . As derivadas de u_{ij}^C e de σ_{ijk}^C estão relacionadas no Apêndice. Tem-se que:

$$\varepsilon_{jki}^c = \frac{1}{2G} [\sigma_{jki}^c - \nu \sigma_{lli}^c \delta_{jk}] \quad (4.4.8)$$

A equação (4.4.8) é usada para a parte complementar de ε_{jki}^* , que aparece na integral de domínio das tensões iniciais na equação (4.2.17). As parcelas encontradas em (4.4.8) são obtidas a partir de (4.3.13). Levando-se (4.4.8) em (4.4.4a) chega-se à expressão de ε_{ijkl}^c em função das derivadas das tensões, ou seja:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijkl}^c = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \sigma_{kli}^c}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{klj}^c}{\partial x_i} - \nu \left(\frac{\partial \sigma_{nni}^c}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{nnj}^c}{\partial x_i} \right) \delta_{kl} \right] + \\ + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \left[\frac{\partial \sigma_{klm}^c}{\partial x_m} - \nu \frac{\partial \sigma_{nnm}^c}{\partial x_m} \delta_{kl} \right] \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Quando o ponto fonte coincide com o ponto campo sobre o limite do semi-plano, aparece uma singularidade que pode ser evitada, utilizando-se a solução de Flamant como expressão do problema fundamental do semi-plano. Substituindo-se, então, em (4.4.9) o superescrito (c) por (*), obtém-se a expressão correspondente deste problema fundamental e não somente a parte complementar. As derivadas necessárias são obtidas com as tensões dadas em (4.3.18). Sendo então:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (r_{,i}) = (-1)^i r_{,(3-i)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \frac{(-1)^i}{r} r_{,(3-i)} \quad (4.4.10)$$

onde

$$r_{,1} = \cos\theta \quad \text{e} \quad r_{,2} = \sin\theta$$

Ainda:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad (4.4.11)$$

Com $f = \sigma_{jki}^* = -\frac{2}{\pi r} [r_{,j} r_{,k} r_{,i}]$ vem:

$$\frac{\partial \sigma_{jki}^*}{\partial r} = \frac{2}{\pi r^2} [r_{,j} r_{,k} r_{,i}]$$

e (4.4.12)

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = r_{,i}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{jki}^*}{\partial \theta} = -\frac{2}{\pi r} [& (-1)^j r_{,(3-j)} r_{,k} r_{,i} + (-1)^k r_{,j} r_{,(3-k)} r_{,i} + \\ & + (-1)^i r_{,j} r_{,k} r_{,(3-i)}] \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Levando-se (4.4.10), (4.4.12) e (4.4.13) em (4.4.11) vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{jki}^*}{\partial x_m} = \frac{2}{\pi r^2} \left\{ & r_{,j} r_{,k} r_{,i} r_{,m} - [(-1)^m r_{,(3-m)}] \right. \\ & [(-1)^j r_{,(3-j)} r_{,k} r_{,i} + (-1)^k r_{,j} r_{,(3-k)} r_{,i} + \\ & \left. + (-1)^i r_{,j} r_{,k} r_{,(3-i)}] \right\} \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

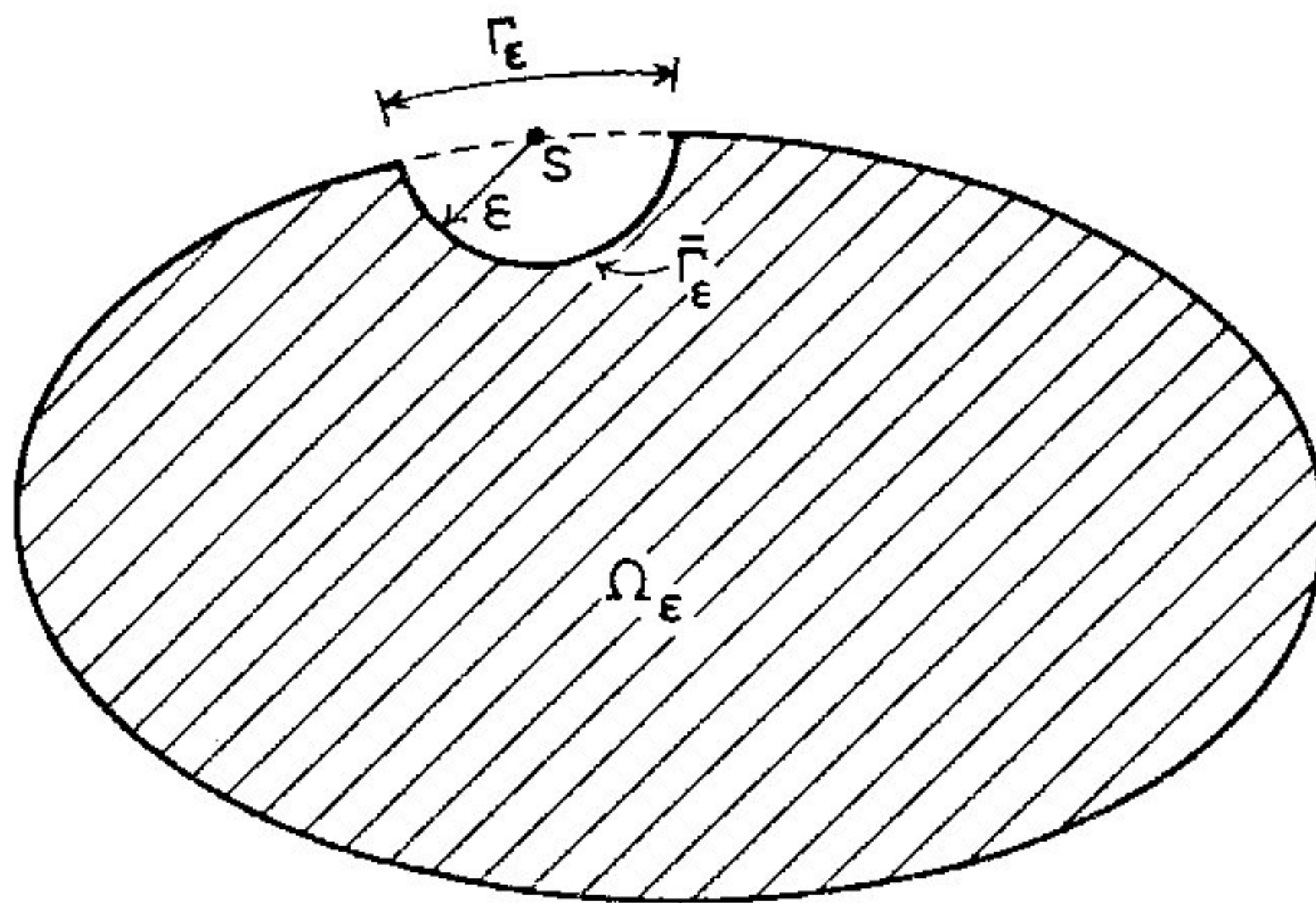
que é a equação a ser usada para se obter ε_{ijkl}^* em (4.4.9), como mostrado acima.

4.5 Equação Integral de Contorno

A Identidade de Somigliana dada por (4.2.17) só é válida no domínio do problema e pode ser utilizada quando se conhecem os deslocamentos e forças de superfície no contorno Γ . Observa-se que forças de volume e tensões iniciais são sempre conhecidas e não introduzem incógnitas no sistema. Para se estender esta equação para o contorno outras considerações são necessárias. Na figura (4.5.1) retira-se um setor circular de raio ε e centro no ponto singular S pertencente ao contorno do corpo. Assim, como o ponto S não pertence ao domínio Ω_ε , (4.2.17) pode ser escrita:

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(S, Q) \dot{p}_j(Q) d\Gamma(Q) + \quad (4.5.1)$$

$$+ \int_{\Omega_\varepsilon} u_{ij}^*(S, q) \dot{b}_j(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_{jki}^*(S, q) \dot{\sigma}_{jk}^0(q) d\Omega(q)$$



Alteração do Contorno

Figura 4.5.1

A integral à esquerda de (4.5.1) pode ser escrita como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) + \quad (4.5.2)$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q)$$

A primeira integral à direita de (4.5.2) é:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) [\dot{u}_j(Q) - \dot{u}_j(S)] d\Gamma(Q) \quad (4.5.3)$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \dot{u}_j(S) \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) d\Gamma(Q) \right\}$$

A primeira integral à direita em (4.5.3) se anula pela condição de continuidade de $\dot{u}_j(Q)$. Então a última integral de (4.5.3) pode ser escrita como $C_{ij}(S) \dot{u}_j(S)$, onde:

$$C_{ij}(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) d\Gamma(Q) \quad (4.5.4)$$

Nota-se também que a segunda integral à direita em (4.5.2) deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy e as outras integrais de (4.5.1) não se modificam. Levando-se (4.5.4) em (4.5.3) e depois em (4.5.2) tem-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(S, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) = C_{ij}(S) \dot{u}_j(S) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (4.5.5)$$

Levando-se, finalmente, (4.5.5) em (4.5.1), vem:

$$C_{ij}(S) \dot{u}_j(S) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(S, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) \dot{p}_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) \dot{b}_j(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} \varepsilon_{jki}^*(S, q) \dot{\sigma}_{jk}^0(q) d\Omega(q) \quad (4.5.6a)$$

Para o semi-plano a equação integral de contorno tem uma forma semelhante, apenas trocando-se Γ por Γ' , onde Γ' não inclui a parte descarregada do contorno do corpo que coincide com a superfície livre:

$$C_{ij}(S) \dot{u}_j(S) + \int_{\Gamma'} p_{ij}^*(S, Q) \dot{u}_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma'} u_{ij}^*(S, Q) \dot{p}_j(Q) d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(S, q) \dot{b}_j(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} \varepsilon_{jki}^*(S, q) \dot{\sigma}_{jk}^0(q) d\Omega(q) \quad (4.5.6b)$$

Em (4.5.6a) e (4.5.6b), $C_{ij}(S) = 1.0$ para pontos no domínio, reproduzindo as equações (4.2.17) e (4.2.19), respectivamente. Para pontos localizados sobre um contorno suave $C_{ij}(S) = 0.5$.

Se o ponto S for vértice de uma angulosidade, o valor de $C_{ij}(S)$ depende da geometria local e pode ser

obtido com a equação (4.5.4) como mostrado a seguir. Da equação (4.3.3), com a notação da figura (4.5.2), tem-se:

$$p_{11}^* = + \frac{1}{4\pi(1-\nu)\epsilon} [(1-2\nu) + 2\cos^2\theta]$$

$$p_{22}^* = + \frac{1}{4\pi(1-\nu)\epsilon} [(1-2\nu) + 2\text{sen}^2\theta]$$

$$p_{12}^* = + \frac{1}{4\pi(1-\nu)\epsilon} [\text{sen}2\theta]$$

Observar que:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = - 1.0 \quad \text{e} \quad r_{,i}n_j - r_{,j}n_i = 0.0$$

$r_{,1} = n_1 = \cos\theta$ e $r_{,2} = n_2 = \text{sen}\theta$ pois o contorno está sobre um arco de circunferência, como mostra a figura 4.5.2. Ainda, da mesma figura, tem-se que: $d\Gamma = - \epsilon d\theta$. Notar que o sentido anti-horário da medida de θ é contrário ao sentido da integração. Então:

$$C_{11} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} - \frac{1}{4\pi(1-\nu)\epsilon} [(1-2\nu) + 2\cos^2\theta] \epsilon d\theta$$

$$C_{11} = \frac{\theta_0 - \theta_1}{2\pi} + \frac{1}{8\pi(1-\nu)} [\text{sen}2\theta_0 - \text{sen}2\theta_1]$$

Mas:

$$\theta_0 - \theta_1 = \alpha \quad \text{e} \quad \gamma = \theta_0 - \frac{\alpha}{2} + \pi \quad \text{ou} \quad 2\gamma = \theta_0 + \theta_1 + 2\pi$$

Logo:

$$2\theta_0 = 2\gamma - 2\pi + \alpha = 2\gamma + \alpha$$

$$2\theta_1 = 2\gamma - 2\pi - \alpha = 2\gamma - \alpha$$

$$\text{sen}2\theta_0 - \text{sen}2\theta_1 = 2 \cos 2\gamma \text{ sen}\alpha$$

Então:

$$C_{11} = \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos 2\gamma \operatorname{sen} \alpha}{4\pi(1-\nu)}$$

Analogamente:

$$C_{22} = \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\cos 2\gamma \operatorname{sen} \alpha}{4\pi(1-\nu)}$$

$$C_{12} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} - \frac{1}{4\pi(1-\nu)\epsilon} [\operatorname{sen} 2\theta] \epsilon d\Gamma = - \frac{\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta_1}{8\pi(1-\nu)}$$

$$\text{Mas: } \cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_0 = 2 \operatorname{sen} 2\gamma \operatorname{sen} \alpha$$

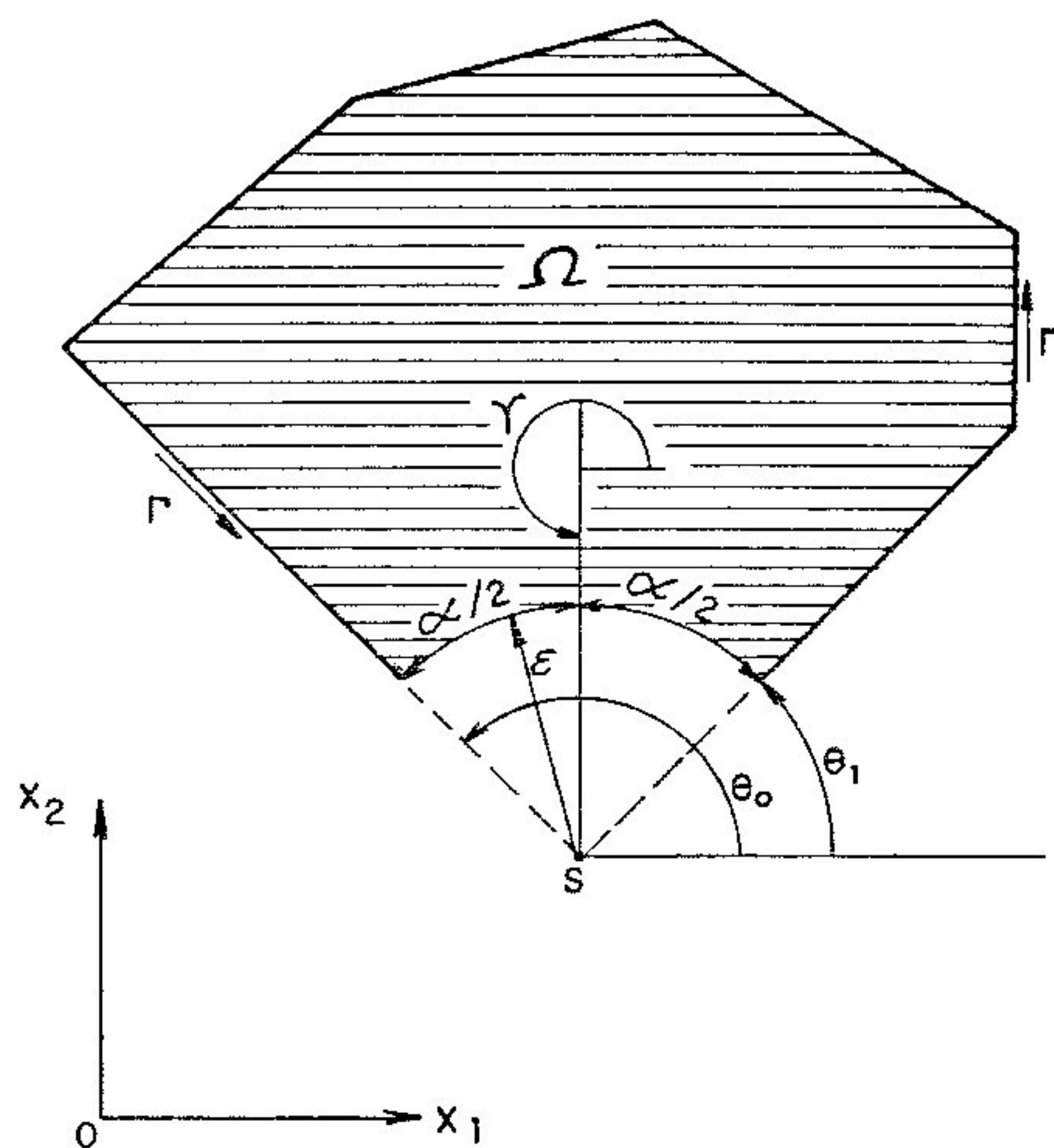
Logo:

$$C_{12} = \frac{\operatorname{sen} 2\gamma \operatorname{sen} \alpha}{4\pi(1-\nu)}$$

Resumindo:

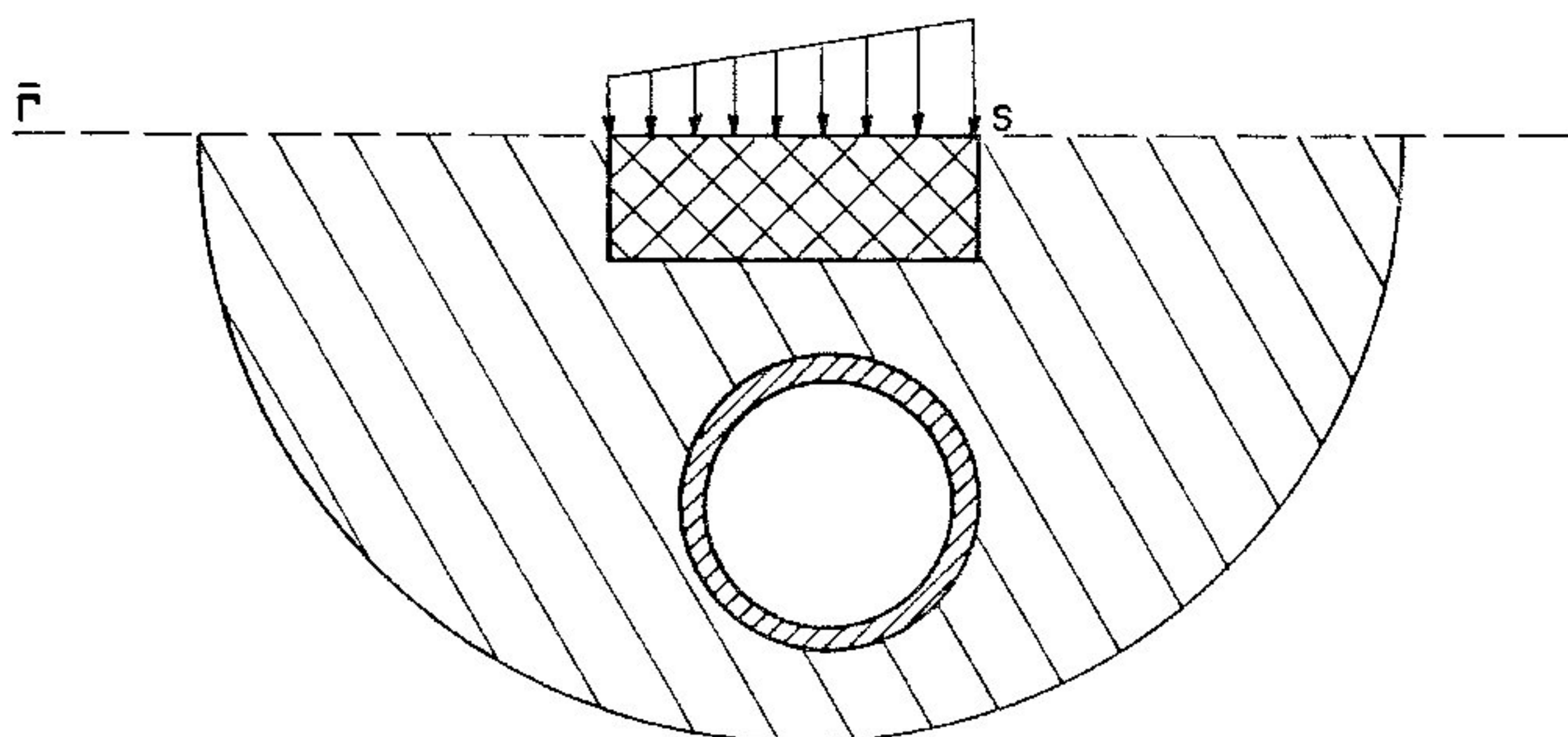
$$\underline{C} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 2\alpha(1-\nu) + \cos 2\gamma \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{sen} 2\gamma \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} 2\gamma \operatorname{sen} \alpha & 2\alpha(1-\nu) - \cos 2\gamma \operatorname{sen} \alpha \end{bmatrix} \quad (4.5.7)$$

Como não existe singularidade nas expressões complementares para pontos fonte fora do limite do semi-plano, a matriz \underline{C} de (4.5.6b) também é dada por (4.5.7). Entretanto, quando se tem uma angulosidade sobre o limite do semi-plano e o ponto fonte está nela localizado, aparece uma situação especial que é mostrada pelo ponto S ou S' na figura 4.5.3. Para esta situação especial deve-se usar (4.3.16) em (4.5.4).



ALTERAÇÃO DO VÉRTICE DO CONTORNO

FIGURA 4.5.2



PONTO SINGULAR (S) NO VÉRTICE DA SUPERFICIE DO SEMI-PLANO

FIGURA 4.5.3

Logo:

$$p'_{11}^* = + \frac{1}{\pi \varepsilon} [2 \cos^2 \theta]$$

$$p'_{22}^* = + \frac{1}{\pi \varepsilon} [2 \text{sen}^2 \theta]$$

$$p'_{12}^* = + \frac{1}{\pi \varepsilon} [\text{sen} 2\theta]$$

$$c'_{11} = - \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{\pi \varepsilon} (2 \cos^2 \theta) \varepsilon d\theta = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\cos 2\gamma \text{ sen} \alpha}{\pi}$$

Analogamente:

$$c'_{22} = \frac{\alpha}{\pi} - \frac{\cos 2\gamma \text{ sen} \alpha}{\pi}$$

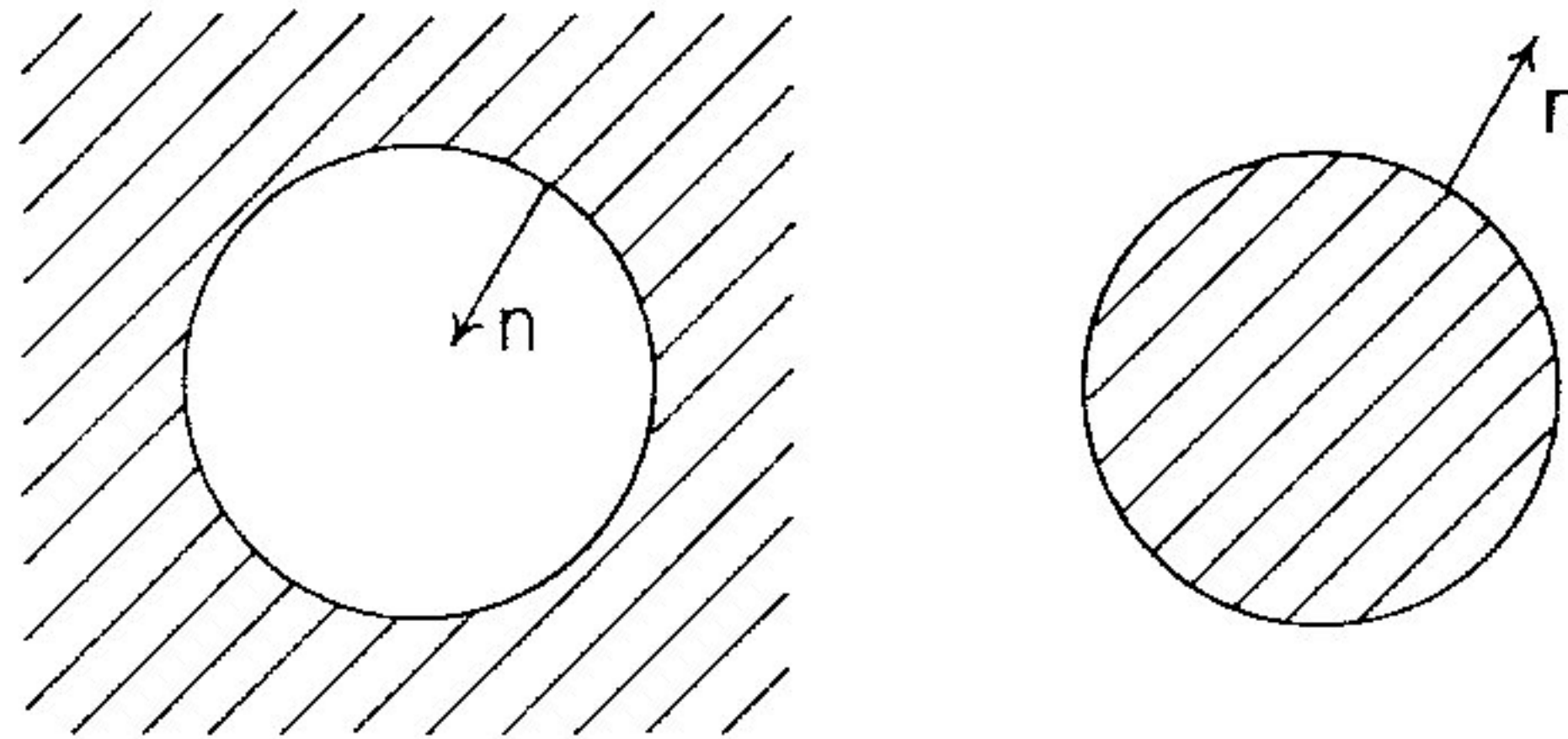
$$c'_{12} = - \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{1}{\pi \varepsilon} \text{sen} 2\theta \varepsilon d\theta = \frac{\text{sen} 2\gamma \text{ sen} \alpha}{\pi}$$

Então a contrapartida de (4.5.7) para a solução do problema de Flamant é:

$$\underline{c}' = \frac{1}{\pi} \begin{bmatrix} \alpha + \cos 2\gamma \text{ sen} \alpha & \text{sen} 2\gamma \text{ sen} \alpha \\ \text{sen} 2\gamma \text{ sen} \alpha & \alpha - \cos 2\gamma \text{ sen} \alpha \end{bmatrix} \quad (4.5.8)$$

Telles(1983) apresentou interessante discussão estendendo o emprego de (4.5.6a) para domínios infinitos e justificando a alternativa (4.5.6b) para domínios semi-infinitos. Mostrou que as funções envolvidas preenchem as condições de regularidade, relacionadas com o comportamento dessas funções quando o contorno tende para o infinito. As equações integrais para problemas de domínios finito e

infinito têm a mesma forma. A diferença reside na direção da normal (n) ao contorno, no ponto considerado, que é para fora do contorno finito ou para dentro da cavidade em domínio infinito como está indicado na figura 4.5.4.



