

**Técnica Adaptativa de Elementos Finitos
para Análise Limite e de “Shakedown”
para Cascas Finas Axi-Simétricas**

Felício Brüzzi Barros

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"TÉCNICA ADAPTATIVA DE ELEMENTOS FINITOS PARA
ANÁLISE LIMITE E DE SHAKEDOWN PARA CASCAS FINAS AXI-
SIMÉTRICAS"**

Felício Bruzzi Barros

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. José Ricardo Queiroz Franco
DEES/UFMG - (Orientador)

Prof. Nestor Zouain Pereira
COPPE/UFRJ

Prof. Gabriel de Oliveira Ribeiro
DEES/UFMG

Prof. Ricardo Hallal Fakury
DEES/UFMG

Belo Horizonte, 25 de outubro de 1996

Aos meus pais, Ana Aparecida e Paulo e ao meu irmão Paulo José

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. José Ricardo Queiroz Franco, por sua dedicação e paciência na realização deste trabalho, pelo seu conhecimento compartilhado e atenção dispensada. À sua esposa Cecília, pelas ilustrações em três dimensões.

À Prof^a. Ana Maria G. Figueiredo e Prof. Estevam Barbosa de Las Casas, orientadores na Iniciação Científica, por sua amizade e aconselhamento.

Ao Prof. Ramon Pereira da Silva pelo interesse e tratamento amigo.

Aos demais professores do DEES, especialmente ao Prof. Gabriel de Oliveira Ribeiro, Prof. Ney Amorim Silva e Prof. Ricardo Hallal Fakury, por seu tratamento sempre cordial.

Aos colegas do mestrado e aos funcionários, sempre solícitos.

À Prof.^a Elizabeth Vieira Maia e equipe responsável pelo LAMEC, pela infraestrutura computacional e apoio.

Ao CNPq pelo financiamento da pesquisa.

Finalmente, aos meus pais e irmão, pela compreensão, sacrifício e estímulo sempre presentes.

Resumo

Este trabalho descreve as contribuições realizadas para a técnica de elementos finitos de análise limite e de “shakedown” em cascas axi-simétricas, proposta em [Franco, 1987]. Após uma breve revisão de conceitos fundamentais e da apresentação da técnica, é feito um estudo simplificado da saia de sustentação de um tambor de coqueamento, sujeita a tensões provenientes de sua interação com o tambor, durante a produção do coque. Para a consideração do carregamento indireto, foram utilizadas soluções elásticas da teoria de cascas finas. Em seguida, com a finalidade de melhorar a solução numérica, através de uma estratégia adaptativa do tipo h , é desenvolvido um estimador de erro. Finalmente, a formulação de um novo elemento finito e de condições de escoamento mais sofisticadas são introduzidas. Embora a formulação para uma análise de “shakedown” completa não tenha sido implementada, problemas de análise limite foram estudados para cada um dos tópicos propostos demonstrando o sucesso das implementações efetuadas.

Abstract

Improvements in the technique for finite element shakedown and limit analysis of axisymmetrical shells, proposed by [Franco, 1987], are presented. Basic concepts of the continuum mechanics are first summarized and the technique is introduced. The stress problem due to the temperature gradient at the contact of a supporting skirt of a coke drum is analyzed. The elastic solution obtained from the thin shell theory was implemented for considering indirect load. An error estimator combined with adaptive procedures for an h -refinement are presented to obtain much more reliable solutions. A new finite element compatible with a more sophisticated yield surface is developed. Although the formulation for a complete shakedown analysis has not been implemented, limit analysis problems were studied for each proposed topic which illustrate the effectiveness and quality of the proposed formulations.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Considerações Gerais	1
1.2	Resumo do Conteúdo e Organização do Texto	3
2	Fundamentos Básicos	5
2.1	Introdução	5
2.2	Sistema de Carregamento	6
2.3	Tensão-deformação	6
2.3.1	Estado de Tensões	6
2.3.2	Estado de Deformações	7
2.3.3	Condições de Compatibilidade	8
2.4	Princípio dos Trabalhos Virtuais	9
2.5	Regra de Escoamento	10
2.6	Análise Limite e de “Shakedown”	12
2.6.1	Teoremas da Análise Limite	13
2.6.2	Análise de “Shakedown”	15
2.7	Teoria de Cascas Finas Axi-simétricas	17
2.8	Análise Limite em Cascas Axi-simétricas	20
2.8.1	Modelo de Material Adotado	21
2.8.2	Definição da Superfície de Escoamento	22
3	Técnica para Análise Limite de Cascas Axi-simétricas Via Ele- mentos Finitos	26
3.1	Introdução	26
3.2	Discretização da Casca em Elementos Finitos	27
3.2.1	Campo de Deformações Elasto-Plásticas	27

3.2.2	Campo de Deformações Plásticas	30
3.3	Análise Limite	32
3.4	Relação Consistente Entre os Campos das Taxas de Deslocamento e dos Multiplicadores Plásticos	33
3.4.1	Obtenção da relação consistente entre os campos de deformação	33
3.4.2	Solução Geral Para a Condição de Bi-ortogonalidade	36
3.4.3	Indicador de Erro	37
3.5	O Algoritmo de Elementos Finitos	39
3.5.1	Equação Geral de Restrição	39
3.5.2	Função de Custo	41
3.5.3	Equações Nodais de Restrição	43
3.5.4	Condições de Contorno	44
3.5.5	Considerações Finais	45
4	Análise Limite da Saia de Sustentação de um Tambor de Coqueamento Sujeito a um Gradiente de Temperatura	47
4.1	Introdução	47
4.2	Equação Geral de Restrição em Função das Tensões Solicitantes . . .	49
4.3	Implementação da Equação Geral de Restrição	50
4.4	Verificação Numérica	52
4.4.1	Casca Cilíndrica Sujeita a uma Carga de Anel	52
4.4.2	Casca Cilíndrica Sujeita à Pressão Interna	56
4.4.3	Casca Esférica Sujeita à Pressão Interna	59
4.5	Análise da Saia de Sustentação	62
4.5.1	Modelo Estrutural e de Carregamento	62
4.5.2	Determinação da Temperatura de Colapso	65
4.5.3	Resultado Numérico	67
5	Uma Estimativa “<i>a Posteriori</i>” do Erro e Procedimentos Adaptativos	76
5.1	Introdução	76
5.2	Processos Adaptativos	77
5.3	Estimativa de Erro “ <i>a Posteriori</i> ”	78
5.4	Estratégia de Refinamento Adaptativo	79
5.5	Exemplos Numéricos	82

	iii
5.5.1 Casca Toroidal Sujeita à Pressão Interna	82
5.5.2 Vaso Toro-esférico Padrão ASME Sujeito à Pressão Interna . .	88
5.5.3 Topo Toro-esférico Sujeito à Pressão Interna	91
5.5.4 Considerações Finais	94
6 Desenvolvimento de um Novo Elemento e do seu Campo de Des-	
locamentos	98
6.1 Introdução	98
6.2 Prisma Hexagonal	99
6.3 Superfície de Escoamento de Drucker	99
6.4 Solução Cinemática para o Caso da Superfície Hexagonal	102
6.4.1 Análise Cinemática	103
6.5 A Nova Superfície de Escoamento	107
6.6 Novo Elemento para Discretização da Casca	109
6.6.1 Campo de Deformações Elasto-Plásticas	109
6.6.2 Campo de Deformações Plásticas	112
6.7 Relação Consistente Entre os Campos das Taxas de Deslocamento e	
dos Multiplicadores Plásticos	115
6.8 O Algoritmo de Elementos Finitos	115
6.8.1 Equação Geral de Restrição	116
6.8.2 Função de Custo	117
6.8.3 Equações de Restrição	121
6.8.4 Condições de Contorno	124
6.9 Soluções Numéricas	124
7 Considerações Finais	133
7.1 Introdução	133
7.2 Conclusões	134
7.3 Sugestões para Futuros Trabalhos	135
Referências Bibliográficas	138
Bibliografia	143
A Obtenção da Relação Consistente Através da Norma de Energia	149

B	Condição para que o Estimador de Erro seja Assintoticamente Exato	152
C	Determinação da Função de Energia Dissipada para os Lados Inclinados da Superfície de Drucker	154
D	Obtenção do Operador Definidor do Campo de Deformações	157
E	Relação de Consistência entre os Campos de Velocidades e dos Multiplicadores Plásticos	159
E.1	Implementação da Relação de Consistência	159
E.2	Definição das Taxas de Deslocamento \dot{W}_i	161
E.3	Definição das Taxas de Deslocamento \dot{U}_i e \dot{U}_i^*	161

Lista de Figuras

2.1	Sistema em Equilíbrio	6
2.2	Representação geométrica de uma superfície de escoamento no espaço de tensões	10
2.3	Material elástico perfeitamente plástico	11
2.4	Elemento de casca axi-simétrica	18
2.5	Criério de Tresca	21
2.6	Superfície de escoamento de [Onat, 1955]	23
2.7	Superfície de escoamento - prisma hexagonal	25
3.1	Discretização da casca via Elementos Finitos	27
3.2	Deslocamento em um elemento i sujeito à pressão interna	40
3.3	Deslocamento em um elemento i sujeito à carga de anel	41
3.4	Detalhe de uma rótula plástica	42
3.5	Detalhe da rotação em uma rótula plástica	44
4.1	Casca cilíndrica sujeita a uma carga P de anel	53
4.2	Solução para a casca cilíndrica sujeita a uma carga P de anel	55
4.3	Casca cilíndrica sujeita à pressão interna p	56
4.4	Solução para a casca cilíndrica sujeita à pressão interna	58
4.5	Casca esférica sujeita à pressão interna	59
4.6	Solução para uma calota esférica sujeita a uma pressão hidrostática	61
4.7	Modelo estrutural e esforços de compatibilização entre a saia e o tambor	63
4.8	Representação do tambor de coqueamento	68
4.9	Gradiente de temperatura limite e mecanismo de colapso	69
4.10	Deflexão ao longo da saia de sustentação	71
4.11	Condição de escoamento dentro de cada elemento	73

4.12	Esforço normal na direção circunferencial ao longo do comprimento da saia de sustentação	74
5.1	Casca Toroidal com espessura $t = 4mm$	83
5.2	Distribuição da norma do erro para a Casca Toroidal -refinamento adaptativo	85
5.3	Gráfico da convergência das normas $\ \hat{e}_h\ $ e $\ e_h^e\ $	86
5.4	Gráfico da convergência do Índice de Efetividade	86
5.5	Gráfico da convergência da norma do erro $\ e_h^e\ $ para os refinamentos uniforme e adaptativo	87
5.6	Vaso Toro-esférico Padrão ASME com espessura $t = 1cm$ e $R = 2m$.	88
5.7	Distribuição da norma do erro para o Vaso Toro-esférico Padrão ASME - refinamento adaptativo	89
5.8	Gráfico da convergência das normas $\ \hat{e}_h\ $ e $\ e_h^e\ $	90
5.9	Gráfico da convergência do Índice de Efetividade	90
5.10	Gráfico da convergência da norma do erro $\ e_h^e\ $ para os refinamentos uniforme e adaptativo	91
5.11	Topo toro-esférico de espessura $t = 2,5cm$ e $R = 1,95m$	92
5.12	Gráfico da convergência das normas $\ \hat{e}_h\ $ e $\ e_h^e\ $	93
5.13	Gráfico da convergência do Índice de Efetividade	93
5.14	Gráfico da convergência da norma do erro $\ e_h^e\ $ para os refinamentos uniforme e adaptativo	94
5.15	Campo das taxas de deformação	97
6.1	Superfície de Escoamento de Drucker para uma casca cilíndrica sem força axial	100
6.2	Mecanismo cônico de colapso	101
6.3	Mecanismo colapso para a superfície hexagonal	102
6.4	Superfície de escoamento de dez planos	108
6.5	Discretização da casca para o novo elemento de três nós	111
6.6	Diagrama das tensões meridionais após a formação da rótula plástica	121
6.7	Diagrama das equações de restrição, $(NE + 1) \times 10(NE + 1)$	124
6.8	Solução para a casca cilíndrica sujeita a uma carga P de anel, para a nova superfície de escoamento	126

6.9	Soluções para a casca cilíndrica sujeita à pressão interna, raio $r = 20\text{cm}$ e espessura $t = 1\text{cm}$	128
6.10	Casca cilíndrica sujeita à pressão interna - Solução com a presença da rótula central	129
6.11	Casca Cônica - Geometria	131
6.12	Solução e Mecanismo de Colapso, para uma casca cônica com espessura $t = 4\text{cm}$	132
C.1	Lado \overline{CB} da superfície de Drucker	154

Lista de Tabelas

4.1	Análise para diversos valores de F	72
5.1	Malhas refinadas uniformemente	84
5.2	Malhas refinadas uniformemente - valores para o estudo da convergência	86
5.3	Malhas refinadas adaptativamente	87
5.4	Malhas refinadas adaptativamente - valores para o estudo da convergência	87
5.5	Malhas refinadas uniformemente	89
5.6	Malhas refinadas uniformemente - valores para o estudo da convergência	90
5.7	Malhas refinadas adaptativamente	90
5.8	Malhas refinadas adaptativamente - valores para o estudo da convergência	91
5.9	Malhas refinadas uniformemente	93
5.10	Malhas refinadas uniformemente - valores para o estudo da convergência	93
5.11	Malhas refinadas adaptativamente	94
5.12	Malhas refinadas adaptativamente - valores para o estudo da convergência	94
6.1	Solução de Drucker	101
6.2	Soluções para uma casca cilíndrica sujeita a uma carga de anel	125
6.3	Soluções para uma casca cilíndrica sujeita à pressão interna	127
6.4	Soluções para uma casca cônica sujeita à pressão interna	130

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais

Este capítulo visa, primeiramente, descrever sucintamente os vários aspectos estudados nesta dissertação e mostrar a importância do desenvolvimento de técnicas simplificadas para solução de problemas de “shakedown” e de análise limite. Em seguida, faz-se uma descrição resumida dos objetivos propostos para esta dissertação e das metas alcançadas, através das várias contribuições para o desenvolvimento de técnicas adaptivas de elementos finitos, para análise limite e de “shakedown” em vasos de pressão.

Projetar sob condições de altas temperaturas e elevados transientes térmicos tem colocado, diante de engenheiros e pesquisadores, novos e difíceis problemas de estabilidade e integridade estrutural. O aparecimento de novas tecnologias como os reatores nucleares de metal líquido de partida rápida, modernas unidades de coqueamento na indústria petroquímica, foguetes propulsores de ônibus espaciais entre outros, trouxeram desafios muito maiores para o desenvolvimento de métodos numéricos gerais para análise estrutural. Programas gerais de elementos finitos estão hoje disponíveis no mercado, como o ABAQUS, os quais são capazes de realizar análise de estruturas e carregamentos complexos. A utilização destes pacotes,

para problemas de carregamentos térmicos muito severos, trouxe a conscientização de que é muito difícil extrair informações sobre o comportamento estrutural que possa ser diretamente usado no projeto, quando se faz uma análise passo a passo. Torna-se muito difícil ter acesso à sensibilidade do comportamento às variações de geometria, do modelo do material e da história do carregamento. A necessidade de compreender melhor fenômenos como “ratchetting” incentivou o uso da teoria de “shakedown” por ser capaz de produzir grandezas para o uso direto nas decisões de projeto; a saber, carga limite, carga de “shakedown” e limite de deformação incremental (“ratchetting”).

A aplicação da teoria de “shakedown” a problemas de carregamentos térmicos é um evento relativamente recente. Seu emprego tem se tornado uma tarefa fundamental em projetos de componentes operando a altas temperaturas e submetidos a cargas térmicas cíclicas. Os trabalhos de [Franco e Ponter, 1994a], mostram uma técnica inovadora de elementos finitos para análise limite e de “shakedown” de vasos de pressão, baseada no procedimento cinemático do teorema de Koiter.

No presente trabalho vários aspectos, como a formulação de novo elemento finito, o desenvolvimento de um estimador de erro e de uma estratégia adaptativa para refinamento da malha, foram introduzidos à técnica de [Franco e Ponter, 1994a], no sentido de torná-la mais eficiente e confiável. Além disso, um estudo de caso foi feito, onde o comportamento de uma saia de sustentação de um tambor de coqueamento foi analisado, servindo para mostrar a aplicabilidade prática da técnica. Para esse estudo foi necessário também a introdução de um procedimento novo, onde as soluções elásticas do problema, representadas pelas distribuições de esforços, substituíram o carregamento térmico indireto no algoritmo numérico. Esse procedimento difere substancialmente daquele do algoritmo original onde os carregamentos mecânicos diretos faziam parte, explicitamente, das equações de restrição do problema. Pode-se concluir, portanto, que além do estudo de caso, este trabalho de dissertação apresenta as seguintes contribuições inovadoras para o desenvolvimento desta tecnologia;

- o desenvolvimento de um estimador de erro
- o desenvolvimento de estratégia de refinamento da malha

- o desenvolvimento de um novo elemento de casca
- o desenvolvimento de novos procedimentos para carregamentos indiretos, com a utilização das soluções elásticas do problema.

Embora a técnica tenha sido desenvolvida com o objetivo de se realizar uma análise completa de “shakedown”, os exemplos analisados se restringiram à análise de resistência última dos diversos vasos considerados.

1.2 Resumo do Conteúdo e Organização do Texto

Ao longo dos próximos capítulos, procurou-se descrever formalmente o trabalho desenvolvido, seu embasamento teórico, sua implementação e resultados. O conteúdo desta pesquisa está distribuída da seguinte forma:

No Capítulo (2) são revistos conceitos da Mecânica dos Sólidos, importantes para formulação da técnica de análise limite implementada neste trabalho. Paralelamente ao estabelecimento das equações fundamentais da Elasticidade são discutidos os campos de tensões e de deformações do problema modelo. Uma breve descrição do Princípio dos Trabalhos Virtuais é realizada, e a regra de escoamento para um material elástico perfeitamente plástico, definida. Em seguida, são apresentadas as técnicas de análise limite e de “shakedown” em sua formulação geral. Sua particularização para o caso de cascas axi-simétricas é feita ao final do capítulo, quando são discutidos alguns modelos de superfícies de escoamento.

A formulação cinemática, para análise de elementos finitos de vasos de pressão, desenvolvida em [Franco, 1987], está descrita no Capítulo (3). Através da imposição de certas restrições para a classe de mecanismos de colapso adotada, a aplicação dos teoremas de análise limite e de “shakedown” produz um problema de otimização resolvido pela programação linear. Para que isto ocorra, uma relação consistente entre o campo de taxas de deslocamentos, que descrevem tais mecanismos, e o campo de taxas de deformações cinematicamente admissíveis, que descrevem o comportamento do material, é estabelecida.

No Capítulo (4) é realizado um estudo do comportamento da saia de sustentação de um tambor de coqueamento. Apesar da característica predominantemente cíclica de seu carregamento, o estudo limitou-se a uma análise limite, ficando a análise de “shakedown” para futuros trabalhos. Para a introdução dos efeitos indiretos do carregamento térmico, utilizou-se de soluções elásticas, obtidas da teoria de casca fina. Exemplos de aplicação dessa estratégia para cascas cilíndricas e esféricas, sujeitas a cargas de anel e pressão interna, são apresentados. Ao final, os resultados obtidos para a análise da saia de sustentação são discutidos.

No Capítulo (5), partindo-se da relação de consistência entre os campos de taxas de deslocamentos e de multiplicadores plásticos, descrita no Capítulo (3), é definida uma estimativa *a posteriori* do erro em cada elemento. Esta medida de erro é utilizada em uma estratégia de refinamento adaptativo do tipo h , fundamentada no conceito de malha ótima. A verificação deste procedimento é realizada através de alguns exemplos numéricos nos quais a malha original é refinada adaptativamente para se alcançar soluções mais precisas.

O Capítulo (6) apresenta as modificações feitas na técnica descrita no Capítulo (3), para que seja possível considerar-se a variação da curvatura no interior de cada elemento finito. Para isso, as regras de escoamento são alteradas com a introdução de um modelo mais preciso para a superfície de escoamento. Em seguida um novo campo de taxas de deslocamentos é formulado e as novas condições de restrição para a classe de mecanismos, estabelecidas. Três exemplos numéricos são apresentados ao final desse capítulo para demonstrar as vantagens do novo elemento implementado.

Finalmente, no Capítulo (7), são apresentadas as conclusões obtidas com a realização deste trabalho e diversas propostas para sua continuidade são sugeridas.

Capítulo 2

Fundamentos Básicos

2.1 Introdução

Neste capítulo, são revistos, de maneira concisa, alguns conceitos básicos usados no desenvolvimento da técnica de análise implementada. As equações fundamentais da elasticidade, bem como as regras que regem as condições de escoamento de um material perfeitamente plástico, são estabelecidas. O Princípio dos Trabalhos Virtuais, ferramenta de importante aplicação ao longo deste trabalho, é descrito. As técnicas de análise limite e de “shakedown” são apresentadas de um ponto de vista bastante genérico. Noções fundamentais da teoria de cascas finas são introduzidas e a terminologia e convenção adotadas, definidas. Finalmente, são discutidas algumas superfícies de escoamento de cascas axi-simétricas, e um modelo simplificado é escolhido. A proposta deste capítulo é, portanto, a realização de uma revisão, que situe o trabalho dentro do universo da Mecânica dos Sólidos.

2.2 Sistema de Carregamento

O problema modelo pode ser descrito como um corpo não deformado, Fig. (2.1), definido por um domínio $V \subset \mathbb{R}^3$, que está limitado por uma superfície suave, $S \subset \mathbb{R}^2$, dividida em duas partes, S_p e S_u . Em S_p estão prescritas as forças de superfície $K\mathbf{p}$, sendo K um parâmetro de proporcionalidade de carregamento. Além dessas forças, também poderão estar presentes forças de volume \mathbf{b} . Já em S_u encontram-se prescritos os deslocamentos \mathbf{u} .

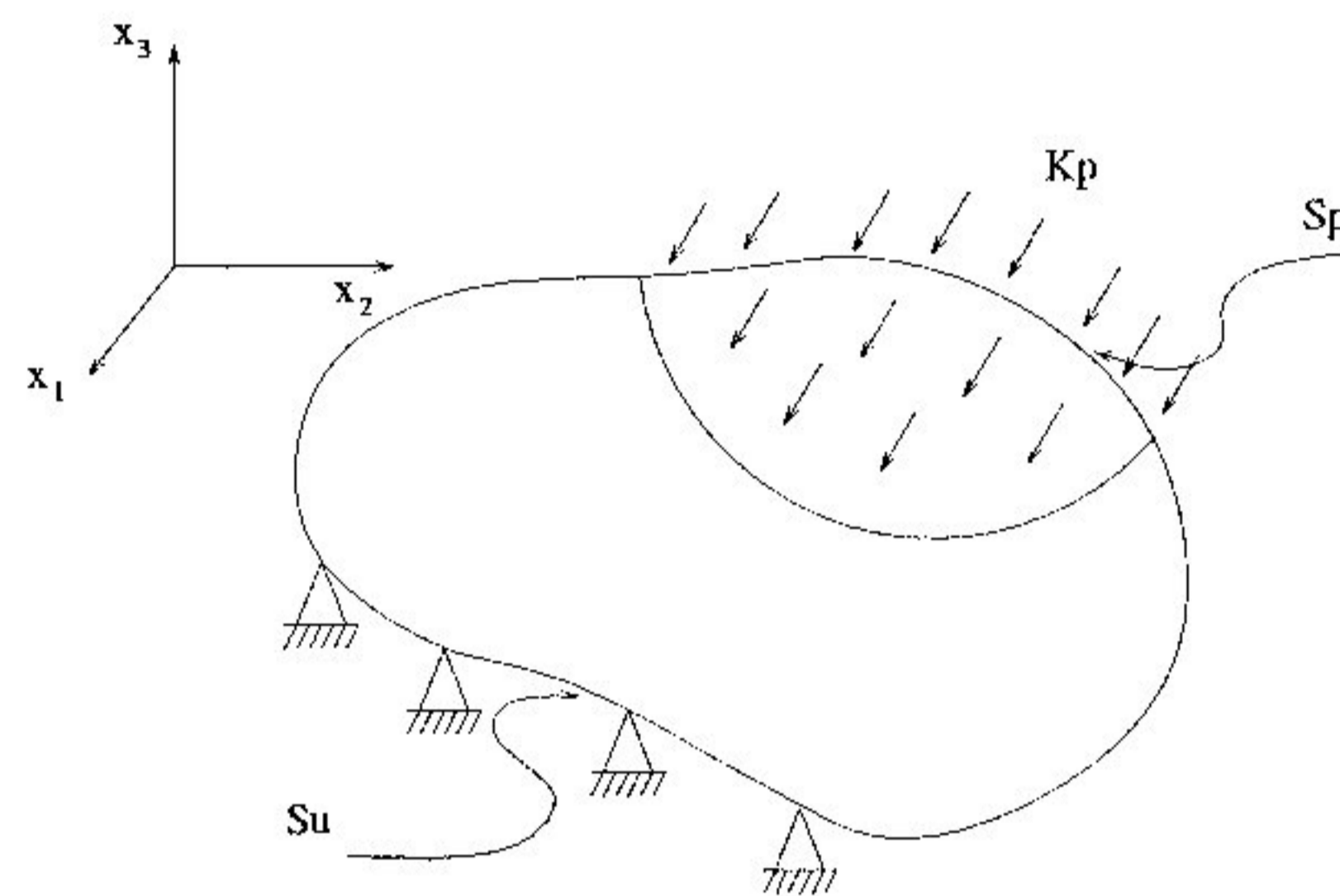


Figura 2.1: Sistema em Equilíbrio

2.3 Tensão-deformação

2.3.1 Estado de Tensões

O estado de tensões nos pontos internos ao corpo é representado pelas nove componentes, σ_{ij} , da matriz de tensões Σ . As deformações são por hipótese muito pequenas o que faz com que as mudanças na geometria sejam desprezadas e, conseqüentemente, com que a matriz de tensões possa ser definida no estado não deformado.

Para que um campo de tensões seja estaticamente admissível, é necessário que sejam satisfeitas as seguintes condições, [Drucker et al., 1951]:

- Equações de equilíbrio:

$$\nabla^T \Sigma + \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ em } V \quad (2.1)$$

Sendo $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}^T$

- Condições de contorno:

$$\Sigma \mathbf{n} = K \mathbf{p} \text{ em } S_p \quad (2.2)$$

onde \mathbf{n} é o vetor normal à superfície em S_p , com relação aos eixos x_1 , x_2 e x_3 , do sistema cartesiano.

Caso não atinjam o limite de escoamento, as tensões pertencentes a um campo estaticamente admissível, são definidas, segundo [Prager, 1959], como estáveis. Uma discussão a respeito dos critérios de escoamento será feita ainda neste capítulo.

2.3.2 Estado de Deformações

O estado de deformação em um ponto interno ao corpo é definido pela matriz de deformações E , de componentes ε_{ij} , correspondente à adição de duas parcelas, uma elástica e outra plástica.

$$E = E^e + E^p \quad (2.3)$$

A relação entre os campos de deformação e deslocamentos é fornecida, dentro da teoria dos pequenos deslocamentos, como:

$$E(u) = \frac{1}{2} [\mathbf{u} \nabla^T + \nabla \mathbf{u}^T] \quad (2.4)$$

Alternativamente, existe uma outra forma de se representar os campos de deformação e conseqüentemente os de tensão. Aproveitando-se de sua simetria, tais matrizes podem ser substituídas por vetores da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{31} \right\}^T \quad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31} \right\}^T \quad (2.6)$$

Essa forma será adotada neste trabalho por ser mais conveniente em análises por elementos finitos, [Stasa, 1985].

Para a parcela elástica, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, é válida a relação constitutiva de materiais elásticos lineares, lei de *Hooke* generalizada:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.7)$$

onde \mathbf{D} constitui a matriz das constantes elásticas do material, simétrica, positiva definida e independente da temperatura.

2.3.3 Condições de Compatibilidade

As Equações (2.4) relacionam as seis componentes de deformação com as três componentes de deslocamento u_i , nas direções x_1 , x_2 e x_3 , em um ponto qualquer do contínuo. Para um campo arbitrário de deformações tem-se, portanto, um sistema de seis equações diferenciais parciais independentes, para apenas três incógnitas. Para que tal sistema possua solução, as seguintes condições, conhecidas como equações de compatibilidade de St-Venant, devem ser satisfeitas, [Malvern, 1969]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.4 Princípio dos Trabalhos Virtuais

O princípio dos trabalhos virtuais apresenta-se, na mecânica dos sólidos, como uma ferramenta importante na solução de problemas e demonstração de teoremas. O termo *virtual* refere-se a grandezas puramente imaginárias ou fictícias, podendo inclusive coincidir com as grandezas reais. Considere-se, pois, a seguinte equação, onde o trabalho externo é igualado à energia interna, para os campos de deslocamento e de tensões descritos em seguida:

$$\int_S (K\mathbf{p}')^T \mathbf{u}^* dS + \int_V (\mathbf{b}')^T \mathbf{u}^* dV = \int_V (\boldsymbol{\sigma}')^T \boldsymbol{\varepsilon}^* dV \quad (2.9)$$

As grandezas $K\mathbf{p}'$, \mathbf{b}' e $\boldsymbol{\sigma}'$ correspondem a um sistema qualquer de forças e tensões em equilíbrio, que podem ser reais ou imaginárias. Já \mathbf{u}^* e $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ correspondem a um campo de deslocamentos e deformações compatíveis, também reais ou imaginários.

Quando apenas o campo de deslocamentos e deformações for virtual, a Equação (2.9) define o princípio dos trabalhos virtuais. Caso contrário, para um sistema de forças e tensões imaginárias, tem-se representado o princípio dos trabalhos virtuais complementares, [Washizu,1982].

Três importantes aspectos são destacados em [Drucker, 1967]. O primeiro é de que o campo de forças e tensões não precisa ter qualquer relação com os campos de deslocamentos e deformações. O segundo aspecto é a ausência da exigência de compatibilidade entre os deslocamentos e as restrições do problema real. Qualquer campo de deslocamentos, possível ou não, é permitido, contanto que todas as forças sejam incluídas no cálculo do trabalho. Finalmente, a aplicação do campo de deslocamentos virtuais permite a obtenção das equações de equilíbrio, (2.1), em função da configuração inicial do corpo.

Tais aspectos viabilizam a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais como um poderoso instrumento na solução de problemas em corpos deformáveis.

Como observado, qualquer campo de forças e tensões em equilíbrio e de deformações compatíveis podem ser utilizados na Equação (2.9). Para o caso de materiais perfeitamente plásticos é mais apropriado lidar-se com velocidades, $\dot{\mathbf{u}}^*$, e

taxas de deformação, $\dot{\epsilon}^*$, [Hodge, 1963]. Pode-se, então, redefinir a Equação (2.9), em função da variação do trabalho virtual com o tempo, como estabelecido a seguir:

$$\int_S (K \mathbf{p}')^T \dot{\mathbf{u}}^* dS + \int_V (\mathbf{b}')^T \dot{\mathbf{u}}^* dV = \int_V (\boldsymbol{\sigma}')^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^* dV \quad (2.10)$$

2.5 Regra de Escoamento

O critério de escoamento visa definir, para o material em estudo, os limites elásticos, em função do estado de tensões a que está sujeito. Para o estado de tensões uniaxial, tem-se como limite elástico a tensão de escoamento σ_o . No caso geral, representa-se, segundo [Chen e Han, 1988], a condição de escoamento através de:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = F(\boldsymbol{\sigma}) - k = 0 \quad (2.11)$$

A função f de escoamento pode ser interpretada geometricamente como uma superfície em um espaço de tensões. Para materiais perfeitamente plásticos, o parâmetro k é constante e, conseqüentemente, a superfície permanece fixa, Fig. (2.2).

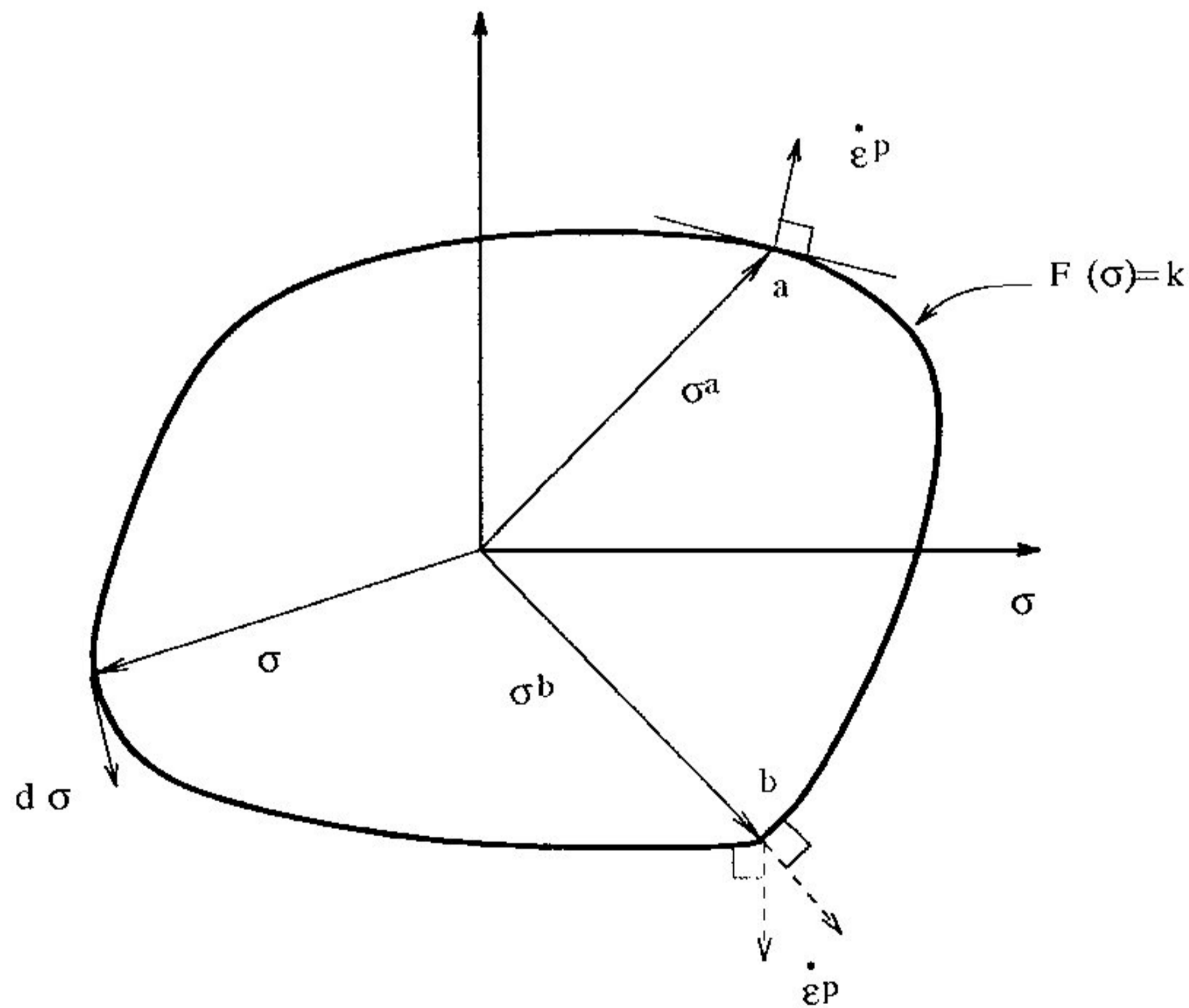


Figura 2.2: Representação geométrica de uma superfície de escoamento no espaço de tensões

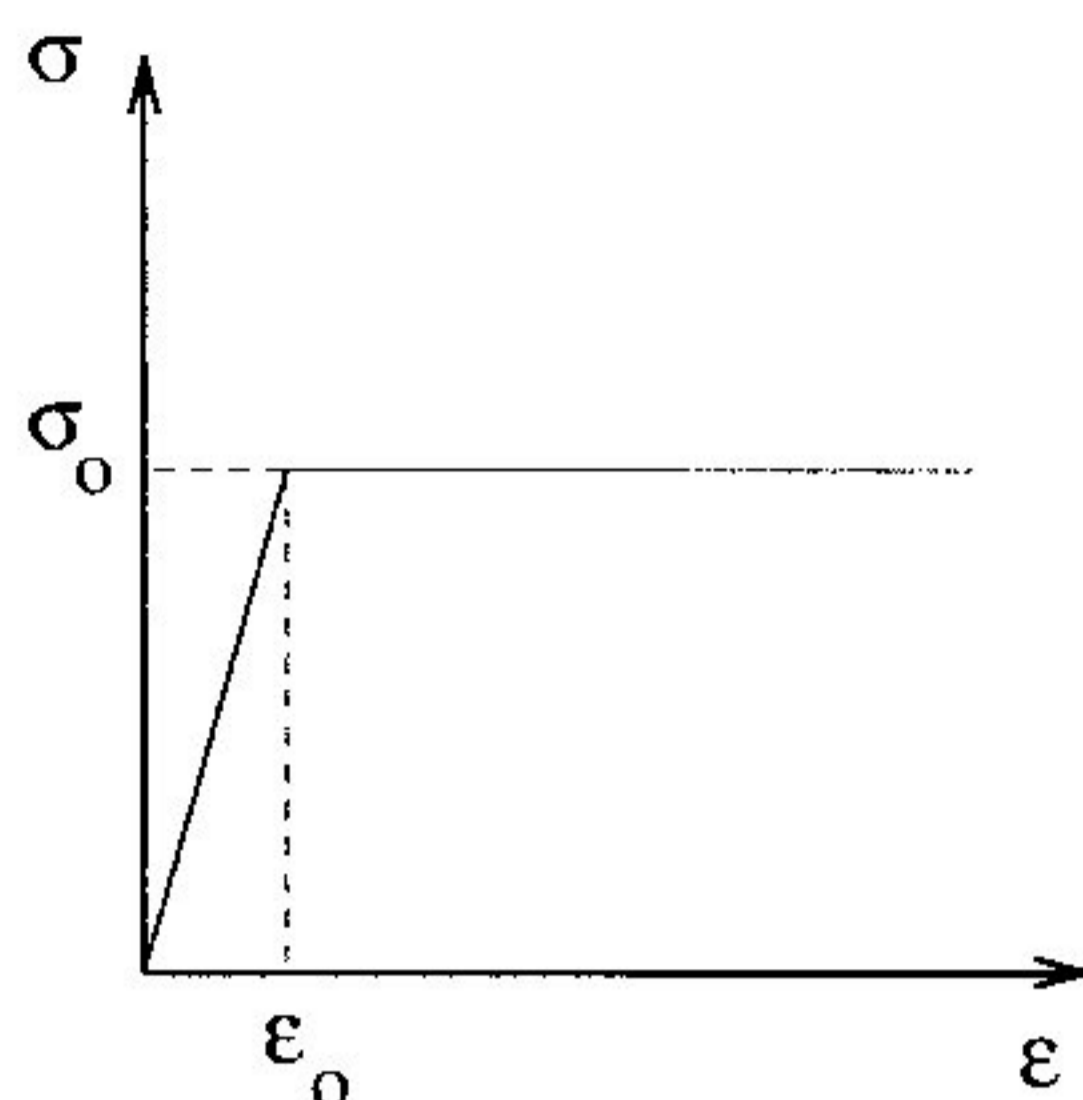


Figura 2.3: Material elástico perfeitamente plástico

Para os pontos internos à superfície, $F(\boldsymbol{\sigma}) < k$ tem-se o comportamento elástico do material. As deformações plásticas só ocorrem quando o vetor, correspondente ao estado de tensões em um determinado ponto, tocar a superfície de escoamento, $F(\boldsymbol{\sigma}) = k$. No caso dos materiais perfeitamente plásticos, as tensões não ultrapassam essa fronteira. O escoamento, portanto, ocorre somente para os pontos sobre a superfície e qualquer acréscimo no estado de tensões $d\boldsymbol{\sigma}$, situa-se ao longo de sua direção tangencial.

