

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia de Estruturas

**ANÁLISE DE ESTIMADOR DE ERRO BASEADO
EM TÉCNICA SUPERCONVERGENTE DE
RECUPERAÇÃO PARA O
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada como requisito parcial
para obtenção do Grau de Mestre
em Engenharia de Estruturas
por
Max de Castro Magalhães

Dezembro de 1994

Resumo

Este trabalho faz uma análise do estimador de erro proposto por Zienkiewicz e Zhu (1992) e implementado em um ambiente computacional para o Método dos Elementos Finitos de processo adaptativo $r-h$ global. O estimador apresenta convergência assintótica devido a um novo procedimento (*SPR*) superconvergente de recuperação de gradientes da solução. Uma segunda técnica de recuperação [Zienkiewicz e Zhu, 1987] é também descrita e utilizada para comparação através de exemplos da elasticidade plana.

Abstract

This work analyses the Zienkiewicz-Zhu error estimator (1992), implemented on a computational environment designed for the Finite Element applications which includes global r - h refinements. The estimator reaches an asymptotical convergence due to a new superconvergent recovery procedure (*SPR*) for gradients of the solution. Another recovery technique [Zienkiewicz and Zhu, 1987] is also described and used for comparison in plane elasticity examples.

Prefácio

Com a ajuda de Deus e das pessoas aqui mencionadas, chegamos ao final desta jornada. Não foi difícil, nem tampouco árduo o trabalho, se levarmos em conta o conhecimento obtido com os que já estão nos caminhos da ciência.

- À nossa família sempre a eterna gratidão.
- Agradeço à Comunidade de Evangelização “Nova Aliança”, pelo acolhimento nos bons e maus momentos.
- Agradeço, de maneira especial, ao Prof. Estevam Barbosa de Las Casas, orientador competente, paciente e amigo, pois sem a sua ajuda, a caminhada seria mais longa.
- Agradeço aos Professores: Aécio Freitas Lira, Ana Maria G. Figueiredo, Marco Antônio M Vecci, Marco Túlio Corrêa Faria, Ramon Pereira da Silva e todos os outros do DEEs pelos ensinamentos recebidos e tratamento cordial.
- Agradeço aos funcionários, sempre solícitos e compreensivos; aos colegas do LAMEC, pelo saudável ambiente de trabalho.
- Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro e ao LNCC/CNPQ pelo sistema SDP.

Sumário

Lista de Tabelas	v
Lista de Figuras	ix
1 - Introdução	1
1.1 - O Método dos Elementos Finitos.....	1
1.2 - Adaptatividade.....	2
1.2.1 - Considerações Iniciais.....	2
1.2.2 - Estratégias Adaptativas.....	3
1.3 - O Problema Modelo.....	5
1.4 - Estimativa <i>a posteriori</i> do Erro de Discretização.....	6
1.5 - Objetivo do Trabalho.....	9
2 - Estimador de Erro <i>a posteriori</i> Z^2	10
2.1 - Introdução.....	10
2.2 - Norma do Erro e Estratégias de Refinamento.....	11
2.3 - O Estimador Z^2 Original.....	14
2.4 - O Estimador Z^2 Modificado.....	16
2.5 - A Convergência das Soluções Recuperadas.....	20
3 - Aspectos Computacionais	23
3.1 - Introdução.....	23
3.2 - O Ambiente SDP.....	23
3.3 - Estimador Z^2 Modificado - Implementação.....	25
3.3.1 - Considerações Iniciais.....	25
3.3.2 - Estrutura do Processador - MADA.....	26
4 - Resultados Numéricos	29
4.1 - Introdução.....	29
4.2 - Exemplos.....	30
4.2.1 - Flexão de uma Viga Uniformemente Carregada.....	30
4.2.2 - Placa Quadrada com Furo Quadrado.....	53

4.2.3 - Viga Curta em Balanço.....	61
5 - Conclusões e Sugestões	69
5.1 - Conclusões.....	69
5.2 - Sugestões.....	70
Apêndice	71
Bibliografia	74

Lista de Tabelas

4.1:	Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 1 para elementos lineares e quadráticos.....	32
4.2:	Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 1 para elementos lineares e quadráticos... ..	33
4.3:	Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 1 para elementos lineares e quadráticos.....	33
4.4:	Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 2 para elementos lineares e quadráticos.....	34
4.5:	Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 2 para elementos lineares e quadráticos.....	35
4.6:	Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 2 para elementos lineares e quadráticos.....	35
4.7:	Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 3 para elementos lineares e quadráticos.....	36
4.8:	Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 3 para elementos lineares e quadráticos.....	37
4.9:	Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 3 para elementos lineares e quadráticos.....	37
4.10:	Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 4 para elementos lineares e quadráticos.....	38
4.11:	Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 4 para elementos	

lineares e quadráticos.....	39
4.12: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 4 para elementos lineares e quadráticos.....	39
4.13: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 5 para elementos lineares e quadráticos.....	40
4.14: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 5 para elementos lineares e quadráticos.....	41
4.15: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 5 para elementos lineares e quadráticos.....	41
4.16: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 6 para elementos lineares e quadráticos.....	42
4.17: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 6 para elementos lineares e quadráticos.....	43
4.18: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 6 para elementos lineares e quadráticos.....	43
4.19: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 7 para elementos lineares e quadráticos.....	44
4.20: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 7 para elementos lineares e quadráticos.....	45
4.21: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 7 para elementos lineares e quadráticos.....	46
4.22: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 8 para elementos lineares e quadráticos.....	46
4.23: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 8 para elementos lineares e quadráticos.....	47

4.24: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 8 para elementos lineares e quadráticos.....	48
4.25: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 9 para elementos lineares e quadráticos.....	48
4.26: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 9 para elementos lineares e quadráticos.....	49
4.27: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 9 para elementos lineares e quadráticos.....	50
4.28: Exemplo 4.2.1 - Convergência da solução obtida pelo método dos elementos finitos e das soluções recuperadas para elementos de 3 nós.....	51
4.29: Exemplo 4.2.1 - Convergência da solução obtida pelo método dos elementos finitos e das soluções recuperadas para elementos de 6 nós.....	51
4.30: Exemplo 4.2.2 - Erro relativo na norma de energia para uma sequência uniforme de refinamentos h (elementos de 3 nós).....	55
4.31: Exemplo 4.2.2 - Erro relativo na norma de energia para uma sequência uniforme de refinamentos h (elementos de 6 nós).....	55
4.32: Exemplo 4.2.2 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo $r-h$ global utilizando Z^2 original (elementos de 3 nós).....	55
4.33: Exemplo 4.2.2 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo $r-h$ global utilizando Z^2 <i>modificado</i> (elementos de 3 nós).....	56
4.34: Exemplo 4.2.2 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo $r-h$ global utilizando Z^2 original (elementos de 6 nós).....	56
4.35: Exemplo 4.2.2 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo $r-h$ global utilizando Z^2 <i>modificado</i> (elementos de 6 nós).....	56
4.36: Exemplo 4.2.3 - Erro relativo na norma de energia para	

uma sequência uniforme de refinamentos h (elementos de 3 nós).....	63
4.37: Exemplo 4.2.3 - Erro relativo na norma de energia para uma sequência uniforme de refinamentos h (elementos de 6 nós).....	63
4.38: Exemplo 4.2.3 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo $r-h$ global utilizando Z^2 original (elementos de 3 nós).....	63
4.39: Exemplo 4.2.3 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo $r-h$ global utilizando Z^2 <i>modificado</i> (elementos de 3 nós).....	63
4.40: Exemplo 4.2.3 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo $r-h$ global utilizando Z^2 original (elementos de 6 nós).....	64
4.41: Exemplo 4.2.3 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo $r-h$ global utilizando Z^2 <i>modificado</i> (elementos de 6 nós).....	64

Lista de Figuras

2.1: Computação dos valores nodais superconvergentes.....	17
3.1: Refinamento global h em três etapas.....	25
3.2: Diagrama de estrutura do processador MADA.....	27
4.1: Exemplo de aplicação 4.2.1.....	30
4.2: Forças nas extremidades.....	31
4.3: Exemplo 4.2.1 - Exemplo 4.2.1 - Malha inicial.....	32
4.4: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 1.....	32
4.5: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 1.....	33
4.6: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 1.....	34
4.7: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 2.....	34
4.8: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 2.....	35
4.9: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 2.....	36
4.10: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 3.....	36
4.11: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 3.....	37
4.12: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 3.....	38
4.13: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 4.....	38
4.14: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 4.....	39
4.15: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 4.....	40
4.16: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 5.....	40
4.17: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 5.....	41
4.18: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 5.....	42
4.19: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 6.....	42
4.20: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 6.....	43
4.21: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 6.....	44
4.22: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 7.....	45
4.23: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 7.....	45
4.24: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 7.....	46
4.25: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 8.....	47
4.26: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 8.....	47
4.27: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 8.....	48
4.28: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 9.....	49
4.29: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 9.....	49

4.30: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 9.....	50
4.31: Exemplo 4.2.1 - Convergência das derivadas na norma de energia. (três nós).....	51
4.32: Exemplo 4.2.1 - Convergência das derivadas na norma de energia (seis nós).....	52
4.33: Exemplo 4.2.1 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 - <i>forma original</i>) e θ_2 (Estimador Z^2 - <i>modificado</i>) para elementos triangulares de três nós.....	53
4.34: Exemplo 4.2.1 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 - <i>forma original</i>) e θ_2 (Estimador Z^2 - <i>modificado</i>) para elementos triangulares de seis nós.....	53
4.35: Exemplo de aplicação 4.2.2.....	54
4.36: Exemplo 4.2.2 - Malha inicial (24 elementos).....	54
4.37: Exemplo 4.2.2 - Malhas (3 nós) geradas após adaptações r : (a) - Malha 3R-0H (Z^2 - <i>original</i>). (b) - Malha 3R-0H (Z^2 - <i>modificado</i>).....	54
4.38: Exemplo 4.2.2 - Malhas (6 nós) geradas após adaptações r : (a) - Malha 3R-0H (Z^2 - <i>original</i>). (b) - Malha 3R-0H (Z^2 - <i>modificado</i>).....	55
4.39: Exemplo 4.2.2 - Convergência das soluções em refinamento h uniforme (3 nós): η_1 (exato). η_2 (P. local). η_3 (SPR).....	57
4.40: Exemplo 4.2.2 - Convergência das soluções em refinamento h uniforme (6 nós). η_1 (exato). η_2 (P. local). η_3 (SPR).....	57
4.41: Exemplo 4.2.2 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos lineares: η_1 (exato). η_2 (P.local).....	58
4.42: Exemplo 4.2.2 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos lineares: η_1 (exato). η_2 (SPR).....	58
4.43: Exemplo 4.2.2 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos quadráticos: η_1 (exato). η_2 (P. local).....	58
4.44: Exemplo 4.2.2 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos quadráticos: η_1 (exato). η_2 (SPR)....	59
4.45: Exemplo 4.2.2 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 - <i>forma original</i>) e θ_2 (Estimador Z^2 - <i>modificado</i>) para elementos triangulares de três nós.....	59

4.46:	Exemplo 4.2.2 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 - <i>forma original</i>) e θ_2 (Estimador Z^2 - <i>modificado</i>) para elementos triangulares de seis nós.....	60
4.47:	Exemplo 4.2.2 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 - <i>forma original</i>) e θ_2 (Estimador Z^2 - <i>modificado</i>) para elementos triangulares de três nós.....	61
4.48:	Exemplo 4.2.2 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 - <i>forma original</i>) e θ_2 (Estimador Z^2 - <i>modificado</i>) para elementos triangulares de seis nós.....	61
4.49:	Exemplo de aplicação 4.2.3.....	61
4.50:	Exemplo 4.2.3 - Malha inicial.....	62
4.51:	Exemplo 4.2.3 - Malhas (3 nós) geradas após adaptações r : (a) - Malha 3R-0H (Z^2 - <i>original</i>). (b) - Malha 3R-0H (Z^2 - <i>modificado</i>).....	62
4.52:	Exemplo 4.2.3 - Malhas (6 nós) geradas após adaptações r : (a) - Malha 3R-0H (Z^2 - <i>original</i>). (b) - Malha 3R-0H (Z^2 - <i>modificado</i>).....	62
4.53:	Exemplo 4.2.3 - Convergência das soluções em refinamento h uniforme (3nós): η_1 (exato). η_2 (P. local). η_3 (SPR).....	65
4.54:	Exemplo 4.2.3 - Convergência das soluções em refinamento h uniforme (6 nós). η_1 (exato). η_2 (P. local). η_3 (SPR).....	65
4.55:	Exemplo 4.2.3 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos lineares: η_1 (exato). η_2 (P. local).....	65
4.56:	Exemplo 4.2.3 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos lineares: η_1 (exato). η_2 (SPR).....	65
4.57:	Exemplo 4.2.3 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos quadráticos: η_1 (exato). η_2 (P. local).....	66
4.58:	Exemplo 4.2.3 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos quadráticos: η_1 (exato). η_2 (SPR).....	66
4.59:	Exemplo 4.2.3 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 - <i>forma original</i>) e θ_2 (Estimador Z^2 - <i>modificado</i>) para elementos triangulares de três nós.....	67
4.60:	Exemplo 4.2.3 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 - <i>forma original</i>) e θ_2 (Estimador Z^2 - <i>modificado</i>) para elementos triangulares de seis nós.....	67

4.61: Exemplo 4.2.3 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 - <i>forma original</i>) e θ_2 (Estimador Z^2 - <i>modificado</i>). (3 nós).....	68
4.62: Exemplo 4.2.3 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 - <i>forma original</i>) e θ_2 (Estimador Z^2 - <i>modificado</i>). (6 nós).....	68

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste capítulo é fornecer ao leitor uma idéia geral das técnicas adaptativas no Método dos Elementos Finitos (MEF) e estimativa do erro de discretização baseada em pós-processamento da solução.

1.1 - O Método dos Elementos Finitos

Na análise de sistemas contínuos, a formulação das equações de equilíbrio se baseia em equações diferenciais que devem satisfazer todas as condições de contorno e iniciais do problema. Procedimentos numéricos devem em geral ser empregados para se obter a resposta de tais sistemas.

O desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos, como uma ferramenta de análise numérica, começou com o advento dos computadores digitais e solucionou problemas até então complexos da Mecânica Estrutural, dos Fluidos, Termodinâmica, Eletromagnetismo, etc.

A solução aproximada de um dado problema envolve a definição de um modelo matemático, a discretização do domínio, o emprego de uma aproximação da solução via *MEF*, solução numérica do sistema de equações resultante e finalmente, análise e interpretação dos resultados. Mesmo com importantes avanços no desenvolvimento de algoritmos para o MEF, a concepção de um modelo adequado ainda se limita ao bom senso e experiência adquirida pelo analista. Assim, devido às incertezas no julgamento da validade dos resultados, houve nos últimos anos um crescente interesse em métodos adaptativos e estimativas *a posteriori* do erro de discretização.

A cada uma das etapas citadas acima pode-se associar diferentes tipos de erros. O modelo matemático no qual uma determinada análise se baseia é uma abstração do sistema físico real. Nesta abstração, são realizadas várias simplificações com relação à geometria do domínio e a estrutura funcional da solução.

O erro na modelagem matemática é definido como sendo a diferença entre a solução exata (resposta do modelo matemático) e os valores medidos no sistema físico nos pontos correspondentes. Os erros na modelagem matemática serão pequenos se as hipóteses contidas no modelo forem razoáveis para o sistema real representado pelo mesmo.

Os erros de arredondamento são causados pela limitação dos computadores digitais na representação de números reais. Também, outra consequência de se utilizar computadores é que sempre existe um limite para o refinamento da malha.

Finalmente, o erro de discretização representa a diferença entre a solução exata (do modelo matemático) e a solução aproximada obtida, utilizando-se um método discreto, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos. Este erro é decorrente do particionamento do domínio e da escolha das funções de interpolação. É causado pelo uso de um número finito de graus de liberdade (no sistema discretizado) para representar os infinitos graus de liberdade do modelo matemático (contínuo). Grande parte dos sistemas computacionais comerciais que utilizam o Método dos Elementos Finitos não fazem análise de erro, ou seja, não fornecem nenhuma informação sobre a qualidade dos resultados obtidos. Vários trabalhos foram desenvolvidos buscando técnicas de geração de malhas ótimas para dar maior segurança ao usuário quanto à confiabilidade do modelo.

1.2 - Adaptatividade

1.2.1 - Considerações iniciais

Atualmente, uma questão crucial em Mecânica Computacional é a capacidade de se melhorar automaticamente a qualidade de uma solução numérica. Com o cálculo de estimativas do erro de discretização em sistemas computacionais, tornou-se possível a utilização dos processos adaptativos de forma automática em várias áreas de aplicação prática. Uma solução obtida pelo Método dos Elementos Finitos está sendo melhorada adaptativamente se o resultado aproximado for otimizado de tal forma a se obter a melhor solução para um esforço computacional mínimo. Utiliza-se os resultados obtidos em níveis intermediários para a identificação de determinadas regiões do domínio, para um dado refinamento, em que a solução apresentada é de alguma maneira deficiente.

Com esse objetivo, desenvolveu-se o conceito de estimadores e indicadores de erro. O indicador de erro identifica as regiões do domínio a serem

refinadas com uma medida qualitativa, e o estimador de erro fornece um valor numérico aproximado da diferença entre a solução exata e a obtida pelo método.

Na escolha do modelo inicial, mesmo usando toda a experiência adquirida na resolução de problemas similares, pode-se usar uma malha extremamente refinada onde se alcança imediatamente a tolerância pré-estabelecida do erro; já com uma malha menos refinada, necessita-se de um grande número de iterações para alcançar a tolerância do erro pré-definida. Em qualquer um desses caminhos teremos um significativo custo computacional e uma limitação quanto ao número de graus de liberdade introduzidos.

Uma distribuição uniforme dos indicadores de erro para um dado número de graus de liberdade seria um parâmetro para a verificação da convergência do processo de resolução de um modelo [Babuska e Rheinboldt, 1979].

Logo, define-se:

$$IP = E_{\max} / E_{\min} \quad (1.1)$$

onde: IP - Índice de Performance da malha;

E_{\min} - Erro de discretização mínimo da malha;

E_{\max} - Erro de discretização máximo da malha.

O processo converge para a solução ótima quando o índice de performance tende à unidade, ou seja, quando o erro mínimo se iguala ao erro máximo de discretização em um determinado nível de refinamento [Las Casas, 1990]. O equilíbrio do erro num modelo discreto está associado com a suavização dos efeitos de gradientes da solução do problema.

1.2.2 - Estratégias adaptativas

O principal objetivo de um gerador automático de malhas consiste em evitar o trabalho manual necessário à criação de um modelo razoável para a resolução de um determinado problema.

Várias técnicas foram desenvolvidas com essa finalidade, tais como os procedimentos de Delaunay para triângulos ou tetraedros [Zienkiewicz e Zhu, 1991] e os esquemas *quadrees* e *octrees* lineares ou modificados [Shpitalni et al, 1989].

Entretanto, um processo mais eficiente parte de uma malha inicial para gerar uma outra mais refinada de forma adaptativa. O parâmetro h em um nó é

utilizado para determinar o tamanho dos elementos a serem gerados em volta deste nó.

A fundamentação teórica dos diversos processos adaptativos está bem desenvolvida para o caso unidimensional, mas para problemas multidimensionais se baseia, muitas vezes, em analogias com os problemas unidimensionais e teorias heurísticas. A modificação do modelo inicial é feita em ciclos, e segundo um dos procedimentos:

a) - Redistribuição nodal. (versão r)

Na versão *r* a qualidade da solução de elementos finitos é melhorada pela otimização da localização dos nós. Mantem-se o mesmo número de graus de liberdade e os nós são movidos em direção às regiões onde haja indicação de gradientes acentuados da solução. Os resultados possíveis de serem obtidos dependem diretamente do número de graus de liberdade utilizados na discretização inicial. Como esta estratégia redistribue os nós sobre o domínio até que o estimador definido seja minimizado, pode-se alcançar diferentes malhas para diferentes estimadores de erro. Deve-se evitar que a geometria do domínio seja alterada, fixando e restringindo a relocação dos nós do contorno.

b) - Aumento do número de elementos (versão h)

Pode-se definir o parâmetro *h* como sendo aquele que fornece o grau de refino da malha. Logo:

$$h = \max \{h_1, h_2, \dots, h_e, h_E\} \quad (1.2)$$

onde: $E \Rightarrow$ número de elementos da malha;

$h_e \Rightarrow$ diâmetro do menor círculo que contém o elemento.

Novos nós e elementos são inseridos de modo que o parâmetro de malha *h* seja reduzido nas regiões onde o erro da solução for maior [Duarte, 1991]. A ordem das funções de interpolação dos elementos e a relação entre os lados de cada elemento são constantes durante o procedimento.

c) - Aumento da ordem polinomial das funções de interpolação (versão p).

Neste procedimento, mantém-se constante o número de elementos da malha. O processo é particularmente interessante quando são utilizadas funções de interpolação hierárquicas, pois as matrizes de rigidez e os vetores de

carregamento para um grau polinomial p estarão contidos nas matrizes e vetores correspondentes aos elementos de ordem superior.

d) - Processos mistos. (Versões combinadas)

Uma combinação de estratégias pode aumentar as taxas de convergência em relação à aplicação de um único procedimento. Quando o número de graus de liberdade do modelo, juntamente com o incremento da ordem polinomial das funções de interpolação dos elementos é aumentado, tem-se o processo $h-p$. Se, no entanto, é feita a combinação das versões r e p ou r e h (processo $r-p$ e $r-h$ respectivamente), a exatidão desejada é alcançada com um número menor de graus de liberdade que o necessário com a utilização dos processos h ou p isoladamente. Outra forma alternativa, consiste na introdução de uma função de forma especial conhecida, para modelar aproximadamente o comportamento da solução exata na expansão de uma variável desconhecida [Gago et al. , 1983]. As estruturas de dados necessárias para suportar os processos mistos são bem mais complexas que uma versão adaptativa básica.

Antes de se implementar um algoritmo adaptativo em um ambiente computacional, procura-se definir qual será o estimador de erro utilizado.

A utilização das versões h ou p de forma local , pode provocar o aparecimento de nós não-conformes, assim como uma complicação do algoritmo. Já os refinamentos r , reduzem o diâmetro dos elementos numa determinada região e aumenta em regiões vizinhas.

Uma questão crucial a ser considerada consiste na escolha do princípio adaptativo a ser utilizado no refinamento. O procedimento mais comum é a adição de graus de liberdade que contribuem para a exatidão global do modelo com o equilíbrio dos indicadores de erro.

Espera-se que um refinamento h seja mais eficiente do que um refinamento p quando ocorrem singularidades no domínio do elemento. Entretanto, nem a versão h ou p de refinamento resolvem de maneira ótima o problema de adaptatividade. Em geral , é esperado que uma combinação $h-p$ seja a melhor técnica adaptativa [Gago et al., 1983].

1.3 - O Problema Modelo

Um problema linear elíptico de elasticidade pode ser definido em um domínio Ω , de contorno Γ como:

$$Lu \equiv S^T D S u = f \quad (1.3)$$

com: $u = \bar{u}$ no contorno Γ_u .

Tem-se que S é um operador diferencial linear, u é o campo de deslocamentos, f representa o vetor de forças externas e D é matriz elástica constitutiva.

Denota-se u_h a aproximação, em elementos finitos, para a solução exata u obtida pelo procedimento de Galerkin e escrita como:

$$u_h = N \bar{u} \quad (1.4)$$

$$\sigma_h = D S u_h \quad (1.5)$$

onde:

$$S u_h = \varepsilon_h \quad (1.6)$$

A solução aproximada u_h , σ_h difere dos valores exatos u e σ , sendo que a diferença é o erro de discretização.

1.4 - Estimativa *a posteriori* do Erro de Discretização.

Existem dois tipos de estimativas do erro de discretização: estimativa *a priori* e estimativa *a posteriori*. A estimativa *a priori* basea-se em informações qualitativas da solução, como o seu grau de suavidade e taxa de convergência assintótica. Já na estimativa *a posteriori*, utiliza-se informações obtidas durante o processo de solução, donde pode-se obter uma medida quantitativa do erro de discretização.

Geralmente, os algoritmos adaptativos são baseados em estimativas *a posteriori* do erro da seguinte forma [Johnson e Hansbo, 1992]:

$$\|u - u_{h,p}\| \leq E_1(h, p, u_{h,p}, f) ; \quad (1.7)$$

onde: $\|\cdot\| \rightarrow$ é uma dada norma previamente selecionada;

$u \rightarrow$ solução exata do problema;

$u_{h,p} \rightarrow$ solução aproximada por elementos finitos.

Pela equação (1.7), observa-se que o erro estimado $E_1(h, p, u_{h,p}, f)$ depende da solução computada $u_{h,p}$, do parâmetro da malha h e do grau p da aproximação polinomial e do vetor f de cargas equivalentes.

O algoritmo adaptativo é construído a partir do erro estimado com a seguinte condição:

$$E_1(h, p, u_{h,p}, f) \leq Tol; \text{ onde } Tol \text{ é a tolerância pré-determinada.}$$

Quanto à escolha da norma $\|\cdot\|$ na computação do erro, pode-se perceber que existem diferentes normas a serem usadas em função da natureza do problema. Este trabalho se restringe ao uso das normas de energia. Pode-se recorrer ao uso das normas de energia para problemas elípticos, enquanto que para problemas parabólicos e hiperbólicos, a eficiência não é a mesma [Johnson e Hansbo, 1992]. Ainda para problemas elípticos, também utiliza-se as normas L_q com $(1 \leq q \leq \infty)$ ou L_2 .

Nesta seção, algumas técnicas existentes para a estimativa *a posteriori* do erro de discretização em problemas elípticos lineares serão apresentadas sucintamente. A seguir, descreve-se três diferentes enfoques para estimadores de erro [Zhu e Zienkiewicz, 1990].

Primeiro tem-se o estimador baseado no Método dos Resíduos em Elementos, onde o resíduo da solução numérica é calculado em cada elemento [Babuska e Rheinboldt, 1978, Zienkiewicz e Morgan, 1983, Kelly et al., 1983]. O indicador de erro para problemas elípticos lineares é baseado no cálculo da norma do resíduo local da equação diferencial:

$$Lu - f = 0 \tag{1.8}$$

Logo, o resíduo é obtido em Ω pela introdução da solução aproximada \hat{u} na equação do problema, ou seja:

$$r = Lu_h - f \tag{1.9}$$

O estimador de erro, usando a norma de energia, tem a forma geral:

$$\|e\|^2 = C_1 \int_{\Omega} r^2 d\Omega + C_2 \int_I J^2 dI; \tag{1.10}$$

onde Ω é o domínio total e I a interface total entre os elementos.

$\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega_e)} \rightarrow$ norma de Sobolev;

$C \rightarrow$ constante positiva para os elementos de cada modelo;

$h_e \rightarrow$ diâmetro do elemento Ω_e ;

$|\cdot| \rightarrow$ seminorma do espaço de Sobolev de ordem $K+1$.

A seminorma de Sobolev é definida como:

$$|u|_{W_p^{k+1}(\Omega_e)} = \left(\sum_{|\alpha|=k+1} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega_e)}^p \right)^{1/p} \quad (1.16)$$

Finalmente, um terceiro processo da estimativa do erro baseado no pós-processamento da solução substitui a solução exata u e suas derivadas por valores pós-processados.

1.5 - Objetivo do Trabalho

A principal motivação para o estudo do estimador Z^2 *modificado* (procedimento *SPR* de recuperação) é o fato de que para elementos quadráticos, a técnica de suavização já existente *projeção local e média nodal* implementada por Las Casas (1990), não gera superconvergência das soluções recuperadas, diminuindo significativamente a qualidade das estimativas *a posteriori* do erro de discretização.

No capítulo 2 são apresentadas algumas definições e conceitos envolvidos na utilização de técnicas superconvergentes de recuperação, assim como uma descrição detalhada do estimador Z^2 e análise dos parâmetros e critérios de convergência.

No capítulo 3 são descritos os aspectos computacionais do programa para desenvolvimento e implementação em uma estrutura adaptativa r de um elemento (triângulo de seis nós) mais preciso e eficiente; e também de uma nova técnica superconvergente de recuperação dos gradientes (*SPR*).

No capítulo 4, serão discutidos exemplos de problemas de elasticidade plana visando ilustrar a taxa de convergência e a melhoria dos resultados com a utilização do novo estimador.

Finalmente no capítulo 5 apresenta-se as principais conclusões deste estudo e sugestões para continuidade do mesmo.

Capítulo 2

Estimador de Erro *a posteriori* Z^2

2.1 - Introdução

Em um problema de análise estrutural, as tensões são calculadas por diferenciação da solução em deslocamento (para cada elemento) e emprego das relações constitutivas apropriadas. Entretanto, este cálculo resulta em derivadas descontínuas nas interfaces dos elementos. Assim, desenvolveu-se procedimentos de suavização que recuperam valores nodais mais exatos das derivadas da solução original de elementos finitos e estimadores de erro *a posteriori* que avaliam a exatidão da solução.

Dentre os métodos disponíveis de recuperação existentes na literatura, destacam-se:

- *Técnicas de projeção*

É um processo bastante usado para recuperar valores nodais dos gradientes da solução. Assume uma interpolação contínua das derivadas de mesma forma que as usadas para as funções base (deslocamentos) e determina os valores nodais pelo método dos resíduos ponderados ou ajuste dos mínimos quadrados para a solução evoluída em elementos finitos.

- *Técnicas de extração*

É fundamentada no uso de expressões analíticas de funções que aproximam o núcleo do funcional de interesse. O uso desta técnica é limitado pelo custo excessivo e complexidade de implementação.

A qualidade e a confiabilidade do estimador (Z^2) é dependente da exatidão das soluções recuperadas e portanto, dos procedimentos de suavização. A necessidade de soluções mais exatas para as derivadas recuperadas tem levado

Também, pode-se adotar o estimador de erro concebido por Johnson e Hansbo (1992). A diferença entre este estimador e o de Babuska, é que este não tem que resolver problemas locais, sendo uma versão simplificada do primeiro.

Segundo, há uma técnica de estimativa baseada no Erro de Interpolação da Solução. Este método utiliza a teoria de interpolação em espaços de Sobolev [Oden e Reddy, 1976]. O espaço de Lebesgue $L_p(\Omega)$ consiste de classes de funções u definidas sobre um domínio Ω cujos valores absolutos têm potência p , os quais são integráveis sobre o domínio Ω , onde $p \geq 1$. Assim, a norma do espaço de Lebesgue é definida como:

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1.11)$$

Quando todas as derivadas parciais de $u(x)$, na forma fraca de ordem $\leq m$ (sendo m um inteiro ≥ 0) estão em $L_p(\Omega)$, pode-se dizer que $u(x)$ pertence a um espaço $W_p^m(\Omega)$, chamado espaço de Sobolev de ordem m , p sobre o domínio Ω . O espaço de Sobolev é definido como:

$$W_p^m(\Omega) = \{u: D^\alpha u \in L_p(\Omega); \forall \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\} \quad (1.12)$$

onde:

$$W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega) \quad (1.13)$$

A norma de Sobolev, então, é assim escrita:

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.14)$$

Se existe um espaço de soluções de ordem $K \geq 1$, então define-se $u \in W_p^{K+1}(\Omega)$, o espaço de Sobolev de ordem $K+1$. Logo:

$$\|u - u_h\|_{W_p^m(\Omega_e)} \leq Ch_e^{K+1-m} |u|_{W_p^{K+1}(\Omega_e)}; 0 \leq m \leq K \quad (1.15)$$

onde:

ao desenvolvimento de novas técnicas de recuperação, as quais produzem soluções superconvergentes.

O novo procedimento de suavização implementado -*SPR*- e a técnica de projeção local seguido de média nodal dos gradientes das soluções serão descritos nas seções subsequentes.

Este tipo de estimador que usa a solução recuperada no lugar da solução exata no cálculo das estimativas de erro, converge para o erro verdadeiro sob determinadas condições que serão apresentadas através de algumas definições. Tem-se mostrado que se a técnica de recuperação é superconvergente, isto é, se as derivadas recuperadas convergem à uma taxa $p+1$ (onde p é o grau do polinômio de aproximação), o estimador de erro (Z^2) será sempre assintoticamente exato. Este estimador permite que o erro seja bem estimado, assim como proporciona uma boa evolução dos erros locais. Também, pode ser combinado com um processo adaptativo completo de refinamento ou apenas servir como orientação no projeto de uma determinada malha.

As técnicas originalmente recomendadas pelos autores (projeção global, projeção local e média nodal das derivadas) são adequadas para aproximações lineares, onde taxas superconvergentes de recuperação das derivadas são obtidas na computação do estimador. Entretanto, verificou-se que em um modelo constituído de elementos quadráticos, os procedimentos de suavização até então utilizados geram valores subestimados do erro de discretização. Logo, a necessidade de se introduzir fatores empíricos de correção para incrementar o erro foi uma tarefa desagradável para muitos pesquisadores.

Segundo Zienkiewicz e Zhu (1992), o procedimento *SPR* proporciona uma precisão duas ordens mais alta para os valores nodais das derivadas em elementos triangulares quadráticos.

Concentrar-se-ão os estudos aqui apresentados, na análise de elementos triangulares quadráticos e lineares, com o objetivo de comparar a performance dos procedimentos de suavização na computação do estimador de erro *a posteriori*, o qual tem provado ser econômico e efetivo.

2.2 - Norma do Erro e Estratégias de Refinamento

A especificação do erro como a diferença entre as soluções exata e aproximada não é comumente utilizada, pois em regiões singulares do domínio, ambos os erros em deslocamentos e tensões serão infinitos. Por este motivo,

várias normas representando uma quantidade escalar foram desenvolvidas para uma análise global do erro de discretização.

Uma medida do erro é feita, por exemplo, utilizando a norma L_2 . Assim para um deslocamento \mathbf{u} , a norma L_2 do erro é:

$$\|\mathbf{e}\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{e}^T \mathbf{e} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

onde:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \quad (2.2)$$

e para tensões:

$$\|e_{\sigma}\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} (e_{\sigma})^T (e_{\sigma}) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

onde:

$$e_{\sigma} = \sigma - \sigma_h \quad (2.4)$$

Neste trabalho, a norma de energia é usada para medir a magnitude do erro, embora outras normas possam também ser adotadas. O erro na norma de energia é definido como:

$$\|\mathbf{e}\| = \left(\int_{\Omega} \mathbf{e}^T \mathbf{L} \mathbf{e} d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)^T \mathbf{L} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) d\Omega \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

e quando o operador diferencial \mathbf{L} é auto-adjunto [Zienkiewicz et al., 1989], tem-se:

$$\|\mathbf{e}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{u}_h\|^2 \quad (2.6)$$

Para problemas de elasticidade linear, \mathbf{u} na norma de energia é escrito como:

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} (Su)^T D(Su) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

Logo, o erro de discretização definido na equação (2.5) passa a ser:

$$\begin{aligned} \|e\| &= \left(\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T (\varepsilon - \varepsilon_h) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon_h)^T D(\varepsilon - \varepsilon_h) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T D^{-1}(\sigma - \sigma_h) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nas equações acima, S é o operador que define as deformações como:

$$\varepsilon = Su \quad (2.9)$$

e D é a matriz elástica das propriedades constitutivas, que define a seguinte relação:

$$\sigma = D\varepsilon \quad (2.10)$$

As normas descritas acima são definidas sobre todo o domínio do modelo e o quadrado de cada uma pode ser obtido pela soma das contribuições dos elementos [Zienkiewicz e Zhu, 1987]. Logo, tem-se:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e\|_i^2 \quad (2.11)$$

onde n é o número total de elementos.

Uma determinada malha é avaliada quanto a sua qualidade geralmente pela porcentagem relativa do erro de discretização η , definida para todo o domínio ou subdomínio como:

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} \quad (2.12)$$

Uma solução aproximada é usualmente aceitável se o erro global é menor do que uma porcentagem do valor da energia total de deformação, isto é:

$$\|e\| \leq \bar{\eta} \|u\| \quad (2.13)$$

onde $\bar{\eta}$ é o valor máximo estabelecido como critério de se alcançar uma malha ótima em um processo adaptativo de refinamento. Também, a solução é aceitável se a distribuição dos elementos na malha satisfaz o critério de otimização [Babuska e Rheinboldt, 1979, Oñate, 1991] baseado na distribuição uniforme do erro global, ou seja:

$$\|e\|_i = \frac{\|e\|}{\sqrt{n}} = K \quad (2.14)$$

Logo, se:

$$\|e\|_i = K \quad (2.15)$$

o tamanho do elemento é *ótimo*, enquanto para

$$\|e\|_i > K \quad (2.16)$$

e

$$\|e\|_i < K \quad (2.17)$$

o tamanho do elemento i necessita diminuir ou aumentar respectivamente.

2.3 - O Estimador Z^2 Original.

O estimador de erro proposto [Zienkiewicz e Zhu, 1987] se baseia na suavização das derivadas descontínuas σ_b da solução, projetando-as sobre as funções de forma N , (as quais interpolam a solução aproximada) satisfazendo as condições de contorno do problema. Logo, é definido um campo de derivadas

suavizadas σ^L mais exato do que a solução pós-processada σ_h . A técnica descrita se fará a nível de elemento (local), já que a utilização de uma projeção global torna o processo bastante dispendioso. A base do procedimento está intimamente ligada à existência de pontos superconvergentes [Krzizek e Neittaanmaki, 1978, Mackinnon et al., 1989] os quais são submetidos à extrapolação. Em seguida, faz-se uma média dos valores nodais extrapolados correspondentes aos elementos adjacentes.

Na análise estrutural, σ^L é um campo de tensões que é interpolado pela mesma função de forma dos deslocamentos e σ_h representa as tensões obtidas diretamente pela solução em elementos finitos [Zienkiewicz e Taylor, 1981]. Assim, tem-se:

$$\sigma^L = N \bar{\sigma}^L \quad (2.18)$$

$$\sigma_h = (DSN)\bar{u} \quad (2.19)$$

Pelo método de projeção local:

$$\int_{\Omega_e} N^T (\sigma^L - \sigma_h) d\Omega_e = 0 \quad (2.20)$$

Como a integral (equação 2.20) é calculada numericamente, a ordem de integração pode ser escolhida de modo que os pontos de integração coincidam com os pontos onde há superconvergência dos valores de σ_h [Hinton e Campbell, 1974].

Substituindo (2.18) e (2.19) em (2.20), tem-se:

$$\int_{\Omega_e} N^T \left(N \bar{\sigma}^L - DSN \bar{u} \right) d\Omega_e = 0 \quad (2.21)$$

Logo, as tensões nodais extrapoladas (projeção de σ_h) serão:

$$\bar{\sigma}^L = A^{-1} \int_{\Omega_e} N^T \sigma_h d\Omega_e \quad (2.22)$$

$$A = \int_{\Omega_e} N^T N d\Omega_e \quad (2.23)$$

Com as tensões nodais $\bar{\sigma}^L$ já determinadas, calcula-se em cada nó a média aritmética dos valores fornecidos. Embora isto possa parecer o mesmo que calcular a média de σ_h calculado diretamente nos nós, este processo geralmente fornece resultados mais precisos [Duarte, 1991].

O conceito básico do estimador de erro consiste em substituir o valor exato do erro por uma aproximação definida como:

$$e_\sigma \cong e_\sigma^L = \sigma^L - \sigma_h \quad (2.24)$$

Esta aproximação para o erro, pode ser desenvolvida para as diversas normas. Para a norma de energia, tem-se:

$$\|e\|^L = \left(\int (e_\sigma^L)^T D^{-1}(e_\sigma^L) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

A energia de deformação da solução exata é estimada como:

$$\|u\|^2 \cong \|u^L\|^2 = \int_{\Omega} (\sigma^L)^T D^{-1}(\sigma^L) d\Omega \quad (2.26)$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \quad (2.27)$$

onde n é o número total de elementos.

Finalmente, a aplicação de certos fatores empíricos de correção nas estimativas do erro de discretização é usualmente utilizada com o objetivo de se evitar valores subestimados. Geralmente esses fatores são empregados para elementos quadráticos. O valor adotado é de 1.4 para triângulos e 1.6 para elementos isoparamétricos de nove nós [Zienkiewicz e Zhu, 1987].

2.4 - O Estimador Z^2 Modificado.

O método de projeção local descrito na seção anterior tem-se mostrado de grande eficiência e aplicabilidade. Entretanto, este método é muito impreciso para valores pares do polinômio de aproximação p .

O procedimento *SPR* de suavização das derivadas descontínuas ocorre através da recuperação discreta superconvergente em um grupo de elementos. O

processo [Zienkiewicz e Zhu, 1992], utilizado na computação do estimador *modificado*, se baseia em propriedades superconvergentes da solução existentes em certos pontos dentro dos elementos [Barlow, 1976, Levine, 1985].

A existência e localização dos pontos superconvergentes é ainda uma questão não completamente explorada matematicamente. Para elementos triangulares lineares e quadráticos, os pontos de Gauss ocorrem em grupos de um (no centróide do elemento) ou em grupos de três (ao longo dos bissetores dos vértices) respectivamente [Bathe, 1982].

Uma expansão polinomial, (singular e contínua) da função que descreve as derivadas é usada sobre um grupo de elementos adjacentes aos nós nos quais a recuperação é desejada. Esta expansão será feita para ajustar localmente os pontos superconvergentes pelo *método dos mínimos quadrados* ou *projeção local* das derivadas. O primeiro destes processos será adotado aqui para conduzir à recuperação superconvergente das derivadas nodais (ou tensões), já que o segundo nem sempre implica em uma considerável melhora dos resultados.

Como foi visto antes, o objetivo da recuperação das derivadas nos elementos finitos é encontrar parâmetros nodais $\bar{\sigma}^*$ tais que o campo de tensões contínuos suavizados σ^* (definido pela função base N e pelos parâmetros nodais $\bar{\sigma}^*$) seja mais exato do que σ_h . Então, define-se $\bar{\sigma}^*$ como pertencendo à expansão polinomial σ_p^* (cuja ordem completa p é a mesma da função base N), que é definida sobre um grupo de elementos contendo um nó comum. Na figura abaixo são mostrados grupos de elementos triangulares lineares e quadráticos.