Direções das Normais ao Contorno

Figura 4.5.4

4.6 Tensões no Contorno

Neste trabalho, inicialmente resolve-se o sistema de equações cujas incógnitas se localizam sobre o contorno. Calculam-se os deslocamentos e forças de superfície, com referência ao sistema global de coordenadas. Utilizando-se a matriz de transformação para tensores de 1ª ordem, obtêm-se os deslocamentos e forças de superfície em relação ao sistema local de coordenadas. A equação (3.4.3) permite escrever, para um nó genérico j :

$$\bar{\sigma}_{12}^j = - \bar{p}_1^j \tag{4.6.1}$$

$$\bar{\sigma}_{22}^j = - \bar{p}_2^j$$

onde a barra indica que as tensões e as forças de superfície estão relacionadas com o sistema local de coordenadas, conforme figura (4.6.1). Desta forma, duas componentes das tensões são conhecidas e a terceira componente $\bar{\sigma}_{11}^j$ é obtida com o auxílio das equações (4.3.6) e (4.2.8):

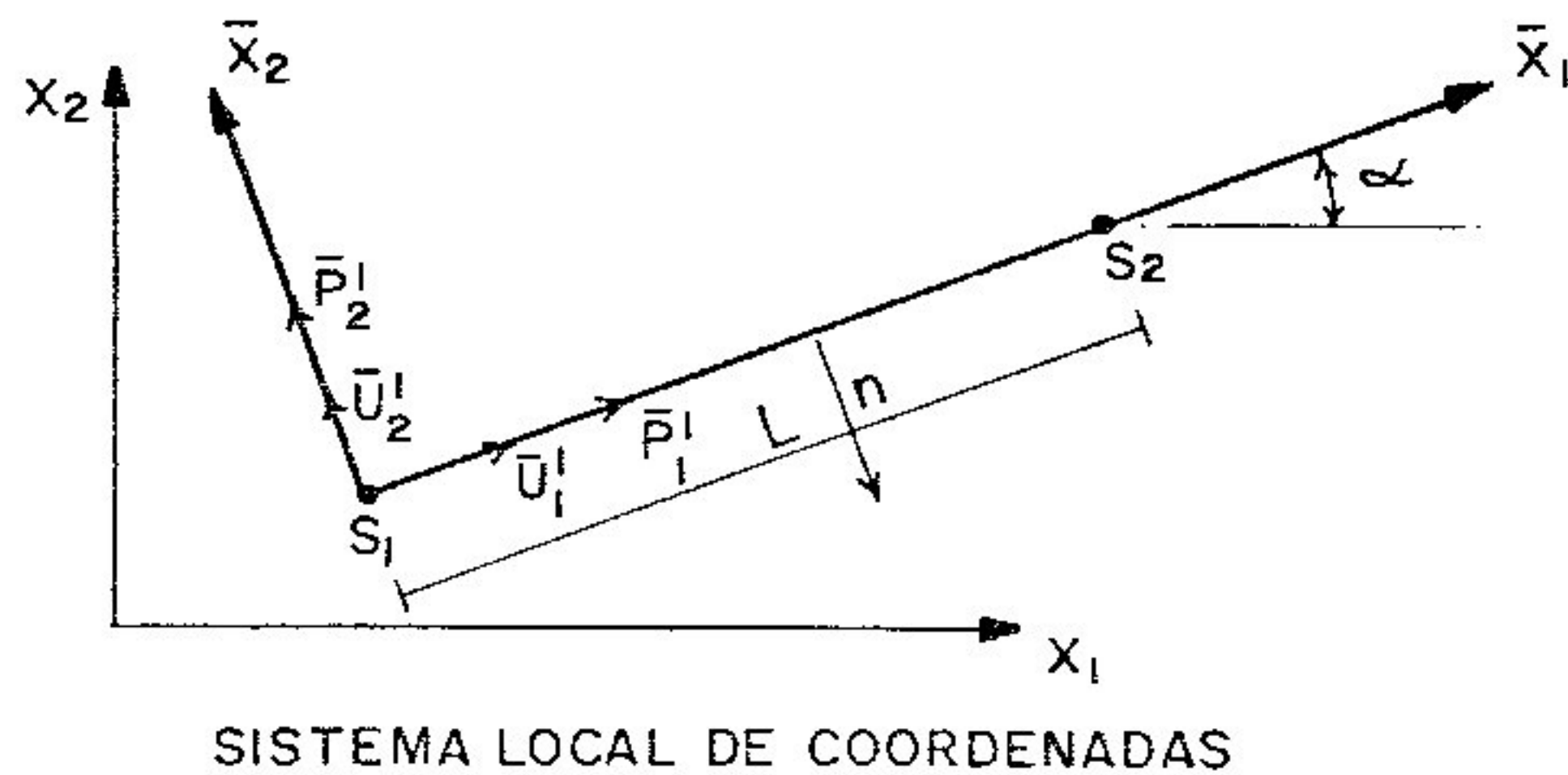


Figura 4.6.1

$$\dot{\sigma}_{11}^j = \dot{\sigma}_{11}^{ej} - \dot{\sigma}_{11}^{oj}$$

$$\dot{\sigma}_{11}^j = 2G\dot{\varepsilon}_{11}^j + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\dot{\varepsilon}_{11}^j + \dot{\varepsilon}_{22}^j) - \dot{\sigma}_{11}^{oj}$$

$$\dot{\sigma}_{11}^j = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\dot{\varepsilon}_{11}^j + \nu\dot{\varepsilon}_{22}^j] - \dot{\sigma}_{11}^{oj} \quad (4.6.2)$$

Analogamente:

$$\dot{\sigma}_{22}^j = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\dot{\varepsilon}_{22}^j + \nu\dot{\varepsilon}_{11}^j] - \dot{\sigma}_{22}^{oj} \quad (4.6.3)$$

Explicitando $\dot{\varepsilon}_{22}^j$ em (4.6.3) tem-se:

$$\dot{\varepsilon}_{22}^j = \frac{1}{1-\nu} [\frac{1-2\nu}{2G} (\dot{\sigma}_{22}^j + \dot{\sigma}_{22}^{oj}) - \nu\dot{\varepsilon}_{11}^j] \quad (4.6.4)$$

Levando-se (4.6.4) em (4.6.2) e simplificando-se, vem:

$$\dot{\sigma}_{11}^j = \frac{1}{1-\nu} [2G \dot{\varepsilon}_{11}^j + \nu \dot{\sigma}_{22}^j] + \frac{1}{1-\nu} \dot{\sigma}_{22}^{0j} - \dot{\sigma}_{11}^{0j} \quad (4.6.5)$$

Para a determinação de $\dot{\varepsilon}_{11}^j$ emprega-se o esquema de diferenças finitas:

$$\dot{\varepsilon}_{11}^j = \frac{\dot{u}_1^j - \dot{u}_1^i}{\ell} \quad (4.6.6)$$

onde \dot{u}_1^j e \dot{u}_1^i são as taxas dos deslocamentos de dois nós consecutivos i e j , na direção 1, em relação ao sistema local de coordenadas e ℓ é a distância entre estes nós. Levando-se (4.6.1) e (4.6.6) em (4.6.5) chega-se à terceira componente:

$$\dot{\sigma}_{11}^j = \left[\frac{2G}{\ell(1-\nu)} \right] \cdot \left[\dot{u}_1^j - \dot{u}_1^i \right] - \left[\frac{\nu}{1-\nu} \right] \cdot \left[\dot{p}_2^j - \dot{\sigma}_{22}^{0j} \right] - \dot{\sigma}_{11}^{0j} \quad (4.6.7)$$

As equações (4.6.1) e (4.6.7) formam o sistema de equações para o nó j . Entretanto é necessário expressar este sistema de equações em relação ao sistema global de coordenadas. As tensões iniciais são fornecidas, como dado do problema, em relação ao sistema global de coordenadas. Como (4.6.7) está no sistema local, as tensões iniciais são transformadas para este sistema e, depois, todo o sistema de equações é transformado para o sistema global de coordenadas. Todas estas passagens intermediárias estão desenvolvidas em detalhes a seguir. Seja a matriz de rotação de eixos:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (4.6.8)$$

onde α é o ângulo de rotação do sistema global de coordenadas para o sistema local. Então:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1^j \\ \dot{u}_2^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1^j \\ \dot{u}_2^j \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} \dot{p}_1^j \\ \dot{p}_2^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1^j \\ \dot{p}_2^j \end{bmatrix} \quad (4.6.9)$$

De (4.6.1) , (4.6.7) e (4.6.9) vem:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11}^j \\ \dot{\sigma}_{12}^j \\ \dot{\sigma}_{22}^j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-\nu}{1-\nu} \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_1^j \\ \dot{p}_2^j \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{-2G}{\ell(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1^i \\ \dot{u}_2^i \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{2G}{\ell(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1^j \\ \dot{u}_2^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11}^0 \\ \dot{\sigma}_{12}^0 \\ \dot{\sigma}_{22}^0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

Então:

$$\dot{\underline{\sigma}}^j = \underline{R}_1 \dot{p}^j + \underline{R}_2 \dot{u}^j + \underline{K} \dot{\underline{\sigma}}^0j$$

onde:

$$\dot{\underline{\sigma}}^j = \{ \dot{\sigma}_{11}^j, \dot{\sigma}_{12}^j, \dot{\sigma}_{22}^j \}; \dot{\underline{\sigma}}^{0j} = \{ \dot{\sigma}_{11}^{0j}, \dot{\sigma}_{12}^{0j}, \dot{\sigma}_{22}^{0j} \} \quad (4.6.11)$$

$$\dot{\underline{p}}^j = \{ \dot{p}_1^j, \dot{p}_2^j \} \quad (4.6.12)$$

$$\dot{\underline{u}}^j = \{ \dot{u}_1^i, \dot{u}_2^i, \dot{u}_1^j, \dot{u}_2^j \} \quad (4.6.14)$$

$$\underline{R}_2 = \frac{2G}{\ell(1-\nu)} \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6.15)$$

Entretanto precisa-se expressar $\dot{\underline{\sigma}}^j$ em função do sistema global de coordenadas. Considerando-se que:

$$\dot{\underline{\sigma}}' = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} & \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{\sigma}_{21} & \dot{\sigma}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.6.16a)$$

Então:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{R}^T \dot{\underline{\sigma}}' \underline{R}$$

Reagrupando-se os termos, segundo (4.6.11), tendo em vista que $\dot{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{21}$, pode-se escrever:

$$\dot{\underline{\sigma}} = \underline{R}^{LG} \dot{\underline{\sigma}} \quad (4.6.16b)$$

onde:

$$\underline{R}^{LG} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & -2\text{sen} \alpha \cos \alpha & \text{sen}^2 \alpha \\ \text{sen} \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha & -\text{sen} \alpha \cos \alpha \\ \text{sen}^2 \alpha & 2\text{sen} \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.6.16c)$$

Para a última parcela de (4.6.10) pode-se escrever, da mesma forma como foi feito em (4.6.16a):

$$\dot{\underline{\sigma}}^0 = \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11}^0 & \dot{\sigma}_{12}^0 \\ \dot{\sigma}_{21}^0 & \dot{\sigma}_{22}^0 \end{bmatrix}$$

e sabendo-se que a matriz R é ortogonal, ou seja, $R^{-1} = R^T$:

$$\dot{\underline{\sigma}}^0 = \underline{R} \dot{\underline{\sigma}}^0 \underline{R}^T$$

Então:

$$\dot{\underline{\sigma}}^0 = \underline{R}^{GL} \dot{\underline{\sigma}}^0 \quad (4.6.17)$$

onde

$$\underline{R}^{GL} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & 2\text{sen} \alpha \cos \alpha & \text{sen}^2 \alpha \\ -\text{sen} \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha & \text{sen} \alpha \cos \alpha \\ \text{sen}^2 \alpha & -2\text{sen} \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4.6.18)$$

Logo, de (4.6.17), vem:

$$\underline{\bar{k}} \dot{\underline{\sigma}}^0 = [\underline{\bar{k}} \underline{R}^{GL}] \dot{\underline{\sigma}}^0 \quad (4.6.19)$$

Como deve-se trabalhar com as tensões elásticas, pois o problema é resolvido elasticamente dentro de cada incremento de carregamento, tem-se de (4.2.8):

$$\dot{\underline{\sigma}}^j(e) = \dot{\underline{\sigma}}^j + \dot{\underline{\sigma}}^{0j} \quad (4.6.20)$$

Então, pode-se reescrever (4.6.10), tendo em vista (4.6.15) a (4.6.20) como:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\sigma}}^j(e) &= \begin{bmatrix} \underline{R}^{LG} & \underline{R}_1 \end{bmatrix} \dot{\underline{p}}^j + \begin{bmatrix} \underline{R}^{LG} & \underline{R}_2 \end{bmatrix} \dot{\underline{u}}^j + \begin{bmatrix} \underline{R}^{LG} & \underline{\bar{k}} & \underline{R}^{GL} + \underline{I} \end{bmatrix} \dot{\underline{\sigma}}^0 \\ \dot{\underline{\sigma}}^j(e) &= \underline{R}_3 \dot{\underline{p}}^j + \left[\frac{2G}{\ell(1-\nu)} \right] \underline{R}_4 \dot{\underline{u}}^j + \left[\frac{1}{1-\nu} \right] \underline{R}_5 \dot{\underline{\sigma}}^0 \end{aligned} \quad (4.6.21)$$

Efetuada-se os produtos matriciais indicados, as matrizes de transformação de (4.6.21) têm a seguinte forma:

$$\underline{R}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2+\nu}{1-\nu} \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha & -\frac{\nu}{1-\nu} \cos^3 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha \\ \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha - \cos^3 \alpha & -\frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha \\ \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{sen}^3 \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha & -\frac{2-\nu}{1-\nu} \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha - \cos^3 \alpha \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_4 = \begin{bmatrix} -\cos^3 \alpha & | & -\operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha & | & \cos^3 \alpha & | & \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha & | & -\operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha & | & \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha & | & \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha \\ -\operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha & | & -\operatorname{sen}^3 \alpha & | & \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha & | & \operatorname{sen}^3 \alpha \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R}^5 = \left[\begin{array}{c|c|c} (\nu - \cos^2 \alpha) \cos^2 \alpha + (1 - \nu) & -2 \operatorname{sen} \alpha \cos^3 \alpha & (\nu - \operatorname{sen}^2 \alpha) \cos^2 \alpha \\ \hline (\nu - \cos^2 \alpha) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha & -2 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha + (1 - \nu) & (\nu - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \\ \hline (\nu - \cos^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \alpha & -2 \operatorname{sen}^3 \alpha \cos \alpha & (\nu - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \alpha + (1 - \nu) \end{array} \right]$$

CAPÍTULO V

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

5.1 INTRODUÇÃO

As equações (4.5.6a) e (4.5.6b) são as representações integrais para deslocamentos no contorno. Elas relacionam os deslocamentos de um ponto S do contorno com todos os deslocamentos e forças de superfície sobre o contorno Γ . Resolvendo-se analiticamente cada uma das integrais envolvidas obtém-se uma relação entre deslocamentos e forças de superfície em função das coordenadas do ponto de contorno considerado. Contudo isto só é possível quando a geometria e as condições de contorno são bastante simples. Para se generalizar a solução uma aproximação numérica é a forma mais adequada e esta técnica é chamada de *Método dos Elementos de Contorno*. Esta aproximação consiste em dividir-se o contorno do corpo em uma série de elementos sobre os quais os deslocamentos e forças de superfície são interpolados entre os pontos nodais. Em cada nó S é aplicada a equação (4.5.6a) ou (4.5.6b) na sua forma discretizada, formando um sistema de N equações, relacionando N deslocamentos e N forças de superfície nos nós de contorno. Impondo-se as condições de

contorno com N valores nodais prescritos o sistema passa a ser univocamente determinado (com N equações e N incógnitas). As incógnitas são os deslocamentos e forças de superfície desconhecidos, em cada direção de cada nó de contorno. O sistema de equações é resolvido passando-se a conhecer todos os valores no contorno. As integrais de domínio não introduzem incógnitas no sistema, sendo prescritos os valores das forças de volume e tensões iniciais. Para elastoplasticidade a solução é análoga mas de forma incremental e iterativa. Determina-se o nível de tensões que provoca o primeiro escoamento da maneira anteriormente descrita, sendo a única vez em que o sistema de equações é resolvido. O algoritmo utilizado permite a consideração de qualquer dos critérios de escoamento anteriormente descritos. Apesar de não apresentar incógnitas, o domínio é discretizado na região de plastificação, onde a tensão excedente é reaplicada elasticamente. A solução plástica é obtida através do processo das tensões iniciais. Uma descrição detalhada será apresentada ao final do capítulo.

5.2 Transformação das Equações Integrais em Sistema Algébrico

A discretização das equações integrais obedece às seguintes etapas:

a) O contorno Γ é dividido em uma série de elementos onde os deslocamentos e forças de superfície são aproximados em função dos valores nodais, ou seja:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{u}}^{(j)} &= \underline{N} \dot{\underline{u}}^{(n)} \\ \dot{\underline{p}}^{(j)} &= \underline{N} \dot{\underline{p}}^{(n)} \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

onde $\underline{u}^{(n)}$ e $\underline{p}^{(n)}$ representam os valores nodais dos deslocamentos e das forças de superfície, respectivamente. As coordenadas cartesianas dos pontos intermediários do

elemento são dados em função das coordenadas cartesianas dos nós, ou seja:

$$\underline{x}^{(j)} = \underline{M} \underline{x}^{(m)} \quad (5.2.2)$$

onde \underline{M} e \underline{N} são matrizes que contêm as funções de interpolação no elemento. Para a discretização das integrais de domínio é necessário dividi-lo em células sobre as quais as forças de volume e tensões iniciais são aproximadas em função dos valores nos vértices.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\sigma}}^{0(j)} &= \underline{N} \dot{\underline{\sigma}}^{0(n)} \\ \dot{\underline{b}}^{(j)} &= \underline{N} \dot{\underline{b}}^{(n)} \\ \underline{x}^{(j)} &= \underline{M} \underline{x}^{(n)} \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

\underline{M} e \underline{N} são as funções de interpolação para as células internas. Como as funções de interpolação são expressas, em geral, em relação às coordenadas homogêneas η , deve-se transformar o elemento $d\Gamma$ para o sistema de coordenadas intrínsecas. Esta transformação é feita através da relação:

$$d\Gamma = |J| d\eta \quad (5.2.4)$$

onde o Jacobiano da transformação é dado por:

$$|J| = \sqrt{\left[\frac{dx_1}{d\eta}\right]^2 + \left[\frac{dx_2}{d\eta}\right]^2} \quad (5.2.5)$$

b) A equação (4.5.6a) tem a seguinte forma discretizada tendo-se em conta as equações (5.2.1) e (5.2.3):

$$\underline{c}(s_i) \dot{\underline{u}}(s_i) + \sum_{j=1}^L \left[\int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \underline{N} d\Gamma \right] \dot{\underline{u}}^{(n)} = \sum_{j=1}^L \left[\int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \underline{N} d\Gamma \right] \dot{\underline{p}}^{(n)} \quad (5.2.6)$$

$$+ \sum_{j=1}^Z \left[\int_{\Omega_j} \underline{u}^* \underline{\bar{N}} d\Omega \right] \dot{\underline{b}}^{(n)} + \sum_{j=1}^Z \left[\int_{\Omega_j} \underline{\hat{\varepsilon}}^* \underline{\bar{N}} d\Omega \right] \dot{\underline{g}}^{0(n)}$$

onde L é o número de elementos de contorno e Z o número de células internas. Em (5.2.6) as expressões entre colchetes podem ser reescritas usando-se a integração numérica da Quadratura de Gauss além das equações (5.2.4) e (5.2.5).

$$\int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \underline{N} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \underline{p}^* \underline{N} |J| d\eta = \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (\underline{p}^* \underline{N})_k \quad (5.2.7a)$$

$$\int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \underline{N} d\Gamma = \int_{-1}^{+1} \underline{u}^* \underline{N} |J| d\eta = \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (\underline{u}^* \underline{N})_k$$

$$\int_{\Omega_j} \underline{u}^* \underline{\bar{N}} d\Omega = \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (\underline{u}^* \underline{\bar{N}})_k \quad (5.2.7b)$$

$$\int_{\Omega_j} \underline{\hat{\varepsilon}}^* \underline{\bar{N}} d\Omega = \sum_{k=1}^K |J|_k W_k (\underline{\hat{\varepsilon}}^* \underline{\bar{N}})_k$$

onde K é o número de pontos de integração e W_k é o fator de ponderação associado a cada um deles. Para o semi-plano a equação (4.5.6b) pode ser discretizada de forma análoga apenas trocando-se Γ_j por Γ'_j . A equação (4.4.6) também pode

ser discretizada como foi feito anteriormente chegando-se a:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(s_i) &= \sum_{j=1}^L \left[\int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \underline{N} d\Gamma \right] \dot{\underline{p}}^{(n)} - \sum_{j=1}^L \left[\int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \underline{N} d\Gamma \right] \dot{\underline{u}}^{(n)} \\ &+ \sum_{j=1}^Z \left[\int_{\Omega_j} \underline{u}^* \underline{\bar{N}} d\Omega \right] \dot{\underline{b}}^{(n)} + \sum_{j=1}^Z \left[\int_{\Omega_j} \underline{\hat{\varepsilon}}^* \underline{\bar{N}} d\Omega \right] \dot{\underline{\sigma}}^{0(n)} + \underline{E}' \dot{\underline{\sigma}}^0(s_i) \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

para as tensões em um ponto interno (s_i). As equações (5.2.6) e (5.2.8), aplicadas a todos os pontos nodais e em todos os pontos internos, respectivamente, podem ser reescritas de forma matricial como:

$$(\underline{C} + \underline{\hat{H}}) \dot{\underline{u}} = \underline{G} \dot{\underline{p}} + \underline{D} \dot{\underline{b}} + \underline{E} \dot{\underline{\sigma}}^0 \quad (5.2.9)$$

$$\dot{\underline{\sigma}} = -\underline{H}' \dot{\underline{u}} + \underline{G}' \dot{\underline{p}} + \underline{D}' \dot{\underline{b}} + (\underline{Q}' + \underline{E}') \dot{\underline{\sigma}}^0 \quad (5.2.10)$$

Chamando-se $(\underline{C} + \underline{\hat{H}}) = \underline{H}$ em (5.2.9) vem:

$$\underline{H} \dot{\underline{u}} = \underline{G} \dot{\underline{p}} + \underline{D} \dot{\underline{b}} + \underline{E} \dot{\underline{\sigma}}^0 \quad (5.2.11)$$

c) Ao serem impostas as condições de contorno, os elementos das matrizes \underline{H} e \underline{G} multiplicados pelos valores de $\dot{\underline{u}}$ e $\dot{\underline{p}}$ prescritos são armazenados no vetor $\dot{\underline{f}}$ enquanto os relacionados com os valores desconhecidos são armazenados na matriz \underline{A} , ou seja:

$$\underline{A} \dot{\underline{y}} = \dot{\underline{f}} + \underline{D} \dot{\underline{b}} + \underline{E} \dot{\underline{\sigma}}^0 \quad (5.2.12)$$

Na ausência de forças de volume tem-se:

$$\dot{\underline{y}} = \underline{A}^{-1} \dot{\underline{f}} + \underline{A}^{-1} \underline{E} \dot{\underline{\sigma}}^0 \quad (5.2.13)$$

De (5.2.10), agrupando-se de forma similar, vem:

$$\dot{\underline{\sigma}} = - \underline{\underline{A}}' \dot{\underline{\gamma}} + \dot{\underline{\underline{f}}}' + (\underline{\underline{Q}}' + \underline{\underline{E}}') \dot{\underline{\sigma}}^0 \quad (5.2.14)$$

Levando-se (5.2.13) em (5.2.14), vem:

$$\dot{\underline{\sigma}} = - \underline{\underline{A}}' (\underline{\underline{A}}^{-1} \dot{\underline{\underline{f}}} + \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{E}} \dot{\underline{\sigma}}^0) + \dot{\underline{\underline{f}}}' + (\underline{\underline{Q}}' + \underline{\underline{E}}') \dot{\underline{\sigma}}^0$$

ou

$$\dot{\underline{\sigma}} = (\underline{\underline{Q}}' + \underline{\underline{E}}' - \underline{\underline{A}}' \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{E}}) \dot{\underline{\sigma}}^0 + \dot{\underline{\underline{f}}}' - \underline{\underline{A}}' \underline{\underline{A}}^{-1} \dot{\underline{\underline{f}}} \quad (5.2.15)$$

Como no processo incremental e iterativo trabalha-se com as tensões elásticas dentro de cada incremento, deve-se reescrever (4.2.8):

$$\dot{\underline{\sigma}}^e = \dot{\underline{\sigma}} + \dot{\underline{\sigma}}^0$$

De (5.2.15) e da expressão acima:

$$\dot{\underline{\sigma}}^e = (\underline{\underline{Q}}' + \underline{\underline{E}}' - \underline{\underline{A}}' \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{I}}) \dot{\underline{\sigma}}^0 + \dot{\underline{\underline{f}}}' - \underline{\underline{A}}' \underline{\underline{A}}^{-1} \dot{\underline{\underline{f}}} \quad (5.2.16)$$

onde $\underline{\underline{I}}$ é a matriz identidade.

Chamando-se $\underline{\underline{Q}}^* = \underline{\underline{Q}}' + \underline{\underline{E}}' + \underline{\underline{I}}$ em (5.2.14), vem:

$$\dot{\underline{\sigma}}^e = - \underline{\underline{A}}' \dot{\underline{\gamma}} + \dot{\underline{\underline{f}}}' + \underline{\underline{Q}}^* \dot{\underline{\sigma}}^0 \quad (5.2.17)$$

Chamando-se em (5.2.13):

$$\dot{\underline{\underline{m}}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \dot{\underline{\underline{f}}}$$

$$\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{E}}$$

vem:

$$\dot{\underline{y}} = \underline{K} \dot{\underline{\sigma}}^0 + \dot{\underline{m}} \quad (5.2.18)$$

Levando-se (5.2.18) em (5.2.17) vem:

$$\dot{\underline{\sigma}}^e = \underline{B} \dot{\underline{\sigma}}^0 + \dot{\underline{n}} \quad (5.2.19)$$

onde:

$$\underline{B} = [\underline{Q}^* - \underline{A}' \underline{K}] \quad (5.2.20)$$

$$\dot{\underline{n}} = \dot{\underline{f}}' - \underline{A}' \dot{\underline{m}} \quad (5.2.21)$$

As equações (5.2.16) e (5.2.19) relacionam as taxas de tensão nos nós de contorno e pontos internos com as taxas de tensões iniciais correspondentes e a solução linear incremental. Notar que $\dot{\underline{m}}$ e $\dot{\underline{n}}$ representam a solução elástica do problema para um dado incremento de carregamento para incógnitas no contorno e tensões, respectivamente. Esta equação é usada para a solução de problemas não-lineares utilizando-se o processo das tensões iniciais. Comparando-se (5.2.21) e (5.2.16) conclui-se:

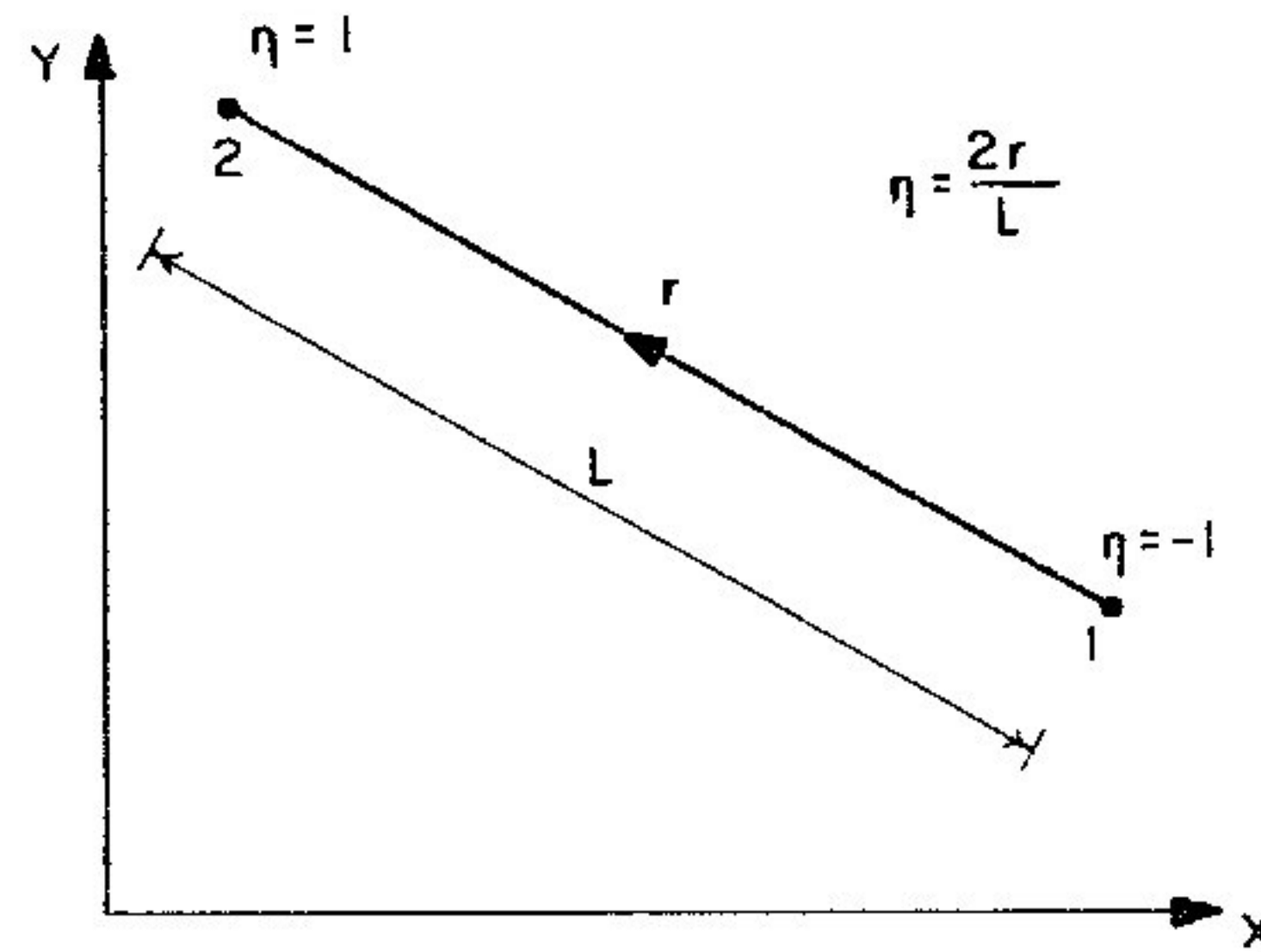
$$\underline{B} = [\underline{Q}' + \underline{E}' - \underline{A}' \underline{A}^{-1} \underline{E} + \underline{I}]$$

$$\dot{\underline{n}} = \dot{\underline{f}} - \underline{A}' \underline{A}^{-1} \dot{\underline{f}} \quad (5.2.22)$$

5.3 Elemento de Contorno Linear

Os elementos de contorno podem ter diferentes funções de interpolação para expressar o comportamento das forças de superfície e deslocamentos entre os seus nós extremos. O mais simples deles é o elemento com função de interpolação constante cuja precisão deixa a desejar. Os elementos de contorno com função de interpolação linear serão utilizados neste trabalho por apresentarem razoável

precisão com um número de elementos adequado para o tipo de problema estudado.



DESCRIÇÃO GEOMÉTRICA DO ELEMENTO LINEAR

Figura 5.3.1

Para este elemento, mostrado na figura 5.3.1, com a definição das coordenadas intrínsecas, as funções de interpolação dadas em (5.2.1) e (5.2.2) são:

$$\underline{M} = \underline{N} = [\underline{I} N_1 \quad \underline{I} N_2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 \\ 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) \end{bmatrix} \quad (5.3.1)$$

onde:

$$N_1 = \frac{1}{2} (1-\eta) \quad \text{e} \quad N_2 = \frac{1}{2} (1+\eta)$$

$$\underline{x}^j = \begin{bmatrix} x_1^j \\ x_2^j \end{bmatrix} ; \quad \underline{x}^m = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} ; \quad \underline{u}^n = \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} ; \quad \underline{p}^n = \begin{bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{bmatrix} \quad (5.3.2)$$

O Jacobiano para transformação de coordenadas do sistema

global para o sistema de coordenadas homogêneas é: $|J| = \frac{\ell}{2}$ e as duas primeiras integrais de (5.2.7) são:

$$\underline{h} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} [\underline{p}^* N_1 \quad \underline{p}^* N_2] d\eta \quad (5.3.3)$$

$$\underline{g} = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} [\underline{u}^* N_1 \quad \underline{u}^* N_2] d\eta \quad (5.3.4)$$

A integração numérica pela Quadratura de Gauss só é permitida se o ponto fonte não coincidir com o ponto campo. Quando esta coincidência acontece, para se evitar a singularidade, faz-se uma integração analítica no lugar de integrações numéricas mais complexas. Isto é mostrado em detalhes a seguir.