Sendo o material elástico perfeitamente plástico, as deformações plásticas são ilimitadas, Fig. (2.3). Torna-se, então, mais apropriado lidar-se com as velocidades, $\dot{\mathbf{u}}^*$ e o campo das taxas de deformação $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^*$, como já afirmado na Seção 2.4.

Pode-se agora definir a lei do escoamento, que fornece a taxa das deformações plásticas. Em 1928, von Mises introduziu o conceito da função de potencial plástico, representando uma função escalar de tensões $g(\boldsymbol{\sigma})$. Através dela, estabeleceu-se a lei de escoamento a partir das equações:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.12)$$

onde $\dot{\lambda}$ é um fator não negativo de proporcionalidade, apenas diferente de zero na ocorrência da deformação plástica, definido com multiplicador plástico.

A Lei do Escoamento Associativa é obtida quando são coincidentes as funções de escoamento e de potencial, [Chen e Han, 1988]. A Equação (2.12) pode, dessa maneira, ser reescrita:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (2.13)$$

conduzindo-se a duas conseqüências imediatas:

- Convexidade da superfície de escoamento.
- Normalidade: O vetor da taxa de deformação plástica deve ser normal à superfície de escoamento nos pontos suaves e confinar-se entre as duas direções normais nas regiões de canto, pontos **a** e **b** na Fig. (2.2), respectivamente.

Finalmente, a condição de normalidade do escoamento permite que as soluções para os problemas de valores de contorno, em materiais elásticos perfeitamente plásticos, sejam únicas.

2.6 Análise Limite e de “Shakedown”

Basicamente, a análise limite e de “shakedown” trata da aplicação de métodos que determinem a carga de colapso de um corpo idealizado. Duas suposições fundamentais definem o modelo idealizado:

- Material deve ser homogêneo e perfeitamente plástico.
- Adota-se a teoria dos pequenos deslocamentos e deformações. Conseqüentemente as mudanças na geometria são desprezadas.

Para a definição de carga de colapso, considera-se o corpo da Fig. (2.1). Seja K , o fator multiplicador das forças de superfície \mathbf{p} , com um crescimento monotônico. Para valores pequenos de K , o corpo comporta-se elasticamente. Com seu aumento, alguns pontos alcançam o estado plástico. O escoamento fica, no entanto, contido pelas regiões que permanecem elásticas. Caso continue havendo acréscimo no valor de K , as regiões em plastificação se espalham pelo corpo até a iminência do colapso. Ocorre, então, a formação do mecanismo plástico e a carga $K\mathbf{p}$ é denominada como *carga limite* ou de *colapso*.

2.6.1 Teoremas da Análise Limite

São três as condições verificadas para que uma solução seja válida na mecânica dos corpos deformáveis:

- equações de equilíbrio, (2.1);
- relações constitutivas, (2.7);
- equações de compatibilidade, (2.8).

Deve-se levar em conta ainda as condições de escoamento e de contorno. Sabe-se, porém, que a satisfação simultânea de tais condições torna-se muito complexa e trabalhosa. Procura-se, portanto, satisfazer apenas algumas delas, gerando-se soluções estimadas da carga limite, através dos teoremas do *Limite Inferior* e *Limite Superior*.

Teorema do Limite Inferior ("Lower Bound")

Em um corpo perfeitamente plástico, a formação do mecanismo de colapso não ocorrerá para qualquer campo de tensões que seja estável e estaticamente admissível. Em outras palavras, as cargas, obtidas a partir de campos de tensão estaticamente admissíveis e estáveis, são sempre menores ou no máximo iguais às cargas reais de colapso.

Teorema do Limite Superior ("Upper Bound")

Antes de se apresentar o teorema, é necessário definir campo de taxa de deslocamento cinematicamente admissível que deve satisfazer:

- condições de contorno para as taxas de deslocamento;
- condições de compatibilidade, Equações (2.8).

O Teorema do Limite Superior pode ser, então, formulado da seguinte maneira:

Considere-se um mecanismo de deformações plásticas, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$, definido por um campo de taxas de deslocamento cinematicamente admissível, $\dot{\boldsymbol{u}}^p$. As cargas $K\boldsymbol{p}$ e \boldsymbol{b} obtidas a partir da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, Equação (2.10), quando sua taxa de trabalho sobre o campo $\dot{\boldsymbol{u}}^p$,

$$\int_S (K\boldsymbol{p})^T \dot{\boldsymbol{u}}^p dS + \int_V (\boldsymbol{b})^T \dot{\boldsymbol{u}}^p dV \quad (2.14)$$

é igualada à taxa de dissipação de energia de deformação interna realizada sobre o campo $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$,

$$\int_V (\boldsymbol{\sigma}^p)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dV \quad (2.15)$$

serão sempre no mínimo iguais às cargas de colapso reais.

A demonstração desses dois teoremas foge ao escopo deste trabalho. Em [Chen e Han, 1988] e [Drucker et al., 1951] uma análise mais detalhada é realizada com emprego das propriedades de normalidade e convexidade, definidas na Seção (2.5).

Concluindo, a escolha dos campos de tensão e de velocidade definirá, durante a análise, a proximidade da solução exata. Quando as condições de admissibilidade cinemática e estática forem satisfeitas, a carga real de colapso será finalmente encontrada. Infelizmente, nem sempre é viável tal procedimento, restando a opção por um dos teoremas acima definidos. O Teorema do Limite Superior mostra-se mais adequado na solução de problemas de cascas finas axi-simétricas. É por isso bastante usado, com ressalvas ao fato de fornecer uma estimativa superior da carga de colapso, contrariando assim a segurança do projeto. Neste trabalho, procurou-se aprimorar a técnica de elementos finitos, desenvolvida em [Franco, 1987], para que a carga limite obtida, aproxime-se satisfatoriamente da solução exata.

2.6.2 Análise de “Shakedown”

Em diversos tipos de estruturas, seus componentes estão sujeitas a mudanças bruscas de temperatura, em função da posição e do tempo, enquanto as cargas mecânicas permanecem constantes. A soma das tensões mecânicas e termo-elásticas, provenientes deste carregamento cíclico, podem produzir os seguintes regimes:

- O regime elástico.
- “Shakedown”, ou acomodação estrutural, que é o regime em que o comportamento da estrutura volta a ser elástico após o surgimento de deformações plásticas, durante os primeiros ciclos.
- Plasticidade reversa, caracterizada por deformações plásticas que se alternam entre a tração e compressão.
- “Ratchetting”, ou deformação incremental, quando deformações plásticas acumulativas ocorrem em cada ciclo de carregamento.

Para o caso do carregamento cíclico, o campo de deformações plásticas cinematicamente admissíveis, $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^p$, é obtido somando-se o acréscimo das taxas de deformação plástica, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p(t)$, durante o ciclo Δt .

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \int_0^{\Delta t} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p(t) dt \quad (2.16)$$

Sendo o material elástico perfeitamente plástico não há variação no campo de taxas de tensões durante os instantes de escoamento, dentro do ciclo de carregamento, Δt , ou seja:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = 0 \quad (\text{no escoamento durante o ciclo}) \quad (2.17)$$

Para o campo de taxas de deformações elásticas, tem-se:

$$\int_0^{\Delta t} \dot{\epsilon}^e(t) dt = 0 \quad (2.18)$$

e o campo de deslocamentos é definido ao final de um ciclo como:

$$\Delta \mathbf{u} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{u}(t) dt \quad (2.19)$$

Considerando-se as relações estabelecidas até aqui, pode-se, finalmente, formular o teorema de Koiter, para o caso de carregamento térmico cíclico, [Koiter, 1956], de acordo com a abordagem de [Franco, 1987], da seguinte maneira:

“A estrutura não alcançará um estado de “shakedown”, isto é, estará em “ratchetting” ou em plasticidade reversa, caso qualquer sistema de cargas cíclicas externas e campo de taxas de deformações plásticas cíclicas cinematicamente admissíveis, $\dot{\epsilon}^p(t)$, dentro de limites prescritos, satisfizer, ao final de um período Δt , a inequação”:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta t} \int_S (K\mathbf{p})^T \dot{\mathbf{u}}^p(t) dS dt + \int_0^{\Delta t} \int_V (\mathbf{b})^T \dot{\mathbf{u}}^p dV dt + \\ & + \int_0^{\Delta t} \int_V (\boldsymbol{\sigma}^\theta(t))^T \dot{\epsilon}^p(t) dV dt > \int_0^{\Delta t} \int_V (\boldsymbol{\sigma}^p)^T \dot{\epsilon}^p(t) dV dt \end{aligned} \quad (2.20)$$

sendo:

$\boldsymbol{\sigma}^\theta(t)$ o campo de tensões proveniente do carregamento térmico dependente do tempo e posição ao longo da estrutura, podendo também incluir cargas mecânicas cíclicas.

É importante observar que não há o envolvimento de tensões residuais, induzidas pelo carregamento cíclico, dependendo-se apenas da formulação cinemática do problema. Portanto, assumindo-se como nulas as forças de volume \mathbf{b} , o limite superior para o parâmetro de carregamento K é definido como:

$$K > \frac{\int_0^{\Delta t} \int_V [\boldsymbol{\sigma}^p - \boldsymbol{\sigma}^\theta(t)]^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p(t) dV dt}{\int_0^{\Delta t} \int_S (\mathbf{p})^T \dot{\mathbf{u}}^p(t) dS dt} \quad (2.21)$$

Caso o carregamento cíclico não esteja presente, não haverá variação das quantidades físicas ao longo do tempo. Conseqüentemente a Inequação (2.21) reduz-se a:

$$K > \frac{\int_V (\boldsymbol{\sigma}^p)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dV}{\int_S (\mathbf{p})^T \dot{\mathbf{u}}^p dS} \quad (2.22)$$

Esta nova inequação corresponde à aplicação do teorema cinemático de análise limite definido na seção anterior. Esse teorema será utilizado nas formulações estabelecidas nesta dissertação e para os problemas analisados. Para que se realize uma análise de “shakedown”, basta que seja considerada a variação, ao longo do tempo, das grandezas envolvidas, além de se incluir as tensões termo-elásticas, como é mostrado na Inequação (2.21).

2.7 Teoria de Cascas Finas Axi-simétricas

As hipóteses cinemáticas básicas associadas às estruturas de cascas finas são descritas, conforme [Ugural, 1981], da seguinte maneira:

- A razão entre a espessura da casca e os raios de curvatura da superfície média deve ser pequena com relação à unidade.
- Os deslocamentos devem ser pequenos se comparados à espessura.
- As seções normais à superfície média permanecem planas e normais à superfície média deformada após a flexão da casca. Essa hipótese significa que as deformações angulares são desprezadas, bem como as deformações normais à superfície média. Conseqüentemente, também as taxas de deformação correspondentes não são considerados.
- As tensões normais à superfície média são desprezadas.

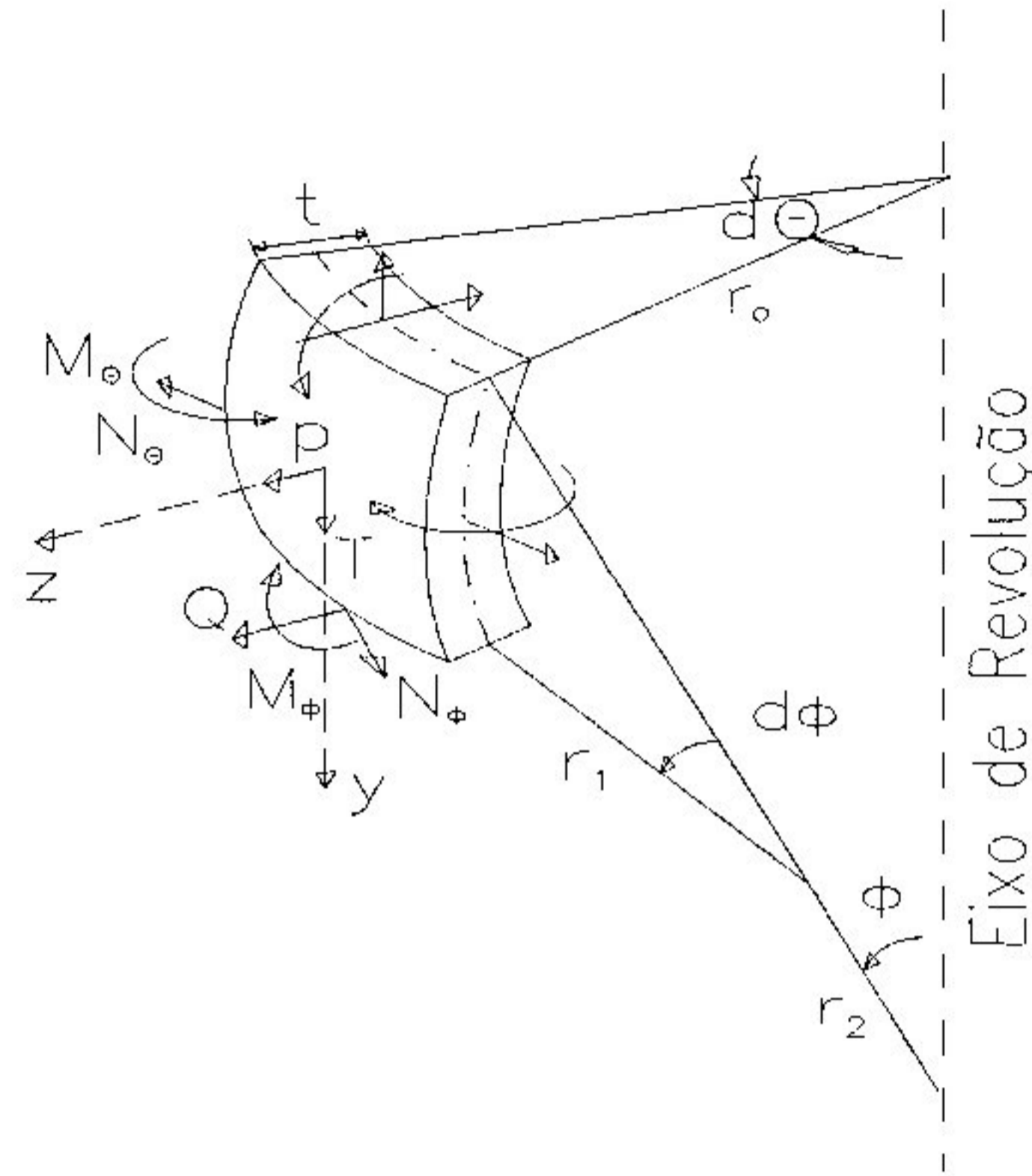


Figura 2.4: Elemento de casca axi-simétrica

As estruturas analisadas neste trabalho deverão, além de seguir as hipóteses acima descritas, caracterizar-se por sua axi-simetria. Desse modo, a geometria, propriedades do material, carregamento e deformações serão simétricos com relação ao eixo de simetria.

Para a definição da simbologia aqui usada, considera-se a Fig. (2.4). Um ponto qualquer, pertencente à casca, situado sobre a superfície média, fica definido pelo primeiro raio de curvatura r_1 , pelo segundo raio de curvatura r_2 e seu ângulo ϕ com o eixo de simetria e finalmente pelo ângulo θ . Um elemento de casca de dimensões $r_0 d\theta$ e $r_1 d\phi$ está solicitado pelas cargas axi-simétricas T e p , nas direções radial, z e tangente à superfície, y . O estado de tensões é definido pelas tensões resultantes por unidade de comprimento, a saber, os esforços normais N_ϕ e N_θ , os momentos fletores M_ϕ e M_θ e o esforço cortante Q , obtidos como se segue:

$$M_\phi = - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_\phi(z) z dz \quad (2.23)$$

$$M_\theta = - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_\theta(z) z dz \quad (2.24)$$

$$N_\phi = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_\phi(z) dz \quad (2.25)$$

$$N_\theta = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_\theta(z) dz \quad (2.26)$$

$$Q = - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{r\phi}(z) dz \quad (2.27)$$

onde:

- $\sigma_\phi(z)$ e $\sigma_\theta(z)$ são as tensões normais nas direções meridional e circunferencial, variáveis ao longo da espessura da casca.
- $\sigma_{r\phi}(z)$ a tensão tangencial na direção da cortante Q , variável ao longo da espessura da casca.
- t a espessura da casca.

Definidas as tensões resultantes, as equações de equilíbrio ao longo da superfície média podem ser estabelecidas, [Timoshenko e Krieger, 1959]:

$$r_o \frac{dN_\phi}{d\phi} + (N_\phi - N_\theta) r_1 \cos \phi - r_o Q + T r_o r_1 = 0 \quad (2.28)$$

$$N_\phi r_o + N_\theta r_1 \sin \phi + \frac{d}{d\phi} (Q r_o) - p r_o r_1 = 0 \quad (2.29)$$

$$r_o \frac{dM_\phi}{d\phi} + (M_\phi - M_\theta) r_1 \cos \phi - Q r_o r_1 = 0 \quad (2.30)$$

Na teoria de cascas finas, é mais conveniente trabalhar com os esforços solicitantes e equacionar o problema em função deles.

Já a relação deformação e deslocamentos pode ser definida, [Timoshenko e Krieger, 1959]:

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{r_1} \left(\frac{du}{d\phi} + w \right) \quad (2.31)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r_2} (u \cot \phi + w) \quad (2.32)$$

$$\kappa_\phi = \frac{1}{r_1} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{u}{r_1} - \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) \quad (2.33)$$

$$\kappa_\theta = \frac{\cot \phi}{r_2} \left(-\frac{u}{r_1} + \frac{dw}{r_1 d\phi} \right) \quad (2.34)$$

sendo:

- ε_ϕ e ε_θ as deformações nas direções meridional e circunferencial, respectivamente.
- κ_ϕ e κ_θ as mudanças de curvatura nas direções meridional e circunferencial.
- u e w os deslocamentos nas direções y e z .

2.8 Análise Limite em Cascas Axi-simétricas

A obtenção de uma superfície de escoamento, para cascas axi-simétricas, em função de suas tensões generalizadas, é bem mais complexa e trabalhosa quando comparada com o caso bi-axial no estado plano de tensão. Os primeiros estudos a esse respeito foram realizados a partir de cascas cilíndricas, [Drucker, 1953], [Onat, 1955], e a superfície resultante, em um espaço de três dimensões está mostrada na Fig. (2.6). [Onat e Prager, 1954] estenderam o estudo para o caso genérico de cascas axi-simétricas, obtendo uma superfície em quatro dimensões. Baseado no fato de que na maioria das cascas, o escoamento não é definido simultaneamente pelos momentos e forças, [Hodge, 1960] desenvolveu uma nova forma de se visualizar essa superfície. Em [Drucker e Shield, 1958], a superfície de escoamento para o cilindro foi utilizada no estudo de cascas axi-simétricas generalizadas. Nesse trabalho bons resultados foram obtidos para problemas de cascas toro-esféricas, mostrando-se a viabilidade de serem usadas superfícies simplificadas, a partir da superfície exata, Fig. (2.6), de cascas cilíndricas, para o caso mais geral de cascas axi-simétricas. A utilização de tal superfície para problemas práticos de engenharia ainda não era viável, implicando em um significativo grau de complexidade. O prisma hexagonal, resultante de sua linearização, foi, então, proposto por [Drucker e Shield, 1958] para a análise de

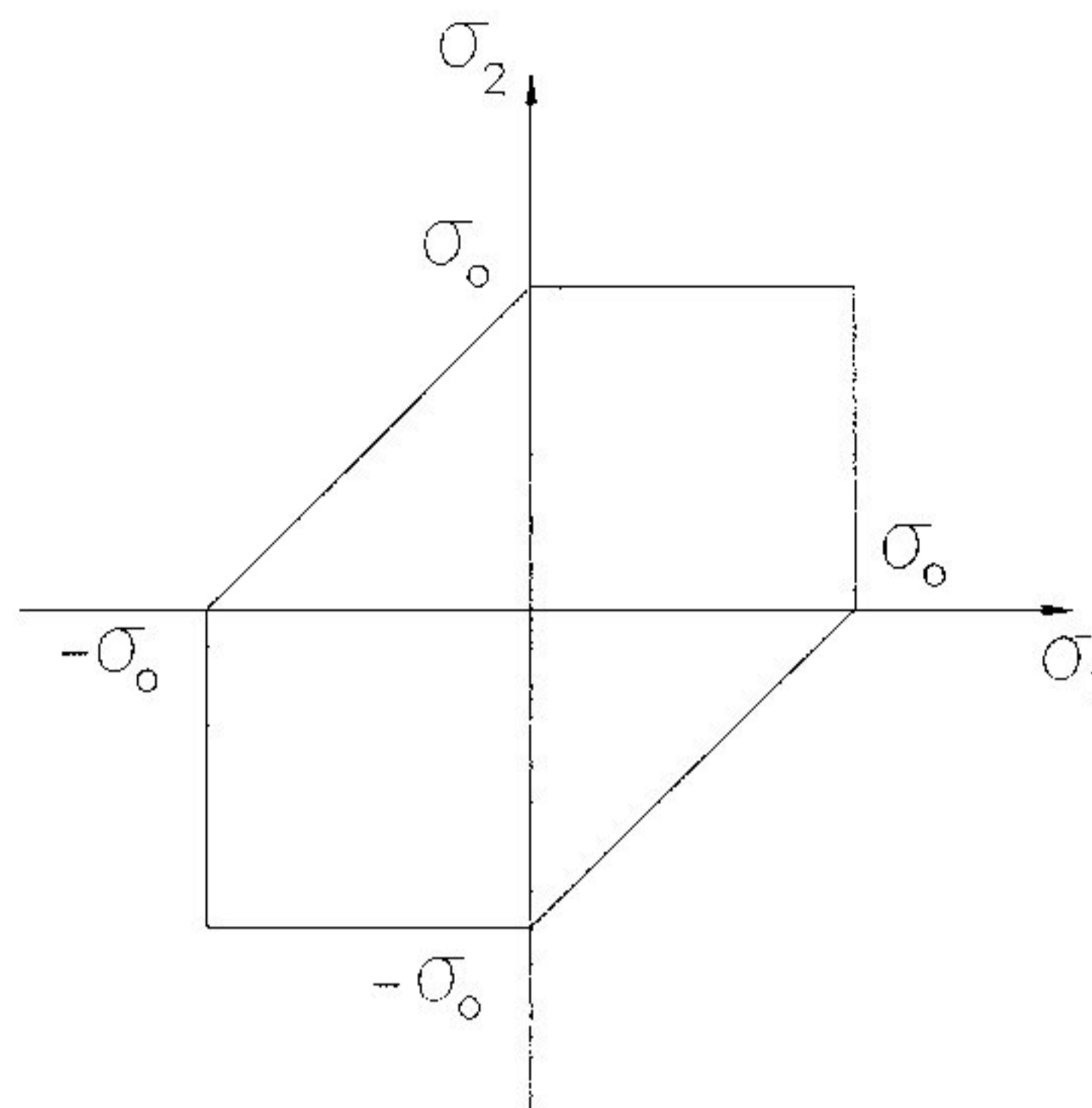


Figura 2.5: Critério de Tresca

vasos toro-esféricos. A partir dessa aproximação uma técnica de elementos finitos foi desenvolvida para análise limite de “shakedown”, [Franco, 1987], que servirá como base para todos os desenvolvimentos desta dissertação.

2.8.1 Modelo de Material Adotado

O material é suposto homogêneo e elástico-perfeitamente plástico sem efeitos dependentes do tempo, Fig. (2.3). Para materiais dúcteis, geralmente o critério de escoamento adotado é o de von Mises, [Chen e Han, 1988]. A condição da máxima tensão de cisalhamento, ou critério de Tresca, Fig. (2.5), é também um critério razoável, além de conduzir a problemas matematicamente mais simples, principalmente quando as direções principais das tensões estão fixas e conhecidas, [Hodge, 1963]. No caso das cascas axi-simétricas, o prisma hexagonal, proposto por [Drucker e Shield, 1958], separa o comportamento de membrana dentro do elemento, do comportamento de flexão na direção meridional, localizado apenas nas extremidades do mesmo. O comportamento de membrana no interior do elemento segue o critério de escoamento de Tresca. Uma revisão sumária sobre a obtenção da superfície de escoamento para cascas axi-simétricas de parede fina é dada a seguir.

2.8.2 Definição da Superfície de Escoamento

Na determinação da superfície de escoamento para cascas axi-simétricas genéricas, [Onat e Prager, 1954], são usados os esforços solicitantes, resultantes do estado de tensão do elemento de casca, vistos na Seção (2.7). O cisalhamento transversal, entretanto, é desprezado, uma vez que exerce pouca influência no escoamento. A superfície, então obtida, é expressa em um espaço de tensões de quatro dimensões [Drucker e Shield, 1958], como:

$$F(N_\phi, N_\theta, M_\phi, M_\theta) = c^2 \quad (2.35)$$

sendo c uma constante.

Tal superfície, por sua complexidade, é de difícil aplicação ficando restrita a problemas mais simples. A superfície de escoamento obtida em [Onat, 1955], para cascas cilíndricas, Fig. (2.6), é definida em um campo de tensões tri-dimensional. A Equação (2.35) é, portanto, substituída por:

$$F(N_\phi, N_\theta, M_\phi) = c^2 \quad (2.36)$$

A ausência de momentos fletores circunferenciais, M_θ , foi explicada da seguinte forma. As equações de equilíbrio, (2.28), (2.29) e (2.30), reduzem-se, no caso de cascas cilíndricas a:

$$\frac{dN_\phi}{d\phi} = -T \quad (2.37)$$

$$\frac{N_\theta}{r_o} + \frac{dQ}{d\phi} = pr_o \quad (2.38)$$

$$\frac{dM_\phi}{d\phi} - Q = 0 \quad (2.39)$$

M_θ , por razões de simetria é constante ao longo da direção circunferencial, sendo por isso auto-equilibrável. Além disso, durante pequenas deformações da superfície

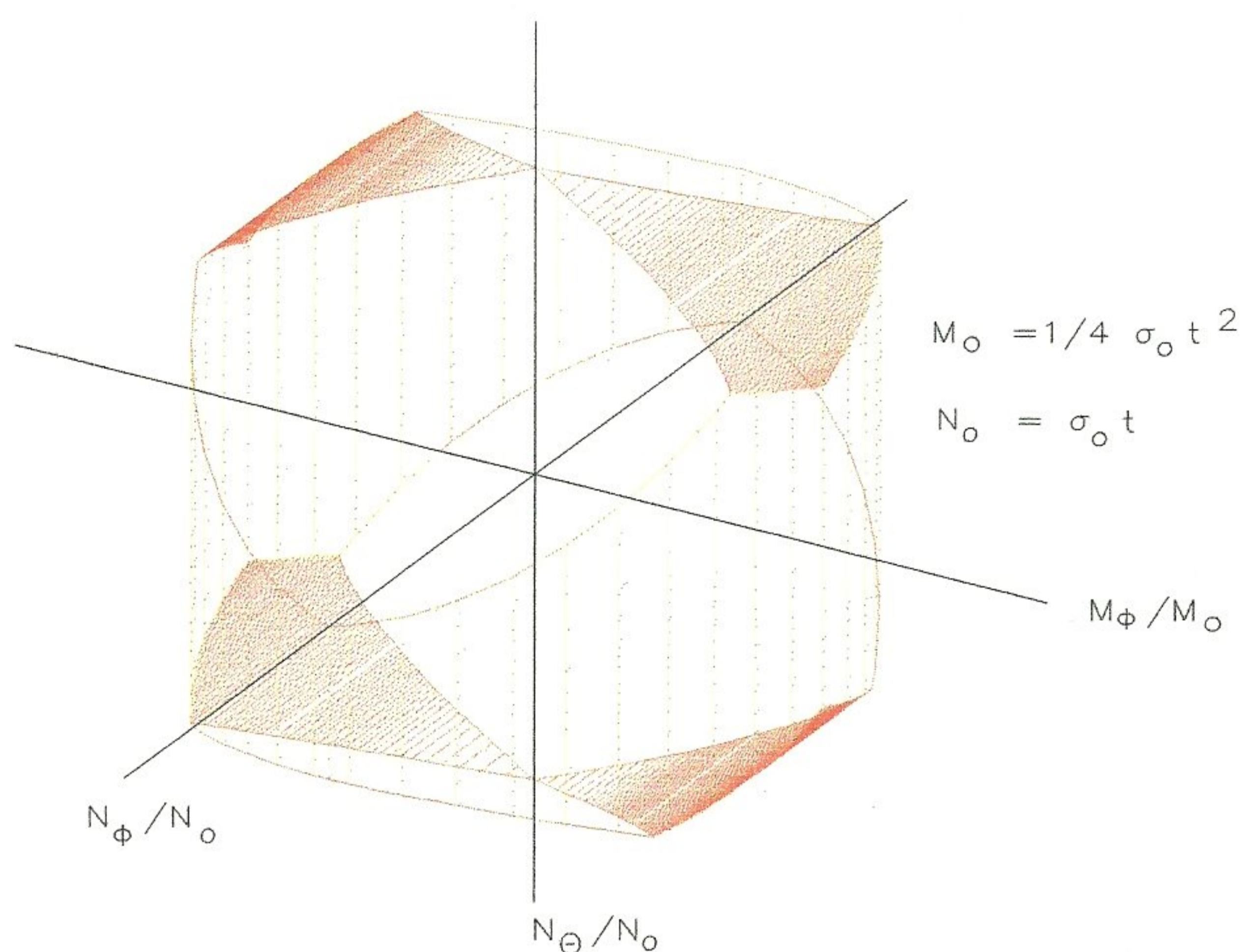


Figura 2.6: Superfície de escoamento de [Onat, 1955]

média da casca cilíndrica, os planos meridionais, onde M_θ atua, permanecem em sua configuração original. Não há, portanto, taxa de trabalho realizado. Conseqüentemente, M_θ não tem efeito na determinação dos limites superior e inferior da carga de colapso, ou seja, não contribui para a definição da superfície de escoamento. Sua interpretação fica restrita a um momento passivo, apesar de ser equivalente, no estado plástico, à metade de M_ϕ ¹.

Para o caso geral de cascas axi-simétricas a situação já não é tão evidente. M_θ , não sendo mais auto-equilibrável, deve ser considerado no equilíbrio, Equação (2.30). Além disso, a mudança de curvatura não se restringe apenas à direção meridional. Para o cálculo da taxa de trabalho, deve-se levar em conta, portanto, a parcela realizada por M_θ , na direção circunferencial. Não significa, porém, que a superfície (2.36) não possa ser utilizada, como uma boa aproximação, para o caso de cascas genéricas. Segundo [Drucker e Shield, 1958], para cascas finas, onde a espessura h é muito menor que o raio r_0 , o termo $(M_\phi - M_\theta)r_1 \cos \phi$

¹De acordo com a propriedade de incompressibilidade do estado plástico, o coeficiente de Poisson é igual a 0,5. Como $M_\theta = \nu M_\phi$, seu valor corresponderá à metade do momento fletor meridional.

de (2.30) pode ser omitido, por ser desprezível em comparação com os demais. Logo, com exceção das regiões próximas ao eixo de revolução onde t/r_o já não é tão pequeno, M_θ pode ser ignorado. Também a taxa de trabalho realizado por M_θ é irrelevante diante das contribuições das outras tensões generalizadas. Pode-se, então, assim como para as cascas cilíndricas, interpretar M_θ como um momento passivo. Conseqüentemente, a superfície de escoamento (2.36) é ainda válida para os casos gerais de cascas axi-simétricas. Em [Drucker e Shield, 1958] e [Shield e Drucker, 1958] podem ser encontrados resultados numéricos que ratificam tal aproximação.

Apesar de toda a simplificação usada, a superfície da Fig. (2.6) ainda implica em um considerável nível de complexidade, incompatível com a necessidade da engenharia. Com o propósito de facilitar a análise [Drucker e Shield, 1958] apresentam algumas superfícies derivadas da original. Uma boa aproximação seria o prisma hexagonal, Fig. (2.7). Algumas observações devem ser feitas a respeito do tipo de solução obtida a partir dessa superfície linearizada. O uso do prisma circunscrito, juntamente com o teorema do limite superior, conduz a soluções superestimadas para a carga de colapso. Da mesma maneira, o prisma inscrito, aliado ao teorema do limite inferior, fornece um valor abaixo da solução exata. Nada se pode inferir, no entanto, quando são usados o teorema do limite superior com a superfície inscrita ou o teorema do limite inferior com a superfície circunscrita.

Uma importante interpretação pode ser extraída a partir do prisma hexagonal. Devido sua forma convexa e da condição de normalidade, Seção (2.5), existe uma independência entre o comportamento de membrana e de flexão. Essa característica não se afasta muito do modo com que os esforços são distribuídos nas estruturas de cascas finas. Como resultado de sua grande flexibilidade, tais estruturas comportam-se principalmente como membranas, exceto por algumas regiões onde se concentram as tensões de flexão. A separação da estrutura em volumes, correspondentes ao comportamento de flexão e de membrana, torna-se, portanto, uma simplificação bastante razoável. Tais volumes são as rótulas plásticas e as regiões entre elas. Deve-se lembrar que não se considera a dissipação de energia, causada pela mudança de curvatura na direção circunferencial. Logo, rótula plástica refere-se, apenas, às regiões em que a taxa de mudança de curvatura meridional, $\dot{\kappa}_\phi$, ocorre sem qualquer restrição. Entre tais regiões, apenas as taxas de deformação de membrana nas direções meridional, $\dot{\epsilon}_\phi$, e circunferencial, $\dot{\epsilon}_\theta$, são permitidas. Com base

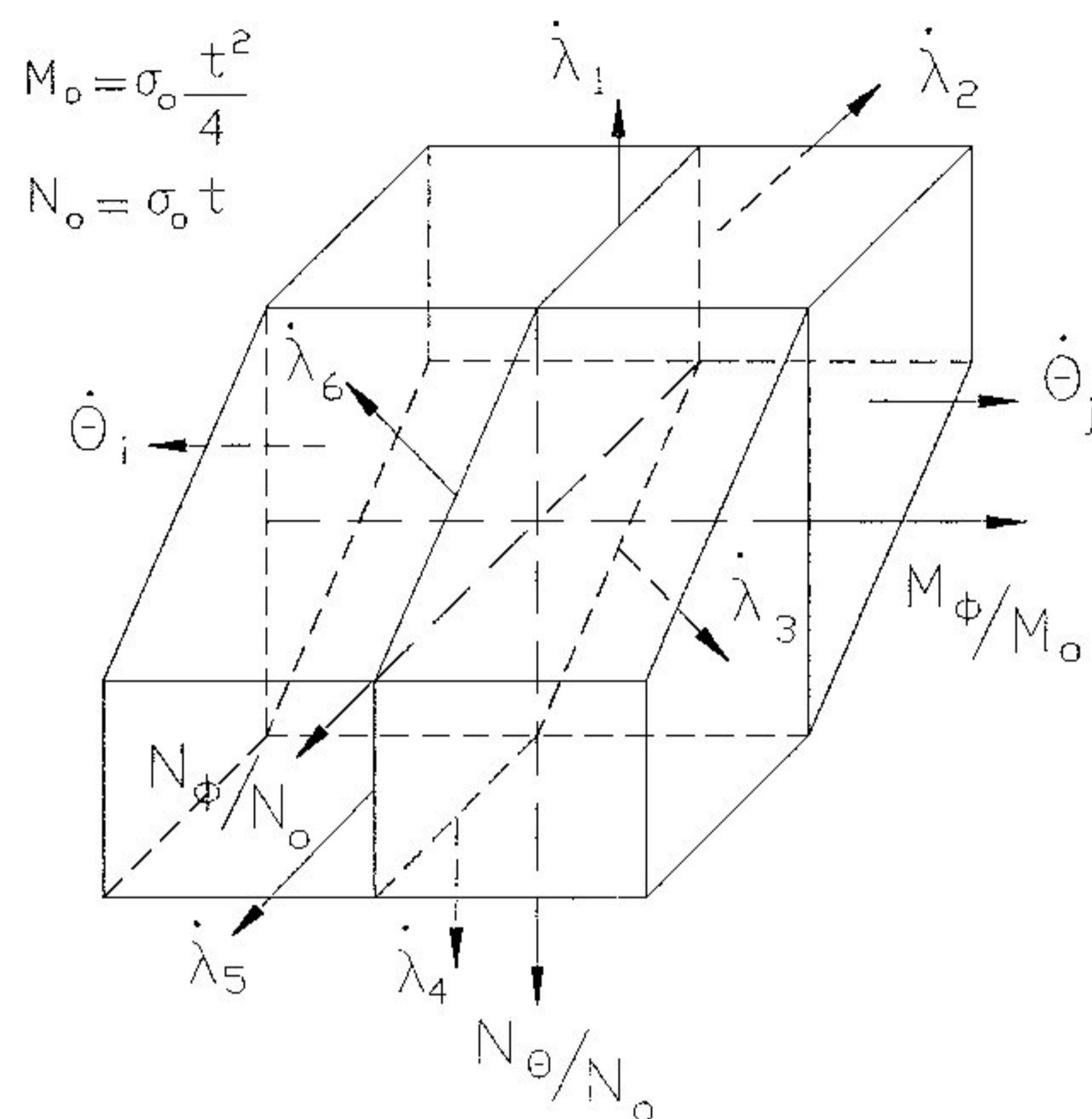


Figura 2.7: Superfície de escoamento - prisma hexagonal

nessa divisão, a solução geralmente é encontrada, partindo-se de um mecanismo de colapso formado por três rótulas plásticas. Essas rótulas são posicionadas, por exemplo, para o caso da análise pelo limite inferior, de modo que a carga tenha seu valor máximo, [Drucker e Shield, 1958], [Drucker, 1953].