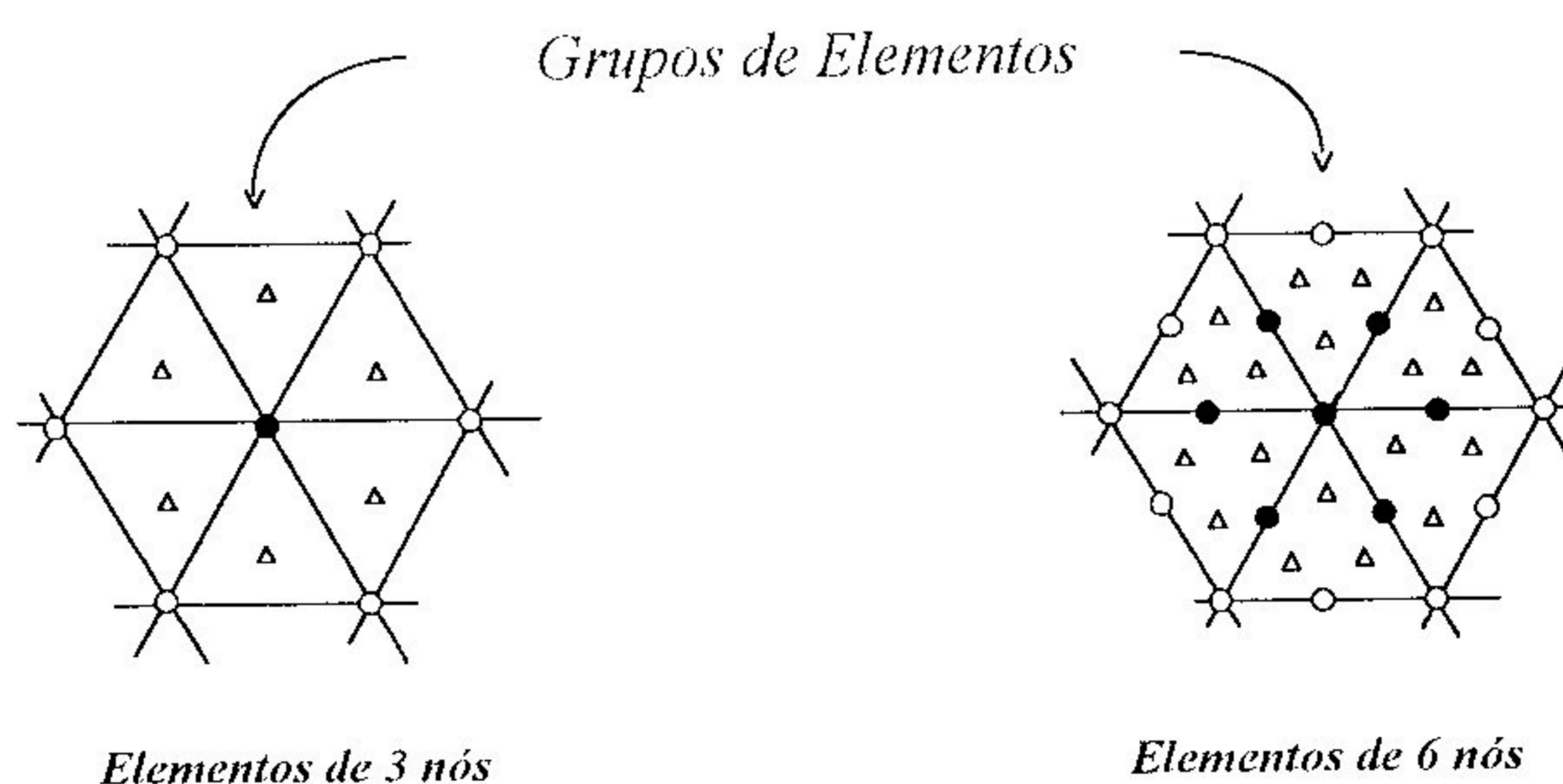


Figura 2.1: Computação dos valores nodais superconvergentes:

- Δ - Pontos amostrais
- \bullet - Valores nodais recuperados

A expansão polinomial σ_p^* será usada para cada componente de tensão. Define-se então:

$$\sigma_p^* = Pa \quad (2.28)$$

O vetor P contém os termos polinomiais apropriados e a é um conjunto de parâmetros a serem determinados.

Para elementos unidimensionais de ordem p , pode-se escrever:

$$P = [1, x, x^2, x^3, \dots, x^p] \quad (2.29)$$

$$a = [a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{p+1}]^T \quad (2.30)$$

Já para elementos triangulares planos e expansão linear, tem-se:

$$P = [1, x, y] \quad (2.31)$$

e para expansão quadrática:

$$P = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad (2.32)$$

Entretanto, para quadriláteros há ainda os termos adicionais para o polinômio completo onde verifica-se uma pequena melhora dos resultados. Para um quadrilátero bilinear, tem-se:

$$P = [1, x, y, xy] \quad (2.33)$$

Formas similares de p ocorrem para expansões de ordem mais elevada. A determinação dos parâmetros desconhecidos a da expansão dada pela equação (2.28) é feita pelo ajuste dos mínimos quadrados para um conjunto de pontos superconvergentes do grupo de elementos considerado. Para isto, minimiza-se:

$$\begin{aligned}
F(a) &= \sum_{i=1}^n \left(\sigma_h(x_i, y_i) - \sigma_p^*(x_i, y_i) \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sigma_h(x_i, y_i) - P(x_i, y_i)a \right)^2
\end{aligned} \tag{2.34}$$

onde (x_i, y_i) são as coordenadas dos pontos amostrais de um determinado grupo de elementos. Assim, n é o número total de pontos amostrais definido como:

$$n = mk \tag{2.35}$$

Na equação acima, m é o número de elementos do grupo e k é o número de pontos amostrais sobre cada elemento. A condição de minimização de $F(a)$ implica que a satisfaz:

$$\sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) a = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \tag{2.36}$$

que pode ser descrito na forma matricial como:

$$a = A^{-1}b \tag{2.37}$$

onde:

$$A = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \tag{2.38}$$

$$b = \sum_{i=1}^n P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \tag{2.39}$$

O número de equações a ser resolvido é modesto, já que o processo de recuperação é executado somente para cada grupo. Pode-se observar que a mesma matriz A ocorre na solução para cada componente de σ_p^* , e portanto, um único cálculo é necessário.

Com os parâmetros a , são determinados os valores nodais recuperados $\bar{\sigma}^*$ através da inserção de coordenadas apropriadas dentro da expressão de σ_p^* . Somente os nós dentro do grupo são considerados.

Pode ser esperado que todos os valores de σ_p^* no domínio do grupo sejam superconvergentes [Zienkiewicz e Zhu, 1992].

As porções de elementos (para $p \geq 2$) vão sobrepor-se aos nós no meio dos lados internos e aos nós no interior dos elementos. Isto significa que tais valores recuperados são obtidos de dois grupos, sendo então conveniente calcular a média nodal. Já nos nós de montagem, a solução é recuperada de um único grupo. Uma situação mais difícil de análise ocorre no contorno do domínio, onde uma porção local pode envolver somente um elemento, (nó de canto) sendo portanto insuficiente (singularidade da matriz A) para a determinação dos parâmetros a . Entretanto, todos os valores dos nós do contorno podem ser determinados pelos grupos do interior, e este procedimento é então recomendado.

2.5 - A Convergência das Soluções Recuperadas.

A solução por elementos finitos σ_h exibe uma convergência $(O(h^p))$ para os valores nodais das derivadas. Considerando-se elementos triangulares lineares (3 nós), ambas as derivadas recuperadas σ^{\perp} e σ^* são superconvergentes $(O(h^{p+1}))$ e estão localizadas entre a descontinuidade da solução σ_h .

Utilizando-se elementos triangulares quadráticos (6 nós), a convergência de σ^{\perp} tem a taxa padrão de $O(h^2)$, pois apesar dos valores nodais recuperados estarem localizados entre a descontinuidade de σ_h , não são superconvergentes. Isto significa que uma simples média dos valores descontínuos da solução em elementos finitos não resultará em valores nodais superconvergentes para elementos quadráticos como em elementos lineares. Entretanto, σ^* mostra ultraconvergência da ordem de $O(h^4)$. A superconvergência ocorre com o procedimento *SPR* para os nós internos e do contorno, mas o fenômeno da ultraconvergência $(O(h^{p+2}))$ é limitado somente aos nós internos do domínio.

A qualidade do estimador de erro $\|\bar{e}\|^R$ é medida pelo seu índice de efetividade dado pela razão entre o erro estimado e o erro exato, isto é:

$$\theta = \frac{\|\bar{e}\|^R}{\|e\|} \quad (2.40)$$

O índice R denota um dos procedimentos de recuperação descritos anteriormente.

Diz-se que o estimador de erro é assintoticamente exato se θ aproxima da unidade quando o erro exato $\|e\|$ tende a zero ($h \rightarrow 0$, ou $p \rightarrow \infty$). A confiabilidade de $\|\bar{e}\|^R$ depende da qualidade de σ^R . O seguinte teorema [Zienkiewicz e Zhu, 1992] demonstra como um estimador de erro assintoticamente exato pode ser encontrado.

Teorema 2.1

Supõe-se que $\|e^R\| = \|u - u^R\|$ seja alguma norma do erro da solução recuperada. O estimador de erro $\|\bar{e}\|^R$ é assintoticamente exato se:

$$\frac{\|e^R\|}{\|e\|} \rightarrow 0 \quad (2.41)$$

quando $\|e\| \rightarrow 0$

O estimador de erro $\|\bar{e}\|^R$ pode ser reescrito como:

$$\|\bar{e}\|^R = \|u^R - u_h\| \equiv \|(u - u_h) - (u - u^R)\| \quad (2.42)$$

Usando a inequação do triângulo, tem-se:

$$\|u - u_h\| - \|u - u^R\| \leq \|\bar{e}\|^R \leq \|u - u_h\| + \|u - u^R\| \quad (2.43)$$

$$\|e\| - \|e^R\| \leq \|\bar{e}\|^R \leq \|e\| + \|e^R\| \quad (2.44)$$

Pela definição do índice de efetividade, pode-se escrever:

$$\left(1 - \frac{\|e^R\|}{\|e\|}\right) \leq \theta \leq \left(1 + \frac{\|e^R\|}{\|e\|}\right) \quad (2.45)$$

A equação (2.45) mostra que θ se aproxima da unidade quando a razão $\frac{\|e^R\|}{\|e\|}$ tende a zero.

Esta condição é alcançada se $\|e^R\|$ converge numa taxa mais alta do que $\|e\|$. Se $\|e^R\|$ é superconvergente, então a precisão assintótica do estimador é garantida. A convergência do erro da solução por elementos finitos é da ordem:

$$\|e\| = O(h^p) \quad (2.46)$$

enquanto para o erro da solução recuperada, tem-se:

$$\|e^R\| = O(h^{p+\alpha}) \quad (2.47)$$

onde $\alpha > 0$.

Logo, do teorema anterior:

$$1 - O(h^\alpha) \leq \theta \leq 1 + O(h^\alpha) \quad (2.48)$$

Com o novo procedimento de recuperação *SPR* apresentado na seção 2.4, tem-se no mínimo $\alpha \geq 0.5$.

Capítulo 3

Aspectos Computacionais

3.1 -Introdução

Neste capítulo são apresentados detalhes relativos à implementação do programa computacional utilizado para estimar o erro de discretização (descrito na seção 2.4) em uma análise adaptativa $r-h$ global. O procedimento é apresentado para elementos triangulares de três e seis nós nos estados planos de tensão e deformação. No item 3.2, é feita uma rápida descrição do sistema computacional utilizado como suporte para o desenvolvimento deste trabalho. Já o item 3.3 mostra, de maneira sucinta, detalhes referentes à implementação do novo estimador, juntamente com algumas modificações em processadores pertencentes à tal sistema.

3.2 - O Ambiente SDP

O trabalho foi elaborado a partir do S.D.P. (*Sistema para Desenvolvimento de Programas Baseado no Método dos Elementos Finitos*), criado por pesquisadores do L.N.C.C.(Laboratório Nacional de Computação Científica) com a finalidade de elaborar uma sistemática uniforme para desenvolvimento de programas de elementos finitos [Gouveia,1987]. O sistema SDP é composto de bibliotecas de rotinas matemáticas, utilitárias e de elementos.

A alocação dinâmica de memória (variáveis compostas) é alcançada através do gerenciamento dos dados armazenados em um único vetor de trabalho, cuja dimensão se vincula à arquitetura disponível.

A estrutura do sistema na versão utilizada é composta por quatro módulos básicos:

- O *pré-processador* prepara uma base de dados para comunicação entre um arquivo de dados de entrada e um processador elasto-linear.

- O *processador* calcula as matrizes de rigidez dos grupos de elementos bem como as ações nodais equivalentes.

- O *módulo de solução* executa a montagem, (matriz de rigidez e vetor de solicitação globais) decomposição e resolução do sistema de equações resultante pelo método de eliminação de Gauss.

- O *pós-processador* calcula e imprime os esforços nodais para todos os estados de carga considerados.

A versão *r* adaptativa foi utilizada e implementada no SDP por Las Casas (1990). Assim, acrescentou-se um novo processador (*ADA*) ao sistema, com a finalidade de calcular o erro de discretização em cada elemento e mover os nós no domínio. O procedimento utilizado para suavização de tensões, descrito na seção 2.3, foi simplificado por uma simples média nodal dos valores pós-processados em malhas de elementos triangulares lineares.

O movimento de um nó *livre*, é dado pela diferença entre a coordenada do nó e a média ponderada das distâncias entre o nó livre e o baricentro dos elementos adjacentes, onde o erro de discretização dos elementos de um determinado grupo são os fatores de ponderação. Já um nó *restrito* se move segundo a componente vetorial do deslocamento resultante na direção em que o nó é livre para se mover. Também, o pré-processador básico foi alterado com a leitura e gravação de parâmetros para restrições nodais aos deslocamentos durante a otimização da localização dos nós de contorno.

A versão *r-h* adaptativa implementada no SDP [Figueiredo, 1992] tem a função de executar um refinamento uniforme global, que após adaptações *r* gere três níveis de malha semelhantes entre si e ao que os gerou. Desta forma o erro é distribuído de forma aproximadamente uniforme no domínio, no primeiro passo. Então a malha é refinada com base em um modelo discreto adequado.

Após a conclusão do refinamento *h*, cada elemento (elemento-pai) terá sido sub-dividido em 64 elementos-filhos (figura 3.1), e uma base de dados é gerada e empregada na solução do sistema de equações resultante (após três refinamentos) pelo método *Multimalha*. Todo este processo *fase h* é feito pelo pré-processador *GERA*.

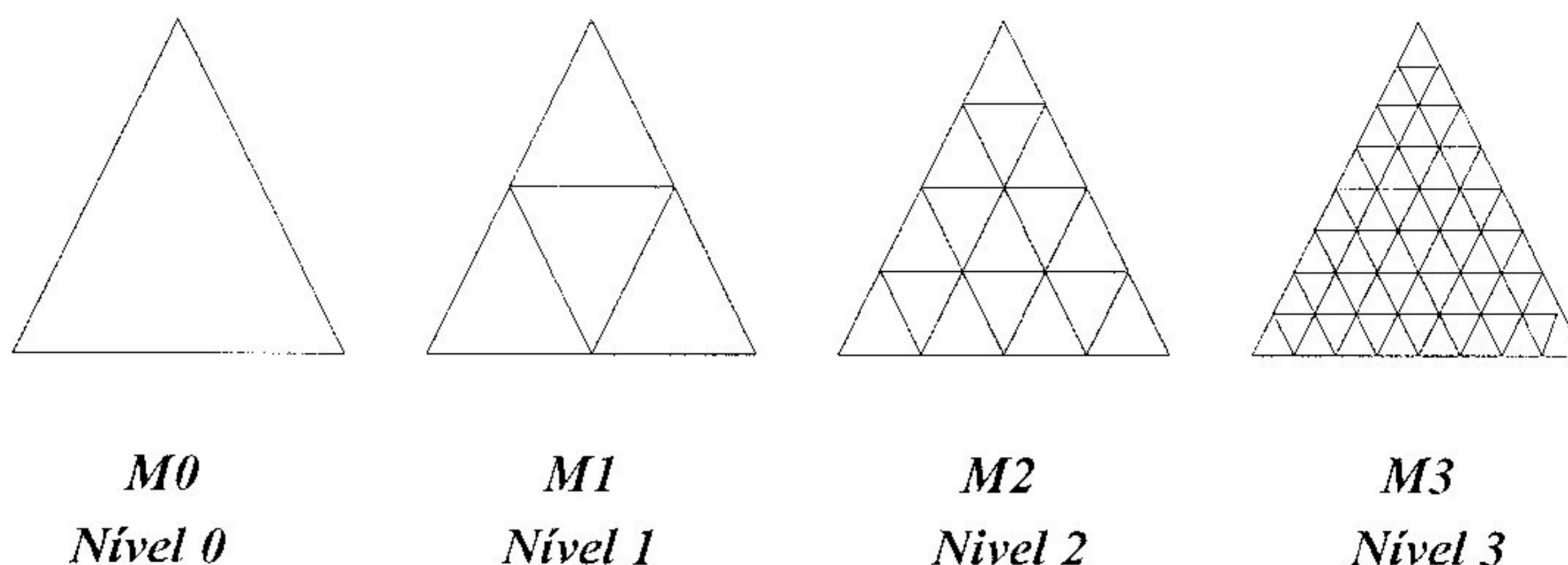


Figura 3.1: Refinamento global h em três etapas.

Os módulos gráficos do SDP (*PROMALHA E CAMPOTEN*) permitem a visualização, entre outros parâmetros, da malha de elementos finitos introduzida pelo analista e do campo de tensões resultante após o pós-processamento dos resultados. O processador *SDPGR AFC* traduz os dados de localização e tensões, necessários à interpretação pelos módulos gráficos.

Durante a implementação do novo estimador para o método adaptativo na estação de trabalho *HP*, foram observadas diferenças no tratamento de variáveis reais pelo compilador *FORTRAN RYAN McFARLAND*, utilizado no micro-computador tipo IBM-486 para desenvolvimento do sistema, e pelo *FORTRAN* da HP instalado na estação de trabalho do Departamento de Engenharia de Estruturas.

3.3- Estimador Z^2 Modificado - Implementação

3.3.1 - Considerações Iniciais

A implementação do procedimento *SPR* tornou possível o desenvolvimento de aproximações quadráticas superconvergentes. A introdução de elementos triangulares quadráticos [Stasa, 1985] em uma estrutura adaptativa r existente, contribuiu de forma significativa para a melhoria dos resultados até então obtidos com elementos triangulares lineares. Algumas modificações, essenciais à implantação do Z^2 modificado foram feitas nos processadores citados na seção anterior.

Ao pré-processador *PREAD*, introduziu-se parâmetros de leitura dos nós internos (para elementos triangulares quadráticos) pertencentes ao contorno do domínio estudado.

O cálculo das matrizes de rigidez para elementos triangulares, feito por subrotinas do processador, utiliza integração numérica de Gauss em 3, 7 ou 13 pontos amostrais. Então, foi introduzido também a possibilidade de se integrar numericamente em somente um ponto de Gauss (no centróide do elemento).

O pós-processador correspondente à versão básica do S.D.P, fornece os gradientes da solução aproximada (tensões) nos nós dos elementos. Entretanto, devido às características de implementação do novo estimador, foi necessário que também fornecesse as tensões em pontos amostrais internos aos elementos considerados.

Ao procedimento de suavização existente (*projeção local e média nodal das tensões*) para o cálculo estimado do erro de discretização em elementos triangulares lineares (processador *ADA*), foi acrescentado o processo descrito na seção 2.4 para elementos triangulares lineares e quadráticos (processador *MADA*).

Para o cálculo dos índices de efetividade e verificação das taxas de convergência para os estimadores, tornou-se necessário o desenvolvimento de um programa computacional que fizesse refinamentos uniformes em malhas de elementos finitos. Então, utilizou-se o processador *GERA* como ferramenta básica para o desenvolvimento de tal programa. Todas as informações correspondentes aos níveis de refinamento 1 e 2 foram armazenadas em tabelas (variáveis compostas) e impressas em um arquivo de dados, conforme o formato exigido pelo pré-processador. As malhas iniciais (nível 0) introduzidas pelo analista, foram geradas manualmente.

Para cada etapa de refinamento, o *elemento-pai* (três nós) terá sido subdividido em 4 *elementos-filhos* lineares ou quadráticos, de acordo com o nível considerado.

3.3.2 - Estrutura do processador - *MADA*.

O diagrama de estrutura do processador *MADA* abaixo, foi criado para executar o refinamento r em elementos triangulares lineares e quadráticos a partir do novo estimador de erro.

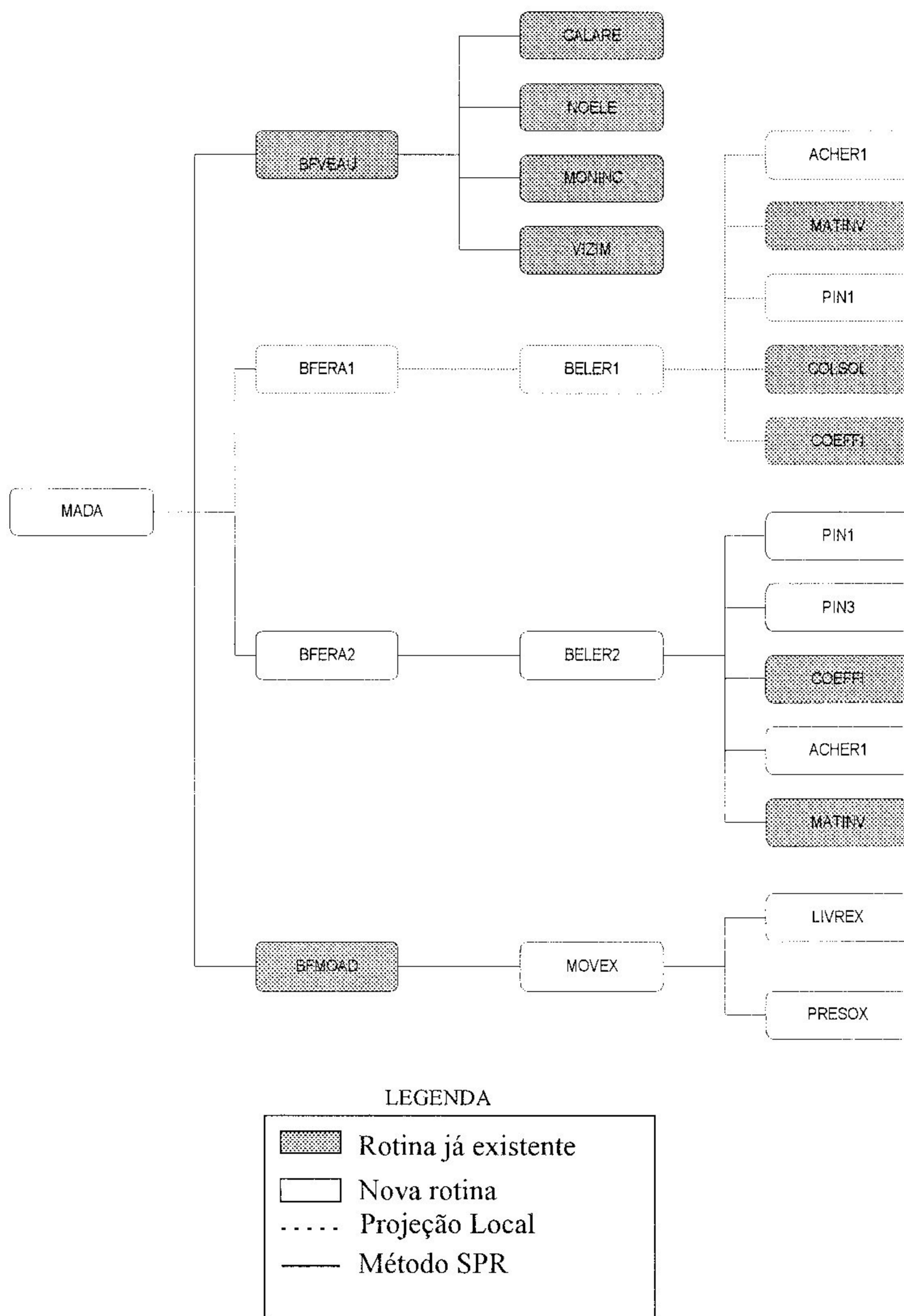


Figura 3.2: Diagrama de estrutura do processador MADA

A função de cada nova rotina utilizada na computação do estimador Z^2 *modificado* é descrita a seguir:

•**BFVEAU** - Bloco funcional responsável pela montagem das matrizes auxiliares para o cálculo do erro e do deslocamento dos nós.

***NOELE** - Subrotina que monta os vetores contendo os elementos que possuem um determinado nó e o número de ordem do último elemento de cada grupo.

***MONINC** - Subrotina que monta o vetor contendo a incidência nodal de todos os elementos do modelo.

***VIZIM** - Subrotina que monta o vetor contendo os elementos adjacentes aos lados de um determinado elemento.

***CALARE** - Subrotina que monta os vetores contendo a área e as coordenadas do baricentro de cada elemento.

•**BFERA2** - Bloco funcional responsável pelo cálculo e impressão do erro em cada elemento, juntamente com todos os parâmetros controladores citados no capítulo 2.

***BELER 2** - Subrotina que calcula o campo suavizado de tensões sob um determinado grupo de elementos pelo método dos mínimos quadrados.

***PIN1** - Subrotina que fornece os pontos de integração (um, três, sete e treze pontos) e os pesos correspondentes para os elementos triangulares planos.

***COEFFI** - Subrotina cuja função é fornecer as funções de interpolação do elemento.

***MATINV** - Subrotina que fornece os termos da matriz inversa de propriedades constitutivas.

***ACHER1** - Subrotina cuja função é calcular o erro de discretização sob cada elemento pela norma de energia.

Capítulo 4

Resultados Numéricos

4.1 -Introdução

Alguns problemas representativos da elasticidade plana (estado plano de tensão e deformação) são analisados neste capítulo para uma avaliação dos estimadores descritos.

Sua eficiência e performance são comparadas através do índice de efetividade global (seção 2.5). Se este é assintoticamente exato, então os erros estimados tendem para valores exatos quando a malha é refinada repetidamente.

Para avaliação do fenômeno da superconvergência dos resultados, outros parâmetros controladores (já descritos anteriormente) também foram utilizados. Neste capítulo, os índices ‘* e L’ (adotados no capítulo 2) serão utilizados para denotar os métodos de suavização *SPR* e projeção local das derivadas respectivamente.

Os resultados obtidos em tensões após refinamentos uniformes de um determinado modelo foram comparados à solução analítica para o cálculo de taxas de convergência. Em alguns problemas, utilizou-se procedimentos adaptativos *r-h* globais. Seis modelos discretos distintos foram gerados a partir da malha inicial (Malha OR-OH). Os resultados foram alcançados pela aplicação de uma série de adaptações *r* seguido por refinamentos uniformes, onde o modelo final corresponde à malha *3R-3H* (três refinamentos *r* e três *h*)

Devido à limitações de memória da configuração do equipamento utilizado - estação HP Apollo - os problemas foram discretizados através de malhas iniciais muito *pobres*.

Testes numéricos são mostrados para elementos triangulares (lineares e quadráticos) ilustrando a superconvergência das estimativas de erro. Na seção 4.2 serão apresentados três exemplos para se avaliar a taxa de convergência das

tensões nodais recuperadas pelos procedimentos *SPR* e projeção local e para a verificação da efetividade do estimador Z^2 na norma de energia.

4.2 - Exemplos

4.2.1 - Flexão de uma Viga Uniformemente Carregada.

O primeiro exemplo analisado é uma viga bi-engastada de seção retangular delgada, submetida a uma carga uniformemente distribuída de intensidade q , como mostra a figura 4.1 abaixo. O problema foi analisado usando-se a teoria de estado plano de tensões.

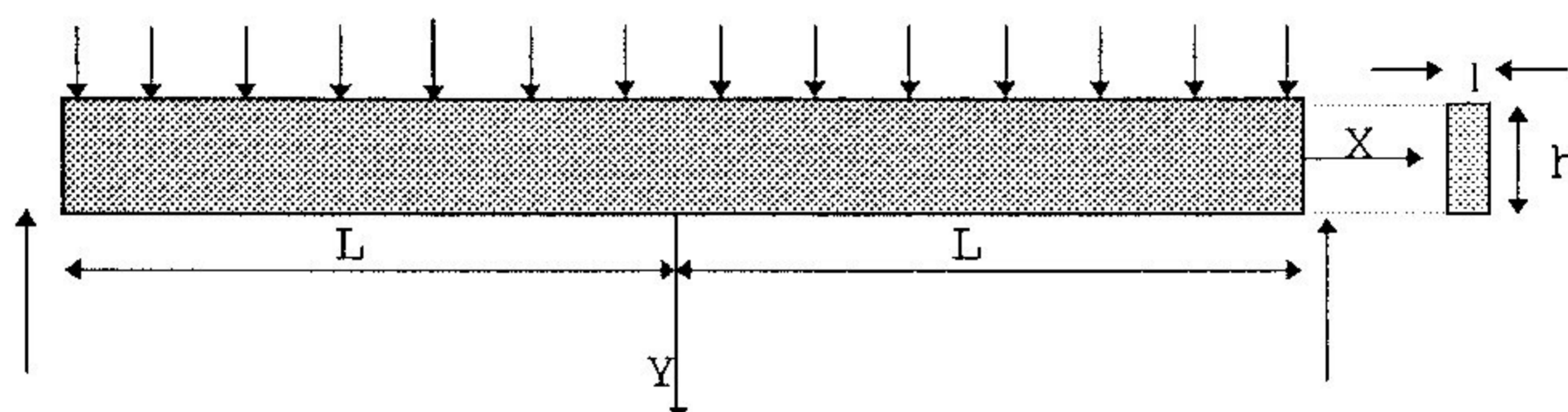


Figura 4.1: Exemplo de aplicação 4.2.1

Dados:

$$\nu = 0.3 \text{ (coeficiente de Poisson)}$$

$$I = 83333.33 \text{ cm}^4 \text{ (momento principal de inércia)}$$

$$E = 21000 \text{ kN/cm}^2 \text{ (módulo de elasticidade)}$$

$$L = 500 \text{ cm}$$

$$h = 2c = 100 \text{ cm}$$

$$q = 0.1 \text{ kN/cm}$$

O problema foi resolvido analiticamente, através dos resultados da Teoria da Elasticidade. [Timoshenko e Goodier, 1980]. A solução obtida é:

$$\sigma_x = \frac{q}{2I}(L^2 - x^2)y + \frac{q}{2I}\left(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y\right)$$

$$\sigma_y = \frac{-q}{2I}\left(\frac{y^3}{3} - c^2y + \frac{2c^3}{3}\right) \quad (4.1)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-q}{2I}(c^2 - y^2)x$$

e a energia de deformação analítica (Apêndice) é de 24.29475, que corresponde a um valor para a $\|u\|^2$ de 48.5895.

A expressão para σ_x somente representa uma solução exata se nas extremidades as forças normais F_x são distribuídas de acordo com a fórmula abaixo:

$$F_x = \pm \frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left(\frac{2y^3}{3} - \frac{2}{5} c^2 y \right) \quad (4.2)$$

Para este carregamento, as resultantes de forças e momentos se anulam, e pelo princípio de *Saint Venant*, pode-se concluir que seus efeitos sobre as tensões a consideráveis distâncias dos apoios, (maiores que a altura da viga) podem ser desprezados [Timoshenko e Goodier, 1980].

Considerou-se a atuação de forças distribuídas normais e de cisalhamento (fig.4.2) nas extremidades do modelo, já que foi feita uma análise global da convergência do estimador.

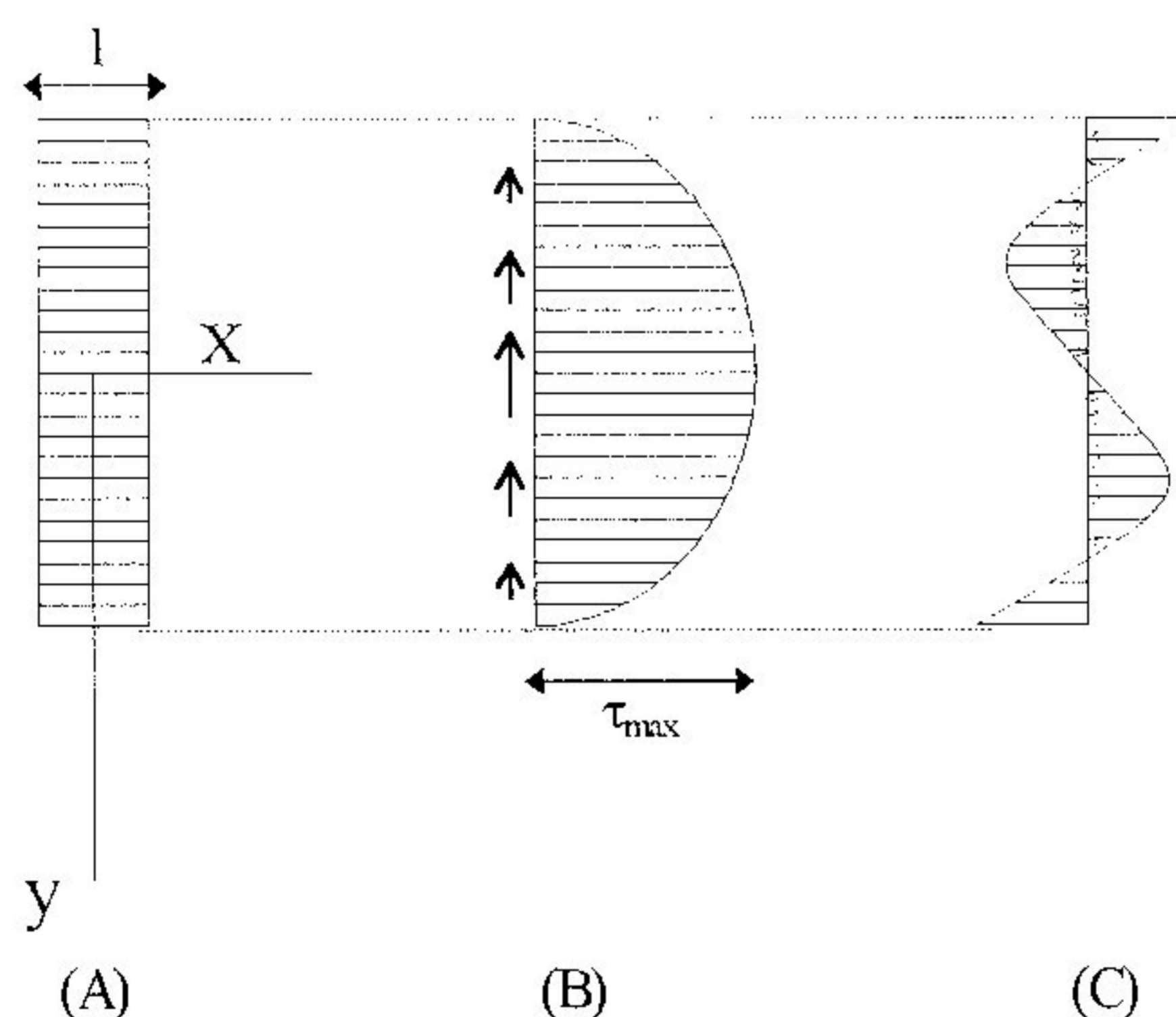


Figura 4.2: Forças nas extremidades. (A) - Seção de extremidade
(B) - Forças de Cisalhamento (C) - Forças normais

Entretanto, as tensões recuperadas foram analisadas em nós internos (localizados no interior do domínio) e do contorno, todos distantes dos apoios. Taxas médias de convergência das componentes de tensões foram calculadas em alguns pontos do problema modelo considerando uma sequência de refinamentos uniformes.

Três níveis de malhas (ou seja, 2048 elementos) foram obtidos a partir da malha inicial (Figura 4.3) composta de 32 elementos.

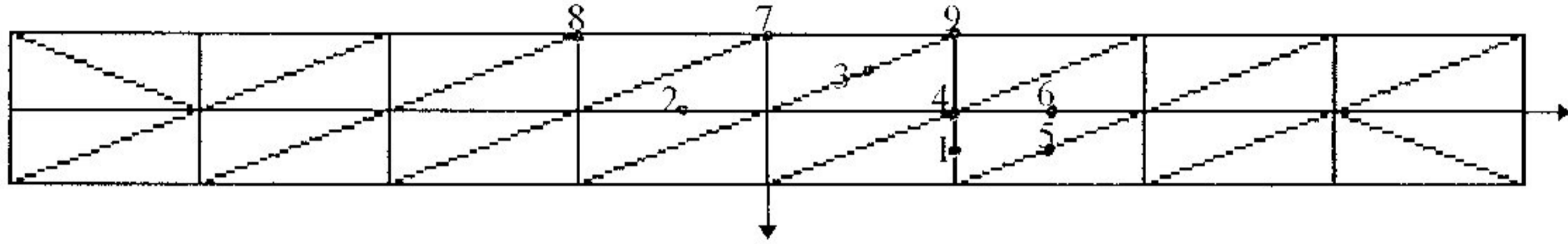


Figura 4.3: Exemplo 4.2.1 - Malha inicial.

Primeiramente, a análise da convergência dos gradientes recuperados é feita em seis pontos internos:

- *Ponto 1 - nó de coordenada (125.0,25.0)*

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $
1/2	.13439366E1	.13439366E1	.22846968E-1	.2039022E-2
1/4	.46725947	.46725947	.64417271E-2	.81568120E-4
1/8	.12946126	.12946126	.16466817E-2	.51059563E-5
Taxa	2	2	2	4

Tabela 4.1: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 1 para elementos lineares e quadráticos.

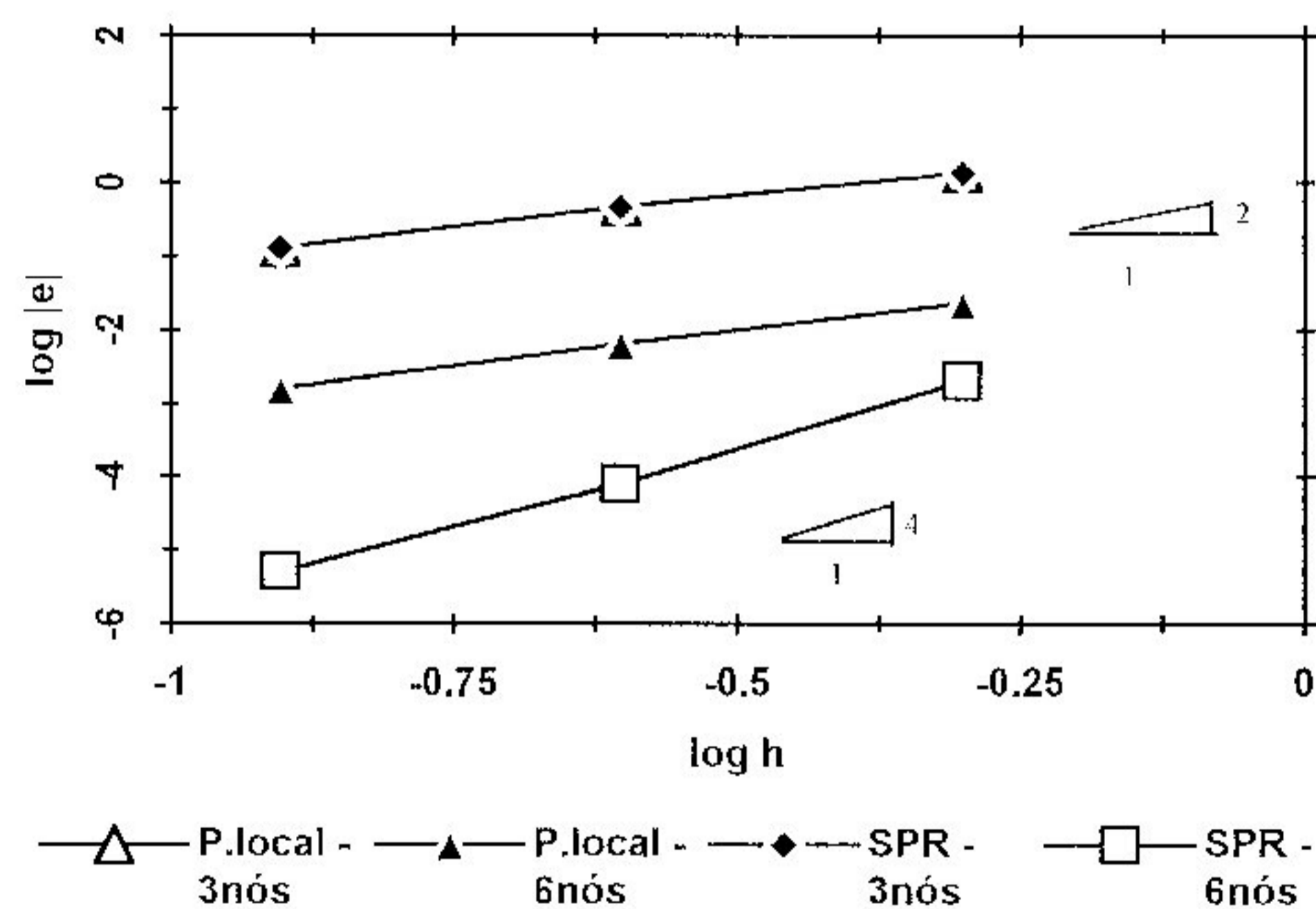


Figura 4.4: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 1

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $
1/2	.23451776E-1	.23451776E-1	.98272846E-3	.23167371E-3
1/4	.81381700E-2	.81381700E-2	.45068184E-3	.33840122E-4
1/8	.22531263E-2	.22531263E-2	.10405142E-3	.57588169E-6
Taxa	2	2	2	4

Tabela 4.2: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 1 para elementos lineares e quadráticos.

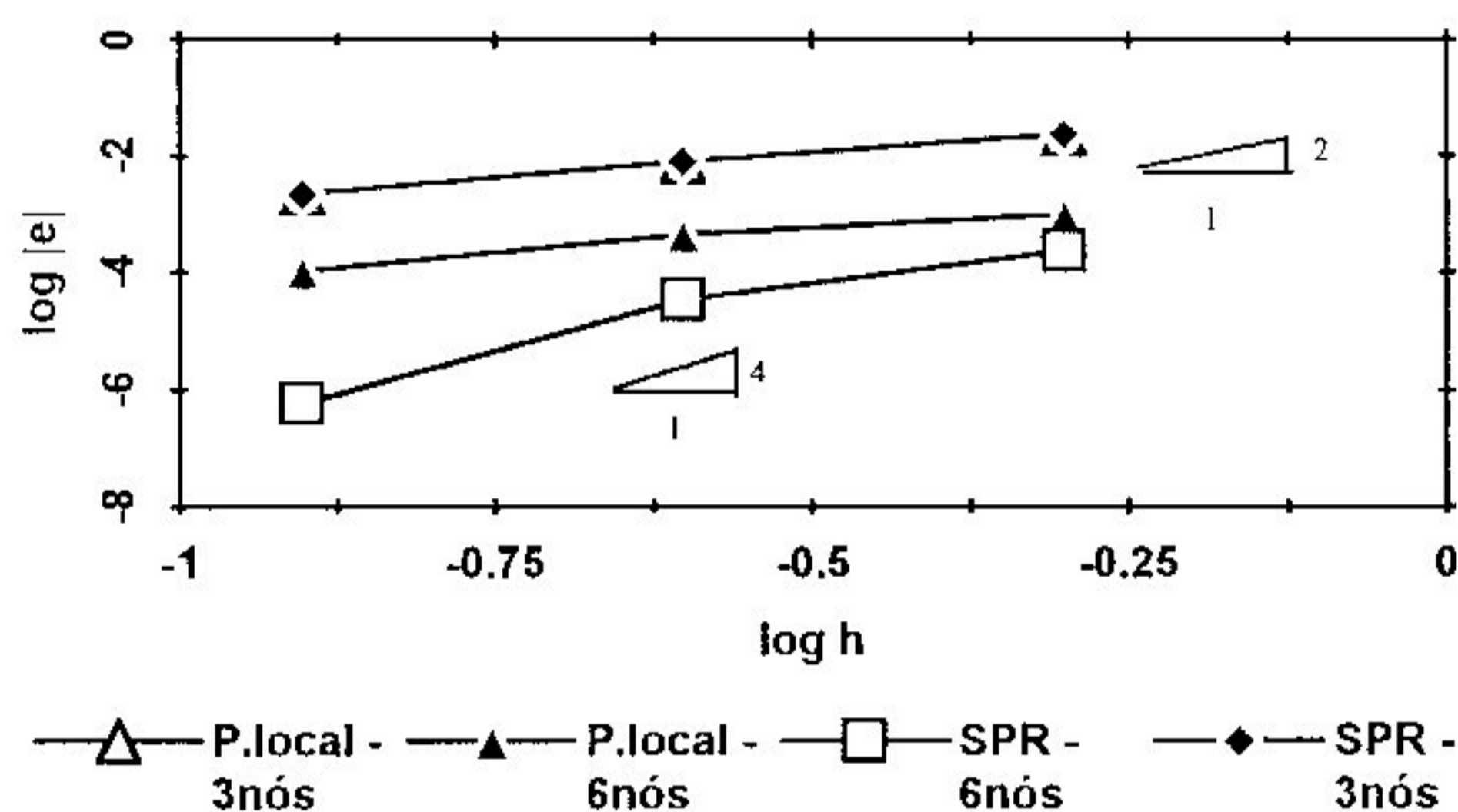


Figura 4.5: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 1

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.30165039E-1	.30165039E-1	.10917811E-1	.34113959E-3
1/4	.10467494E-1	.10467494E-1	.27870059E-2	.70208954E-4
1/8	.28980131E-2	.28980131E-2	.76633168E-3	.15597841E-5
Taxa	2	2	2	4

Tabela 4.3: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 1 para elementos lineares e quadráticos.