5.4 Integração Analítica Para os Coeficientes de Influência nos Pontos Singulares

5.4.1 Integração Analítica dos Termos da Matriz \underline{g}

Para a solução de Kelvin utiliza-se a expressão (4.3.2) na equação (5.3.4). Por simplicidade pode-se escrever:

$$u_{ij}^* = c_1 \ln r - c_2$$

onde

$$c_1 = - \frac{3-4\nu}{8\pi(1-\nu)G} \delta_{ij} \quad e \quad c_2 = - \frac{r_{,i} r_{,j}}{8\pi(1-\nu)G}$$

Ainda, N_1 e N_2 são dados em (5.3.1). Fazendo-se as

substituições indicadas, para a função de interpolação N_1 obtém-se:

$$g_{ij}^1 = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} u_{ij}^* N_1 d\eta = \frac{\ell}{4} \int_{-1}^{+1} (c_1 \ln r - c_2)(1-\eta) d\eta \quad (5.4.1)$$

ou:

$$g_{ij}^1 = \frac{c_1 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \ln r d\eta - \int_{-1}^{+1} \ln r \eta d\eta \right] - \frac{c_2 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} d\eta - \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \right] \quad (5.4.2)$$

Para a função de interpolação N_2 vem:

$$g_{ij}^2 = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} u_{ij}^* N_2 d\eta = \frac{\ell}{4} \int_{-1}^{+1} (c_1 \ln r - c_2)(1+\eta) d\eta \quad (5.4.3)$$

ou:

$$g_{ij}^2 = \frac{c_1 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \ln r d\eta + \int_{-1}^{+1} \ln r \eta d\eta \right] - \frac{c_2 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} d\eta + \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \right] \quad (5.4.4)$$

Nota-se que (5.4.2) e (5.4.4) contêm o termo $(\ln r)$ que é singular quando $r \rightarrow 0$. Se o ponto fonte coincide com o nó 1, segundo figura (5.3.1), r vale:

$$r = \frac{\ell}{2} (1+\eta) \quad (5.4.5)$$

Então, o coeficiente de influência g_{ij}^{11} é dado por:

$$g_{ij}^{11} = \frac{c_1 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1+\eta) \right| d\eta - \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1+\eta) \right| \eta d\eta \right] -$$

(5.4.6)

$$- \frac{c_2 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} d\eta - \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \right]$$

Logo:

$$g_{ij}^{11} = \frac{c_1 \ell}{4} [(2 \ln \ell - 2) - 1] - \frac{c_2 \ell}{4} [2 - 0]$$

ou:

$$g_{ij}^{11} = \frac{\ell}{4} [c_1 (2 \ln \ell - 3) - 2c_2] \quad (5.4.7)$$

O coeficiente de influência g_{ij}^{12} é dado por:

$$g_{ij}^{12} = \frac{c_1 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1+\eta) \right| d\eta + \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1+\eta) \right| \eta d\eta \right] -$$

(5.4.8)

$$- \frac{c_2 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} d\eta + \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \right]$$

ou:

$$g_{ij}^{12} = \frac{\ell}{4} [c_1 (2 \ln \ell - 1) - 2c_2] \quad (5.4.9)$$

Se o ponto fonte está aplicado ao nó 2 , segundo figura (5.3.1), r vale:

$$r = \frac{\ell}{2} (1-\eta) \quad (5.4.10)$$

Então, o coeficiente de influência g_{ij}^{22} é dado por:

$$g_{ij}^{22} = \frac{c_1 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1-\eta) \right| d\eta + \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1-\eta) \right| \eta d\eta \right] -$$

$$- \frac{c_2 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} d\eta + \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \right] \quad (5.4.11)$$

Logo:

$$g_{ij}^{22} = \frac{c_1 \ell}{4} [(2 \ln \ell - 2) - 1] - \frac{c_2 \ell}{4} [2 + 0]$$

ou:

$$g_{ij}^{22} = g_{ij}^{11} = \frac{\ell}{4} [c_1 (2 \ln \ell - 3) - 2c_2] \quad (5.4.12)$$

O coeficiente de influência g_{ij}^{21} é dado por:

$$g_{ij}^{21} = \frac{c_1 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1-\eta) \right| d\eta - \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1-\eta) \right| \eta d\eta \right] -$$

$$- \frac{c_2 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} d\eta - \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \right] \quad (5.4.13)$$

$$g_{ij}^{21} = g_{ij}^{12} = \frac{\ell}{4} [c_1 (2 \ln \ell - 1) - 2c_2] \quad (5.4.14)$$

Substituindo-se c_1 e c_2 por seus respectivos valores a expressão geral, para a solução fundamental de Kelvin é:

$$g_{ij}^{kn} = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \ell (\delta_{kn} + \frac{1}{2} - \ln\ell) \delta_{ij} + \frac{\ell_i \ell_j}{\ell} \right] \quad (5.4.15)$$

onde k se refere ao ponto fonte e n à função de interpolação utilizada. Notar que:

$$\ell(r_{,i} r_{,j}) = \ell \left(\frac{\ell_i}{\ell} \right) \left(\frac{\ell_j}{\ell} \right) = \frac{\ell_i \ell_j}{\ell}$$

Para a solução fundamental do semi-plano a singularidade só acontece quando o ponto fonte está sobre a superfície livre, ou seja, quando $c = 0$. Esta situação corresponde à solução do problema de Flamant, utilizando-se, então, a expressão (4.3.15) em (5.3.4). Por simplicidade pode-se reescrever (4.3.15) como se segue:

$$u_{ij}^* = c_3 \ln r + c_4$$

onde:

$$c_3 = -2 K'_d (1-\nu) \delta_{ij}$$

$$c_4 = -K'_d [(1-2\nu)(j-i) \theta - r_{,i} r_{,j}]$$

De (5.3.4) tem-se:

$$g_{ij}^1 = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} u_{ij}^* N_1 d\eta = \frac{\ell}{4} \int_{-1}^{+1} (c_3 \ln r + c_4) (1-\eta) d\eta \quad (5.4.16)$$

ou:

$$g_{ij}^1 = \frac{c_3^\ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \ln r \, d\eta - \int_{-1}^{+1} \ln r \, \eta d\eta \right] + \frac{c_4^\ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} d\eta - \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \right] \quad (5.4.17)$$

Para a função de interpolação N_2 vem:

$$g_{ij}^2 = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} u_{ij}^* N_2 \, d\eta = \frac{\ell}{4} \int_{-1}^{+1} (c_3 \ln r + c_4) (1+\eta) \, d\eta \quad (5.4.18)$$

ou:

$$g_{ij}^2 = \frac{c_3^\ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \ln r \, d\eta + \int_{-1}^{+1} \ln r \, \eta d\eta \right] + \frac{c_4^\ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} d\eta + \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \right] \quad (5.4.19)$$

Nota-se que (5.4.17) e (5.4.19) contêm o termo $(\ln r)$ que é singular quando $r \rightarrow 0$. Se o ponto fonte coincide com o nó 1, r vale:

$$r = \frac{\ell}{2} (1+\eta)$$

Então, o coeficiente de influência g_{ij}^{11} é dado por:

$$g_{ij}^{11} = \frac{c_3^\ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1+\eta) \right| d\eta - \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1+\eta) \right| \eta d\eta \right] + \quad (5.4.20)$$

$$+ \frac{c_4^\ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} d\eta - \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \right]$$

Logo:

$$g_{ij}^{11} = \frac{c_3^\ell}{4} [(2 \ln l - 2) - 1] + \frac{c_4^\ell}{4} [2 - 0]$$

ou:

$$g_{ij}^{11} = \frac{\ell}{4} [c_3 (2 \ln l - 3) + 2c_4] \quad (5.4.21)$$

O coeficiente de influência g_{ij}^{12} é dado por:

$$g_{ij}^{12} = \frac{c_3^\ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1+\eta) \right| d\eta + \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1+\eta) \right| \eta d\eta \right] + \quad (5.4.22)$$

$$+ \frac{c_4^\ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} d\eta + \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \right]$$

ou:

$$g_{ij}^{12} = \frac{\ell}{4} [c_3 (2 \ln l - 1) + 2c_4] \quad (5.4.23)$$

Se o ponto fonte coincide com o nó 2, r vale:

$$r = \frac{\ell}{2} (1-\eta)$$

Então, o coeficiente de influência g_{ij}^{22} é dado por:

$$g_{ij}^{22} = \frac{c_3^\ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1-\eta) \right| d\eta + \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1-\eta) \right| \eta d\eta \right] + \quad (5.4.24)$$

$$+ \frac{c_4^\ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} d\eta + \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \right]$$

Logo:

$$g_{ij}^{22} = \frac{c_3 \ell}{4} [(2 \ln \ell - 2) - 1] + \frac{c_4 \ell}{4} [2 + 0]$$

ou:

$$g_{ij}^{22} = g_{ij}^{11} = \frac{\ell}{4} [c_3 (2 \ln \ell - 3) + 2c_4] \quad (5.4.25)$$

O coeficiente de influência g_{ij}^{21} é dado por:

$$g_{ij}^{21} = \frac{c_3 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1-\eta) \right| d\eta - \int_{-1}^{+1} \ln \left| \frac{\ell}{2} (1-\eta) \right| \eta d\eta \right] + \\ + \frac{c_4 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} d\eta - \int_{-1}^{+1} \eta d\eta \right] \quad (5.4.26)$$

$$g_{ij}^{21} = g_{ij}^{12} = \frac{\ell}{4} [c_3 (2 \ln \ell - 1) + 2c_4] \quad (5.4.27)$$

Substituindo-se c_3 e c_4 por seus respectivos valores a expressão geral, para a solução fundamental do problema de Flamant, considerando-se $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, é:

$$g_{ij}^{kn} = \frac{1}{4\pi G} \left[2 (1-\nu) \ell (\delta_{kn} + \frac{1}{2} - \ln \ell) \delta_{ij} + \frac{\ell i^k j^n}{\ell} + \right. \\ \left. + (1-2\nu) \ell (j-i) \theta \right] \quad (5.4.28)$$

5.4.2 Integração Analítica dos Termos da Matriz \underline{h}

Para a solução de Kelvin utiliza-se a expressão (4.3.3) na equação (5.3.3). Por simplicidade pode-se

escrever:

$$p_{ij}^* = \frac{c_5}{r}$$

onde:

$$c_5 = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} [r_{,i}n_j - r_{,j}n_i]$$

Notar que a expressão de p_{ij}^* foi simplificada pois, para o elemento linear, $\frac{\partial r}{\partial n} = 0$. Como anteriormente N_1 e N_2 são dados em (5.3.1). Fazendo-se as substituições indicadas, para a função de interpolação N_1 obtém-se:

$$h_{ij}^1 = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} p_{ij}^* N_1 d\eta = \frac{\ell}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{c_5}{r} (1-\eta) d\eta \quad (5.4.29)$$

ou:

$$h_{ij}^1 = \frac{c_5 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \frac{1-\eta}{r} d\eta \right] \quad (5.4.30)$$

Para a função de interpolação N_2 vem:

$$h_{ij}^2 = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^{+1} p_{ij}^* N_2 d\eta = \frac{\ell}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{c_5}{r} (1+\eta) d\eta \quad (5.4.31)$$

ou:

$$h_{ij}^2 = \frac{c_5 \ell}{4} \left[\int_{-1}^{+1} \frac{1+\eta}{r} d\eta \right] \quad (5.4.32)$$

Se o ponto fonte coincide com o nó 1 tem-se:

$$r = \frac{\ell}{2} (1+\eta)$$

Se o ponto fonte coincide com o nó 2 tem-se:

$$r = \frac{\ell}{2} (1-\eta)$$

Esta integral só pode ser calculada no sentido do valor principal de Cauchy. Desta forma considera-se os dois elementos que estão conectados ao nó em referência. A figura (5.4.1) esclarece, tanto os nós onde estão aplicadas as cargas (pontos fonte) quanto o sentido da integração. Chamam-se de ℓ_1 e ℓ_2 os comprimentos dos respectivos elementos. Então:

$$r_{1,2} = \frac{\ell_2}{2} (1+\eta) \quad \text{e} \quad r_{2,1} = \frac{\ell_1}{2} (1-\eta)$$

onde o primeiro índice corresponde ao nó onde é aplicada a carga e o segundo corresponde ao elemento considerado.

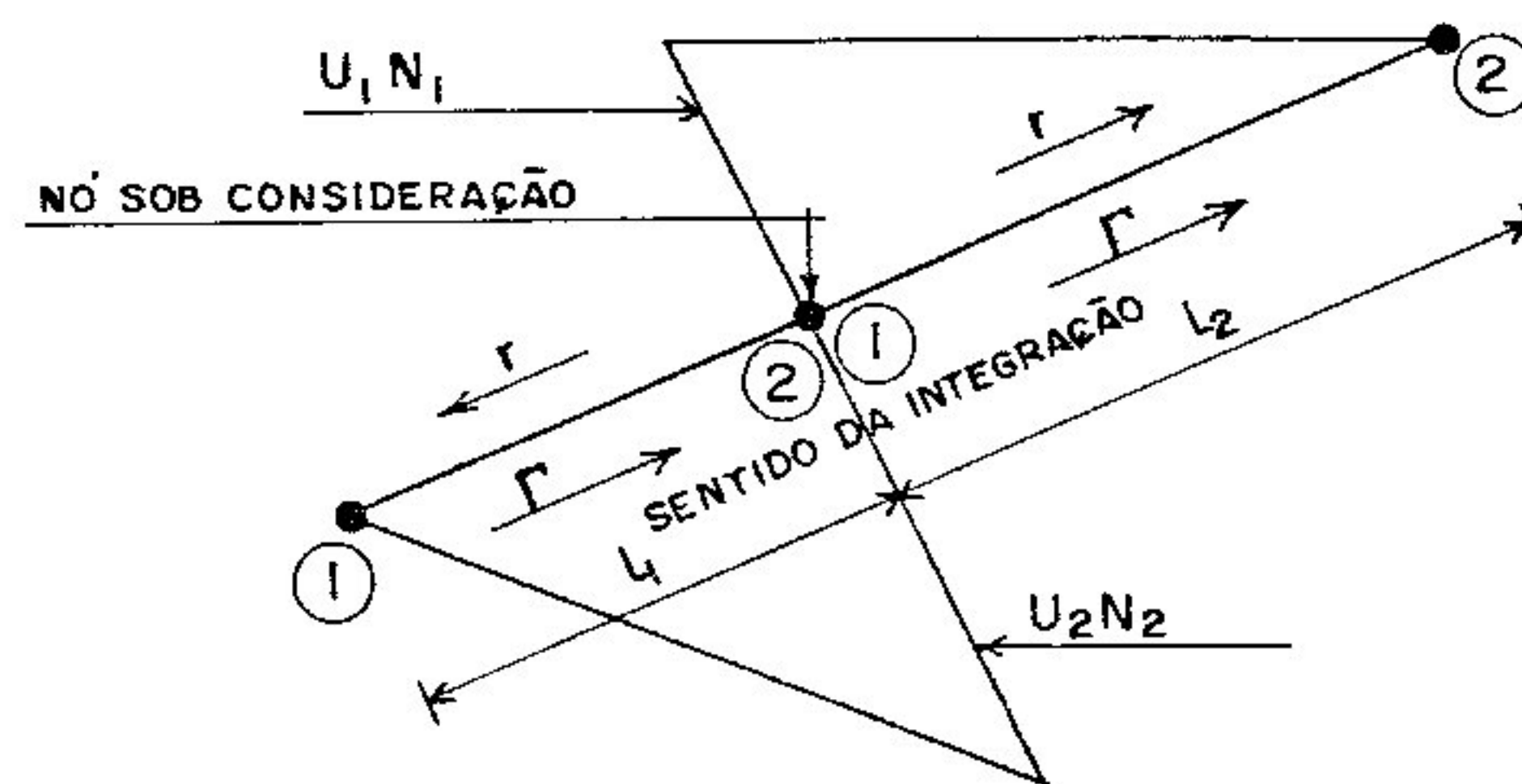


Figura 5.4.1

Pode-se escrever, das expressões de $r_{1,2}$ e de N_1 , que:

$$\eta = \frac{2r}{\ell_2} - 1 \quad \text{e} \quad N_1 = 1 - \frac{r}{\ell_2} \quad (5.4.33)$$

Para $\eta = 1$ $r = \ell_2$ e para $\eta = -1$ $r = 0$;

Além disso $d\eta = \frac{2}{\ell_2} dr$. Estes valores são, então, levados em (5.4.30), observando-se que, neste caso, o ponto fonte se refere ao nó 1. Então, o coeficiente de influência h_{ij}^{11} é dado por:

$$h_{ij}^{11} = c_5 \left[\int_0^{\ell_2} \frac{1 - (r/\ell_2)}{r} dr \right] = -\frac{c_5}{\ell_2} \left[\int_0^{\ell_2} \frac{r - \ell_2}{r} dr \right]$$

De Gájev (1980) ou Brebbia *et alii* (1984) tem-se que:

$$\int_s^b \frac{f(x)}{x-s} dx = \int_0^1 \frac{f[(b-s)t+s]}{t} dt + f(s) \ln|b-s|$$

A integral cortada significa que seu cálculo é feito no sentido da parte finita de Hadamard. Então, com:

$$f(r) = r - \ell_2 \quad ; \quad s = 0 \quad ; \quad b = \ell_2 \quad ;$$

$$f[(b-s)t+s] = f[\ell_2 t] = \ell_2(t-1) \quad ;$$

$$f(0) = -\ell_2 \quad ; \quad b - s = \ell_2$$

vem:

$$h_{ij}^{11} = - \frac{c_5}{l_2} \left[\int_0^1 \frac{l_2(t-1)}{t} dt - l_2 \ln(l_2) \right]$$

$$h_{ij}^{11} = - c_5 [t - \ln t]_0^1 + c_5 \ln(l_2) \quad (5.4.34)$$

Analogamente tomando-se $r_{2,1}$, ou seja, o ponto fonte no nó 2, e a função de interpolação N_2 :

$$h_{ij}^{22} = - c_5 \int_0^{l_1} \frac{1}{r} \left[1 - \frac{r}{l_1} \right] dr = \frac{c_5}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{r-l_1}{r} dr$$

Logo:

$$h_{ij}^{22} = c_5 [t - \ln t]_0^1 - c_5 \ln(l_1) \quad (5.4.35)$$

Somando-se h_{ij}^{11} e h_{ij}^{22} , vem:

$$h_{ij}^{nn} = c_5 \ln \left(\frac{l_2}{l_1} \right)$$

Sabe-se que:

$$[r_{,i}^{n_j} - r_{,j}^{n_i}] = (j - i)$$

Então a expressão geral é:

$$h_{ij}^{nn} = \left[\frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} \right] \ln \left(\frac{l_2}{l_1} \right) (j-i) \quad (5.4.36)$$

Tomando-se, agora, a função de interpolação N_1 e $r_{2,1}$ onde a carga é aplicada ao nó 2, tem-se:

$$h_{ij}^{21} = \frac{c_5 l}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{2(1-\eta)}{l(1-\eta)} d\eta = c_5 \quad (5.4.37)$$

Analogamente, para a função de interpolação N_2 e $r_{1,2}$, ou seja, o ponto fonte no nó 1, vem:

$$h_{ij}^{12} = \frac{c_5 \ell}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{2(1+\eta)}{\ell(1+\eta)} d\eta = c_5 \quad (5.4.38)$$

Conclui-se que $h_{ij}^{12} = h_{ij}^{21}$

Então a expressão geral é:

$$h_{ij}^{mn} = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)} (j-i) \quad \text{para } m \neq n \quad (5.4.39)$$

A expressão (5.4.36) representa o termo singular da matriz \hat{H} que deve ser empregada quando não se utiliza a propriedade do movimento de corpo rígido como será mostrado mais adiante.

5.5 Células Triangulares Lineares

As integrais de domínio são calculadas numericamente através da discretização deste domínio em células triangulares lineares. As expressões para a consideração destas células são mostradas a seguir.

Para a interpolação de uma função ϕ , no ponto i , considerando-se variação linear no plano, tem-se:

$$\phi_i = c_1 + c_2 x_i + c_3 y_i \quad (5.5.1)$$

A determinação das três constantes c_1 , c_2 e c_3 é feita substituindo-se x_i e y_i pelas coordenadas dos vértices da célula triangular, ou seja:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= c_1 + c_2 x_1 + c_3 y_1 \\ \phi_2 &= c_1 + c_2 x_2 + c_3 y_2 \\ \phi_3 &= c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3 \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

ou:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (5.5.3)$$

onde ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 são os valores da função nos vértices 1, 2 e 3 respectivamente. Resolvendo-se o sistema (5.5.3) tem-se:

$$c_1 = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) \phi_1 + (y_1 x_3 - y_3 x_1) \phi_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \phi_3]$$

$$c_2 = \frac{1}{2A} [(y_2 - y_3) \phi_1 + (y_3 - y_1) \phi_2 + (y_1 - y_2) \phi_3]$$

$$c_3 = \frac{1}{2A} [(x_3 - x_2) \phi_1 + (x_1 - x_3) \phi_2 + (x_2 - x_1) \phi_3] \quad (5.5.4)$$

onde:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

sendo $2A$ o dobro da área da célula triangular.
Levando-se (5.5.4) em (5.5.2) e reordenando, vem:

$$\phi_i = \xi_1^i \phi_1 + \xi_2^i \phi_2 + \xi_3^i \phi_3 \quad (5.5.5)$$

onde:

$$\begin{aligned} \xi_1^i &= \frac{1}{2A} \left[(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3) x_i + (x_3 - x_2) y_i \right] \\ \xi_2^i &= \frac{1}{2A} \left[(y_1 x_3 - y_3 x_1) + (y_3 - y_1) x_i + (x_1 - x_3) y_i \right] \\ \xi_3^i &= \frac{1}{2A} \left[(y_2 x_1 - y_1 x_2) + (y_1 - y_2) x_i + (x_2 - x_1) y_i \right] \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

De maneira reduzida pode-se escrever:

$$\xi_\alpha = \frac{1}{2A} (2A_\alpha^0 + b_\alpha x + a_\alpha y) \quad (5.5.7)$$

onde:

$$a_\alpha = x_\gamma - x_\beta \quad ; \quad b_\alpha = y_\beta - y_\gamma \quad (5.5.8a)$$

$$2A_\alpha^0 = x_\beta y_\gamma - x_\gamma y_\beta \quad (5.5.8b)$$

$$2A = b_1 a_2 - b_2 a_1 \quad (5.5.9)$$

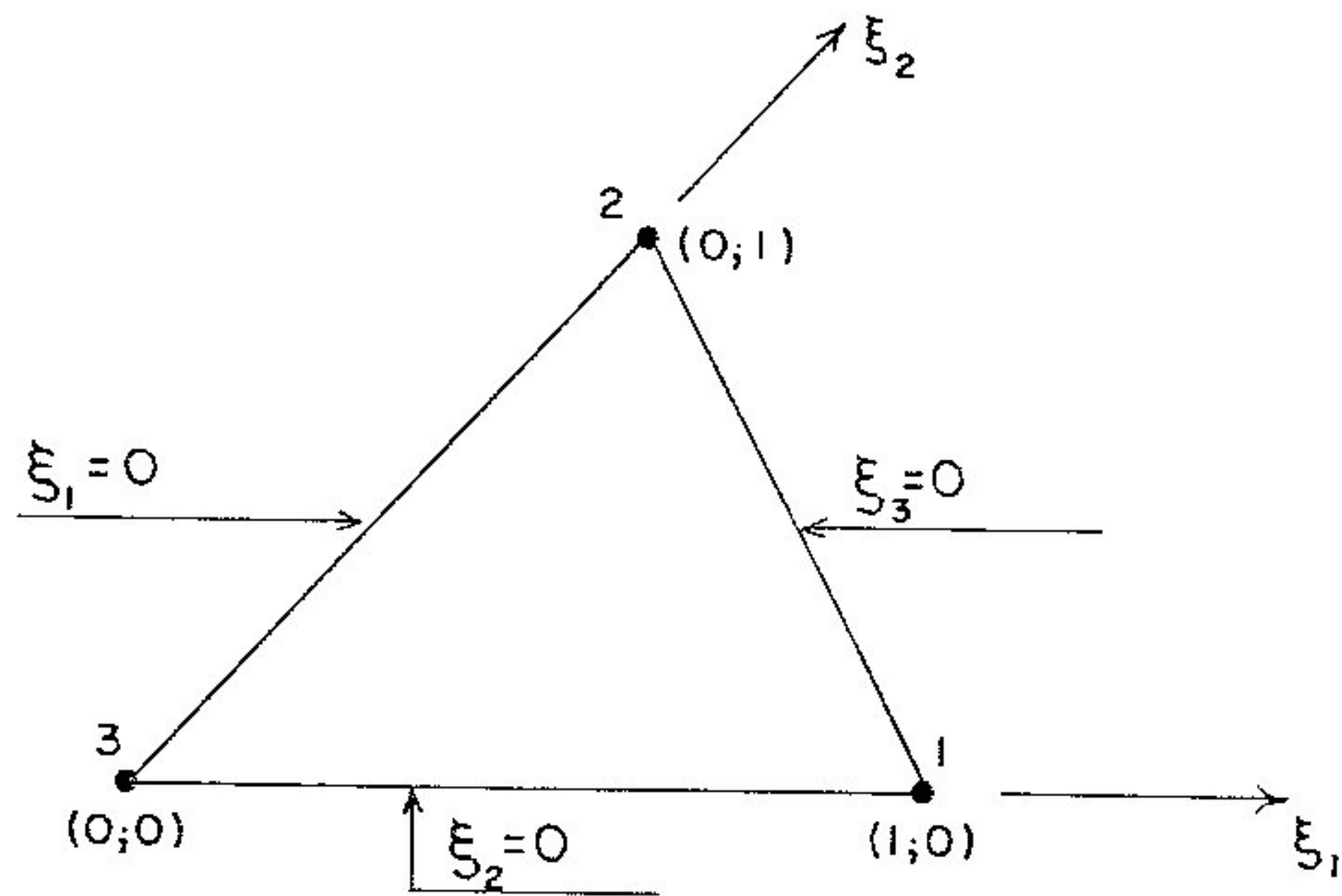
com $\alpha = 1, 2, 3$ para $\beta = 2, 3, 1$ e $\gamma = 3, 1, 2$
Então, de (5.2.3), vem:

$$\bar{M} = \left[\begin{array}{ccc} \underline{I} \xi_1 & \underline{I} \xi_2 & \underline{I} \xi_3 \end{array} \right] \quad (5.5.10)$$

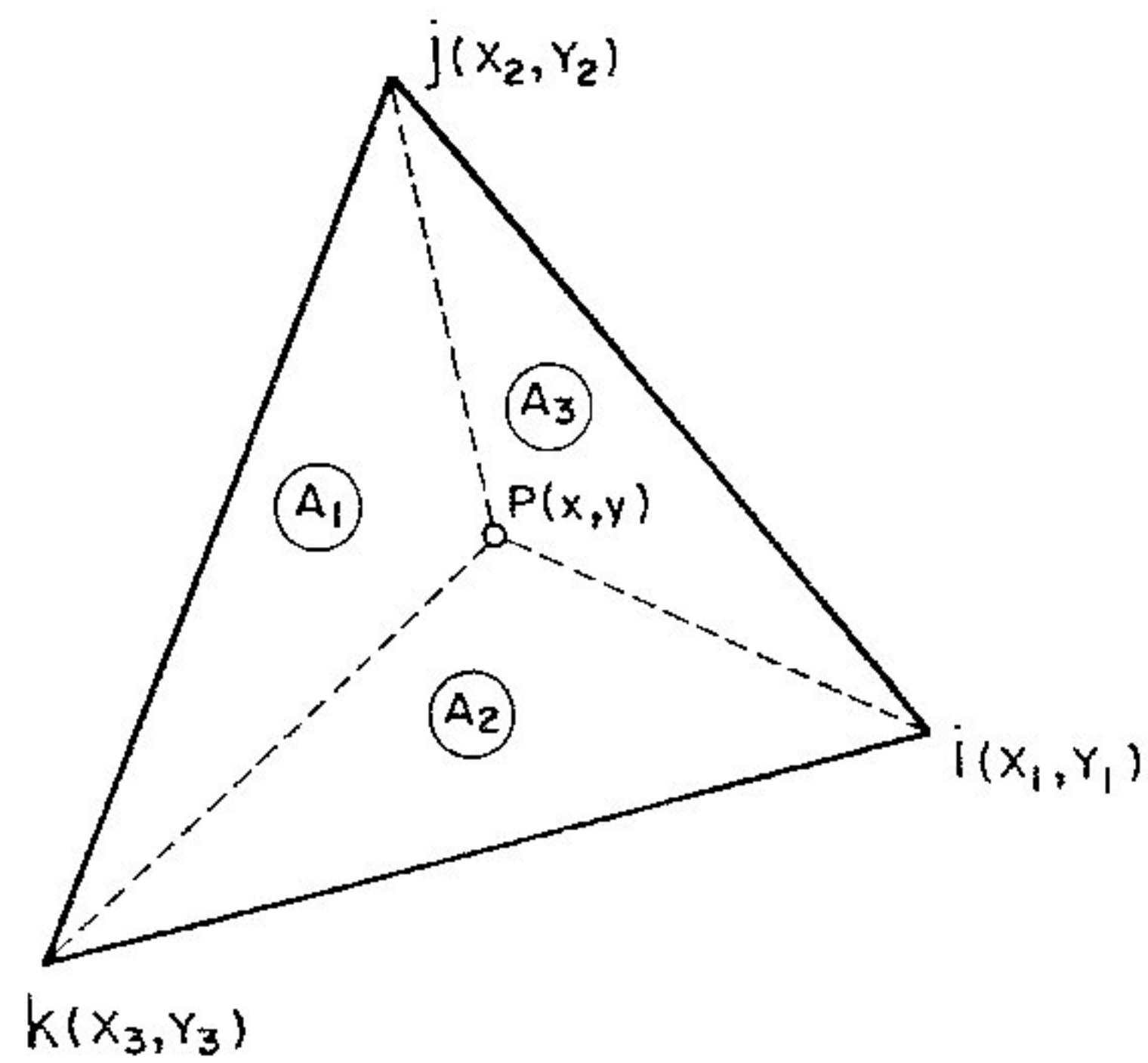
onde \underline{I} é a matriz identidade de ordem 2.