Em [Franco, 1987] adota-se o prisma hexagonal como critério de escoamento, para a técnica de elementos finitos. A abordagem escolhida é a cinemática. O campo de deslocamentos consiste de rótulas plásticas localizadas em pontos nodais, enquanto que os elementos comportam-se apenas como membranas. No Capítulo (3) tal procedimento será apresentado com mais detalhes. Resta apenas uma observação a respeito da nomenclatura usada. A princípio, o uso do termo “rótula” não se encaixa, adequadamente, para problemas de domínio tri-dimensional. O mais correto, talvez, seria “charneiras plásticas”. Deve-se lembrar, no entanto, das propriedades de axi-simetria das cascas aqui estudadas, o que possibilita a realização de uma análise em duas dimensões. Dessa maneira torna-se natural definir-se como rótulas, as regiões plastificadas por flexão, localizadas nos pontos nodais, ao longo da direção circunferencial.

Capítulo 3

Técnica para Análise Limite de Cascas Axi-simétricas Via Elementos Finitos

3.1 Introdução

A aplicação dos teoremas de análise limite conduz à formulação de um problema de otimização. Valores extremos, máximos ou mínimos, para a carga de colapso, devem ser encontrados, conforme se apliquem os teoremas do limite inferior ou superior. A discretização de cascas axi-simétricas em elementos finitos viabiliza a implementação de tais problemas em algoritmos, que serão resolvidos por meio da programação linear.

A formulação cinemática para análise limite e de “shakedown” foi implementada em [Karedeniz e Ponter, 1984] e [Karedeniz, 1983], para problemas de vasos de pressão cilíndricos, sujeitos a cargas térmicas cíclicas e a um carregamento mecânico constante. Em [Franco, 1987], uma técnica, que englobasse os demais tipos de geometria das estruturas em cascas, foi desenvolvida. O problema é resolvido através da programação linear, após a substituição do meio contínuo da estrutura em um sistema compatível de elementos finitos. O campo de deslocamentos cinematicamente admissível é obtido para as condições de escoamento, regidas pela função

de Tresca. Dada sua importância para o presente trabalho, este capítulo faz uma descrição sucinta desse procedimento. Maiores detalhes podem ser encontrados nas referências já citadas.

3.2 Discretização da Casca em Elementos Finitos

3.2.1 Campo de Deformações Elasto-Plásticas

O campo elasto-plástico de deformação pode ser definido a partir dos deslocamentos da superfície média da casca, $U_e(s)$ e das deformações plásticas. Estas últimas são funções dos multiplicadores plásticos $\lambda_k(s)$, que caracterizam o comportamento do material, Seção (2.5). Por conveniência, descreve-se o campo de deslocamentos através de suas componentes globais, na direção horizontal, $W(s)$ e na direção vertical, $U(s)$, Fig. (3.1).

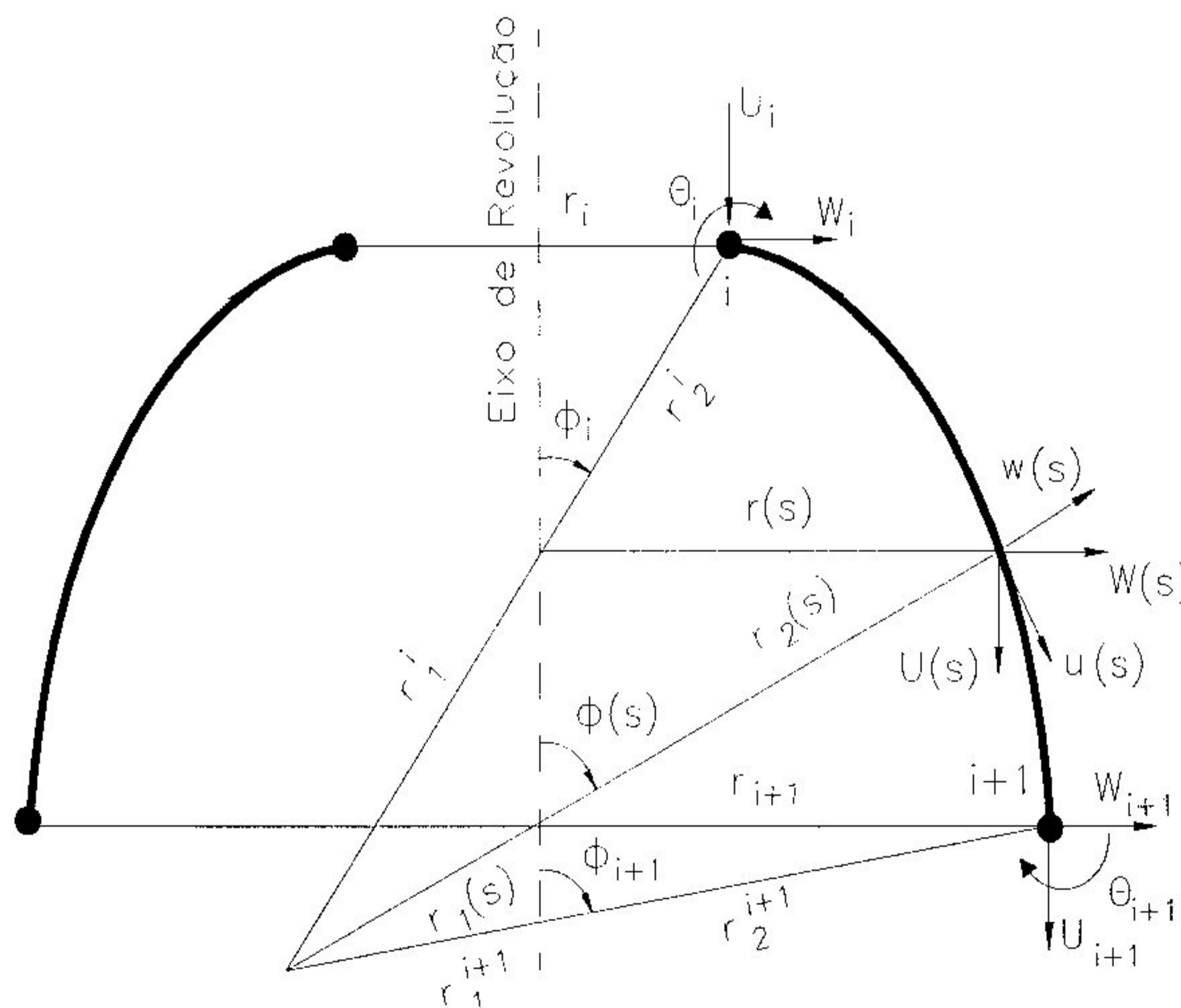


Figura 3.1: Discretização da casca via Elementos Finitos

A formulação de elementos finitos é derivada da interpolação dos campos de deslocamentos e dos multiplicadores plásticos, como funções de seus valores nodais. Considere, portanto, uma casca discretizada em NE elementos finitos. Para cada elemento i ($i = 1, \dots, NE$), o campo dos deslocamentos pode ser expresso, segundo [Franco, 1987] como:

$$\mathbf{U}_e^i(s) = \mathbf{U}_o^i + \mathbf{\Omega}^i(s)\mathbf{U}_n^i \quad (3.1)$$

para

$$\mathbf{U}_e^i(s) = \begin{Bmatrix} U(s) \\ W(s) \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{U}_o^i(s) = \begin{Bmatrix} U_i \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{U}_n^i = \begin{Bmatrix} U_{i+1} - U_i \\ W_i \\ W_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{\Omega}^i(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{l_i} & \frac{s}{l_i} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

sendo:

U_i e W_i os deslocamentos globais vertical e horizontal no ponto nodal i .

$\mathbf{\Omega}^i(s)$ a matriz de funções de interpolação.

s a posição ao longo da superfície média, no elemento considerado.

\mathbf{U}_o^i o movimento de corpo rígido, que não contribui para o cálculo das deformações.

\mathbf{U}_n^i os deslocamentos naturais.

l_i o comprimento do elemento i .

Os deslocamentos no sistema local, \mathbf{u}_e , são obtidos através da matriz de transformação, \mathbf{T} .

$$\mathbf{u}_e^i(s, \phi) = \mathbf{T}^i \mathbf{U}_e^i(s) \quad (3.6)$$

para

$$\mathbf{T}^i = \begin{bmatrix} \text{sen} \phi & \text{cos} \phi \\ -\text{cos} \phi & \text{sen} \phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_e^i(s, \phi) = \begin{Bmatrix} u(s, \phi) \\ w(s, \phi) \end{Bmatrix}$$

sendo

u a componente de deslocamento local, tangente à superfície média

w a componente de deslocamento local, normal à superfície média

O campo de deformações é obtido através das Equações (2.31), (2.32) e (2.33), lembrando-se que curvatura na direção circunferencial está sendo omitida.

$$\boldsymbol{\epsilon}^1 = \begin{Bmatrix} \epsilon_\phi^1(s, \phi) \\ \epsilon_\theta^1(s, \phi) \\ \kappa_\phi^1(s, \phi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{r_1} \\ \frac{\text{cotg} \phi}{r_2} & \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{r_1} \frac{d}{ds} & -\frac{d^2}{ds^2} \end{bmatrix} \mathbf{u}_e(s, \phi) \quad (3.7)$$

Para pontos internos ao elemento i , apenas as deformações de membrana são consideradas. Reformulando-se a Expressão (3.7), e utilizando-se as Equações (3.1), (3.5) e (3.6), para que as deformações fiquem em função dos deslocamentos globais, obtém-se para o elemento i :

$$\boldsymbol{\epsilon}_i^1 = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_\phi^1 \\ \epsilon_\theta^1 \end{array} \right\}^i = \mathbf{B}^i \mathbf{U}_n^i \quad (3.8)$$

para

$$\mathbf{B}^i = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{r_1} \\ \frac{\cos \phi}{r} & \frac{\sin \phi}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \phi & \cos \phi \\ -\cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{l_i} & \frac{s}{l_i} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.2.2 Campo de Deformações Plásticas

O campo de deformações plásticas pode também ser obtido a partir do critério de escoamento. A superfície adotada é o prisma hexagonal, Fig. (2.7), já descrita na Seção (2.8.2). Considerando-se sua forma singular, com lados planos que se interceptam, pode-se representar (2.36) em função de um número finito de funções de escoamento, [Franco e Ponter, 1994a]:

$$F_k(\mathbf{n}) = F_k(N_\phi, N_\theta, M_\phi) = c_k^2 \text{ para } k=1, \dots, 8 \quad (3.10)$$

De acordo com a regra associativa, descrita na Seção (2.5), as taxas de deformação e de mudança de curvatura plástica para um elemento i , $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i^2$ e ${}^i \dot{\kappa}_\phi^2$, estão relacionadas aos multiplicadores plásticos da seguinte forma:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i^2 = \sum_{k=1}^6 \dot{\lambda}_k^i \frac{\partial F_k}{\partial \mathbf{n}} \text{ dentro do elemento } i \quad (3.11)$$

$${}^i \dot{\kappa}_\phi^2 = \dot{\theta}_i \frac{\partial F_k}{\partial M_\phi} \text{ no ponto nodal } i \quad (3.12)$$

sendo $\dot{\theta}_i$ a taxa de rotação nas rótulas plásticas.

Observando-se as relações acima, conclui-se que dentro do elemento as condições de escoamento são idênticas ao critério de Tresca, Fig. (2.5). Assumindo-se que as deformações ao longo da espessura da casca não variam, podem ser rescritas as relações definidas através da Relação(3.11), matricialmente como:

$$\dot{\varepsilon}_i^2 = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varepsilon}_\phi^2(s, \phi) \\ \dot{\varepsilon}_\theta^2(s, \phi) \end{array} \right\}^i = N \dot{\lambda}^i(s) \text{ para } k=1,..6 \quad (3.13)$$

Sendo

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\sqrt{2}/2 & 0 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ -1 & 0 & \sqrt{2}/2 & 1 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\dot{\lambda}^i(s) = \left\{ \dot{\lambda}_1^i(s) \quad \dot{\lambda}_2^i(s) \quad \dot{\lambda}_3^i(s) \quad \dot{\lambda}_4^i(s) \quad \dot{\lambda}_5^i(s) \quad \dot{\lambda}_6^i(s) \right\}^T \quad (3.15)$$

Analogamente ao campo de deslocamentos, os multiplicadores plásticos são interpolados a partir de seus parâmetros nodais λ_k^n , por meio da matriz de interpolação $\Lambda(s)$, [Franco, 1987].

$$\dot{\lambda}_k^i(s) = \Lambda(s) \dot{\lambda}_k^n \quad (3.16)$$

para

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{l_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s}{l_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{l_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s}{l_i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{s}{l_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s}{l_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{s}{l_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s}{l_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{s}{l_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s}{l_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{s}{l_i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s}{l_i} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\lambda_k^n = \left\{ \lambda_1^i \quad \lambda_2^i \quad \dots \quad \lambda_6^i \quad \lambda_1^{i+1} \quad \lambda_2^{i+1} \quad \dots \quad \lambda_6^{i+1} \right\}^T \quad (3.18)$$

A mudança de curvatura, por ser localizada, não requer interpolação, ficando restrita aos valores nodais.

3.3 Análise Limite

Considere-se uma casca axi-simétrica, de peso desprezível em comparação aos demais carregamentos que atuam sobre ela. Seja um mecanismo de colapso qualquer, cinematicamente admissível, definido por $\dot{\epsilon}^c$ e \dot{u}^c . Considere, também, σ^c , o estado de tensões na superfície de escoamento, associado com $\dot{\epsilon}^c$, e em equilíbrio com o carregamento externo $K\mathbf{p}$. Pelo princípio dos trabalhos virtuais, Equação (2.10), sabe-se que:

$$\int_S (K\mathbf{p})^T \dot{u}_i^c dS = \int_V (\sigma^c)^T \dot{\epsilon}^c dV \quad (3.19)$$

De acordo com o Teorema do Limite Superior, Seção (2.6.1), a carga $K\mathbf{p}$, assim obtida, será sempre maior ou igual à carga real de colapso da estrutura. Conseqüentemente, o parâmetro de proporcionalidade K , deverá ser sempre superior ou equivalente ao correspondente à solução exata.

É baseada nessas considerações que a técnica proposta em [Franco, 1987] é estabelecida. A estrutura é discretizada em elementos finitos, Seção (6.6.1) e as condições de escoamento determinadas, Seção (3.2.2). Diante dos diversos mecanismos de colapso possíveis, aquele que fornecer, através da Equação (3.19), a menor carga, será mais próximo da solução exata.

Pode-se, então formular o problema de minimização, que fornece o limite superior para o parâmetro K :

Para $K_S \geq K$

Minimize

$$K_S = \frac{\int_V (\sigma^c)^T \dot{\epsilon}^c dV}{\int_S (\mathbf{p})^T \dot{u}_i^c dS} \quad (3.20)$$

3.4 Relação Consistente Entre os Campos das Taxas de Deslocamento e dos Multiplicadores Plásticos

O problema de minimização (3.20) pode ser resolvido por programação linear. Para isso, é preciso, segundo [Franco, 1987], que as duas descrições para as taxas de deformação, $\dot{\epsilon}^1$ e $\dot{\epsilon}^2$, sejam consistentes nos pontos nodais e dentro do elemento. A obtenção de funções de interpolação, $\Lambda(s)$ e $\Omega(s)$, adequadas a tal exigência, somente é possível para o caso de cascas cilíndricas. Visando abranger casos mais gerais, [Franco, 1987] faz uma analogia com o problema de elementos finitos em análise elasto-plástica incremental, discutido em [Corradi, 1983]. Em tal problema o campo de tensões dentro de um elemento i é obtido pela relação:

$$\sigma^i = D \left\{ \epsilon^i - N \lambda_k^i \right\} \quad (3.21)$$

Sendo D a matriz das constantes elásticas do material, Seção (2.3.2). Com a finalidade de relacionar os campos de deformação e dos multiplicadores plásticos, Corradi aplicou o procedimento sugerido em [Oden e Brauchli, 1971] e [Oden e Reddy, 1973]. Esse procedimento consiste na utilização da Teoria das Aproximações Conjugadas, [Brauchli e Oden, 1971], para a obtenção de campos de tensão consistentes em aproximações de elementos finitos por deslocamentos. Sua aplicação está detalhada nas duas próximas seções.

3.4.1 Obtenção da relação consistente entre os campos de deformação

Assumindo-se o comportamento individual dos elementos descrito em função de variáveis generalizadas, os campos de deformação e tensão tornam-se:

$$\epsilon_i = \beta^i E^i \quad (3.22)$$

$$\sigma^i = \psi^i \Sigma^i \quad (3.23)$$

sendo:

E^i e Σ^i vetores das variáveis generalizadas.

β^i e ψ^i matrizes de interpolação.

De acordo com o princípio dos trabalhos virtuais, (2.9):

$$\Sigma^{iT} E^i = \int_V \sigma^{iT} \epsilon_i dV \quad (3.24)$$

A partir das Equações (3.22), (3.23) e (3.24), obtém-se a condição de bi-ortogonalidade:

$$\int_V \psi^{iT} \beta^i dV = I \quad (3.25)$$

que será válida caso

$$\psi^i = \beta^i C^i \quad (3.26)$$

sendo C^i a matriz simétrica e não singular proposta em [Brauchli e Oden, 1971], e definida como:

$$C^i = \left\{ \int_V \beta^{iT} \beta^i dV \right\}^{-1} \quad (3.27)$$

Utilizando-se dos campos de deslocamentos U_n^i , e o campo de forças F^i , como as variáveis generalizadas, e $\epsilon_i^!$ no lugar do campo de deformações, a Equação (3.24) torna-se:

$$F^{iT} U_n^i = \Sigma^{iT} E = \int_V \sigma^{iT} \epsilon_i^! dV \quad (3.28)$$

Essa relação será satisfeita para qualquer U_n^i , apenas se

$$\psi^i = B^i \bar{C}^i \quad (3.29)$$

Onde B^i é obtido pela Equação (3.9) e \bar{C} através da relação:

$$\bar{C}^i = \left\{ \int_V B^{iT} B^i dV \right\}^{-1} \quad (3.30)$$

Para que se obtenha uma relação consistente entre os dois campos de deformação, é preciso que:

$$F^{iT} U_n^i = \int_V \sigma^{iT} \varepsilon_i^1 dV = \int_V \sigma^{iT} \varepsilon_i^2 dV \quad (3.31)$$

Ou no caso de se estar trabalhando com taxas de deformação:

$$F^{iT} \dot{U}_n^i = \int_V \sigma^{iT} \dot{\varepsilon}_i^1 dV = \int_V \sigma^{iT} \dot{\varepsilon}_i^2 dV \quad (3.32)$$

sendo

$$\sigma^i = \psi^i F^i$$

Substituindo-se na Equação (3.32) as Relações (3.29), (3.30) e (3.13) chega-se finalmente a:

$$\dot{U}_n^i = L^i \dot{\lambda}_k^n \quad (3.33)$$

onde

$$L^i = \bar{C}^{iT} \int_V B^{iT} K^i(s) dV \quad (3.34)$$

$$K^i(s) = N \Lambda^i(s) \quad (3.35)$$

A Equação (3.33) fornece, assim, uma relação consistente entre os dois campos de velocidade e de multiplicadores plásticos para cada elemento.

3.4.2 Solução Geral Para a Condição de Bi-ortogonalidade

Em [Franco, 1987] mostra-se, através de exemplos numéricos, que a Relação (3.33) não pode ser generalizada para todo tipo de casca axi-simétrica. Para elementos retos, cascas cilíndricas e cônicas, consegue-se satisfazer a condição (3.32). Já para as demais cascas, com elementos curvos, o mesmo não ocorre. Para obtenção de uma relação mais genérica, [Franco, 1987] desenvolveu uma nova solução, mais geral, para a condição de bi-ortogonalidade da seguinte maneira:

Considere R , uma matriz de mesma ordem que B , de forma que:

$$\mathbf{H}^i = \left\{ \int_V \mathbf{B}^{iT} \mathbf{R}^i dV \right\}^{-1} \quad (3.36)$$

sendo H uma matriz não singular. A Equação (3.28) poderá ser satisfeita, caso exista uma matriz R , arbitrária, de modo que:

$$\psi^i = \mathbf{R}^i \mathbf{H}^i \quad (3.37)$$

o que faz com que

$$\int_V (\psi^i)^T \mathbf{B}^i dV = \mathbf{I} \quad (3.38)$$

que é equivalente à condição de bi-ortogonalidade (3.25)

Logo, seguindo-se o mesmo procedimento usado para se chegar à Equação (3.33), obtém-se, também:

$$\dot{\mathbf{U}}_n^i = \mathbf{L}^i \dot{\boldsymbol{\lambda}}_k^n \quad (3.39)$$

onde

$$\mathbf{L}^i = \mathbf{H}^{iT} \int_V \mathbf{R}^{iT} \mathbf{K}^i(s) dV$$

Um detalhe deve ser observado a respeito da obtenção de L . Para que seja assegurada a continuidade de U_n^i entre os elementos, é utilizada a média dos valores relativos aos nós adjacentes, [Franco, 1987] e [Franco e Ponter, 1994a]. Obtém-se dessa maneira uma relação genérica de consistência entre os dois campos de taxa de deformação. A matriz R é, entretanto, arbitrária, carecendo de um critério que a defina.

3.4.3 Indicador de Erro

Com a finalidade de se chegar a um procedimento para a obtenção de R , multiplica-se ambos os lados da Equação (3.39) por $\int_V \mathbf{R}^T \mathbf{B} dV$. Tem-se então a seguinte condição:

$$\int_V (\mathbf{R}^i)^T \left(\mathbf{B}^i \dot{U}_n^i - \mathbf{K}(s)^i \dot{\lambda}_k^n \right) dV = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

ou seja, a diferença entre $\dot{\epsilon}^1$ e $\dot{\epsilon}^2$ deve ser ortogonal a matriz R . A relação acima obtida pode ser expandida nas componentes individuais das taxas de deformações:

$$\int_V R_{11} (\dot{\epsilon}_\phi^1 - \dot{\epsilon}_\phi^2) dV + \int_V R_{21} (\dot{\epsilon}_\theta^1 - \dot{\epsilon}_\theta^2) dV = 0 \quad (3.41)$$

$$\int_V R_{12} (\dot{\epsilon}_\phi^1 - \dot{\epsilon}_\phi^2) dV + \int_V R_{22} (\dot{\epsilon}_\theta^1 - \dot{\epsilon}_\theta^2) dV = 0 \quad (3.42)$$

$$\int_V R_{13} (\dot{\epsilon}_\phi^1 - \dot{\epsilon}_\phi^2) dV + \int_V R_{23} (\dot{\epsilon}_\theta^1 - \dot{\epsilon}_\theta^2) dV = 0 \quad (3.43)$$

Sendo $dV = 2\pi r(s)t(s)ds$, por se tratar de uma casca axi-simétrica e $t(s)$ a espessura ao longo do elemento.

Em [Franco, 1987] a matriz R é construída através de um conjunto de funções de interpolação, em um procedimento de minimização tipo de Galerkin, [Zienkiewicz e Morgan, 1983], onde:

$$R^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{l_i} & 1 - \frac{s}{l_i} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

A Equação (3.41), torna-se então:

$$\int_V (\dot{\epsilon}_\phi^1 - \dot{\epsilon}_\phi^2) dV = 0 \quad (3.45)$$

Estabelecendo a condição de que o resíduo, entre os dois campos de taxa de deformação na direção meridional, deve ser zero na média. Já as Equações (3.42) e (3.43) podem ser combinadas resultando em:

$$\int_V [c_1 (1 - s/l_i) + c_2 s/l_i] (\dot{\epsilon}_\theta^1 - \dot{\epsilon}_\theta^2) / r dV = 0 \quad (3.46)$$

sendo c_1 e c_2 constantes resultantes da combinação de (3.42) e (3.43). Essa equação indica a condição de que o resíduo dos campos de taxa de deformação, na direção circunferencial, deve ser ortogonal a uma função linear qualquer.

Essas duas últimas equações são usadas para medir o resíduo dentro de cada elemento, fornecendo um bom indicador de erro. Constitui-se, porém uma medida qualitativa, uma vez que permite apenas a comparação em cada elemento entre as duas formulações para as taxas de deformação. Somente isto não basta para a caracterização de um processo adaptativo de estimativa de erro. Torna-se necessária a definição de uma medida de erro não apenas local, mas também global. A viabilização de um critério de parada para o refinamento só é possível após a obtenção de tal medida. É com essa finalidade que se propõem o estimador de erro definido no Capítulo (5).

3.5 O Algoritmo de Elementos Finitos

O problema de minimização, Equação (3.20), é formulado em [Franco, 1987] e [Franco e Ponter, 1994b], da seguinte maneira:

Para a classe de mecanismos de deformação cinematicamente admissíveis e compatíveis com a superfície de escoamento da Fig. (2.7), ou seja, com as rótulas plásticas restritas aos pontos nodais e as deformações de membrana ao interior de cada elemento:

Minimize

$$K_S = \int_V (\boldsymbol{\sigma}^c)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c dV \quad (3.47)$$

sujeito às:

- (a) Condições de contorno.
- (b) Condições de compatibilidade, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = B\dot{\mathbf{U}}$.
- (c) Lei de escoamento, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c = \mathbf{N}\dot{\boldsymbol{\lambda}}^i(s)$, para $\dot{\boldsymbol{\lambda}}^i(s) > 0$.
- (d) $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c) = 0$, durante o colapso.
- (e) Condições nodais de restrição, devido a formação da rótula plástica.
- (f) $\int_S (\mathbf{p})^T \dot{\mathbf{u}}_i^c dS = 1$.

3.5.1 Equação Geral de Restrição

A condição (f), que corresponde ao trabalho externo produzido durante o colapso, implica no escalonamento da Equação (3.47), promovendo a prescrição do tamanho do mecanismo. Ela aparece no problema como a Equação Geral de Restrição, e está limitada, em [Franco, 1987], a dois casos:

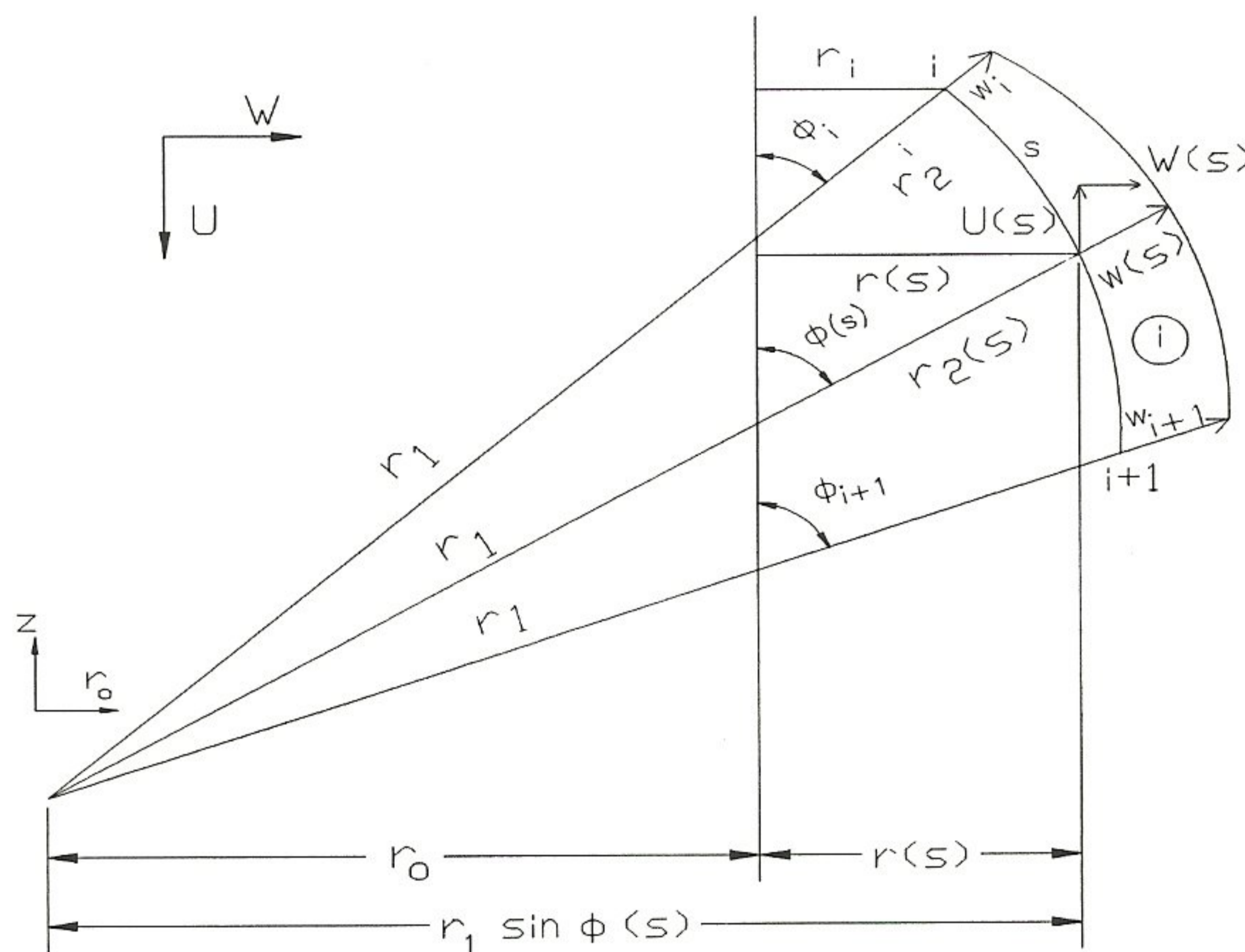


Figura 3.2: Deslocamento em um elemento i sujeito à pressão interna

Pressão Interna

Considere o elemento i da Fig. (3.2). O trabalho externo realizado pela pressão interna p é:

$$W_E = \int_S p \dot{U}_n^i dS = \int_S p_i \dot{w}(s) dS + F \dot{U}_n^1 \quad (3.48)$$

O primeiro termo da integral refere-se ao trabalho realizado pela pressão interna na direção radial. Já o segundo termo somente existe quando a casca tem sua extremidade tampada. Nesse caso, ocorrerá também a realização de trabalho na direção axial, sendo F a resultante das forças nessa direção.

Carga de Anel Aplicada no Ponto Nodal i

O trabalho realizado por uma carga de anel, distribuída em uma linha circunferencial no ponto nodal i , pode ser definido conforme a Fig. (3.3) pela equação:

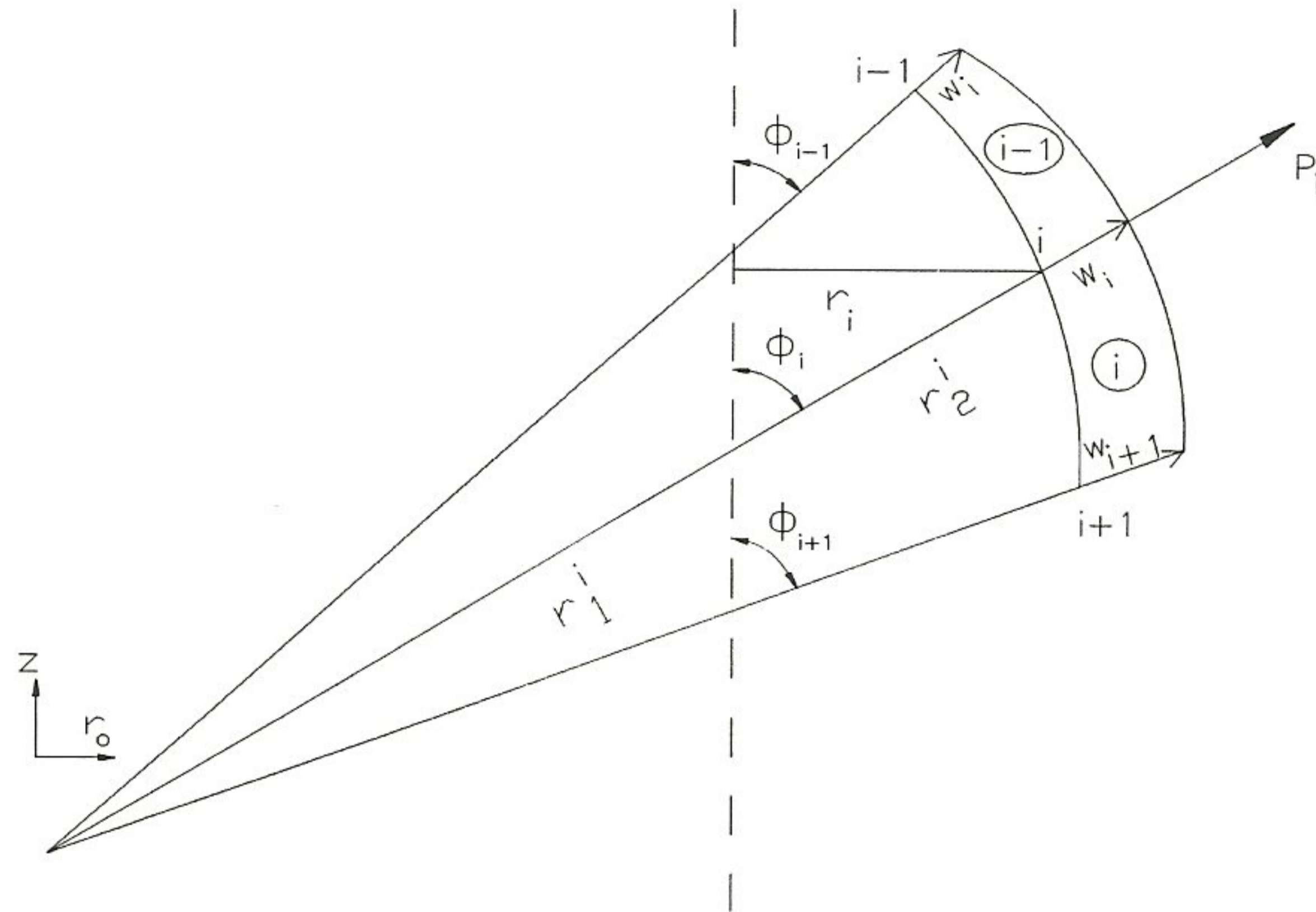


Figura 3.3: Deslocamento em um elemento i sujeito à carga de anel

$$W_E = 2\pi r_i P_i \dot{w}_i \quad (3.49)$$

3.5.2 Função de Custo

A introdução da condição (f) permite que se tenha como Função de Custo para o problema:

$$K_S = \int_V (\boldsymbol{\sigma}^c)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c dV \quad (3.50)$$

Sabendo-se da separação entre o comportamento de membrana e de flexão, imposta pela condição de escoamento adotada, a integral da Equação (3.50) pode ser dividida em duas parcelas:

$$K_S = \overbrace{\int_{V_E} (\boldsymbol{\sigma}^c)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c dV}^{I_1} + \overbrace{\int_{V_R} (\boldsymbol{\sigma}^c)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c dV}^{I_2} \quad (3.51)$$

sendo

V_E o volume relativo ao elemento

V_R o volume relativo à rótula

A parcela I_1 pode ser escrita para um elemento i , em função dos multiplicadores plásticos, através de (3.13) e considerando-se $dV = 2\pi r(s) dy ds$:

$$I_1^i = 2\pi \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \int_{l_i}^{t_i/2} (\boldsymbol{\sigma}_i^c)^T \mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_k^i(s) r(s) ds dy \quad (3.52)$$

Já a segunda parcela I_2 pode ser dividida, para cada nó i , em:

$$I_2^i = \int_{V_{R_i}} (\sigma_\phi^c)^i (\dot{\epsilon}_\phi^i)^c dV + \int_{V_{R_i}} (\sigma_\theta^c)^i (\dot{\epsilon}_\theta^i)^c dV \quad (3.53)$$

Ou seja, o trabalho interno devido a mudança de curvatura na direção meridional e circunferencial. Esta última, no entanto, é desprezível se comparada à primeira, conforme já discutido na Seção (2.8.2). Conseqüentemente pode ser omitida no cálculo de I_2^i .

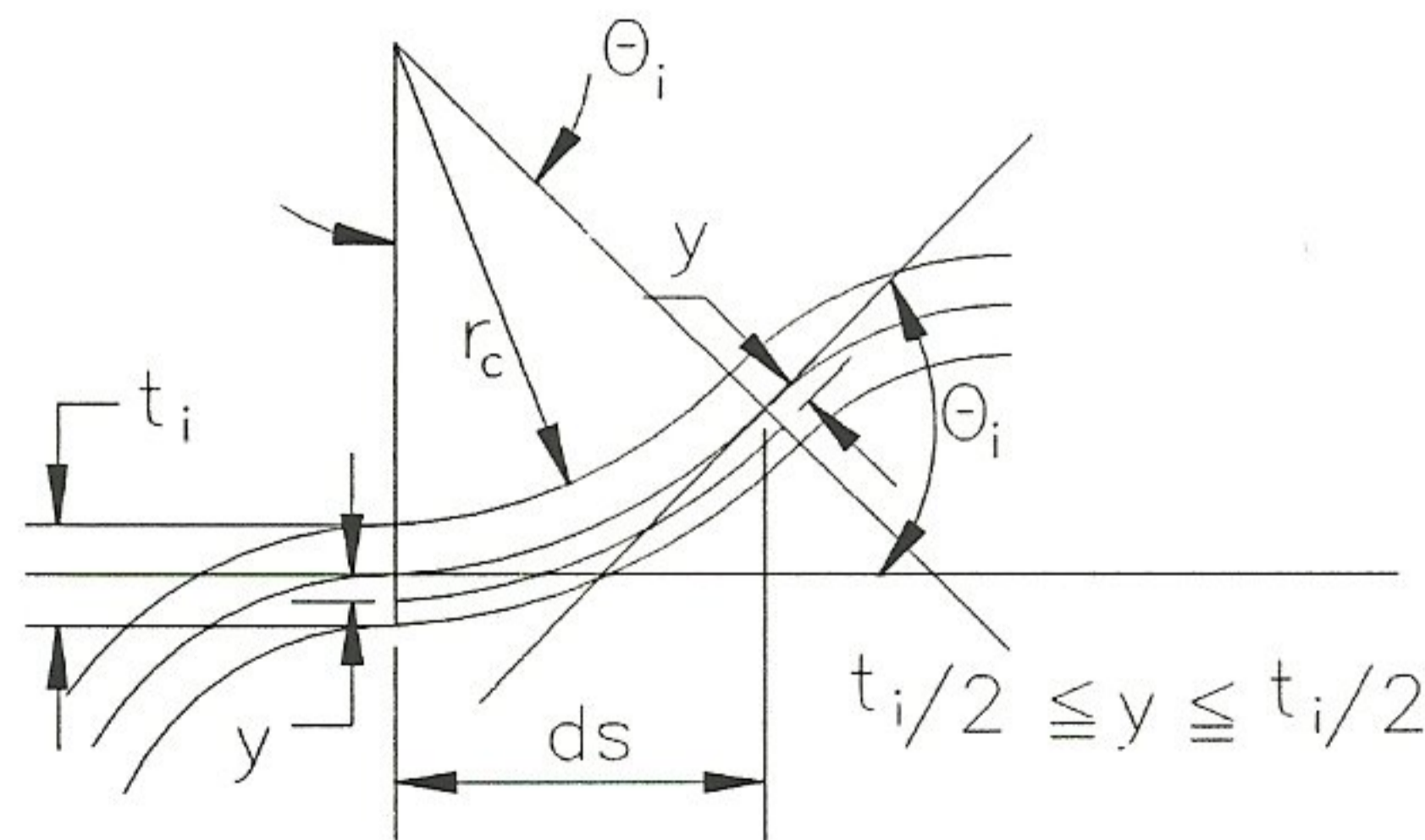


Figura 3.4: Detalhe de uma rótula plástica

A Fig. (3.4) representa uma rótula plástica para uma casca axi-simétrica, de raio r_c para a superfície média, na interceção de dois elementos genéricos.