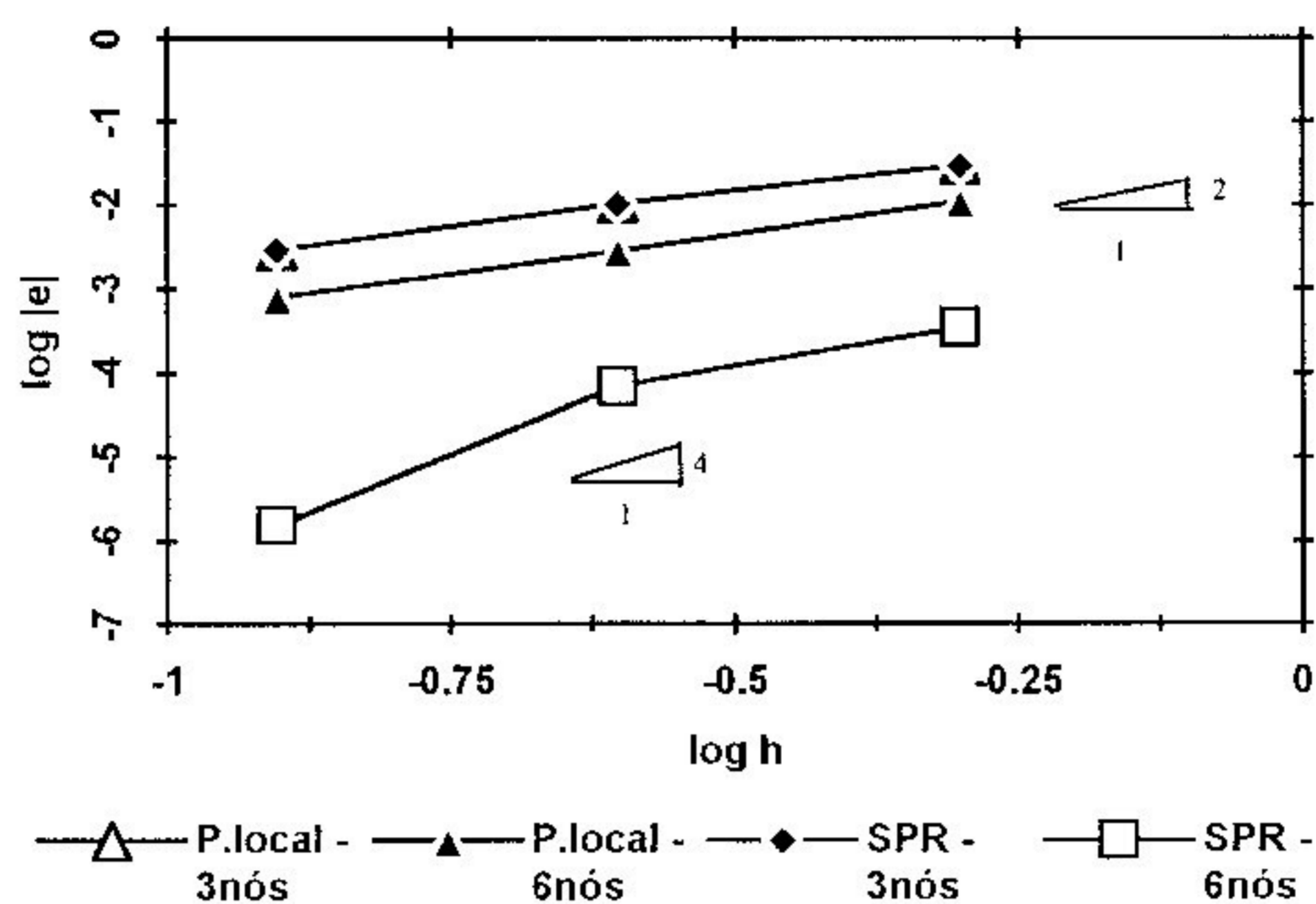


Figura 4.6: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 1

- *Ponto 2 - nó de coordenada (-62.5,0.0)*

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $
1/2	.12250618E-1	.12250618E-1	.96885905E-2	.38541002E-4
1/4	.42512315E-2	.42512315E-2	.24388820E-2	.12621025E-5
1/8	.11769891E-2	.11769891E-2	.63182794E-3	.14884778E-7
Taxa	2	2	2	6

Tabela 4.4: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 2 para elementos lineares e quadráticos.

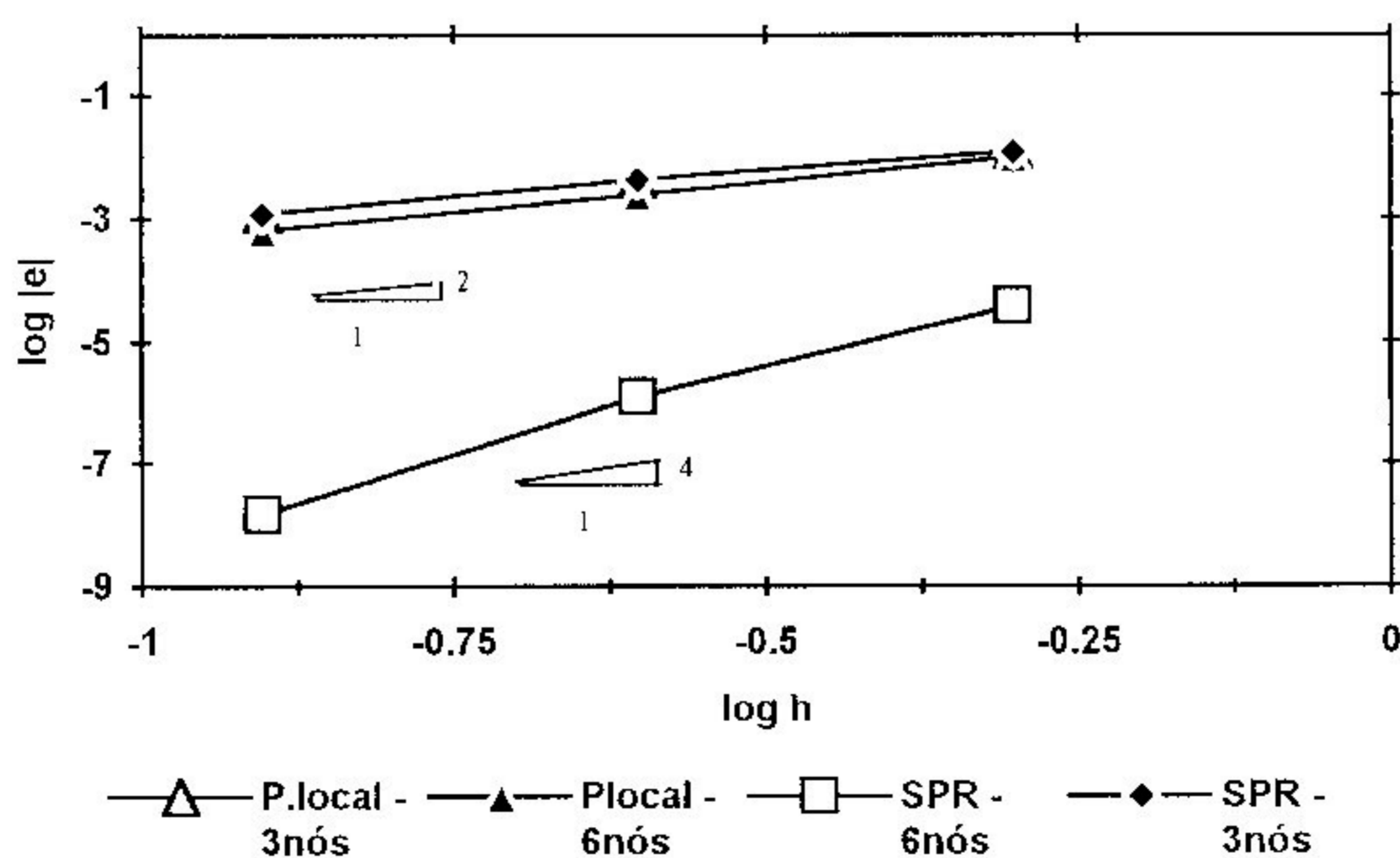


Figura 4.7: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 2.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $
1/2	.13126160E-1	.13126160E-1	.95945500E-4	.47971252E-4
1/4	.45548922E-2	.45548922E-2	.22288926E-5	.11144464E-5
1/8	.12610588E-2	.12610588E-2	.64896647E-5	.48775934E-7
Taxa	2	2	-	5

Tabela 4.5: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 2 para elementos lineares e quadráticos.

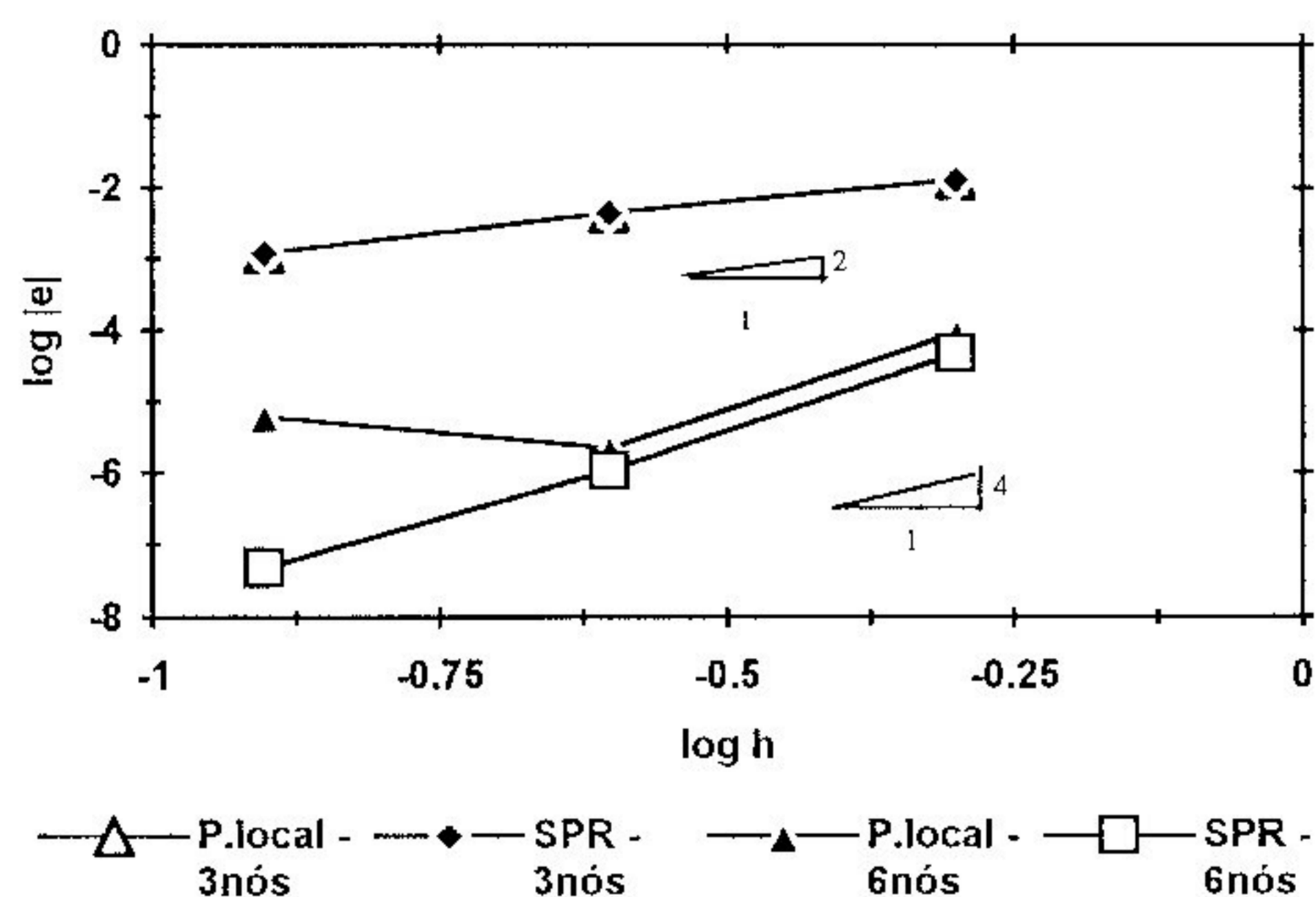


Figura 4.8: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 2.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.22155574E-1	.22155574E-1	.35685078E-2	.16887226E-3
1/4	.76884105E-2	.76884105E-2	.96788701E-3	.43377485E-5
1/8	.12610588E-2	.12610588E-2	.28317319E-3	.30949163E-7
Taxa	2	2	2	6

Tabela 4.6: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 2 para elementos lineares e quadráticos.

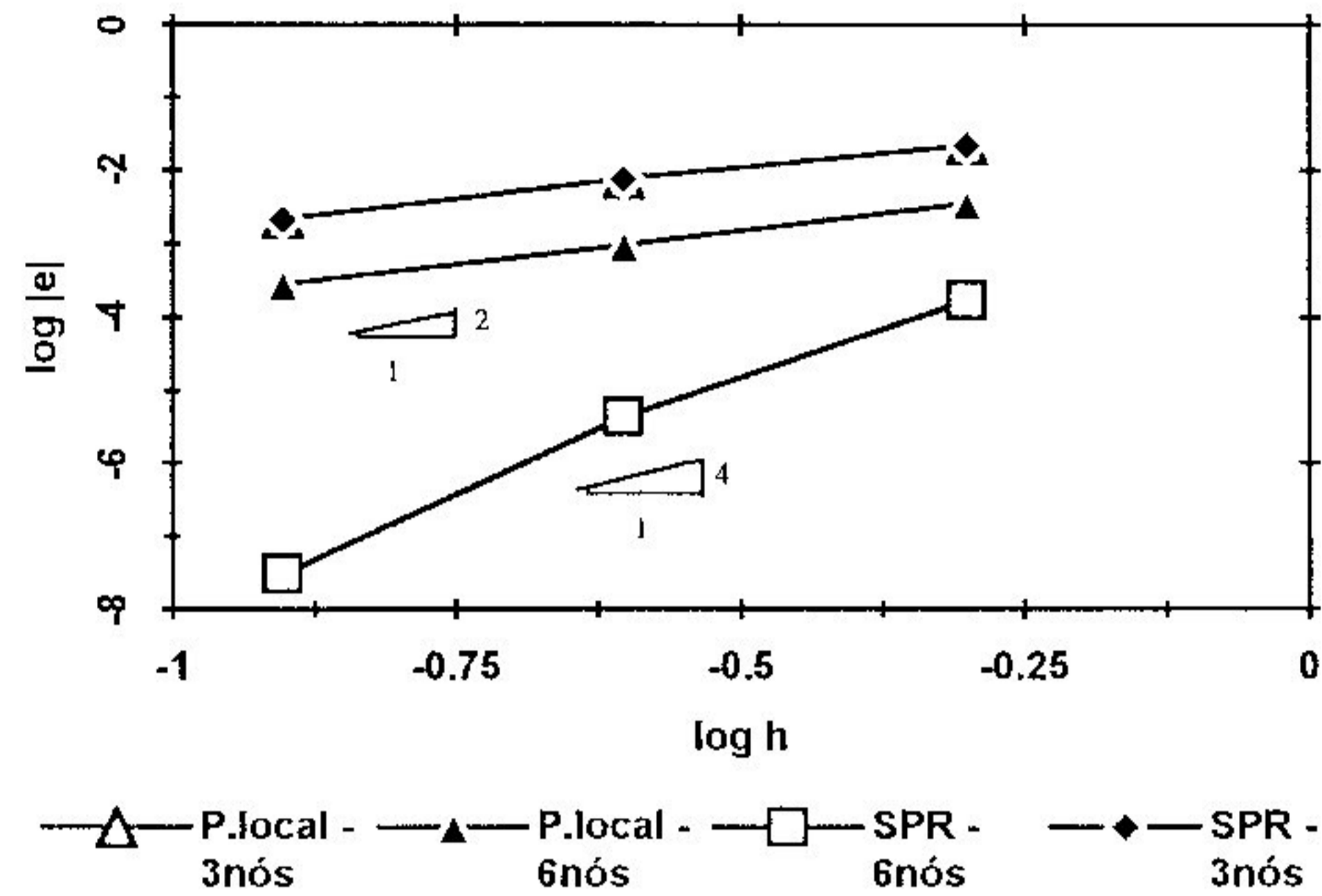


Figura 4.9: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 2.

- *Ponto 3 - nó de coordenada (62.5,-25.0)*

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $
1/2	.13727058E1	.13727058E1	.39025385E-2	.76539268E-3
1/4	.47724298	.47724298	.85283414E-3	.66739418E-4
1/8	.13222528	.13222528	.22358597E-3	.46522075E-5
Taxa	2	2	2	4

Tabela 4.7: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 3 para elementos lineares e quadráticos.

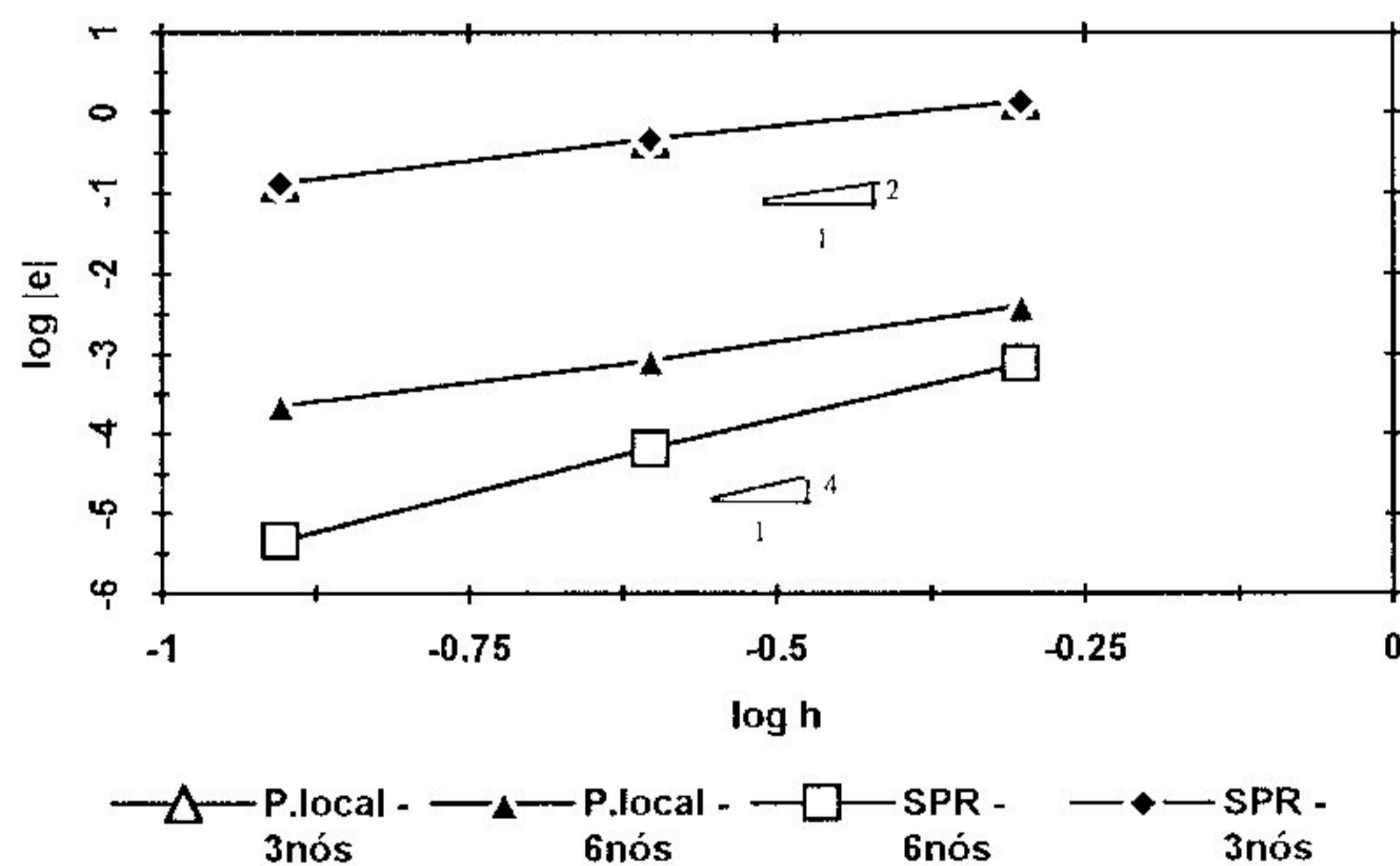


Figura 4.10: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 3.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $
1/2	.15925720E-1	.15925720E-1	.19399267E-2	.24692063E-3
1/4	.55264836E-2	.55264836E-2	.41400578E-3	.15501926E-4
1/8	.15300521E-2	.15300521E-2	.90957755E-4	.14496929E-6
Taxa	2	2	2	5

Tabela 4.8: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 3 para elementos lineares e quadráticos.

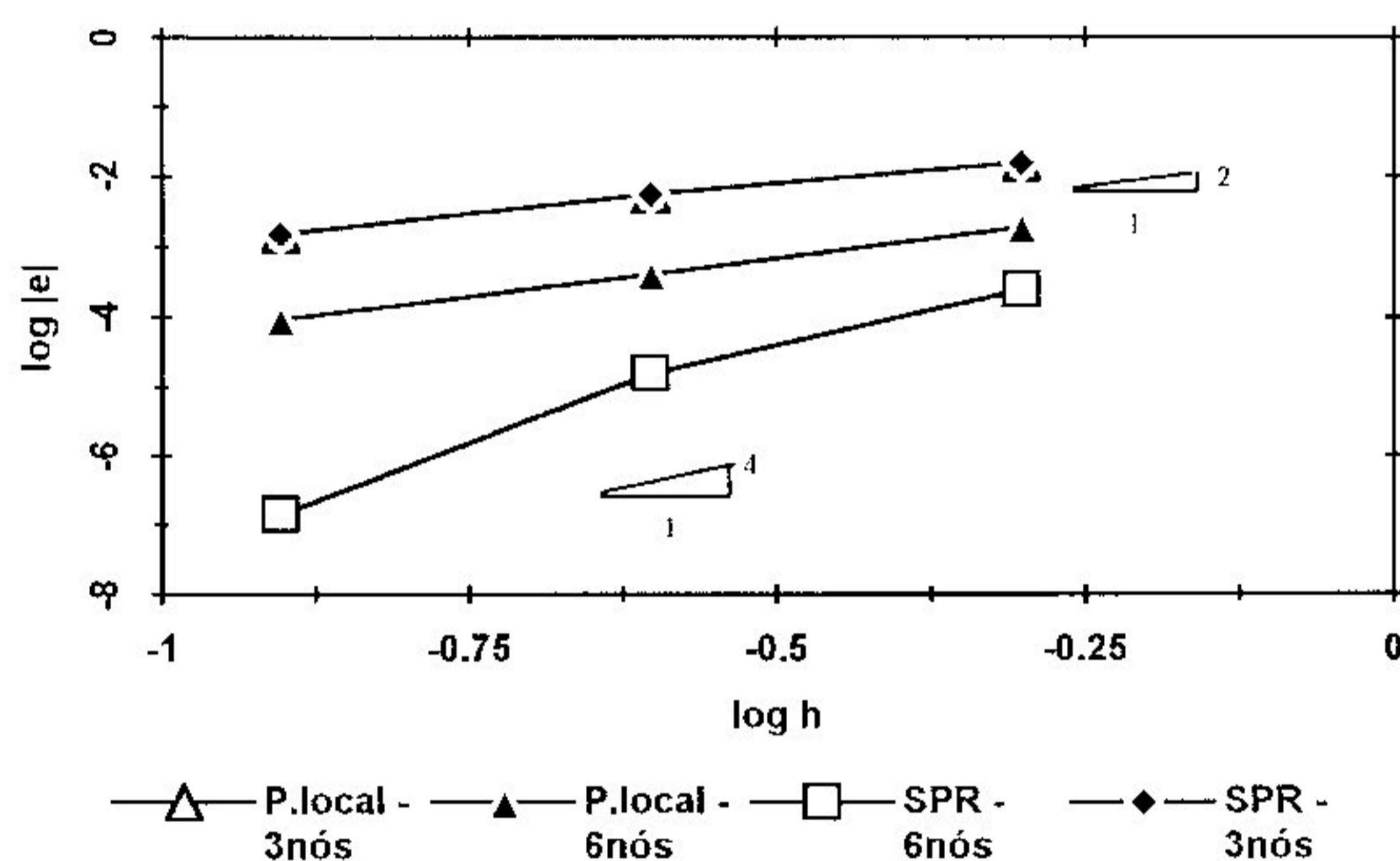


Figura 4.11: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 3.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.10094439E-1	.10094439E-1	.43209189E-3	.15671390E-3
1/4	.35028735E-2	.35028735E-2	.13322051E-4	.55289912E-5
1/8	.96980256E-3	.96980256E-3	.38767729E-4	.10465006E-6
Taxa	2	2	-	5

Tabela 4.9: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 3 para elementos lineares e quadráticos.

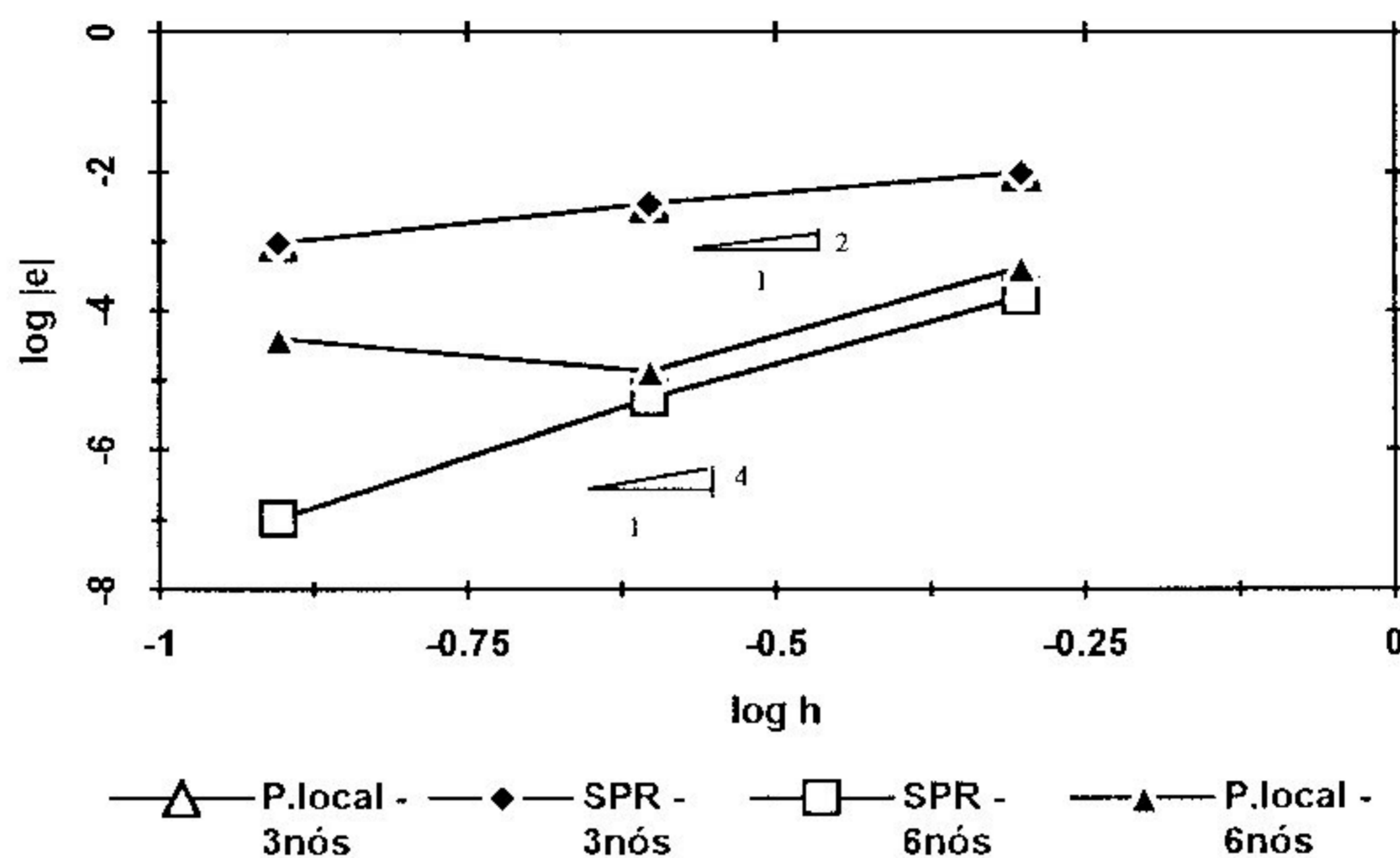


Figura 4.12: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 3.

• *Ponto 4 - nó de coordenada (125.0, 0.0)*

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $
1/2	.24501044E-1	.24501044E-1	.19377354E-1	.76919481E-4
1/4	.85024946E-2	.85024946E-2	.48777638E-2	.25244802E-5
1/8	.23539784E-2	.23539784E-2	.12411318E-2	.17545934E-8
Taxa	2	2	2	8

Tabela 4.10: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 4 para elementos lineares e quadráticos.

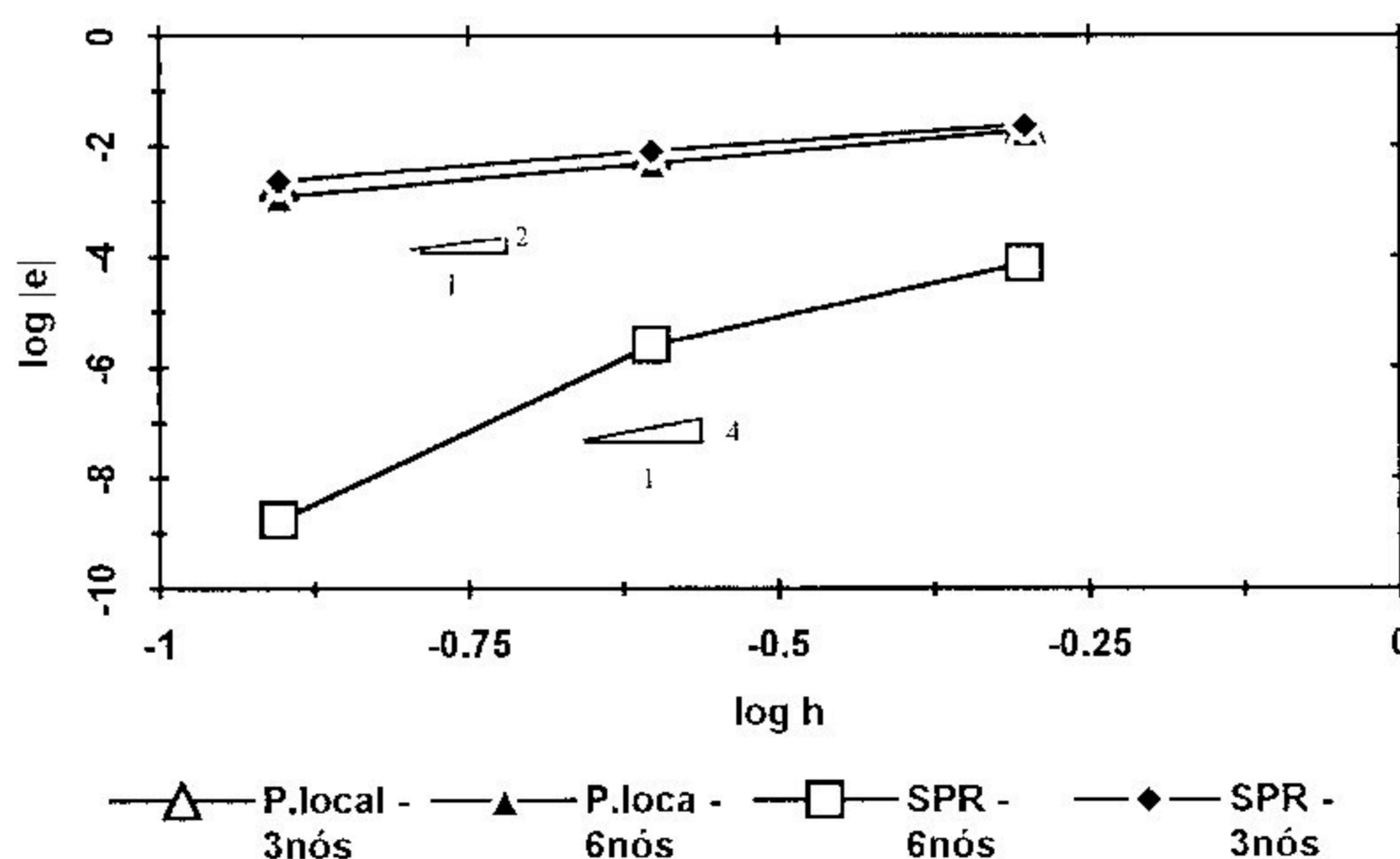


Figura 4.13: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 4.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $
1/2	.26255675E-1	.26255675E-1	.19183215E-3	.95932626E-4
1/4	.91097439E-2	.91097439E-2	.44583576E-5	.22295224E-5
1/8	.25221227E-2	.25221227E-2	.61430740E-5	.61281158E-8
Taxa	2	2	-	7

Tabela 4.11: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 4 para elementos lineares e quadráticos.

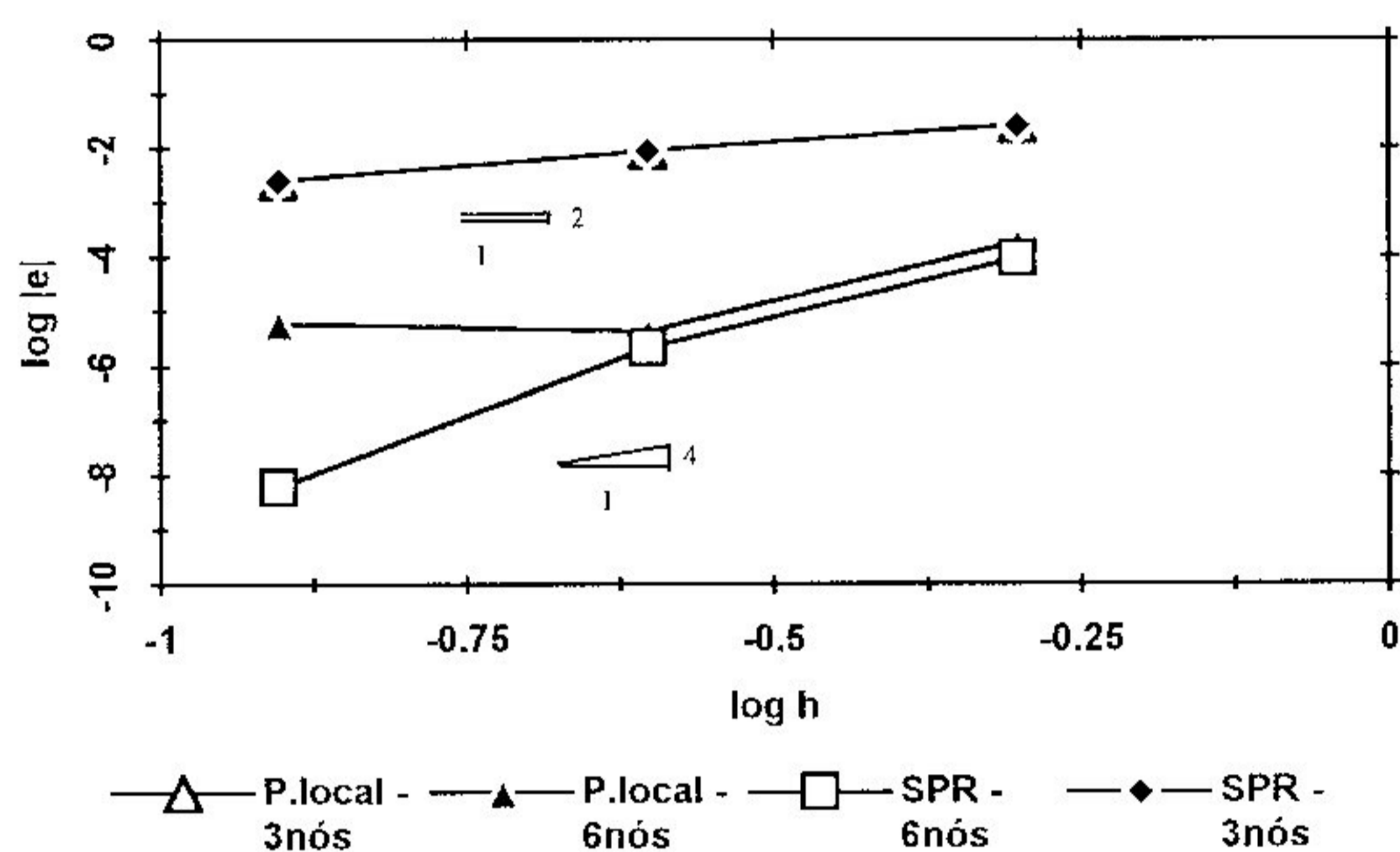


Figura 4.14: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 4.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.44310338E-1	.44310338E-1	.71370200E-2	.33774136E-3
1/4	.15376830E-1	.15376830E-1	.19357741E-2	.86754886E-5
1/8	.42572045E-2	.42572045E-2	.52550577E-3	.21467297E-7
Taxa	2	2	2	7

Tabela 4.12: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 4 para elementos lineares e quadráticos.

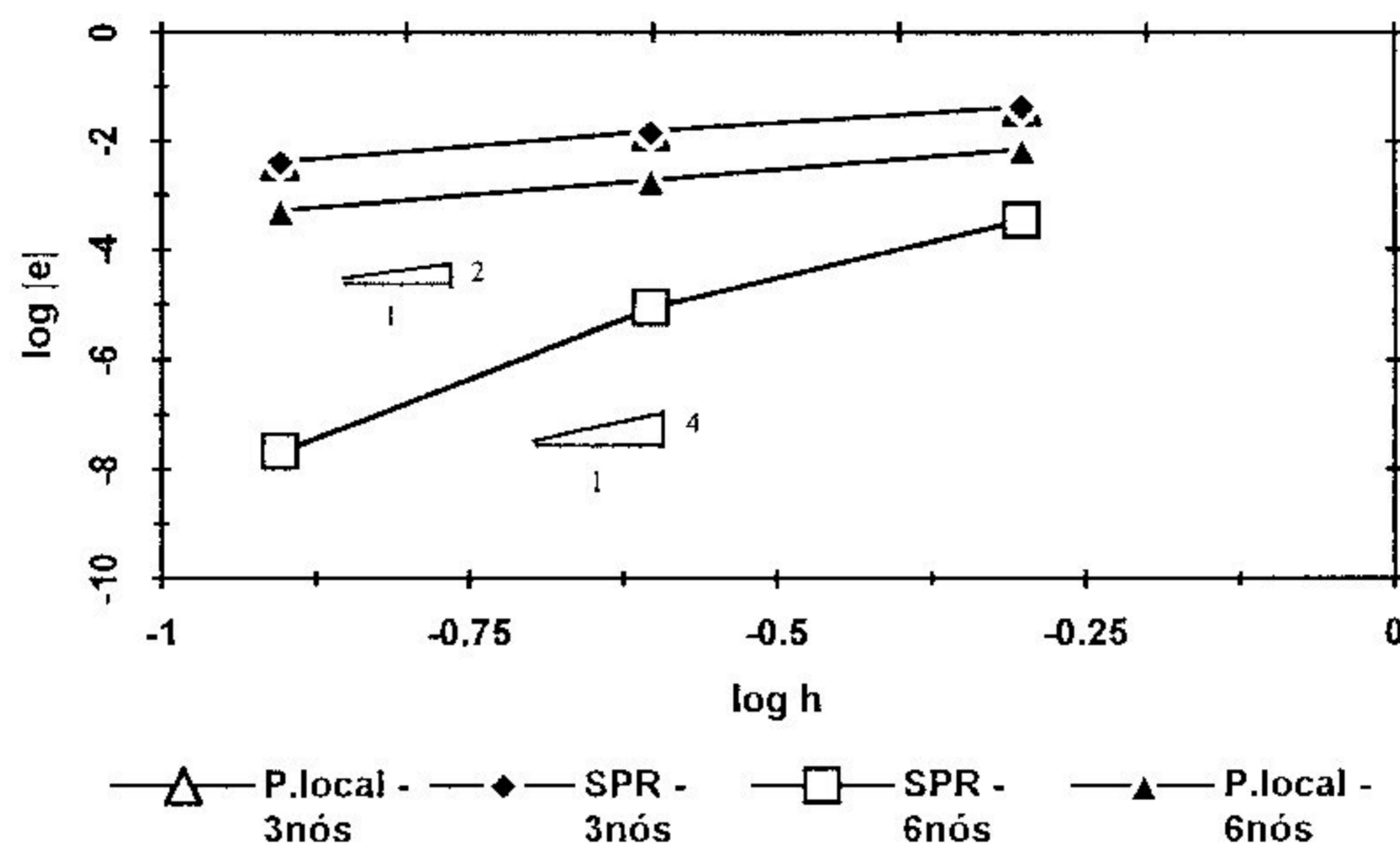


Figura 4.15: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 4.

- *Ponto 5 - nó de coordenada (187.5, 25.0)*

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $
1/2	.12469802E1	.12469802E1	.31763114E-1	.24637292E-2
1/4	.43361548	.43361548	.88732461E-2	.86512052E-4
1/8	.12014661	.12014661	.22530018E-2	.52651382E-5
Taxa	2	2	2	4

Tabela 4.13: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 5 para elementos lineares e quadráticos.