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} \quad (5.5.11)$$

onde \underline{I} é a matriz identidade de ordem 3.



Sistema de Coordenadas Homogêneas
Figura 5.5.1



Ponto Interno a uma Célula Triangular
Figura 5.5.2

Stasa (1985) mostrou que $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$ relacionando as três áreas definidas pelos vértices e o ponto (p) da figura (5.5.2) e depois comparando com a equação (5.5.6):

$$\xi_1 = \frac{\text{Área } A_1}{\text{Área Total}} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\xi_2 = \frac{\text{Área } A_2}{\text{Área Total}} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$\xi_3 = \frac{\text{Área } A_3}{\text{Área Total}} = \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Como a área total $A_t = A_1 + A_2 + A_3$ vem:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad (5.5.12)$$

Substituindo-se (5.5.11) na última integral de (5.2.6) tem-se:

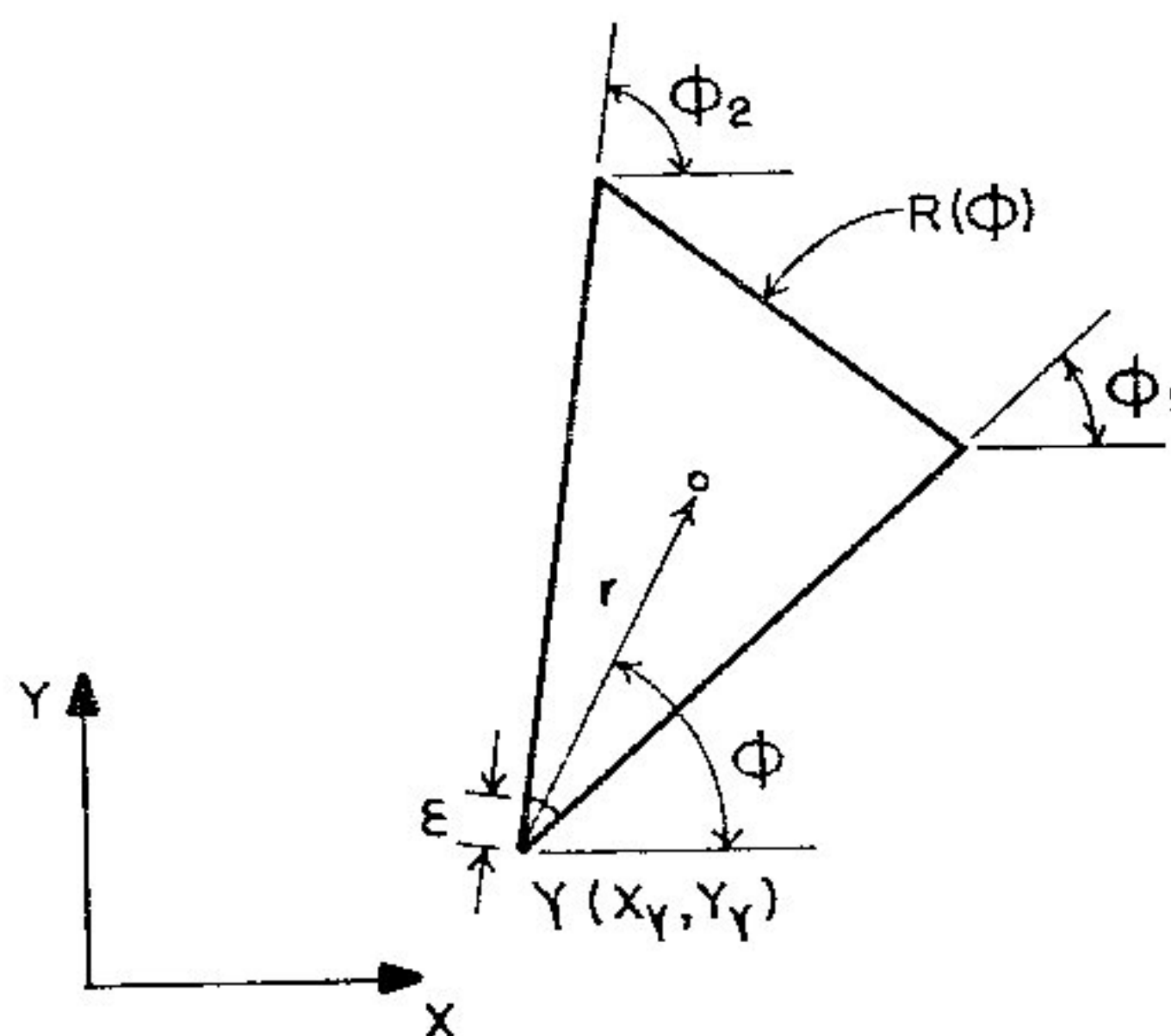
$$\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \int_{\Omega_j} \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}^* \bar{\underline{\underline{N}}} d\Omega = \int_{\Omega_j} \left\{ \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}^* \xi_1 \quad \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}^* \xi_2 \quad \hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}^* \xi_3 \right\} d\Omega \quad (5.5.13)$$

onde:

$$\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}^* = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_{111}^* & \hat{\varepsilon}_{121}^* & \hat{\varepsilon}_{221}^* \\ \hat{\varepsilon}_{112}^* & \hat{\varepsilon}_{122}^* & \hat{\varepsilon}_{222}^* \end{bmatrix} \quad (5.5.14)$$

$\hat{\underline{\underline{\varepsilon}}}^*$ é uma matriz 2x3 relacionando as deformações

fundamentais ε_{11}^* , ε_{12}^* e ε_{22}^* do ponto fonte com cada uma das direções das deformações no ponto campo. Define-se um sistema de coordenadas polares (r, ϕ) com origem no ponto fonte (γ) e sendo o ponto campo (α) correspondente a um dos nós da célula. Existem duas possibilidades na integração das células internas. Na primeira o ponto fonte coincide com um dos nós da célula e na segunda o ponto fonte está fora dela. As figuras (5.5.3) e (5.5.4) mostram estas situações. Se o ponto fonte coincide com um dos nós da célula aparece uma singularidade quando $r=0$ que pode ser evitada fazendo-se uma integração semi-analítica, ou seja, integrando-se analiticamente em relação a r e numericamente em relação a ϕ . Entretanto, mesmo quando o ponto fonte está fora da célula optou-se pela integração semi-analítica devido à simplicidade das expressões obtidas, apesar da singularidade não estar presente.



Sistema de Coordenadas Cilíndricas para Integração Semi-Analítica - Ponto Singular no Vértice da Célula

Figura 5.5.3

Para se proceder à integração semi-analítica considera-se que $\hat{\varepsilon}^* = \frac{1}{r} \psi_{jki}$, onde ψ_{jki} é função somente de ϕ . Seja $\hat{\underline{E}}^\alpha$ uma submatriz de $\hat{\underline{E}}$, ou seja:

$$\hat{\tilde{E}}^\alpha = \int_{\Omega_j} \hat{\tilde{e}}^* \xi_\alpha d\Omega$$

Na figura (5.5.3), supõe-se que o ponto α coincida com γ onde é considerada a origem do sistema de coordenadas homogêneas. Então:

$$x_1 = y_1 = 0$$

Em (5.5.8a) e (5.5.8b):

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3$$

$$2A_1^0 = x_2 y_3 - x_3 y_2$$

Mas

$$2A = b_1 a_2 - b_2 a_1$$

ou

$$2A = (y_2 - y_3)(x_1 - x_3) - (y_3 - y_1)(x_3 - x_2)$$

Como $x_1 = y_1 = 0$ vem:

$$2A = x_2 y_3 - x_3 y_2 = 2A_1^0 \quad (5.5.15)$$

Analogamente, se o ponto s não coincide com q , a origem de coordenadas não está no nó da célula sob consideração. Então, por exemplo, o nó sob consideração é o nó 2 e a origem de coordenadas é o nó 1. Logo:

$$x_1 = y_1 = 0$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 1$$

$$2A_2^0 = x_3 Y_1 - x_1 Y_3 = 0$$

Pode-se, agora, reescrever a equação (5.5.7) em coordenadas polares onde:

$$\begin{aligned} x &= r \cos\phi \\ y &= r \sin\phi \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

Levando-se (5.5.17) em (5.5.7):

$$\bar{\xi}_\alpha = \gamma_{\xi_\alpha} + \frac{r}{2A} (b_\alpha \cos\phi + a_\alpha \sin\phi) \quad (5.5.18)$$

onde:

$$\gamma_{\xi_\alpha} = \frac{2A_\alpha^0}{2A}$$

$$\text{De (5.5.15):} \quad \gamma_{\xi_\alpha} = 1 \quad \text{se } \alpha = \gamma$$

$$\text{De (5.5.16):} \quad \gamma_{\xi_\alpha} = 0 \quad \text{se } \alpha \neq \gamma$$

Retornando à equação (5.5.13) e lembrando que $d\Omega = r dr d\phi$:

$$\hat{E}_\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\epsilon}^{R(\phi)} \psi \bar{\xi}_\alpha dr d\phi \quad (5.5.19)$$

$$\hat{E}_\alpha = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \psi \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{R(\phi)} \bar{\xi}_\alpha dr \right] d\phi$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{R(\phi)} \bar{\xi}_\alpha dr = \gamma_{\xi_\alpha} R(\phi) + \frac{[R(\phi)]^2}{4A} (b_\alpha \cos\phi + a_\alpha \sin\phi) \quad (5.5.20)$$

De (5.5.18), com $\bar{\xi}_\alpha = 0$ e $\gamma_{\xi_\alpha} = 1$, vem:

$$R(\phi) = - \frac{2A}{b_\gamma \cos\phi + a_\gamma \text{sen}\phi} \quad (5.5.21)$$

Logo:

$$[R(\phi)]^2 = \frac{4A^2}{(b_\gamma \cos\phi + a_\gamma \text{sen}\phi)^2}$$

$$\frac{[R(\phi)]^2 (b_\alpha \cos\phi + a_\alpha \text{sen}\phi)}{4A} = \frac{A (b_\alpha \cos\phi + a_\alpha \text{sen}\phi)}{(b_\gamma \cos\phi + a_\gamma \text{sen}\alpha)^2} \quad (5.5.22)$$

Então, levando-se (5.5.22) em (5.5.20) e depois em (5.5.19) vem:

$$\hat{E}^\alpha = A \int_{\phi_1}^{\phi_2} \psi \left[\frac{(b_\alpha \cos\phi + a_\alpha \text{sen}\phi)}{(b_\gamma \cos\phi + a_\gamma \text{sen}\alpha)^2} \right] d\phi \quad \text{para } \alpha \neq \gamma \quad (5.5.23)$$

De (5.5.20) vem:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^{R(\phi)} \bar{\xi}_\alpha dr = \frac{R(\phi)}{2A} \left[2A\gamma_{\xi_\alpha} + \frac{R(\phi)}{2} (b_\alpha \cos\phi + a_\alpha \text{sen}\phi) \right]$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^{R(\phi)} \bar{\xi}_\alpha dr = \frac{R(\phi)}{2A} \left[2A\gamma_{\xi_\alpha} - A \frac{b_\alpha \cos\phi + a_\alpha \text{sen}\phi}{b_\gamma \cos\phi + a_\gamma \text{sen}\phi} \right]$$

Sendo $\alpha = \gamma \Rightarrow \gamma_{\xi_\alpha} = 1$; logo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} \bar{\xi}_{\alpha} dr = \frac{R(\phi)}{2} [2A - A] = \frac{R(\phi)}{2} = - \frac{A}{b_{\gamma} \cos \phi + a_{\gamma} \sin \phi}$$

Então:

$$\hat{\bar{E}}^{\alpha} = -A \int_{\phi_1}^{\phi_2} \psi \left[\frac{1}{b_{\gamma} \cos \phi + a_{\gamma} \sin \phi} \right] d\phi \quad \text{para } \alpha \neq \gamma \quad (5.5.24)$$

As expressões (5.5.23) e (5.5.24) mostram a vantagem da integração analítica em relação a r onde a singularidade é removida. A integração em relação a ϕ é conseguida numericamente pela Quadratura de Gauss. A função de interpolação para o emprego na integração numérica em relação a ϕ é:

$$\phi = \frac{\eta}{2} (\phi_2 - \phi_1) + (\phi_2 + \phi_1) \quad (5.5.25)$$

sendo:

$$-1 \leq \eta \leq +1$$

A outra integração semi-analítica está relacionada com a última integral de (5.2.8), ou seja:

$$\hat{\bar{E}} = \int_{\Omega_j} \hat{\varepsilon}^* \bar{N} d\Omega = \int_{\Omega_j} \left\{ \hat{\varepsilon}^* \xi_1 \quad \hat{\varepsilon}^* \xi_2 \quad \hat{\varepsilon}^* \xi_3 \right\} d\Omega \quad (5.5.26)$$

$\hat{\varepsilon}^*$ tem os elementos relacionados com as tensões fundamentais em cada uma das componentes no ponto fonte s devido às tensões unitárias aplicadas em cada uma das direções no ponto campo q , ou seja:

$$\hat{\epsilon}^*_{\sim} = \begin{bmatrix} \hat{\epsilon}^*_{1111} & \hat{\epsilon}^*_{1112} & \hat{\epsilon}^*_{1122} \\ \hat{\epsilon}^*_{1211} & \hat{\epsilon}^*_{1212} & \hat{\epsilon}^*_{1222} \\ \hat{\epsilon}^*_{2211} & \hat{\epsilon}^*_{2212} & \hat{\epsilon}^*_{2222} \end{bmatrix} \quad (5.5.27)$$

Então, \hat{E}^*_{\sim} é uma matriz 3×9 e \hat{E}^α_{\sim} é sua submatriz de ordem 3×3 :

$$\hat{E}^\alpha_{\sim} = \int_{\Omega_j} \hat{\epsilon}^*_{\sim} \xi_\alpha d\Omega \quad (5.5.28)$$

De maneira análoga ao procedimento utilizado com \hat{E}^*_{\sim} pode-se reescrever (5.5.28):

$$\hat{E}^\alpha_{\sim} = \int_{\Omega_j} \frac{1}{r^2} \psi_{ijkl} \bar{\xi}_\alpha r dr d\phi$$

ou:

$$\hat{E}^\alpha_{\sim} = \int_{\Omega_j} \psi_{ijkl} \frac{\bar{\xi}_\alpha}{r} dr d\phi \quad (5.5.29)$$

ψ_{ijkl} é função somente de ϕ , retirada de (4.4.7), e será chamada de ψ , por simplicidade. Para $\alpha \neq \gamma$, ou seja, $\gamma \xi_\alpha = 0$, vem:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{R(\phi)} \frac{\bar{\xi}_\alpha}{r} dr = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{R(\phi)} \frac{1}{2A} (b_\alpha \cos\phi + a_\alpha \sin\phi) dr$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} \frac{\bar{\xi}_{\alpha}}{r} dr = - \frac{b_{\alpha} \cos \phi + a_{\alpha} \sin \phi}{b_{\gamma} \cos \phi + a_{\gamma} \sin \phi}$$

Então:

$$\hat{E}^{\alpha} = - \int_{\phi_1}^{\phi_2} \psi \left[\frac{b_{\alpha} \cos \phi + a_{\alpha} \sin \phi}{b_{\gamma} \cos \phi + a_{\gamma} \sin \phi} \right] d\phi \quad \text{para } \alpha \neq \gamma \quad (5.5.30)$$

Quando $\alpha = \gamma$, $\gamma \xi_{\alpha} = 1$. Logo:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2A} (b_{\gamma} \cos \phi + a_{\gamma} \sin \phi) \right] dr = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln r + \frac{r}{2A} (b_{\gamma} \cos \phi + a_{\gamma} \sin \phi) \right]_{\varepsilon}^{R(\phi)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln[R(\phi)] + \frac{R(\phi) - \varepsilon}{2A} (b_{\gamma} \cos \phi + a_{\gamma} \sin \phi) - \ln \varepsilon \right] \end{aligned}$$

Levando-se em conta (5.5.21), vem:

$$\Lambda = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \left(- \frac{2A}{b_{\gamma} \cos \phi + a_{\gamma} \sin \phi} \right) - 1 - \frac{\varepsilon}{R(\phi)} - \ln \varepsilon \right]$$

Assim:

$$\hat{E}^{\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \psi \left\{ \ln \left(\frac{-2A}{b_{\gamma} \cos \phi + a_{\gamma} \sin \phi} \right) - 1 - \frac{\varepsilon}{R(\phi)} - \ln \varepsilon \right\} d\phi \quad (5.5.31)$$

Observar que a singularidade ainda não foi removida, sendo necessário interpretar a parte singular no sentido do valor principal de Cauchy, ou seja:

$$- (1 + \ln \epsilon) \int_0^{2\pi} \psi \, d\phi = 0 \quad (5.5.32)$$

De (5.4.32) em (5.4.31) vem:

$$\hat{E}_\alpha = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \psi \left\{ \ln \left(\frac{-2A}{b_\gamma \cos \phi + a_\gamma \sin \phi} \right) \right\} d\phi \quad \text{para } \alpha = \gamma \quad (5.5.33)$$

(5.5.30) e (5.5.33) podem ser integrados numericamente pela Quadratura de Gauss.

Mostrou-se até agora a integração das células internas quando o ponto fonte é um de seus vértices. Para se generalizar o procedimento considera-se o ponto fonte fora da célula. Neste caso as integrais não apresentam nenhuma singularidade mas a integração semi-analítica ainda se justifica pela simplicidade das equações resultantes. Então:

$$E_\alpha = \int_{\phi_1}^{\phi_3} \psi \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} \bar{\xi}_\alpha \, dr \, d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \psi \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} \bar{\xi}_\alpha \, dr \, d\phi \quad (5.5.34)$$

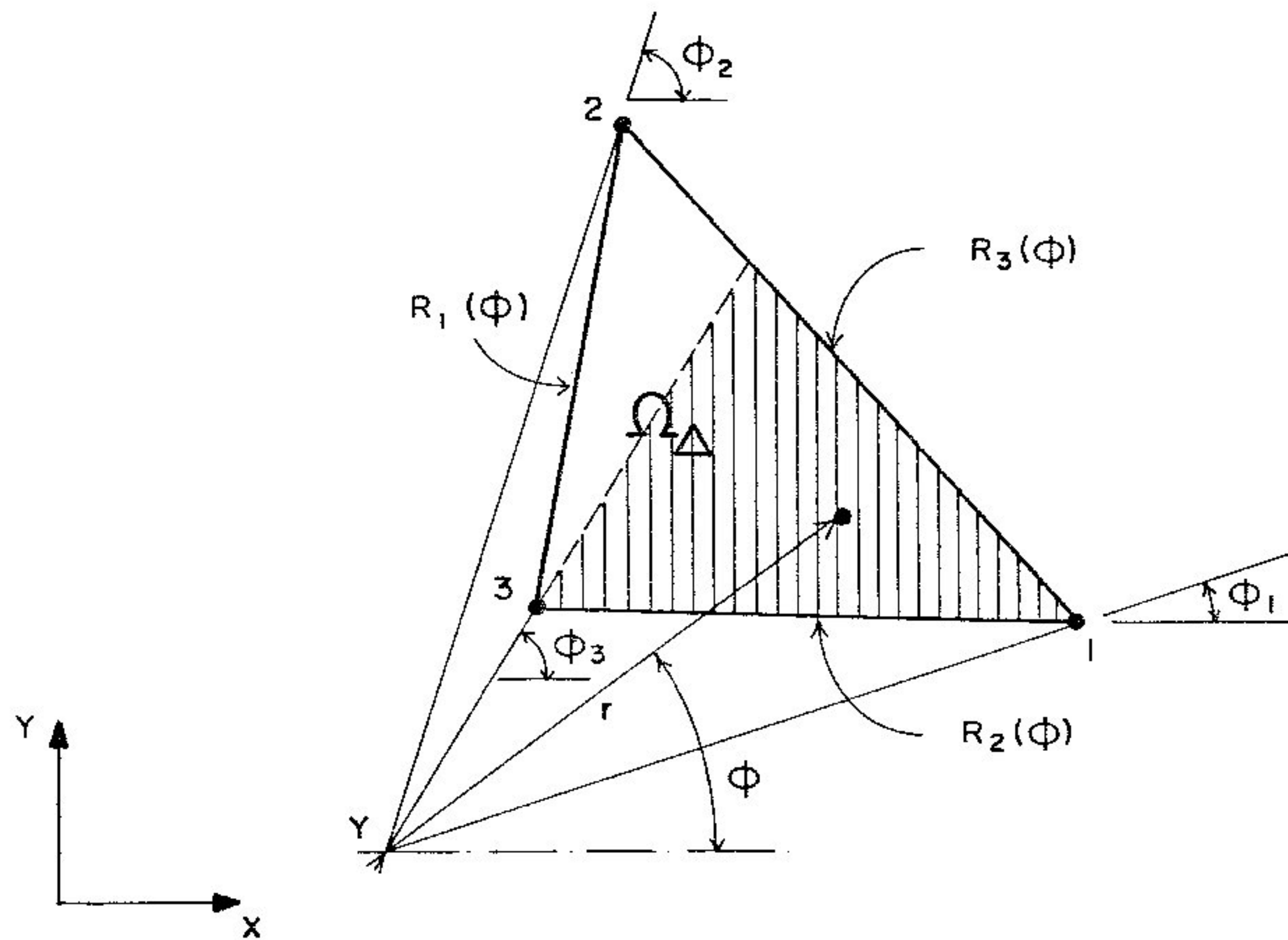
Analogamente:

$$\psi E_\alpha = \int_{\phi_1}^{\phi_3} \psi \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} \frac{\bar{\xi}_\alpha}{r} \, dr \, d\phi + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \psi \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} \frac{\bar{\xi}_\alpha}{r} \, dr \, d\phi \quad (5.5.35)$$

As duas parcelas de (5.5.34) e (5.5.35) correspondem a uma subdivisão da célula em função da posição relativa do ponto fonte γ , segundo mostra a figura (5.5.4). Em (5.5.18) com $\bar{\xi}_\alpha = 0$ vem:

$$R_\alpha(\phi) = - \frac{2A |\gamma \xi_\alpha|}{b_\gamma \cos\phi + a_\gamma \sin\phi} \quad (5.5.36)$$

Observa-se ainda que $\gamma \xi_\alpha$ é a função de interpolação no ponto singular γ onde (5.5.15) e (5.5.16) não são mais válidas. Usar (5.5.7) com as coordenadas de γ para se obter $\gamma \xi_\alpha$.



Sistema de Coordenadas Cilíndricas para Integração Semi-Analítica - Ponto Singular Fora da Célula
Figura 5.5.4

5.6 Algoritmo para Análise Não-Linear

Para a solução elastoplástica do problema em questão um algoritmo incremental e iterativo, baseado no processo das tensões iniciais, é empregado. O problema é resolvido linearmente para o carregamento total e esta é a única vez que o sistema é resolvido. Determina-se, então, o estado de tensões correspondente à fração do carregamento quando ocorre o primeiro escoamento. A partir daí, o

carregamento excedente é aplicado de forma incremental até que todo ele esteja presente. Para cada incremento o estado de tensões, representado pela tensão efetiva, é monitorado pelo critério de escoamento escolhido. A tensão residual é reaplicada elasticamente de modo a evitar que a tensão efetiva fique fora da superfície de escoamento e que seja restaurado o equilíbrio. Isto provoca um novo campo de tensões residuais que é novamente verificado da mesma maneira anterior em um processo iterativo. Quando este campo de tensões residuais, em determinada iteração, puder ser desprezado em relação a uma tolerância especificada, o processo é interrompido e novo incremento de carga é aplicado. Quando todo o carregamento estiver instalado o problema está resolvido. As diversas etapas deste algoritmo são resumidas a seguir:

a) Calcula-se o incremento das tensões elásticas utilizando-se, para a primeira iteração:

$$\dot{\underline{\sigma}}^e = \beta \dot{\underline{\eta}} \quad (5.6.1)$$

e para as demais iterações:

$$\dot{\underline{\sigma}}^e = \underline{B} \dot{\underline{\sigma}}^0 \quad (5.6.2)$$

A parcela $\dot{\underline{\eta}}$ que representa a solução elástica do problema vem multiplicada por um fator β que determina o incremento do carregamento. Para se evitar erros cumulativos esta parcela $\beta \dot{\underline{\eta}}$ é aplicada na primeira iteração de todo incremento de carga.

b) Calcula-se o incremento das tensões verdadeiras pela equação (3.5.18) ou (3.5.19) para uma dada iteração r:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{kl} \dot{\sigma}_{kl}^e$$

c) Verifica-se a convergência, comparando o valor de $\dot{\epsilon}_e^p$ calculado e o seu valor acumulado na iteração corrente, para se saber se ele pode ser desprezado. Usando (3.3.3), (3.5.3) e (3.5.13), vem:

$$\sigma_{ef} \dot{\epsilon}_e^p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

$$\sigma_{ef} \dot{\epsilon}_e^p = \sigma_{ij} \left[d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right] = \sigma_{ij} d\lambda a_{ij}$$

Então:

$$\dot{\epsilon}_e^p = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{ef}} d\lambda a_{ij}$$

onde σ_{ef} é a tensão efetiva dada pelo critério de escoamento. Este item precisa ser explicado em mais detalhes para um melhor entendimento. Se a tensão efetiva é maior que a tensão de plastificação, a porção excedente é reduzida para a superfície de escoamento, permitindo-se que uma deformação plástica ocorra. Como esta redução leva o ponto resultante na direção tangente ao ponto considerado, uma discrepância razoável pode acontecer em regiões de grande curvatura desta superfície. Isto é evitado subdividindo-se a tensão efetiva excedente e reduzindo-se cada uma das subdivisões até a superfície de escoamento, como está mostrado na figura (5.5.1). A precisão dependerá do valor de cada subdivisão.

d) Calcula-se o incremento de tensões iniciais a partir da equação (3.5.23):

$$\dot{\sigma}_{ij}^0 = \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij} = \frac{1}{\gamma'} C_{ijmn} a_{mn} a_{kl} \dot{\sigma}_{kl}^e$$

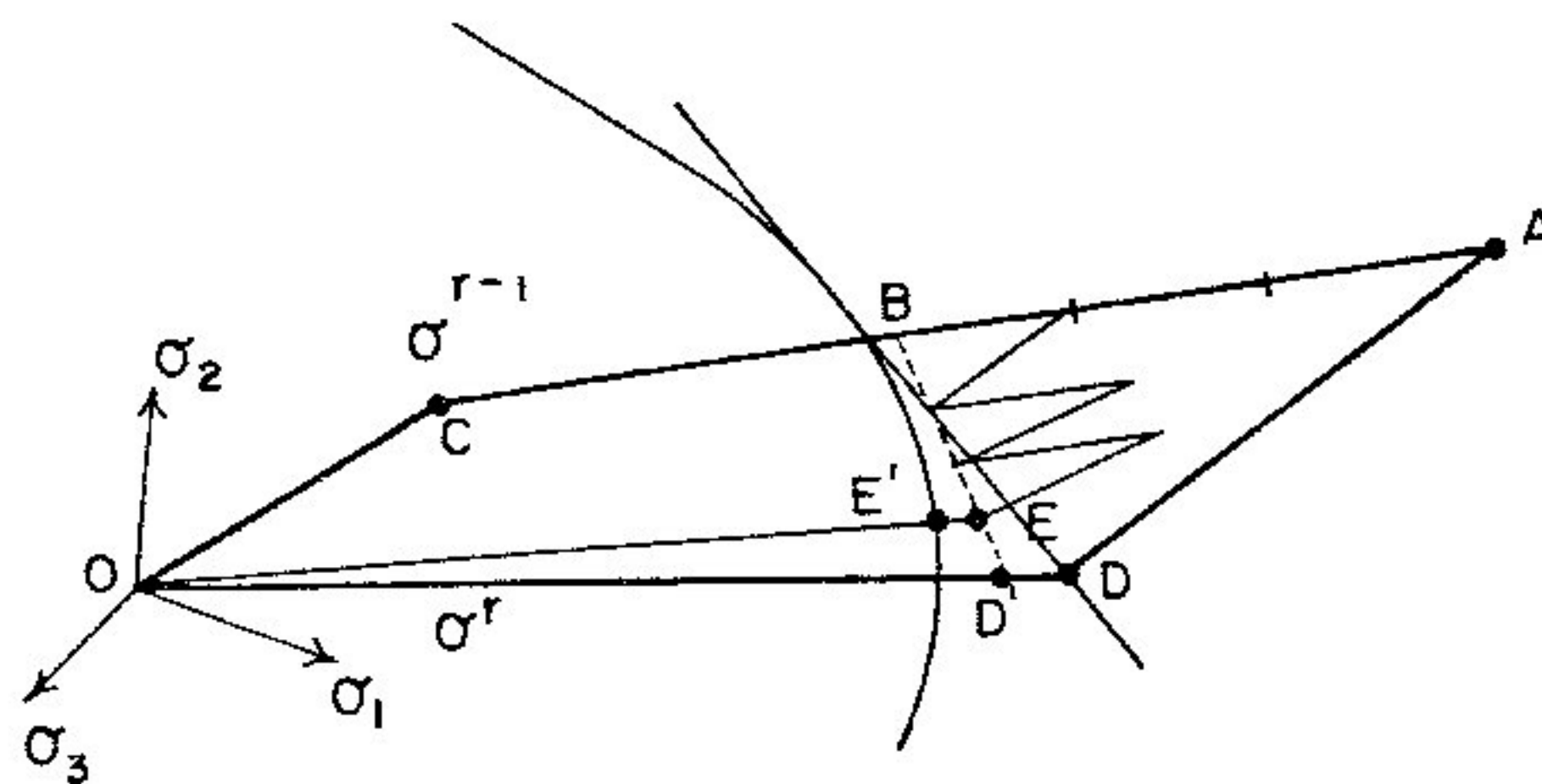
e) Acumulam-se os valores das tensões iniciais e das tensões verdadeiras, para a iteração r:

$$\left(\sigma_{ij}^0\right)_r = \left(\sigma_{ij}^0\right)_{r-1} + \left(\dot{\sigma}_{ij}^0\right)_r$$

$$\left(\sigma_{ij}\right)_r = \left(\dot{\sigma}_{ij}\right)_{r-1} + \left(\dot{\sigma}_{ij}^0\right)_r$$

f) Continua o processo, para o nó seguinte, voltando ao item b), até que todos os nós sejam pesquisados.

g) Volta ao item a) para nova iteração. As iterações são repetidas até que se consiga a convergência em todos os pontos inelásticos passando-se, então, para novo incremento de carga.