Para pequenos deslocamentos, a taxa de rotação, $\dot{\theta}_i$, é calculada como:

$$\dot{\theta}_i = \frac{d\dot{s}}{r_c} \quad (3.54)$$

E a taxa de deformação meridional em uma fibra, a uma determinada distância y da linha média, é fornecida como:

$$\dot{\epsilon}_\phi = \frac{(d\dot{s} + \Delta d\dot{s}) - d\dot{s}}{d\dot{s}} \quad (3.55)$$

onde $d\dot{s} + \Delta d\dot{s} = (r_c + y)\dot{\theta}_i$

Logo

$$\dot{\epsilon}_\phi = \frac{(r_c + y)\dot{\theta}_i - r_c\dot{\theta}_i}{r_c\dot{\theta}_i} \quad (3.56)$$

que se reduz a

$$\dot{\epsilon}_\phi = \frac{y}{r_c} = \frac{y\dot{\theta}_i}{ds} \quad (3.57)$$

A integral I_2^i torna-se, portanto:

$$I_2^i = 2\pi r_i \int_{-t_i/2}^{t_i/2} (\sigma_\phi^c)^i y \dot{\theta}_i dy \quad (3.58)$$

Finalmente a função de custo pode ser escrita, somando-se as contribuições dos trabalhos internos em todos os elementos e nós como:

$$K_S = 2\pi \sum_{i=1}^{NE} \left\{ \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \int_{l_i} (\sigma_i^c)^T \mathbf{N} \dot{\lambda}_k^i(s) r_i(s) ds dy \right\} + 2\pi \sum_{i=1}^{NE+1} \left\{ r_i \int_{-t_i/2}^{t_i/2} (\sigma_\phi^c)^i y \dot{\theta}_i dy \right\} \quad (3.59)$$

3.5.3 Equações Nodais de Restrição

As equações nodais de restrição, condição (e), consistem de um conjunto de restrições nodais, relacionadas à formação da rótula plástica.

A Fig. (3.5) ilustra a rotação em um nó genérico “ i ” e a convenção de sinais adotada. A equação de restrição é definida, portanto, para cada nó, como:

$$\dot{\theta}_i = \frac{d\dot{w}^{i(+)}}{ds} - \frac{d\dot{w}^{i(-)}}{ds} \quad (3.60)$$

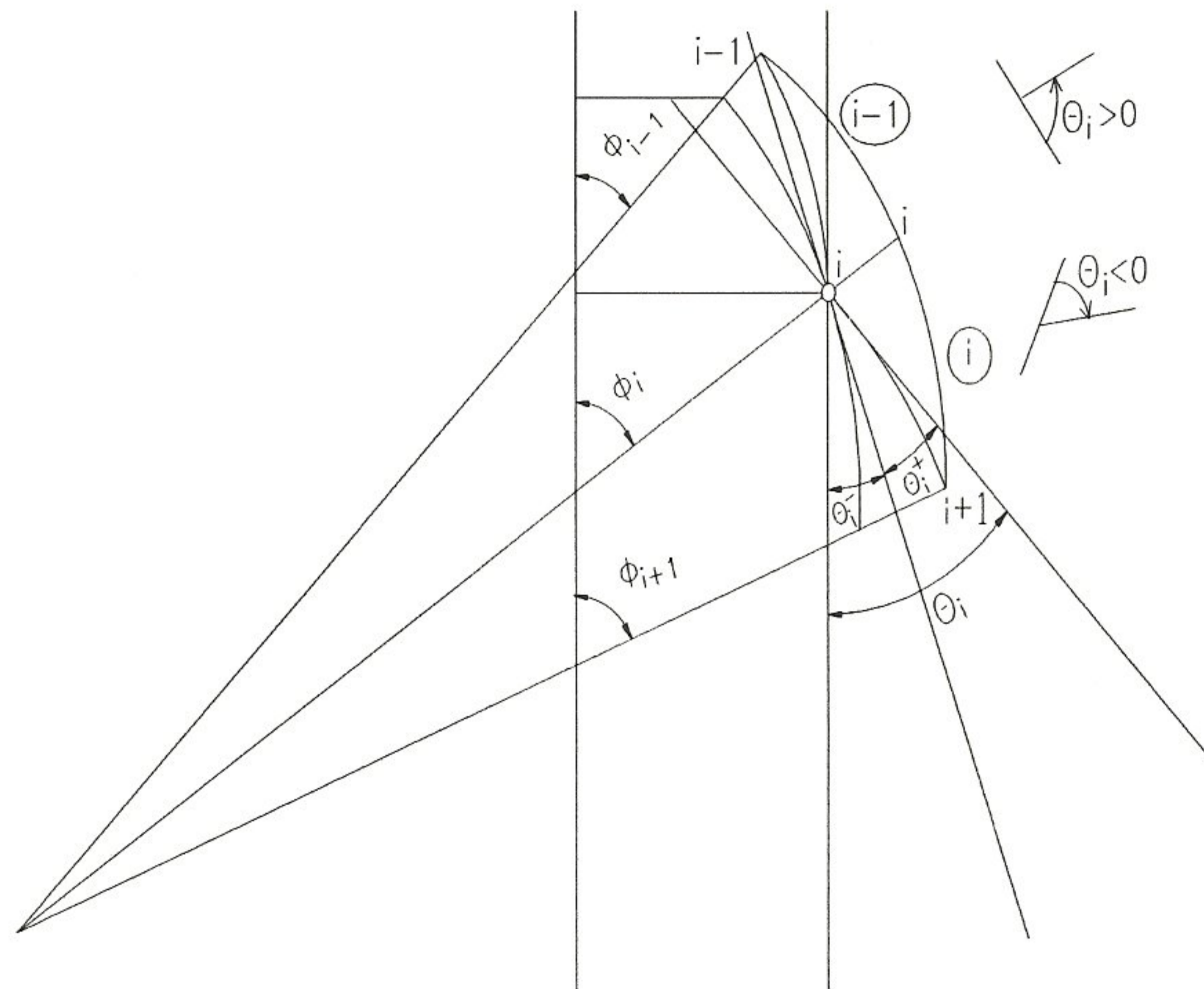


Figura 3.5: Detalhe da rotação em uma rótula plástica

corresponde, portanto, à descontinuidade nodal da derivada de \dot{w} , quando ocorre a formação da rótula plástica.

3.5.4 Condições de Contorno

As condições de contorno acrescentam ao problema de programação linear mais algumas restrições.

Para o caso de carregamento axi-simétrico, apenas um vínculo externo é necessário para que se evite o movimento da estrutura como corpo rígido. Em [Franco, 1987] e [Franco e Ponter, 1994b] impõe-se a condição de que a taxa de

deslocamento na extremidade inferior da casca, nó $NN = NE + 1$, na direção vertical, seja nula, isto é,

$$\dot{U}_{NN} = 0 \quad (3.61)$$

A inclusão dos valores prescritos é feita a partir das taxas de deslocamentos locais, nas extremidades superior, $\dot{u}(1)$ e $\dot{w}(1)$, e inferior, $\dot{u}(NN)$ e $\dot{w}(NN)$, da estrutura. Dessa maneira, através de (3.6) e levando-se em conta (3.61), obtém-se

Para o nó 1:

$$\dot{U}_1 \text{sen} \phi_1 + \dot{W}_1 \text{cos} \phi_1 = \dot{u}_1(\text{valor prescrito}) \quad (3.62)$$

$$-\dot{U}_1 \text{cos} \phi_1 + \dot{W}_1 \text{sen} \phi_1 = \dot{w}_1(\text{valor prescrito}) \quad (3.63)$$

Para o nó NN:

$$\dot{W}_{NN} \text{cos} \phi_{NN} = \dot{u}_{NN}(\text{valor prescrito}) \quad (3.64)$$

$$\dot{W}_{NN} \text{sen} \phi_{NN} = \dot{w}_{NN}(\text{valor prescrito}) \quad (3.65)$$

3.5.5 Considerações Finais

Ficam estabelecidas, através das equações descritas neste capítulo, as condições necessárias para a solução do problema de minimização, Equação (3.47), através da programação linear. Tais equações têm como variáveis, os valores nodais para as taxas de rotação e deslocamento e para os multiplicadores plásticos. As duas últimas classes de variáveis podem, no entanto, ser reduzidas a apenas uma. Para isso basta a aplicação da Relação (3.39). Os detalhes dos procedimentos da formulação do problema de otimização pela manipulação das Equações (3.48), (3.49), (3.60), (3.62), (3.63), (3.64) e (3.65), bem como a expansão de (3.59) podem ser encontrados em [Franco, 1987], [Franco e Ponter, 1994a] e [Franco e Ponter, 1994b].

A técnica aqui apresentada foi implementada por ocasião do trabalho de [Franco, 1987] através do sistema CONRE. Escrito em linguagem FORTRAN-77, esse programa foi concebido com o propósito de permitir futuras alterações provenientes do aprimoramento da técnica. As integrais presentes na análise são resolvidas numericamente através da Quadratura Gaussiana, [Conte e Boor, 1980]. A respeito

da discretização da casca, algumas considerações precisam ser estabelecidas. O eixo de revolução deve estar na posição vertical e a casca deve ser descrita do topo para a base. Conseqüentemente, a numeração dos nós e elementos tem seu início no topo da estrutura terminando na base, onde se encontra o nó NN . No caso de elementos curvos, o ângulo ϕ é medido no sentido horário, com a origem coincidente com o eixo de revolução.

Capítulo 4

Análise Limite da Saia de Sustentação de um Tambor de Coqueamento Sujeito a um Gradiente de Temperatura

4.1 Introdução

A técnica desenvolvida em [Franco, 1987] considera, como visto na Seção (3.5.1), apenas dois tipos de carregamentos, a carga de anel e a pressão interna. Uma outra classe de carregamento, que geralmente atua na presença de cargas mecânicas, são as cargas térmicas cíclicas. A consideração deste tipo de carregamento na análise e projeto de vasos de pressão requer a aplicação da teoria de “shakedown”, em substituição à análise de resistência última. Para que os problemas de cargas cíclicas sejam analisados, são necessárias algumas modificações na função de custo, com a introdução da história das tensões, térmicas ou mecânicas. As equações de restrição do problema permanecem, todavia, as mesmas usadas para a análise limite. Maiores detalhes sobre este tipo de análise podem ser encontrados em [Franco, 1987]

e [Karedeniz, 1983].

A rigor, a análise do comportamento da saia de sustentação, apresentada neste capítulo, deveria ser uma análise de “shakedown”, devido às características altamente cíclicas das cargas do problema. Como um primeiro procedimento optou-se pela análise limite, deixando-se a análise de “shakedown” para desenvolvimentos futuros. Um breve resumo das situações de carga na saia durante o ciclo de produção pode ser descrito como se segue.

Duas situações críticas podem ser destacadas durante o ciclo de coqueamento. Primeiramente, a entrada do gás combustível aquecido, resultante da produção dos derivados do petróleo, provoca a elevação rápida da temperatura do tambor e sua conseqüente dilatação. A saia de sustentação, por não se encontrar diretamente em contato com o gás, aquece-se mais lentamente, ficando, portanto, sujeita a uma concentração de tensões por flexão na região de contato com o tambor. Sua deformação durante esta fase, deve-se mais ao arraste do tambor do que à dilatação térmica.

A segunda situação crítica ocorre no momento do resfriamento. Também nesta fase, o tambor passa por um processo de resfriamento mais rápido, arrastando o topo da saia, que ainda permanece aquecida. Devido a estas diferenças de deformação entre as duas estruturas, há, novamente, o aparecimento de concentração de tensões na região de contato, suficientemente altas para causar o colapso. O gradiente de temperatura mais acentuado ocorre durante a fase final de resfriamento, quando o tambor passa por um processo de jateamento de água. Seu resfriamento é, portanto, bem mais rápido do que o da saia, que por ser muito mais flexível, deforma-se para acompanhar os deslocamentos na região de contato com o tambor.

Neste capítulo é feito um estudo do comportamento da saia, para verificar sua capacidade limite de resistência durante a fase de resfriamento. O objetivo da análise limite é a determinação do gradiente de temperatura no qual ocorreria a formação de um mecanismo plástico na saia. Uma contribuição importante neste trabalho foi a utilização de soluções elásticas, obtidas da teoria de cascas finas, na determinação do trabalho externo realizado pelo carregamento. Diferentemente do carregamento direto, o carregamento térmico gera esforços solicitantes, os quais devem ser utilizados na aplicação do teorema cinemático. A característica puramente

cinemática do teorema pode agora ser complementada com as condições estáticas de equilíbrio da distribuição de esforços, tornando a técnica de análise mais completa e estável. Uma descrição deste novo procedimento será dada nas próximas seções.

4.2 Equação Geral de Restrição em Função das Tensões Solicitantes

Um aspecto importante no princípio dos trabalhos virtuais, Seção (2.4), é a independência entre os campos de deslocamentos e de tensões. Considere-se, pois, um sistema de forças e tensões em equilíbrio, $K\mathbf{p}$ e $\boldsymbol{\sigma}$. Para qualquer campo de taxas de deslocamentos e deformações compatíveis, $\dot{\mathbf{u}}^*$ e $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^*$, é possível escrever, pelo princípio dos trabalhos virtuais:

$$\int_S (K\mathbf{p})^T \dot{\mathbf{u}}^* dS = \int_V (\boldsymbol{\sigma})^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^* dV \quad (4.1)$$

A expressão acima permanece válida se formulada em função de um mecanismo de colapso cinematicamente admissível, definido por $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c$ e $\dot{\mathbf{u}}^c$, e pode ser rescrita dividindo-se ambos os lados pelo parâmetro de proporcionalidade K obtendo-se:

$$\int_S (\mathbf{p})^T \dot{\mathbf{u}}^c dS = \int_V \frac{1}{K} (\boldsymbol{\sigma})^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c dV \quad (4.2)$$

Logo, uma alternativa para a definição da equação geral de restrição, condição (f) de (3.47), é obtida substituindo-se o carregamento externo por uma distribuição de tensões que esteja em equilíbrio com o mesmo. Assim,

$$\int_V \frac{1}{K} (\boldsymbol{\sigma})^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c dV = 1 \quad (4.3)$$

Essa formulação, a princípio, não representa nenhuma vantagem e, ao contrário, para os casos já implementados de carregamento direto, carga de anel

e pressão interna, sua utilização representaria uma perda de generalidade. A distribuição de tensões proveniente da aplicação do carregamento, teria que ser definida para cada tipo de casca, acrescentando à técnica procedimentos desnecessários. No caso da saia de sustentação, onde o carregamento térmico é indireto, a análise só é possível através da determinação das tensões resultantes da compatibilização dos deslocamentos na região de contato com o tambor. A perda de generalidade para este tipo de problema é, no entanto, compensada pela introdução de condições estáticas à abordagem cinemática da presente formulação. A saia é solicitada em função de sua interação com o tambor e a distribuição das tensões, na definição da equação geral de restrição, representa, de certa forma, condições de equilíbrio localizadas do problema.

4.3 Implementação da Equação Geral de Restrição

Para a implementação da Equação (4.3) deve-se, primeiramente, defini-la em função dos esforços resultantes do estado de tensão do elemento de casca, ou seja, N_ϕ , N_θ e M_ϕ .

De acordo com a Seção (2.8.2), a superfície de escoamento adotada conduz à separação da estrutura em volumes com o comportamento de membrana ou de flexão.

Nos pontos nodais, onde é permitida apenas a mudança de curvatura meridional, o diagrama das tensões, considerando-se o comportamento elástico da estrutura ao longo da espessura, será linear. A relação entre tensão e momento fletor meridionais pode, então ser estabelecida, a partir de (2.23):

$$\sigma_\phi = 6 \frac{M_\phi}{t^2} \frac{y}{t/2} \quad (4.4)$$

Já dentro dos elementos as tensões circunferencial e meridional relacionam-se com os esforços de membrana, distribuídos uniformemente ao longo da espessura, através das Equações (2.25) e (2.26), como:

$$\sigma_\phi = \frac{N_\phi}{t} \quad (4.5)$$

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{t} \quad (4.6)$$

A Equação (4.3) pode então ser reformulada, sendo dividida em dois volumes, elemento, V_E e rótula, V_R :

$$\overbrace{\int_{V_E} \left(\frac{N_\theta}{t} \dot{\epsilon}_\theta + \frac{N_\phi}{t} \dot{\epsilon}_\phi \right) dV}^{I_3} + \overbrace{\int_{V_R} \left(6 \frac{M_\phi}{t^2} \frac{y}{t/2} \dot{\epsilon}_\phi \right) dV}^{I_4} = 1 \quad (4.7)$$

Resta, ainda, a adaptação dos termos da Equação (4.7) para que possa ser implementada de maneira adequada. Em outras palavras, o campo de deformação deve ser definido em função dos multiplicadores plásticos e das rotações nodais.

Deste modo para um elemento i , considerando $dV_i = 2\pi r_i(s) dy ds$:

$$I_3^i = 2\pi \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \int_{l_i} \left(\frac{N_\theta}{t_i} \dot{\epsilon}_\theta + \frac{N_\phi}{t_i} \dot{\epsilon}_\phi \right) r_i(s) dy ds \quad (4.8)$$

que através de (3.13), (3.14) e (3.15), torna-se:

$$\begin{aligned} I_3^i = & 2\pi \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \int_{l_i} \frac{N_\theta}{t_i} \left(-\dot{\lambda}_1^i(s) + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_3^i(s) + \dot{\lambda}_4^i(s) - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_6^i(s) \right) r_i(s) ds dy + \\ & + 2\pi \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \int_{l_i} \frac{N_\phi}{t_i} \left(-\dot{\lambda}_2^i(s) - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_3^i(s) + \dot{\lambda}_5^i(s) + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_6^i(s) \right) r_i(s) ds dy \end{aligned} \quad (4.9)$$

A integral I_4 é desenvolvida da mesma maneira, usando-se a Relação (3.57) para calcular $\dot{\epsilon}_\phi$. Logo, para cada ponto nodal i :

$$I_4^i = 2\pi \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \left(12 \frac{M_\phi}{t^3} y^2 \dot{\theta}_i \right) dy \quad (4.10)$$

Somando-se I_3^i e I_4^i ao longo de todo o comprimento da estrutura e realizando-se a integração ao longo da espessura, chega-se à nova equação de restrição global:

$$\begin{aligned}
& 2\pi \sum_{i=1}^{NE} \left\{ \int_{l_i} N_\theta \left(-\dot{\lambda}_1^i(s) + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_3^i(s) + \dot{\lambda}_4^i(s) - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_6^i(s) \right) r_i(s) ds \right\} + \\
& + 2\pi \sum_{i=1}^{NE} \left\{ \int_{l_i} N_\phi \left(-\dot{\lambda}_2^i(s) - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_3^i(s) + \dot{\lambda}_5^i(s) + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_6^i(s) \right) r_i(s) ds \right\} + \quad (4.11) \\
& + 2\pi \sum_{i=1}^{NE+1} (M_\phi \dot{\theta}_i) = 1
\end{aligned}$$

4.4 Verificação Numérica

Antes, porém, de se aplicar (4.11) para o caso da saia de sustentação, três casos serão estudados, como experimentos numéricos:

- casca cilíndrica sujeita a uma carga de anel;
- casca cilíndrica sujeita à pressão interna;
- casca esférica sujeita à pressão interna;

Como já observado, nenhuma vantagem será introduzida para estes casos. O objetivo é apenas a verificação da confiabilidade da Equação (4.11) na determinação da equação geral de restrição, para o caso de carregamento indireto.

4.4.1 Casca Cilíndrica Sujeita a uma Carga de Anel

Na Fig. (4.1) representa-se uma estrutura de casca axi-simétrica cilíndrica sujeita a uma carga P , distribuída circunferencialmente. Para este tipo de problema a casca não se comporta como membrana. Sua análise deve ser feita através da teoria de flexão para cascas cilíndricas, [Kelkar e Sewell, 1987].

A compatibilização dos deslocamentos na seção de aplicação do anel de carga permite a determinação dos esforços X_1 e X_2 e, conseqüentemente, da

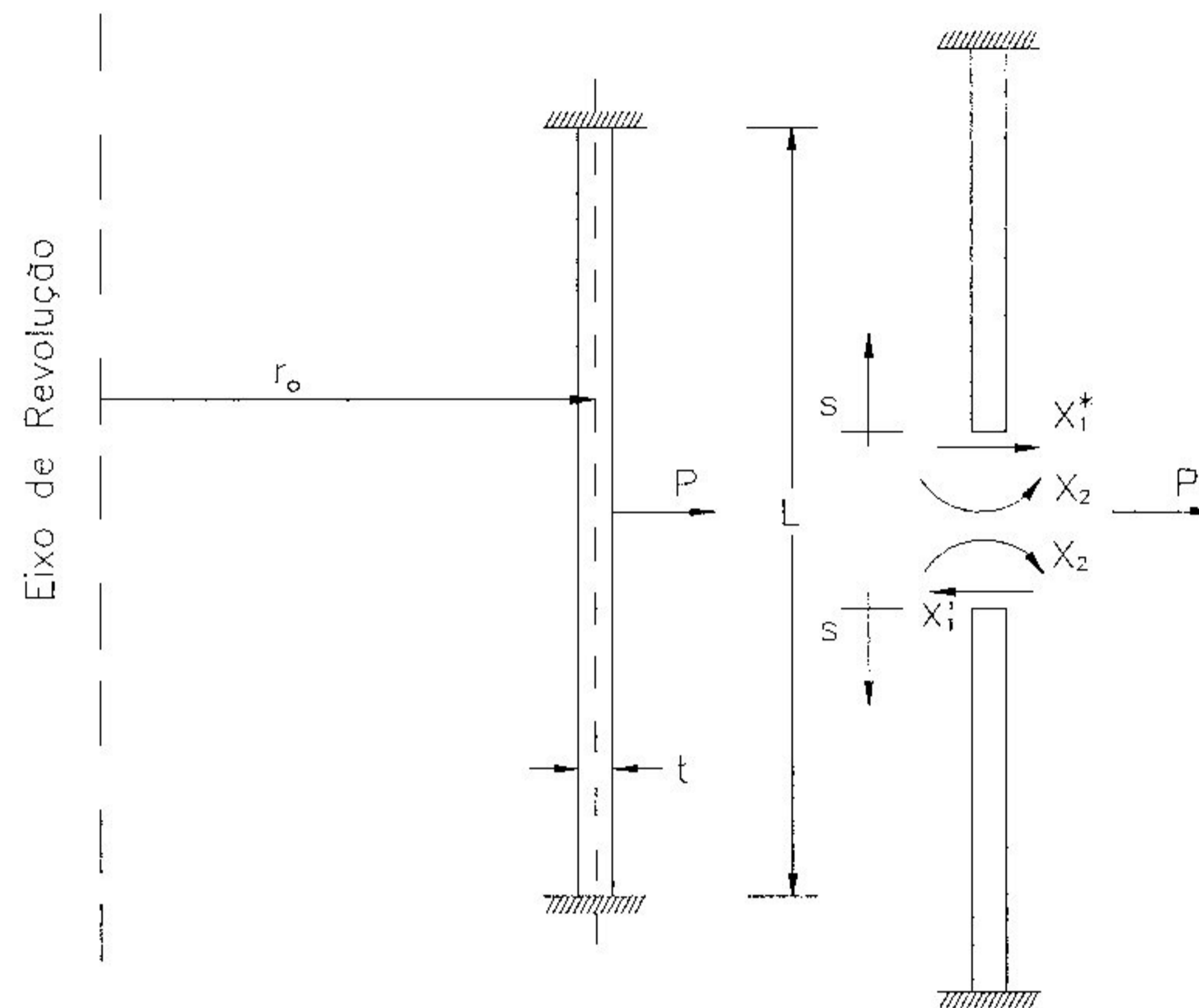


Figura 4.1: Casca cilíndrica sujeita a uma carga P de anel

distribuição de momento fletor e força normal localizados. O equilíbrio de forças estabelecido, quando a casca é dividida, nessa seção, em duas regiões simétricas, fornece $X_1^* = -X_1' = P/2$. O esforço X_2 é obtido pela compatibilização, no contato entre tais regiões, da rotação que deve ser nula. A equação de compatibilidade para a rotação pode, então ser escrita como:

$$\frac{r_o^2}{2K\zeta^2}(P/2) + \frac{r_o}{K\zeta}X_2 = 0 \quad (4.12)$$

sendo:

r_o o raio circunferencial da superfície média.

$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ denominado módulo de rigidez à flexão

$$\zeta = \left\{ \frac{3(1-\nu^2)r_o^2}{t^2} \right\}^{\frac{1}{4}}$$

t a espessura da casca

E o módulo de elasticidade

ν o coeficiente de Poisson

A Equação (4.12) resulta em:

$$X_2 = -\frac{Pr_o}{4\zeta} \quad (4.13)$$

A distribuição de esforços solicitantes ao longo da casca pode, portanto, ser descrita em função da carga P , segundo [Kelkar e Sewell, 1987] como:

$$M_\phi = -\frac{Pr_o}{4\zeta} e^{-\frac{\zeta s}{r_o}} \left(\cos \frac{\zeta s}{r_o} - \operatorname{sen} \frac{\zeta s}{r_o} \right) \quad (4.14)$$

$$N_\theta = \frac{P\zeta}{2} e^{-\frac{\zeta s}{r_o}} \left(\cos \frac{\zeta s}{r_o} + \operatorname{sen} \frac{\zeta s}{r_o} \right) \quad (4.15)$$

Os demais esforços, M_θ e Q , são omitidos durante a análise por razões expostas na Seção (2.8.2). Já N_ϕ é nulo, devido a ausência de carregamento axial.

A equação geral de restrição para este problema será conseqüentemente:

$$2\pi \sum_{i=1}^{NE} \left\{ \int_{l_i} N_\theta \left(-\dot{\lambda}_1^i(s) + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_3^i(s) + \dot{\lambda}_4^i(s) - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_6^i(s) \right) r_o ds \right\} + 2\pi \sum_{i=1}^{NE+1} (M_\phi \dot{\theta}_i) = 1 \quad (4.16)$$

para N_θ e M_ϕ fornecidos por (4.14) e (4.15), respectivamente.

Exemplo Numérico

O problema de uma casca cilíndrica sujeita a uma carga em anel foi analisado em [Drucker, 1953], através de um modelo de comprimento infinito. Considerando que as forças axi-simétricas são auto-equilibráveis, neste caso de carregamento, pode-se concluir, do princípio de Saint-Venant, que seu efeito de flexão na estrutura permanece localizado na região de aplicação da carga. Logo, a casca sendo suficientemente longa, não haverá nenhuma interferência dos efeitos de flexão da região de aplicação

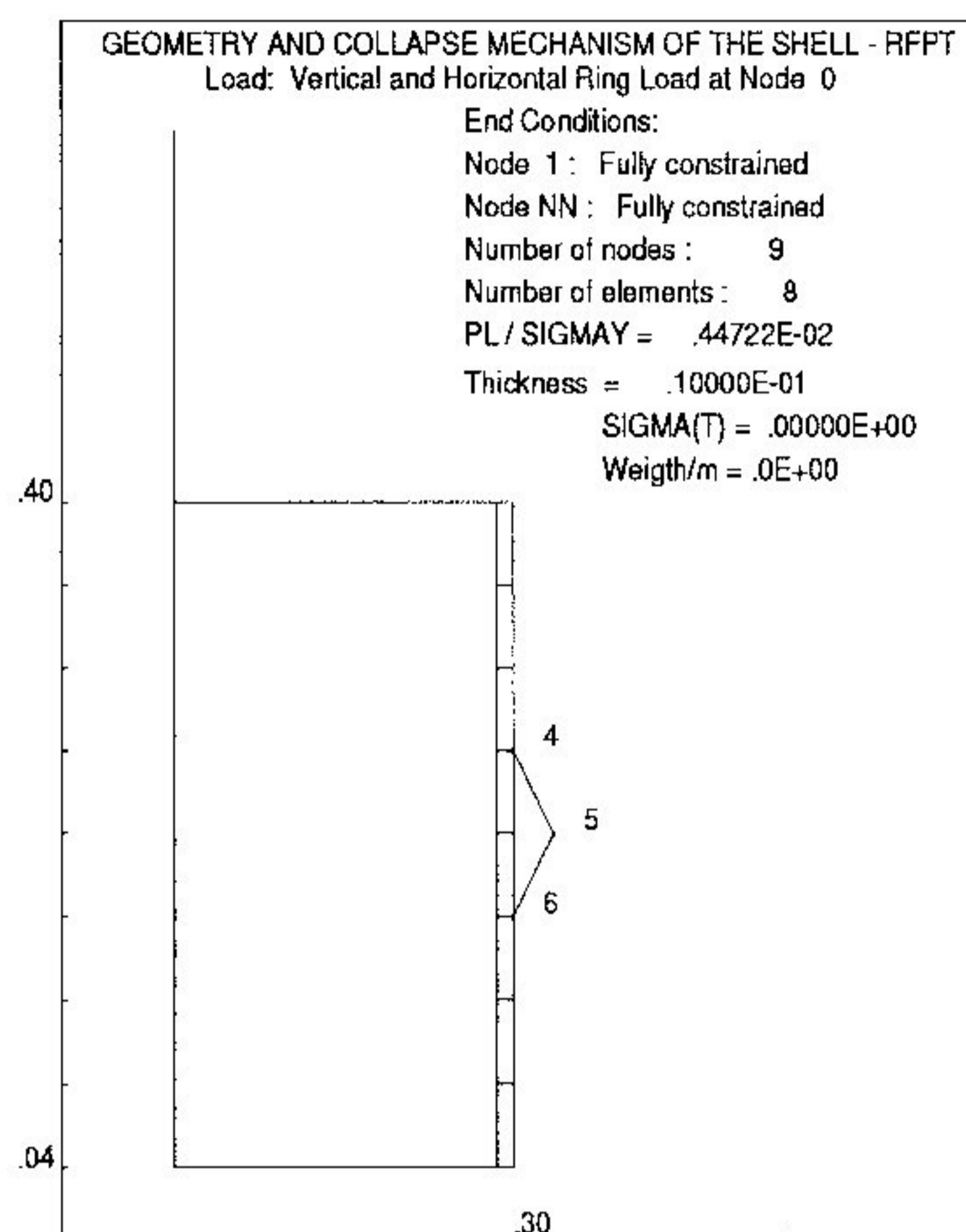


Figura 4.2: Solução para a casca cilíndrica sujeita a uma carga P de anel

da carga nos apoios. Em sua análise, Drucker desenvolveu a seguinte fórmula para a obtenção da carga limite normalizada pela tensão de escoamento do material:

$$\frac{P_L}{\sigma_o} = \beta \frac{t}{r_o} \sqrt{r_o t} \quad (4.17)$$

onde β é uma constante dependente da superfície de escoamento utilizada. Para o prisma hexagonal adotado neste trabalho, Fig. (2.7), β vale 2,0. Uma discussão mais detalhada do trabalho de Drucker será realizada na Seção (6.3). Considerando-se os seguintes valores numéricos:

$$r_o = 0,20m$$

$$t = 0,01m$$

$$L = 0,36m$$

Tem-se para carga limite $\frac{P_L}{\sigma_o} = 0,44721 \cdot 10^{-2} m$

Resolvendo-se o mesmo problema através da técnica definida no Capítulo (3), tendo com equação de restrição geral a Função (4.16), obtém-se praticamente o mesmo resultado, Fig. (4.2).

4.4.2 Casca Cilíndrica Sujeita à Pressão Interna

O problema da casca cilíndrica sujeita à pressão interna pode ser ilustrado através da Fig. (4.3). Para sua análise deve-se primeiramente considerar as tensões de membrana, que apareceriam, caso não houvesse as restrições de apoio. Em seguida, aplica-se o método da flexibilidade, [Weaver e Gere, 1980], para a obtenção dos esforços devido à flexão nas extremidades. A solução final é encontrada após a superposição destas duas etapas de análise.

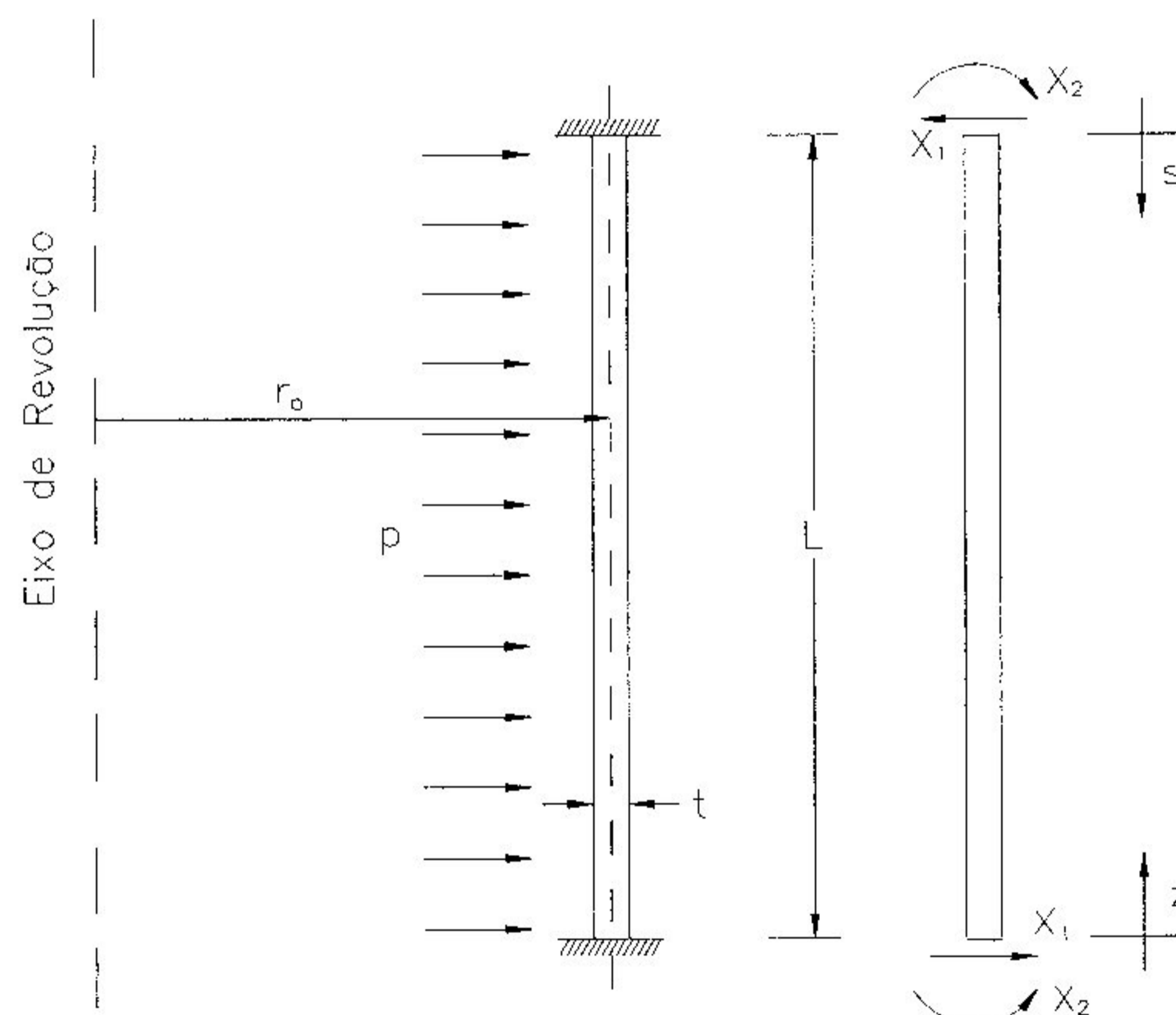


Figura 4.3: Casca cilíndrica sujeita à pressão interna p

Pela teoria de membrana, [Kelkar e Sewell, 1987], as tensões resultantes presentes devido à pressão interna são:

$$N_{\theta} = pr_o \quad (4.18)$$

$$N_\phi = 0 \quad (4.19)$$

Para a obtenção das tensões provenientes das restrições nos apoios, os esforços de extremidades devem ser encontrados, através da compatibilização dos deslocamentos. Por razões de simetria, as equações de compatibilidade em ambas as extremidades serão:

$$\begin{cases} \frac{r_o^3}{2K\zeta^3}X_1 - \frac{r_o^2}{2K\zeta^2}X_2 = \frac{pr_o^2}{Et} \\ -\frac{r_o^2}{2K\zeta^2}X_1 + \frac{r_o}{K\zeta}X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

A solução de (4.20) é:

$$X_1 = \frac{2K\zeta^2}{Et}p \quad (4.21)$$

$$X_2 = \frac{4K\zeta^3}{Etr_o}p \quad (4.22)$$

Em função de X_1 e X_2 , e a partir das equações da teoria de flexão, [Kelkar e Sewell, 1987], para cascas cilíndricas axi-simétricas, obtém-se:

$$N_\theta = -pr_o e^{-\frac{\zeta z}{r_o}} \left(\cos \frac{\zeta z}{r_o} + \operatorname{sen} \frac{\zeta z}{r_o} \right) - pr_o e^{-\frac{\zeta s}{r_o}} \left(\cos \frac{\zeta s}{r_o} + \operatorname{sen} \frac{\zeta s}{r_o} \right) \quad (4.23)$$

$$M_\phi = p \frac{r_o^2}{2\zeta^2} e^{-\frac{\zeta z}{r_o}} \left(\cos \frac{\zeta z}{r_o} - \operatorname{sen} \frac{\zeta z}{r_o} \right) + p \frac{r_o^2}{2\zeta^2} e^{-\frac{\zeta s}{r_o}} \left(\cos \frac{\zeta s}{r_o} - \operatorname{sen} \frac{\zeta s}{r_o} \right) \quad (4.24)$$

onde:

$$z = L - s$$

As Equações (4.23) e (4.24) são funções de dois parâmetros, relacionados com a posição ao longo da casca, s e z . Essa formulação origina-se da contribuição dos esforços provenientes da compatibilização dos deslocamentos nos dois apoios.