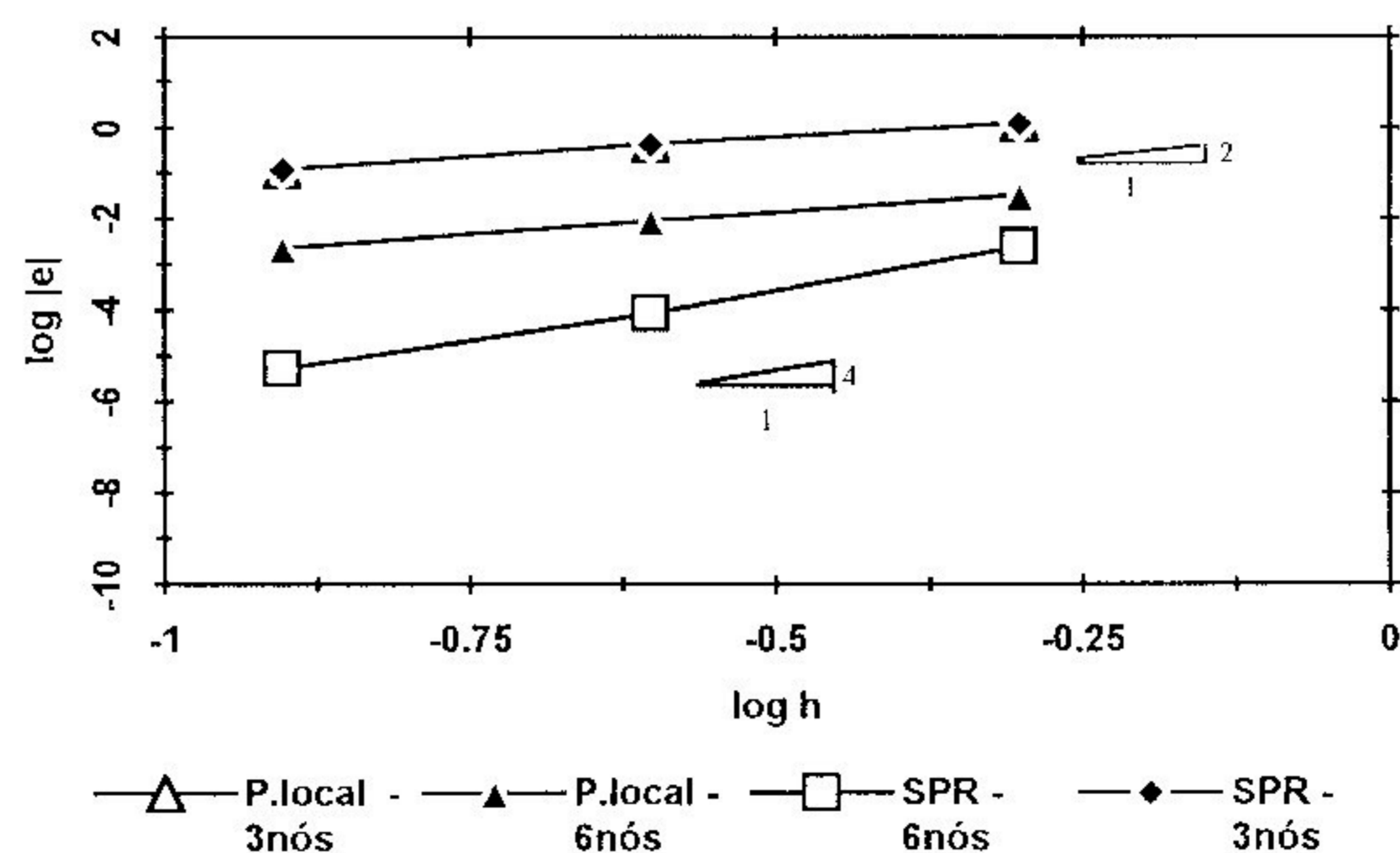


Figura 4.16: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 5.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $
1/2	.36575533E-1	.36575533E-1	.66443821E-3	.39072452E-3
1/4	.12692743E-1	.12692743E-1	.46290967E-3	.39954857E-4
1/8	.35141820E-2	.35141820E-2	.10340365E-3	.71664108E-6
Taxa	2	2	1	5

Tabela 4.14: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 5 para elementos lineares e quadráticos.

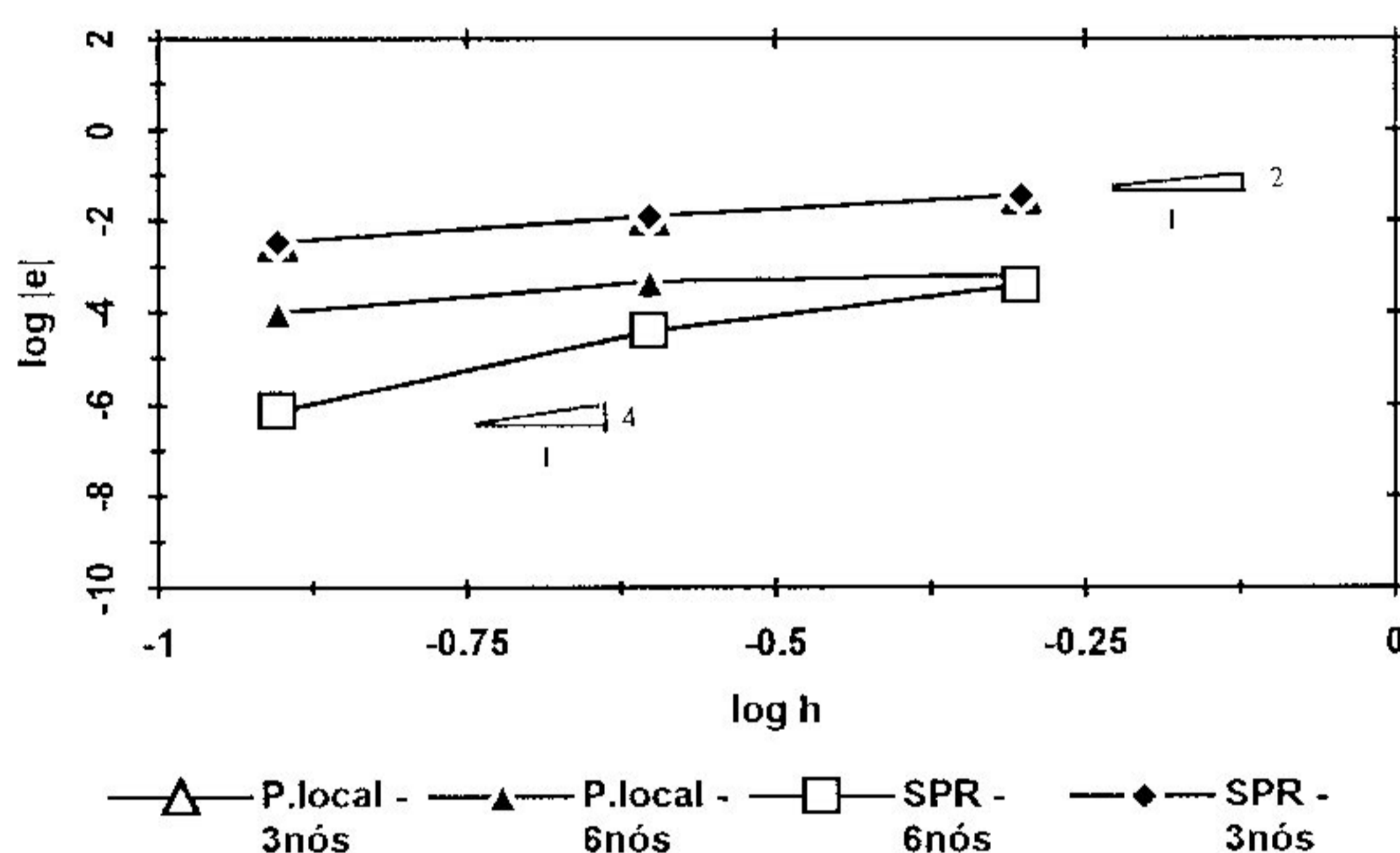


Figura 4.17: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 5.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.43599261E-1	.43599261E-1	.14700762E-1	.40293473E-3
1/4	.15123863E-1	.15123863E-1	.37204441E-2	.91773056E-4
1/8	.41872979E-2	.41872979E-2	.10063630E-2	.20963024E-5
Taxa	2	2	2	4

Tabela 4.15: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 5 para elementos lineares e quadráticos.

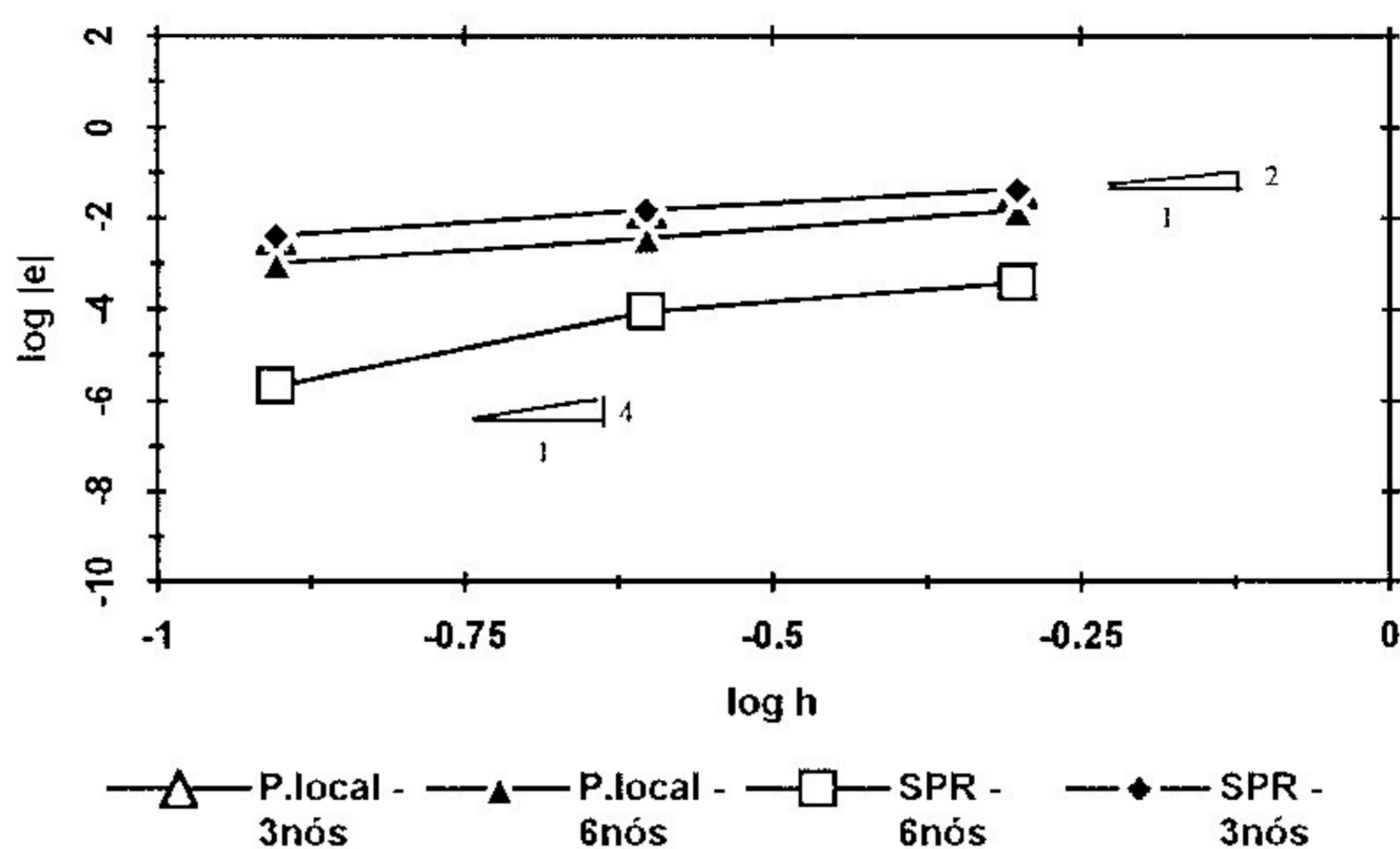


Figura 4.18: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 5.

- *Ponto 6 - nó de coordenada (187.5, 0.0)*

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $
1/2	.36759094E-1	.36759094E-1	.29065744E-1	.11576527E-3
1/4	.12753410E-1	.12753410E-1	.73166391E-2	.37932134E-5
1/8	.35310005E-2	.35310005E-2	.18497548E-2	.64318105E-8
Taxa	2	2	2	7

Tabela 4.16: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 6 para elementos lineares e quadráticos.

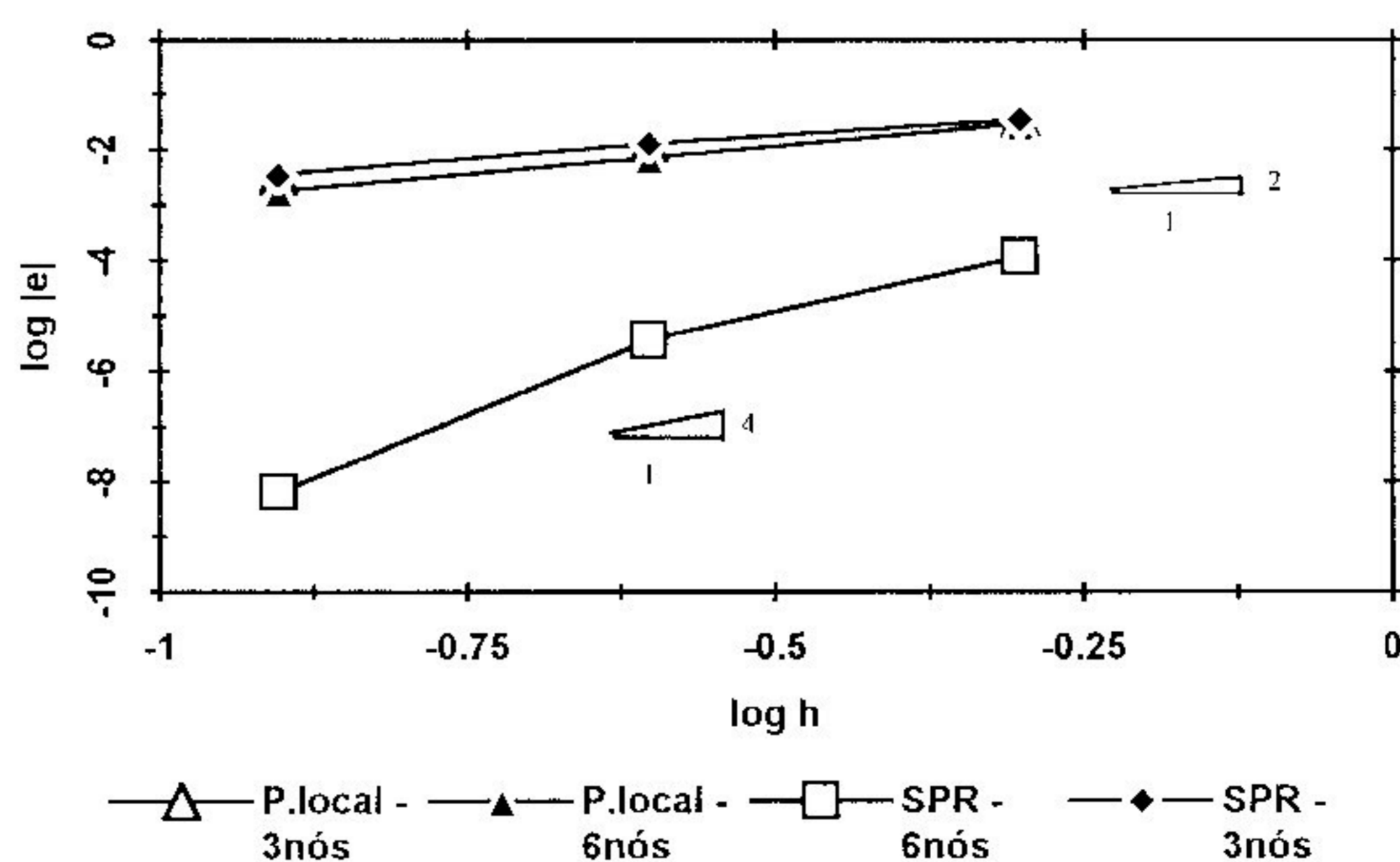


Figura 4.19: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 6.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $
1/2	.39412486E-1	.39412486E-1	.28903231E-3	.14469641E-3
1/4	.13663700E-1	.13663700E-1	.66919293E-5	.33474255E-5
1/8	.37831701E-2	.37831701E-2	.56382334E-5	.13234305E-7
Taxa	2	2	3	7

Tabela 4.17: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 6 para elementos lineares e quadráticos.

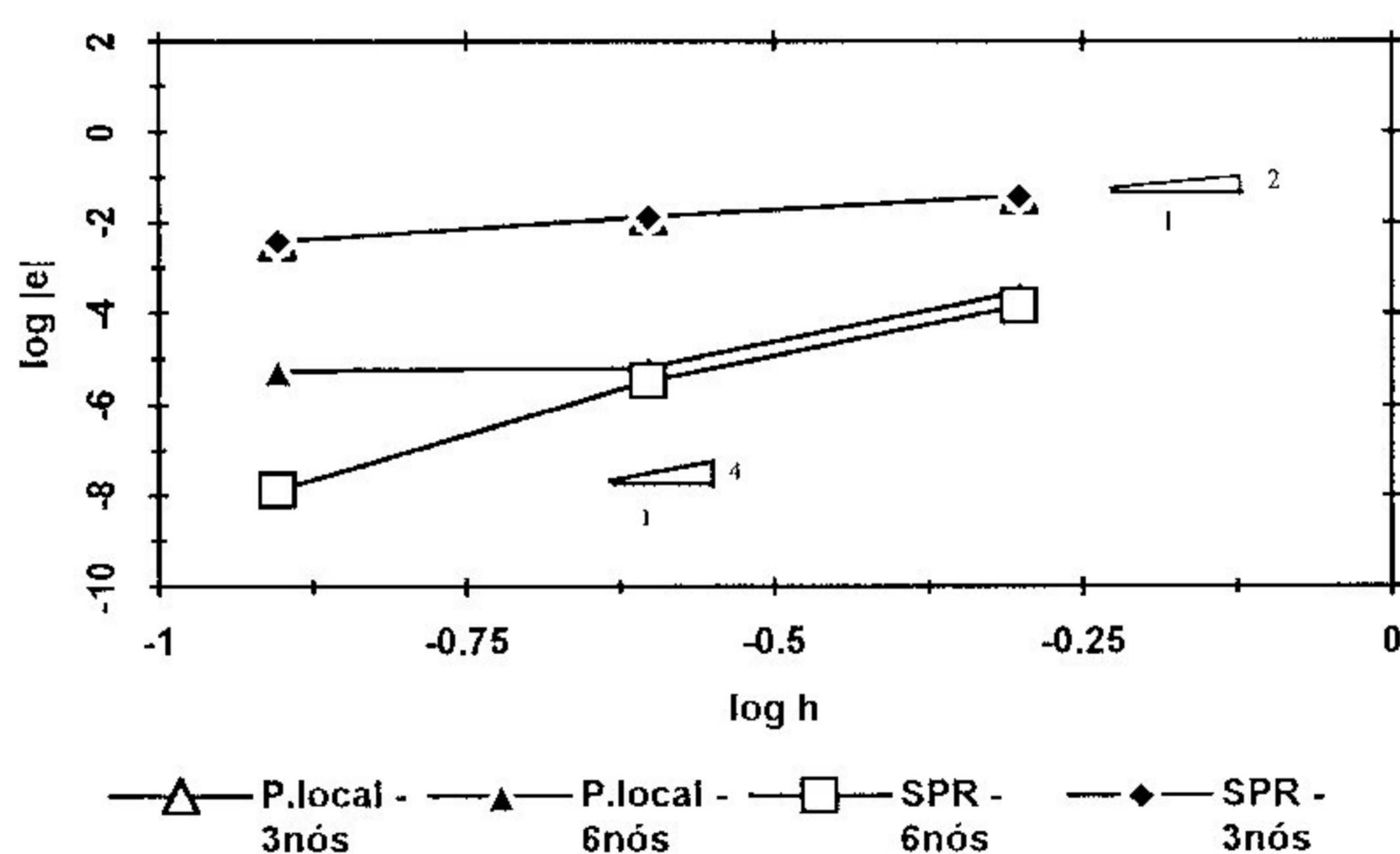


Figura 4.20: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 6.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.66472033E-1	.66472033E-1	.10705878E-1	.50645266E-3
1/4	.23065165E-1	.23065165E-1	.29036611E-2	.13013248E-4
1/8	.63858090E-2	.63858090E-2	.76661763E-3	.33525159E-7
Taxa	2	2	2	7

Tabela 4.18: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 6 para elementos lineares e quadráticos.

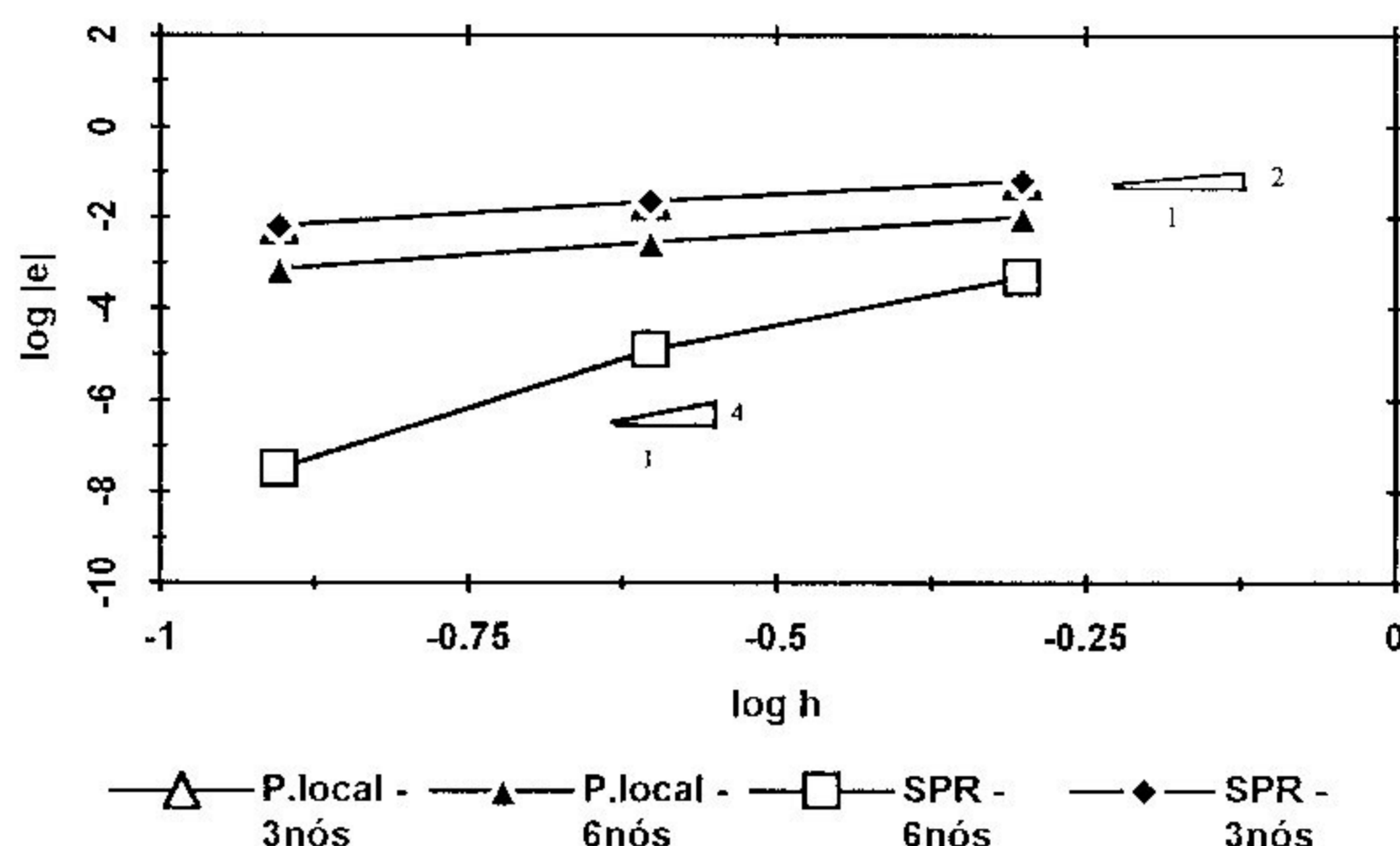


Figura 4.21: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 6.

Em elementos triangulares quadráticos pôde-se observar que as taxas médias de convergência de todas as tensões nodais recuperadas pelo procedimento *SPR*, foram no mínimo iguais a quatro (ultraconvergentes). Pela técnica de projeção local, as taxas de convergência da maioria das tensões recuperadas foram $O(h^2)$; onde algumas componentes de tensões ou divergiram do valor *exato* (entre um determinado nível de malha e outro) ou não atingiram a taxa padrão. Já para elementos triangulares lineares, taxas médias superconvergentes $O(h^2)$ dos valores nodais foram encontradas para os dois métodos de suavização considerados.

Em seguida, será feita uma análise das tensões nodais recuperadas em *três pontos do contorno*:

- *Ponto 7 - nó de coordenada (0.0, -50.0)*

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $
1/2	.35855716E1	.33092656E1	.38314034E-2	.31421171E-1
1/4	.15079713E1	.13094874E1	.22609492E-2	.38185136E-2
1/8	.56325196	.45385292	.65487583E-3	.41552223E-3
Taxa	1	1	2	3

Tabela 4.19: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 7 para elementos lineares e quadráticos.

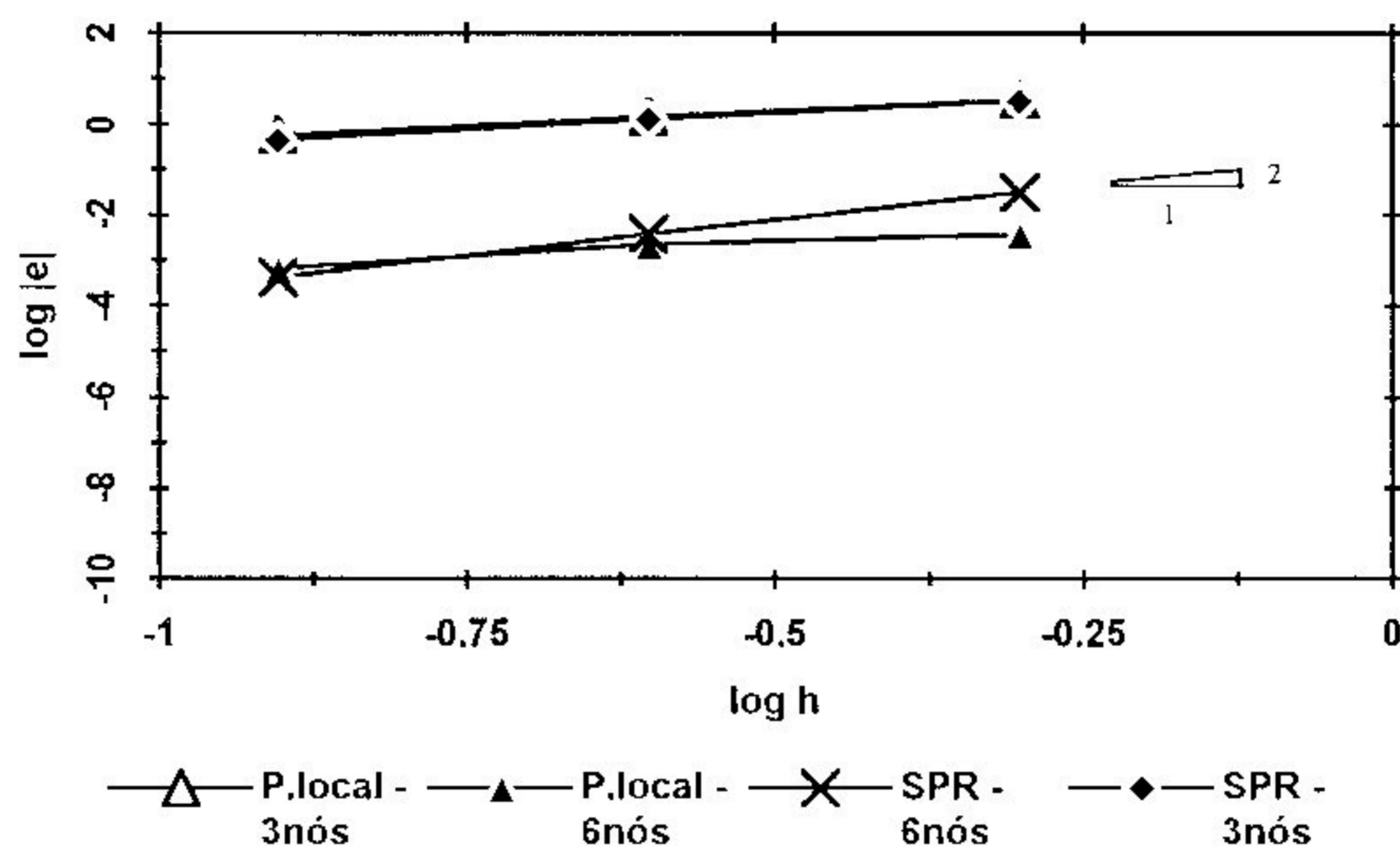


Figura 4.22: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^L e σ_x^* no ponto 7.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^L $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $
1/2	.12129833	.40685963E-2	.12511153E-2	.21548030E-3
1/4	.89628544E-1	.21712089E-2	.54415032E-3	.18622123E-3
1/8	.50318355E-1	.70627037E-3	.14862609E-3	.74678584E-4
Taxa	1	1	2	1

Tabela 4.20: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^L e σ_y^* no ponto 7 para elementos lineares e quadráticos.

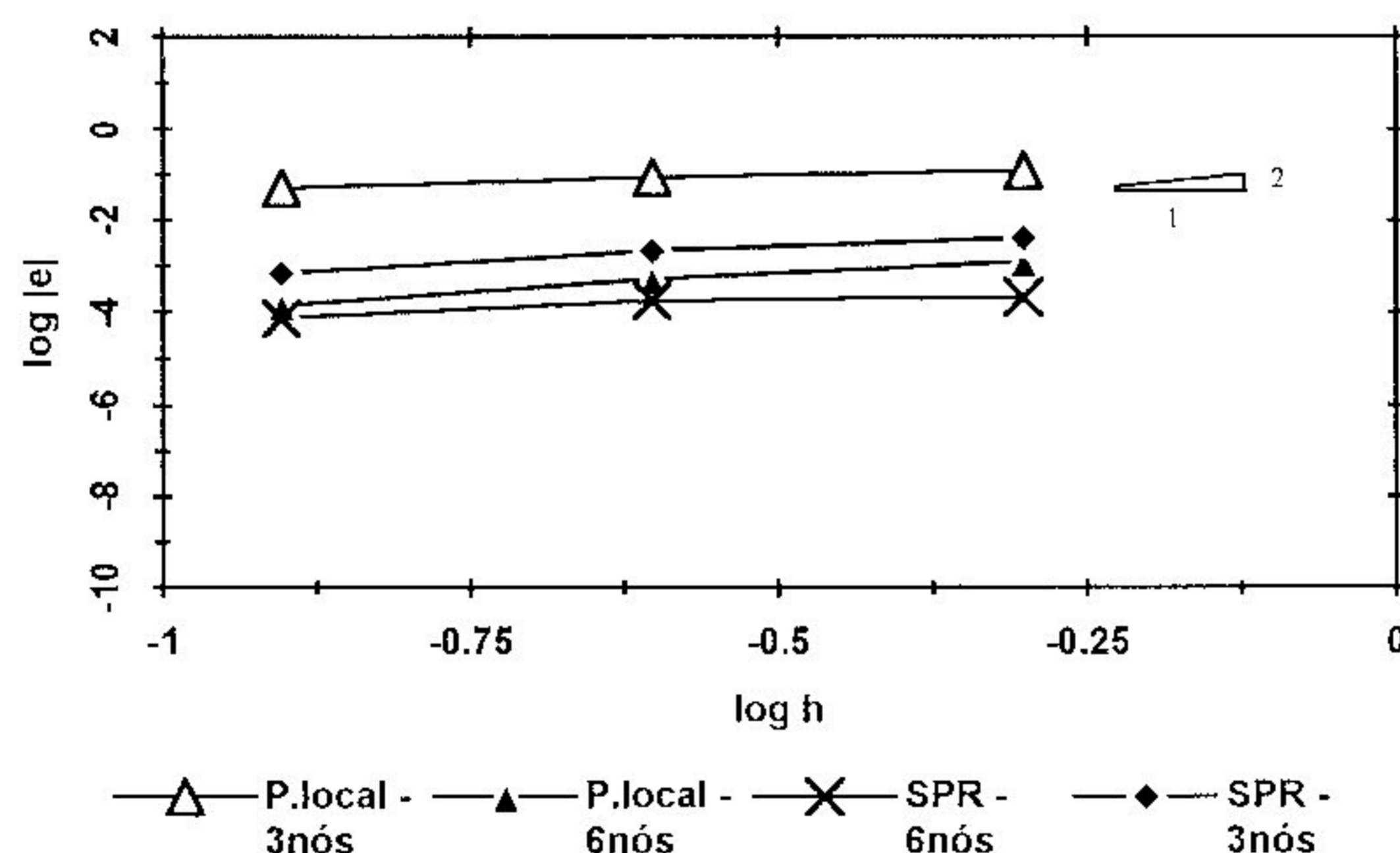


Figura 4.23: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^L e σ_y^* no ponto 7.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^l $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^l $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.36954288	.14564499E-1	.63140604E-2	.15662562E-1
1/4	.2622935	.74947691E-2	.18135585E-2	.20630839E-2
1/8	.14636914	.24128900E-2	.47476594E-3	.27617839E-3
Taxa	1	1	2	3

Tabela 4.21: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^l e σ_{xy}^* no ponto 7 para elementos lineares e quadráticos.

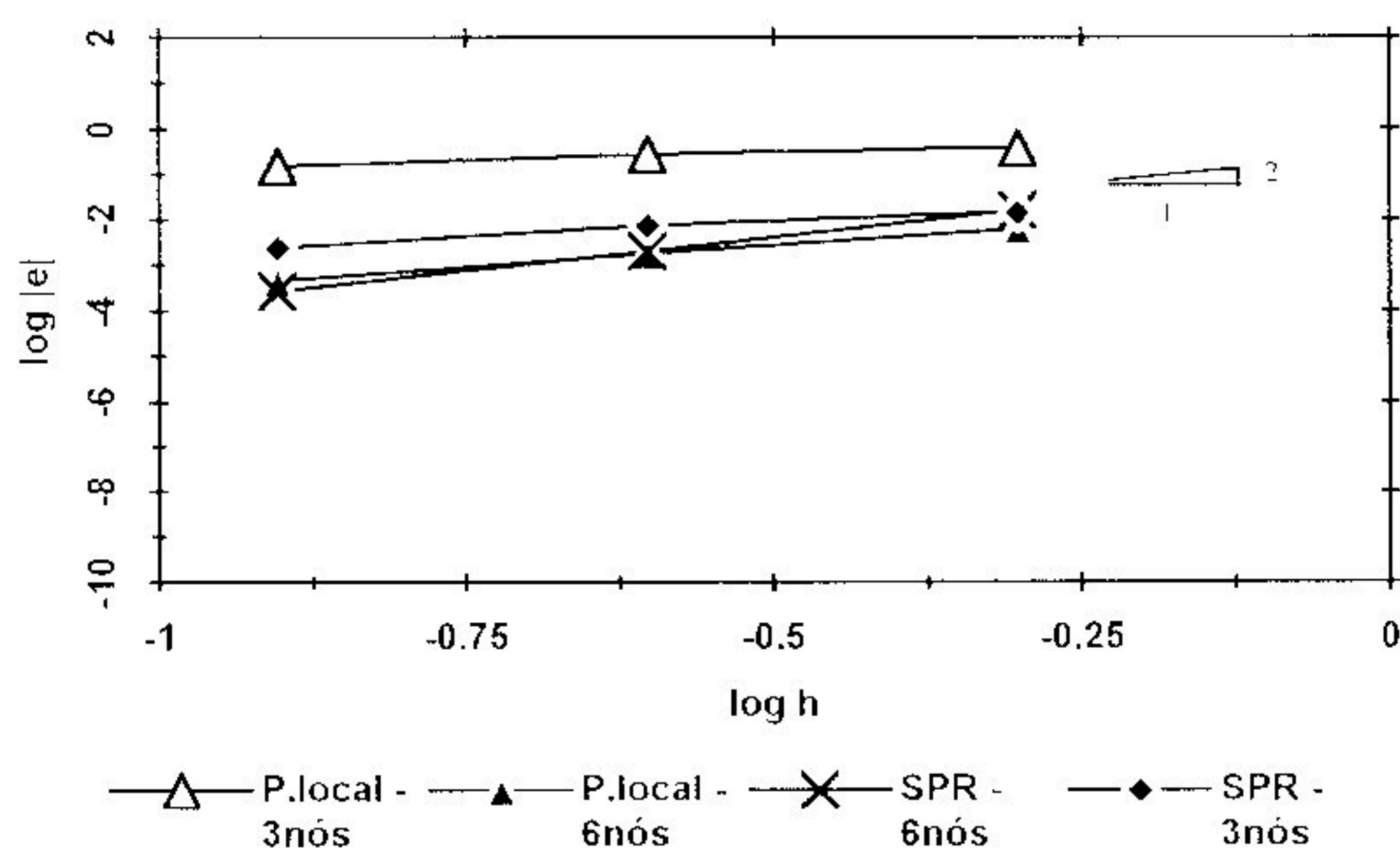


Figura 4.24: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^l e σ_{xy}^* no ponto 7.

- *Ponto 8 - nó de coordenada (-125.0, -50.0)*

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_x - \sigma_x^l $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_x - \sigma_x^l $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $
1/2	.33446090E1	.29826282E1	.26913218E-1	.40889158E-1
1/4	.13928670E1	.11655308E1	.80410940E-2	.61639889E-2
1/8	.51394942	.39704870	.21763647E-2	.10275727E-2
Taxa	1	1	2	3

Tabela 4.22: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^l e σ_x^* no ponto 8 para elementos lineares e quadráticos.

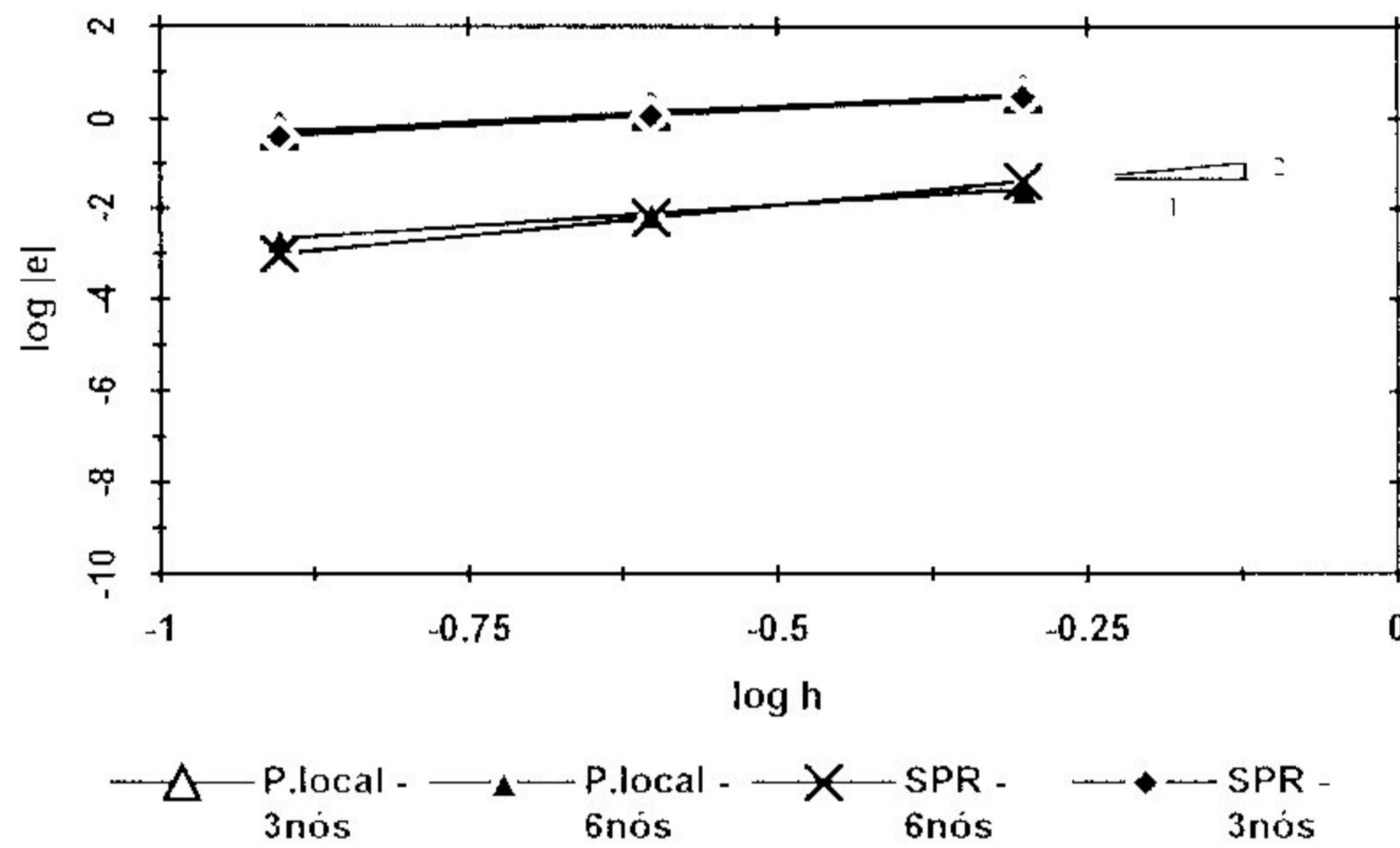


Figura 4.25: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^l e σ_x^* no ponto 8.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_y - \sigma_y^l $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^l $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $
1/2	.12331742	.30319795E-1	.23354283E-2	.38534996E-2
1/4	.81920281E-1	.11280968E-1	.80668499E-3	.76823821E-3
1/8	.43528040E-1	.32283873E-2	.23564601E-3	.17530474E-3
Taxa	1	2	2	2

Tabela 4.23: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^l e σ_y^* no ponto 8 para elementos lineares e quadráticos.