Esquema do Algoritmo Não-Linear

Figura 5.6.1

5.7 Movimento de Corpo Rígido

Uma forma bastante simples para se evitar o cálculo da matriz \underline{C} e do valor principal de Cauchy da matriz \underline{H} na equação (5.2.11) é impor um movimento de corpo rígido ao sistema. Neste caso as forças de superfície e de volume além das tensões iniciais são nulas, podendo-se escrever:

$$\underline{H} \dot{\underline{u}} = \underline{0} \quad (5.7.1)$$

Considerando-se translações independentes unitárias em cada direção para cada ponto de um corpo finito, tem-se:

$$\underline{H}_{sq} \underline{u}_q = \underline{0} \quad (5.7.2)$$

com $s, q = 1, 2, \dots, N$. \underline{H}_{sq} representa uma submatriz 2×2 de \underline{H} . Fazendo-se $\underline{u}_q = \underline{I}$ onde \underline{I} é a matriz identidade de ordem 2, vem:

$$\underline{H}_{sq} \underline{I} = \underline{0} \quad (5.7.3)$$

A equação (5.7.3) permite escrever:

$$H_{\alpha\alpha} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq \alpha}}^N H_{\alpha q} \quad (5.7.4)$$

com $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Então, para se calcular os termos diagonais de \underline{H} basta somar todos os elementos da mesma linha, fora da diagonal principal, com o sinal trocado. Esta soma evita o cálculo de \underline{C} e do valor principal de Cauchy em \underline{H} . Para problemas de domínio infinito ou semi-infinito a expressão (5.7.4) é ligeiramente modificada

como está em Telles (1983):

$$H_{\alpha\alpha} = I - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq \alpha}}^N H_{\alpha q} \quad (5.7.5)$$

5.8 Sub-regiões

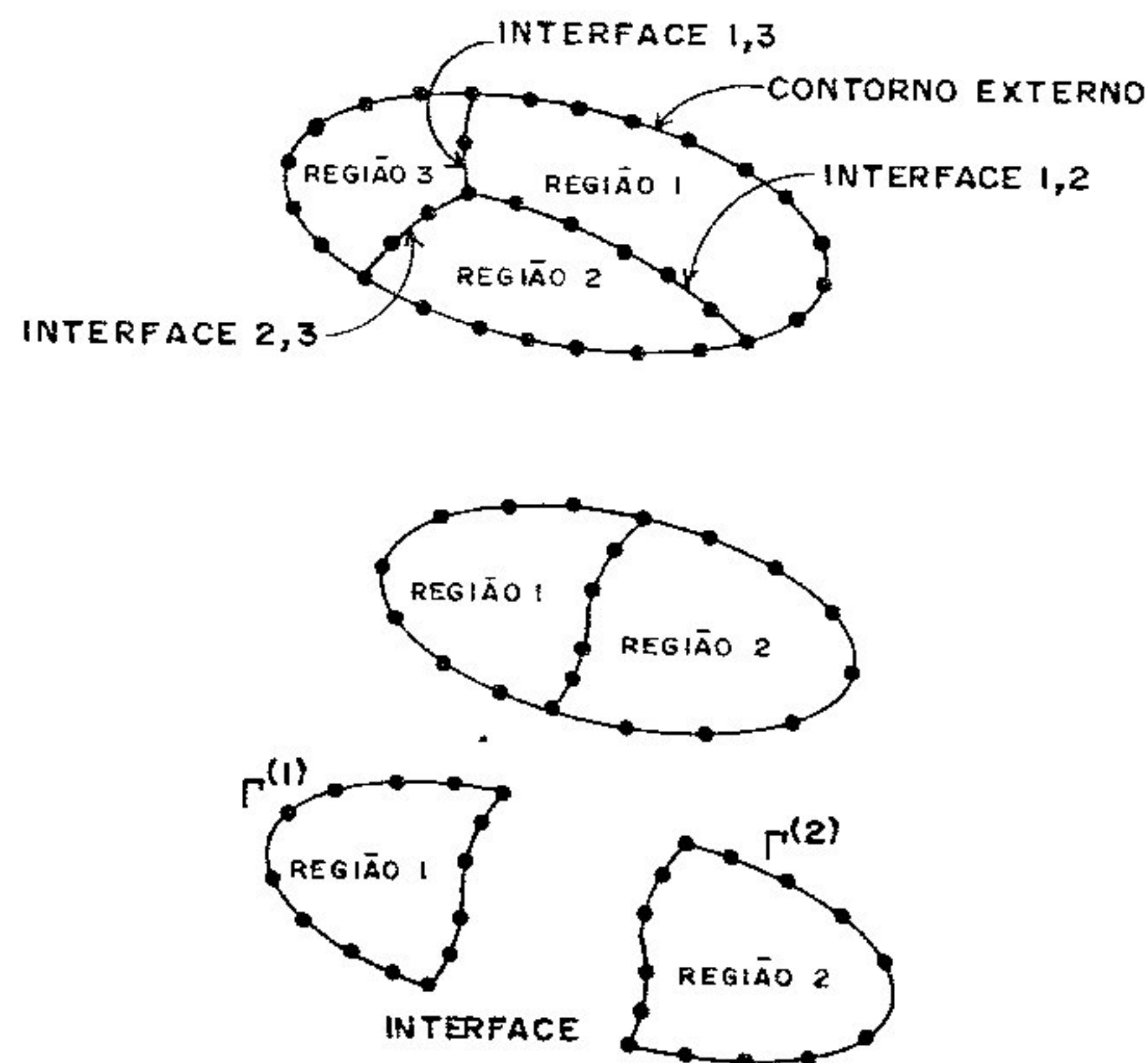
Para se tratar com domínios heterogêneos, mas que tenham partes homogêneas bem definidas, a técnica de sub-regiões precisa ser empregada. É o caso de túneis revestidos onde o revestimento é considerado como uma sub-região com características diferentes do domínio restante. Nas interfaces das sub-regiões, condições de compatibilidade e continuidade são impostas para deslocamentos e forças de superfície. A técnica consiste em se montar o sistema de equações para cada uma das sub-regiões independentemente. Através dos nós das interfaces os sistemas de equações das diversas sub-regiões são interligados pelas condições de compatibilidade entre elas. O sistema resultante é bem definido e tem solução única.

Santiago (1987) descreve com detalhes a formação das matrizes \underline{G} e \underline{H} em problemas com sub-regiões, mostrando a compatibilidade dos deslocamentos e das forças de superfície na interface. Para cada grau de liberdade do problema corresponde uma linha em cada matriz. Quando o nó é de interface existe uma linha para cada grau de liberdade, referente a cada sub-região. A compatibilidade na interface se faz, em cada nó, através destas linhas com a consideração de que as forças de superfície são iguais em valor absoluto mas de sinais contrários, e os deslocamentos de mesmo sinal, em cada sub-região.

Quando o domínio é infinito, no cálculo dos termos diagonais da matriz \underline{H} , pela imposição de um movimento de corpo rígido, a parcela da matriz identidade deve ser

somada, conforme a equação (5.7.5). Entretanto, quando se tem uma sub-região dentro deste domínio infinito, os termos diagonais da matriz \underline{H} , referentes a esta sub-região de dimensões finitas, não recebem esta contribuição.

A discretização do contorno de um problema, estudado através da técnica de sub-regiões, deve ser bem refinada, pois o contorno da sub-região introduz uma aproximação no domínio. Pode-se mostrar o erro introduzido por esta técnica resolvendo-se, por exemplo, um problema de cavidade circular sem revestimento. A solução exata, devido a *Hirsch* segundo Goodman(1989), é comparada com a solução pelo Método dos Elementos de Contorno, utilizando-se a solução de Kelvin, sem sub-regiões e com duas ou mais sub-regiões com as mesmas características elásticas.



Domínio de um Corpo Dividido em Sub-Regiões
figura 5.8.1

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

6.1. INTRODUÇÃO

Vários exemplos numéricos foram processados com a finalidade de demonstrar a eficiência da técnica apresentada. O primeiro exemplo compara um túnel circular profundo e outro superficial, sem revestimento, mostrando a influência da solução fundamental empregada.

O segundo exemplo mostra um estudo do comportamento de um túnel revestido de 5,0m de diâmetro onde a espessura do revestimento é alterada. À medida que esta espessura diminui os momentos fletores nestes revestimentos também diminuem. Este estudo indica a faixa de dimensionamento econômico, com momentos fletores e tensões de compressão compatíveis com a resistência do material do revestimento. Esta variação na espessura leva a maiores deformações e, conseqüentemente, a uma maior região de plastificação em torno da abertura. Comparam-se também os deslocamentos e tensões elásticos e elastoplásticos na superfície da abertura.

O terceiro exemplo mostra um túnel sem revestimento, superficial, com seção transversal em forma

de ferradura. A partir dos resultados das medições de convergência procede-se à aferição dos parâmetros utilizados através de retro-análise.

O quarto exemplo é um túnel superficial revestido, de forma elíptica, com carregamento preponderante na superfície livre. Os resultados procuram encorajar a construção de galerias de concreto projetado com seções de contorno suave e revestimentos com espessuras menores. Verificou-se que não houve plastificação do maciço razão pela qual a análise se restringiu ao comportamento elástico. Fez-se um ensaio numérico aumentando-se o carregamento até o início da plastificação do maciço. O carregamento necessário para este efeito foi bastante elevado, podendo-se considerar a presença de uma sapata de fundação na superfície, introduzindo-se uma sub-região de concreto armado na parte carregada.

Em todos os exemplos foi considerado o critério de escoamento de Drucker-Prager para a equação (3.4.27) e material com comportamento elástico perfeitamente plástico.

As tensões in situ foram consideradas como a superposição de dois carregamentos. O primeiro corresponde ao campo de tensões originais presente antes da escavação e o segundo é devido às forças de superfície aplicadas no contorno da abertura. A soma dos dois carregamentos anulam as tensões nesta superfície, simulando as reações provocadas pela escavação. Resolve-se o problema devido ao segundo carregamento e, então, soma-se o campo de tensões originais para obter-se as tensões reais nos pontos considerados. Portanto, a integração no domínio só foi necessária para a região plástica.

Para o processamento dos exemplos foi utilizado um programa de computador desenvolvido pelo prof. Wilson Venturini, no qual várias modificações foram introduzidas. O programa original utiliza somente a solução fundamental de Kelvin e calcula o termo C_{ij} e o valor principal de Cauchy para os termos diagonais da matriz \underline{H} . Na implementação da solução fundamental do semi-plano optou-se

pelo emprego do movimento de corpo rígido, alterando-se substancialmente a estrutura do programa nas rotinas envolvidas. A matriz C'_{ij} , para pontos localizados em vértices sobre o limite do semi-plano, foi incluída posteriormente no programa. Assim duas versões distintas para cada solução (Kelvin e Melan) foram desenvolvidas, uma com os termos diagonais da matriz \underline{H} sendo obtidos indiretamente por movimento de corpo rígido e outra diretamente com C_{ij} e o valor principal de Cauchy.

1^o EXEMPLO:

Comparação de resultados entre túneis não revestidos superficial e profundo:

O primeiro exemplo se refere a um túnel com 4,00m de diâmetro conforme figura 6.1. O campo de tensões originais foi tomado constante e correspondendo ao peso do solo acima do eixo horizontal. As tensões encontradas utilizando-se a solução fundamental do semi-plano, para diversas profundidades de aberturas, são comparadas com aquelas obtidas pela solução de Kelvin. Indica-se, ainda, a região plastificada para a profundidade de 30,0m.

TABELA 6.1: Tensões segundo eixo horizontal da abertura, na direção radial, para análise elastoplástica (em kN/m^2):

NÓ prof.	14	15	16	17	Solução Funda- mental
4 m	- 73.91	- 90.20	- 91.20	- 90.80	Melan
4 m	- 58.70	- 73.10	- 74.60	- 73.20	Kelvin
10 m	-134.30	-150.90	-147.60	-146.50	Melan
10 m	-106.70	-144.00	-152.70	-154.60	Kelvin
20 m	-248.70	-257.00	-250.70	-239.90	Melan
20 m	-188.90	-248.70	-243.30	-233.10	Kelvin
25 m	-293.70	-304.80	-303.00	-300.70	Melan
25 m	-228.60	-310.20	-304.10	-289.50	Kelvin
30 m	-314.10	-335.10	-344.70	-343.40	Melan
30 m	-258.90	-362.60	-358.80	-342.40	Kelvin
110 m	-325.20	-341.10	-348.80	-347.30	Melan

As diferenças são mais acentuadas nos valores referentes à pequena profundidade e nos valores mais próximos à abertura. Para efeito comparativo analisou-se o

comportamento de um túnel à maior profundidade (110m) com mesmo carregamento do túnel a 30m de profundidade. Observou-se que os valores obtidos foram bastante próximos.

TABELA 6.2: Tensões segundo eixo horizontal da abertura, na direção tangencial, para análise elastoplástica (em kN/m²):

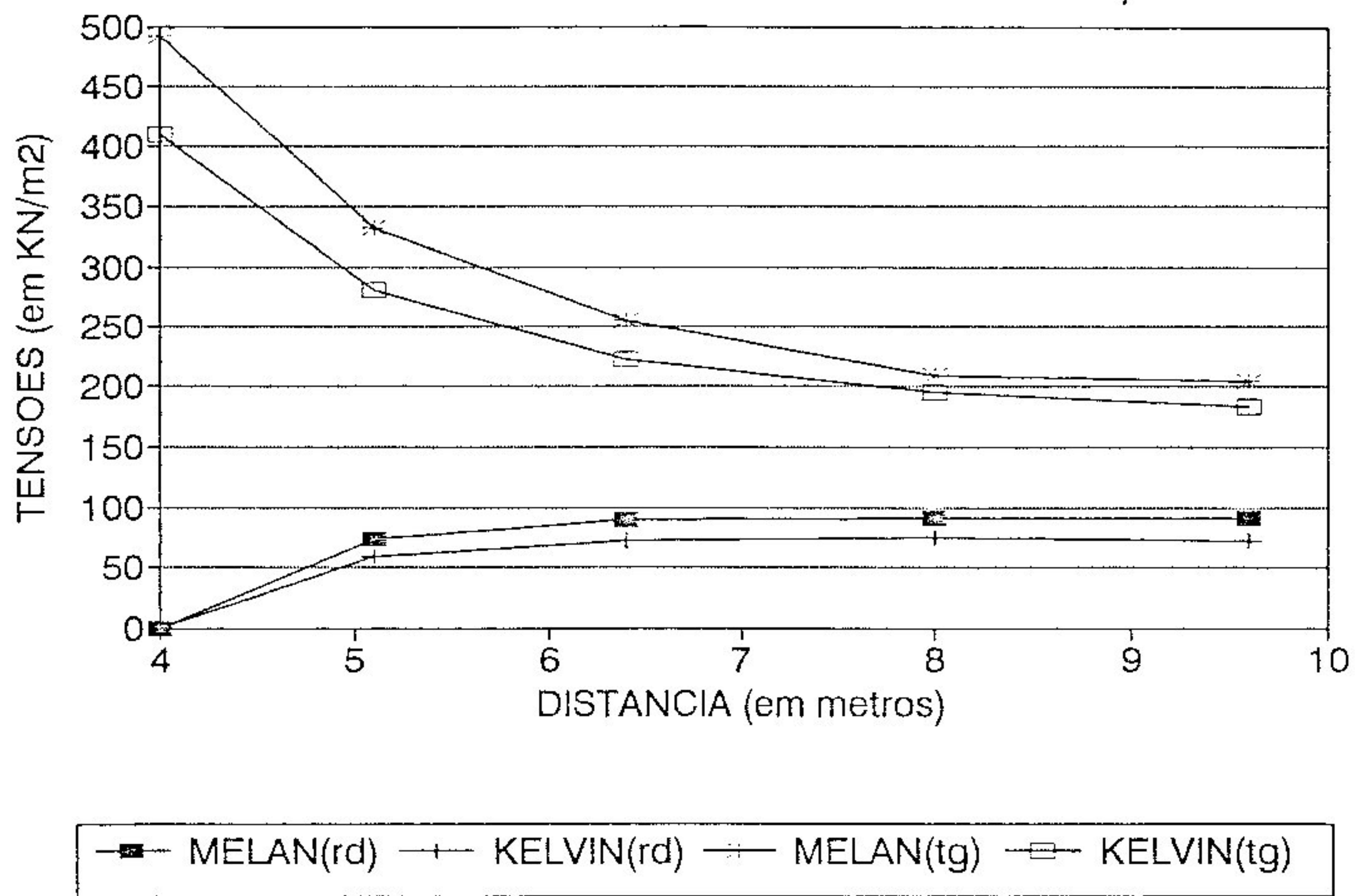
Nó prof.	7	14	15	16	17	Solução Fundamental
4 m	-491.80	-333.60	-254.50	-209.50	-203.70	Melan
4 m	-410.30	-280.80	-223.20	-195.70	-183.00	Kelvin
10 m	-630.10	-561.80	-422.90	-362.10	-355.00	Melan
10 m	-636.60	-502.50	-393.30	-344.90	-322.40	Kelvin
20 m	-675.40	-1000.8	-732.40	-620.60	-607.90	Melan
20 m	-736.80	-969.50	-727.20	-608.20	-560.20	Kelvin
25 m	-644.90	-1199.0	-918.70	-761.50	-744.30	Melan
25 m	-724.60	-1158.9	-925.20	-750.90	-685.00	Kelvin
30 m	-625.40	-1351.2	-1112.8	-909.30	-887.30	Melan
30 m	-764.00	-1309.4	-1119.0	-893.60	-810.50	Kelvin
110 m	-593.40	-1351.6	-1093.2	-894.50	-873.10	Melan

TABELA 6.3: Tensões originais utilizadas nos exemplos comparativos

Nó prof.	σ_v^0 kN/m ²	σ_h^0 kN/m ²	σ_z^0 kN/m ²
4 m	- 160.0	- 64.0	- 64.0
10 m	- 280.0	- 112.0	- 112.0
15 m	- 380.0	- 152.0	- 152.0
20 m	- 480.0	- 192.0	- 192.0
25 m	- 580.0	- 232.0	- 232.0
30 m	- 680.0	- 272.0	- 272.0
110 m	- 680.0	- 272.0	- 272.0

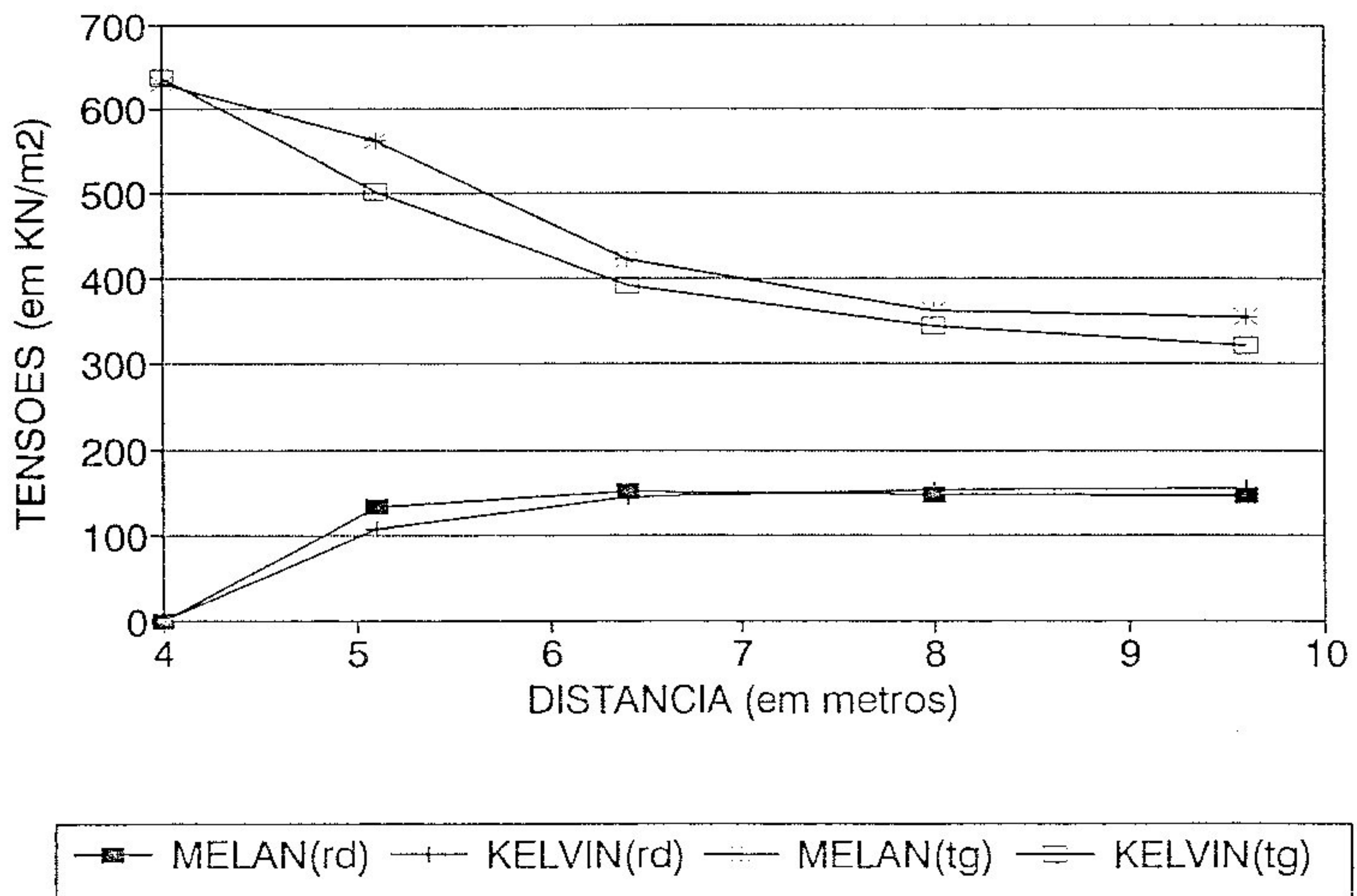
TENSOES RADIAIS E TANGENCIAIS

EIXO HORIZONTAL a 8m de profundidade

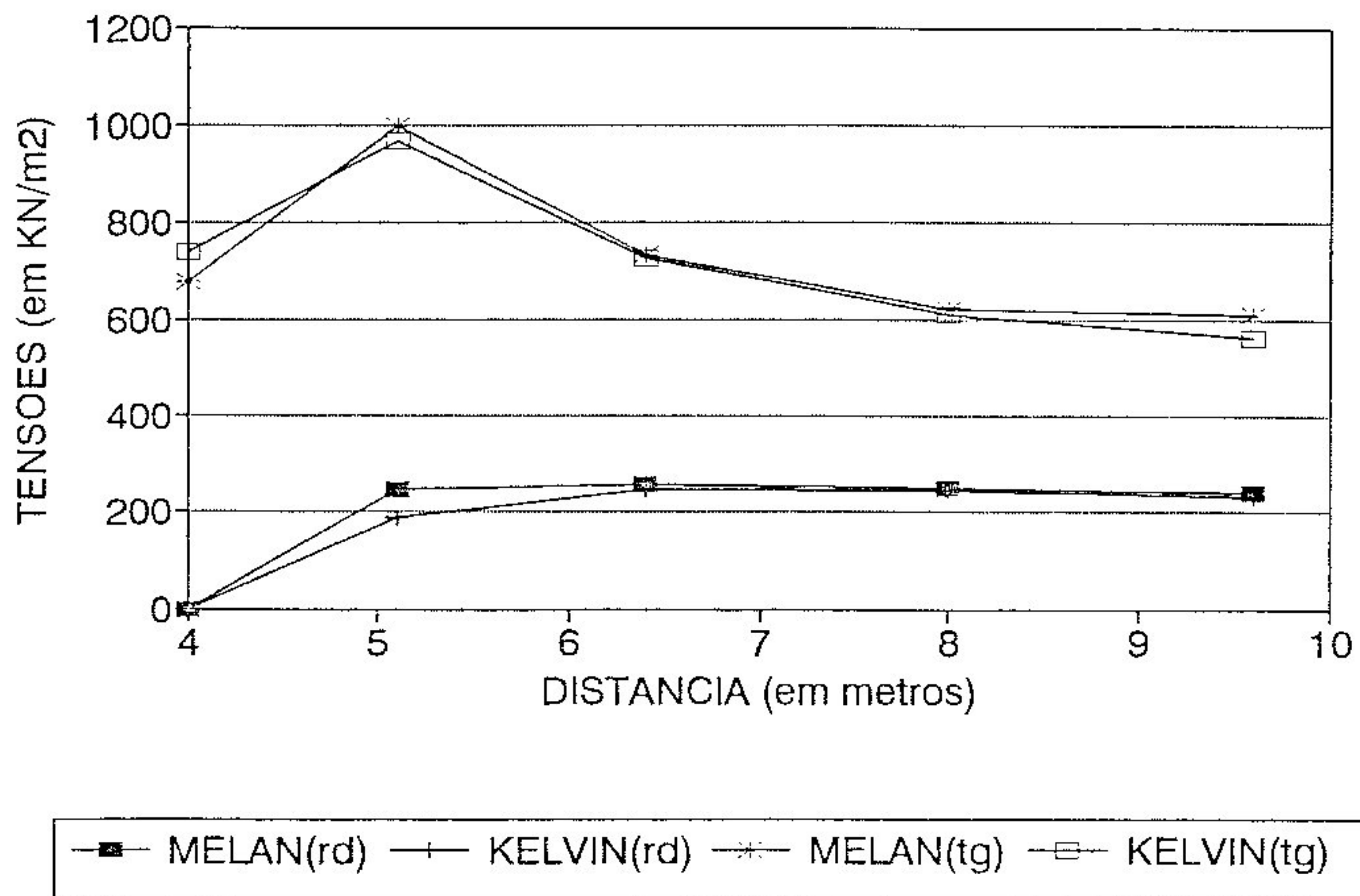


TENSOES RADIAIS E TANGENCIAIS

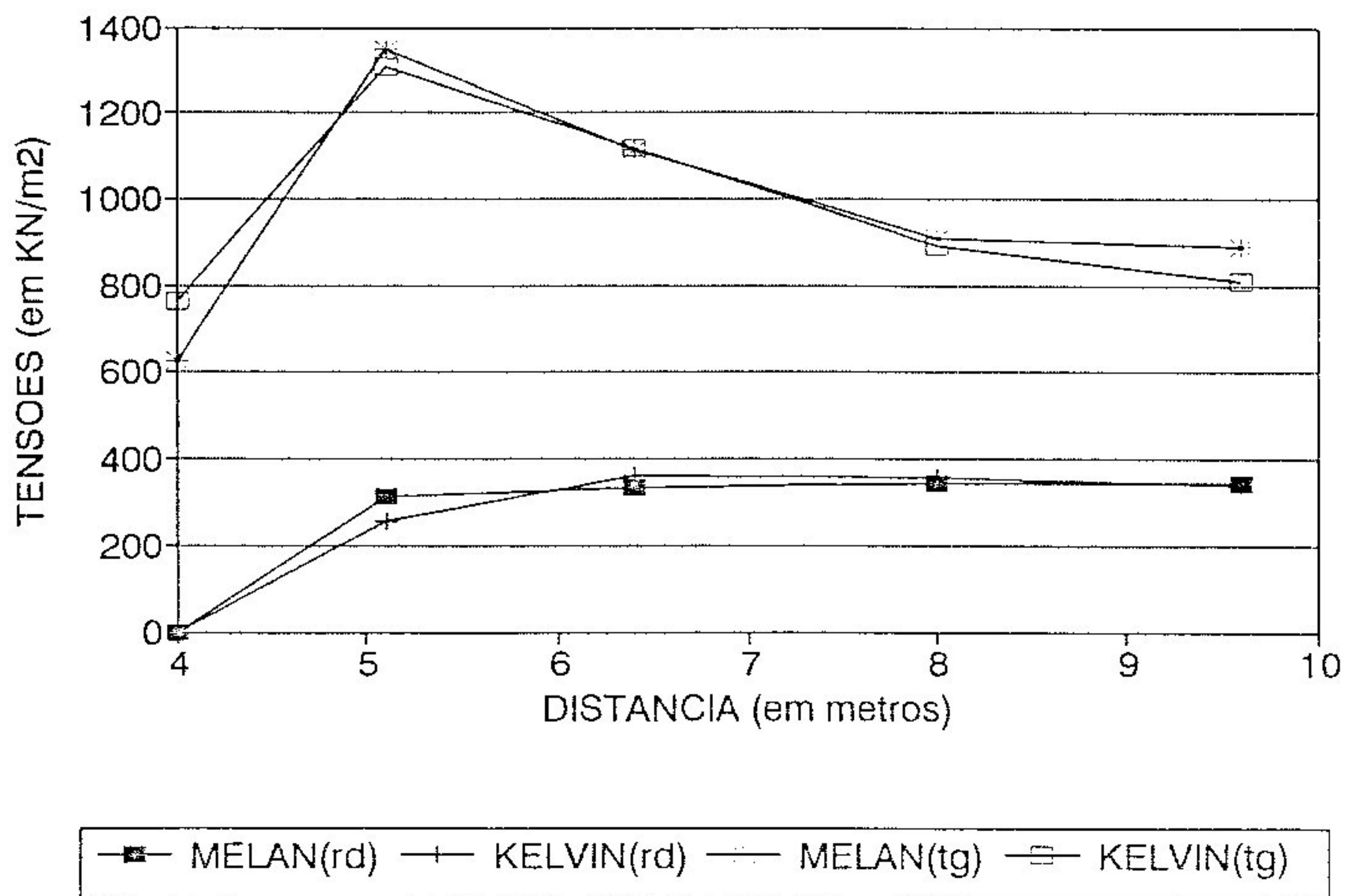
EIXO HORIZONTAL a 14m de profundidade



TENSOES RADIAIS E TANGENCIAIS EIXO HORIZONTAL a 24m de profundidade



TENSOES RADIAIS E TANGENCIAIS EIXO HORIZONTAL a 34m de profundidade



1º EXEMPLO:

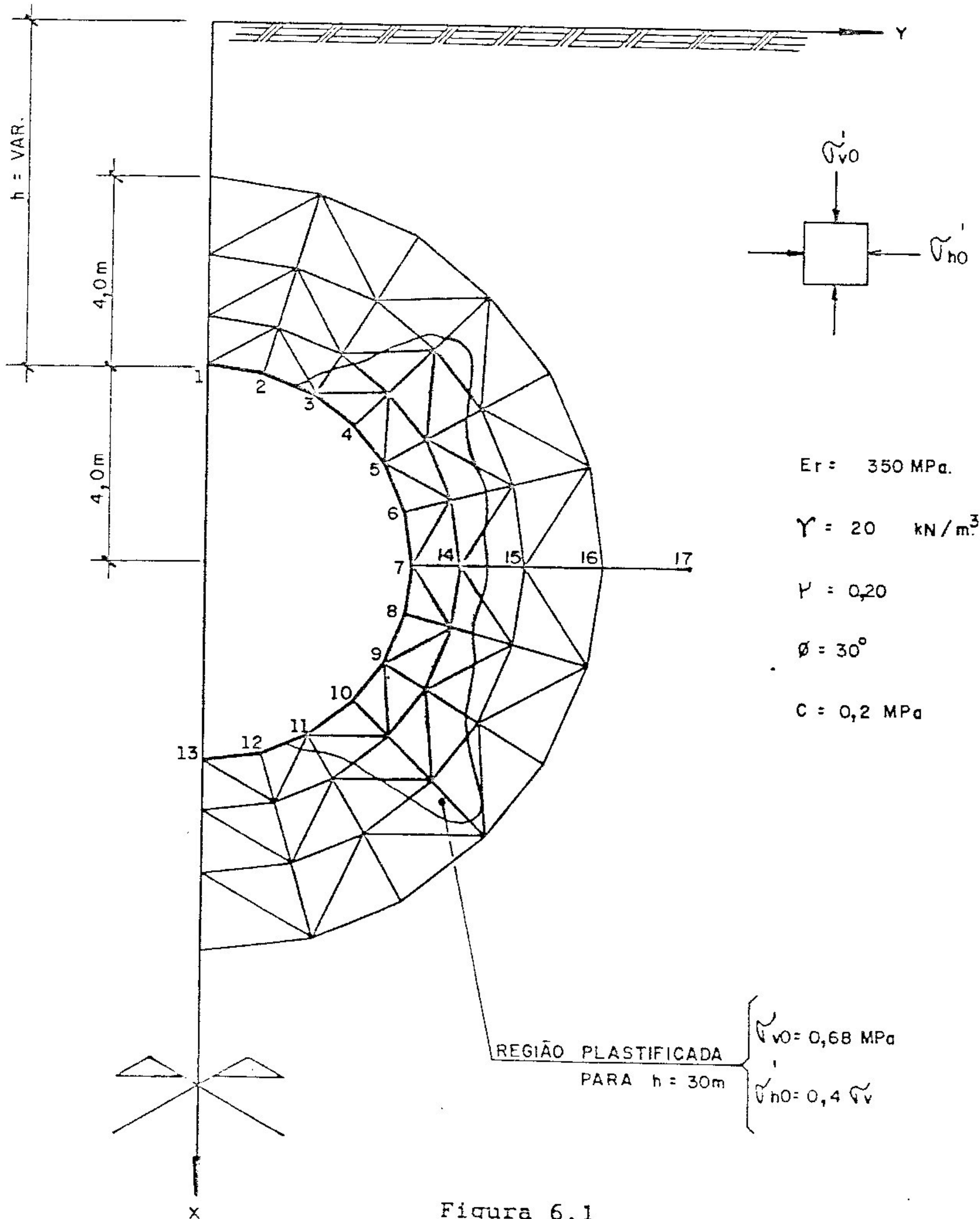


Figura 6.1

2º EXEMPLO:

Túnel Revestido Profundo: análise com várias espessuras para comparação dos resultados

Este exemplo se refere a um túnel com 5,00m de diâmetro, profundo, com dupla simetria, conforme a figura 6.2, solicitado por um campo constante de tensões originais. Alterando-se a espessura do revestimento, observa-se um decréscimo acentuado no valor do momento fletor neste revestimento. Indica-se a região plastificada para o revestimento com 15cm de espessura.

TABELA 6.4: Deslocamentos na face interna do revestimento para análise elástica segundo direção x (em cm):

Nó esp.	1	2	3	4	5	6
100cm	+0.1985	+0.1829	+0.1267	+0.0488	+0.0022	+0.0042
75cm	+0.1754	+0.1593	+0.1028	+0.0271	-0.0135	-0.0116
50cm	+0.1340	+0.1188	+0.0659	-0.0020	-0.0330	-0.0208
36cm	+0.1011	+0.0875	+0.0423	-0.0143	-0.0382	-0.0241
25cm	+0.0660	+0.0554	+0.0199	-0.0290	-0.0401	-0.0209
20cm	+0.0390	+0.0295	-0.0132	-0.0768	-0.0736	-0.0282
15cm	-0.0030	-0.0187	-0.1117	-0.2412	-0.2113	-0.0815

TABELA 6.5: Deslocamentos na face interna do revestimento para análise elástica segundo a direção y (em cm):

Nó esp.	2	3	4	5	6	7
100cm	-0.1410	-0.3303	-0.5648	-0.7802	-0.9018	-0.9326
75cm	-0.1522	-0.3570	-0.6103	-0.8423	-0.9738	-1.0075
50cm	-0.1702	-0.3390	-0.6777	-0.9290	-1.0711	-1.1075
36cm	-0.1856	-0.4336	-0.7296	-0.9942	-1.1452	-1.1847
25cm	-0.2022	-0.4672	-0.7804	-1.0570	-1.2110	-1.2545
20cm	-0.2146	-0.4941	-0.8311	-1.1131	-1.2474	-1.2813
15cm	-0.2473	-0.5830	-1.0072	-1.2993	-1.3539	-1.3415

TABELA 6.6: Deslocamentos na face interna do revestimento, para análise elastoplástica, segundo direção x (em cm):

Nó esp.	1	2	3	4	5	6
100cm	-	-	-	-	-	-
75cm	-	-	-	-	-	-
50cm	+0.1342	+0.1185	+0.0644	-0.0036	-0.0337	-0.0210
36cm	+0.0898	+0.0760	+0.0319	-0.0207	-0.0405	-0.0248
25cm	+0.0316	+0.0231	-0.0049	-0.0433	-0.0444	-0.0221
20cm	-0.0112	-0.0185	-0.0553	-0.1092	-0.0841	-0.0312
15cm	-0.0933	-0.1445	-0.3702	-0.6341	-0.4636	-0.1689

TABELA 6.7: Deslocamentos na face interna do revestimento para análise elastoplástica, segundo a direção y (em cm):

Nó esp.	2	3	4	5	6	7
100cm	-	-	-	-	-	-
75cm	-	-	-	-	-	-
50cm	-0.1704	-0.3998	-0.6789	-0.9297	-1.0715	-1.1078
36cm	-0.1874	-0.4376	-0.7344	-0.9970	-1.1470	-1.1864
25cm	-0.2072	-0.4775	-0.7933	-1.0651	-1.2171	-1.2604
20cm	-0.2224	-0.5124	-0.8593	-1.1313	-1.2605	-1.2936
15cm	-0.2822	-0.7134	-1.3283	-1.6267	-1.5466	-1.4820

Os valores que não constam na tabela se referem à análise elástica, pois não houve plastificação do maciço. Os deslocamentos na direção x mudam de sentido à medida que o revestimento diminui de espessura, pelo efeito de σ_h^0 . A análise elastoplástica leva a maiores deslocamentos e esta diferença é tanto maior quanto maior a extensão da região plastificada. Os deslocamentos em y têm sempre a mesma direção e são tanto maiores quanto menores as espessuras dos revestimentos.

TABELA 6.8: Tensões normais na direção x segundo o eixo horizontal da abertura, para análise elástica (em MPa):

Nó esp.	8	15	20	23	25
100cm	-4.2361 -4.1401	-3.8590	-3.6872	-3.5476	-3.4336
75cm	-4.0308 -3.8939	-3.7449	-3.6230	-3.5027	-3.3979
50cm	-3.6091 -3.4100	-3.5419	-3.5141	-3.4318	-3.3453
36cm	-3.1976 -2.9478	-3.3609	-3.4241	-3.3788	-3.3100
25cm	-2.7422 -2.4403	-3.1735	-3.3327	-3.3256	-3.2749
20cm	-2.5627 -2.2295	-3.1244	-3.3044	-3.3003	-3.2506
15cm	-2.6752 -2.2844	-3.2779	-3.3838	-3.3238	-3.2424

TABELA 6.9: Tensões normais na direção y segundo o eixo horizontal da abertura, para análise elástica (emMPa):

Nó esp.	1	8	15	20	23	25
100cm	-36.942	-19.109 -9.319	-8.7388	-8.2426	-7.9311	-7.7244
75cm	-39.320	-24.059 -10.102	-9.1201	-8.4571	-8.0631	-7.8110
50cm	-43.218	-31.578 -11.269	-9.6511	-8.7509	-8.2438	-7.9306
36cm	-46.643	-37.668 -12.200	-10.056	-8.9724	-8.3794	-8.0204
25cm	-50.624	-43.908 -13.146	-10.444	-9.1824	-8.5076	-8.1054
20cm	-53.509	-47.711 -13.744	-10.689	-9.3166	-8.5939	-8.1666
15cm	-59.898	-54.818 -14.953	-11.277	-9.6551	-8.8242	-8.3389

TABELA 6.10: Tensões normais na direção x segundo o eixo horizontal da abertura, para análise elastoplástica (em MPa):

Nó esp.	1	8	15	20	23	25
100cm	-	-	-	-	-	-
75cm	-	-	-	-	-	-
50cm	-0.3553	$\begin{matrix} -3.5987 \\ -3.4005 \end{matrix}$	-3.5282	-3.5050	-3.4290	-3.3456
36cm	-0.3924	$\begin{matrix} -3.1820 \\ -2.9252 \end{matrix}$	-3.3220	-3.4225	-3.3887	-3.3227
25cm	-0.4395	$\begin{matrix} -2.8211 \\ -2.4969 \end{matrix}$	-3.1314	-3.3511	-3.3538	-3.3033
20cm	-0.4731	$\begin{matrix} -2.7088 \\ -2.3393 \end{matrix}$	-3.0558	-3.3076	-3.3246	-3.2825
15cm	-0.5583	$\begin{matrix} -2.8619 \\ -2.4357 \end{matrix}$	-2.5941	-2.9094	-3.1176	-3.1970

TABELA 6.11: Tensões normais na direção y segundo o eixo horizontal da abertura, para análise elastoplástica (MPa):

Nó esp.	1	8	15	20	23	25
100cm	-	-	-	-	-	-
75cm	-	-	-	-	-	-
50cm	-43.241	$\begin{matrix} -31.460 \\ -11.248 \end{matrix}$	-9.6467	-8.7575	-8.2490	-7.9338
36cm	-47.015	$\begin{matrix} -37.938 \\ -11.671 \end{matrix}$	-10.121	-9.0099	-8.4001	-8.0320
25cm	-51.819	$\begin{matrix} -45.256 \\ -11.795 \end{matrix}$	-10.629	-9.2624	-8.5503	-8.1301
20cm	-55.251	$\begin{matrix} -49.582 \\ -11.879 \end{matrix}$	-10.930	-9.4362	-8.6665	-8.2117
15cm	-63.938	$\begin{matrix} -55.923 \\ -12.401 \end{matrix}$	-10.736	-10.096	-9.2506	-8.6511

TABELA 6.12: Tensões normais na direção x segundo o eixo vertical da abertura, para análise elastoplástica (em MPa):

Obs: os valores referentes às espessuras de 100cm e 75cm correspondem à análise elástica pois não houve plastificação do domínio.

Nó esp.	7	14	19	22	24	26
100cm	-3.5019	$\frac{-14.688}{-3.8285}$	-3.4869	-3.4151	-3.3366	-3.2642
75cm	-5.2438	$\frac{-14.758}{-3.7431}$	-3.5149	-3.5027	-3.3832	-3.3035
50cm	-7.4178	$\frac{-14.484}{-3.5838}$	-3.5612	-3.5391	-3.4532	-3.3628
36cm	-8.3846	$\frac{-13.876}{-3.3962}$	-3.5748	-3.5823	-3.4970	-3.4012
25cm	-7.2284	$\frac{-12.397}{-3.0684}$	-3.5731	-3.6180	-3.5367	-3.4375
20cm	-7.7647	$\frac{-12.394}{-3.1159}$	-3.6574	-3.6767	-3.5856	-3.4797
15cm	-32.107	$\frac{-27.353}{-5.8998}$	-3.0179	-3.4629	-3.6021	-3.5610

TABELA 6.13: Momentos Fletores (em KNm) e Esforços Normais (em KN) no revestimento, por metro de comprimento:

Seção esp.	1/8 elast. N	1/8 elast. M	1/8 plast. N	1/8 plast. M
100cm	-28025.	-1486.1	-	-
75cm	-23767.	-715.36	-	-
50cm	-18699.	-242.50	-18675.	-245.43
36cm	-15176.	-96.928	-15291.	-98.033
25cm	-11817.	-34.980	-12135.	-34.184
20cm	-10122.	-19.326	-10483.	-18.896
15cm	- 8604.	-9.5259	- 8990.	-15.027

Seção esp.	7/14 elast. N	7/14 elast. M	7/14 plast. N	7/14 plast. M
100cm	- 9095.	+932.15	-	-
75cm	- 7500.	+445.96	-	-
50cm	- 5465.	+147.64	- 5476.	+147.21
36cm	- 3977.	+59.736	- 4007.	+59.305
25cm	- 2421.	+27.113	- 2453.	+26.919
20cm	- 1949.	+15.739	- 2016.	+15.430
15cm	- 2605.	+0.7881	- 4460.	-8.9117

TABELA 6.14: Nós que se plastificaram na análise plástica:

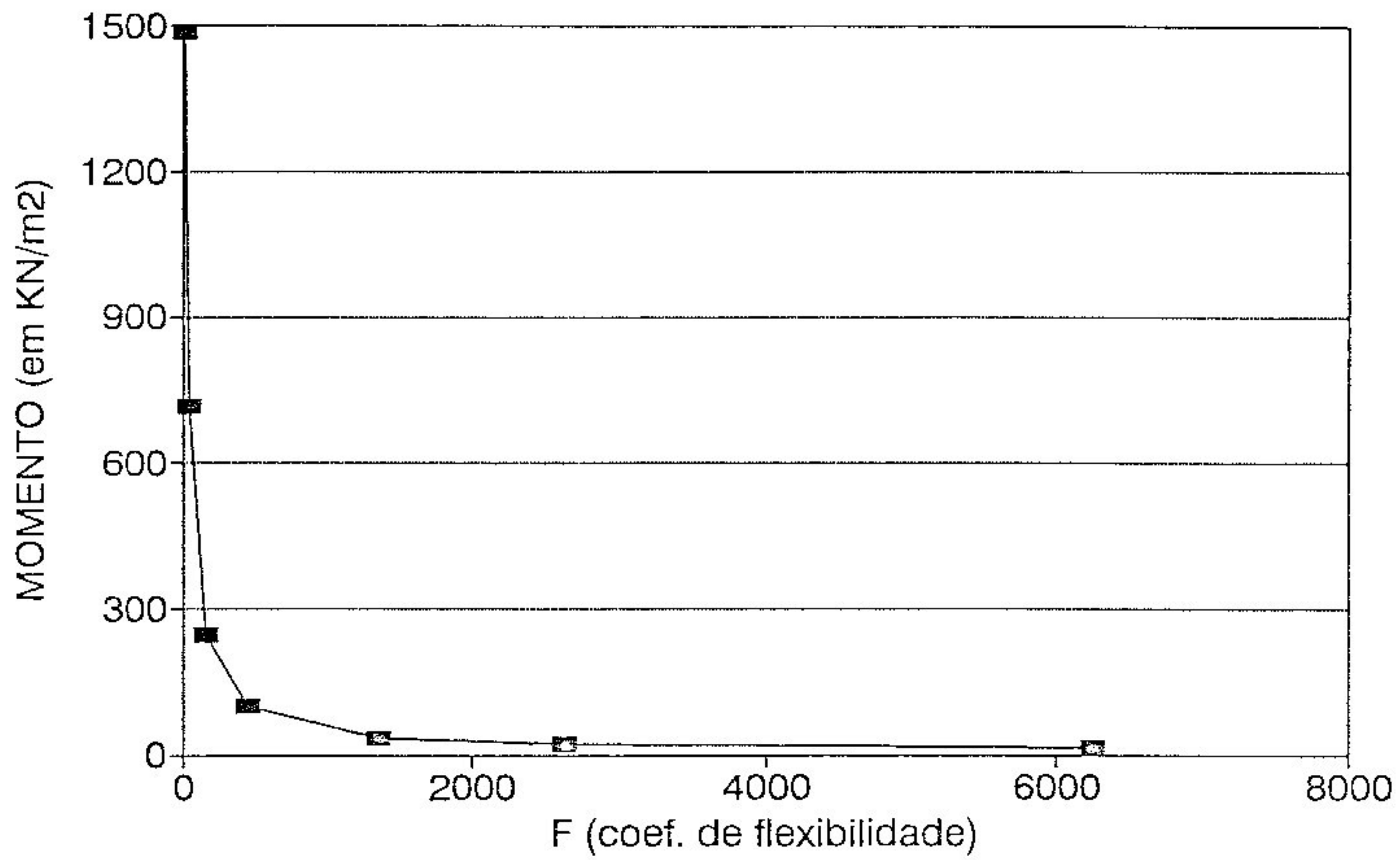
esp.	Nós plastificados							
100cm	-							
75cm	-							
50cm	9	10	11					
36cm	8	9	10	11				
25cm	8	9	10	11				
20cm	8	9	10	11	12	17	18	
15cm	8	9	10	11	12	17	18	21

A variação máxima dos esforços axiais é em torno de 226%, diminuindo à medida que a espessura do revestimento diminui. O momento fletor também diminui neste sentido tendendo a se anular para pequenas espessuras. Pode-se, então, escolher uma espessura adequada para o revestimento onde as tensões sejam compatíveis com a resistência do material empregado.

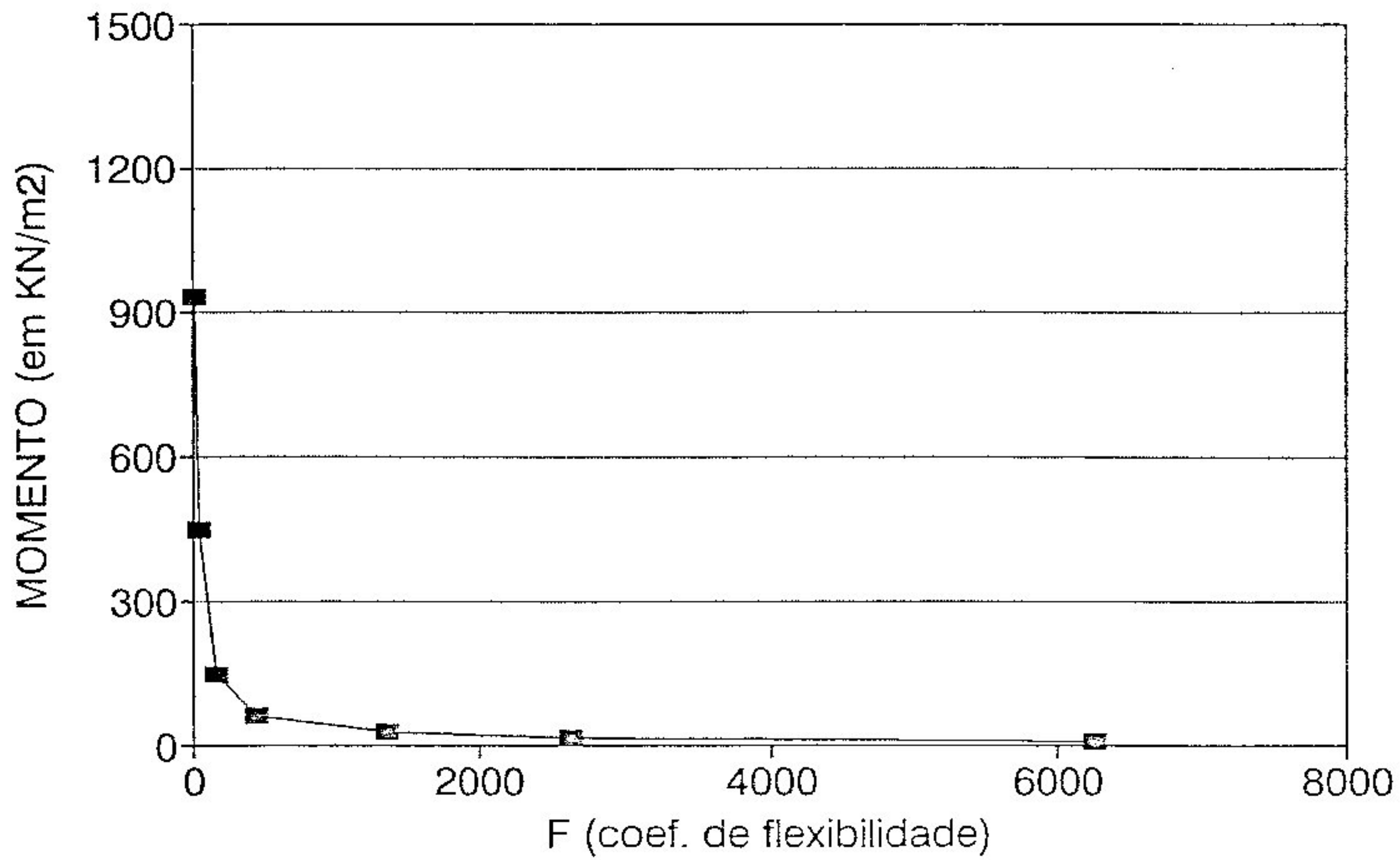
Pode-se construir um gráfico do momento fletor ou da força normal em função do coeficiente de flexibilidade, que, segundo Einstein e Schwartz (1979), é dado por:

$$F = \frac{E_s R^3 (1 - \mu_c)}{E_c A_c (1 - \mu_s)}$$

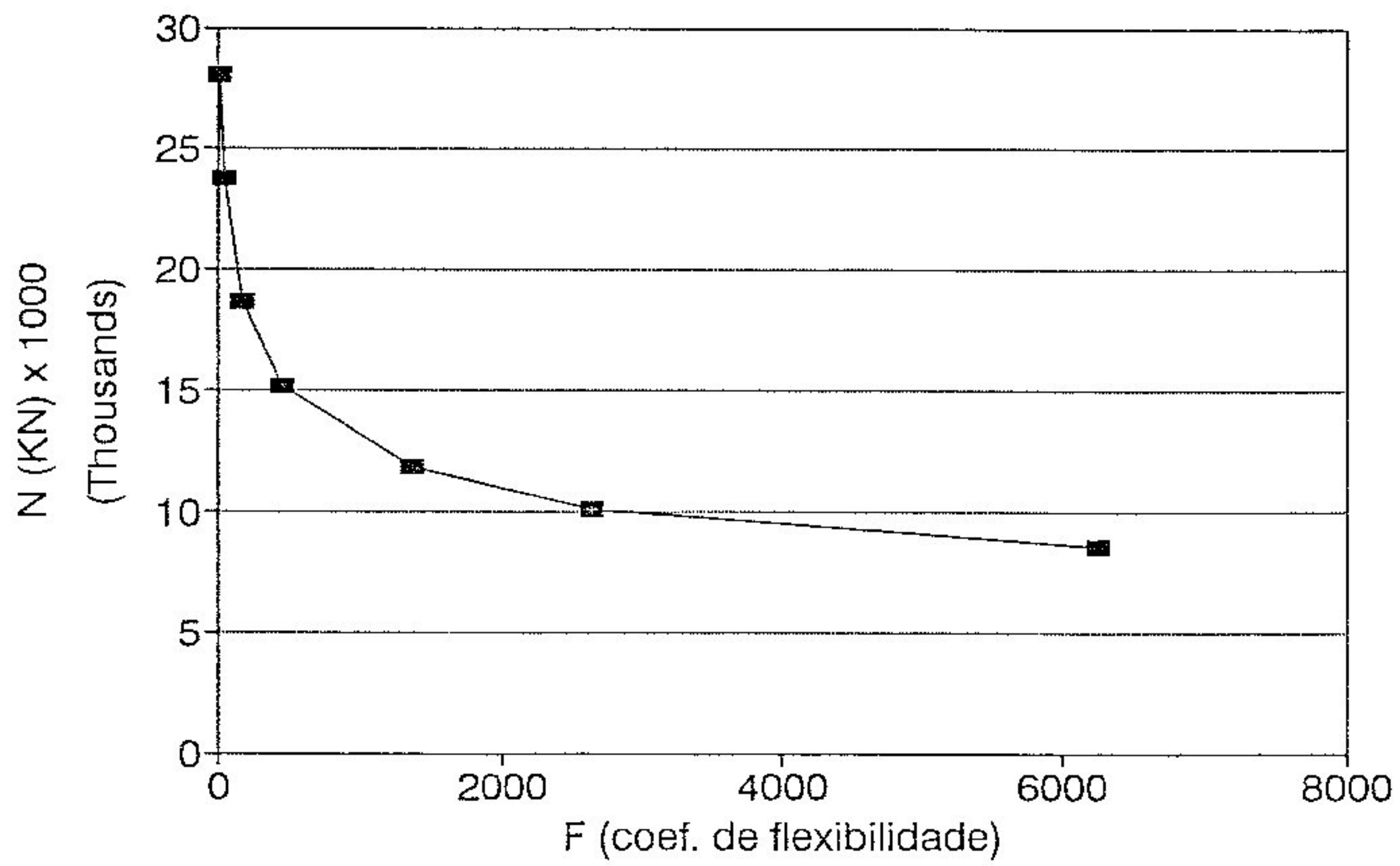
MOMENTO x FLEXIBILIDADE SECAO 1/8 (ANALISE PLASTICA)