Substituindo-se o resultado da superposição dos esforços obtidos a partir das teorias de membrana e de flexão, (4.18), (4.19), (4.23) e (4.24), em (4.11), chega-se à equação de restrição geral:

$$2\pi \sum_{i=1}^{NE} \left\{ \int_{l_i} N_\theta \left(\dot{\lambda}_1^i(s) - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_3^i(s) - \dot{\lambda}_4^i(s) + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_6^i(s) \right) r_o ds \right\} + 2\pi \sum_{i=1}^{NE+1} (M_\phi \dot{\theta}_i) = 1 \quad (4.25)$$

para

$$N_\theta = pr_o \left[1 - e^{-\frac{\zeta z}{r_o}} \left(\cos \frac{\zeta z}{r_o} + \text{sen} \frac{\zeta z}{r_o} \right) - e^{-\frac{\zeta s}{r_o}} \left(\cos \frac{\zeta s}{r_o} + \text{sen} \frac{\zeta s}{r_o} \right) \right]$$

$$M_\phi = p \frac{r_o^2}{2\zeta^2} \left[e^{-\frac{\zeta z}{r_o}} \left(\cos \frac{\zeta z}{r_o} - \text{sen} \frac{\zeta z}{r_o} \right) + e^{-\frac{\zeta s}{r_o}} \left(\cos \frac{\zeta s}{r_o} - \text{sen} \frac{\zeta s}{r_o} \right) \right]$$

Exemplo Numérico

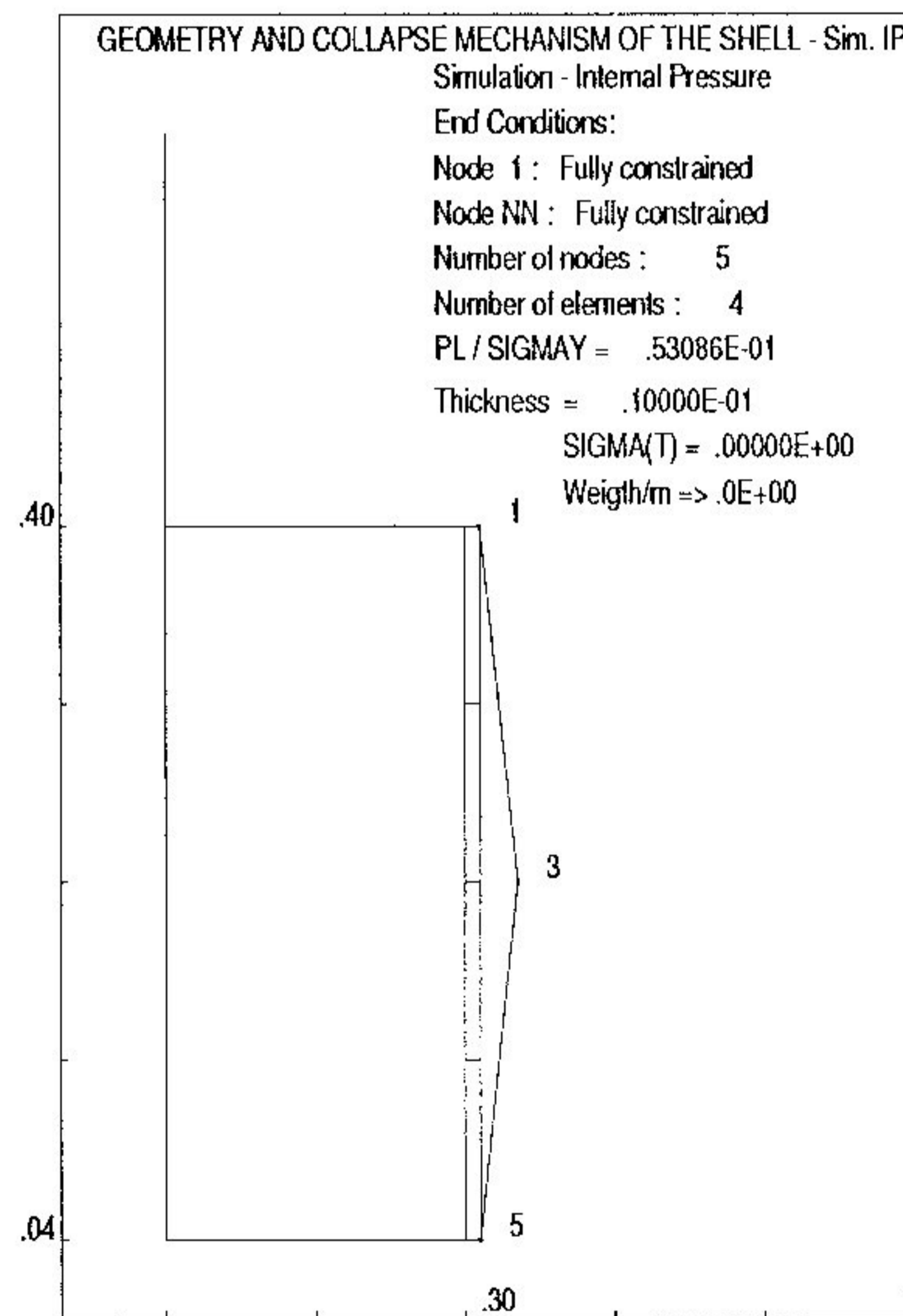


Figura 4.4: Solução para a casca cilíndrica sujeita à pressão interna

Uma completa solução analítica para a casca cilíndrica sujeita à pressão interna, com restrição em ambas as extremidades, pode ser encontrada em [Hodge, 1963]. Para o caso do prisma hexagonal, Fig. (2.7), a carga limite é encontrada como:

$$\frac{p}{\sigma_o} = \frac{t}{r_o} + \frac{t^2}{(L/2)^2} \quad (4.26)$$

Para a mesma geometria do problema da casca sujeita a uma carga de anel, obtém-se

$$p_L/\sigma_o = 0,53086 \cdot 10^{-1}$$

Este valor coincide exatamente com o obtido na Fig. (4.4), onde o problema de minimização (3.47) foi resolvido, utilizando-se (4.25) como equação geral de restrição.

4.4.3 Casca Esférica Sujeita à Pressão Interna

Na Fig. (4.5) encontra-se representada uma calota esférica de abertura 2α , sujeita à pressão hidrostática p . Na ausência de apoios engastados, a casca teria apenas o comportamento de membrana e as tensões resultantes seriam, segundo (Kelkar e Sewell, 1987):

$$N_\phi = N_\theta = \frac{pr_o}{2} \quad (4.27)$$

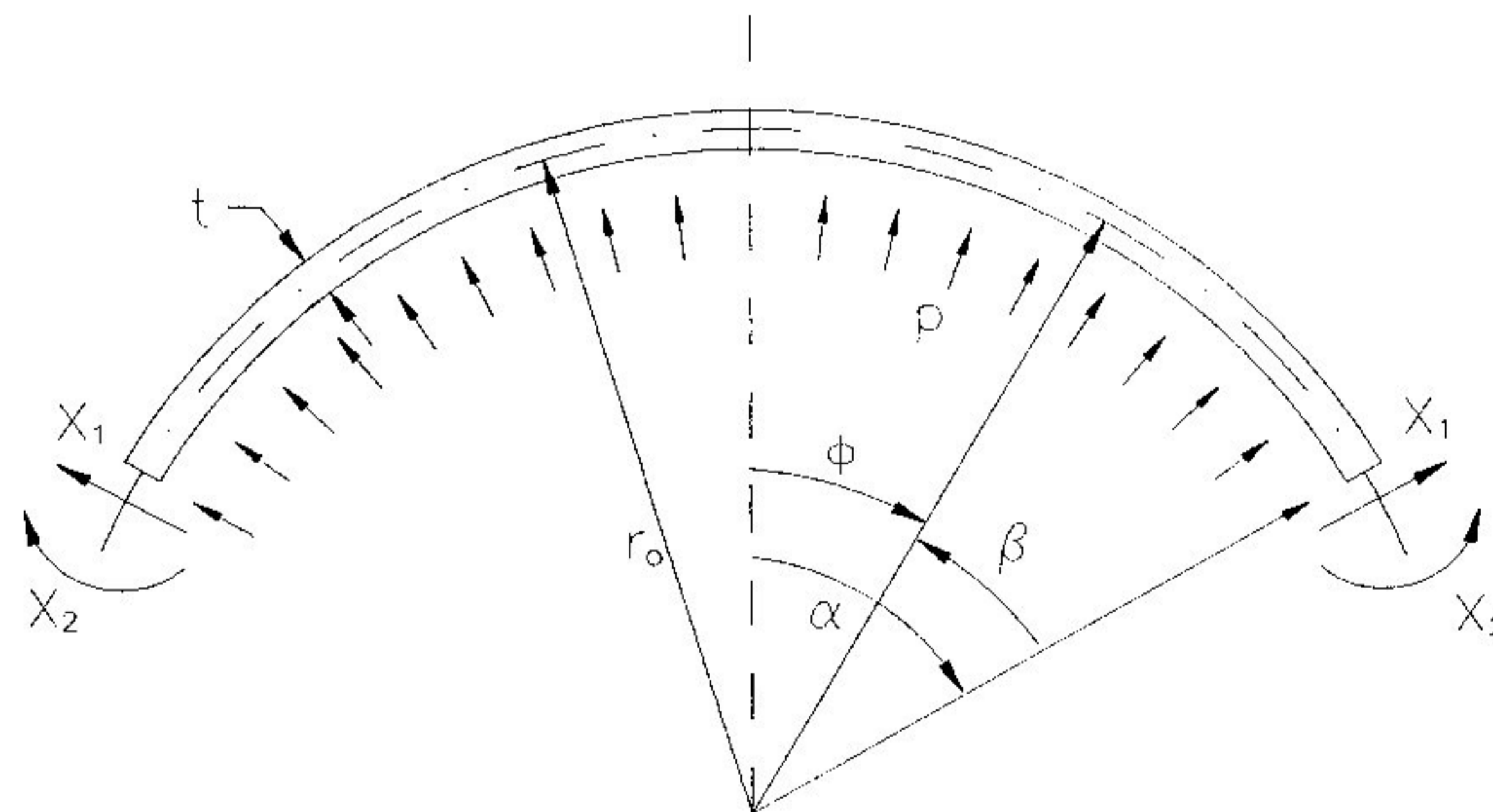


Figura 4.5: Casca esférica sujeita à pressão interna

Nas imediações do engastamento, o cálculo dos esforços provenientes da flexão é feito pela compatibilização dos deslocamentos na extremidade, chegando-se ao seguinte sistema.

$$\begin{cases} \frac{2r_o\zeta}{Et} \text{sen}^2\alpha X_1 + \frac{2\zeta^2}{Et} \text{sen}\alpha X_2 = -\frac{pr_o^2}{2Et}(1-\nu)\text{sen}\alpha \\ \frac{2\zeta^2}{Et} \text{sen}\alpha X_1 + \frac{4\zeta^3}{Etr_o} X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

Cuja solução é

$$X_1 = -\frac{pr_o}{2\zeta \text{sen}\alpha}(1-\nu) \quad (4.29)$$

$$X_2 = \frac{pr_o^2}{4\zeta^2}(1-\nu) \quad (4.30)$$

De acordo com [Kelkar e Sewell, 1987], os esforços resultantes em função de X_1 e X_2 são:

$$N_\phi = -\frac{pr_o}{2} \frac{1-\nu}{\zeta} e^{-\zeta\beta} \cotg\phi \cos(\zeta\beta) \quad (4.31)$$

$$N_\theta = -\frac{pr_o}{2}(1-\nu)e^{-\zeta\beta} [\cos(\zeta\beta) + \text{sen}(\zeta\beta)] \quad (4.32)$$

$$M_\phi = \frac{pr_o r_o(1-\nu)}{2} \frac{1-\nu}{2\zeta^2} e^{-\zeta\beta} [\cos(\zeta\beta) - \text{sen}(\zeta\beta)] \quad (4.33)$$

onde $\beta = \alpha - \phi$.

Sobrepondo-se os efeitos de membrana aos de flexão e substituindo-se o resultado em (4.11), obtém-se a equação de restrição geral:

$$\begin{aligned} & 2\pi \sum_{i=1}^{NE} \left\{ \int_{l_i} N_\theta \left(-\dot{\lambda}_1^i(s) + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_3^i(s) + \dot{\lambda}_4^i(s) - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_6^i(s) \right) r_o ds \right\} + \\ & + 2\pi \sum_{i=1}^{NE} \left\{ \int_{l_i} N_\phi \left(-\dot{\lambda}_2^i(s) - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_3^i(s) + \dot{\lambda}_5^i(s) + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_6^i(s) \right) r_o ds \right\} + \\ & + 2\pi \sum_{i=1}^{NE+1} (M_\phi \dot{\theta}_i) = 1 \end{aligned} \quad (4.34)$$

para

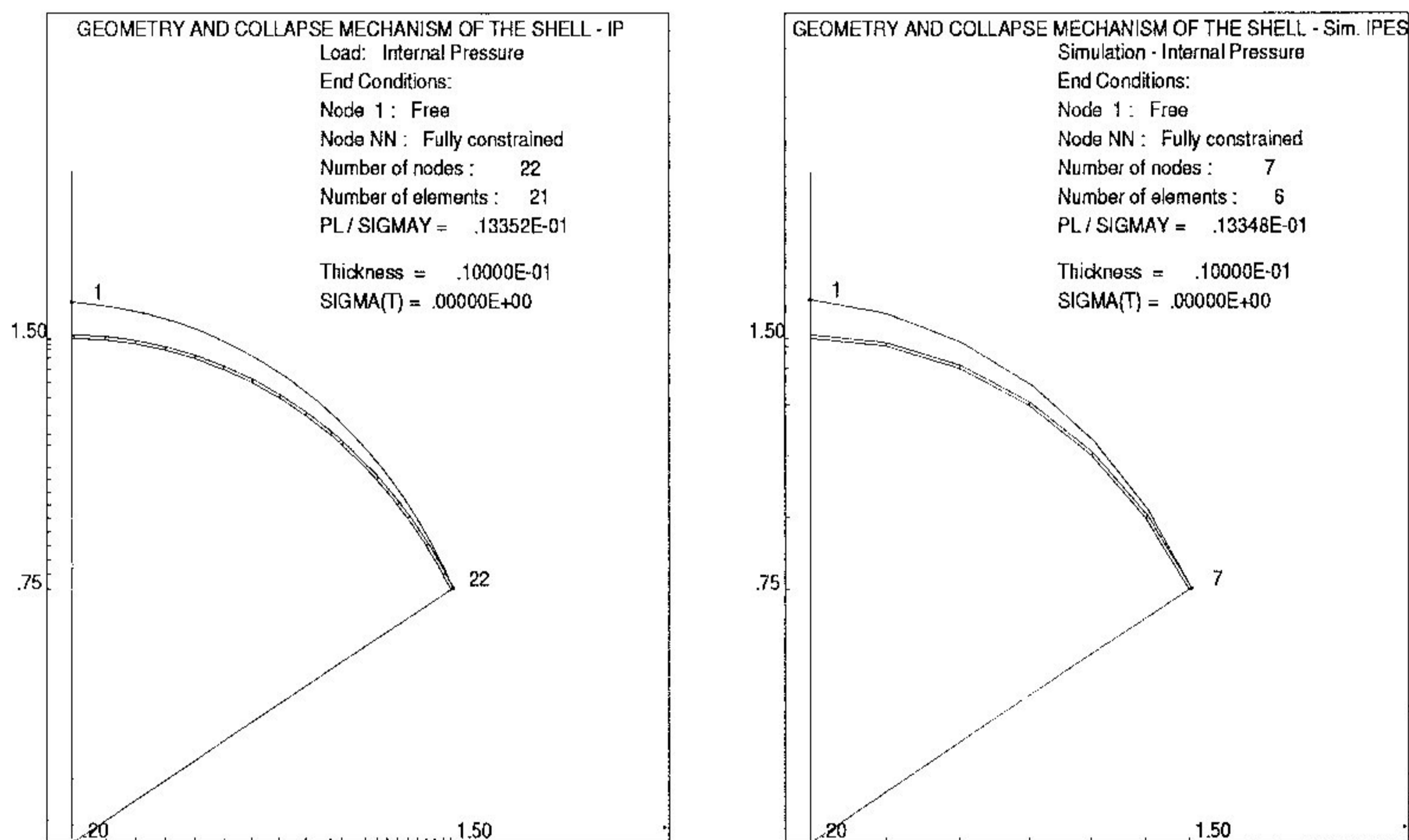
$$N_\phi = \frac{pr_o}{2} \left[1 - \frac{1-\nu}{\zeta} e^{-\zeta\beta} \cotg\phi \cos(\zeta\beta) \right]$$

$$N_\theta = \frac{pr_o}{2} \left\{ 1 - (1-\nu)e^{-\zeta\beta} [\cos(\zeta\beta) + \text{sen}(\zeta\beta)] \right\}$$

$$M_\phi = \frac{pr_o r_o(1-\nu)}{2} \frac{1-\nu}{2\zeta^2} e^{-\zeta\beta} [\cos(\zeta\beta) - \text{sen}(\zeta\beta)]$$

Exemplo Numérico

O problema de calotas esféricas sujeitas a uma pressão hidrostática foi bastante estudado no passado. A aproximação analítica de [Onat e Prager, 1954] envolve uma superfície de escoamento de quatro dimensões. [Hodge, 1963], por sua vez, adotando um modelo de “casca sanduiche”, chegou a uma solução mais precisa e, em [Hodge, 1960], uma superfície de escoamento simplificada foi utilizada, sem perda de precisão nos resultados. Em [Franco e Ponter, 1996] uma comparação é feita com os resultados de [Hodge, 1960], através da uma análise cinemática via elementos finitos apresentada no Capítulo (3). É com base neste trabalho que se procura verificar a implementação da equação geral de restrição (4.34).



(a) Solução obtida através da equação geral de restrição (3.47)

(b) Solução obtida através da equação geral de restrição (4.34)

Figura 4.6: Solução para uma calota esférica sujeita a uma pressão hidrostática

Os parâmetros geométricos para o problema aqui analisado são:

$$r_o = 1,50m$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$t = 0,01m$$

A Fig. (4.6(a)) mostra os resultados da análise baseada em [Franco e Ponter, 1996], ou seja, utilizando-se a condição (f) de (3.47) como equação de restrição. Caso esta equação seja substituída por (4.34) tem-se o resultado mostrado na Fig. (4.6(b)).

Observe que os valores para a carga limite e o mecanismo obtido são praticamente os mesmos, apesar de se estar usando na Fig. (4.6(b)) um número menor de elementos.

Para os três exemplos propostos, verificou-se que a utilização da Expressão (4.11), como equação geral de restrição, resultou em soluções totalmente compatíveis com as obtidas, considerando-se o carregamento direto. Tal conclusão serviu como grande incentivo para a aplicação dessa abordagem no estudo do problema do comportamento da saia de sustentação do tambor de coqueamento.

4.5 Análise da Saia de Sustentação

4.5.1 Modelo Estrutural e de Carregamento

O modelo de carregamento adotado refere-se à segunda situação crítica discutida no início deste capítulo, ou seja, a fase de resfriamento. A rigidez do tambor, bem maior que a da saia, determina, em grande parte, a rotação e o deslocamento do conjunto estrutural. Conseqüentemente, apesar de ainda aquecida, a saia tende, em seu ponto de contato com o tambor, a retornar a sua posição inicial. Adota-se, portanto, o modelo mostrado na Fig. (4.7), no qual considera-se o tambor indeformado, à temperatura ambiente, e a saia ainda aquecida, com um gradiente térmico ΔT . O

procedimento de cálculo será o mesmo utilizado na seção anterior. A solução elástica para a associação das duas estruturas cilíndricas é obtida pela teoria clássica de cascas de parede fina. Conforme verificado na prática, [Matos e Ramos, 1984], os problemas estruturais concentram-se na região superior da saia de sustentação. Não será considerada então, para efeito de cálculo de tensões, a contribuição dos esforços de compatibilização dos deslocamentos na base da saia. Pelo princípio de St-Venant tais esforços, por serem auto-equilibráveis, têm seus efeitos localizados e restritos à proximidade do ponto de aplicação.

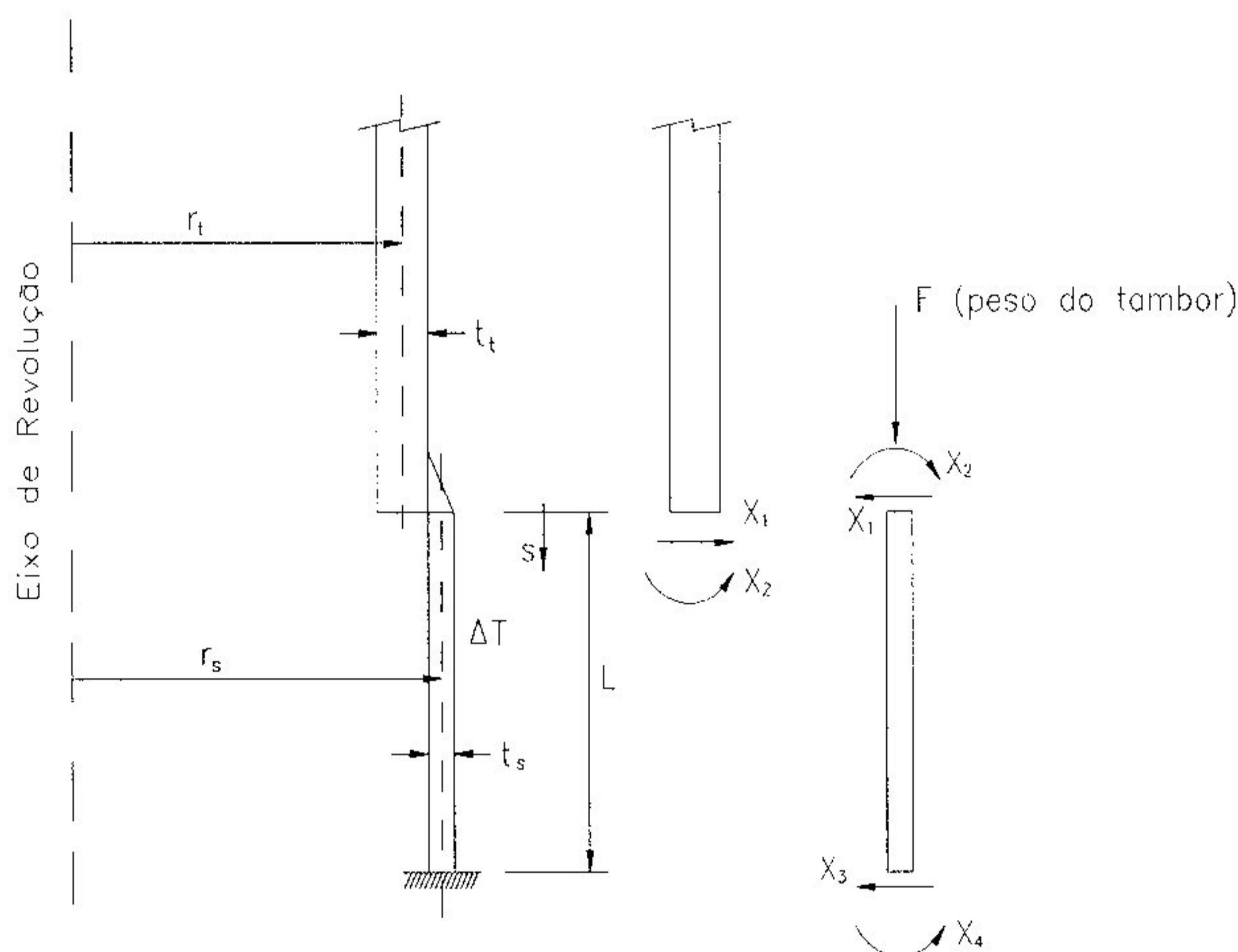


Figura 4.7: Modelo estrutural e esforços de compatibilização entre a saia e o tambor

De acordo com [Kelkar e Sewell, 1987], as equações de compatibilidade para os deslocamentos no contato entre saia e tambor podem ser escritas como:

$$\begin{cases} AX_1 + BX_2 = \alpha r_s \Delta T \\ BX_1 + CX_2 = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

sendo:

r_s o raio da saia de sustentação

r_t o raio do tambor

α o coeficiente de dilatação térmica

ΔT o acréscimo de temperatura

$$A = \frac{r_t^3}{2K_t\zeta_t^3} + \frac{r_s^3}{2K_s\zeta_s^3}$$

$$B = \frac{r_t^2}{2K_t\zeta_t^2} - \frac{r_s^2}{2K_s\zeta_s^2}$$

$$C = \frac{r_t}{K_t\zeta_t} + \frac{r_s}{K_s\zeta_s}$$

$$K_s = \frac{Et_s^3}{12(1-\nu^2)} \text{ denominado rigidez à flexão da saia de sustentação}$$

$$K_t = \frac{Et_t^3}{12(1-\nu^2)} \text{ denominado rigidez à flexão do tambor}$$

$$\zeta_s = \left\{ \frac{3(1-\nu^2)r_s^2}{t_s^2} \right\}^{\frac{1}{4}}$$

$$\zeta_t = \left\{ \frac{3(1-\nu^2)r_t^2}{t_t^2} \right\}^{\frac{1}{4}}$$

t_s a espessura da saia de sustentação

t_t a espessura do tambor

Resolvendo-se (4.35) obtém-se para os esforços cortante e de flexão:

$$X_1 = \frac{-C\alpha r_s \Delta T}{B^2 - AC} \quad (4.36)$$

$$X_2 = \frac{B\alpha r_s \Delta T}{B^2 - AC} \quad (4.37)$$

A partir de X_1 e X_2 , as tensões resultantes ao longo do comprimento s da saia, M_ϕ e N_θ , podem ser calculadas como:

$$M_\phi = \frac{\alpha r_s \Delta T}{B^2 - AC} \left[C \frac{r_s}{\zeta_s} \operatorname{sen} \left(\frac{\zeta_s s}{r_s} \right) + \sqrt{2} B \cos \left(\frac{\zeta_s s}{r_s} - \frac{\pi}{4} \right) \right] e^{-\frac{\zeta_s s}{r_s}} \quad (4.38)$$

$$N_{\theta} = \frac{\alpha r_s \Delta T}{B^2 - AC} \left[2C\zeta_s \cos\left(\frac{\zeta_s s}{r_s}\right) - \frac{2\sqrt{2}B\zeta_s^2}{r_s} \operatorname{sen}\left(\frac{\zeta_s s}{r_s} - \frac{\pi}{4}\right) \right] e^{-\frac{\zeta_s s}{r_s}} \quad (4.39)$$

Mais uma vez é importante lembrar que, apesar de existirem, as demais tensões resultantes, M_{θ} e Q , não são calculadas, por serem omitidas na definição das condições de escoamento, Seção (2.8.2). Quanto á tensão resultante na direção axial, seu cálculo é independente dos esforços de compatibilização de deslocamentos, uma vez que só depende do peso F do tambor de coque.

$$N_{\phi} = F \quad (4.40)$$

Conhecendo-se, então, as tensões presentes na saia de sustentação, pode-se definir a equação de restrição geral a ser usada no problema de minimização (3.47).

4.5.2 Determinação da Temperatura de Colapso

A saia de sustentação está sujeita, como visto na seção anterior, ao peso do tambor, denominado força F , e às tensões advindas da compatibilização dos deslocamentos. Para a definição da equação geral de restrição, além da substituição das tensões resultantes M_{ϕ} e N_{θ} na Equação (4.11), é preciso acrescentar o termo proveniente da taxa de trabalho realizado pelo peso F :

$$W_F = 2\pi r_s F \dot{U}_1 \quad (4.41)$$

onde \dot{U}_1 é a taxa de deslocamentos verticais do nó 1, ponto de aplicação do peso F do tambor.

A equação geral de restrição torna-se, então:

$$2\pi \sum_{i=1}^{NE} \left\{ \int_{l_i} N_\theta \left(-\dot{\lambda}_1^i(s) + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_3^i(s) + \dot{\lambda}_4^i(s) - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_6^i(s) \right) r_o ds \right\} +$$

$$2\pi \sum_{i=1}^{NE+1} (M_\phi \dot{\theta}_i) + 2\pi r_s F \dot{U}_1 = 1 \quad (4.42)$$

Para o estabelecimento do problema de minimização(3.47), devem permanecer na equação de restrição geral apenas os termos que são função do parâmetro que se pretende minimizar. O objetivo da análise, proposta neste trabalho, é a obtenção da temperatura em que ocorre o colapso da saia de sustentação. Sendo o peso F constante e previamente conhecido, é independente do gradiente térmico ΔT . Logo a Equação (4.42) deve ser reformulada. O problema de minimização pode, então, ser formulado, através de (3.20), (4.38), (4.39) e (4.42) como:

Para $\Delta T_S \geq \Delta T$

Minimize

$$\Delta T_S = \frac{FC}{EGR} \quad (4.43)$$

sujeito às:

- (a) Condições de Contorno.
- (b) Condições de Compatibilidade, $\dot{\epsilon} = B\dot{U}$.
- (c) Lei de Êscoamento, $\dot{\epsilon}^c = N\dot{\Lambda}$, para $\dot{\Lambda} > 0$.
- (d) $\sigma = D(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^c) = 0$, durante o colapso.
- (e) Condições de Restrição.
- (f) $EGR = 1$.

onde

$$FC = \sum_{i=1}^{NE} \left\{ \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \int_{l_i} \sigma_i^c N \lambda_k^i(s) r_s ds dy \right\} + \sum_{i=1}^{NE+1} \left\{ r_s \int_{-t_i/2}^{t_i/2} (\sigma_\phi^c)^i y \dot{\theta}_i dy \right\} - r_s F \dot{U}_1$$

$$EGR = \sum_{i=1}^{NE} \left\{ \int_{l_i} N_{\theta}^* \left(-\dot{\lambda}_1^i(s) + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_3^i(s) + \dot{\lambda}_4^i(s) - \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_6^i(s) \right) r_s ds \right\} + \sum_{i=1}^{NE+1} (M_{\phi}^* \dot{\theta}_i)$$

$$M_{\phi}^* = \frac{\alpha r_s}{B^2 - AC} \left[C \frac{r_s}{\zeta_s} \text{sen} \left(\frac{\zeta_s s}{r_s} \right) + \sqrt{2} B \cos \left(\frac{\zeta_s s}{r_s} - \frac{\pi}{4} \right) \right] e^{-\frac{\zeta_s s}{r_s}}$$

$$N_{\theta}^* = \frac{\alpha r_s}{B^2 - AC} \left[2C \zeta_s \cos \left(\frac{\zeta_s s}{r_s} \right) - \frac{2\sqrt{2} B \zeta_s^2}{r_s} \text{sen} \left(\frac{\zeta_s s}{r_s} - \frac{\pi}{4} \right) \right] e^{-\frac{\zeta_s s}{r_s}}$$

Para as condições (a) até (e) o procedimento é o mesmo estabelecido no Capítulo (3).

4.5.3 Resultado Numérico

Nas Figs. (4.8(a)) e (4.8(b)), estão representados o tambor de coqueamento e o detalhe da saia de sustentação, respectivamente. Os dados são provenientes da Unidade de Coque Retardado existente na Refinaria de Cubatão em São Paulo.

- Tipo de aço: SA-515 GR.70
- Tensão de escoamento 250 MPa
- Norma: ASME
- Temperatura de projeto: 846°F ou 450°C
- Ciclo de produção: 21 horas
- Peso do Tambor: 9349000 N

O resultado da análise limite realizada, através da técnica descrita neste trabalho, está plotado na Fig. (4.9). De acordo com o obtido, a saia de sustentação deverá entrar em colapso para o gradiente de temperatura de 379,5°C, com o mecanismo plástico ocorrendo entre os nós 1 e 8. As deformações plásticas ficam, portanto, restritas ao topo da saia, o que já era esperado, uma vez que, pelo princípio de St-Venant, considerou-se apenas os esforços oriundos da junção entre a saia e o tambor. Esse resultado deve, entretanto, ser interpretado com cuidado, pois a forma do mecanismo obtido representa apenas a situação final de colapso, quando

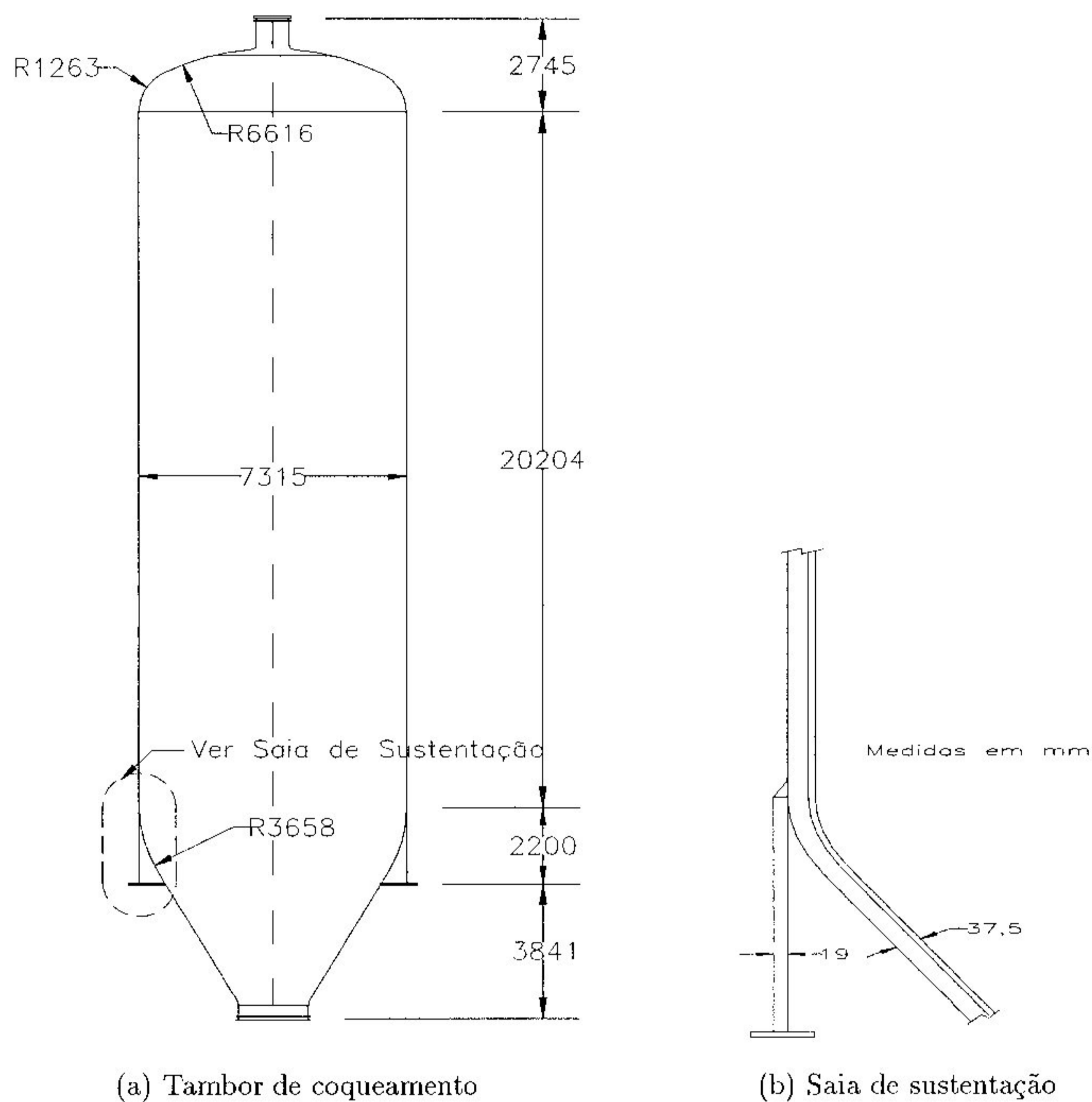


Figura 4.8: Representação do tambor de coqueamento

somente os deslocamentos plásticos são consideradas. Além disso, devido ao escalonamento da equação geral de restrição, condição (f) de (4.43), os valores numéricos fornecidos servem apenas para uma análise qualitativa destes deslocamentos.

Para se ter uma visão mais clara do que ocorre antes e após o colapso, seria necessária a consideração das deformações elasto-plásticas, durante a fase transiente do problema.