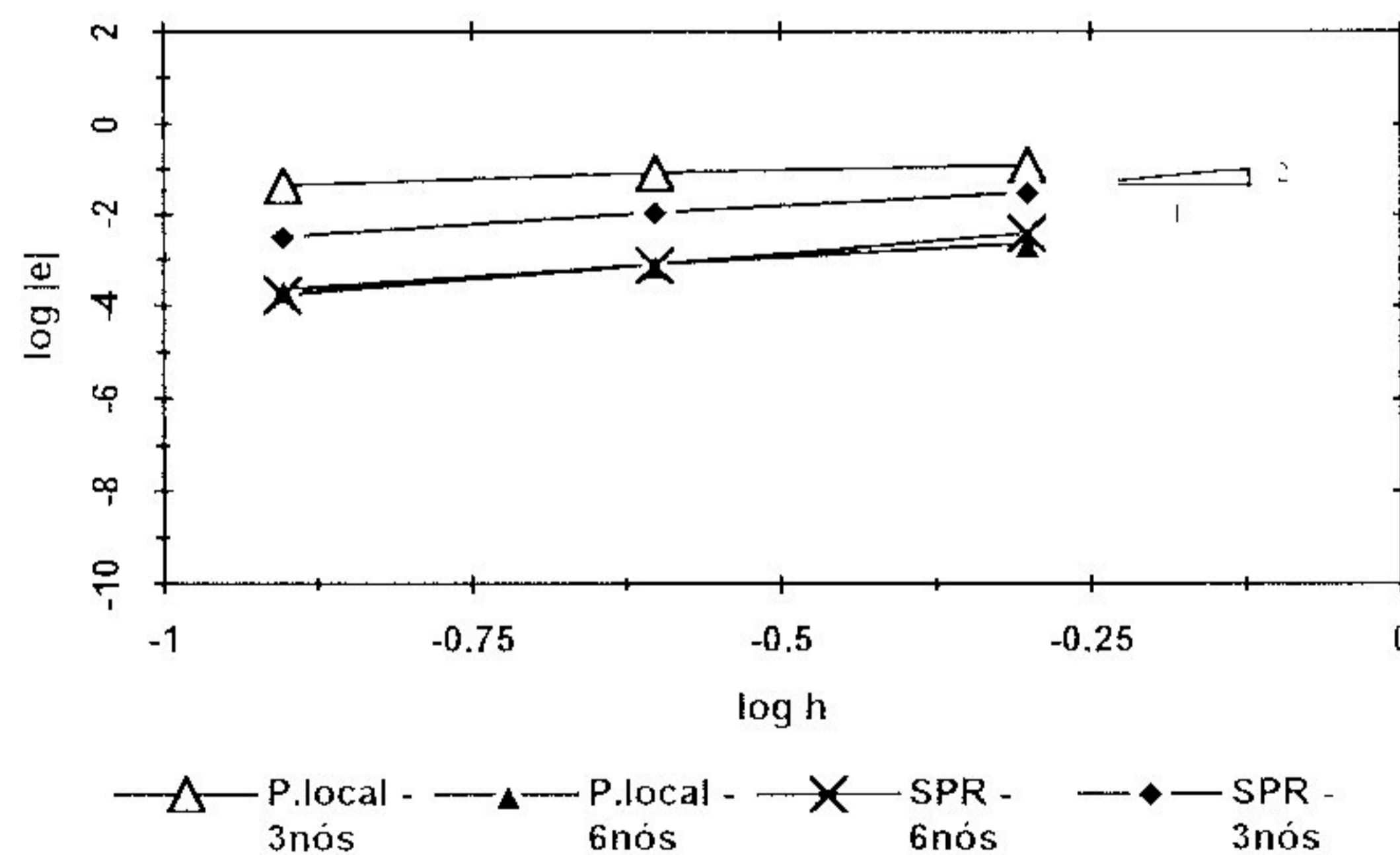


Figura 4.26: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^l e σ_y^* no ponto 8.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.42810470	.81306130E-1	.15293889E-1	.16706370E-1
1/4	.29406088	.38817394E-1	.40917720E-2	.23161676E-2
1/8	.16150184	.15604467E-1	.10932857E-2	.33801143E-3
Taxa	1	1	2	3

Tabela 4.24: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 8 para elementos lineares e quadráticos.

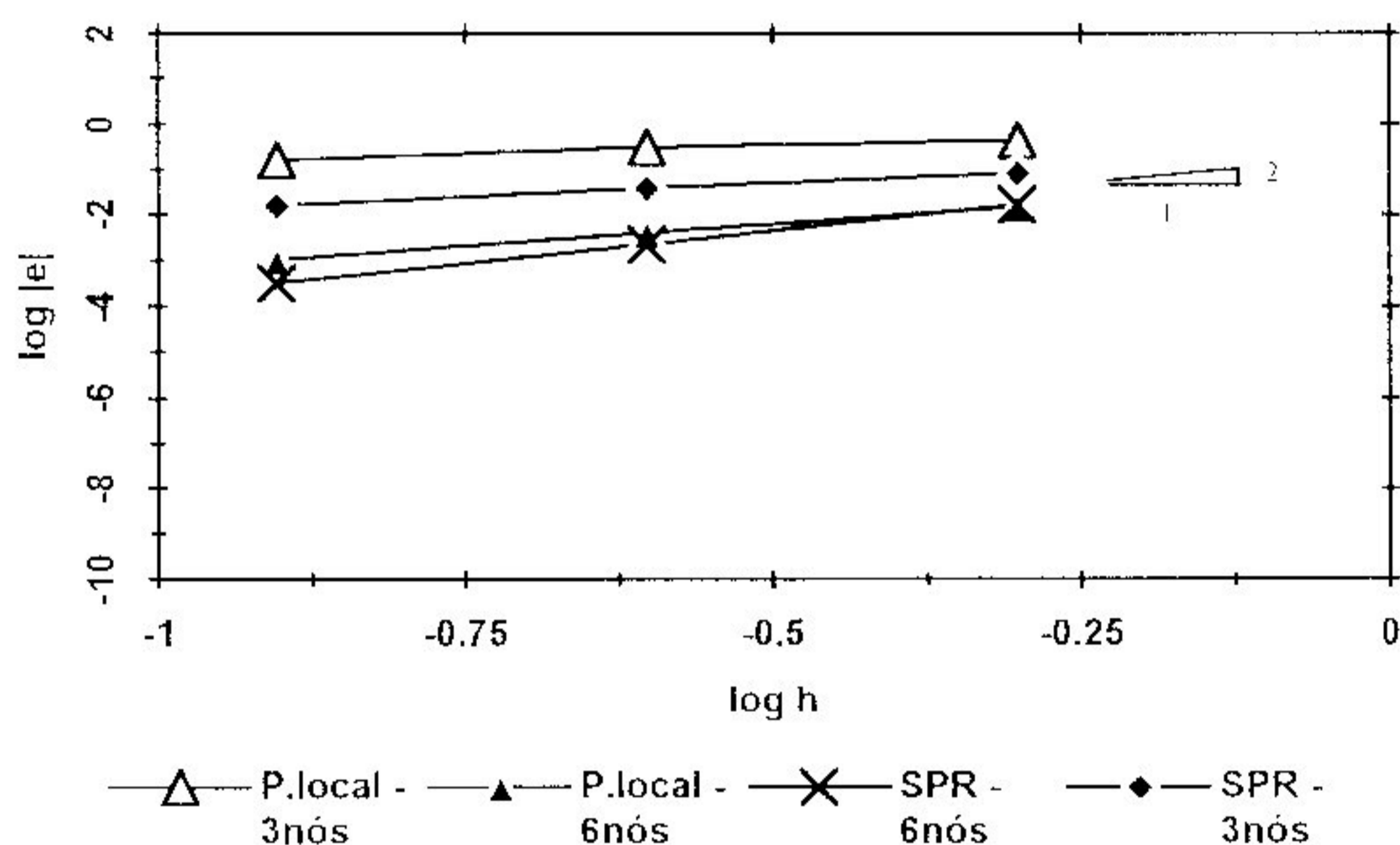


Figura 4.27: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 8.

- *Ponto 9 - nó de coordenada (125.0, -50.0)*

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $	$ \sigma_x - \sigma_x^L $	$ \sigma_x - \sigma_x^* $
1/2	.33839158E1	.32276352E1	.19250449E-1	.21954485E-1
1/4	.14371546E1	.12913673E1	.35191957E-2	.14730392E-2
1/8	.54318011	.45448571	.76605107E-3	.17228641E-3
Taxa	1	1	2	3

Tabela 4.25: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_x^L e σ_x^* no ponto 9 para elementos lineares e quadráticos.

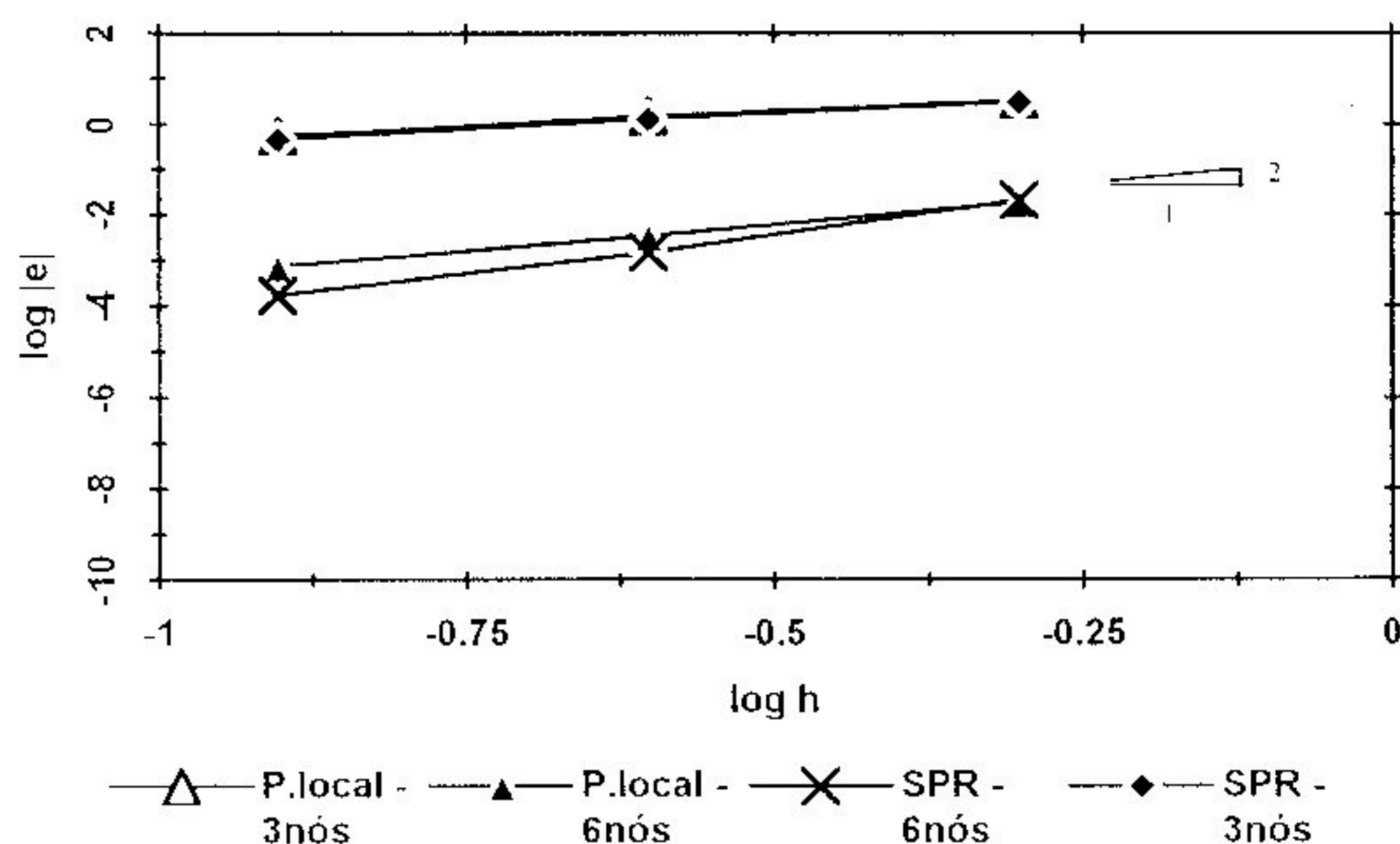


Figura 4.28: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_x^l e σ_x^* no ponto 9.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_y - \sigma_y^l $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $	$ \sigma_y - \sigma_y^l $	$ \sigma_y - \sigma_y^* $
1/2	.10312020	.22125551E-1	.16680999E-3	.42849373E-2
1/4	.86124766E-1	.69386827E-2	.28161567E-3	.11406808E-2
1/8	.50900382E-1	.18158463E-2	.88191693E-4	.31123230E-3
Taxa	1	2	-	2

Tabela 4.26: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_y^l e σ_y^* no ponto 9 para elementos lineares e quadráticos.

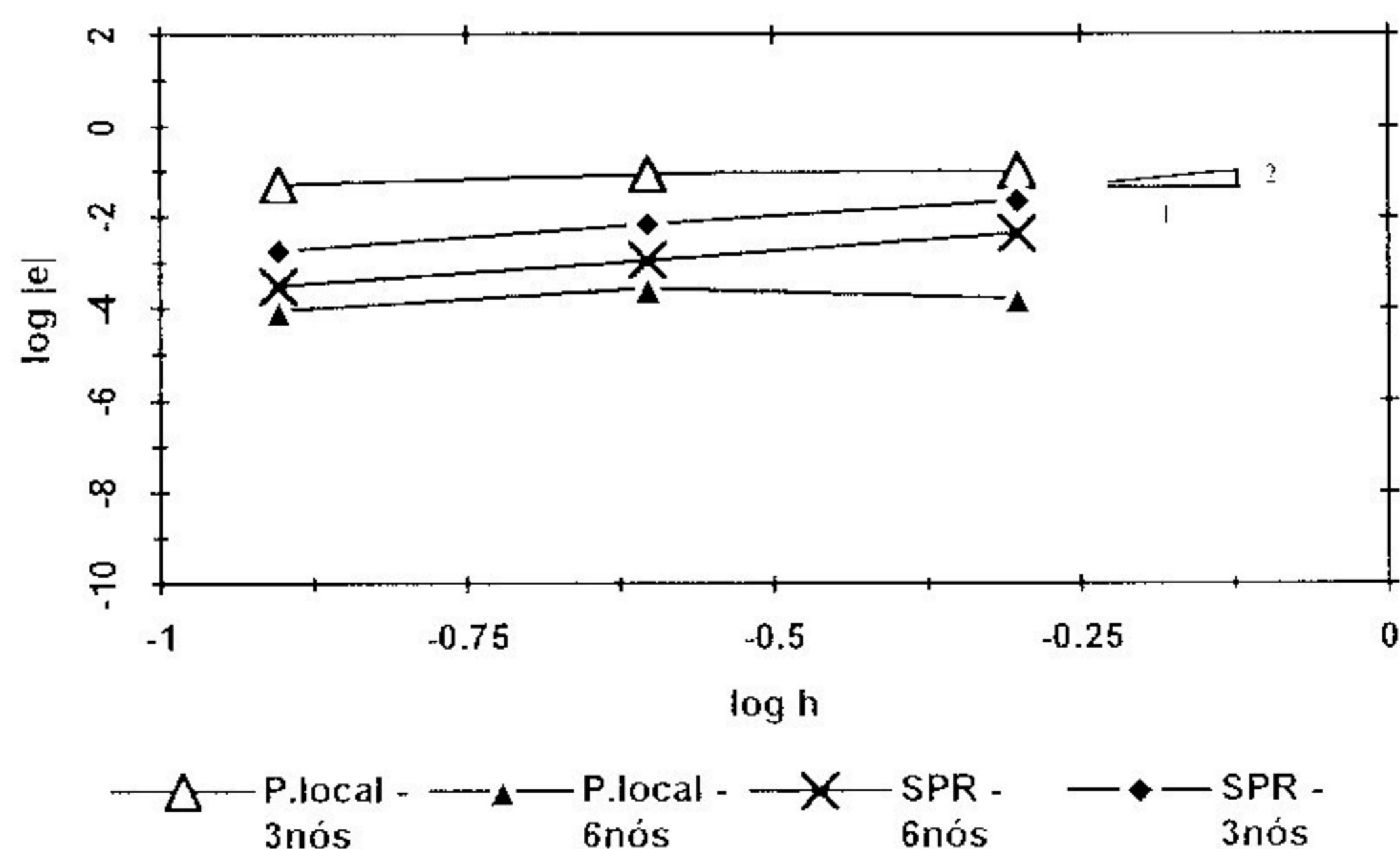


Figura 4.29: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_y^l e σ_y^* no ponto 9.

h	ELEMENTO - 3 NÓS		ELEMENTO - 6 NÓS	
	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^L $	$ \sigma_{xy} - \sigma_{xy}^* $
1/2	.26386597	.52163783E-1	.26657144E-2	.14619043E-1
1/4	.19782433	.23827987E-1	.46465487E-3	.18100003E-2
1/8	.11312893	.10778687E-1	.12137609E-3	.21230209E-3
Taxa	1	1	2	3

Tabela 4.27: Exemplo 4.2.1 - Taxa de convergência das derivadas recuperadas σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 9 para elementos lineares e quadráticos.

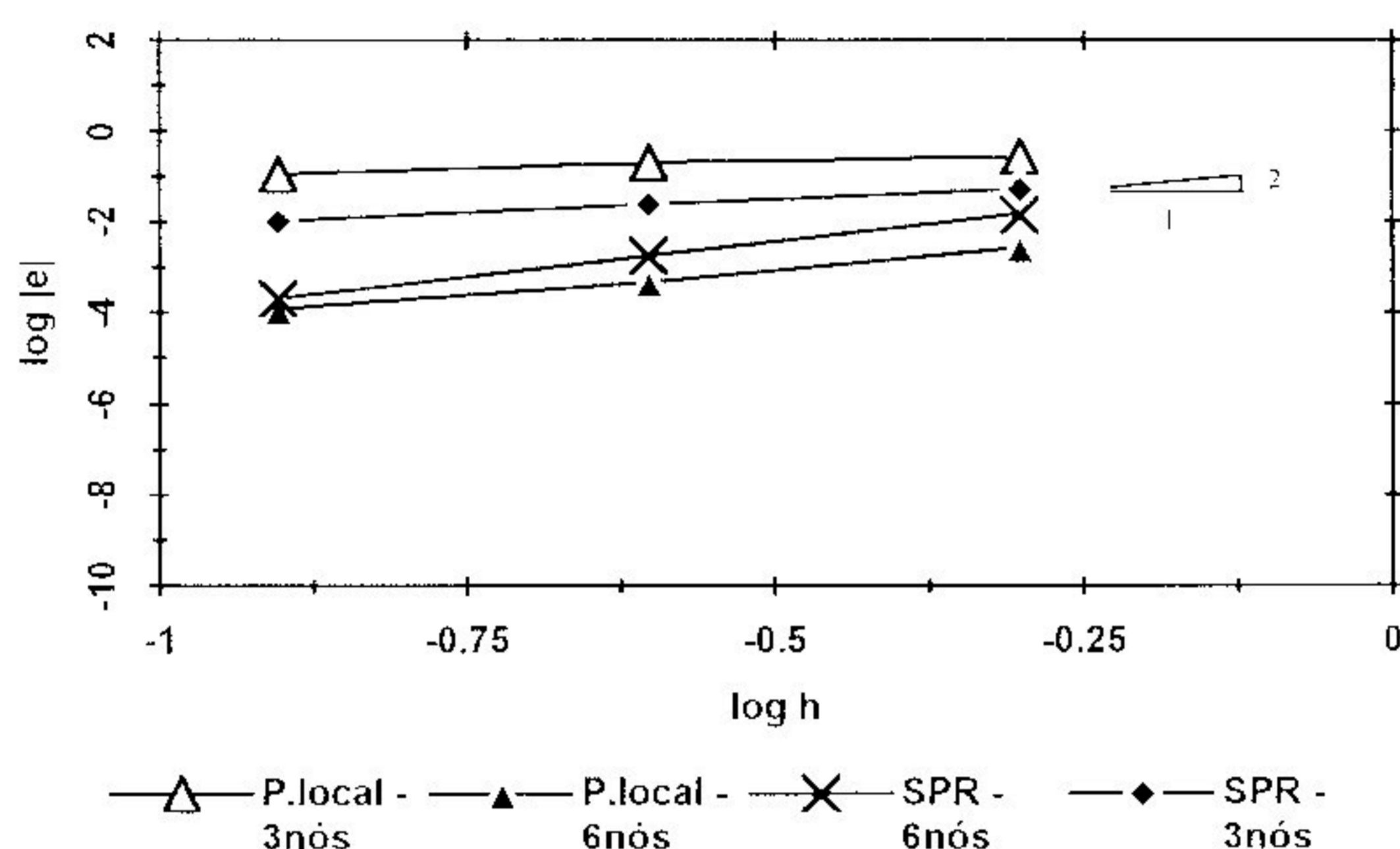


Figura 4.30: Exemplo 4.2.1 - Convergência das tensões σ_{xy}^L e σ_{xy}^* no ponto 9.

Para elementos de 6 nós, quase todas as componentes (tensões) suavizadas σ^* convergiram à uma taxa média superconvergente $O(h^3)$. Utilizando a técnica de projeção, uma componente de tensão divergiu da solução analítica (ponto de coordenada (125.0, -50.0)), e as outras convergiram à uma taxa padrão de $O(h^2)$. Já em elementos triangulares lineares, taxas médias $O(h^1)$ dos valores nodais foram encontradas para σ^L (Projeção local), e para σ^* , (método *SPR*) as taxas variaram entre $O(h^1)$ e $O(h^2)$.

A seguir, estuda-se a convergência dos valores das soluções recuperadas e da solução em elementos finitos na norma de energia. A análise é mostrada nas seguintes tabelas e figuras:

h	$\ u - u_h\ _E$	$\ u - u^L\ _E$	$\ u - u^*\ _E$
1/2	.42486697E1	.31132785E1	.29047306E1
1/4	.25063282E1	.11277103E1	.10280371E1
1/8	.13194334E1	.32946578	.28991308
Taxa	1	1.5	1.5

Tabela 4.28: Exemplo 4.2.1 - Convergência da solução obtida pelo método dos elementos finitos e das soluções recuperadas para elementos de 3 nós.

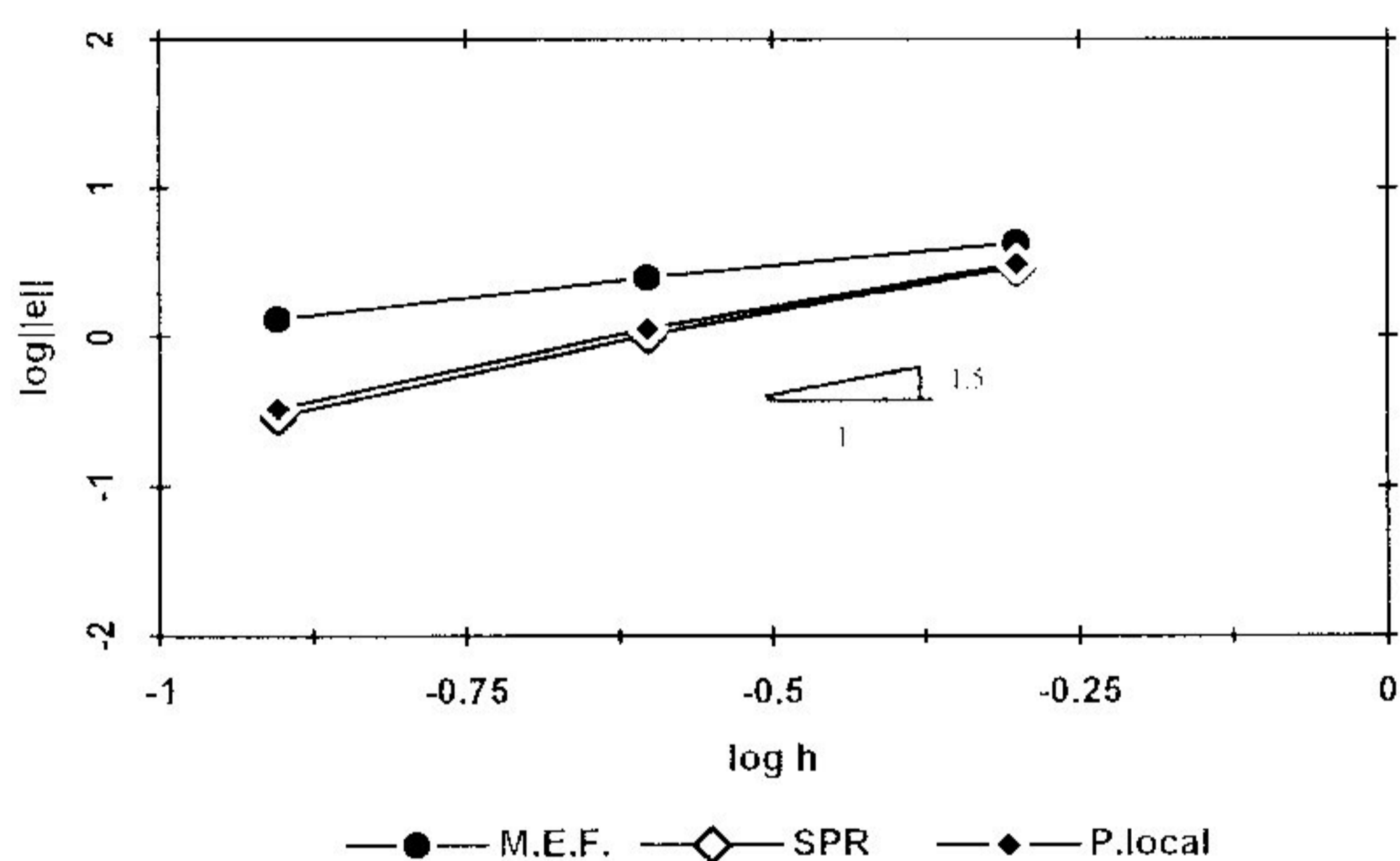


Figura 4.31: Exemplo 4.2.1 - Convergência das derivadas na norma de energia (3nós).

h	$\ u - u_h\ _E$	$\ u - u^L\ _E$	$\ u - u^*\ _E$
1/2	.10700786	.4990888E-1	.18996195E-1
1/4	.29352225E-1	.12585315E-1	.30810543E-2
1/8	.76694342E-2	.32319160E-2	.54101536E-3
Taxa	2	2	2.5

Tabela 4.29: Exemplo 4.2.1 - Convergência da solução obtida pelo método dos elementos finitos e das soluções recuperadas para elementos de 6 nós.

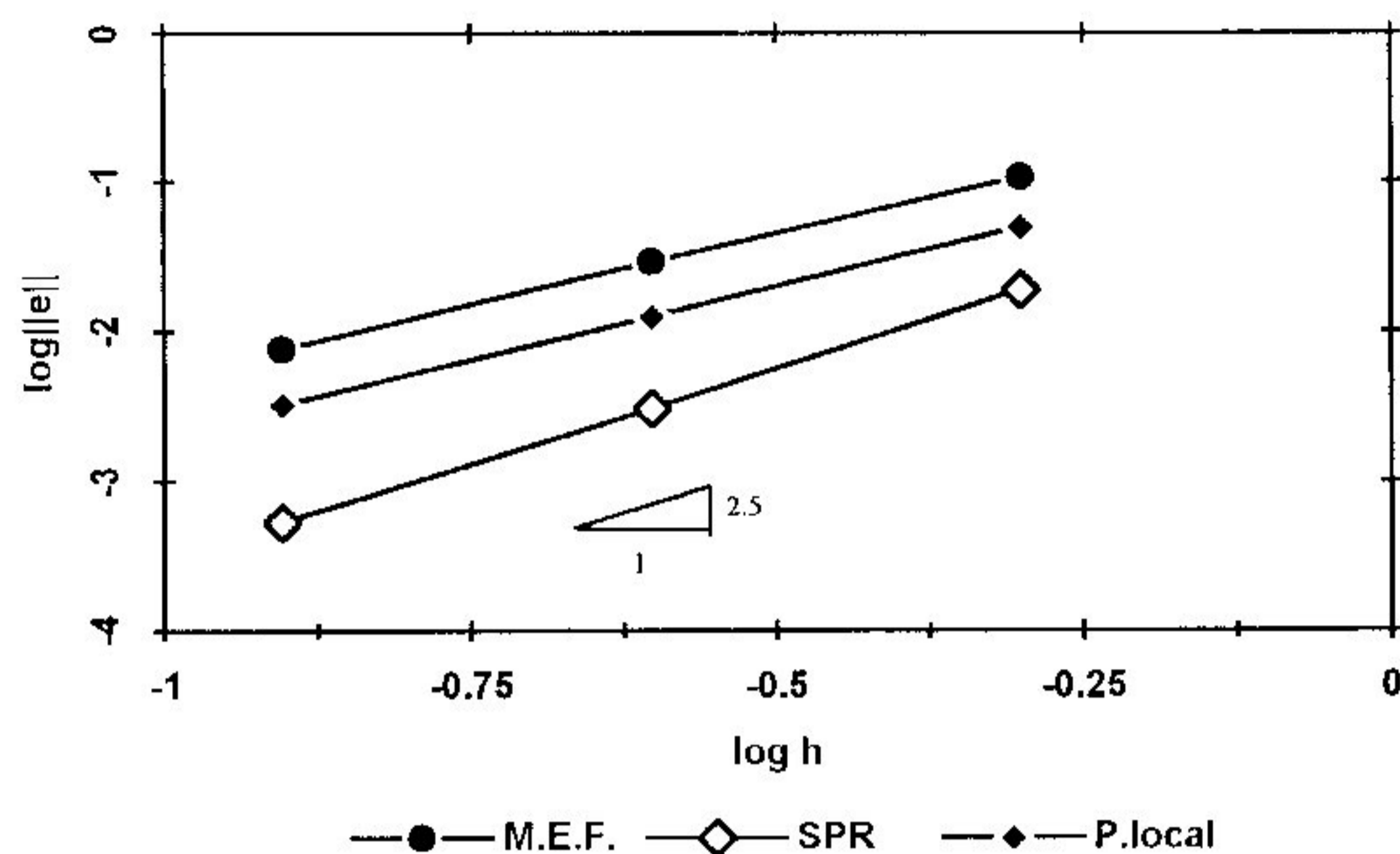


Figura 4.32: Exemplo 4.2.1 - Convergência das derivadas na norma de energia (6nós).

A convergência das soluções recuperadas na norma de energia, sendo uma medida global, é alterada pela baixa convergência dos valores nodais do contorno em relação aos valores internos. Conseqüentemente, as taxas de convergência das soluções recuperadas na norma de energia são menores que as taxas calculadas em determinados pontos nodais [Zienkiewicz e Zhu, 1992]. Os valores obtidos mostram convergência padrão para a solução aproximada pelo Método dos Elementos Finitos.

Para elementos lineares, as soluções recuperadas apresentaram taxas de convergência de ordem $O(h^{1.5})$ e para elementos quadráticos, a solução recuperada pela técnica de projeção local apresentou taxa (padrão) de convergência igual a $O(h^2)$. Para o novo procedimento de recuperação *SPR*, a solução convergiu segundo uma taxa de $O(h^{2.5})$.

A performance das estimativas utilizadas na computação do erro de discretização (das malhas utilizadas) é verificada nos gráficos abaixo através do índice de efetividade θ definido anteriormente. Se o estimador é assintoticamente exato, então o erro estimado tende para o erro exato quando a malha é refinada [Zienkiewicz e Zhu, 1992]. Os resultados numéricos confirmam o *teorema 1* descrito no capítulo 2.

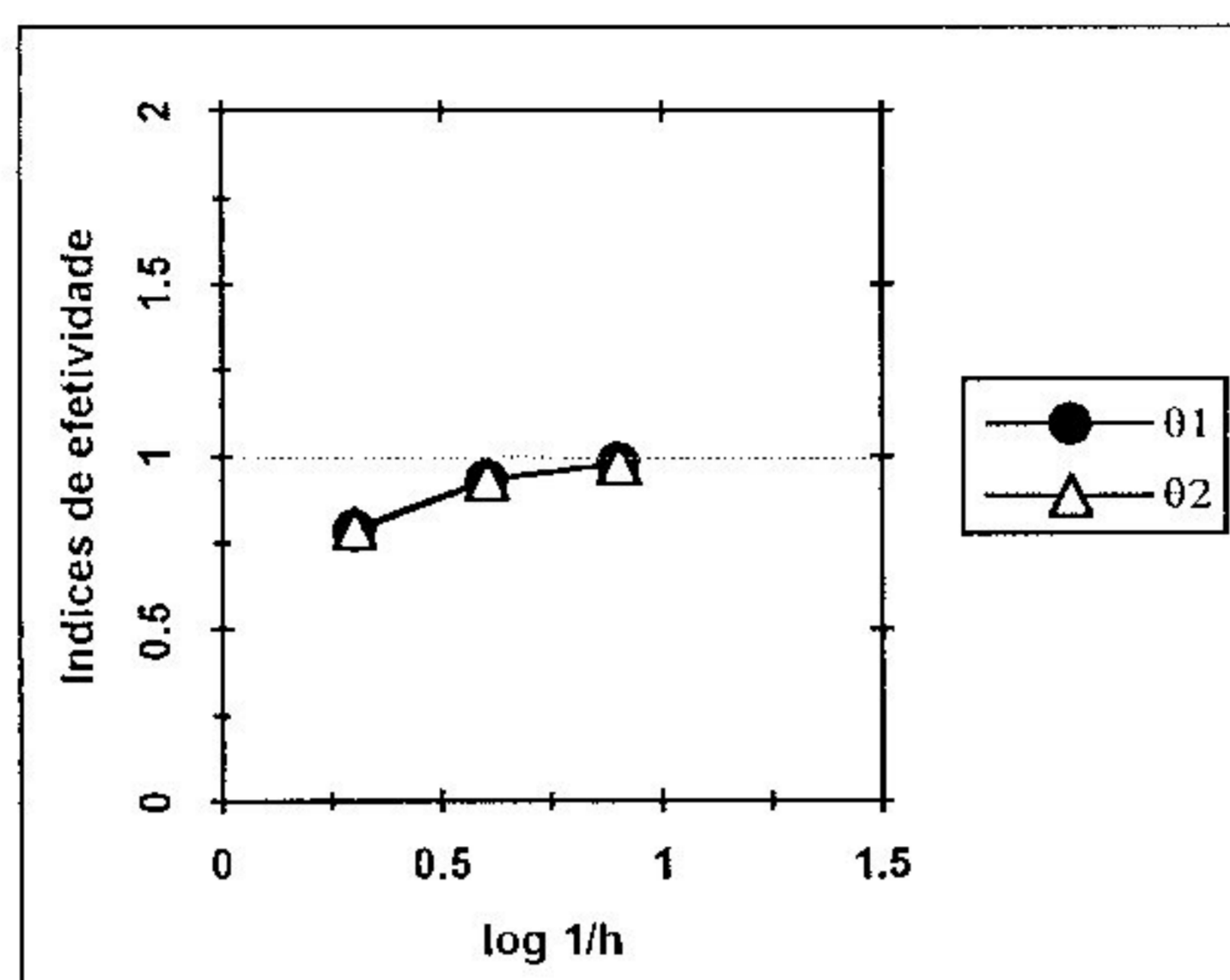


Figura 4.33: Exemplo 4.2.1 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 -*forma original*) e θ_2 (Estimador Z^2 -*modificado*) para elementos triangulares de três nós.

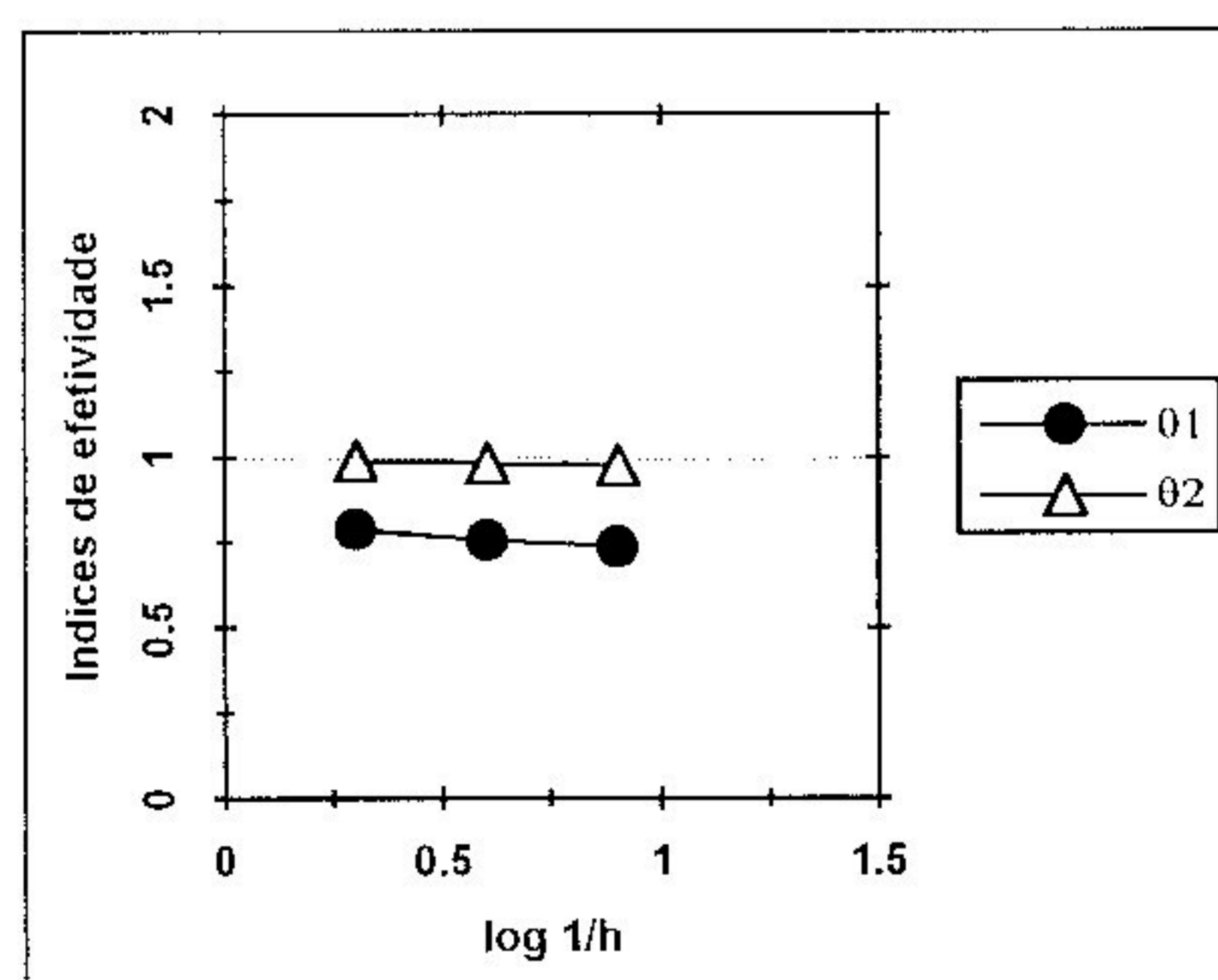


Figura 4.34: Exemplo 4.2.1 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 -*forma original*) e θ_2 (Estimador Z^2 -*modificado*) para elementos triangulares de seis nós.

4.2.2 - Placa Quadrada com Furo Quadrado.

O problema analisado é uma placa quadrada com um furo quadrado, tracionada por uma carga distribuída unidirecional [Cavalcante Neto, 1994]. A geometria do problema é mostrada na figura 4.35 (pelas condições de simetria, apenas um quarto da placa foi modelado). Considerou-se o estado plano de tensões, com coeficiente de Poisson igual a 0.3 e Módulo de Young igual a 10^5 . Através de um algoritmo adaptativo h-p de refinamento [Zienkiewicz e Zhu, 1992], adotou-se um valor para $\|u\|^2$ de 0.31132399.

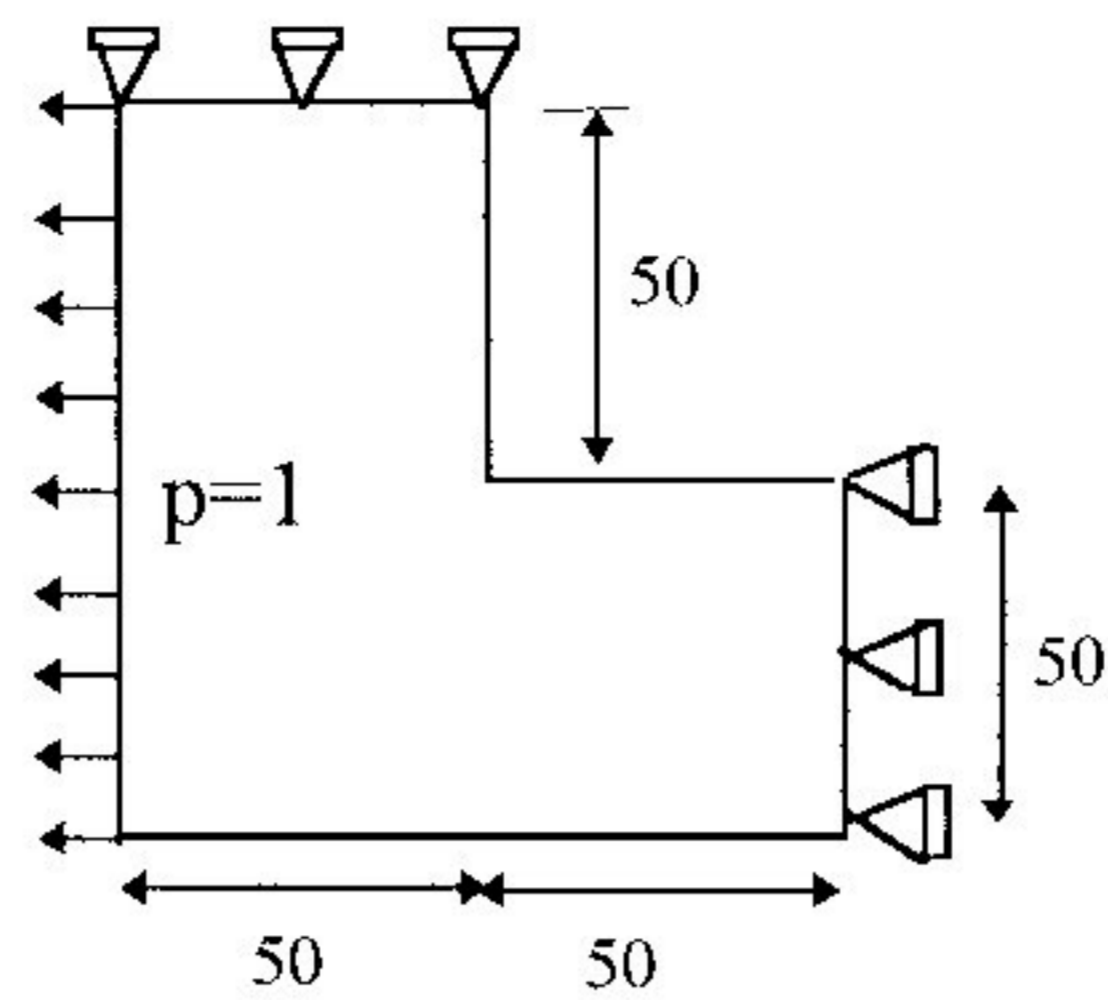


Figura 4.35: Exemplo de aplicação 4.2.2.

Na análise do problema, utilizou-se processo adaptativo r - h global [Figueiredo, 1992] e refinamento h uniforme da malha inicial (figura 4.36) para a verificação da convergência dos resultados.