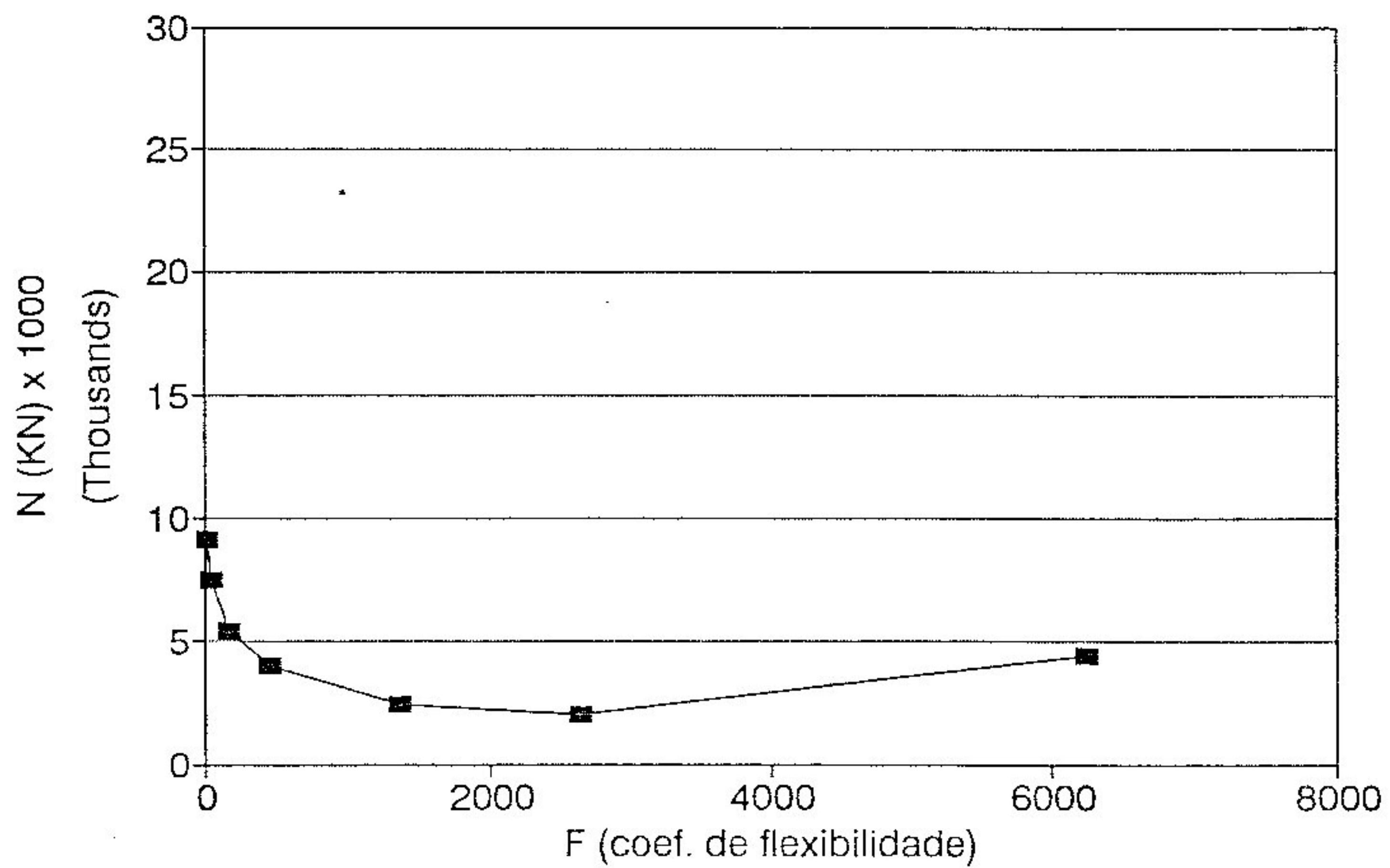
MOMENTO x FLEXIBILIDADE SECAO 7/14 (ANALISE PLASTICA)



FORÇA NORMAL x FLEXIBILIDADE SECAO 1/8 (ANALISE PLASTICA)



FORÇA NORMAL x FLEXIBILIDADE SECAO 7/14 (ANALISE PLASTICA)



2º EXEMPLO:

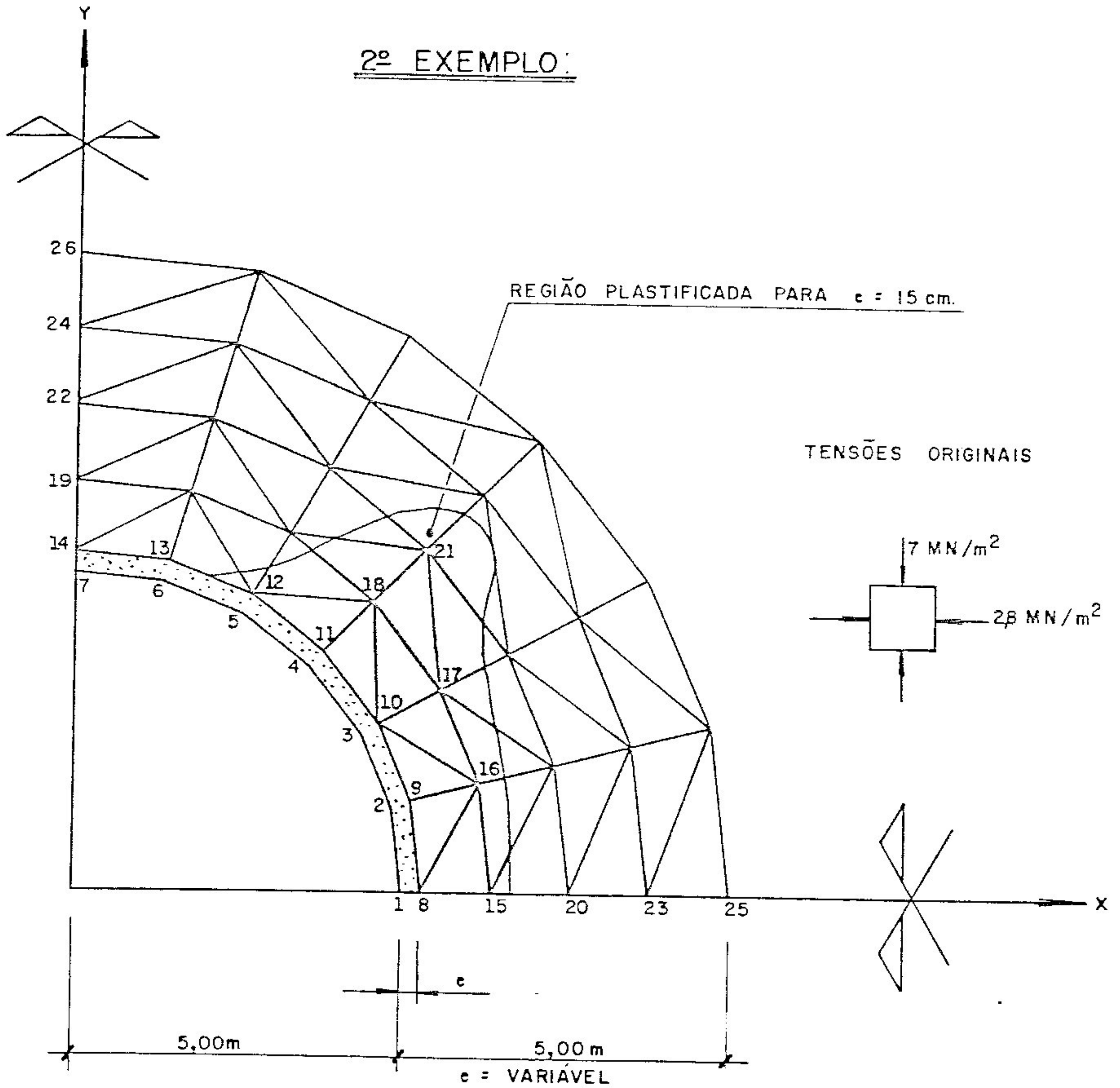


figura 6.2

DADOS				
	MÓDULO DE ELASTICIDADE (MPa)	COEFICIENTE DE POISSON	COESÃO (MPa)	ÂNGULO DE ATRITO INTERNO
CONCRETO	21100	0,15	-	-
ROCHA	3500	0,20	2,0	30°

3º EXEMPLO

Túnel superficial não revestido com seção em ferradura:
Estimativa da tensão horizontal in-situ a partir de resultados das medidas de convergência.

O terceiro exemplo analisa um túnel não revestido, com seção em ferradura, conforme a figura 6.3. A partir das medidas de convergência obtidas no início dos serviços de escavação, pode-se verificar se o valor das tensões originais no maciço, utilizado no cálculo preliminar, foi estimado corretamente. Sendo a tensão vertical correspondente ao peso do maciço acima da abertura, a tensão horizontal é estimada através da retro-análise. Neste caso utilizaram-se apenas os eixos de convergência horizontais que passam pelos nós (5) e (9-11).

TABELA 6.15: Deslocamentos horizontais (em mm) para diversos valores da tensão inicial σ_h^0 (em kN/m^2).

σ_h^0 Nó	3	5	7	9	Nós plasti- ficados
-1700	- 1.056	- 1.600	- 1.382	- 0.668	1 2 8 10
-1800	- 1.133	- 1.715	- 1.481	- 0.718	1 2 8 10
-1900	- 1.239	- 1.859	- 1.603	- 0.768	1 2 8 10
-2000	- 1.304	- 1.961	- 1.691	- 0.829	1 2 8 10
-2050	- 1.349	- 2.026	- 1.747	- 0.859	1 2 8 10
-2100	- 1.482	- 2.168	- 1.865	- 0.943	1 2 3 8 10
-3000	- 2.478	- 3.533	- 2.972	- 1.566	1 2 3 5 6 8 10

As medidas de convergência efetuadas em diversas seções de um túnel em rocha, construído para aproveitamento hidrelétrico, apresentaram os valores de:

Metade da altura da seção (ponto 5): 4mm

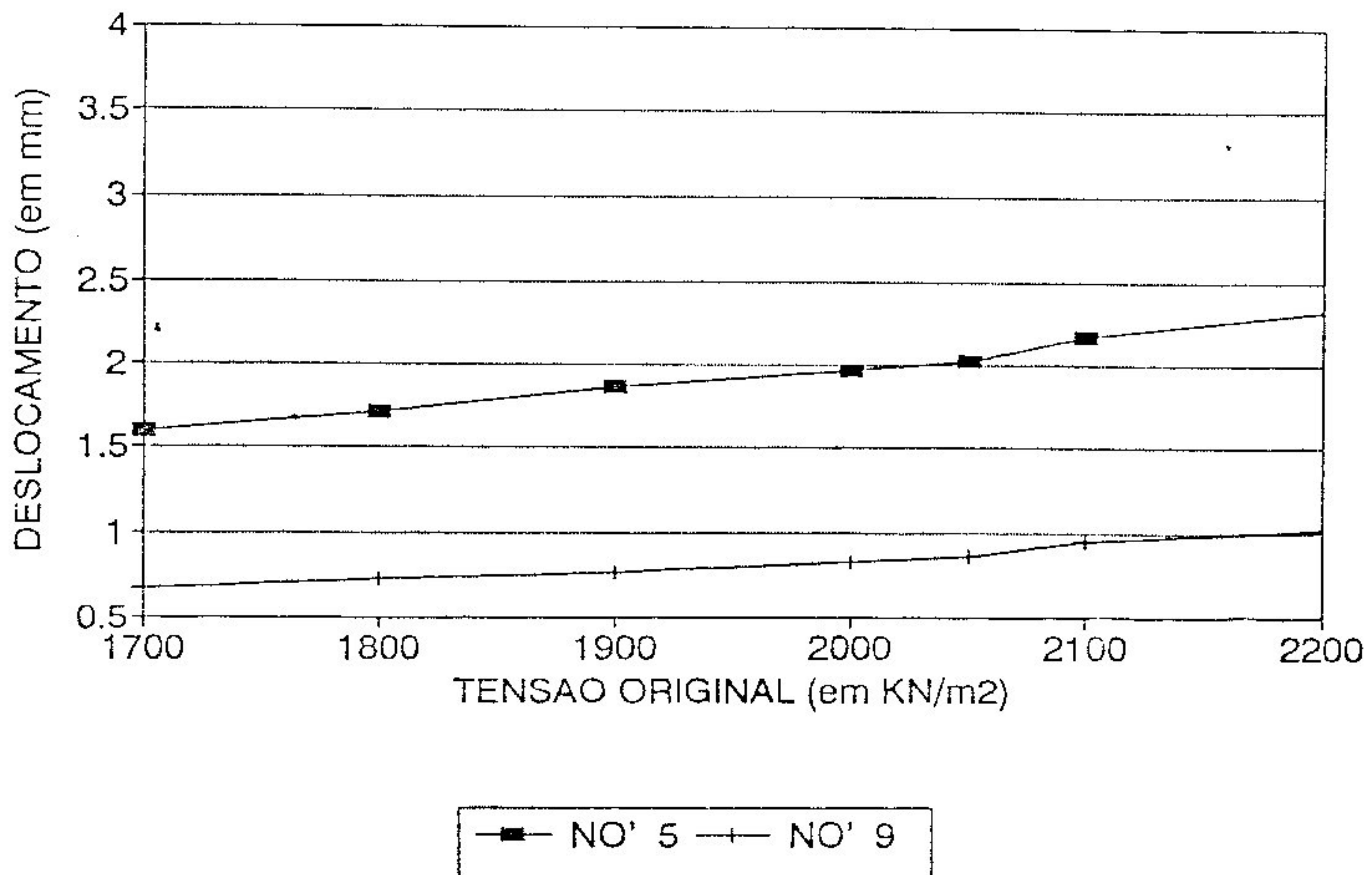
Base da seção (ponto 9) : 2mm

Como as medidas são de convergência, e a geometria da seção e o carregamento são simétricos em relação ao eixo vertical, os deslocamentos dos respectivos pontos correspondem à metade destas medidas. Então, a tensão horizontal in situ mais provável é: $\sigma'_{h0} = -2050 \text{ kN/m}^2$.

Observa-se que as tensões nas vizinhanças dos cantos da abertura (nó 9) foram obtidas sem nenhum refinamento da malha, confirmando uma das características do Método dos Elementos de Contorno, ou seja, ser ele adequado a analisar problemas com concentração de tensões.

Foi considerada a tensão vertical $\sigma'_{v0} = -1060 \text{ kN/m}^2$ que corresponde a um peso médio de 40m de altura de maciço.

TENSAO ORIGINAL HORIZONTAL X DESLOCAMENTO



3º EXEMPLO:

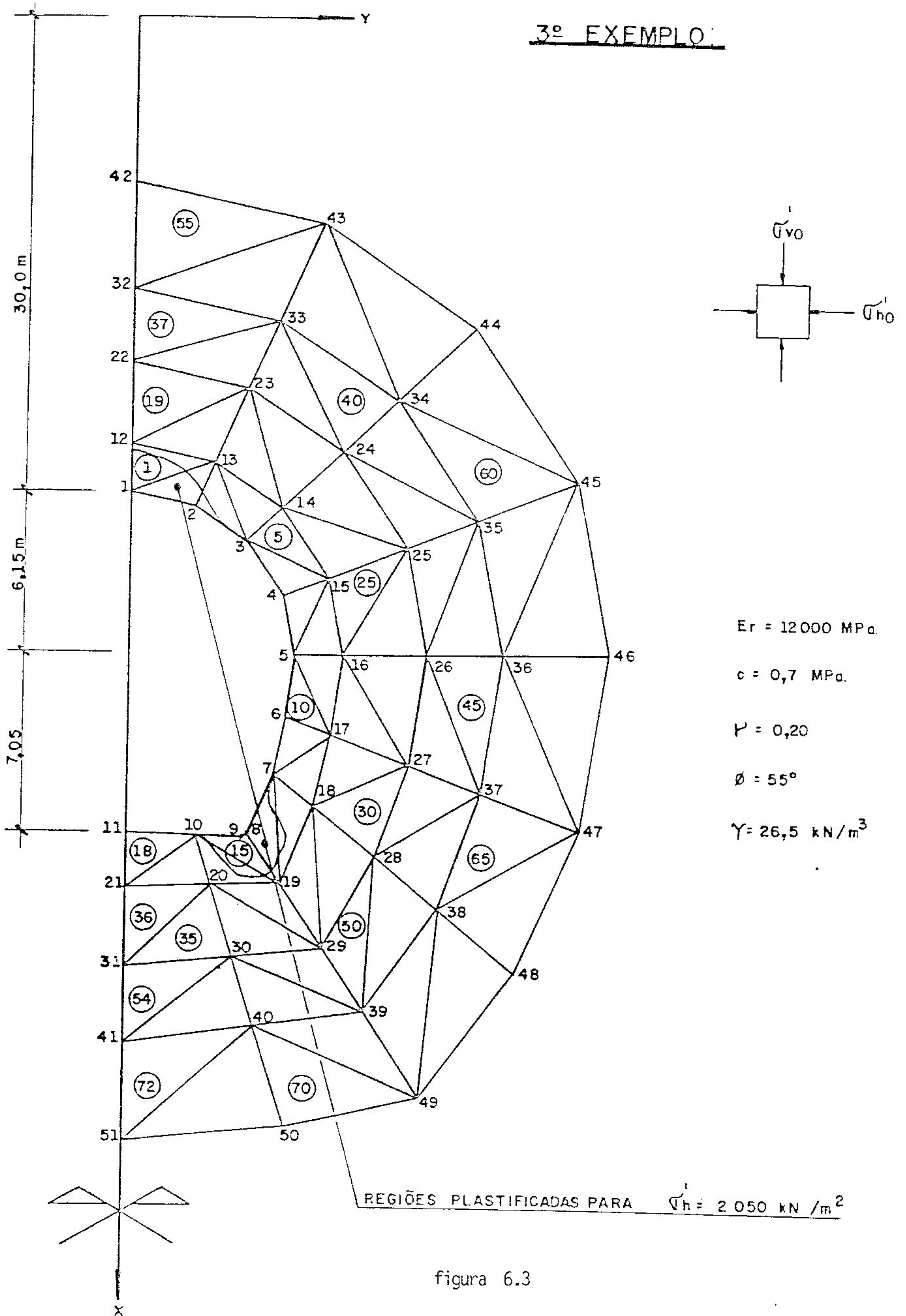


figura 6.3

4^o EXEMPLO:

Túnel superficial revestido com carregamento na superfície livre (seção elíptica)

Este exemplo se refere a um túnel revestido de forma elíptica, superficial e com carregamento uniformemente distribuído na superfície, conforme a figura 6.4. Incluiu-se, ainda, a tensão inicial correspondente ao peso do solo acima da abertura. Não houve plastificação do maciço, observando-se que os valores dos esforços normais e dos momentos fletores estão em níveis compatíveis com a resistência dos materiais empregados. Portanto, uma galeria construída com esta forma em concreto projetado, apresenta vantagens econômicas significativas.

Tabela 6.16: Tensões normais no revestimento, para análise elástica (kN/m²):

Nó esp.	1	3	5	10	12	14
20 cm	- 501.2	- 907.0	-2250.5	-1777.1	- 884.0	-1306.6
15 cm	- 818.7	-1102.4	-2362.4	-1911.8	-1034.1	-1356.5
10 cm	-1353.0	-1698.3	-2637.6	-2268.6	-1662.9	-1504.1

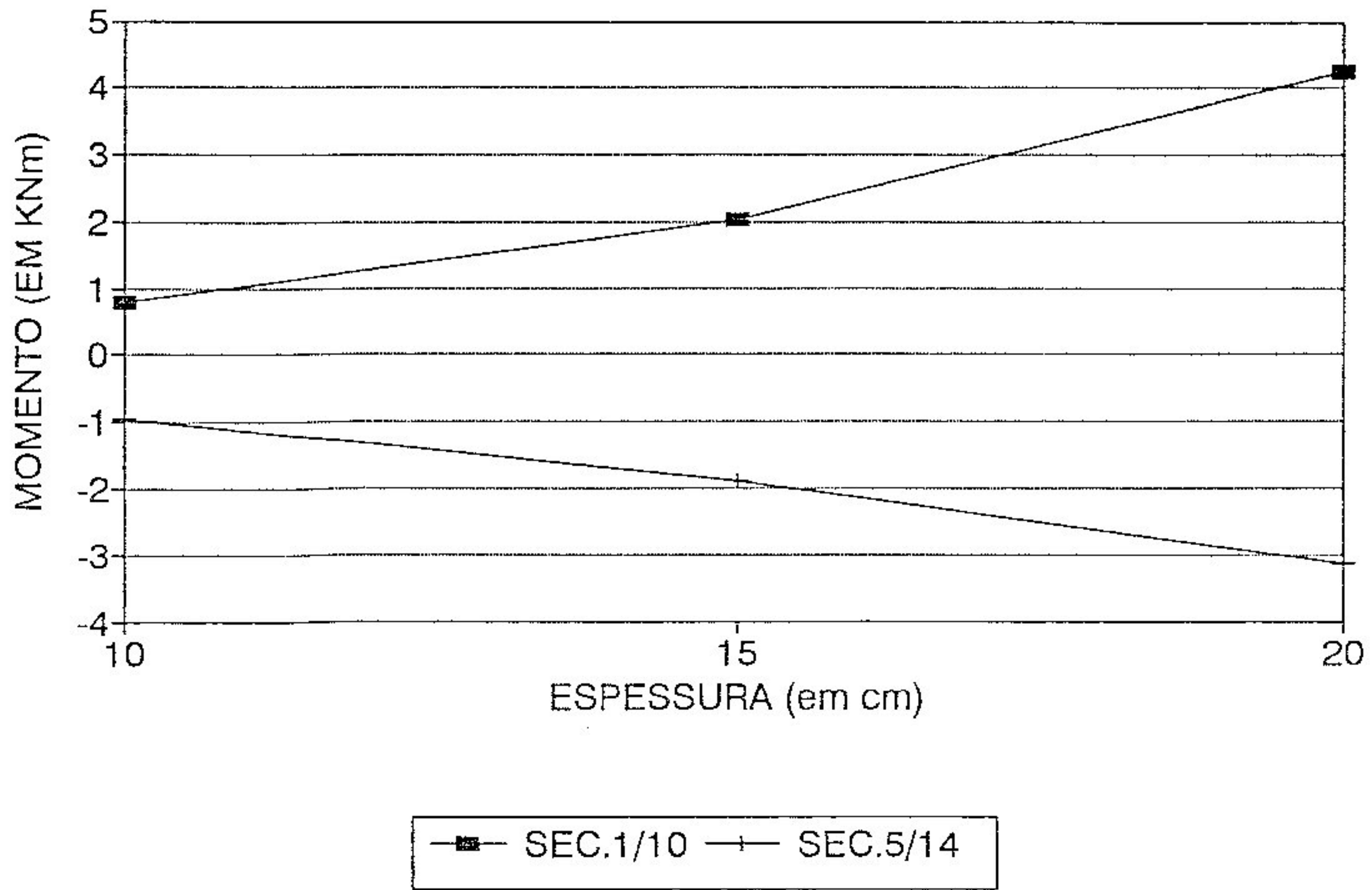
Nó esp.	7	8	9	16	17	18
20 cm	- 350.1	+ 0.10	- 192.2	- 446.0	- 276.8	-1057.3
15 cm	- 466.5	+ 0.10	- 366.3	- 519.7	- 293.1	-1105.5
10 cm	- 853.0	- 116.3	- 665.4	- 910.6	- 441.3	-1290.0

Tabela 6.17: Esforços Normais N (em kN) e Momentos Fletores M (em kNm) no revestimento:

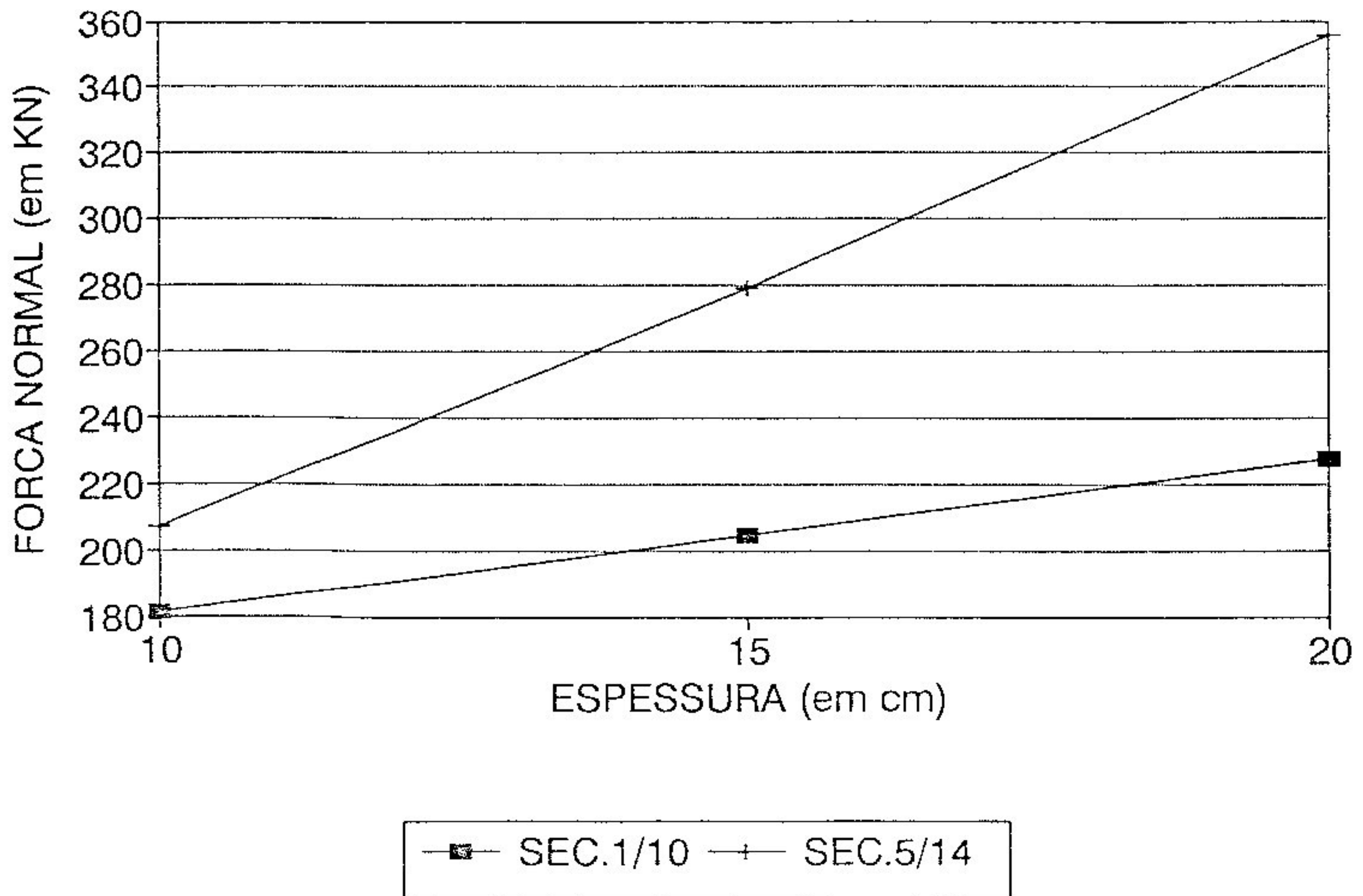
SEÇÃO esp.		1/10	3/12	5/14	7/16	8/17	9/18
20cm	N	- 227.8	- 179.1	- 355.7	- 79.6	- 27.7	- 125.0
	M	+ 4.253	- 0.077	- 3.146	+ 0.320	+ 0.923	+ 2.884
15cm	N	- 204.8	- 160.3	- 278.9	- 74.0	- 22.0	- 110.4
	M	+ 2.050	- 0.128	- 1.886	+ 0.100	+ 0.550	+ 1.386
10cm	N	- 181.1	- 168.1	- 207.1	- 88.2	- 27.9	- 97.8
	M	+ 0.783	- 0.030	- 0.945	+ 0.048	+ 0.271	+ 0.521

As seções mais solicitadas são as (5/14) e (1/10). Nota-se que à medida que a espessura do revestimento diminui, os momentos fletores e os esforços normais também diminuem. Observou-se também que, para estes parâmetros de materiais, somente um valor bastante elevado do carregamento provocaria a plastificação do maciço.

MOMENTO FLETOR X ESPESSURA DO REVESTIMENTO



FORÇA NORMAL X ESPESSURA DO REVESTIMENTO



4º EXEMPLO:

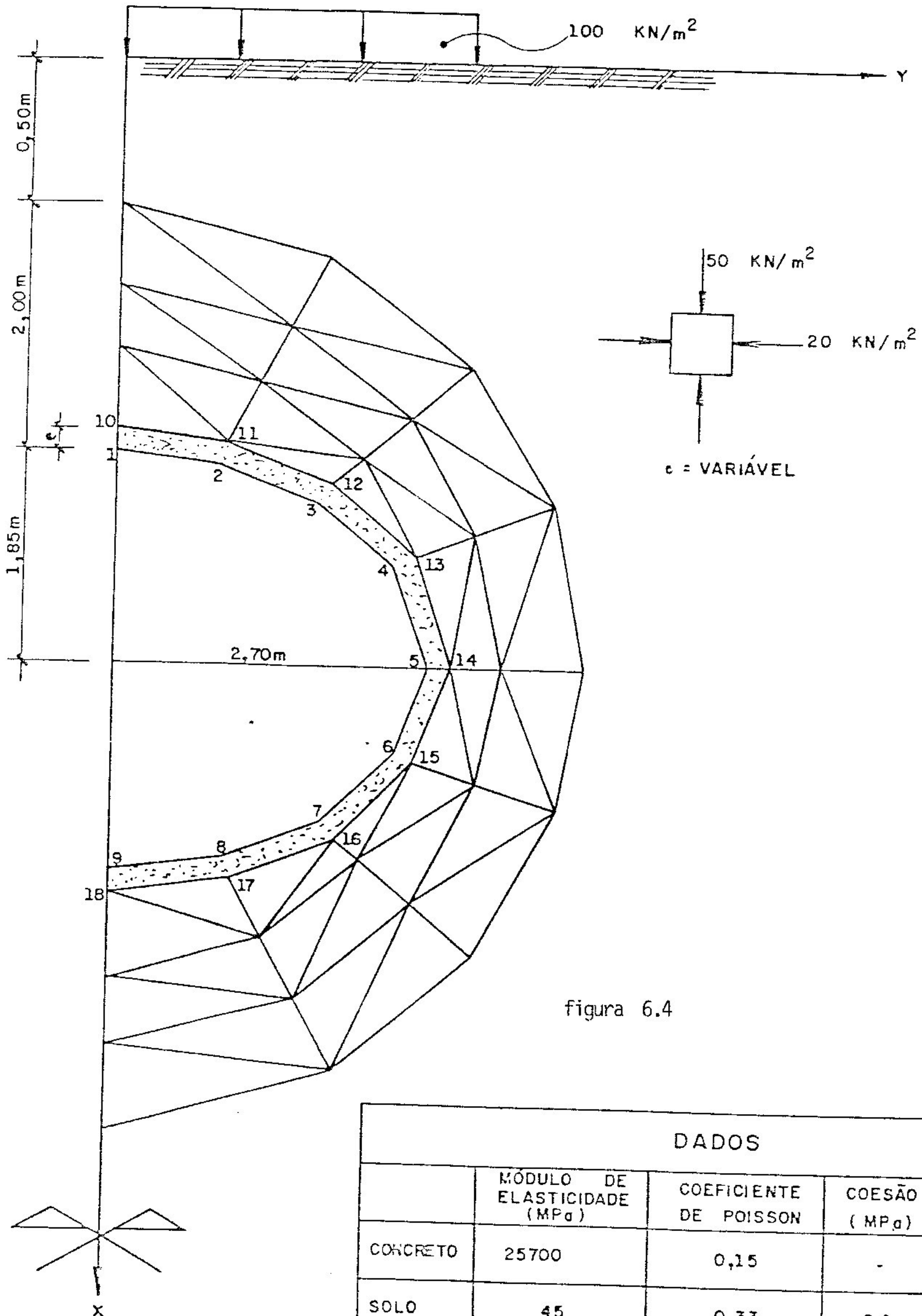


figura 6.4

DADOS				
	MÓDULO DE ELASTICIDADE (MPa)	COEFICIENTE DE POISSON	COESÃO (MPa)	ÂNGULO DE ATRITO INTERNO
CONCRETO	25700	0,15	-	-
SOLO	45	0,33	0,1	20º

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES:

A análise de túneis pelo Método dos Elementos de Contorno apresenta uma vantagem fundamental sobre outros métodos conhecidos, que é a necessidade de se discretizar somente o contorno da abertura e, eventualmente, o contorno do revestimento. Isto é válido para problemas elásticos lineares onde a tensão inicial é introduzida no contorno. Neste trabalho foi utilizada a análise elastoplástica, razão pela qual houve a necessidade de se discretizar o domínio. Por outro lado a discretização necessária é aquela que apenas contenha a região plastificada. As regiões foram bem menores que aquelas utilizadas no Método dos Elementos Finitos exigindo um volume de entrada de dados significativamente menor.