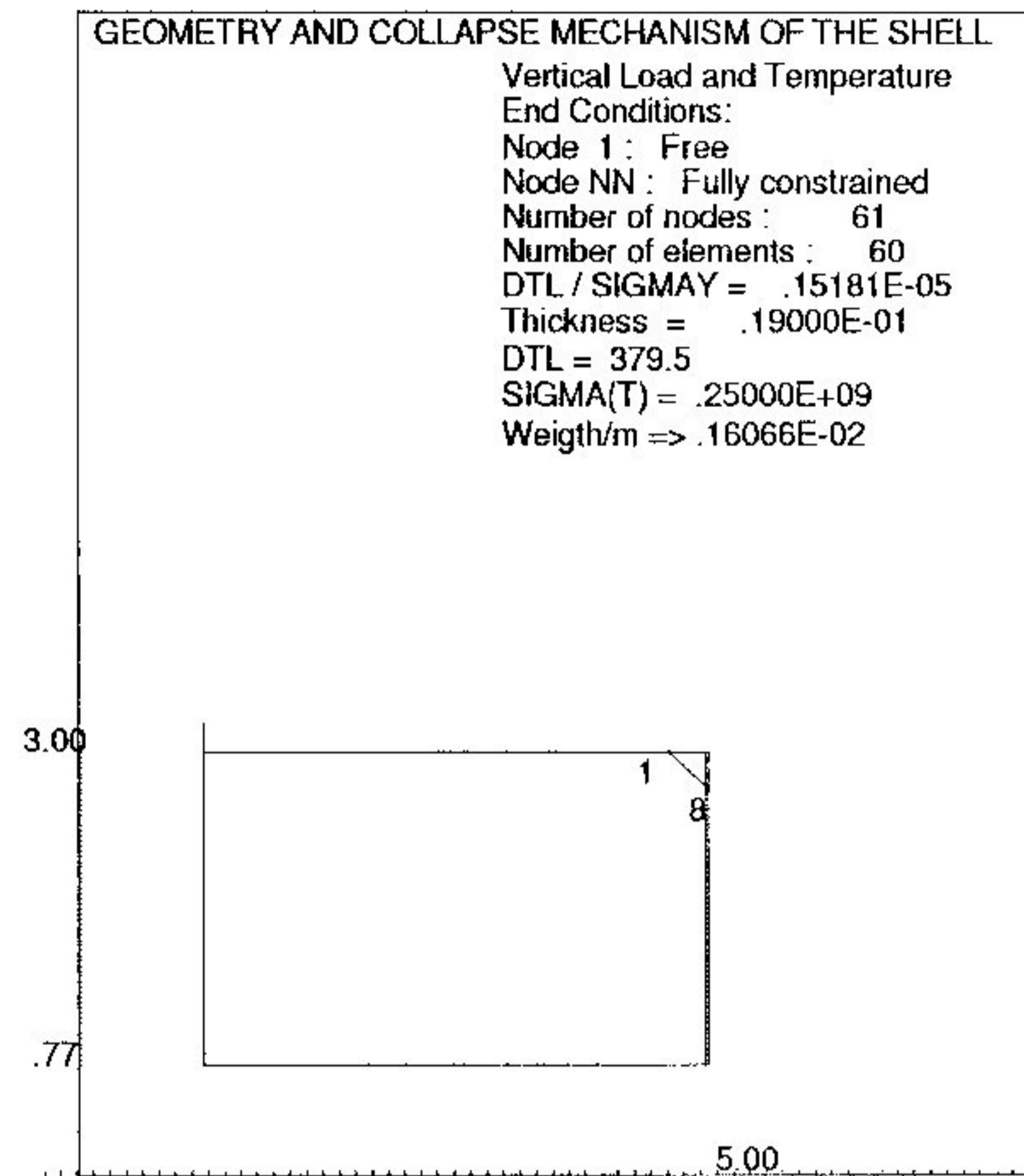


Figura 4.9: Gradiente de temperatura limite e mecanismo de colapso

Determinação Simplificada dos Deslocamentos ao Longo da Saia Durante a Fase Elasto-plástica

Os deslocamentos elásticos decorrentes dos esforços de compatibilização na junção entre a saia e o tambor, (4.36) e (4.37), são encontrados, de acordo com [Kelkar e Sewell, 1987]:

$$w^s = \alpha r_s \Delta T \left\{ \frac{e^{-\frac{\zeta_s s}{r_s}}}{(B^2 - AC)K_s} \left[\frac{Cr_s^3}{2\zeta_s^3} \cos\left(\frac{\zeta_s s}{r_s}\right) - \frac{Br_s^2}{\sqrt{2}\zeta_s^2} \sin\left(\frac{\zeta_s s}{r_s} - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right\} \quad (4.44)$$

Neste caso, os efeitos dos esforços que surgem na base da saia, X_3 e X_4 , da Fig. (4.7), devem também ser considerados. Apesar de não exercerem influência no colapso da estrutura, são significantes na definição do deslocamento global.

Repetindo-se o mesmo procedimento utilizado para o topo da saia, a compatibilização dos deslocamentos na região de contato com o apoio produz o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} X_3 \frac{r_s^3}{2K_s \zeta_s^3} - X_4 \frac{r_s^2}{2K_s \zeta_s^2} = \alpha r_s \Delta T \\ -X_3 \frac{r_s^2}{2K_s \zeta_s^2} + X_4 \frac{r_s}{K_s \zeta_s} = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

cuja solução fornece os esforços de compatibilização dos deslocamentos na base da saia de sustentação.

$$X_3 = \alpha r_s \Delta T \frac{4K_s \zeta_s^3}{r_s^3} \quad (4.46)$$

$$X_4 = \alpha r_s \Delta T \frac{2K_s \zeta_s^2}{r_s^2} \quad (4.47)$$

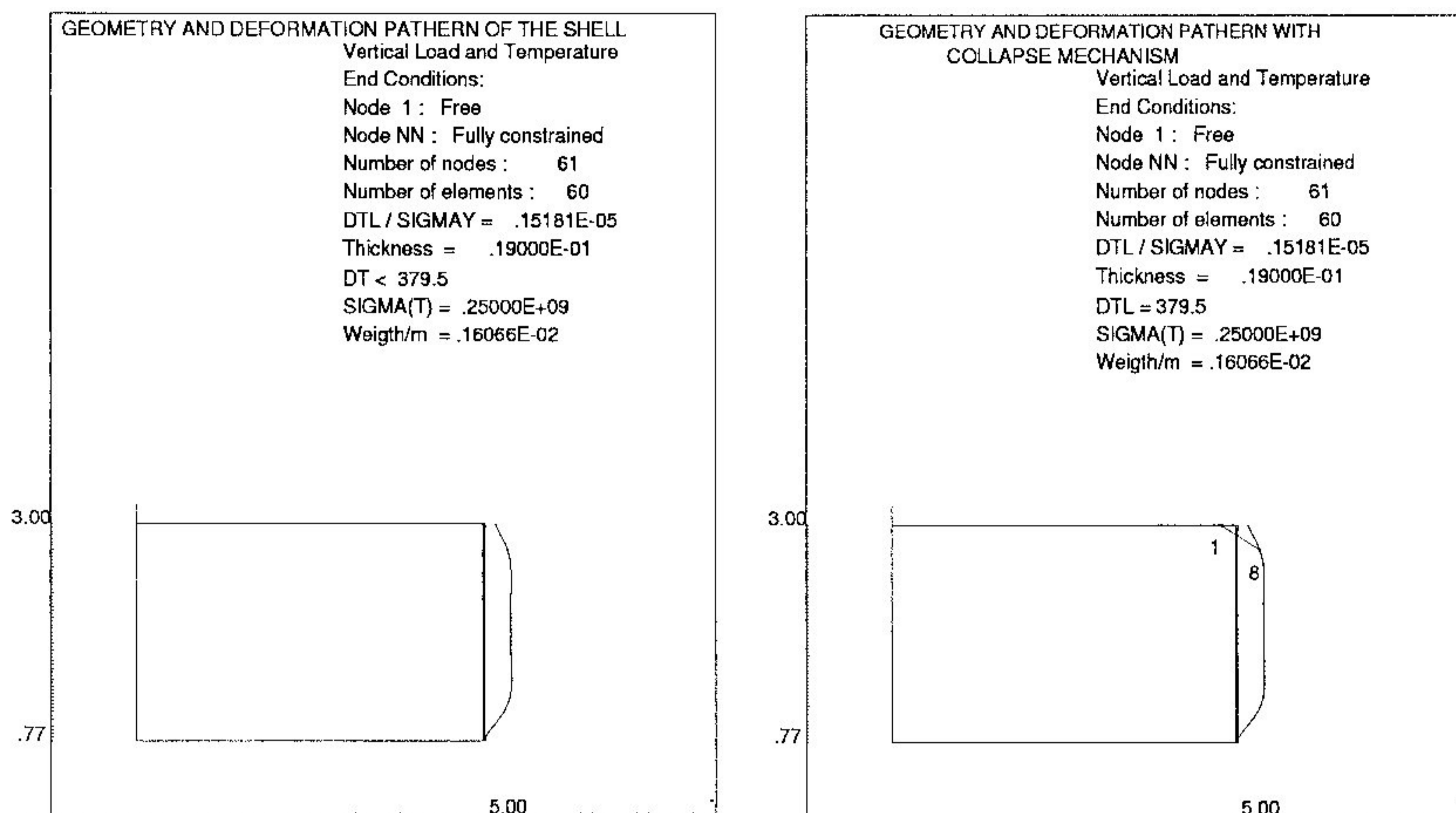
Em função destes esforços, obtém-se a parcela do deslocamento w^i :

$$w^i = \alpha r_s \Delta T e^{-\frac{\zeta_s x}{r_s}} \left\{ -2 \cos \left(\frac{\zeta_s x}{r_s} \right) - \sqrt{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\zeta_s x}{r_s} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad (4.48)$$

Somando-se (4.44), (4.48) a $\alpha r_s \Delta T$, chega-se ao deslocamento elástico total:

$$w^e = w^s + w^i + \alpha r_s \Delta T \quad (4.49)$$

Este seria o deslocamento elasto-plástico presente na iminência do colapso caso, fosse admitido para o material, o modelo de encruamento isotrópico. Um cálculo mais preciso deve considerar a formação da rótula no topo da saia, bem como os escoamentos axial e circunferencial que precedem o aparecimento do mecanismo. O objetivo, entretanto, é apenas ilustrar as alterações na forma da saia durante sua interação com o tambor. Em vista disso e lembrando-se que esta simplificação não interfere na determinação da temperatura de colapso, adota-se (4.49) como o deslocamento elasto-plástico da saia anterior ao colapso, Fig. (4.10(a)). Sua sobreposição ao mecanismo é mostrada na Fig. (4.10(b)).



(a) Deflexões elasto-plásticas na iminência do colapso

(b) Deflexão e mecanismo de colapso

Figura 4.10: Deflexão ao longo da saia de sustentação

Influência do peso do tambor na determinação da temperatura de colapso

Primeiramente, é importante salientar que não se considera nesta análise efeitos de segunda ordem, originados pelo peso exercido pelo tambor no momento em que a saia se encontra deformada. Independentemente desse fato, é natural imaginar a influência significativa do peso na determinação da temperatura de colapso. A Tabela (4.1) apresenta os resultados obtidos para o problema da saia, Fig. (4.8), com a força F assumindo valores de compressão e de tração. Para cada valor são fornecidos a temperatura e o comprimento do mecanismo de colapso. Este último refere-se à distância entre as duas rótulas plásticas. Uma observação a respeito da convenção adotada deve ser feita, antes de qualquer discussão. Com base na presença do tambor, aplicando-se seu peso F sobre a saia, adotou-se, para esse caso, o valor positivo da carga, apesar de gerar tensões de compressão. Seguindo o mesmo critério, para F negativa tem-se, como efeito, o tracionamento da saia de sustentação. A consideração de esforços de tração tem a finalidade de mostrar que somente tais cargas afetariam o valor do gradiente de colapso e que, na realidade,

	F (MN)	$\Delta T_c(^{\circ}C)$	Comprimento do Mecanismo (cm)
1	-93,4900	149,1	67
2	-9,3490	363,9	30
3	-0,9349	377,9	26
4	0	379,5	26
5	0,9349	379,5	26
6	9,3490	379,5	26
7	93,4900	379,5	26
8	934,9000	-	-

Tabela 4.1: Análise para diversos valores de F

sendo o peso do tambor uma força de compressão, não contribue, portanto, para a resistência última da saia.

Dois fatos merecem destaque com relação aos resultados obtidos:

- A não obtenção de resultados quando a carga F atinge o valor de $934,90MN$.
- Para os valores de compressão da carga F , não há alteração na temperatura de colapso, a não ser para o caso citado anteriormente.

Para explicar o primeiro fato, calcula-se a carga F_o , necessária para que, sozinha, provoque o escoamento por compressão na direção axial.

Sendo $F_o = 2\pi r_s t_s \sigma_y$, para os valores da Fig. (4.8) obtém-se:

$$F_o = 2\pi \cdot 3,7045 \cdot 0,019 \cdot 250 \cdot 10^6$$

$$F_o = 111,0561MN < 934,9000MN$$

Ou seja, a partir de F_o o escoamento ocorre por esmagamento devido à compressão simples, independentemente do gradiente de temperatura. É exatamente a situação da linha 8, Tabela (4.1), onde F é maior do que F_o .

Para melhor entendimento do segundo fato, é necessário estudar o comportamento das tensões ao longo da saia de sustentação. Sendo a região de maior concentração de tensões, espera-se que o topo da saia atinja o escoamento em primeiro lugar, dando origem a uma rótula plástica. A utilização do prisma

hexagonal, Fig. (2.7), como condição de escoamento, implica, como já foi dito anteriormente, na divisão da casca em volumes, onde os comportamentos de membrana e de flexão ocorrem separadamente, respectivamente dentro dos elementos e nos pontos nodais. Como a força F origina somente tensões normais na direção axial, sua contribuição é considerada apenas nos elementos, onde é válido o Critério de Escoamento de Tresca, Fig. (4.11). Não exerce, portanto, influência na formação das rótulas plásticas.

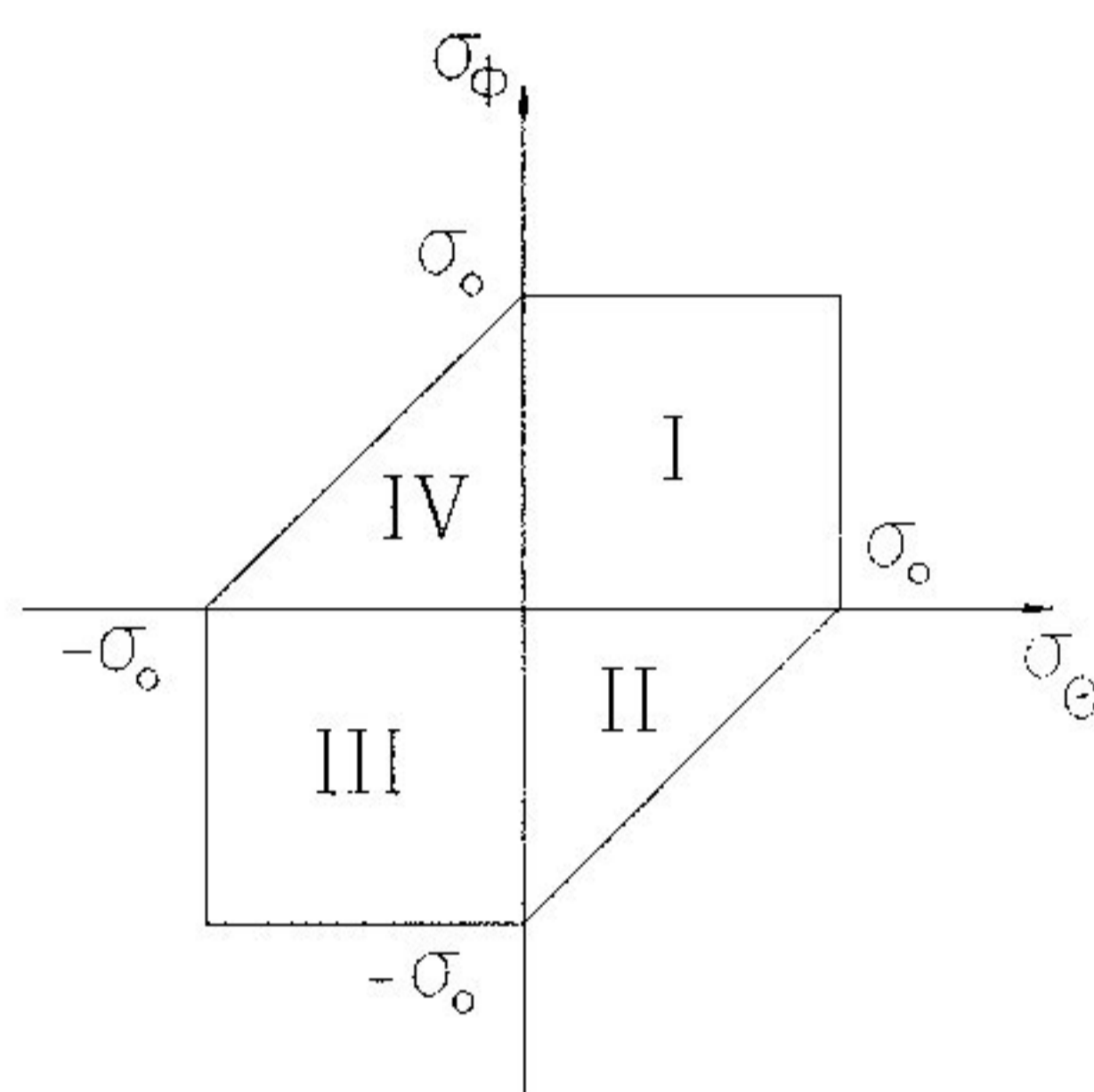


Figura 4.11: Condição de escoamento dentro de cada elemento

Assim, cada elemento está sujeito às tensões normais axiais, produzidas pela força F , e circunferenciais, causadas pelos esforços de compatibilização na região de contato entra a saia e o tambor. Na Fig. (4.12) está plotada a distribuição do esforço normal N_θ , calculado em (4.39), ao longo da saia de sustentação, para diversos gradientes de temperatura. Para todas as curvas observa-se que o esforço normal se anula à mesma distância, 41cm , do topo da saia. Até esse ponto aparecem apenas tensões circunferenciais negativas. Na ausência das tensões axiais, linha 4 da Tabela (4.1), a segunda rótula plástica se forma a 26cm do topo da saia. Logo, todo o mecanismo de colapso está contido na região de compressão circunferencial. Com a introdução da carga F , de compressão, o estado de tensões corresponde ao quadrante *III* da Fig. (4.11). Caso F seja menor que F_o , não haverá esmagamento na direção axial. Conseqüentemente, o escoamento ocorrerá apenas na direções circunferencial. O colapso será, então, definido somente pelo gradiente de temperatura. Isto explica os resultados nas linhas 5, 6 e 7 na Tabela (4.1).

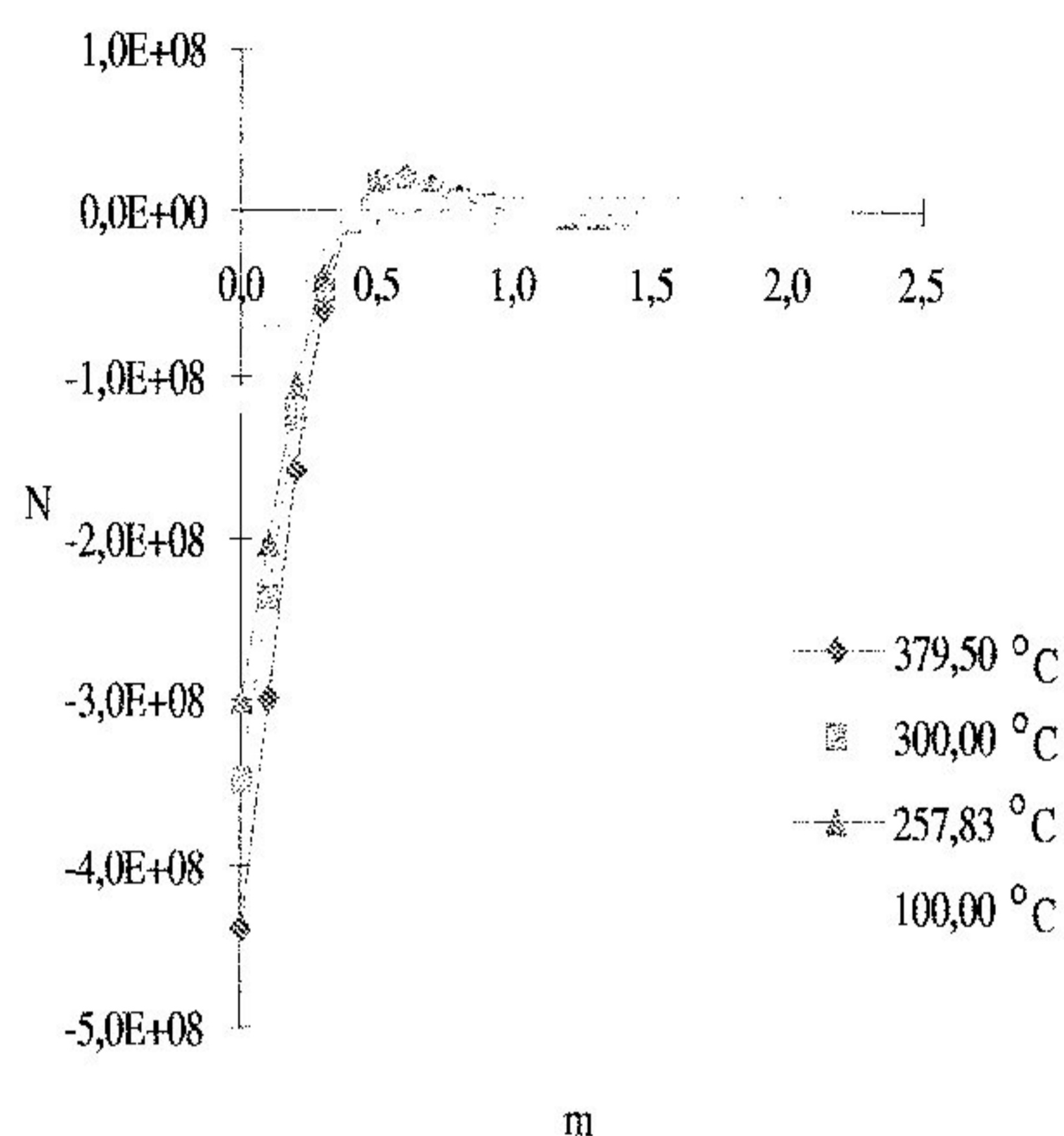


Figura 4.12: Esforço normal na direção circunferencial ao longo do comprimento da saia de sustentação

Por outro lado, caso F seja de tração, o estado de tensões dentro do elemento na região próxima ao topo da saia corresponderá ao quadrante *IV*. O escoamento será, portanto, função da combinação das duas tensões de membrana. Conseqüentemente, a carga F contribuirá para a definição do mecanismo e da temperatura de colapso. As linhas 1, 2 e 3, da Tabela (4.1) correspondem a essa situação, apresentando soluções diferentes para cada valor de F .

Completa-se, assim, a análise proposta, no início deste capítulo, para a saia de sustentação de um tambor de coqueamento. Uma estratégia de adaptação do problema para a técnica do Capítulo (3) foi apresentada. Um estudo qualitativo dos deslocamentos ao longo da estrutura foi realizado e a interferência do peso do tambor na definição do colapso, discutida. As conclusões obtidas baseam-se, entretanto, nas simplificações adotadas. Para uma análise mais detalhada do problema, algumas considerações ainda precisam ser feitas. Propriedades do material como a influência da temperatura na tensão de escoamento devem ser incluídas. Para a determinação dos deslocamentos, é preciso que se leve em conta a redistribuição das tensões ao longo da casca quando esta entra no regime elasto-plástico. Finalmente, para um estudo mais realístico da influência do peso do tambor, é importante considerar os efeitos de segunda ordem, bem como o comportamento da saia durante a fase tran-

siente do problema. Além disso, a introdução de uma condição de escoamento, que permita a consideração da mudança de curvatura no interior do elemento, possibilitaria uma visão mais precisa da influência do peso na determinação da temperatura de colapso.

Capítulo 5

Uma Estimativa “*a Posteriori*” do Erro e Procedimentos Adaptativos

5.1 Introdução

Na Seção (3.4.2), aplicando-se a Teoria das Aproximações Conjugadas, [Brauchli e Oden, 1971], chegou-se a uma relação de consistência entre os campos das taxas de deslocamento e de deformação para o problema de otimização. Neste capítulo, esta mesma relação é deduzida a partir da minimização da norma de energia da diferença entre as duas descrições independentes para o campo das taxas de deformação. Com base neste procedimento, foram dados os primeiros passos para a definição de uma estimativa *a posteriori* para o erro local. O estimador de erro desenvolvido representa um avanço, superando as limitações do indicador utilizado em [Franco et al, 1995], e é usado no estabelecimento do refinamento adaptativo. A estratégia adotada para a obtenção de uma nova malha durante o refinamento, é o procedimento adaptativo do tipo h . A implementação deste processo para a técnica de análise limite, descrita no Capítulo (3), é verificada por meio da análise de alguns casos. Uma discussão com base nos resultados desta análise é feita, salientando-se as vantagens e falhas, importantes para a orientação de trabalhos futuros.

5.2 Processos Adaptativos

Em análise numérica, qualquer processo que se utilize de resultados intermediários, gerados durante a solução para aprimorar o modelo, é definido como adaptativo. Portanto, o procedimento de obtenção de uma boa malha de elementos finitos, baseado na experiência do analista e nos resultados provenientes de uma primeira análise é a princípio adaptativo. Diversos são os fatores, entretanto, que devem ser considerados ao se definir a melhor discretização do modelo. O emprego de técnicas que realizem o processo adaptativo, automaticamente, sem a interação com o analista, elimina grande parte do caráter subjetivo da adequação da malha, [Figueiredo, 1992].

Geralmente, a análise adaptativa envolve estimativas de erro *a posteriori*, onde são utilizadas informações obtidas durante o processo de solução. O algoritmo adaptativo é, então, construído em função do erro estimado E , através da condição:

$$E \leq Tol$$

onde Tol é a tolerância pré-definida, [Magalhães, 1994].

As estratégias básicas utilizadas nos processos adaptativos isoladamente ou combinadas entre si são:

- Processo h : os elementos da malha são subdivididos em elementos menores, simultaneamente ou não.
- Processo p : caracterizado pelo aumento no grau do polinômio de interpolação em toda a malha ou localmente.
- Processo r : os nós são redistribuídos ao longo do domínio.

Pela sua simplicidade na implementação, o processo h foi adotado, neste trabalho, para a definição do algoritmo adaptativo.

5.3 Estimativa de Erro “*a Posteriori*”

Na Seção (3.4.3) foram estabelecidas medidas de erros locais, baseadas na diferença entre as duas formulações independentes para os campos de taxas de deformação. A utilização desta diferença na definição da estimativa de erro da solução, ${}^i\mathbf{e}_\epsilon^*$, é, portanto, bastante natural. Admitindo-se $\dot{\epsilon}_h^2$ como a solução melhorada para o campo das taxas de deformações plásticas e $\dot{\epsilon}_h^1$ a aproximação para o campo das taxas de deformações totais, no momento do colapso, pode-se estimar o erro em um elemento i de uma malha h como:

$${}^i\mathbf{e}_\epsilon^* = \left(\dot{\epsilon}_h^2 - \dot{\epsilon}_h^1 \right)^i \quad (5.1)$$

Essa definição pontual é, todavia, difícil especificar, além de conduzir a interpretações não muito confiáveis. Uma medida do erro muito mais consistente, realizando-se sua integração ao longo do domínio, é a chamada norma de energia. A estimativa para o erro local é, então, definida, em cada elemento i , como:

$$\|\mathbf{e}_h^*\|_i = \left(\int_{\Omega_i} \left(\dot{\epsilon}_h^2 - \dot{\epsilon}_h^1 \right)^T \mathbf{D} \left(\dot{\epsilon}_h^2 - \dot{\epsilon}_h^1 \right) d\Omega \right)^{1/2} = \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{e}_\epsilon^{*T} \mathbf{D} \mathbf{e}_\epsilon^* d\Omega \right)^{1/2} \quad (5.2)$$

Seu valor para todo o domínio é obtido através da raiz do somatório do quadrado das contribuições dos NE' s elementos.

$$\|\bar{\mathbf{e}}_h\|^2 = \sum_{i=1}^{NE} \|\mathbf{e}_h^*\|_i^2 \quad (5.3)$$

No Apêndice (A), demonstra-se que a minimização da norma apresentada pela Equação (5.2), fornece a relação de consistência (3.33), utilizada na definição do indicador de erro, Equações (3.45) e (3.46). Estas equações impõem, na direção circunferencial, uma condição muito forte, produzindo soluções de qualidade equivalente para os campos de taxa de deformação nesta direção. Por outro lado, a condição estabelecida na direção meridional pelas equações acima, já não tem a mesma precisão, produzindo soluções descontínuas para o campo de taxas de

deformação $\dot{\epsilon}_h^1$. O campo $\dot{\epsilon}_h^2$ é tratado, por isso, como uma solução melhorada na definição do estimador de erro. Maiores detalhes a respeito destas condições podem ser encontrados em [Franco e Ponter, 1994a].

A qualidade do estimador de erro $\|\bar{e}_h\|$ pode ser avaliada através do índice de efetividade, θ , obtido pela razão entre as normas dos erros estimado e exato:

$$\theta = \frac{\|\bar{e}_h\|}{\|e\|} \quad (5.4)$$

Considerando uma seqüência de malhas refinadas uniformemente em elementos de igual tamanho h , se θ aproximar-se da unidade à medida que $h \rightarrow 0$, o estimador de erro é definido como assintoticamente exato, [Zienkiewicz e Taylor, 1989b].

Desde que a solução exata para os tipos de problemas aqui analisados não está disponível, o valor real do erro será substituído por $\|e_h^e\| = \|\dot{\epsilon}_e^1 - \dot{\epsilon}_h^1\| = \|\dot{\epsilon}_e^2 - \dot{\epsilon}_h^1\|$. Os parâmetros com o índice e referem-se a uma malha obtida através do refinamento adaptativo, descrito na próxima seção, na qual a solução encontra-se, por hipótese, próxima da exata, e conseqüentemente $\dot{\epsilon}_e^1 \cong \dot{\epsilon}_e^2$.

Definindo-se a norma de erro da solução melhorada como $\|\hat{e}_h\| = \|\dot{\epsilon}_e^2 - \dot{\epsilon}_h^2\|$, o estimador de erro será assintótico caso $\|\hat{e}_h\|$ convirja para zero mais rapidamente do que $\|e_h^e\|$, ou seja, $\|\hat{e}_h\| / \|e_h^e\| \rightarrow 0$ quando $\|e_h^e\| \rightarrow 0$. Esta afirmação é demonstrada por meio de um teorema definido no Apêndice (B), que fornece como alternativa para a definição de θ :

$$\left(1 - \frac{\|\hat{e}_h\|}{\|e_h^e\|}\right) \leq \theta \leq \left(1 + \frac{\|\hat{e}_h\|}{\|e_h^e\|}\right) \quad (5.5)$$

5.4 Estratégia de Refinamento Adaptativo

A princípio, o refinamento uniforme de uma malha em elementos cada vez menores, conduz inevitavelmente à soluções melhores. O preço pago por este procedimento é o

elevado custo operacional. Através de um refinamento seletivo, é possível discretizar melhor as regiões em que o erro esteja mais concentrado, chegando-se a soluções mais precisas para uma malha com menor número de graus de liberdade. Adota-se, neste trabalho, a estratégia estabelecida em [Zienkiewicz e Zhu, 1987], onde se procura encontrar a malha ótima na qual a norma de erro global seja menor que um limite pré-definido.

Malha ótima, como definida em [Duarte, 1991], é aquela que fornece menor norma de erro (erro ótimo) para um dado número de graus de liberdade. Outra característica é que a norma do erro deve ser constante, ou uniforme, para todos os elementos.

O parâmetro adotado nesta dissertação para a caracterização da qualidade de uma determinada malha h é o erro percentual estimado, definido como:

$$\eta_h = \left(\frac{\|\bar{\mathbf{e}}_h\|^2}{\|\bar{\mathbf{e}}_h\|^2 + \|\dot{\mathbf{e}}_h^1\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

Dois critérios, um global e outro local, devem, portanto, ser satisfeitos ao se estabelecer o procedimento adaptativo. O primeiro é definido estabelecendo-se que o erro percentual estimado deve ser no máximo igual a uma valor pré-definido, $\hat{\eta}$, ou seja:

$$\eta_h \leq \hat{\eta} \quad \text{para todo o domínio} \quad (5.7)$$

Localmente, o critério de refinamento pretende obter uma distribuição de erro uniforme, impondo-se um limite para a norma do erro em cada elemento. Logo, supondo-se que se tenha a malha ótima, a exigência (5.7) estabelece o valor para o erro máximo permitido em cada elemento, através do parâmetro e_K , definido como se segue:

$$\|\mathbf{e}_h^*\|_i \leq \hat{\eta} \left[\frac{\left(\|\bar{\mathbf{e}}_h\|^2 + \|\dot{\mathbf{e}}_h^1\|^2 \right)}{NE} \right]^{1/2} = e_K \quad (5.8)$$

Conseqüentemente, quando a taxa

$$\xi_i = \frac{\|\mathbf{e}_h^*\|_i}{e_K} > 1 \quad (5.9)$$

o elemento i deverá ser refinado. Caso a taxa de convergência da norma do erro seja da ordem de $O(h^p)$, um valor aproximado para o tamanho dos novos elementos aninhados no elemento i , é obtido:

$$n_i = \frac{h_i}{\xi_i^{1/p}}, \text{ para } \xi_i > 1 \quad (5.10)$$

sendo p a ordem do polinômio de interpolação, que no caso desta formulação é um.

Finalmente o algoritmo de refinamento pode ser descrito como:

- A partir de uma malha inicial, resolve-se o problema de análise limite (ou de “shakedown”) e calcula-se o erro estimado em cada elemento.
- Calcula-se a máxima norma de erro permitida, e_K , e verifica-se quais elementos devem ser refinados.
- Calcula-se a taxa de divisão $\xi_i^{1/p}$ para cada elemento, os novos tamanhos n_i e realiza-se o refinamento.
- Resolve-se novamente o problema de análise limite (“shakedown”) para a nova malha.
- Repete-se o processo até que se obtenha $\xi_i < 1$ para todos os elementos.

A condição definida pela Equação (5.7) poderia, também, ser usada como critério de parada para o processo adaptativo. Optou-se, no entanto, por utilizá-la apenas indiretamente na determinação de condição (5.8).

5.5 Exemplos Numéricos

A seguir, alguns casos de cascas axi-simétricas, sujeitas a pressões internas, são analisados através da técnica descrita neste trabalho. Em cada caso, uma malha grosseira é inicialmente usada para se obter duas seqüências de malhas aninhadas. A primeira é resultante de um refinamento uniforme e a outra da estratégia adaptativa descrita na Seção (5.4). Tabelas e gráficos são produzidos, a partir dos dados extraídos de cada seqüência, para se verificar a eficiência do estimador discutido na Seção (5.3) e do processo adaptativo implementado.

Basicamente, a análise de cada caso divide-se em duas etapas. Primeiramente é medida a qualidade do estimador de erro. Através dos dados obtidos a partir da seqüência de malhas uniformes, dois gráficos são produzidos. No primeiro, as normas de erro da solução e de seu valor melhorado, $\|\mathbf{e}_h^e\|$ e $\|\hat{\mathbf{e}}_h\|$, são comparadas quanto ao seu comportamento durante o refinamento. Já no segundo gráfico, avalia-se o índice de efetividade, Equação (5.4), que deve assumir valores próximos à unidade para que se garanta a convergência do estimador de erro.

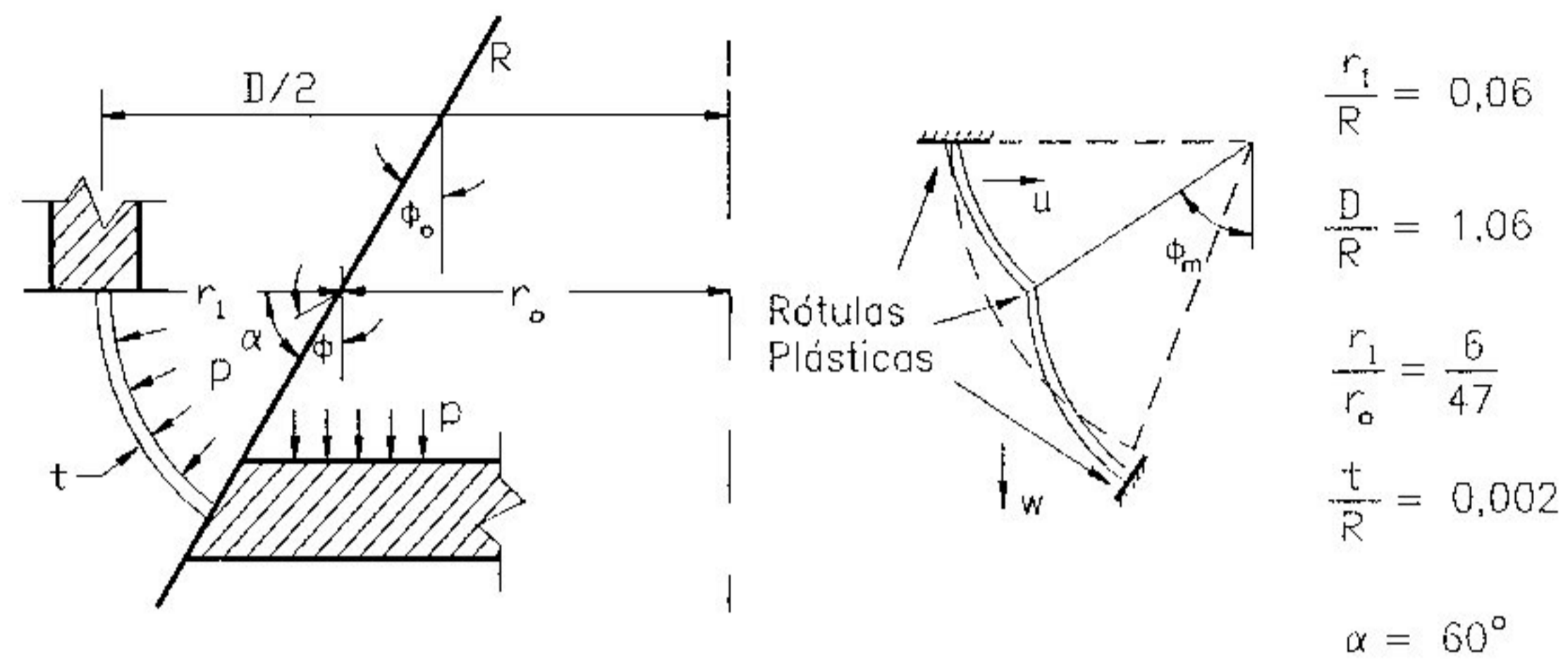
Na segunda etapa da análise, compara-se a taxa de convergência do erro $\|\mathbf{e}_h^e\|$ para as duas seqüências de malhas, obtidas através do refinamento uniforme e da estratégia adaptativa, com a finalidade de se verificar a eficiência desta última.