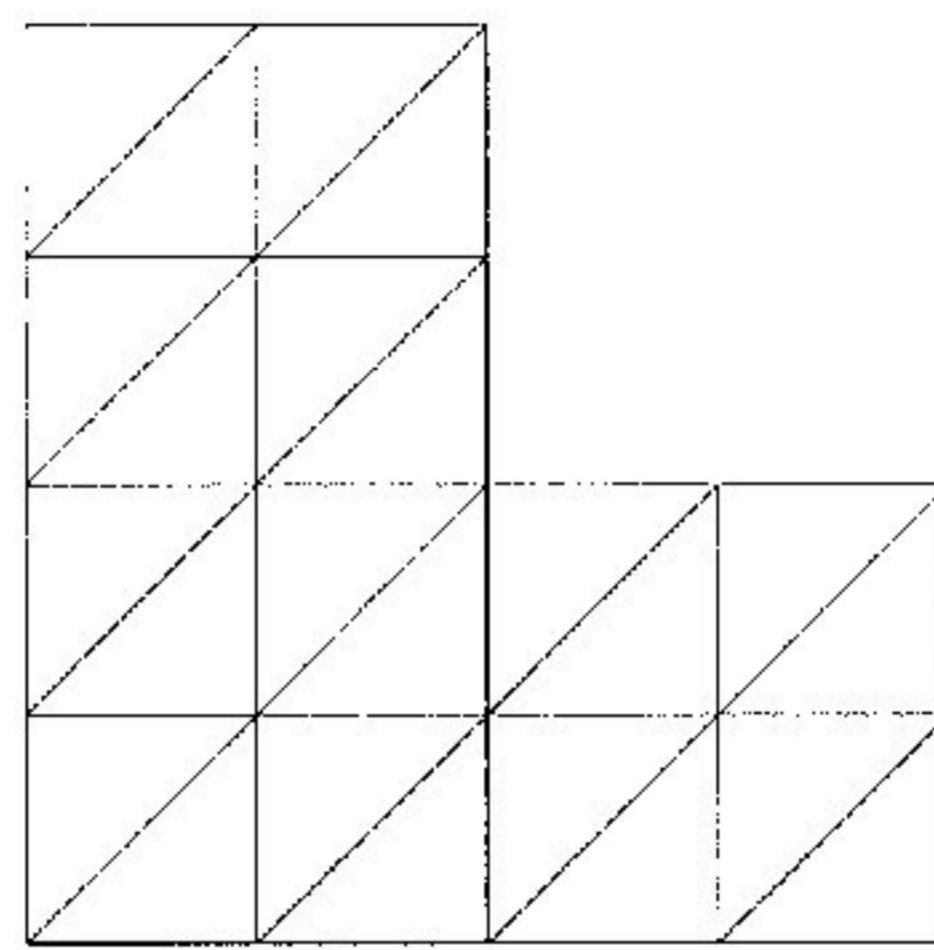


Figura 4.36: Exemplo 4.2.2 - Malha inicial (24 elementos).

Observa-se nas figuras abaixo que existe uma diferença entre os aspectos das malhas geradas para elementos lineares e quadráticos, onde isto pode ser atribuído à precisão do estimador de erro adotado.

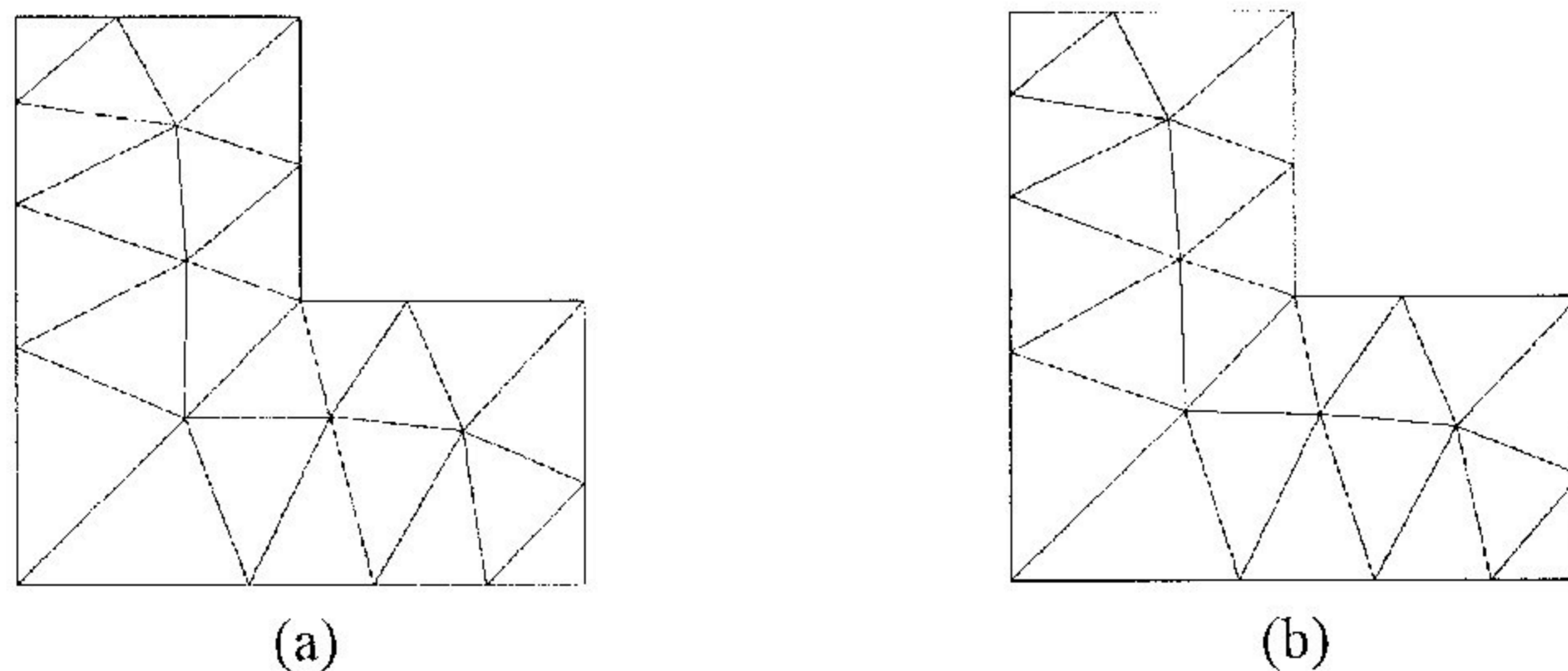


Figura 4.37: Exemplo 4.2.2 - Malhas (3 nós) geradas após adaptações r :
 (a) - Malha 3R-0H (Z^2 - original). (b) - Malha 3R-0H (Z^2 - modificado).

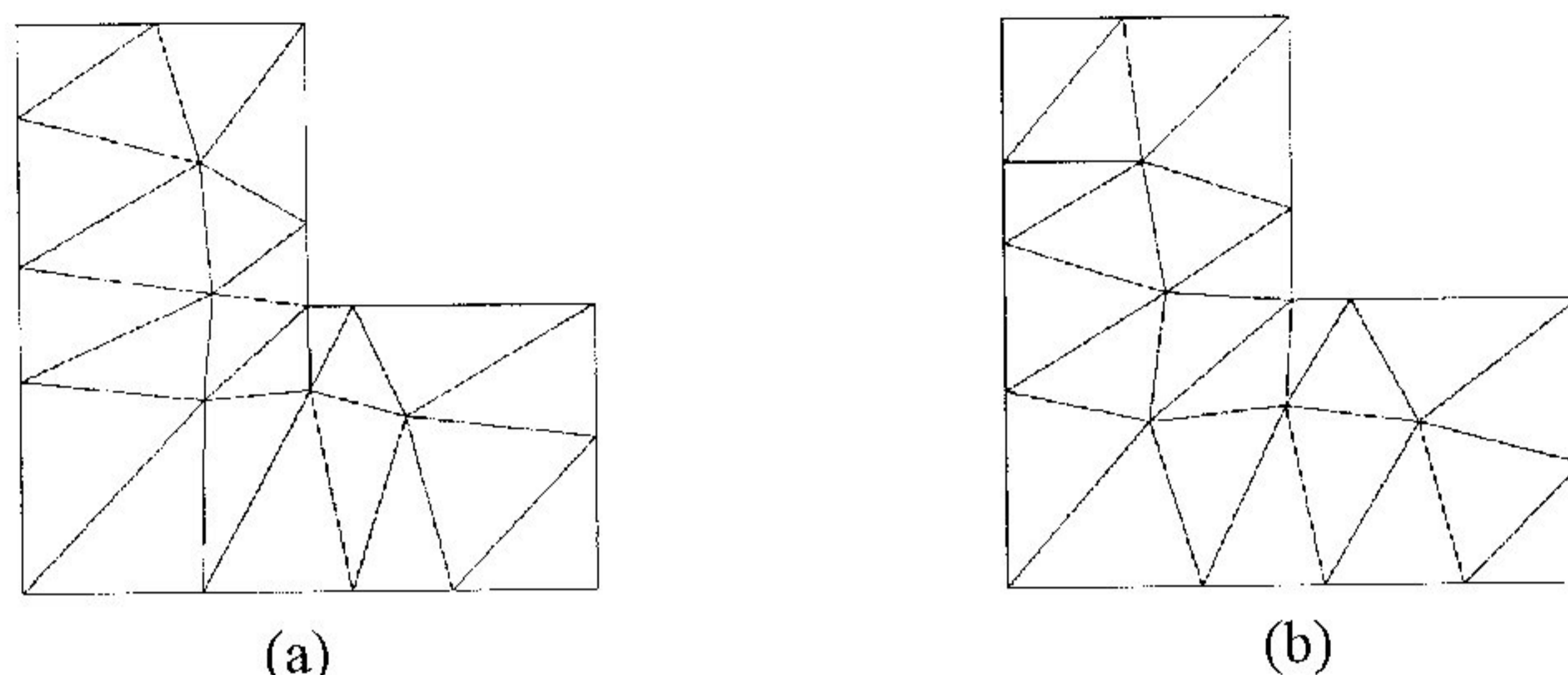


Figura 4.38: Exemplo 4.2.2 - Malhas (6 nós) geradas após adaptações r :
 (a) - Malha 3R-0H (Z^2 - original). (b) - Malha 3R-0H (Z^2 - modificado).

Os valores obtidos η^L e η^* do erro relativo na norma de energia (definidos no capítulo 2), foram estimados pelos métodos de projeção e *SPR* respectivamente. Os resultados obtidos utilizando enriquecimento h -uniforme da malha inicial e adaptações r - h são mostrados abaixo:

h	No. de equações	$\eta(\%)$	$\eta^L(\%)$	$\eta^*(\%)$
1/2	120	31.23	29.71	29.70
1/4	432	18.94	17.54	17.61
1/8	1632	11.00	10.27	10.36

Tabela 4.30: Exemplo 4.2.2 - Erro relativo na norma de energia para uma sequência uniforme de refinamentos h (elementos de 3 nós).

h	No. de equações	$\eta(\%)$	$\eta^L(\%)$	$\eta^*(\%)$
1/2	432	9.255	5.549	6.660
1/4	1632	5.980	3.575	4.296
1/8	6336	3.944	2.365	2.857

Tabela 4.31: Exemplo 4.2.2 - Erro relativo na norma de energia para uma sequência uniforme de refinamentos h (elementos de 6 nós).

Malha	$\eta(\%)$	$\eta^L(\%)$	Malha	$\eta(\%)$	$\eta^L(\%)$
1R-0H	42.85	42.95	3R-1H	26.72	26.29
2R-0H	42.28	43.19	3R-2H	15.75	14.83
3R-0H	42.26	43.48	3R-3H	9.262	8.413

Tabela 4.32: Exemplo 4.2.2 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo r - h global utilizando Z^2 original (elementos de 3 nós).

Malha	η (%)	η^* (%)	Malha	η (%)	η^* (%)
1R-0H	42.83	42.41	3R-1H	26.70	25.90
2R-0H	42.30	42.52	3R-2H	15.73	14.75
3R-0H	42.24	42.67	3R-3H	9.25	8.44

Tabela 4.33: Exemplo 4.2.2 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo r - h global utilizando Z^2 *modificado* (elementos de 3 nós).

Malha	η (%)	η^L (%)	Malha	η (%)	η^L (%)
1R-0H	12.09	7.57	3R-1H	6.59	4.12
2R-0H	11.80	7.35	3R-2H	4.14	2.61
3R-0H	11.71	7.31	3R-3H	2.70	1.73

Tabela 4.34: Exemplo 4.2.2 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo r - h global utilizando Z^2 *original* (elementos de 6 nós).

Malha	η (%)	η^* (%)	Malha	η (%)	η^* (%)
1R-0H	12.98	14.74	3R-1H	7.49	5.63
2R-0H	12.66	15.05	3R-2H	4.79	3.54
3R-0H	12.59	15.12	3R-3H	3.15	2.35

Tabela 4.35: Exemplo 4.2.2 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo r - h global utilizando Z^2 *modificado* (elementos de 6 nós).

Como critério de parada do processo, adotou-se um erro relativo máximo de 10% para elementos lineares e de 5% para os quadráticos.

Após refinamento h uniforme, a porcentagem relativa dos erros exato e estimado não atingiu o limite prescrito para aproximações lineares. Já para aproximações quadráticas, o erro relativo exato η atendeu o critério de parada somente no último nível e os valores estimados η^L e η^* no segundo nível de refinamento. No procedimento adaptativo r - h global as porcentagens relativas dos erros para elementos de 3 nós atingiram o limite pré-estabelecido na fase 3R-3H e para elementos de 6 nós na fase 3R-2H.

Outra técnica para solução deste mesmo problema foi utilizada por C. K. Lee e S. H. Lo (1992), onde três e dois passos de refinamento adaptativo h a partir da malha inicial (figura 4.36) foram necessários para atender o critério de parada (definido acima) para elementos triangulares lineares e quadráticos respectivamente. A técnica de projeção global foi utilizada na computação do estimador Z^2 .

A norma de energia para o erro local foi se distribuindo pelos elementos a medida que se aumentava o numero de passos de adaptação r .

Nas seguintes figuras foi traçado, em escala log-log, o número de equações, N , versus o erro relativo na norma de energia. Para o processo adaptativo, considerou-se os resultados à partir do nível 3R-1H.

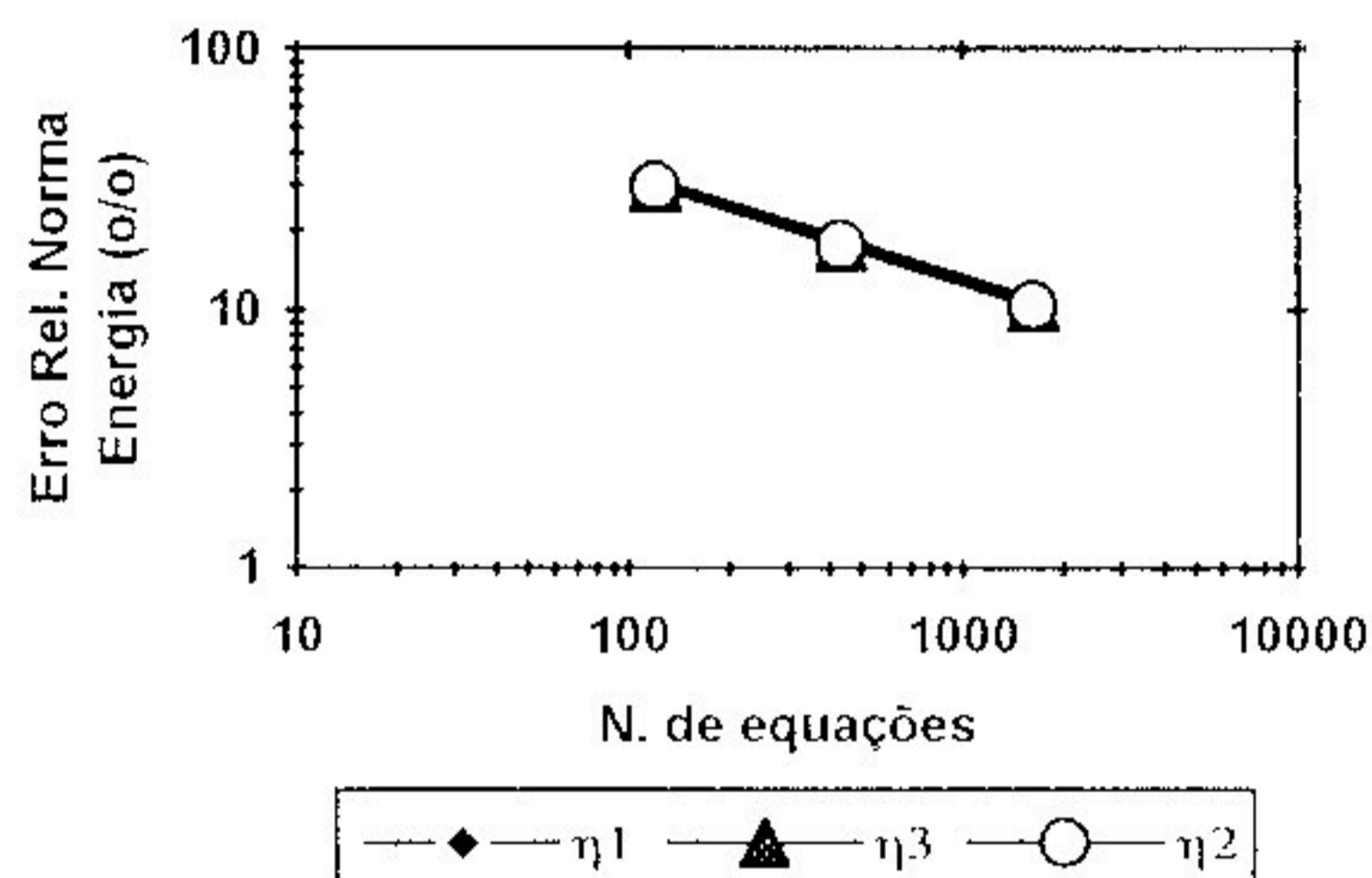


Figura 4.39: Exemplo 4.2.2 - Convergência das soluções em refinamento h uniforme (3 nós): η_1 (exato). η_2 (P. local). η_3 (SPR).

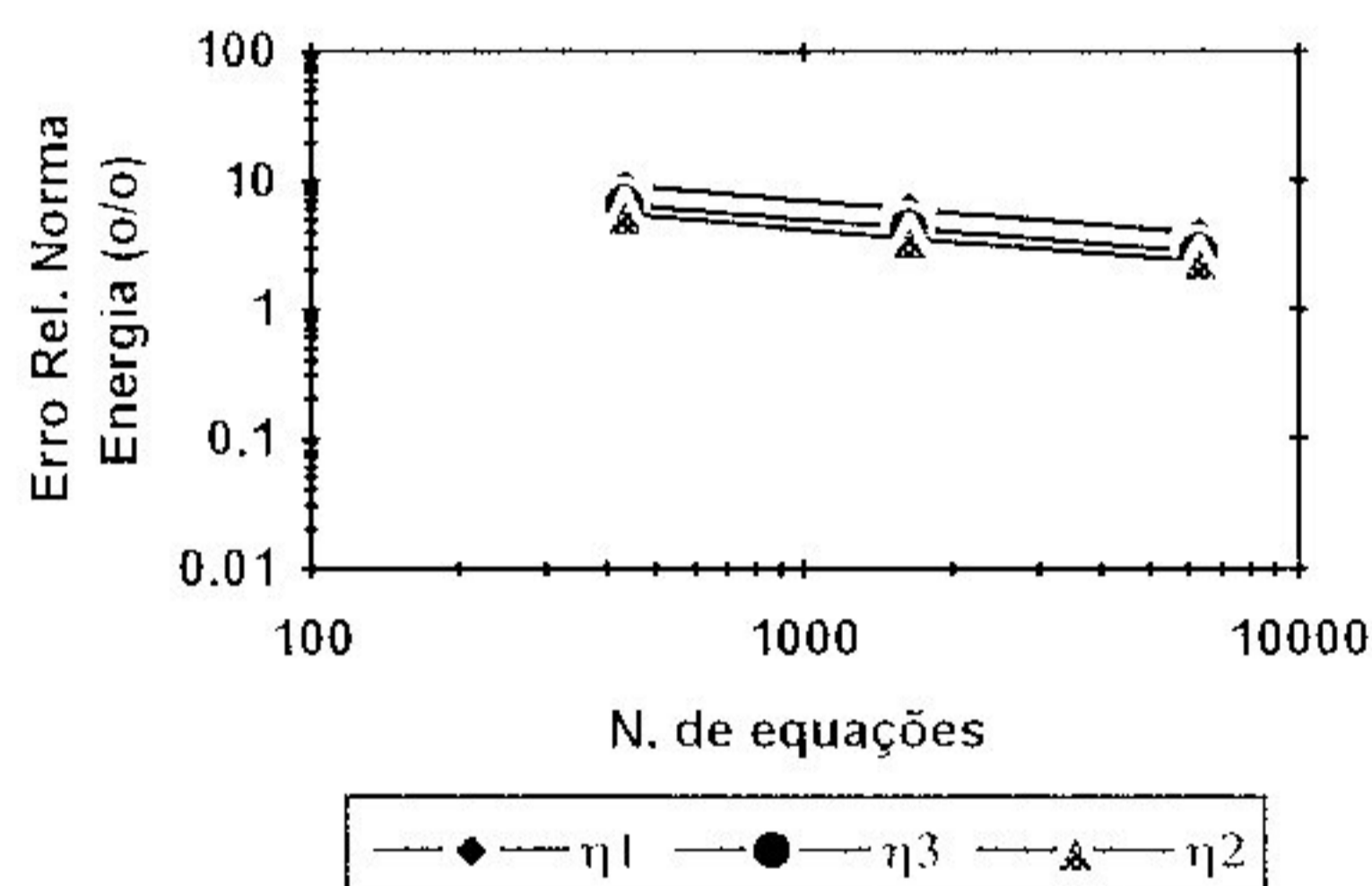


Figura 4.40: Exemplo 4.2.2 - Convergência das soluções em refinamento h uniforme (6 nós). η_1 (exato). η_2 (P. local). η_3 (SPR).

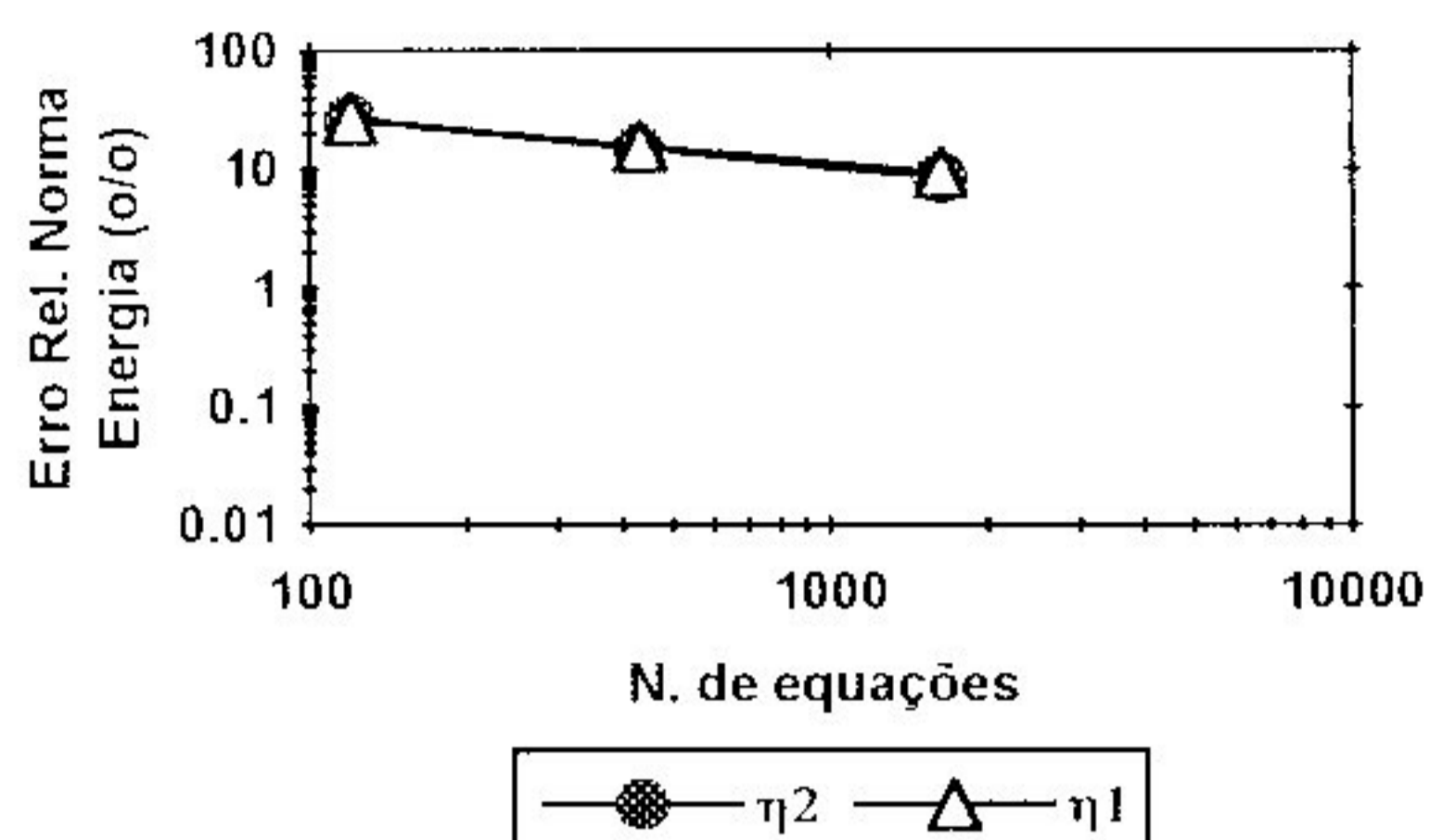


Figura 4.41: Exemplo 4.2.2 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos lineares: η_1 (exato). η_2 (P. local).

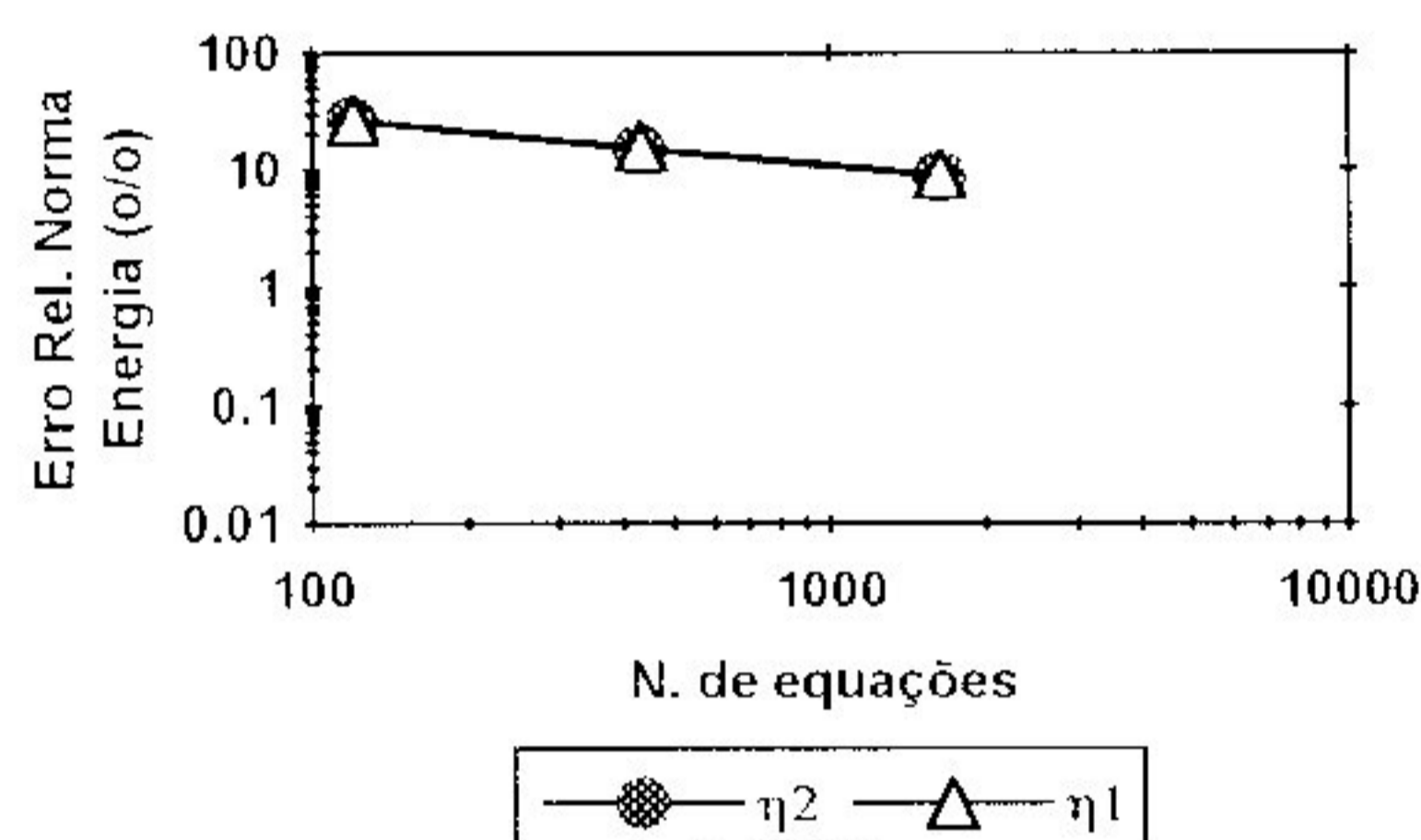


Figura 4.42: Exemplo 4.2.2 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos lineares: η_1 (exato). η_2 (SPR).

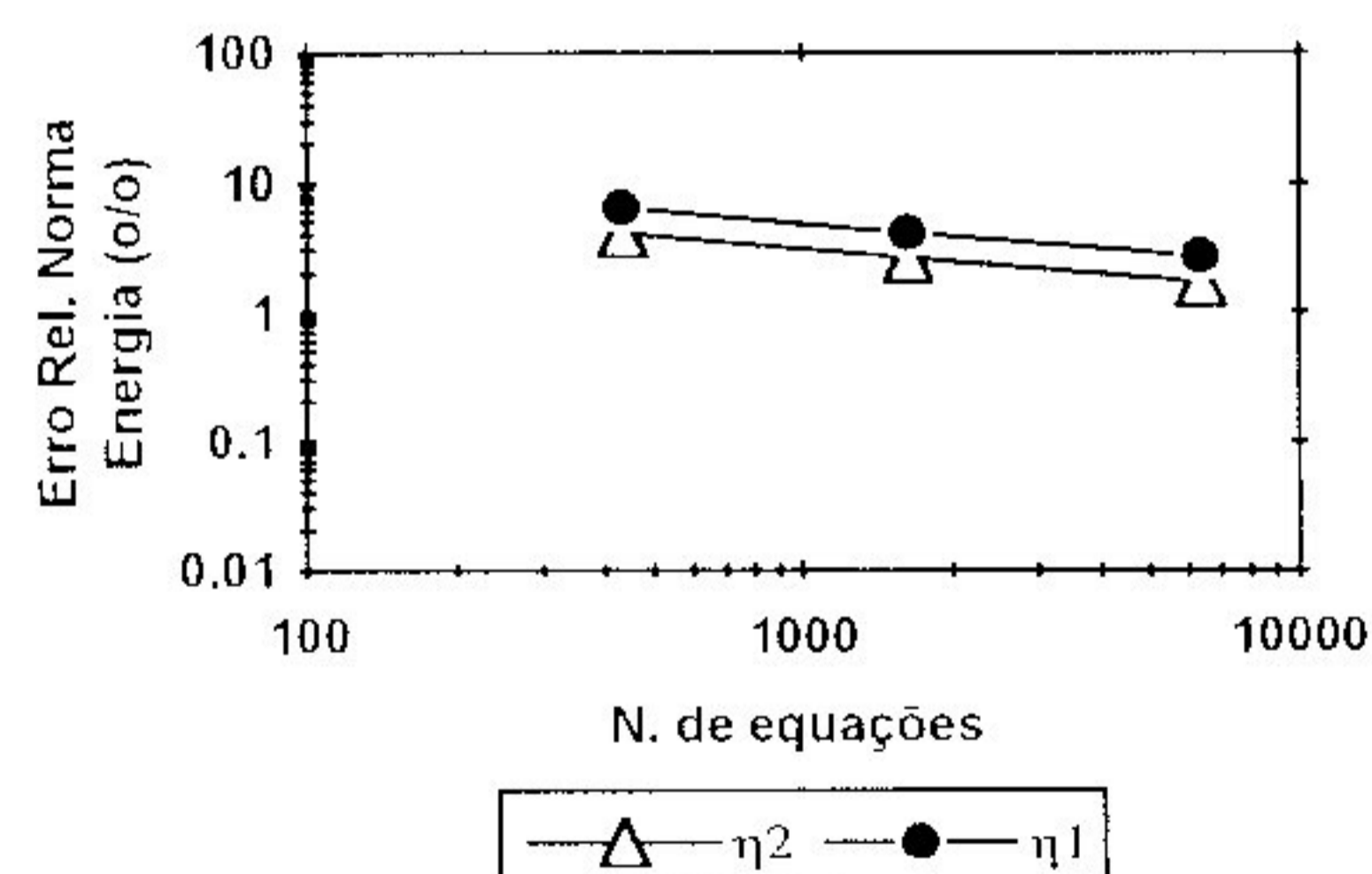


Figura 4.43: Exemplo 4.2.2 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos quadráticos: η_1 (exato). η_2 (P. local).

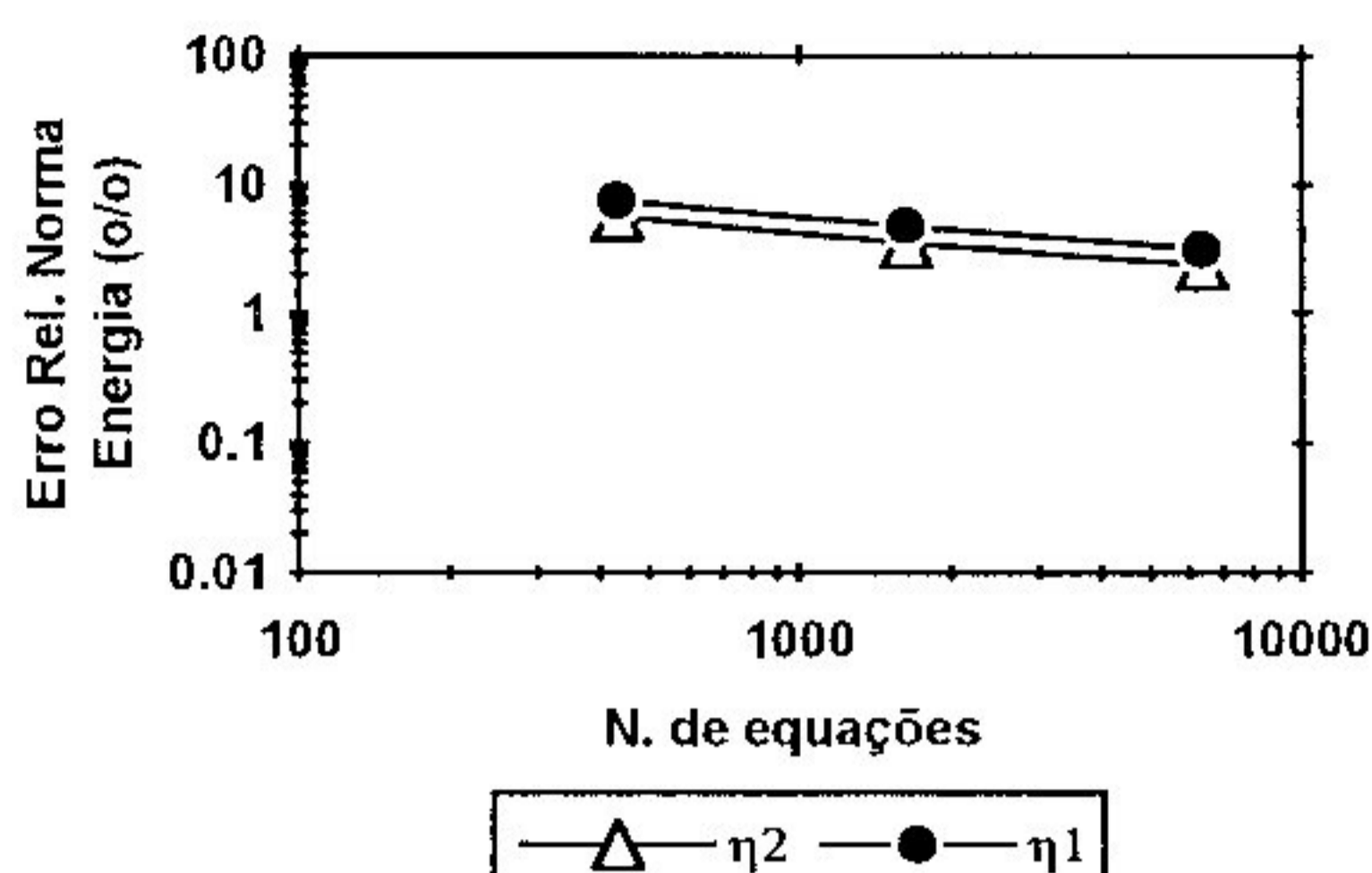


Figura 4.44: Exemplo 4.2.2 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos quadráticos: η_1 (exato). η_2 (SPR).

A convergência do índice de efetividade do estimador Z^2 é mostrado nas figuras abaixo para uma sequência de refinamentos uniformes à partir da malha inicial. De acordo com a figura 4.45, (considerando elementos de 3 nós) a efetividade do estimador Z^2 na forma *original* (utilizando projeção local) e *modificada* (utilizando o procedimento *SPR*) é praticamente a mesma, tendendo para a unidade.

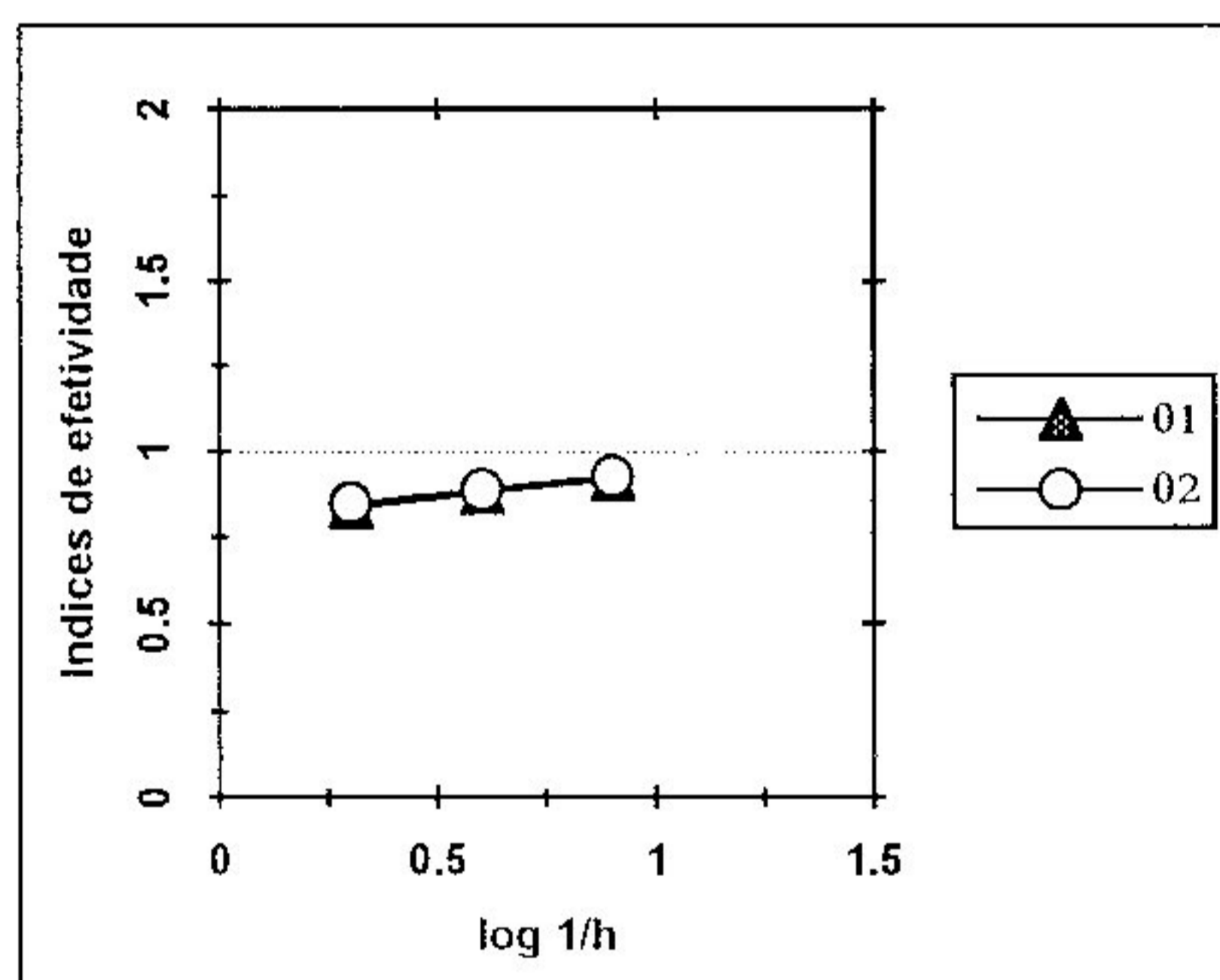


Figura 4.45: Exemplo 4.2.2 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 -*forma original*) e θ_2 (Estimador Z^2 -*modificado*) para elementos triangulares de três nós.

Pela figura 4.46, (considerando elementos de 6 nós) pôde-se observar que a convergência dos índices de efetividade não é significativa. Na avaliação do estimador Z^2 , o procedimento *SPR* de recuperação das derivadas mostrou ainda certa superioridade em relação à técnica de projeção local.