A análise de túneis com seção transversal em ferradura, como apresentado no 3^o exemplo, permite encontrar as tensões nas vizinhanças dos cantos da abertura sem nenhuma dificuldade adicional. A concentração de tensões ali existente não exige um refinamento localizado da malha, como é comum no Método dos Elementos Finitos.

Outra conclusão importante está relacionada com a rapidez obtida nas respostas dos problemas. O tempo de

processamento em um equipamento PCAT-486 nunca foi maior que três minutos, sendo a maior demora relacionada com as maiores regiões plastificadas. O resultado de uma análise elástica é imediato.

O processo das tensões iniciais mostrou-se adequado para a análise elastoplástica, com a possibilidade do emprego dos critérios de escoamento adequados aos materiais envolvidos.

Deve-se ressaltar também o resultado obtido no 2^o exemplo para a interação entre o revestimento e o maciço. Este fato, que é a principal característica da filosofia de construção de túneis conhecida como NATM, fica bastante clara com os valores obtidos.

As soluções fundamentais utilizadas permitiram o emprego de um modelo bastante simples. Para os túneis superficiais, o limite do semi-plano só foi discretizado na região da aplicação das cargas e os resultados apresentaram uma precisão equivalente a modelos mais refinados para o Método dos Elementos Finitos.

Como sugestão para futuras pesquisas indica-se a análise viscoplástica como uma continuação natural desta dissertação. O acompanhamento das deformações nas paredes da abertura em função do tempo, é um fator importante para um projeto econômico de túneis em rocha. Também a pesquisa de modelos de plastificação não-associativos pode ter uma enorme aplicação em obras subterrâneas, sendo um campo pouco explorado.

A análise do Estado Plano de Deformação Completa, já implementado no programa original, pode ser outra fonte de pesquisa para comparação de resultados. Estudo de túneis com maciços idealizados por modelo descontínuo e o estudo da influência das ancoragens na protensão das regiões plastificadas são sugestões que podem ser avaliadas.

A implementação de técnicas que evitem a discretização da região plastificada, como os processos da Dupla e Múltipla Reciprocidade ou a utilização de integrais particulares, é outra sugestão possível.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, M.S.S. (1977) - Análise Elasto-Plástica de Túneis pelo Método dos Elementos Finitos - Dissertação de Mestrado COPPE - UFRJ - Rio de Janeiro-RJ

ATKINSON, J.H. e BRANSBY, P.L. (1977) - The Mechanics of Soils: An Introduction to Critical State Soil Mechanics - McGraw-Hill Book Company, U.K.

BAKER, L.E. , SHANDU, R. S. e SHIEH, W.Y. (1969) - Application of Elastoplastic Analysis in Rock Mechanics by Finite Element Method - Proc. 11th. Symp. Rock Mech. (Somerton, ed.) University of California, Bekerley: 237-251

BANERJEE, P.K. e BUTTERFIELD, R. (1981) - Boundary Element Methods in Engineering Science - McGraw-Hill Book Company U.K.

BANERJEE, P.K. e CATHIE, D.N. (1980) - A Direct Formulation and Numerical Implementation of the Boundary Element Method for Two Dimensional Problems of Elastoplasticity - Int. Journal Mech. Sci., 22: 233-245

BANERJEE, P.K. e DAVIES, T.G. (1984) - Advanced Implementation of Boundary Element Methods for Three Dimensional Problems of Elastoplasticity and Viscoplasticity - Devel. Boundary Elem. Meth., vol.3, (Banerjee and Mukherjee eds.), Elsevier: 1-26

BANERJEE, P.K. e RAVEENDRA, S.T. (1986) - Advanced Boundary Element Analysis of Two and Three Dimensional Problems of Elastoplasticity - Int. Journal Num. Meth. Engng., vol.23: 985-1002

BANERJEE, P.K.; HENRY, D.P. e RAVEENDRA, S.T. (1989) - Advanced Inelastic Analysis of Solids by the Boundary

Element Method - Int. Journal Mech.Sci., 31(4): 309-322

BIENIAWSKI, Z.T. (1984) - Rock Mechanics Design in Mining and Tunnelling - A.A. Balkema, Publishers, The Netherlands

BRADY, B.H.G. e BRAY, J.W. (1978) - The Boundary Element Method for Determining Stress and Displacements Around Long Openings in a Triaxial Stress Field - Int. Journal Rock Mech. Min. Sci. 15: 21-28

BRADY, B.H.G. (1979) - A Direct Formulation of the Boundary Element Method of Stress Analysis for Complete Plane Strain Int. Journal Rock Mech. Min. Sci. 16: 235-244

BRADY, B.H.G. (1987) - Boundary Element and Linked Methods for Underground Excavation Design - Analytical and Computational Methods in Engineering Rock Mechanics (Brown ed.): 164-204

BREBBIA, C.A. (1984) - The Boundary Element Method for Engineers - Pentech Press - London

BREBBIA, C.A. e WALKER, S. (1980) - Boundary Element Techniques in Engineering - Newnes Butterworths - London

BREBBIA, C.A. ; TELLES, J.C.F. ; WROBEL, L.C. (1984) - Boundary Element Techniques - Springer-Verlag - Berlin, Heidelberg

BUI, H.D. (1978) - Some Remarks About the Formulation of Three Dimensional Thermoelastoplastic Problems by Integral Equations - Int. Journal Solids Structures, 14: 935-939

CARRER, J.A.M. e TELLES, J.C.F. (1989) - The Boundary Element Method Applied to the Solution of Elastoplastic Problems with the Use of Implicit Procedures - BETECH89, (Brebbia and Zamani eds.): 35-46

CHAUDONNERET, M. (1978) - On the Discontinuity of the Stress Vector in the Boundary Integral Equation Method for Elastic Analysis - Proc. 1st. Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods, (Brebbia ed.), Southampton: 185-194

CHEN, W.F. e ZHANG, H. - (1991) - Structural Plasticity - Springer-Verlag, New York

CODA, H.B. (1990) - Análise de Vibração Livre de Meios Elásticos Bidimensionais pelo Método dos Elementos de Contorno - Dissertação de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos, USP

CROUCH, S.L. e STARFIELD, A.M. (1983) - Boundary Element Methods in Solid Mechanics - George Allen & Unwin, London

CRUISE, T.A. (1977) - Mathematical Foundations of the Boundary Integral Equation in Solid Mechanics - Report N. AFOSR-TR-77-1002, Pratt and Whitney Aircraft Group

CRUISE, T.A. (1973) - Application of the Boundary-Integral Equation Solution Method in Solid Mechanics - Variational Methods in Engineering (Brebbia and Tottenham eds.): 9.1 a 9.29

CRUISE, T.A. (1972) - Application of the Boundary Integral Equation Solution Method in Solid Mechanics. In Variational Methods in Engineering, (Brebbia and Tottenham eds.), Southampton University Press., vol.2: 9/1-9/29

DANSON, D.J. (1981) - A Boundary Element Formulation of Problems in Linear Isotropic Elasticity with Body Forces - Proc. 3rd. Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods, (Brebbia ed.), California, Irvine: 105-122

DESAI, C.S. e SIRIWARDANE, H.J. (1984) - Constitutive Laws for Engineering Materials - Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey

DETOURNAY, E. e FAIRHURST, C. (1987) - Two-Dimensional Elastoplastic Analysis of a Long, Cylindrical Cavity Under Non-hydrostatic Loading - Int. Journal Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. vol.24, N.4: 197-211

DYKA, C.T. e MILLWATER, H.R. (1989) - Formulation and Integration of Continuous and Discontinuous Quadratic Boundary Elements for Two Dimensional Potential and Elastostatics - Computers and Structures, vol.31, N.4: 495-504

EINSTEIN, H.H. e SCHWARTZ, C.W. (1979) - Simplified Analysis for Tunnel Supports - Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, vol.105, N. GT4, April

GÁJOV, F.D. (1980) - Problemas de Contorno - Editorial Mir Moscow

GOODMAN, R.E. (1966) - On the Distribution of Stresses Around Circular Tunnels in Nonhomogeneous Rocks - Proc. 1st Congr. Int. Soc. Rock Mech., Lisbon, 249-255

GOODMAN, R.E. (1989) - Introduction to Rock Mechanics - 2nd. ed. - John Wiley & Sons - New York

HENDRON, A.J. e AYER, A.K. (1972) - Stresses and Strains Around a Cylindrical Tunnel in an Elasto-Plastic Material With Dilatancy - Technical Report N. 10 - Omaha District, Corps of Engineers Omaha, Nebraska 68102

HENRY Jr, D.P. e BANERJEE, P.K. (1988) - A New BEM Formulation for Two and Three Dimensional Elastoplasticity Using Particular Integrals - Int.Journal Num. Meth. Engng.

HOEK, E. e BROWN, E.T. (1980) - Underground Excavations in Rock - Institute of Mining and Metallurgy, London

HÖEG, K. (1968) - Stresses Against Underground Structural Cylinders - Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE - vol. 94 - N. SM4 - July

HUANG, Q.P. e DU, Q.H. (1989) - An Improved Formulation for Domain Stress Evaluation by Boundary Element Method in Elastoplastic Problems - Acta Mech. Solida Sinica: 19-24

KUMAR, V. e MUKHERJEE, S. (1977) - A Boundary Integral Equation Formulation for Time-Dependent Inelastic Deformation in Metals - Int. Journal Mech. Sci., 19: 713-724

LOVE, A.E.H. (1944) - A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity - Dover, New York

MAYNE, P.W. e KULHAWY, F.H. (1982) - K_0 -OCR Relationship in Soil, ASCE Journal of Geotechn. Engng., vol.108, GT6: 851-872

MENDELSON, A. (1968) - Plasticity: Theory and Application - Macmillan, New York

MENDELSON, A. (1973) - Boundary Integral Methods in Elasticity and Plasticity - Report N. NASA TN D-7418, NASA

MENDELSON, A. e ALBERS, L.U. (1975) - Application of Boundary Integral Equations to Elastoplastic Problems. In Boundary Integral Equation Method: Computational Applications in Applied Mechanics, (Cruse and Rizzo ed.), ASME, New York: 47-84

MIKHLIN, S.G. (1965) - The Problem of the Minimum of a

Quadratic Functional - Holden-Day, Inc. - San Francisco

MINDLIN, R.D. (1936) - Force a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid. *Physics*, 7: 195-202

MORJARIA, M. e MUKHERJEE, S. (1980) - Improved Boundary Integral Equation Method for Time Dependent Inelastic Deformation in Metals - *Int. Journal Num. Meth. Engng.*, 15: 97-111

MUKHERJEE, S. (1977) - Corrected Boundary Integral Equations in Planar Thermoelastoplasticity - *Int. Journal Solids Structures*, 13: 331-335

MUKHERJEE, S. e KUMAR, V. (1978) - Numerical Analysis of Time Dependent Inelastic Deformation in Metallic Media Using the Boundary Integral Equation Method - *Trans. ASME, Journal Appl. Mech.*, 45: 785-790

MUKHERJEE, S. (1982) - *Boundary Element Methods in Creep and Fracture* - Applied Science Publishers, London

NAYAK, G.C. e ZIENKIEWICZ, O. C. (1972) - Elasto-Plastic Stress Analysis: a Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening - *Int. Journal Num. Meth. Engng.*, 5: 113-135

NEVES, A.C. e BREBBIA, C.A. (1991) - The Multiple Reciprocity Boundary Element Method in Elasticity: A New Approach for Transforming Domain Integrals to the Boundary- *Int. Journal Num. Meth. Engng.*, vol. 31: 709-727

OHKAMI, T. ; ICHIKAWA, Y. e KAWAMOTO, T. (1991) - A Boundary Element Method for Identifying Orthotropic Material Parameters - *Int. Journal Num. Analyt. Meth. in Geomechanics*, vol. 15: 609-625

ORTIGÃO, J.A.R. (1992) - Introdução à Mecânica dos Solos dos Estados Críticos - LTC Editora - Rio de Janeiro

OWEN, D.R.J. e HINTON, E. (1980) - Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice - Pineridge Press Limited - Swansea, U.K.

PARTON, V.Z. e PERLIN, P.I. (1982) - Integral Equations in Elasticity - Mir Publishers - Moscow

PECK, R.B. ; HENDRON, A.J.Jr e MOHRAZ, B. (1972) - State of the Art of Soft Ground Tunnelling - Proc. Am.Conf. on Rapid Excavation and Tunnelling, vol.1

PETROVSKI, I. (1976) - Lecciones de Teoria de las Ecuaciones Integrales - Editorial Mir - Moscou

POLAT, M.U. e DOKAINISH, M.A. (1989) - An Automatic Subincrementation Scheme for Accurate Integration of Elasto-Plastic Constitutive Relations - Computers and Structures, vol. 31, N.3: 339-347

POLIZZOTTO, C. (1988) - An Energy Approach to the Boundary Element Method. Part I: Elastic Solids, N.2: 167-184
Part II: Elastic-Plastic Solids, N.3: 263-276 - Comp. Meth. Applied Mech. Engng., 69

RABCEWICZ, L.V. (1964-65) - The New Austrian Tunnelling Method - Water Power, November: 453-457 ; December: 511-515
January: 19-24

RABCEWICZ, L.V. (1973) - Principles of Dimensioning the Supporting System for the New Austrian Tunnelling Method - Water Power, March: 88-93

RABCEWICZ, L.V. (1979) - Princípios e Modos de Aplicação do

Novo Método Austríaco de Abertura de Túneis com Atenção Particular às Condições Geotécnicas e Topográficas Brasileiras - Tradução N. 08 - Associação Brasileira de Geologia de Engenharia

REYES, S.F. e DEERE, D.U. (1966) - Elastic-Plastic Analysis of Underground Openings by the Finite Element Method - Proc. 1st Int. Congr. Rock Mechanics, Lisbon: 477-483

RIBEIRO, G.O. (1992) - Sobre a Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Flexão de Placas Usando as Hipóteses de Reissner - Tese de Doutorado - Escola de Engenharia de São Carlos - USP

RICCARDELLA, P.C. (1973) - An Implementation of the Boundary Integral Technique for Planar Problems in Elasticity and Elastoplasticity - Report N. SM-73-10, Dept. Mech. Engng., Carnegie Mellon University, Pittsburg

RIZZO, F.J. (1967) - An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics - Quart. Appl. Math., 25: 83-95

RIZZO, F.J. (1975) - The Boundary-Integral Equation Method: A Modern Computational Procedure in Applied Mechanics - In Boundary Integral Equation Method: Computational Applications in Applied Mechanics, (Cruse and Rizzo ed.), ASME, New York: 1-5

RIZZO, F.J. e SHIPPY, D.J. (1977) - An Advanced Boundary Integral Equation Method for Three Dimensional Thermoelasticity - Int. Journal Num. Meth. Engng., 11: 1753-1768

SALEH, K.; BALLIVY, G.; BOUDIGNON, D. e CHARETTE, F. (1989) - Application of the Boundary Element Method for Monitoring Underground Cavities - Conf. Proc. BEM XI, Advances in

Boundary Elements: Stress Analysis (Brebbia and Connor eds.), Comp. Mech. Publ., Southampton, 3: 225-236

SALENÇON, J. (1977) - Applications of the Theory of Plasticity in Soil Mechanics - John Wiley & Sons - Chichester

SANTIAGO, J.A.F. (1987) - Implementação do Método dos Elementos de Contorno para Elasticidade Bidimensional com o Uso de Microcomputadores - Dissertação de Mestrado - COPPE Universidade Federal do Rio de Janeiro

SILVA, N.A. (1988) - Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Análise de Placas sobre Fundações Elásticas - Dissertação de Mestrado - Escola de Engenharia de São Carlos - USP

SOUSA, L.R. (1986) - Estruturas Subterrâneas - Curso de Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil pela Universidade do Porto - LNEC - Portugal

STASA, F.K. (1985) - Applied Finite Element Analysis for Engineers - CBS College Publishing

SWOBODA, G. ; MERTZ, W. e BEER, G. (1987) - Rheological Analysis of Tunnel Excavations by Means of Coupled Finite Element (FEM) - Boundary Element (BEM) Analysis - Int. Journal Num. Anal. Meth. Geom., vol.11: 115-129

SWEDLOW, J.L. e CRUISE, T.A. (1971) - Formulation of Boundary Integral Equations for Three Dimensional Elastoplastic Flow - Int. Journal Solids Structures, 7: 1673-1683

SZÉCHY, K. (1970) - Traité de Construction des Tunnels - Dunod - Paris

TEIXEIRA de FREITAS, J.A. (1989) - Variational Theorems in Elastoplastic Boundary Element Analysis - Proc. 4th. Int. Conf. Boundary Element Technology (Brebbia and Zaman eds.) Canada, III: 65-79

TEIXEIRA, M.C. (1986) - Análise Simplificada para Túneis Flexíveis - Relatório Interno: M.Klein Engenharia Ltda - Belo Horizonte-MG

TEIXEIRA. M.C. ; PAULA, F.A. e RIBEIRO, G.O. (1991) - Análise Elastoplástica de Túneis pelo Método dos Elementos de Contorno - Anais do I^o Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional - Belo Horizonte, MG - pag. 538-546

TELLES, J.C.F. e BREBBIA, C.A. (1979) - On The Application of the Boundary Element Method to Plasticity - Appl. Math. Modelling, 3: 466-470

TELLES, J.C.F. e BREBBIA, C.A. (1980) - The Boundary Element Method in Plasticity - Proc. 2nd. Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods, (Brebbia ed.) University of Southampton: 295-317

TELLES J.C.F. e BREBBIA, C.A. (1980) - Elastoplastic Boundary Element Analysis - Proc. Europe - U.S. Workshop on Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, (Wunderlich et alli eds.), Ruhr-University Bochum, Germany: 403-434

TELLES, J.C.F. e BREBBIA, C.A. (1981) - New Developments in Elastoplastic Analysis. Proc. 3rd. Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods, (Brebbia ed.), California, Irvine: 350-370

TELLES, J.C.F. e BREBBIA, C.A. (1982) - Viscoplastic Analysis - Proc. 4th. Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods, (Brebbia ed.), Southampton,

England: 326-348

TELLES, J.C.F. (1983) - The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems - Springer-Verlag - Berlin, Heidelberg

TERZAGHI, K. e PECK, R.B. (1976) - Mecanica de Suelos en la Ingenieria Practica - Editorial El Ateneo S.A. - Barcelona

TIMOSHENKO, S.P. e GOODIER, J.N. (1970) - Teoria da Elasticidade - 3^a ed. Guanabara Dois - Rio de Janeiro

VARADARAJAN, A. ; SHARMA, K.G. e SINGH, R.B. (1987) - Elasto-Plastic Analysis of an Underground Opening by FEM and Coupled FEBEM - Int.Journal Num. Anal. Meth. Geom., vol.11: 475-487

VENTURINI, W.S. e BREBBIA, C.A. (1981) - The Boundary Element Method for the Solution of No-Tension Materials - In Boundary Element Methods, (Brebbia ed.), Springer-Verlag

VENTURINI, W.S. (1983) - Boundary Element Method in Geomechanics - Springer-Verlag - Berlin, Heidelberg

ZIENKIEWICZ, O.C. , VALLIAPPAN, S. e KING, I.P. (1968) - Stress Analysis of Rock as a No-Tension Material - Geotechnique, 18 (1), 55-66

ZIENKIEWICZ, O.C. , VALLIAPPAN, S. e KING, I.P. (1969) - Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems, Initial Stress Finite Element Approach. - Int. Journal Num. Meth. Engng., 1: 75-100

APÊNDICE

$$\frac{\partial u_{11}^c}{\partial x_1} = \frac{K_d}{R^2} \left\{ \left[3(3-4\nu) - 8(1-\nu)^2 \right] R_1 - 2\bar{x} + \right. \\ \left. + \frac{\left[4\bar{x}R_1 + 12c\bar{x} - 2(3-4\nu)R_1^2 \right]}{R^2} R_1 - \frac{16c\bar{x} R_1^3}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial u_{12}^c}{\partial x_1} = \frac{K_d}{R^2} r_2 \left\{ 4(1-\nu)(1-2\nu) - (3-4\nu) + \right. \\ \left. + \frac{\left[4\bar{x}(2c+\bar{x}) - 2(3-4\nu)R_1 r_1 \right]}{R^2} - \frac{16c\bar{x} R_1^2}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial u_{21}^c}{\partial x_1} = \frac{K_d}{R^2} r_2 \left\{ -4(1-\nu)(1-2\nu) - (3-4\nu) - \right. \\ \left. - \frac{\left[4\bar{x}(2c+\bar{x}) + 2(3-4\nu)R_1 r_1 \right]}{R^2} + \frac{16c\bar{x} R_1^2}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial u_{22}^c}{\partial x_1} = \frac{K_d}{R^2} \left\{ - \left[-(3-4\nu) + 8(1-\nu)^2 \right] R_1 + 2\bar{x} - \frac{\left[4\bar{x}r_2^2 + 2c\bar{x} + 2R_1(3-4\nu)r_2^2 \right]}{R^2} + \frac{16c\bar{x} R_1 r_2^2}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial u_{11}^c}{\partial x_2} = \frac{K_d}{R^2} r_2 \left\{ 8(1-\nu)^2 - (3-4\nu) + \frac{2 \left[-2c\bar{x} + (3-4\nu)R_1^2 \right]}{R^2} + \frac{16c\bar{x} R_1^2}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial u_{12}^c}{\partial x_2} = \frac{K_d}{R^2} \left\{ 4(1-\nu)(1-2\nu)R_1 + (3-4\nu)r_1 - \frac{\left[-12c\bar{x} + 2(3-4\nu)R_1 r_1 \right]}{R^2} - \frac{16c\bar{x} R_1^3}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial u_{21}^c}{\partial x_2} = \frac{K_d}{R^2} \left\{ -4(1-\nu)(1-2\nu)R_1 - (3-4\nu)r_1 + \frac{\left[4c\bar{x}R_1 + 2(3-4\nu)r_1 r_2^2 \right]}{R^2} - \frac{16c\bar{x}R_1 r_2^2}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial u_{22}^c}{\partial x_2} = \frac{K_d}{R^2} r_2 \left\{ 8(1-\nu)^2 - 3(3-4\nu) + \frac{2 \left[6c\bar{x} + (3-4\nu)r_2^2 \right]}{R^2} - \frac{16c\bar{x} r_2^2}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{111}^c}{\partial x_1} = - \frac{K_S}{R^2} \left\{ (1-2\nu) + \frac{2 \left[2c\bar{x} + R_1 (3R_1 + 2\bar{x} - (3\bar{x}+c)(1-2\nu)) \right]}{R^2} \right. \\ \left. - \frac{8 \left[2c\bar{x}r_2^2 + R_1 (R_1 (R_1^2 + 2c\bar{x}) + 4\bar{x}r_2^2\nu) \right]}{R^4} - \frac{96c\bar{x}R_1^2 r_2^2}{R^6} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{121}^c}{\partial x_1} = - \frac{K_S}{R^4} r_2 \left\{ 2r_1 - 4\nu (R_1 + 2\bar{x}) + \right. \\ \left. + \frac{8R_1 \left[2\bar{x}R_1 + 6c\bar{x} - \bar{x}^2 + c^2 - 2\bar{x}R_1(1-2\nu) \right]}{R^2} - \frac{96c\bar{x}R_1^3}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{221}^c}{\partial x_1} = - \frac{K_S}{R^2} \left\{ 3(1-2\nu) + \frac{2 \left[2c^2 - r_2^2 + R_1 (4c - (\bar{x}+3c)(1-2\nu)) \right]}{R^2} \right. \\ \left. + \frac{8 \left[r_2^2 (2c\bar{x} + R_1^2 - 2\bar{x}R_1(1-2\nu)) - 2c^2 R_1^2 \right]}{R^4} - \frac{96c\bar{x}R_1^2 r_2^2}{R^6} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{112}^c}{\partial x_1} = - \frac{K_S}{R^4} r_2 \left\{ 2(2\bar{x} - R_1)(1-2\nu) - 4(c + 3\bar{x}) + \right. \\ \left. + \frac{8 \left[2\bar{x}r_2^2 + R_1 (6c\bar{x} - \bar{x}^2 + c^2 - 2\bar{x}R_1(1-2\nu)) \right]}{R^2} - \frac{96c\bar{x}R_1 r_2^2}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{122}^c}{\partial x_1} = - \frac{K_S}{R^2} \left\{ (1-2\nu) + \frac{2 \left[2c\bar{x} + r_2^2 + R_1 (2\bar{x} - (7\bar{x}+c)(1-2\nu)) \right]}{R^2} \right. \\ \left. - \frac{8 \left[2c\bar{x}r_2^2 + R_1 (R_1 (r_2^2 + 2c\bar{x}) + 2\bar{x}r_2^2 - 2\bar{x}R_1^2(1-2\nu)) \right]}{R^4} - \frac{96c\bar{x}R_1^2 r_2^2}{R^6} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{222}^c}{\partial x_1} = -\frac{K_S}{R^4} r_2 \left\{ 4\nu (3R_1 + 2\bar{x}) - 2(7R_1 + 2\bar{x}) + \right. \\ \left. + \frac{8R_1 [8c\bar{x} - r_2^2 + 2c^2 + 4\bar{x}R_1(1-\nu)]}{R^2} - \frac{96c\bar{x}R_1^3}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{111}^c}{\partial x_2} = -\frac{K_S}{R^4} r_2 \left\{ 2(7\bar{x} + c)(1 - 2\nu) + \right. \\ \left. + \frac{4 [2R_1(6c\bar{x} + R_1^2) - 4\bar{x}r_2^2(1-2\nu)]}{R^2} - \frac{96c\bar{x}R_1r_2^2}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{121}^c}{\partial x_2} = -\frac{K_S}{R^2} \left\{ (1-2\nu) - \frac{2 [\bar{x}^2 - 2c\bar{x} - c^2 + (2\bar{x}R_1 + r_2^2)(1-2\nu)]}{R^2} \right. \\ \left. + \frac{8 [r_2^2 (\bar{x}^2 - c^2 - 2c\bar{x} + 2\bar{x}R_1(1-2\nu)) - 2c\bar{x}R_1^2]}{R^4} + \right. \\ \left. + \frac{96c\bar{x}R_1^2r_2^2}{R^6} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{221}^c}{\partial x_2} = -\frac{K_S}{R^4} r_2 \left\{ -2(5 - 6\nu)r_1 + \right. \\ \left. + \frac{8 [R_1(r_2^2 + 2c^2 - 4c\bar{x}) - 2cr_2^2 + 2\bar{x}r_2^2(1-2\nu)]}{R^2} + \frac{96c\bar{x}R_1r_2^2}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{112}^c}{\partial x_2} = - \frac{K_S}{R^2} \left\{ -(1-2\nu) - \frac{2 \left[c^2 + 6c\bar{x} - \bar{x}^2 + (r_2^2 - 2\bar{x}R_1)(1-2\nu) \right]}{R^2} \right. \\ \left. - \frac{8r_2^2 \left[c^2 - \bar{x}^2 + 12c\bar{x} - 2\bar{x}R_1(1-2\nu) \right]}{R^4} + \frac{96c\bar{x}R_1^2 r_2^2}{R^6} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{122}^c}{\partial x_2} = - \frac{K_S}{R^4} r_2 \left\{ 2(3\bar{x} + c)(1-2\nu) + 4R_1 + \right. \\ \left. + \frac{8R_1 \left[6c\bar{x} + r_2^2 - 2\bar{x}R_1(1-2\nu) \right]}{R^2} - \frac{96c\bar{x}R_1 r_2^2}{R^4} \right\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{222}^c}{\partial x_2} = - \frac{K_S}{R^2} \left\{ -3(1-2\nu) - \frac{2 \left[3r_2^2 - 4c\bar{x} - 2c^2 - (2\bar{x}R_1 + 3r_2^2)(1-2\nu) \right]}{R^2} \right. \\ \left. + \frac{8 \left[r_2^2 (r_2^2 - 2c^2 - 4c\bar{x} - 2\bar{x}R_1(1-2\nu)) - 2c\bar{x}R_1^2 \right]}{R^4} + \right. \\ \left. + \frac{96c\bar{x}R_1^2 r_2^2}{R^6} \right\}$$