5.5.1 Casca Toroidal Sujeita à Pressão Interna

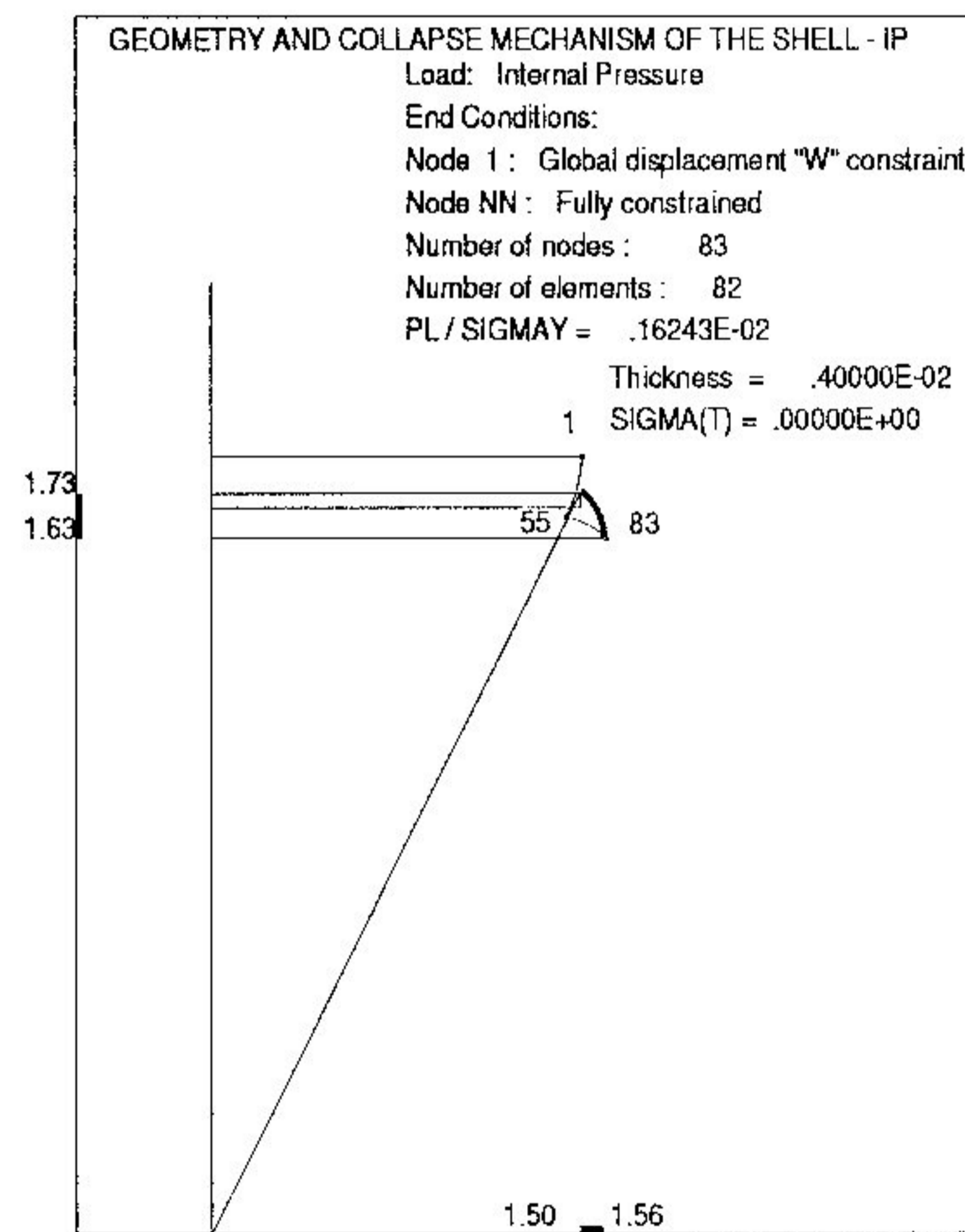
O problema da casca toroidal corresponde ao caso estudado em [Drucker e Shield, 1958]. A casca é descrita como engastada em uma extremidade e presa a uma placa rígida na outra, conforme mostrado na Fig. 5.1(a). Os limites superior e inferior para a carga de colapso podem ser calculados usando-se as soluções analíticas (5.11) e (5.12), obtidas em [Drucker e Shield, 1958].

$$\frac{P}{\sigma_y} = \frac{t}{R} \left(229 \frac{t}{R} + 0,335 \right) \quad (\text{limite inferior}) \quad (5.11)$$

$$\frac{P}{\sigma_y} = \frac{t}{R} \left(13,9 \frac{t}{r_1} + 0,34 \right) \quad (\text{limite superior}) \quad (5.12)$$



(a) Geometria e mecanismo proposto em [Drucker e Shield, 1958]



(b) Solução e mecanismo de colapso

Figura 5.1: Casca Toroidal com espessura $t = 4\text{mm}$

Para a geometria definida na Fig. (5.1(a)), as Equações (5.11) e (5.12) fornecem para a carga de colapso:

$$\frac{P}{\sigma_y} = 0,00159 \text{ (limite inferior)} \quad (5.13)$$

$$\frac{P}{\sigma_y} = 0,00161 \text{ (limite superior)} \quad (5.14)$$

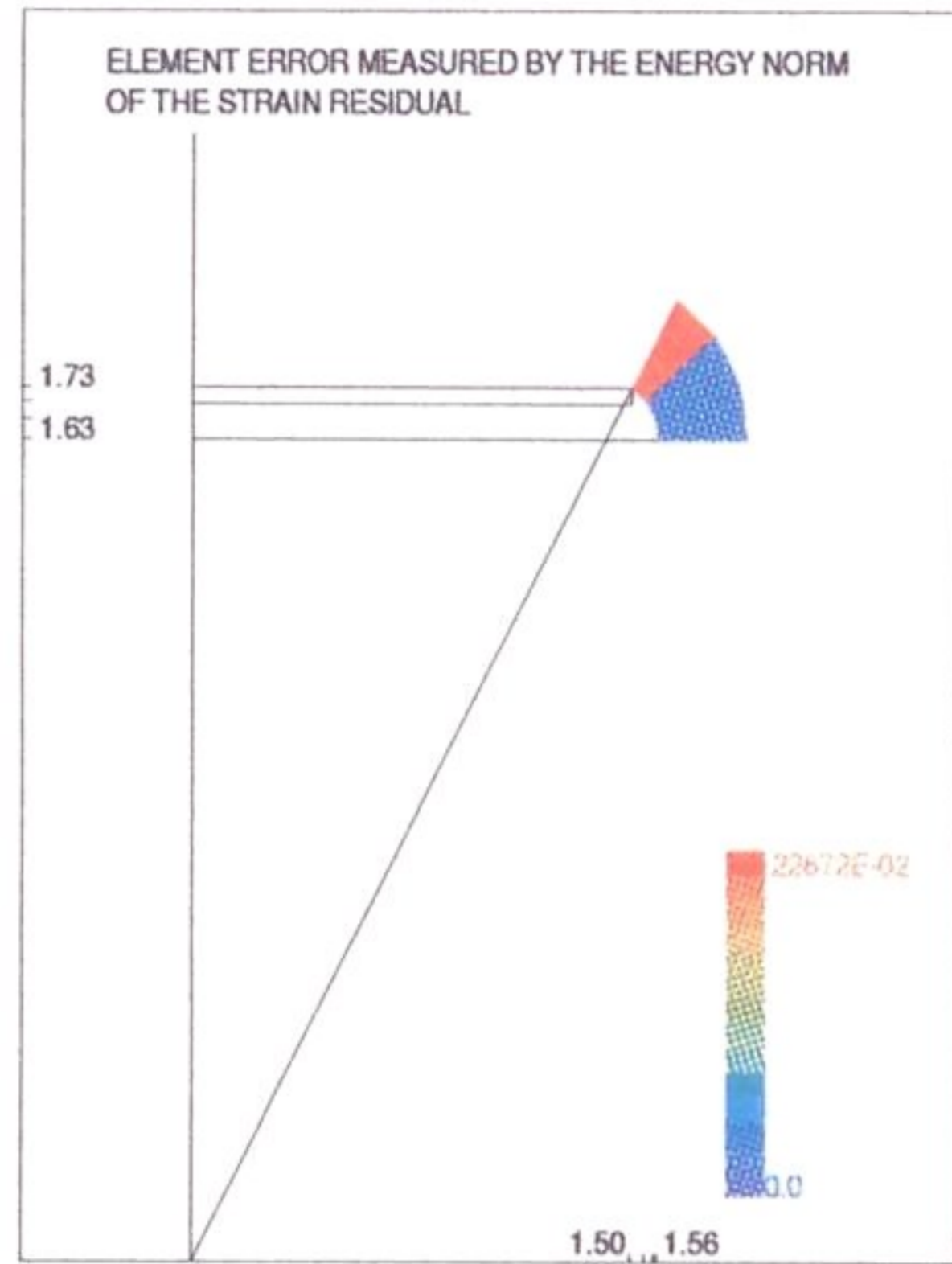
Estas soluções analíticas podem ser comparadas com a solução numérica para a malha refinada da Fig. (5.1(b)).

Nas Figs. (5.2(a) à 5.2(e)) estão apresentadas as distribuições para a norma do erro estimado em cada malha do refinamento adaptativo. Esta seqüência de soluções indica claramente a tendência do erro de se distribuir uniformemente entre os elementos, à medida que se realiza o refinamento.

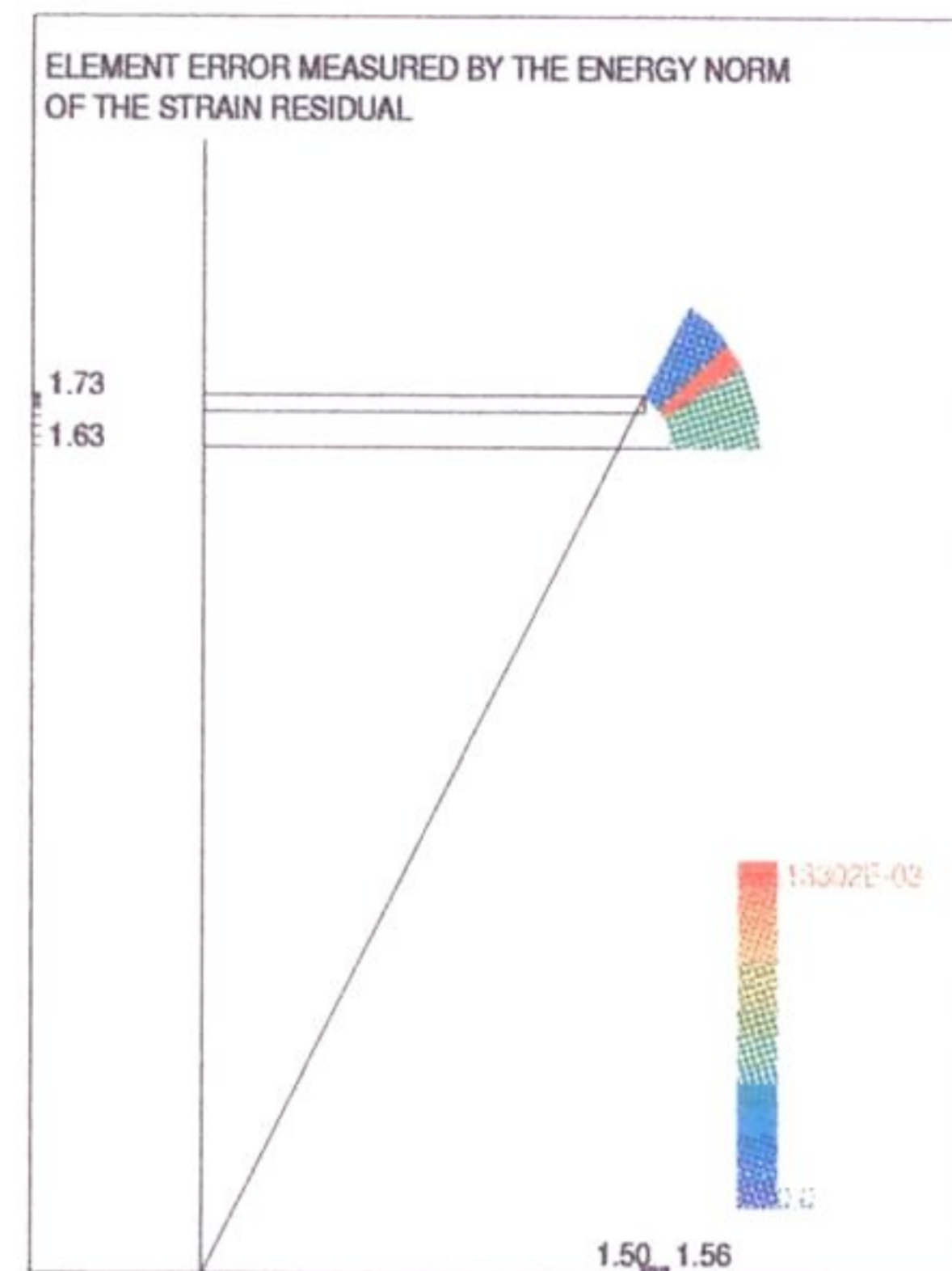
Na Tabela (5.1) estão listados os dados para os vários parâmetros calculados durante o refinamento uniforme da casca toroidal. Os valores usados para se comparar as normas $\|\mathbf{e}_h^e\|$ e $\|\hat{\mathbf{e}}_h\|$, para este caso, encontram-se na Tabela (5.2). As curvas correspondentes a estes dados estão traçadas no gráfico da Fig. (5.3). Observa-se que a norma do erro da solução melhorada, $\|\mathbf{e}_h^e\|$, assume valores bastante inferiores que a norma da própria solução $\|\hat{\mathbf{e}}_h\|$. Como consequência, o índice de efetividade deve estar próximo da unidade, o que pode ser constatado pelo gráfico da Fig. (5.4). Estes resultados comprovam a qualidade da norma $\|\bar{\mathbf{e}}_h\|$ na estimativa do erro da solução.

Malha	NN	h	$\ \hat{\epsilon}^2\ ^2$	$\ \hat{\epsilon}^1\ ^2$	$\ \bar{\mathbf{e}}_h\ ^2$	P_L/σ_y
0	4	0,04189	2,55279E-04	3,36434E-03	2,78320E-03	1,6933E-03
1	7	0,02094	2,95162E-04	9,75424E-04	6,00797E-04	1,6305E-03
2	13	0,01047	2,70684E-04	4,47047E-04	1,57140E-04	1,6306E-03
3	25	0,00524	2,82046E-04	3,25046E-04	3,81749E-05	1,6241E-03
4	49	0,00262	2,81971E-04	2,92720E-04	9,54454E-06	1,6241E-03

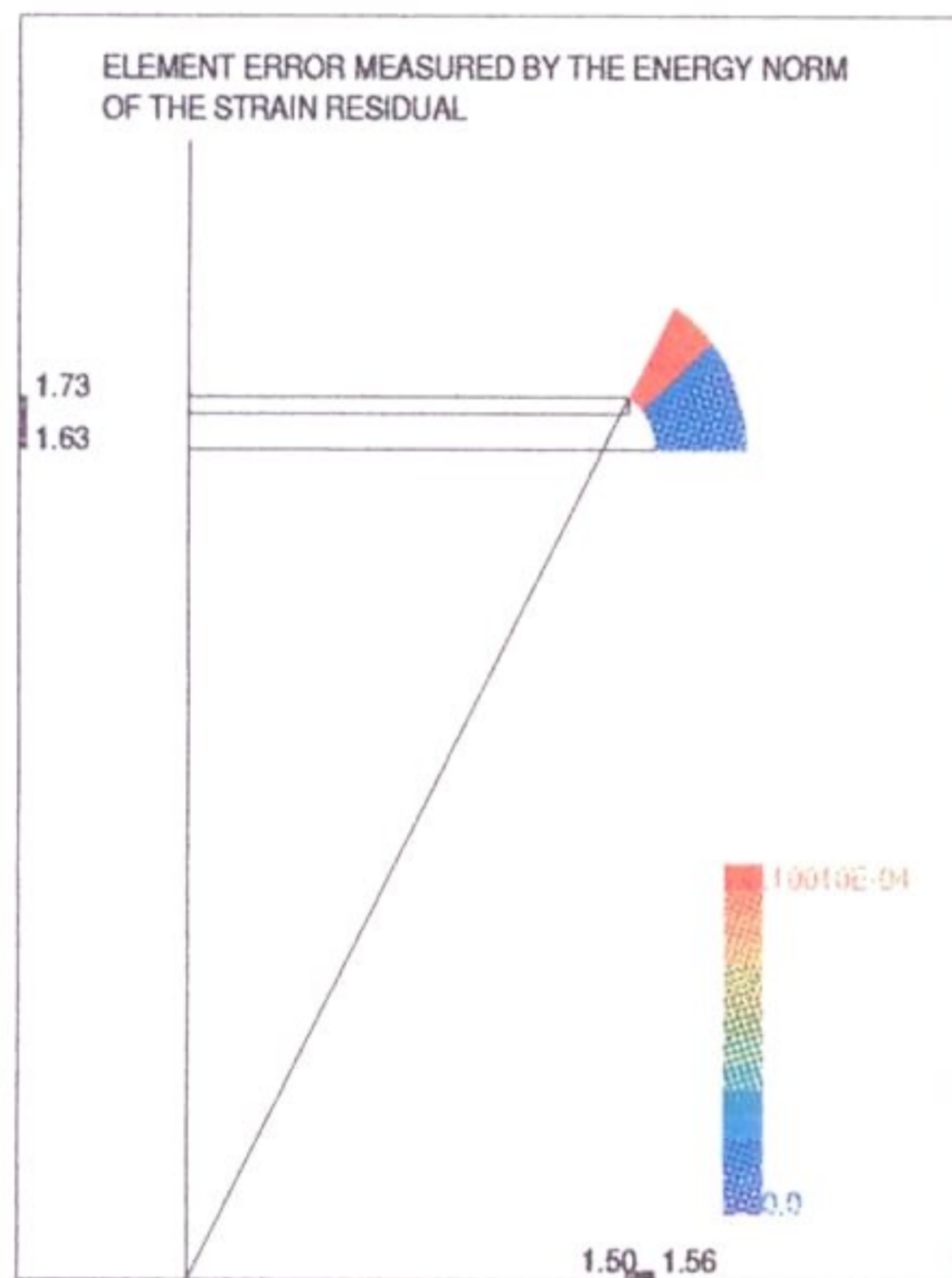
Tabela 5.1: Malhas refinadas uniformemente



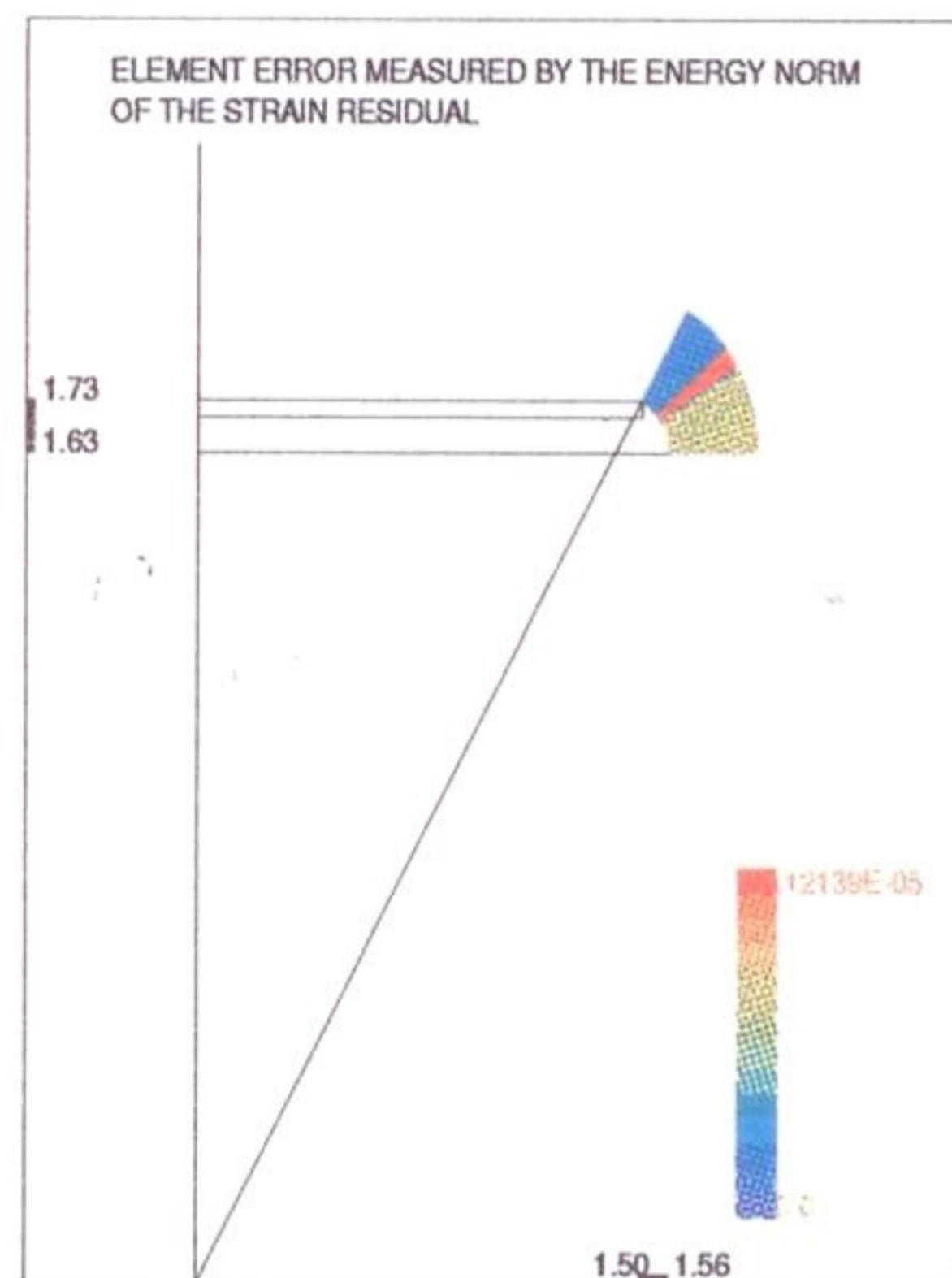
(a) Malha 0



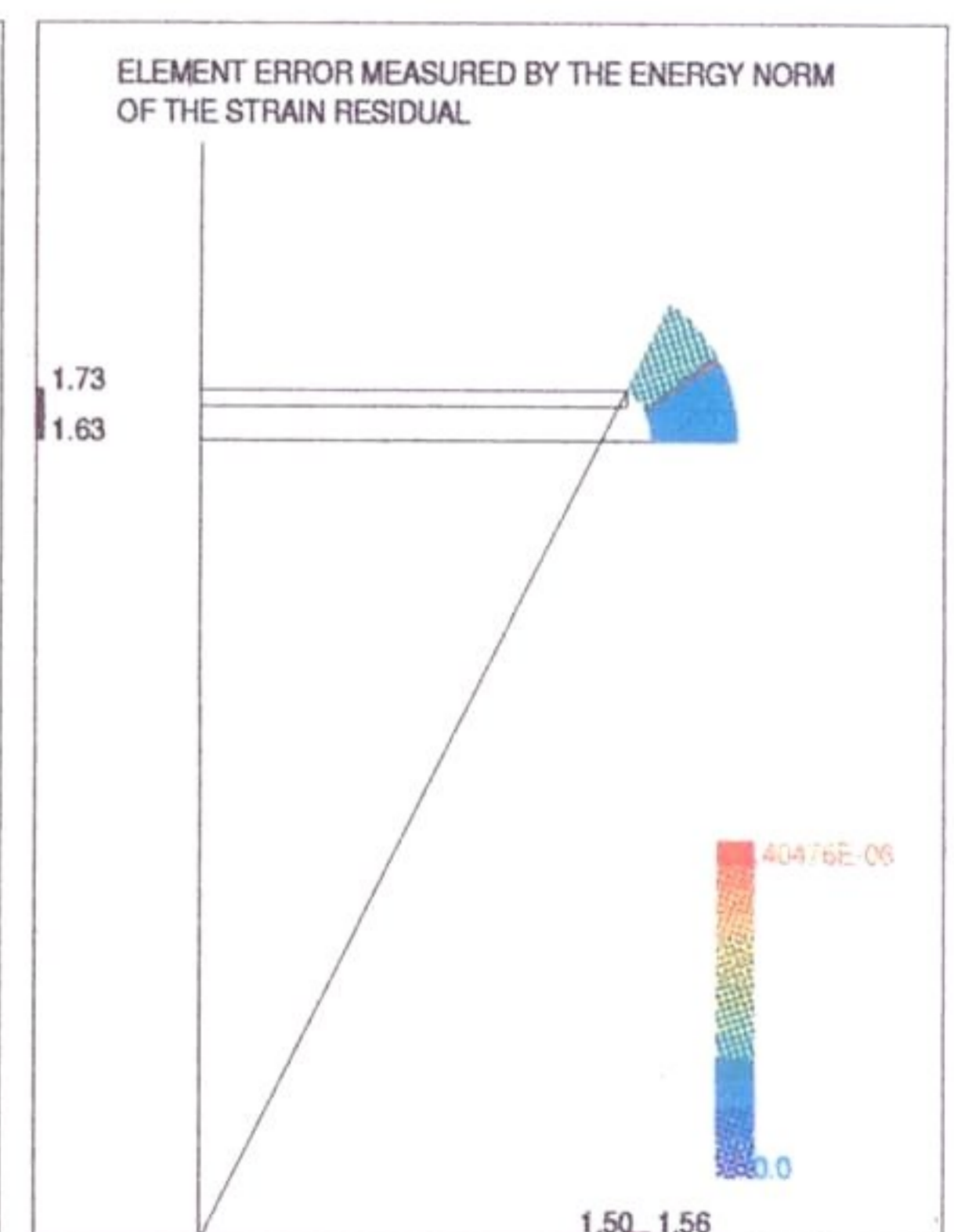
(b) Malha 1



(c) Malha 2



(d) Malha 3



(e) Malha 4

Figura 5.2: Distribuição da norma do erro para a Casca Toroidal -refinamento adaptativo

Malha	$\ e_h^e\ ^2$	$\ \hat{e}_h\ ^2$	θ	η_h
0	3,08472E-03	2,43397E-05	0,9499	67,29
1	6,95805E-04	1,55432E-05	0,9292	61,74
2	1,67428E-04	8,93411E-06	0,9688	51,00
3	4,54273E-05	2,42807E-06	0,9167	32,42
4	1,31017E-05	2,35286E-06	0,8535	17,77

Tabela 5.2: Malhas refinadas uniformemente - valores para o estudo da convergência

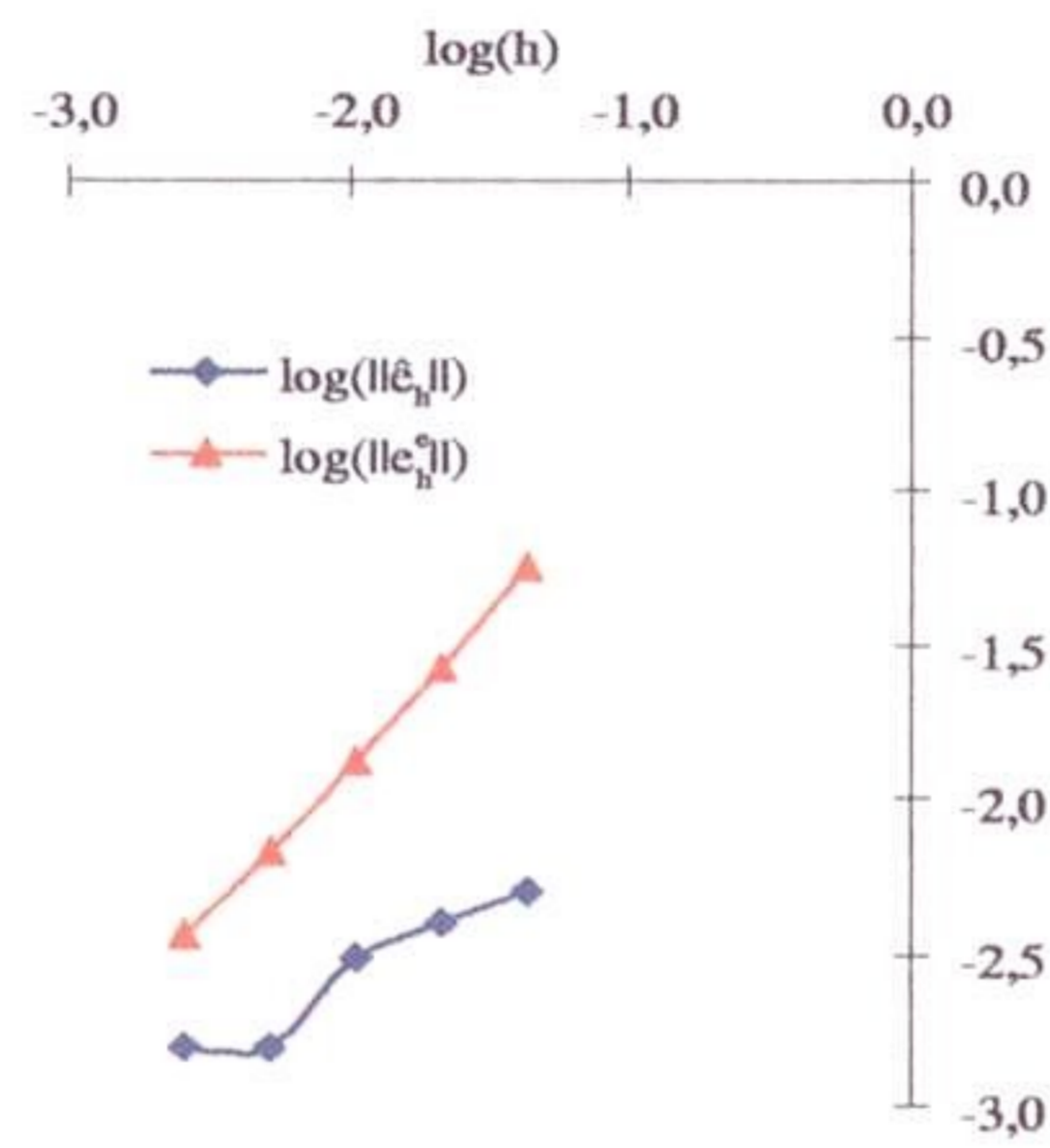


Figura 5.3: Gráfico da convergência das normas $\|\hat{e}_h\|$ e $\|e_h^e\|$

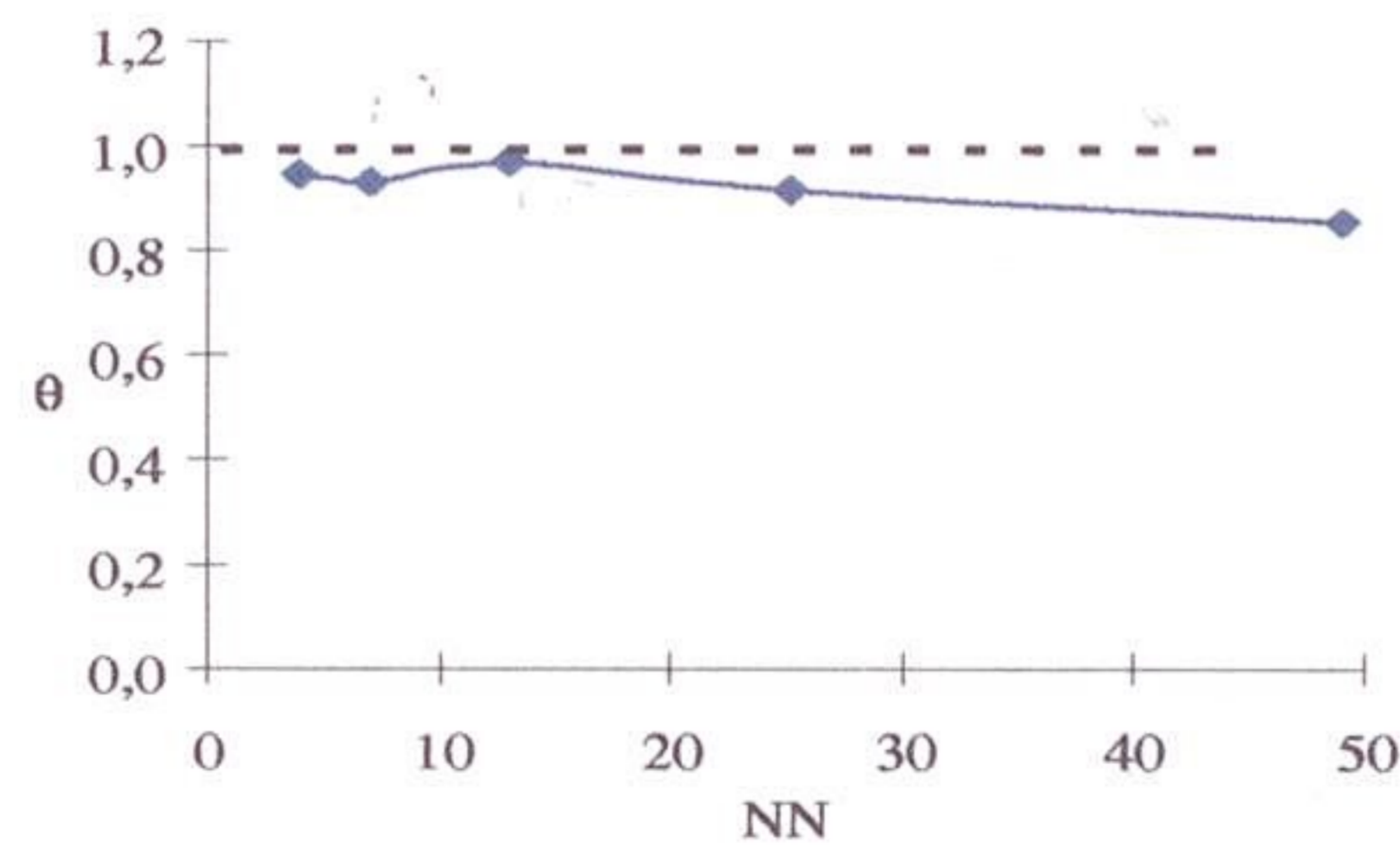


Figura 5.4: Gráfico da convergência do Índice de Efetividade

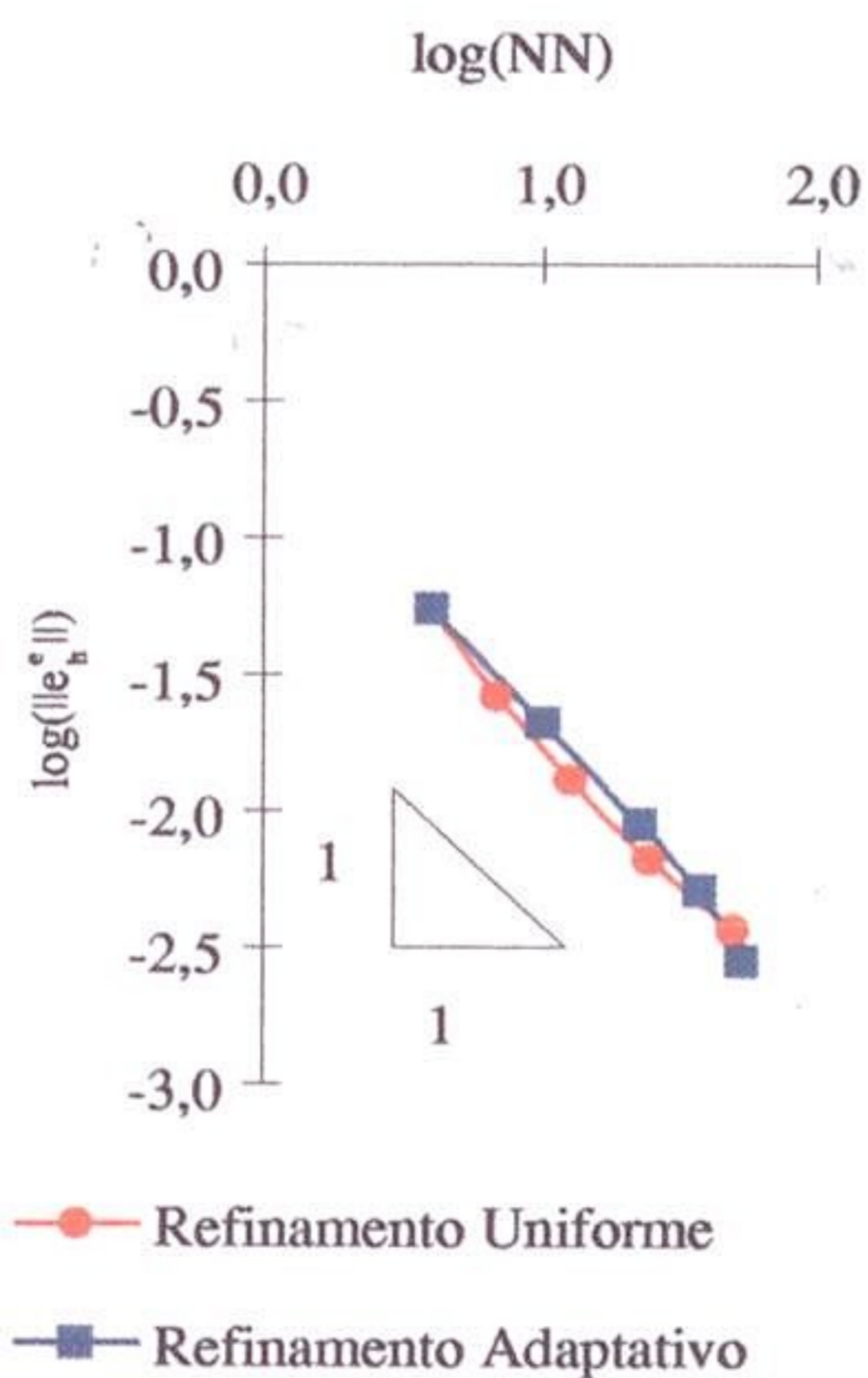
Os dados obtidos no processo adaptativo estão reunidos na Tabela (5.3). A comparação entre as duas seqüências de refinamento da norma do erro $\|e_h^e\|$ está ilustrada no gráfico da Fig. (5.5), traçado em função dos valores listados nas Tabelas (5.2) e (5.4). Neste caso ambos os refinamentos tiveram a mesma taxa de convergência.

Malha	NN	$\ \dot{\epsilon}^2\ ^2$	$\ \dot{\epsilon}^1\ ^2$	$\ \bar{e}_h\ ^2$	P_L/σ_y
0	4	2,55279E-04	3,36434E-03	2,78320E-03	1,6933E-03
1	10	2,94188E-04	7,23152E-04	3,73073E-04	1,6295E-03
2	23	2,84477E-04	3,57235E-04	6,51905E-05	1,6245E-03
3	38	2,84288E-04	3,05872E-04	1,88361E-05	1,6244E-03
4	54	2,79631E-04	2,87897E-04	7,31367E-06	1,6243E-03

Tabela 5.3: Malhas refinadas adaptativamente

Malha	$\ e_h^e\ ^2$	η_h
0	3,08472E-03	67,29
1	4,43534E-04	58,34
2	7,76163E-05	39,28
3	2,62538E-05	24,09
4	8,27816E-06	15,74

Tabela 5.4: Malhas refinadas adaptativamente - valores para o estudo da convergência

Figura 5.5: Gráfico da convergência da norma do erro $\|e_h^e\|$ para os refinamentos uniforme e adaptativo

5.5.2 Vaso Toro-esférico Padrão ASME Sujeito à Pressão Interna

A estrutura, cuja geometria está definida na Fig. (5.6(a)) corresponde à combinação de três elementos básicos, ou seja, as cascas cilíndrica, toroidal e esférica. Este é um tipo de vaso de pressão bastante comum, que de acordo com os parâmetros geométricos representa o vaso toro-esférico padrão ASME.