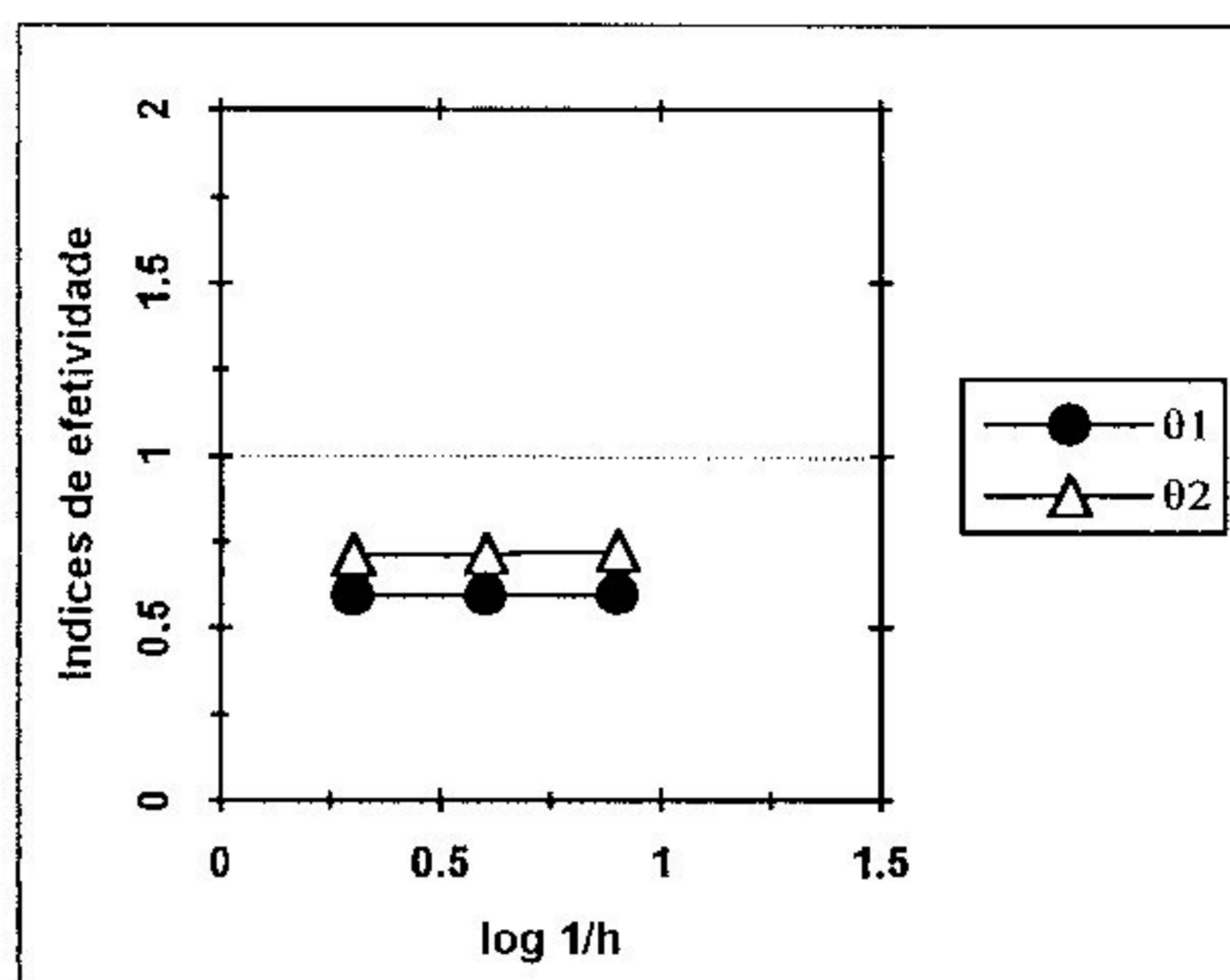


Figura 4.46: Exemplo 4.2.2 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 -*forma original*) e θ_2 (Estimador Z^2 -*modificado*) para elementos triangulares de seis nós.

Considerando o processo r - h de refinamento, tem-se nas figuras 4.47 e 4.48 os resultados em termos de convergência dos índices de efetividade. Para elementos de 3 nós, θ_1 (Estimador Z^2 -*forma original*) e θ_2 (Estimador Z^2 -*modificado*) tiveram aproximadamente os mesmos valores durante o processo adaptativo. Já para elementos triangulares de 6 nós, θ_1 se manteve em torno de 0.5 e θ_2 em torno de 1.0 durante a fase r do processo. Na fase h , os índices se aproximaram de 0.5 com ligeira superioridade para θ_2 .

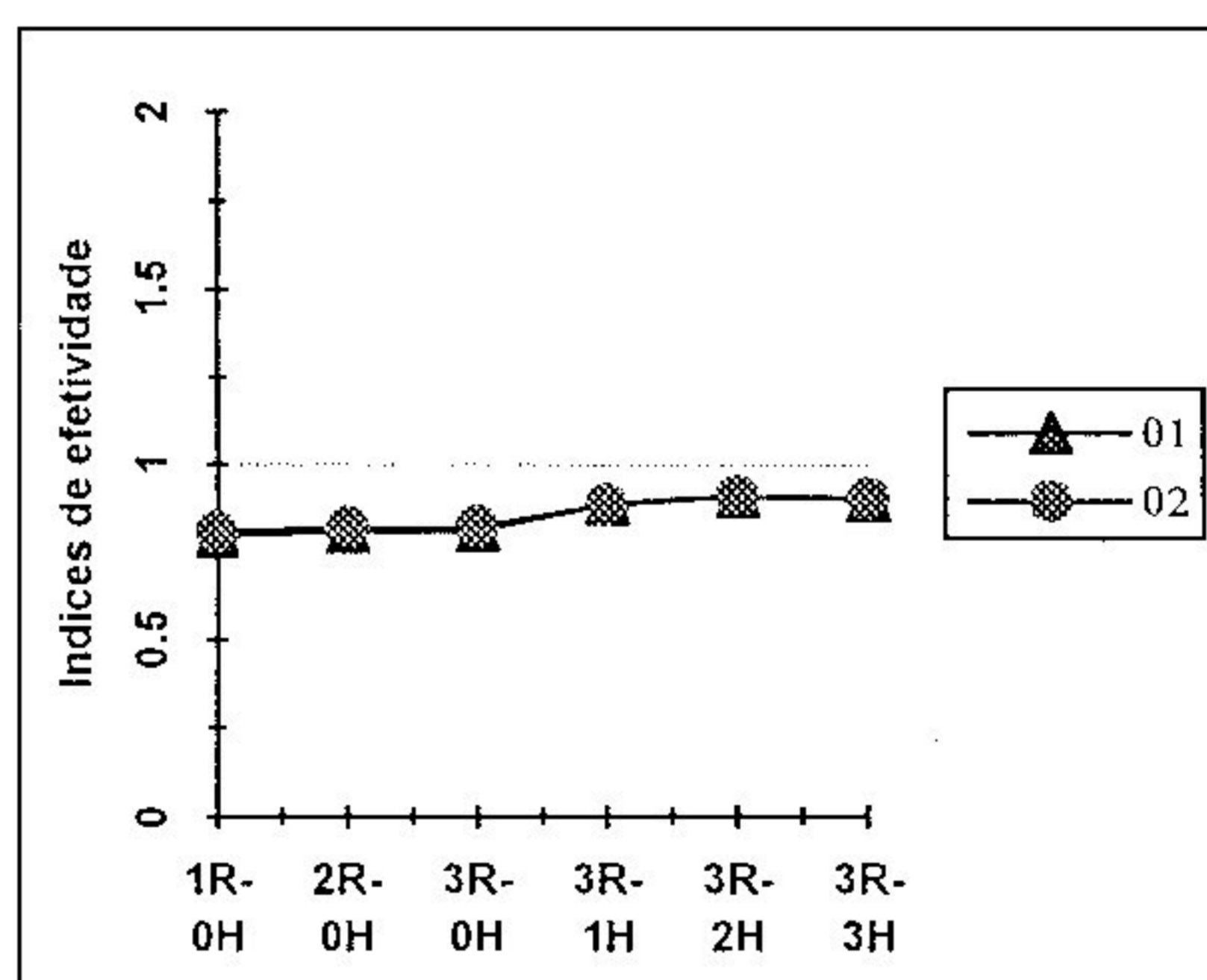


Figura 4.47: Exemplo 4.2.2 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 -*forma original*) e θ_2 (Estimador Z^2 -*modificado*) para elementos triangulares de três nós.

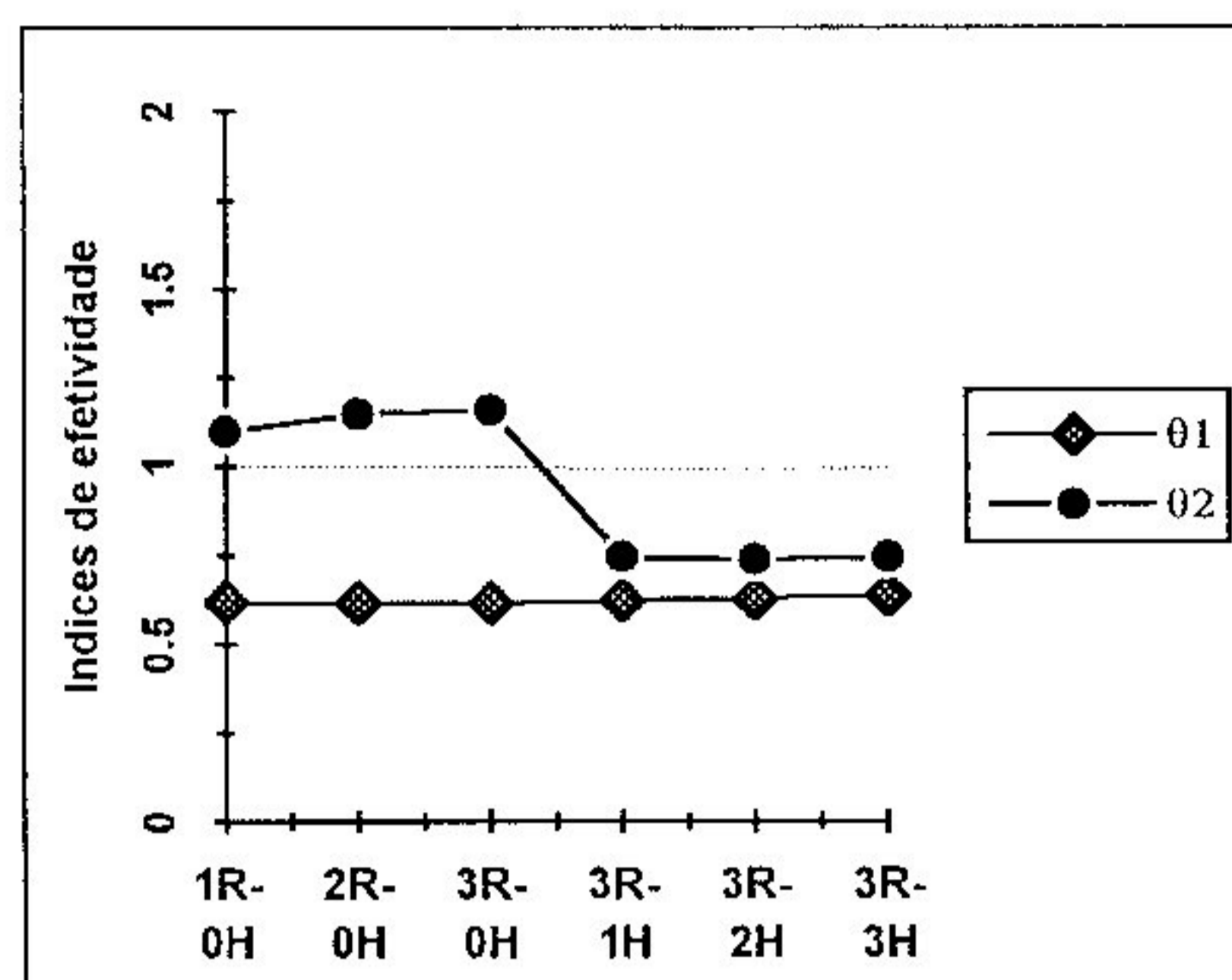


Figura 4.48: Exemplo 4.2.2 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 -*forma original*) e θ_2 (Estimador Z^2 -*modificado*) para elementos triangulares de seis nós.

4.2.3 - Viga Curta em Balanço.

Neste exemplo, tem-se uma viga curta em balanço cujas dimensões e condições de carregamento são mostradas na figura 4.41.

Considera-se para solução deste problema o estado plano de deformação, onde o módulo de Young é igual a 1.0 e o coeficiente de Poisson igual a 0.3. A norma de energia da solução u foi obtida numericamente via algoritmo adaptativo h - p , resultando em um valor para $\|u\|_E^2$ de 1.903697 [Ainsworth et al., 1989].

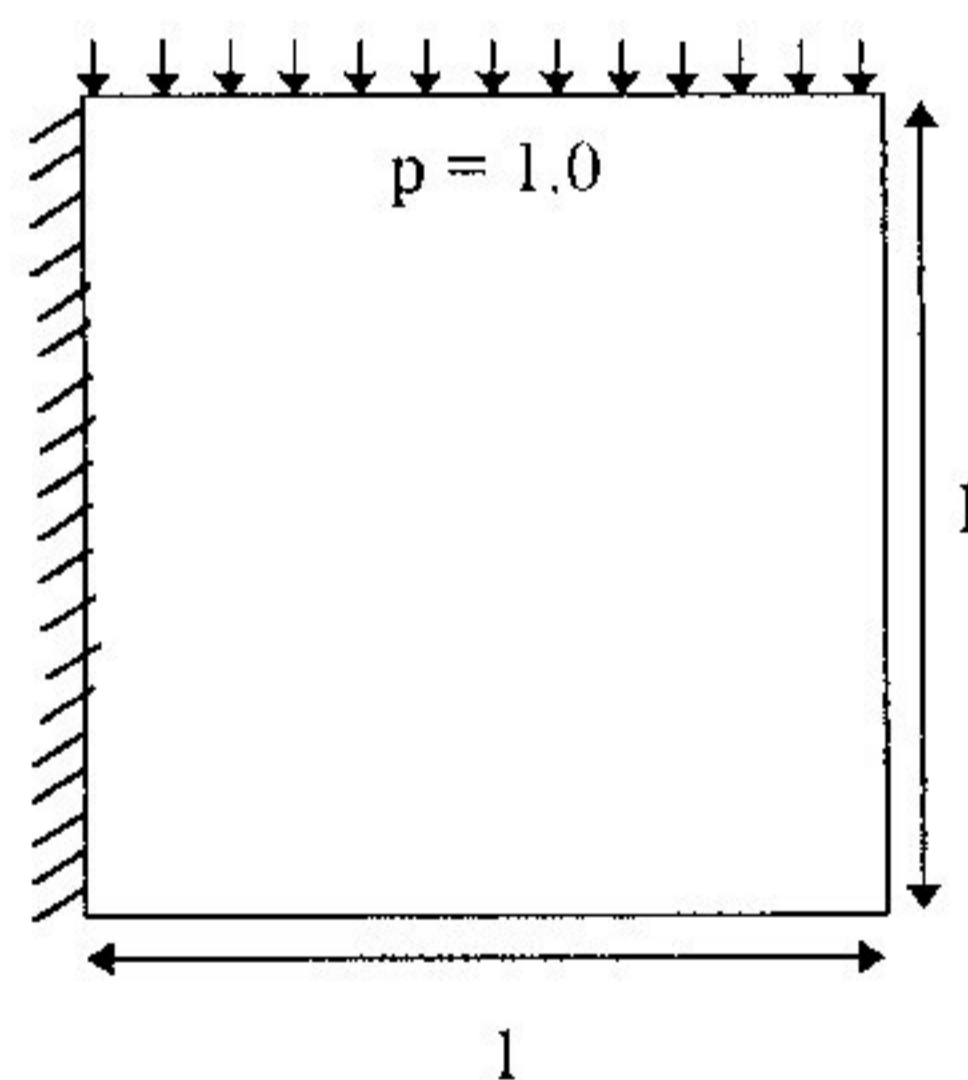


Figura 4.49: Exemplo de aplicação 4.2.3

O domínio Ω foi discretizado utilizando-se uma malha inicial uniforme de 32 elementos de ambos os tipos 3 e 6 nós (figura 4.42).

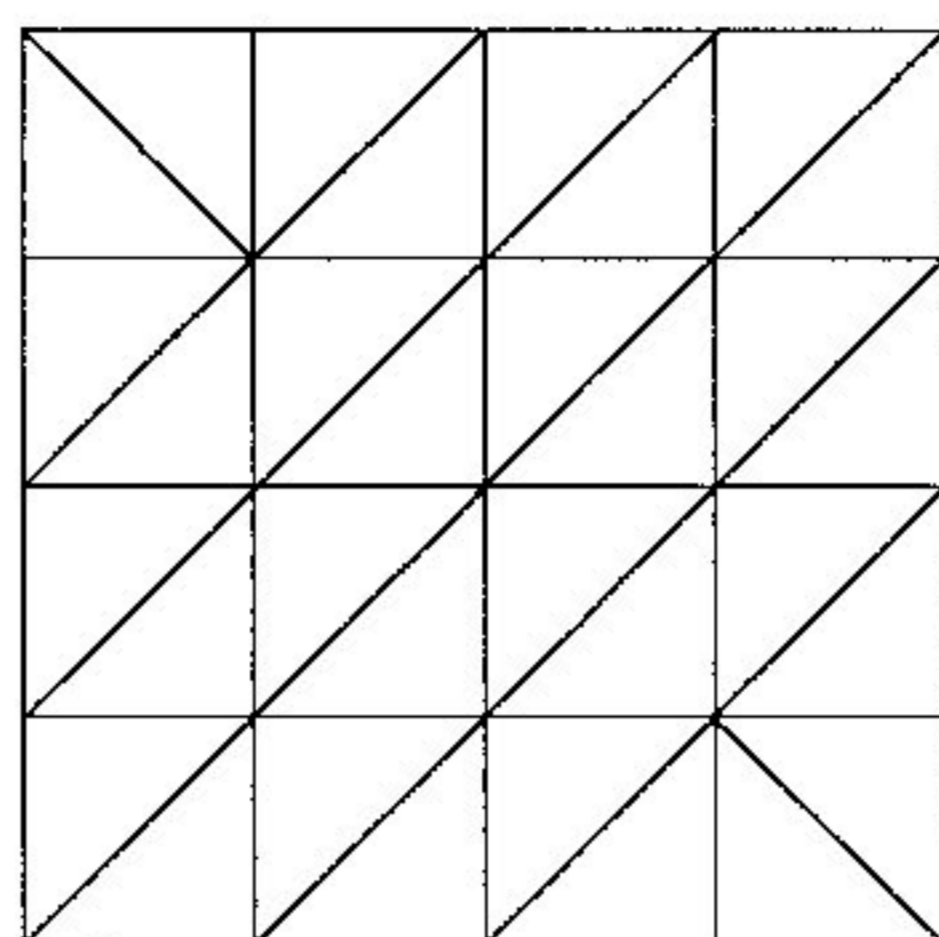
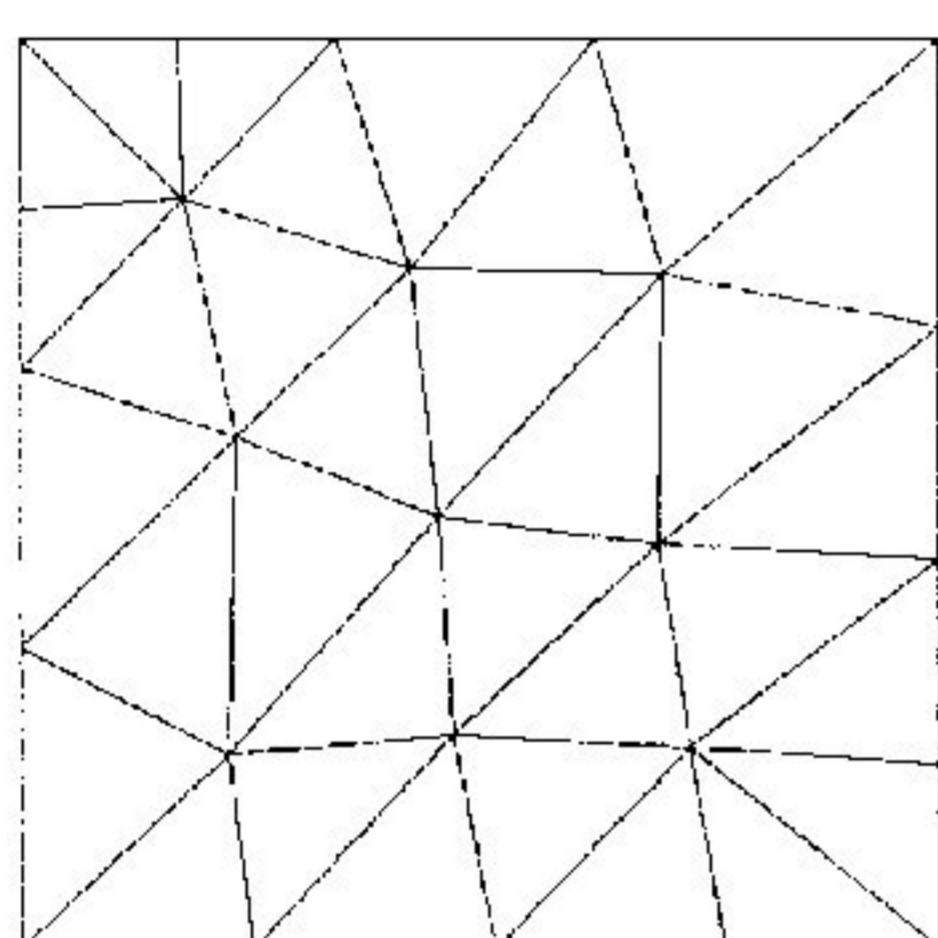
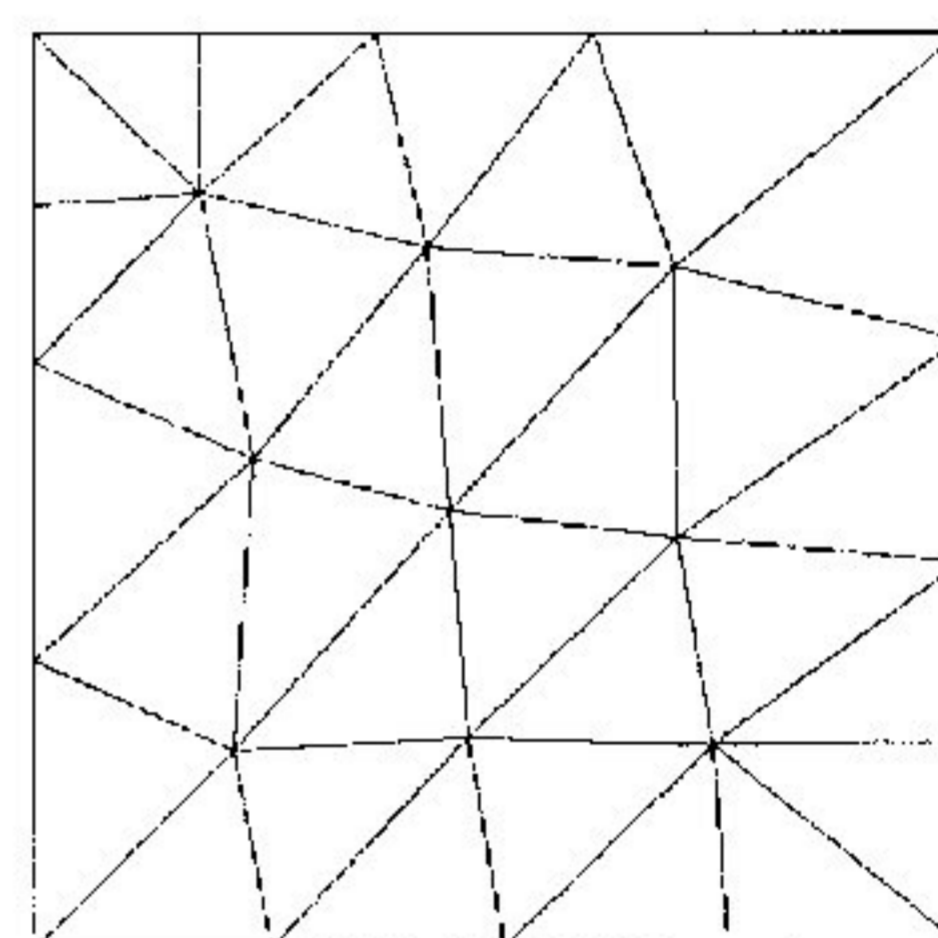


Figura 4.50: Exemplo 4.2.3 - Malha inicial

As figuras 4.51 e 4.52 mostram as malhas obtidas após três níveis de refinamento r utilizando os métodos *SPR* e projeção local na computação dos estimadores de erro.

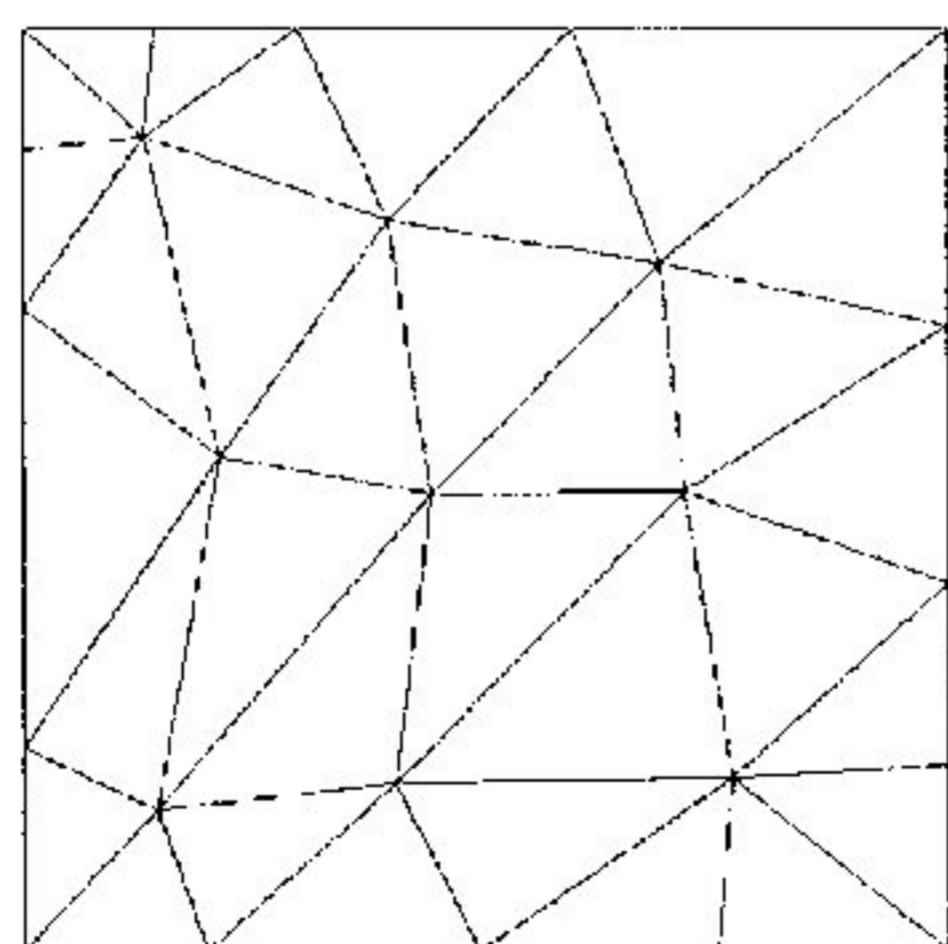


(a)

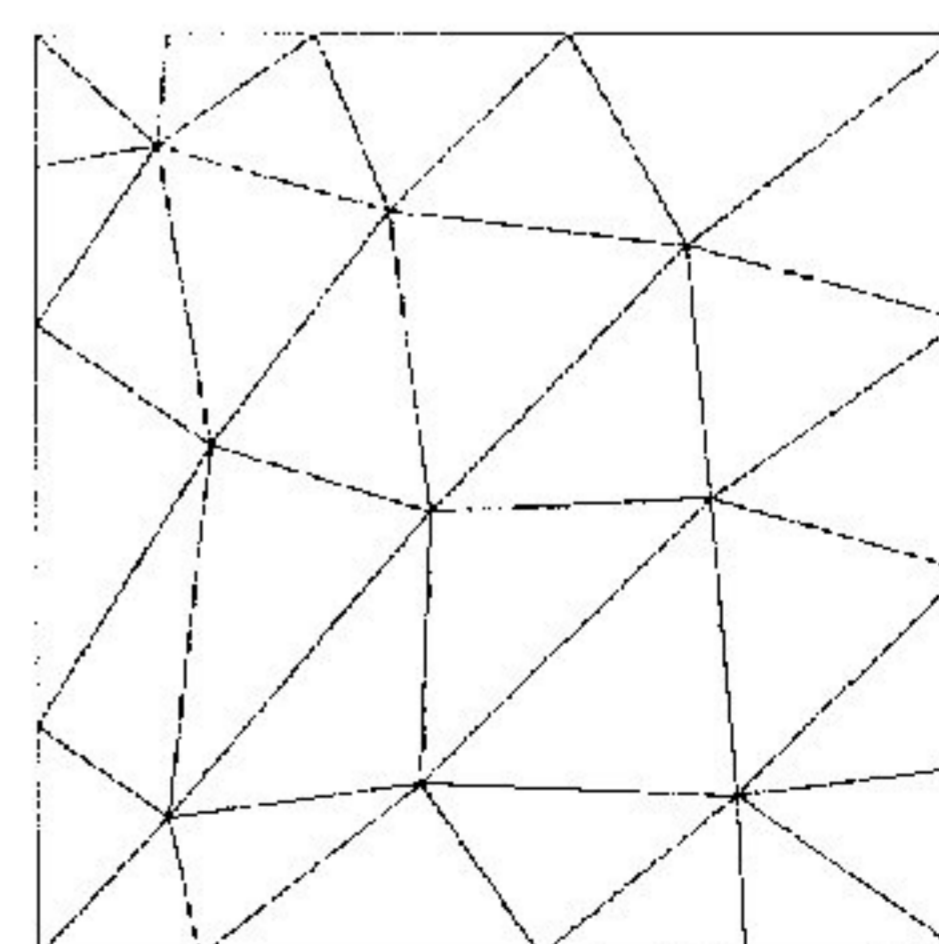


(b)

Figura 4.51: Exemplo 4.2.3 - Malhas (3 nós) geradas após adaptações r :
(a) - Malha 3R-0H (Z^2 - original). (b) - Malha 3R-0H (Z^2 - modificado).



(a)



(b)

Figura 4.52: Exemplo 4.2.3 - Malhas (6 nós) geradas após adaptações r :
(a) - Malha 3R-0H (Z^2 - original). (b) - Malha 3R-0H (Z^2 - modificado).

Os resultados obtidos para η , η^L e η^* do erro relativo na norma de energia utilizando refinamento h -uniforme da malha inicial e adaptações r - h são mostrados abaixo:

h	No. de equações	$\eta(\%)$	$\eta^L(\%)$	$\eta^*(\%)$
1/2	144	23.88	22.62	23.26
1/4	544	14.83	13.69	14.02
1/8	2112	9.13	8.26	8.47

Tabela 4.36: Exemplo 4.2.3 - Erro relativo na norma de energia para uma sequência uniforme de refinamentos h (elementos de 3 nós).

h	No. de equações	$\eta(\%)$	$\eta^L(\%)$	$\eta^*(\%)$
1/2	544	7.64	4.94	7.88
1/4	2112	4.69	2.99	4.78
1/8	8320	2.88	1.82	2.90

Tabela 4.37: Exemplo 4.2.3 - Erro relativo na norma de energia para uma sequência uniforme de refinamentos h (elementos de 6 nós).

Malha	$\eta(\%)$	$\eta^L(\%)$	Malha	$\eta(\%)$	$\eta^L(\%)$
1R-0H	34.08	33.85	3R-1H	19.48	18.54
2R-0H	32.83	32.83	3R-2H	11.51	10.82
3R-0H	32.04	32.21	3R-3H	6.81	6.26

Tabela 4.38: Exemplo 4.2.3 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo r - h global utilizando Z^2 original (elementos de 3 nós).

Malha	$\eta(\%)$	$\eta^*(\%)$	Malha	$\eta(\%)$	$\eta^*(\%)$
1R-0H	34.12	34.55	3R-1H	19.60	18.62
2R-0H	33.01	33.72	3R-2H	11.57	10.82
3R-0H	32.24	33.19	3R-3H	6.82	6.24

Tabela 4.39: Exemplo 4.2.3 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo r - h global utilizando Z^2 modificado (elementos de 3 nós).

Malha	$\eta(\%)$	$\eta^1(\%)$	Malha	$\eta(\%)$	$\eta^1(\%)$
1R-0H	10.85	7.08	3R-1H	5.17	3.22
2R-0H	9.76	6.43	3R-2H	3.12	1.92
3R-0H	9.15	6.09	3R-3H	1.93	1.14

Tabela 4.40: Exemplo 4.2.3 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo r - h global utilizando Z^2 original (elementos de 6 nós).

Malha	$\eta(\%)$	$\eta^*(\%)$	Malha	$\eta(\%)$	$\eta^*(\%)$
1R-0H	10.82	11.95	3R-1H	5.12	4.62
2R-0H	9.79	11.32	3R-2H	3.16	2.64
3R-0H	9.17	10.74	3R-3H	1.89	1.60

Tabela 4.41: Exemplo 4.2.3 - Erro relativo na norma de energia para refinamento adaptativo r - h global utilizando Z^2 *modificado* (elementos de 6 nós).

A exatidão prescrita $\bar{\eta}$ foi de 10% para elementos triangulares lineares e de 5% para elementos triangulares quadráticos [Lee e Lo, 1992]. O estimador Z^2 original (projeção global) foi utilizado por Lee e Lo (1992) em um procedimento adaptativo h de refinamento, cujo modelo inicial é composto de 8 elementos triangulares. Para elementos triangulares lineares, $\bar{\eta}$ foi alcançada para três passos de adaptação. Já para elementos de 6 nós, o processo adaptativo foi interrompido no segundo nível, onde o erro de discretização (valor subestimado) se tornou inferior ao limite prescrito.

Os erros relativos estimados e exato atingiram o limite pré-estabelecido em elementos de 3 nós somente após três níveis de refinamento h -uniforme. Para elementos quadráticos, o critério de parada foi satisfeito no segundo nível de refinamento. Durante o refinamento adaptativo r - h global, as porcentagens relativas do erro de discretização (valores estimados e exatos) atenderam o valor pré-estabelecido no nível 3R-2H para elementos quadráticos. Já para elementos de 3 nós, o procedimento de adaptação [Figueiredo, 1992] não foi suficiente.

Nas seguintes figuras, foi traçado em escala log-log, o número de equações, N , versus o erro relativo na norma de energia. Para o processo adaptativo, considerou-se os resultados à partir do nível 3R-1H.

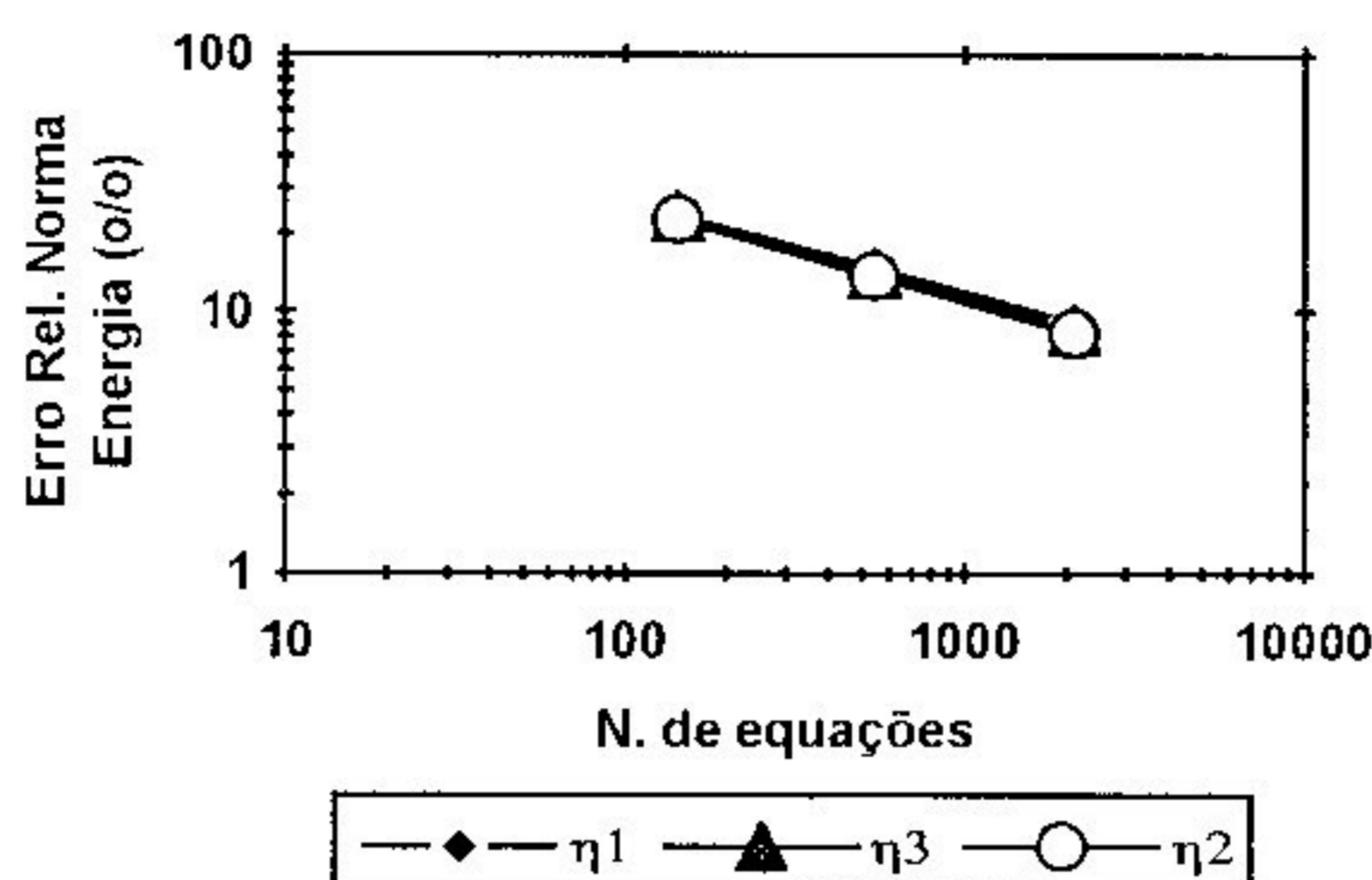


Figura 4.53: Exemplo 4.2.3 - Convergência das soluções em refinamento h uniforme (3 nós): η_1 (exato). η_2 (P. local). η_3 (SPR).

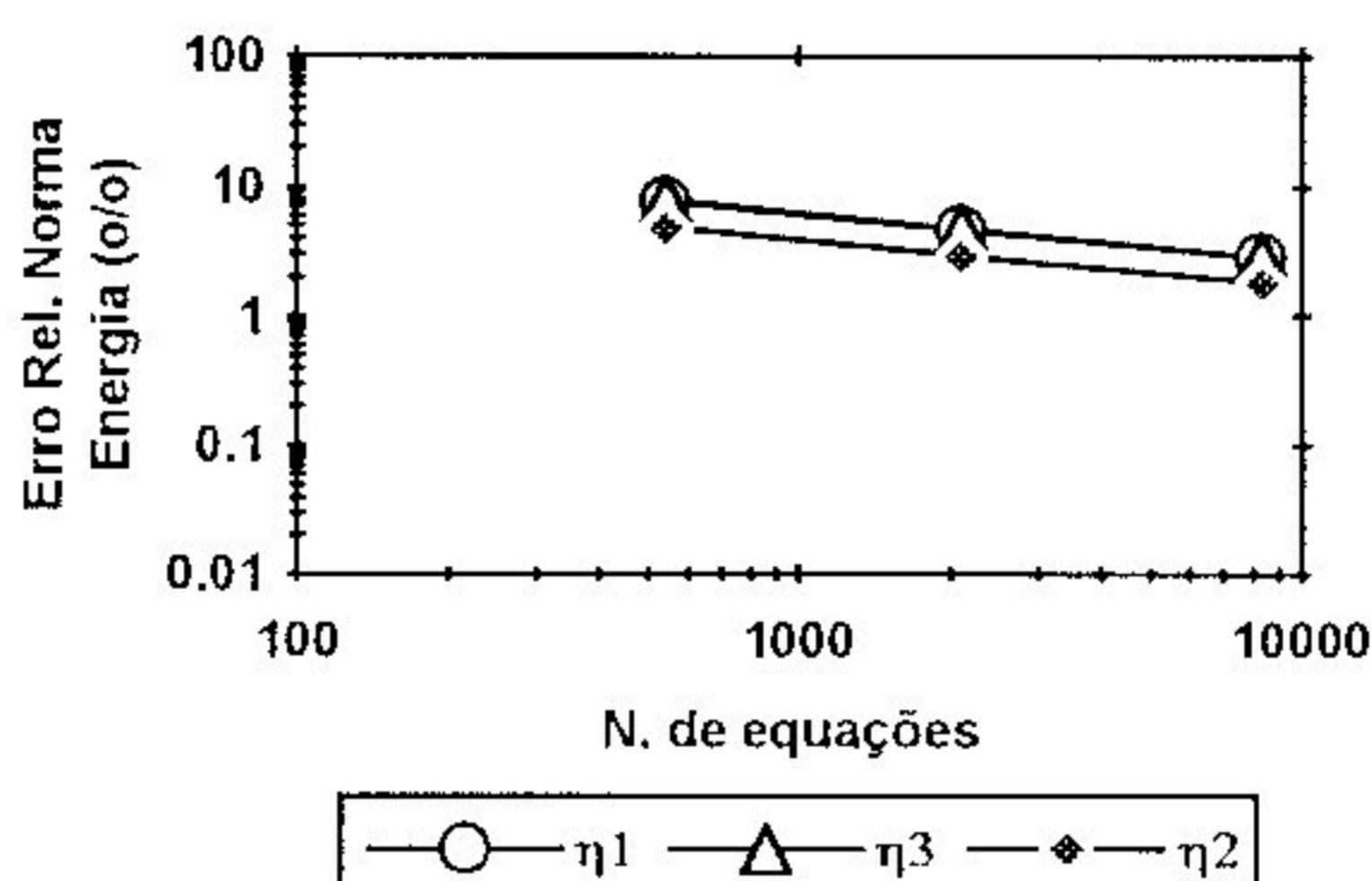


Figura 4.54: Exemplo 4.2.3 - Convergência das soluções em refinamento h uniforme (6 nós). η_1 (exato). η_2 (P. local). η_3 (SPR).

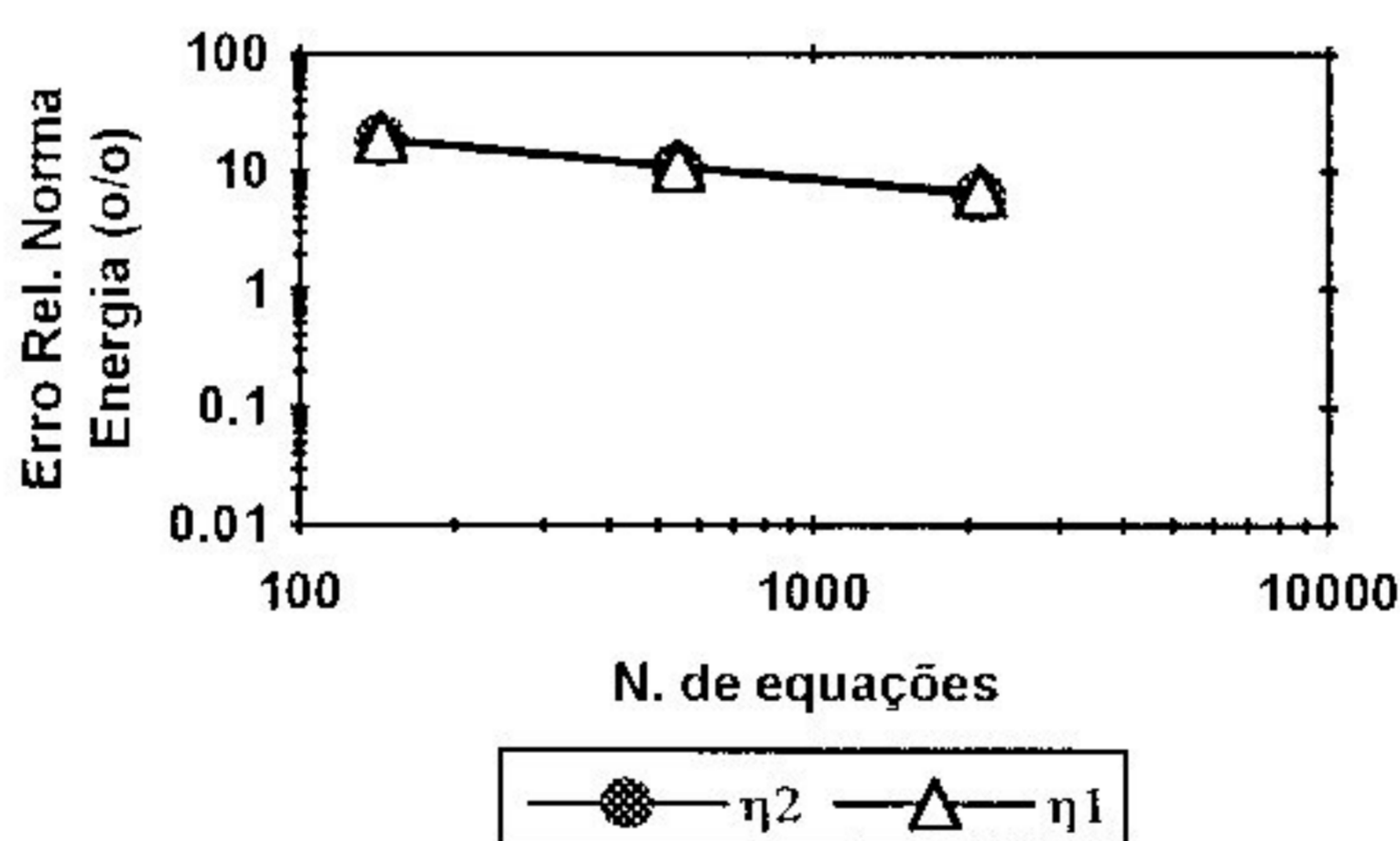


Figura 4.55: Exemplo 4.2.3 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos lineares: η_1 (exato). η_2 (P. local).

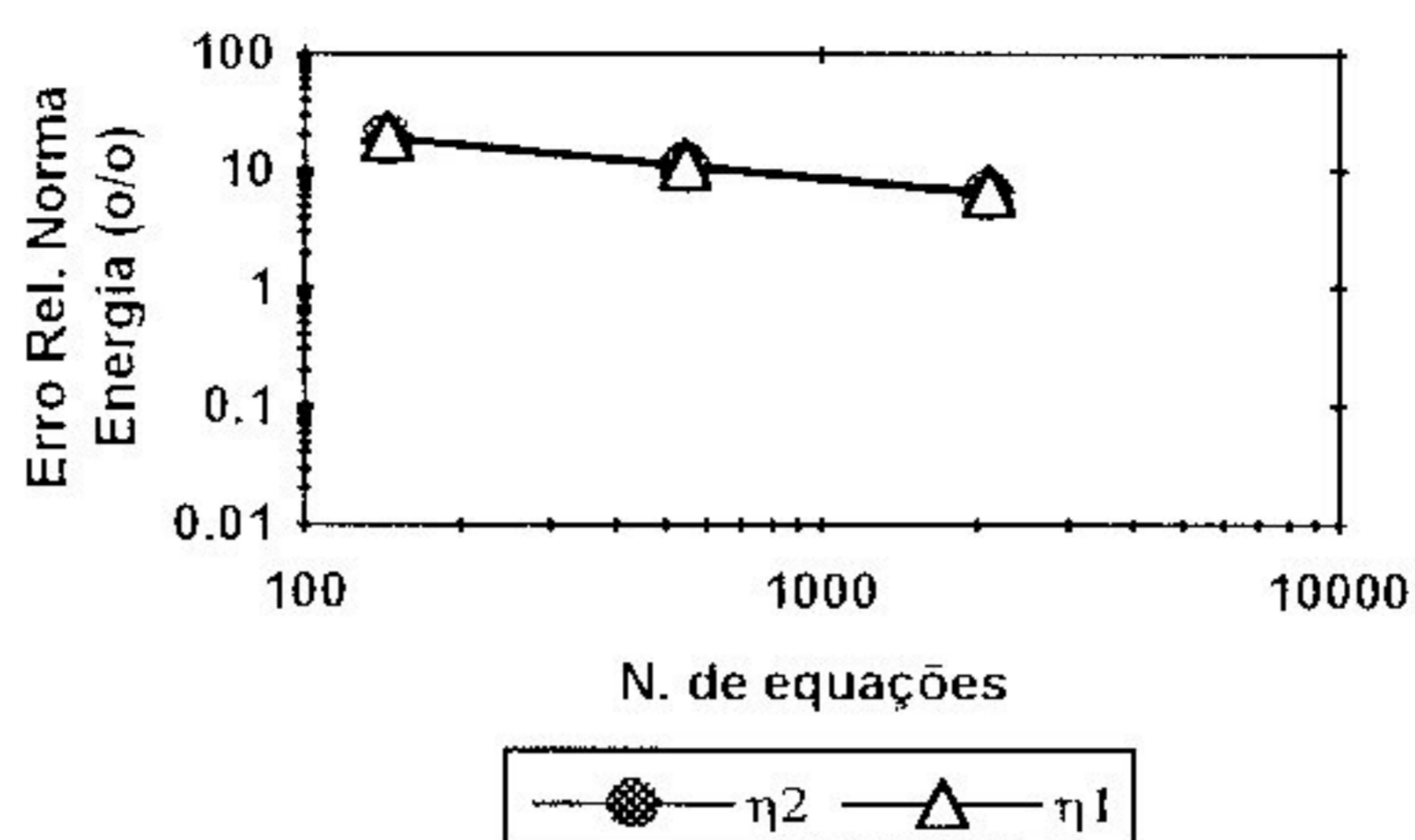


Figura 4.56: Exemplo 4.2.3 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos lineares: η_1 (exato). η_2 (SPR).

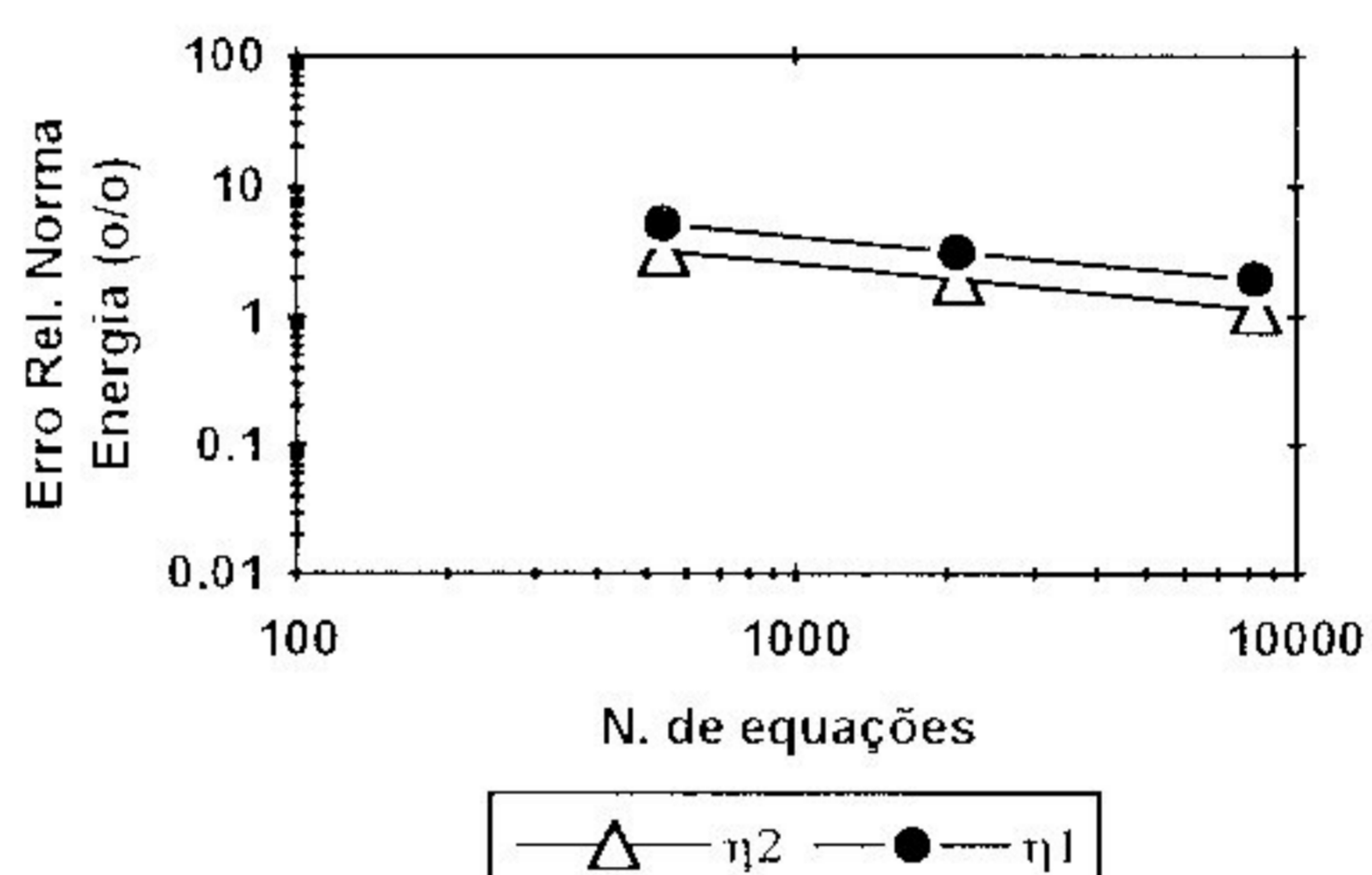


Figura 4.57: Exemplo 4.2.3 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos quadráticos: η_1 (exato). η_2 (P. local).

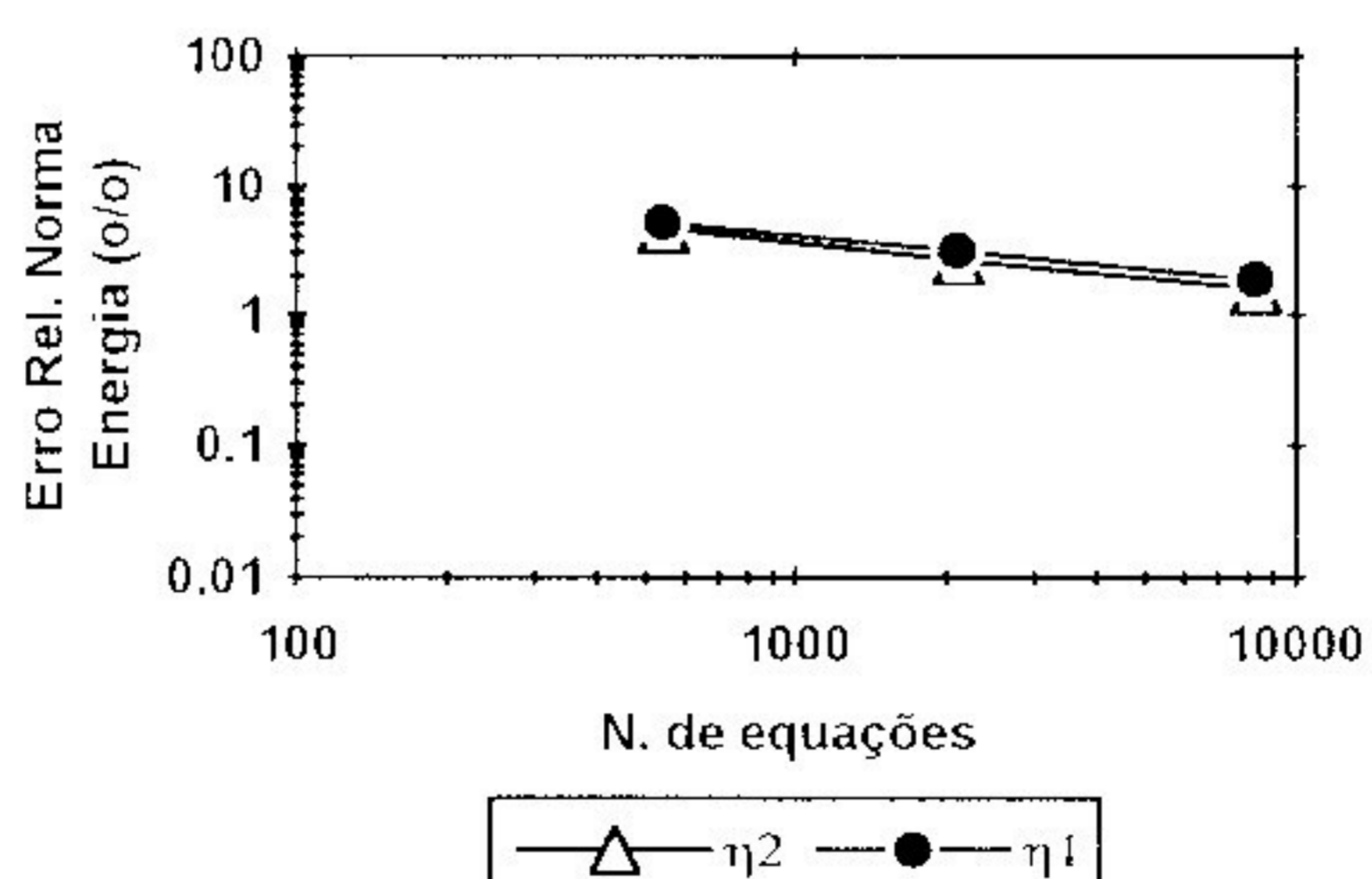


Figura 4.58: Exemplo 4.2.3 - Convergência das soluções em refinamento adaptativo r - h global para elementos quadráticos: η_1 (exato). η_2 (SPR).

A performance do estimador de erro será analisada em um processo adaptativo de refinamento como no exemplo 4.2.2.

A convergência do índice de efetividade do estimador Z^2 é mostrada nas figuras abaixo para uma sequência de refinamentos uniformes à partir da malha inicial:

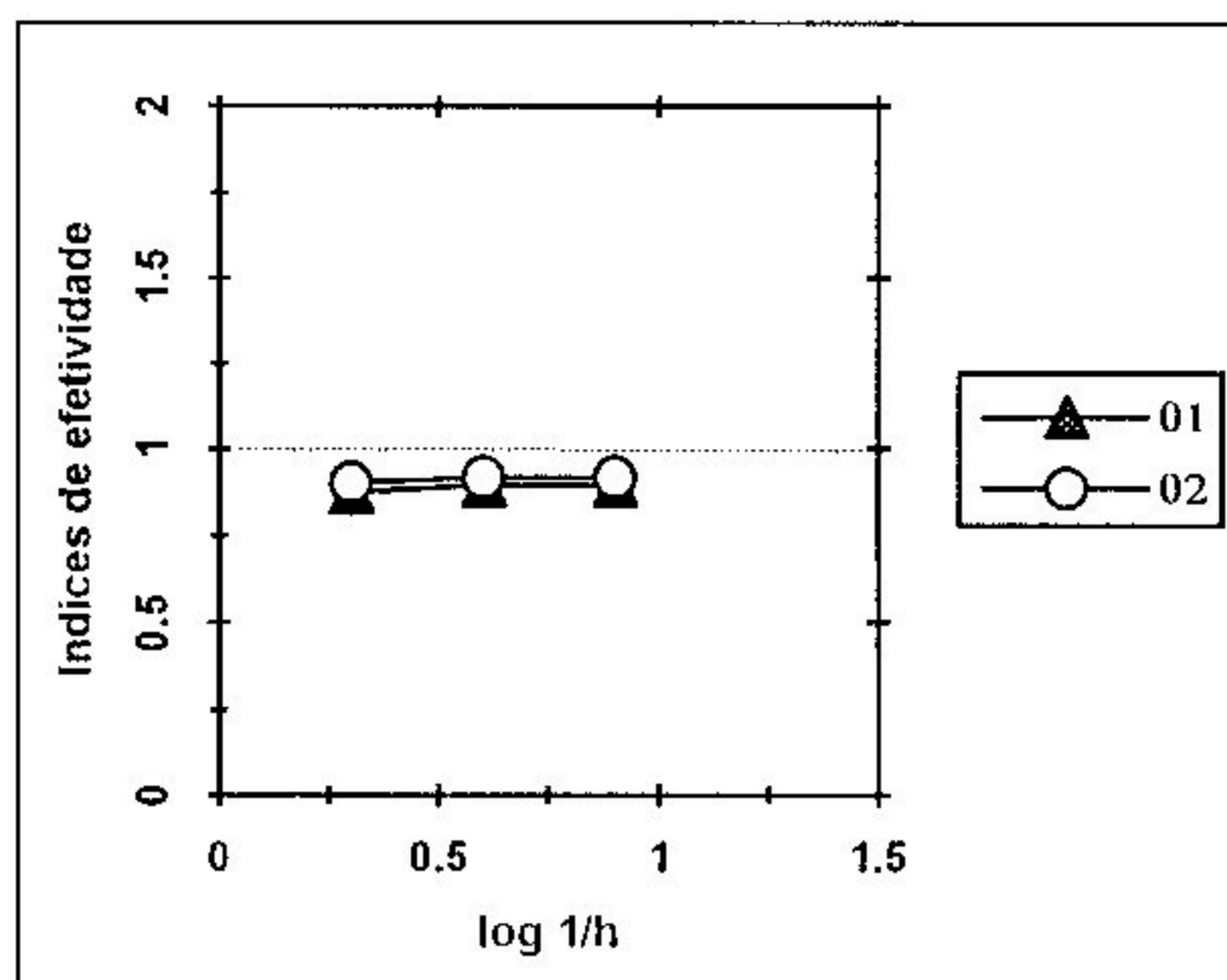


Figura 4.59: Exemplo 4.2.3 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 -*forma original*) e θ_2 (Estimador Z^2 -*modificado*) para elementos triangulares de três nós.

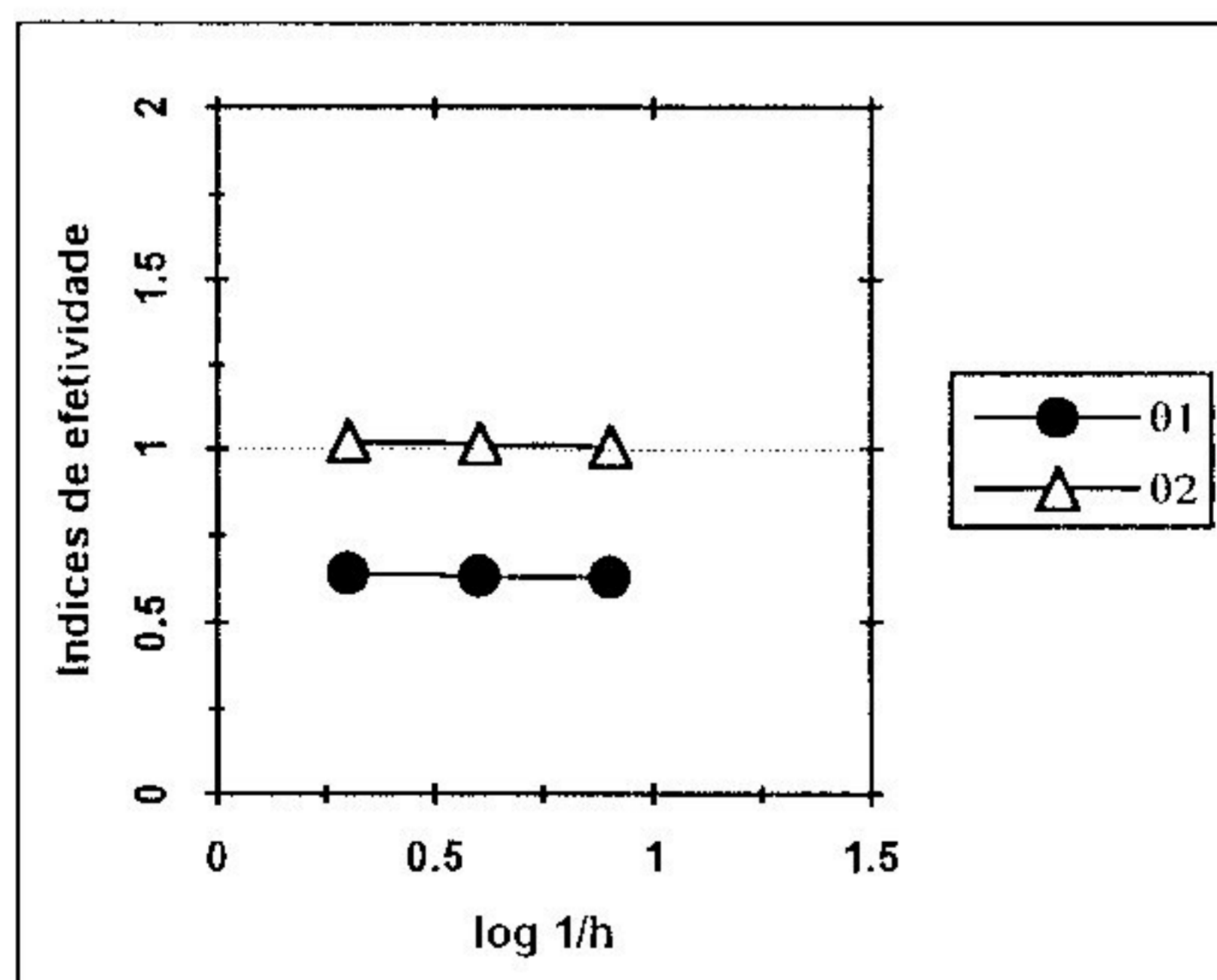


Figura 4.60: Exemplo 4.2.3 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 -*forma original*) e θ_2 (Estimador Z^2 -*modificado*) para elementos triangulares de seis nós.

Para elementos de 3 nós, os índices de efetividade dos estimadores Z^2 *modificado* (procedimento *SPR* de recuperação das derivadas) e *original* (técnica de projeção local) convergem para a unidade com aproximadamente os mesmos valores. Em elementos quadráticos, o índice do estimador Z^2 *modificado* se

mantém em torno de 1.0 durante o refinamento uniforme, enquanto para o Z^2 *original* os valores se aproximam de 0.5 [Ribeiro,1991].

Já para o processo $r-h$ de refinamento global, tem-se nas figuras 4.61 e 4.62 os seguintes resultados:

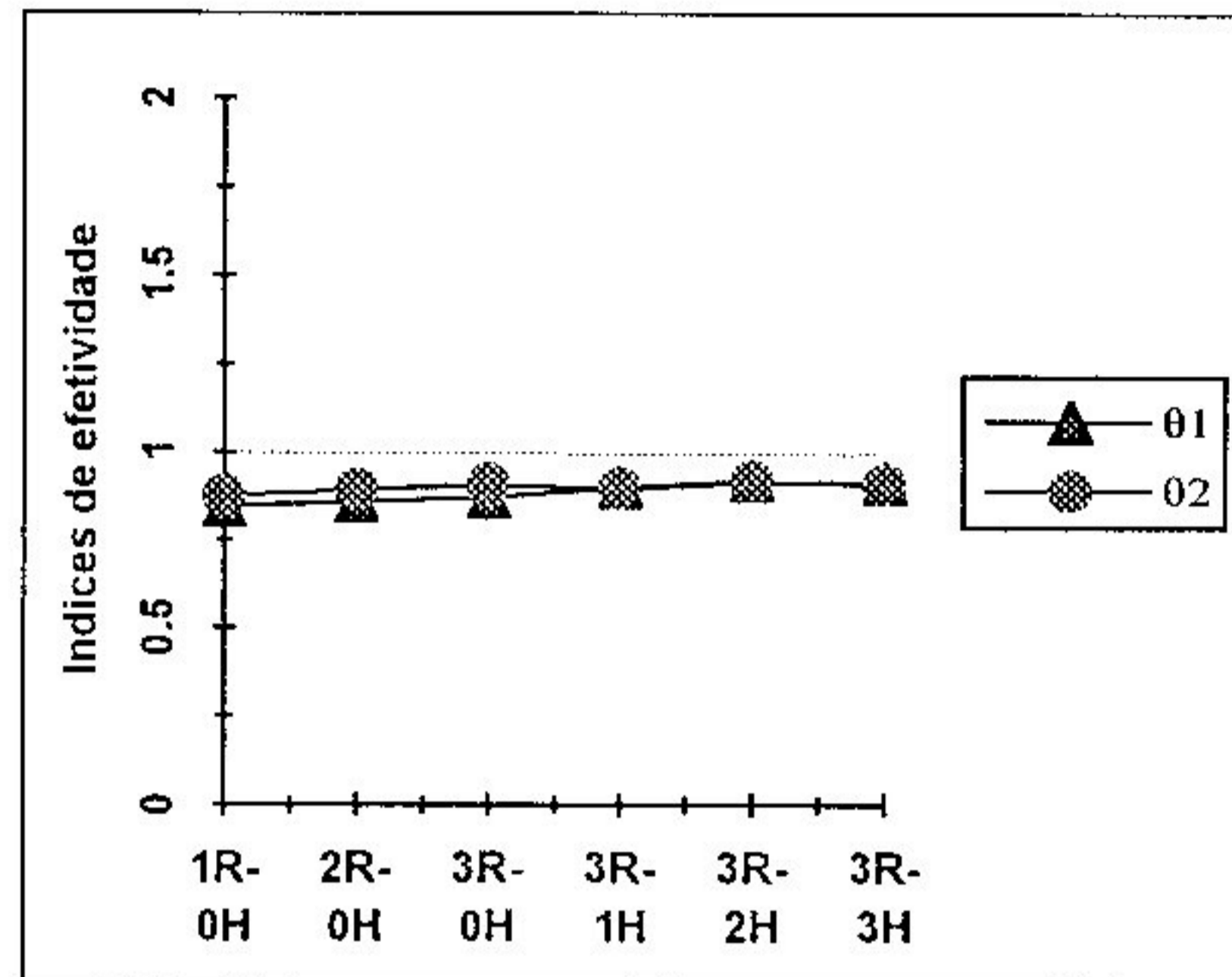


Figura 4.61: Exemplo 4.2.3 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 -*forma original*) e θ_2 (Estimador Z^2 -*modificado*). - 3 nós.

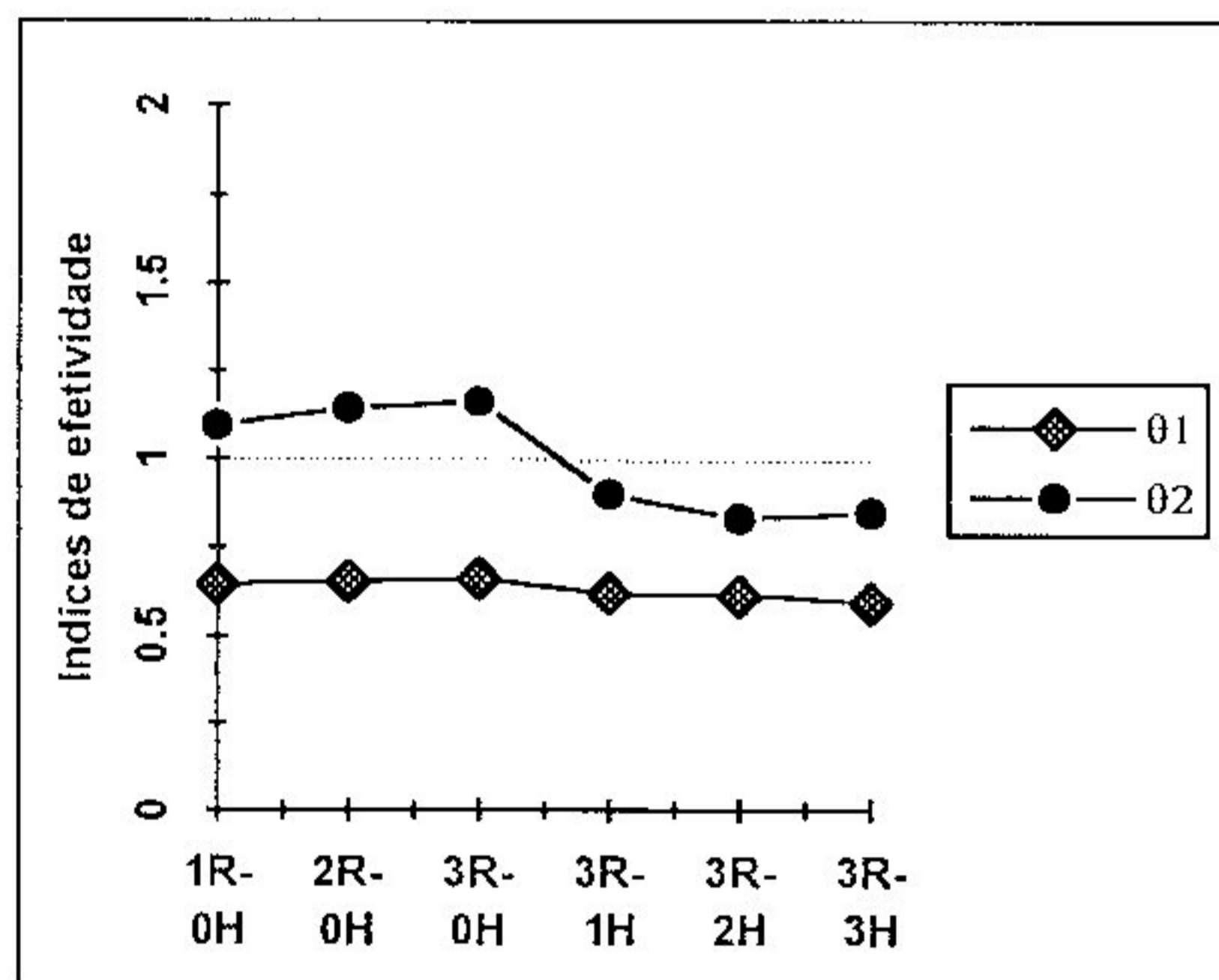


Figura 4.62: Exemplo 4.2.3 - Convergência dos índices de efetividade θ_1 (Estimador Z^2 -*forma original*) e θ_2 (Estimador Z^2 -*modificado*). - 6 nós.

De acordo com a figura 4.61, os índices de efetividade dos estimadores Z^2 (*original e modificado*) durante o processo adaptativo assumem valores quase idênticos para elementos de 3 nós. Já em elementos de 6 nós (figura 4.62), a qualidade do estimador *modificado* é significativamente superior à do *original*.

Capítulo 5

Conclusões e Sugestões

Nesta dissertação foi proposta uma implementação computacional de um estimador de erro *a posteriori*, baseado em técnicas superconvergentes de recuperação dos gradientes em elementos de ordem $p \geq 1$, para o uso em um processo adaptativo *r-h* global.

5.1 - Conclusões

Os testes numéricos mostrados neste trabalho ilustraram a boa qualidade do estimador Z^2 na norma de energia para malhas de elementos triangulares lineares e quadráticos.

Com os resultados obtidos, pôde-se comprovar numericamente o fenômeno da superconvergência ($O(h^{p+1})$) das derivadas nodais e a eficiência do estimador Z^2 em refinamentos *h*-uniforme e adaptativo *r-h* global [Figueiredo, 1992] através de parâmetros controladores.

Para elementos triangulares de 6 nós, (utilizando o procedimento *SPR* de recuperação) foram encontradas taxas médias de $O(h^3)$ para a maioria das componentes de tensões em nós do contorno; e para os nós internos, o valor *mínimo* obtido para as taxas foi ultraconvergente da ordem de $O(h^4)$. Pela técnica de projeção, quase todas as tensões nodais convergiram à uma taxa média padrão de $O(h^2)$; sendo que, algumas divergiram.

Já em elementos de 3 nós, todas as componentes de tensões (para os nós internos) obtiveram taxas médias superconvergentes de $O(h^2)$ utilizando os dois métodos de recuperação. A taxa de convergência das tensões no contorno foi de $O(h)$ também pelos dois métodos considerados.

O cálculo do índice de efetividade do estimador Z^2 e das taxas de convergência dos valores das soluções recuperadas (na norma de energia) pelos métodos de recuperação *SPR* e projeção local em aproximações lineares foram

semelhantes aos computados por Zienkiewicz e Zhu (1992), fornecendo estimativas razoáveis para o erro de discretização com uma pequena vantagem para o procedimento *SPR*. Nas aproximações quadráticas, a técnica de projeção local empregada na suavização das derivadas descontínuas resultou em subestimação do erro; entretanto, para o método *SPR* de recuperação, a efetividade do estimador Z^2 *modificado* manteve-se sempre maior que a do estimador *original*.

Assim, com a implementação do estimador Z^2 *modificado*, do elemento triangular de 6 nós e dos parâmetros controladores (definidos no capítulo 2) no processador adaptativo desenvolvido no sistema SDP, resultados mais precisos e confiáveis podem ser obtidos com um menor número de níveis de refinamento.

5.2 - Sugestões

Como sugestões para estudos futuros e complementação deste trabalho, sugere-se o seguinte:

- Implementar outros tipos de elementos (de ordem $p > 2$) para aumentar o campo de aplicação do processador *MADA* à outros problemas adaptativos e testar o comportamento do estimador Z^2 .
Investigar o uso da técnica de projeção global L_2 (utilizando métodos iterativos de solução de sistemas de equações) e do procedimento de recuperação desenvolvido recentemente por Blacker e Belytschko (1994) no cálculo dos gradientes suavizados.
- Desenvolver um sistema de computação automatizando a interação dos processadores existentes no ambiente SDP para um refinamento autoadaptativo sistemático.
- Utilizar outras *normas* para medir o erro de discretização para efeito de comparação.
- Aplicar o estimador a outras classes de problemas (flúidos, problemas elastoplásticos, termodinâmica, etc).
- Atender as condições de contorno no cálculo

APÊNDICE

Energia de deformação

Pode-se obter a norma de energia da solução exata $\|u\|_E$ para um determinado modelo estrutural através de sua energia de deformação elástica U . Logo, tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega = \frac{1}{2} \|u\|_E^2 \quad (\text{A.1})$$

Para uma estrutura elástica linear, as energias de deformação e complementar (*energia de tensão*) são numericamente iguais. Assim:

$$U = U^* \quad (\text{A.2})$$

onde U^* é a energia complementar.

A energia complementar pode ser expressa por unidade de volume do material [Vecci, 1994, Timoshenko e Gere, 1984] como:

$$U^* = \int_0^l \iint_A U_0^* dA .l \quad (\text{A.3})$$

onde:

$$U_0^* = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= \int_0^{\sigma_{xx}} \varepsilon_{xx} d\sigma_{xx} \\
k_2 &= \int_0^{\sigma_{yy}} \varepsilon_{yy} d\sigma_{yy} \\
k_3 &= \int_0^{\sigma_{xy}} \varepsilon_{xy} d\sigma_{xy} \\
k_4 &= \int_0^{\sigma_{yx}} \varepsilon_{yx} d\sigma_{yx}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Para o estado plano de tensões, tem-se:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \tag{A.6}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{A.7}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \tag{A.8}$$

$$\varepsilon_{yx} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yx} \tag{A.9}$$

Conhecendo-se a solução analítica do problema (tensões exatas), as integrais da equação (A.5) são resolvidas obtendo-se:

$$k_1 = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{\sigma_{xx}^2}{2} - \frac{\nu}{2E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \sigma_{xx} \tag{A.10}$$

$$k_2 = \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{\sigma_{yy}^2}{2} - \frac{\nu}{2E} (\sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2) \tag{A.11}$$

$$k_3 = \left(\frac{1+\nu}{2E} \right) \sigma_{xy}^2 \tag{A.12}$$

$$k_4 = \left(\frac{1+\nu}{2E} \right) \sigma_{yx}^2 \tag{A.13}$$

Assim, de acordo com as equações (A.2) e (A.3), é encontrada a energia de deformação total de uma determinada estrutura juntamente com a *norma de energia* da solução exata (equação A.1). Conhecidos os valores analíticos das tensões, pode-se então determinar a energia de deformação do problema.

Bibliografia

[Ainsworth et al., 1989] M. Ainsworth, J. Z. Zhu, A. W. Craig e O. C. Zienkiewicz. *Analysis of the Zienkiewicz - Zhu A Posteriori Error Estimator in the Finite Element Method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28:2161-2174, 1989.

[Babuska e Rheinboldt, 1978] I. Babuska e W. C. Rheinboldt. *Erros Estimates for Adaptive Finite Element Computations*. SIAM J. Numer. Anal., 15:736-754, 1978.

[Babuska e Rheinboldt, 1979] I. Babuska e W. C. Rheinboldt. *Analysis of Optimal Finite Element Meshes in R^d* . Mathematics of Computation, 33:435-463, 1979.

[Babuska et al., 1992] I. Babuska, L. Planck e R. Rodriguez *Basic problems of a posteriori error estimation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 101:97-112, 1992.

[Barlow, 1976] John Barlow. *Optional Stress Locations in Finite Element Models*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10:243-251, 1976.

[Bathe, 1982] K. J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis* Prentice - Hall, 1982.

[Blacker e Belytschko, 1994] Ted Blacker e Ted Belytschko. *Superconvergent Patch Recovery with Equilibrium and Conjoint Interpolant Enhancements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37:517-536, 1994.

[Duarte, 1991] C. A. Duarte. Estudo da versão p do Método de Elementos Finitos para Problemas da Elasticidade e de Potencial. Dissertação, Universidade Federal de Santa Catarina, novembro 1991.

[Figueiredo, 1992] A. M. G. Figueiredo. Processos Adaptativo R. H. Global Conjugado com Método Multimalha para Elementos Finitos. Dissertação, Universidade Federal de Minas Gerais, fevereiro 1992.

[Gago et al, 1983] J. P. de S. R. Gago, D. W. Kelly, O. C. Zienkiewicz e I. Babuska. *A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II-Adaptive Mesh Refinement*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19:1621-1656, 1983.

[Gouveia, 1987] J. P. Gouveia. SDP: Sistema para Desenvolvimento dos Programas Baseados no Método dos Elementos Finitos. Em *Anais do IX COBEM*, páginas 561-564, 1987.

[Hinton e Campbell, 1974] E. Hinton e J. S. Campbell. *Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions using A Least Squares Method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8:461-480, 1974.

[Johnson e Hansbo, 1992] Claes Johnson e Peter Hansbo. *Adaptive finite element methods in computational mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 101:143-181, 1992.

[Kelly et al., 1983] D. W. Kelly, J. P. de S. R. Gago, O. C. Zienkiewicz e I. Babuska. *A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I - Error Analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19:1593-1614, 1983.

[Krzizek e Neittaanmaki, 1978] Michel Krzizek e Pekka Neittaanmaki. *On Superconvergente Techniques*. Acta Applicandae Mathematicae, 9:175-198, 1978.

[Las Casas, 1990] Estevam B. Las Casas. *Um Processo Adaptativo Misto Global para o Método dos Elementos Finitos*. Revista Brasileira de Engenharia, 6:41-51, 1990.

[Lee e Lo, 1992] C. K. Lee e S. H. Lo *An automatic adaptive Refinement Finite Element Procedure for 2D Elastostatic Analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 35:1967-1989, 1992.

[Levine, 1985] Nick Levine. *Superconvergent Recovery of the Gradient from Piecewise Linear Finite-element Approximations*. IMA Journal of Numerical Analysis, 5:407-427, 1985.

[Mackinnon et al., 1989] R. J. Mackinnon e G. F. Carey. *Superconvergent Derivatives: A Taylor Series Analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28:489-509, 1989.

[Cavalcante Neto, 1994] Joaquim B. Cavalcante Neto. *Simulação auto-adaptativa baseada em enumeração espacial recursiva de modelos bidimensionais de elementos finitos*. Dissertação, Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1994.

[Oden e Reddy, 1976] J. T. Oden e J. N. Reddy. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. John Wiley & Sons, 1976.

[Oñate, 1991] Eugenio Oñate. *Error Estimation and Mesh Adaptivity Techniques for Structural and Fluid Mechanics Problems*. Mecánica Computacional, vol. XII, E. Idelsohn (Ed.).

[Ribeiro, 1991] Fernando L. B. Ribeiro. *Estratégia H-P de refinamento para o MEF*. Dissertação, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro, novembro 1991.

[Shpitalni et al., 1989] Moshe Shpitalni, Pinhas Bar-Yoseph e Yitzchak Krimberg. *Finite Elements Mesh Generation Via Switching Function Representation*. Finite Elements and Design, 5:119-130, 1989.

[Stasa, 1985] F. L. Stasa. *Applied Finite Element Analysis for Engineers*. Holt, Rinehart and Winston, 1985.

[Timoshenko e Gere, 1984] Stephen P. Timoshenko e James E. Gere. *Mecânica dos Sólidos volume II*. Livros Técnicos e Científicos, 1984.

- [Timoshenko e Goodier, 1980] S. P. Timoshenko e J. N. Goodier. *Teoria da Elasticidade*. Guanabara Dois, 3ª edição, 1980.
- [Vecci, 1994] Marco Antônio M. Vecci. Notas de Aula - Resistência dos Materiais Avançada. Universidade Federal de Minas Gerais/DEEs, 1994.
- [Zhu e Zienkiewicz, 1990] J. Z. Zhu e O. C. Zienkiewicz. *Superconvergence Recovery Technique and A Posteriori Error Estimators*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 30:1321-1339, 1990.
- [Zienkiewicz e Taylor, 1981] O. C. Zienkiewicz e R. L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1. McGraw-Hill, 4ª edição, 1989.
- [Zienkiewicz e Morgan, 1983] O. C. Zienkiewicz e K Morgan. *Finite Elements and Approximation*. John Wiley & Sons, 1983.
- [Zienkiewicz e Zhu, 1987] I, C, Zienkiewicz e J. Z, Zhu. *A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24:337-357, 1987.
- [Zienkiewicz e Zhu, 1991] O. C. Zienkiewicz e J. Z. Zhu. *Adaptivity and Mesh Generation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32:783-810, 1991.
- [Zienkiewicz e Zhu, 1992] O. C. Zienkiewicz e J. Z. Zhu *The Superconvergent Patch Recovery and A Posteriori Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33:1331-1364, 1992.
- [Zienkiewicz e Zhu, 1992] O. C. Zienkiewicz e J. Z. Zhu *The Superconvergent Patch Recovery and A Posteriori Error Estimates. Part 2: Error Estimates and Adaptivity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33:1365-1382, 1992.

[Zienkiewicz e Zhu, 1992] O. C. Zienkiewicz e J. Z. Zhu *The Superconvergent Patch Recovery (SPR) and Adaptive Finite Element Refinement*. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 101:207-224, 1992.

[Zienkiewicz et al., 1989] O. C. Zienkiewicz, J. Z. Zhu e N. G. Gong *Effective and Practical h-p Version Adaptive Analysis Procedures for the Finite Element Method*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:879-891, 1991.