A solução e o mecanismo de colapso, para uma malha bastante refinada é mostrada na Fig. (5.6(b)). As duas malhas encontradas na Fig. (5.7) ilustram a distribuição do erro, que se torna quase homogênea após o refinamento adaptativo.

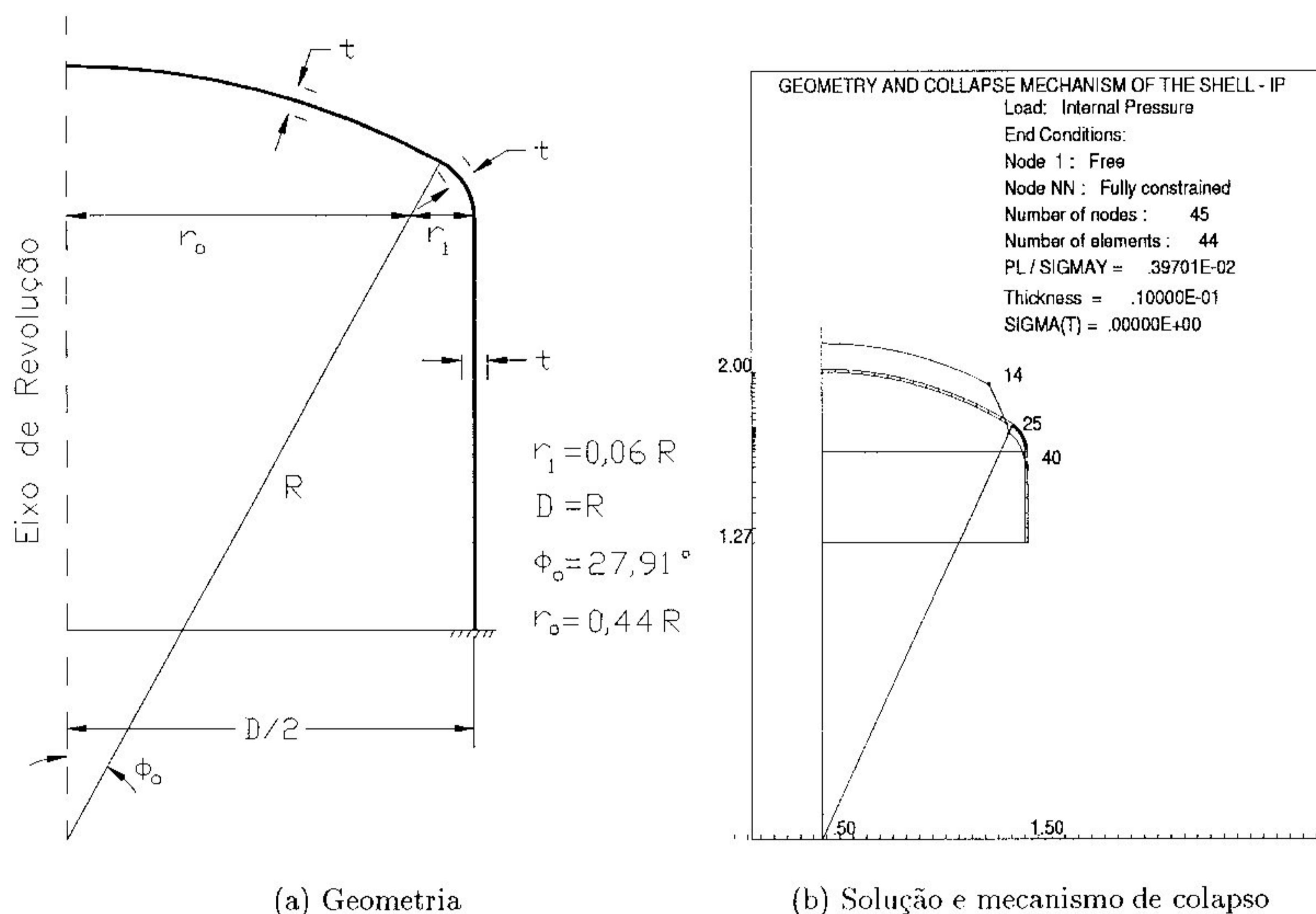


Figura 5.6: Vaso Toro-esférico Padrão ASME com espessura $t = 1\text{ cm}$ e $R = 2\text{ m}$

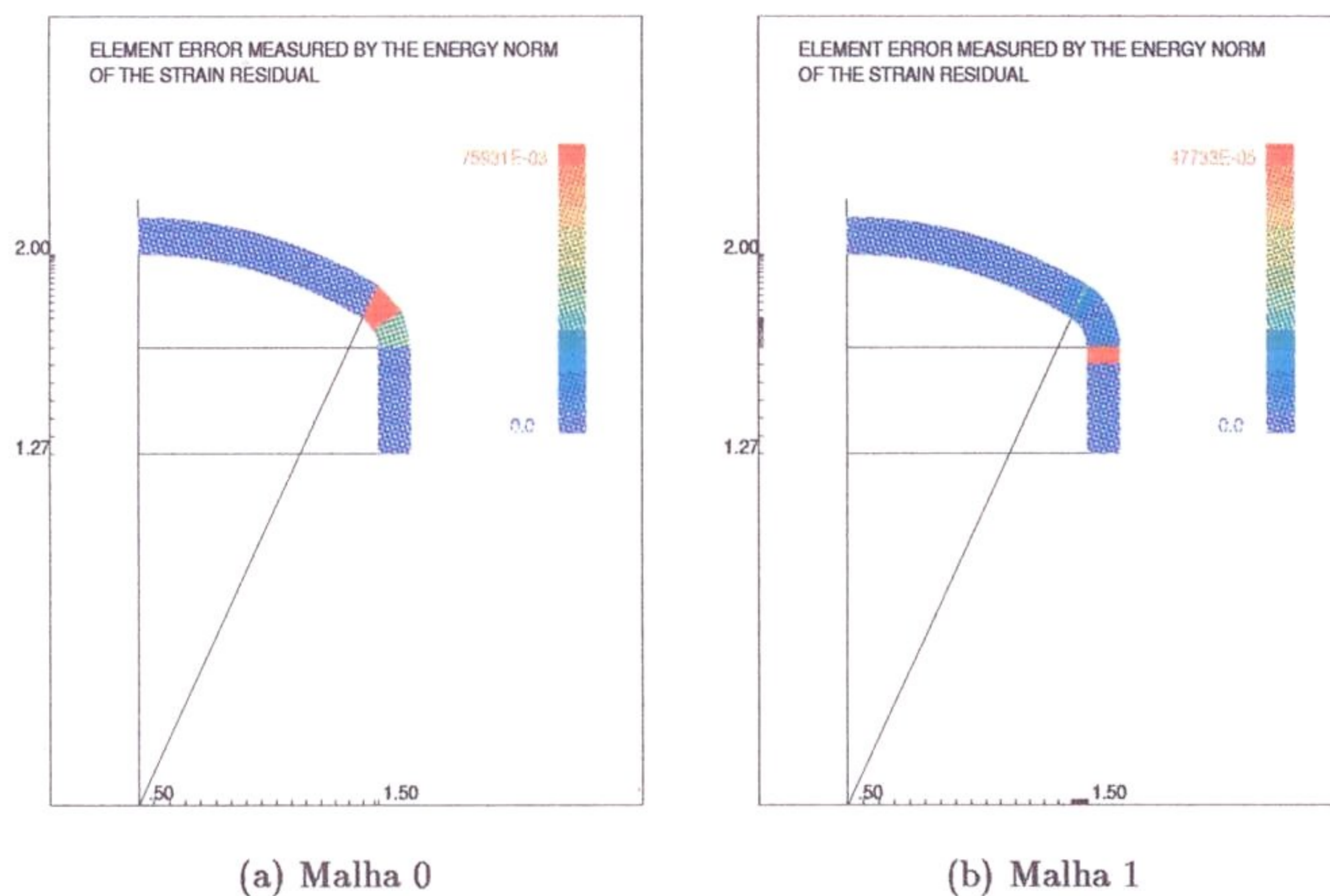


Figura 5.7: Distribuição da norma do erro para o Vaso Toro-esférico Padrão ASME - refinamento adaptativo

Nas Tabelas (5.5) e (5.7) estão os valores calculados para o vaso toro-esférico, das seqüências uniformes e adaptativas de malhas. Da mesma maneira que na casca toroidal, os dados da Tabela (5.6) são usados para traçar os gráficos das Figs. (5.8) e (5.9). Novamente é verificado que a norma do erro da solução melhorada, $\|\hat{\epsilon}_h\|$, está mais próxima de zero que a norma do erro da solução de cada malha, $\|e_h^e\|$, Fig. (5.8). Também o índice de efetividade está bem próximo da unidade para toda a seqüência uniforme de malhas, conforme mostra a Fig. (5.9).

Malha	NN	h	$\ \hat{\epsilon}^2\ ^2$	$\ \hat{\epsilon}^1\ ^2$	$\ \bar{e}_h\ ^2$	P_L/σ_y
0	24	0,06484	7,25658E-04	2,00310E-03	1,14208E-03	4,0384E-03
1	47	0,03242	6,76892E-04	9,17947E-04	2,21330E-04	3,9913E-03
2	93	0,01621	6,85653E-04	7,55168E-04	6,32845E-05	3,9784E-03

Tabela 5.5: Malhas refinadas uniformemente

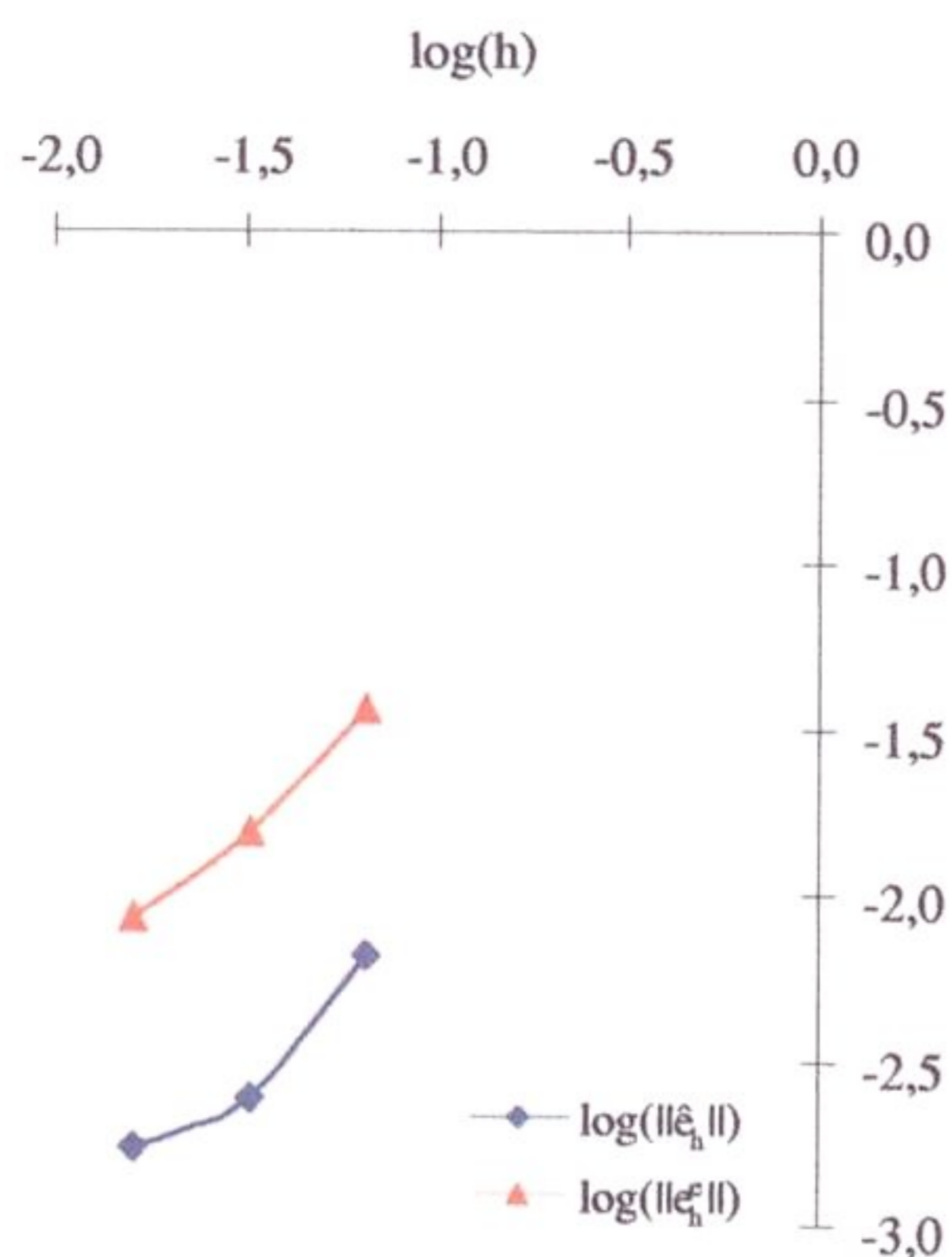


Figura 5.8: Gráfico da convergência das normas $\|\hat{e}_h\|$ e $\|e_h^e\|$

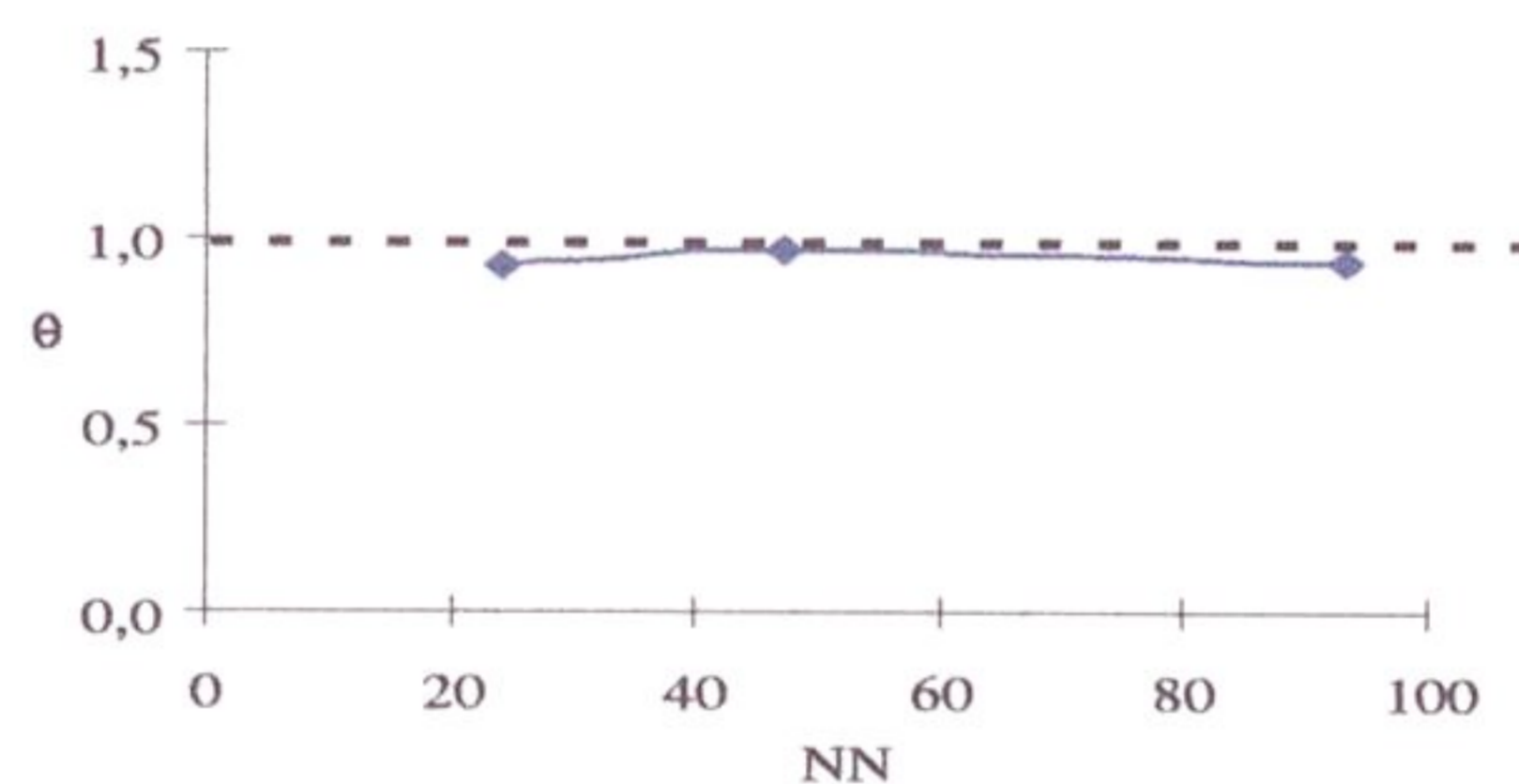


Figura 5.9: Gráfico da convergência do Índice de Efetividade

Malha	$\ e_h^e\ ^2$	$\ \hat{e}_h\ ^2$	θ	η_h
0	1,32037E-03	4,29216E-05	0,9300	60,26
1	2,35210E-04	5,84422E-06	0,9700	44,08
2	3,24319E-05	2,91678E-06	0,9347	27,81

Tabela 5.6: Malhas refinadas uniformemente - valores para o estudo da convergência

Finalmente, uma excelente convergência produzida pela estratégia adaptativa se comparada ao refinamento uniforme, pode ser verificada através do gráfico da Fig. (5.10).

Malha	NN	$\ \hat{\epsilon}^2\ ^2$	$\ \hat{\epsilon}^1\ ^2$	$\ \hat{e}_h\ ^2$	P_L/σ_y
0	24	7,25658E-04	2,00310E-03	1,14208E-03	4,0384E-03
1	42	6,78501E-04	6,79820E-04	1,58376E-05	3,9701E-04

Tabela 5.7: Malhas refinadas adaptativamente

Malha	$\ e_h^e\ ^2$	η_o
0	1,32037E-03	60,26
1	2,91606E-06	15,09

Tabela 5.8: Malhas refinadas adaptativamente - valores para o estudo da convergência

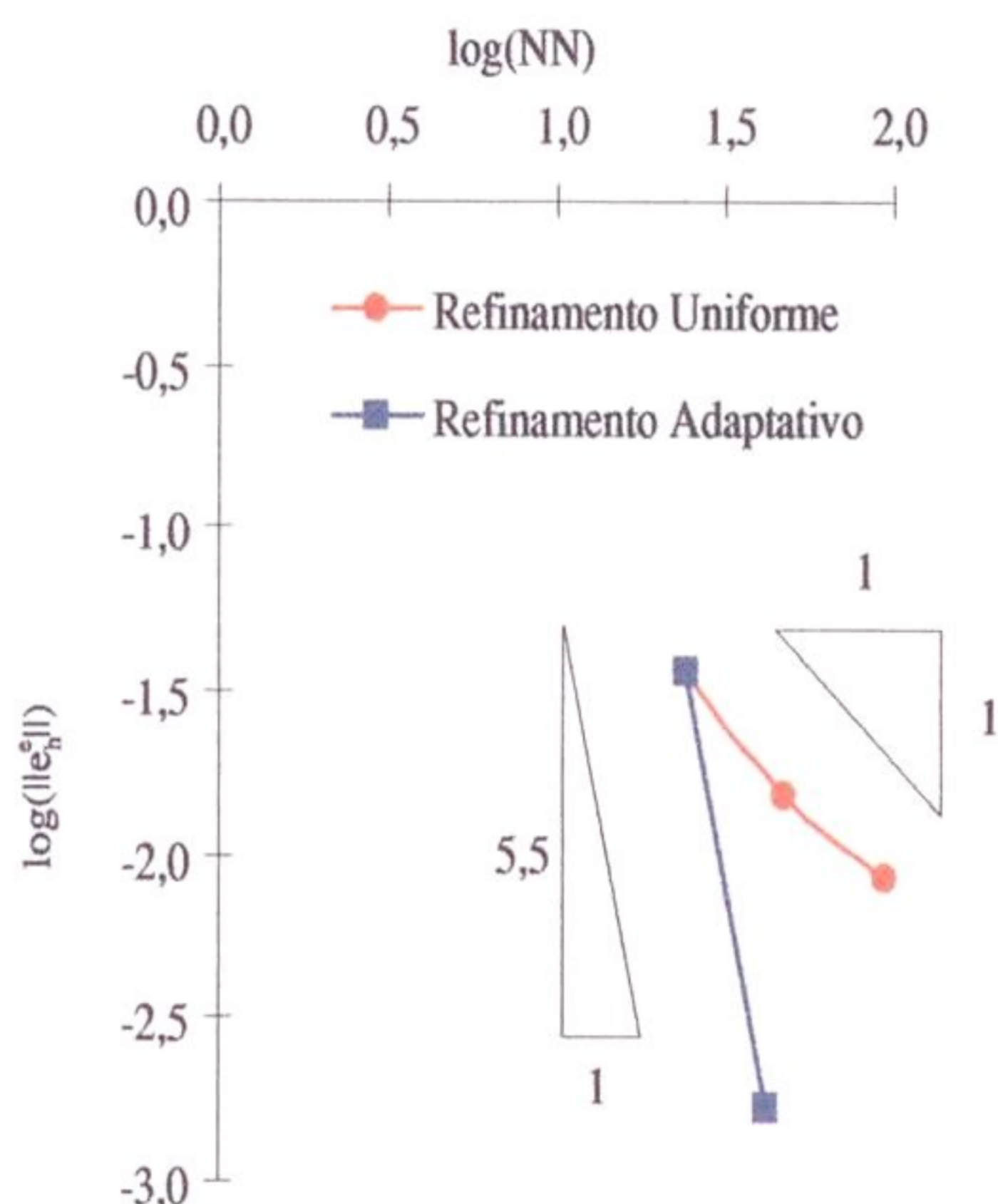
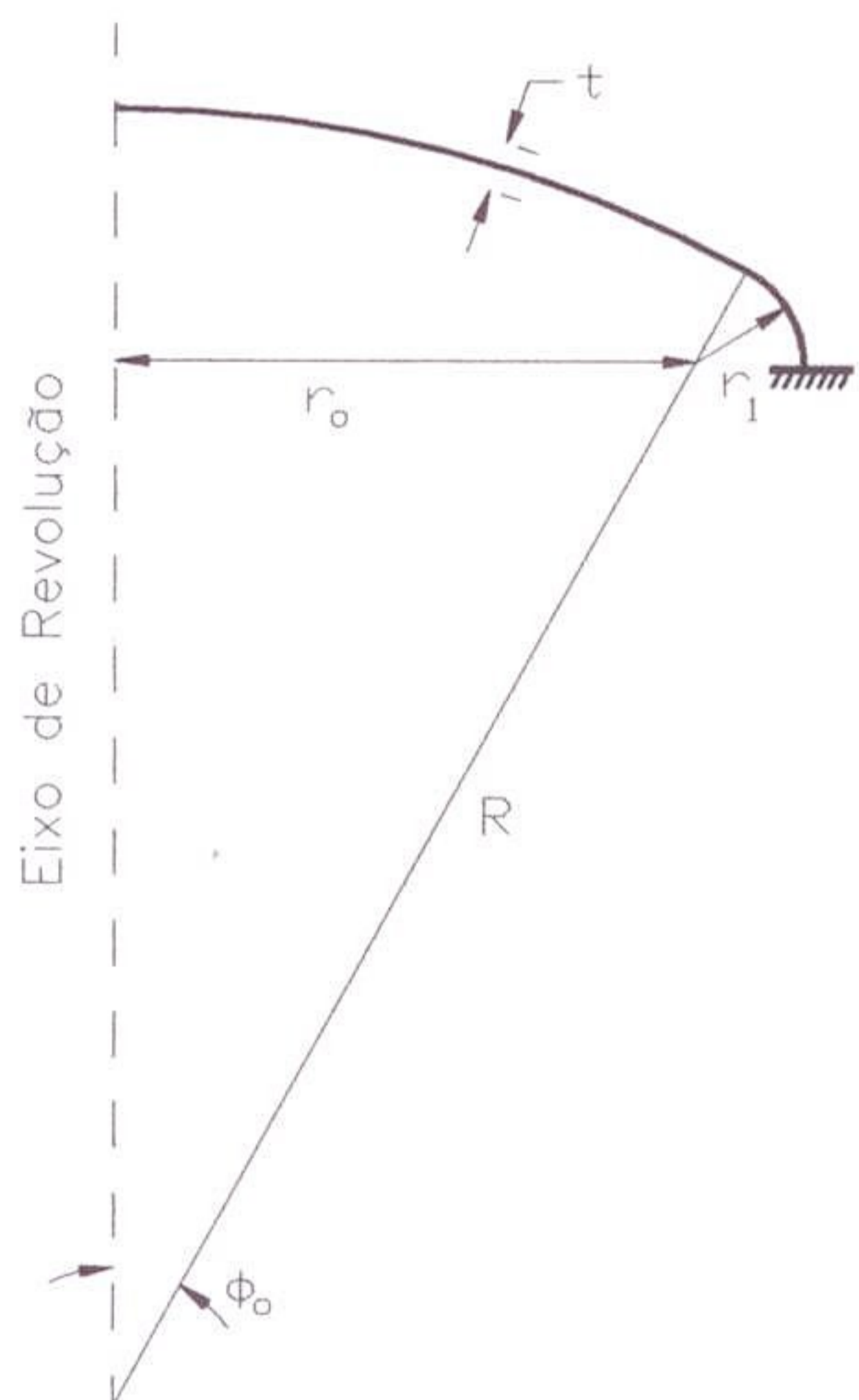


Figura 5.10: Gráfico da convergência da norma do erro $\|e_h^e\|$ para os refinamentos uniforme e adaptativo

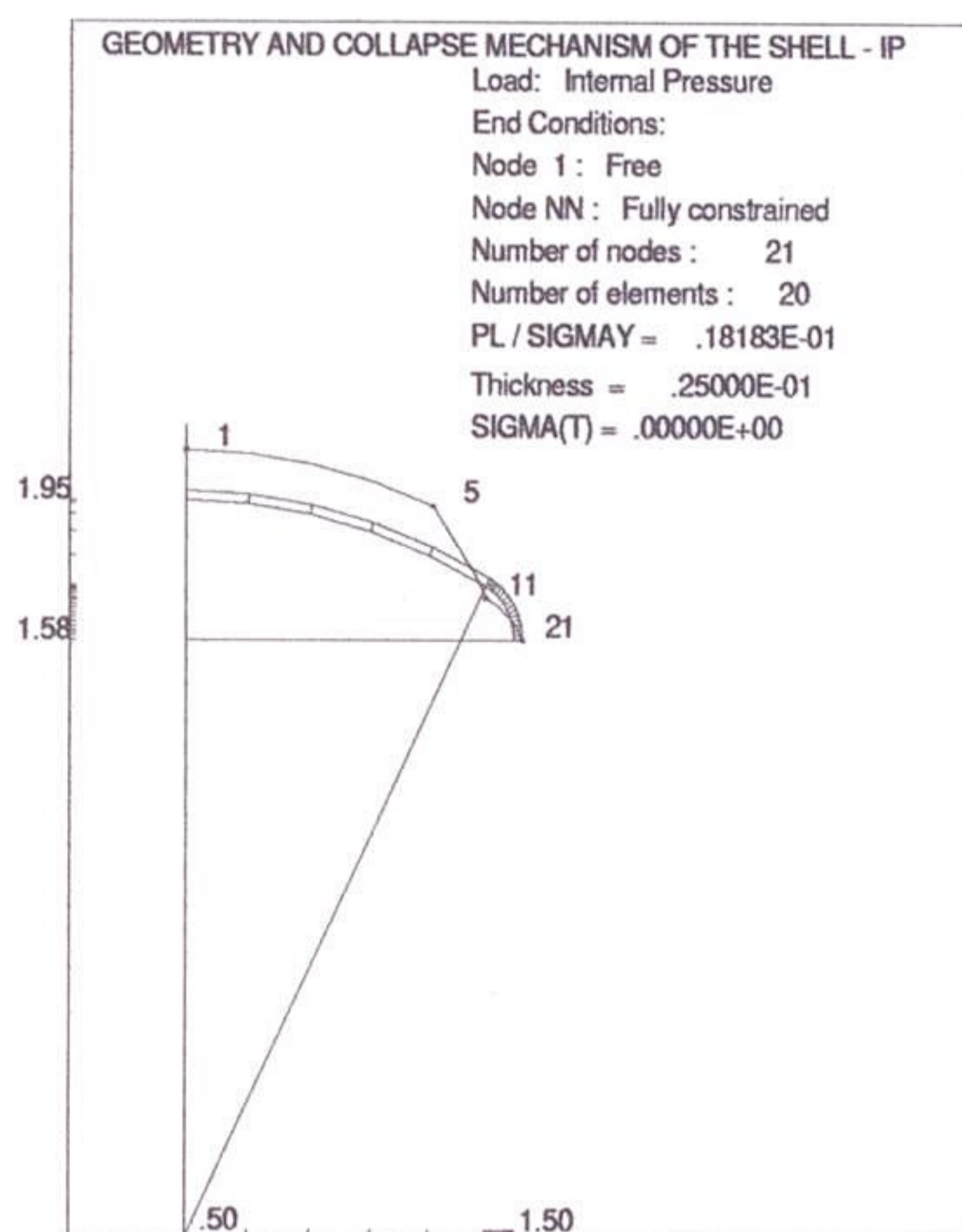
5.5.3 Topo Toro-esférico Sujeito à Pressão Interna

A análise, agora, refere-se a uma tampa toro-esférica engastada, cuja geometria, definida na Fig. (5.11(a)), não segue o padrão ASME. Na Fig. (5.11(b)) estão definidos o mecanismo de colapso e a solução para a malha, obtida pelo refinamento adaptativo, e cujos parâmetros serão usados na definição das normas $\|e_h^e\|$ e $\|\hat{e}_h\|$.

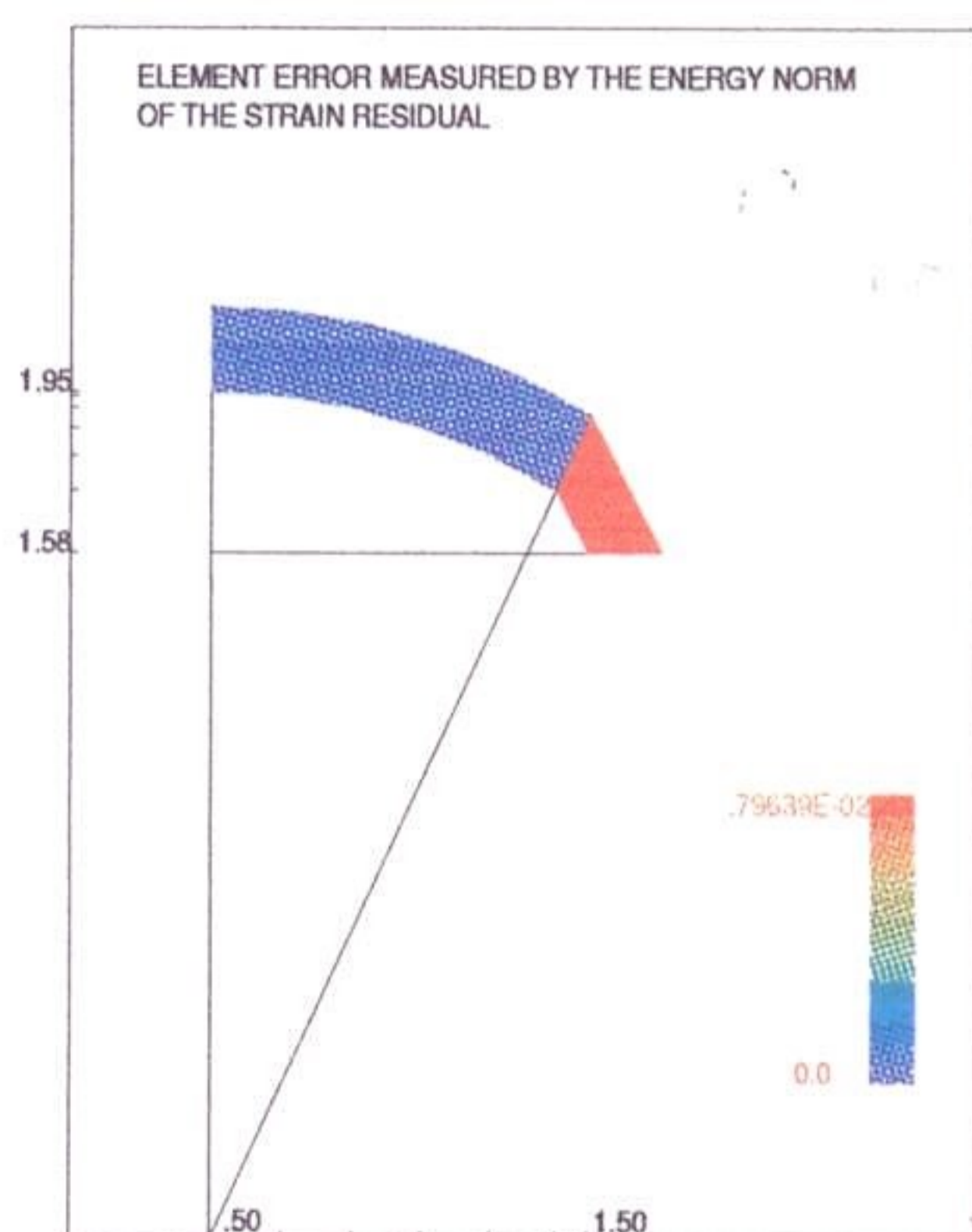
O procedimento de análise é o mesmo usado nos exemplos anteriores. Os valores extraídos de cada malha, para as seqüências de refinamento uniforme e adaptativo, encontram-se nas Tabelas (5.9) e (5.11). Através do gráfico (5.12), traçado a partir da Tabela (5.10), verifica-se a eficiência da solução melhorada \hat{e}_e^2 , cuja norma de erro se encontra bem próxima de zero, mesmo para a malha mais grossa. Este resultado pode também ser constatado pelo gráfico da Fig. (5.13), que mostra o índice de efetividade, θ , próximo da unidade.



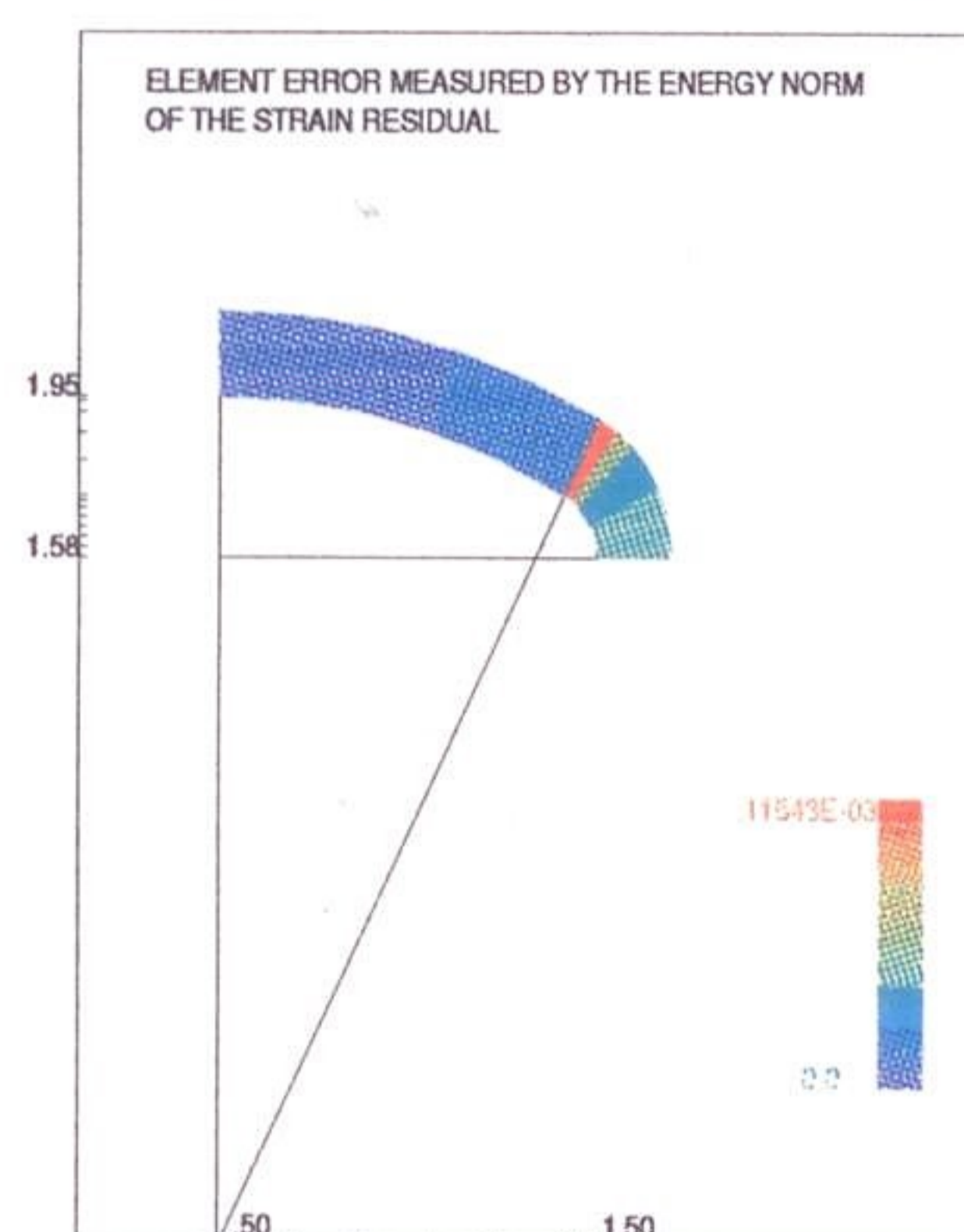
(a) Geometria



(b) Solução e mecanismo de colapso



(c) Distribuição da norma de energia do erro para a Malha 0



(d) Distribuição da norma de energia do erro para a Malha 1

Figura 5.11: Topo toro-esférico de espessura $t = 2,5\text{cm}$ e $R = 1,95\text{m}$

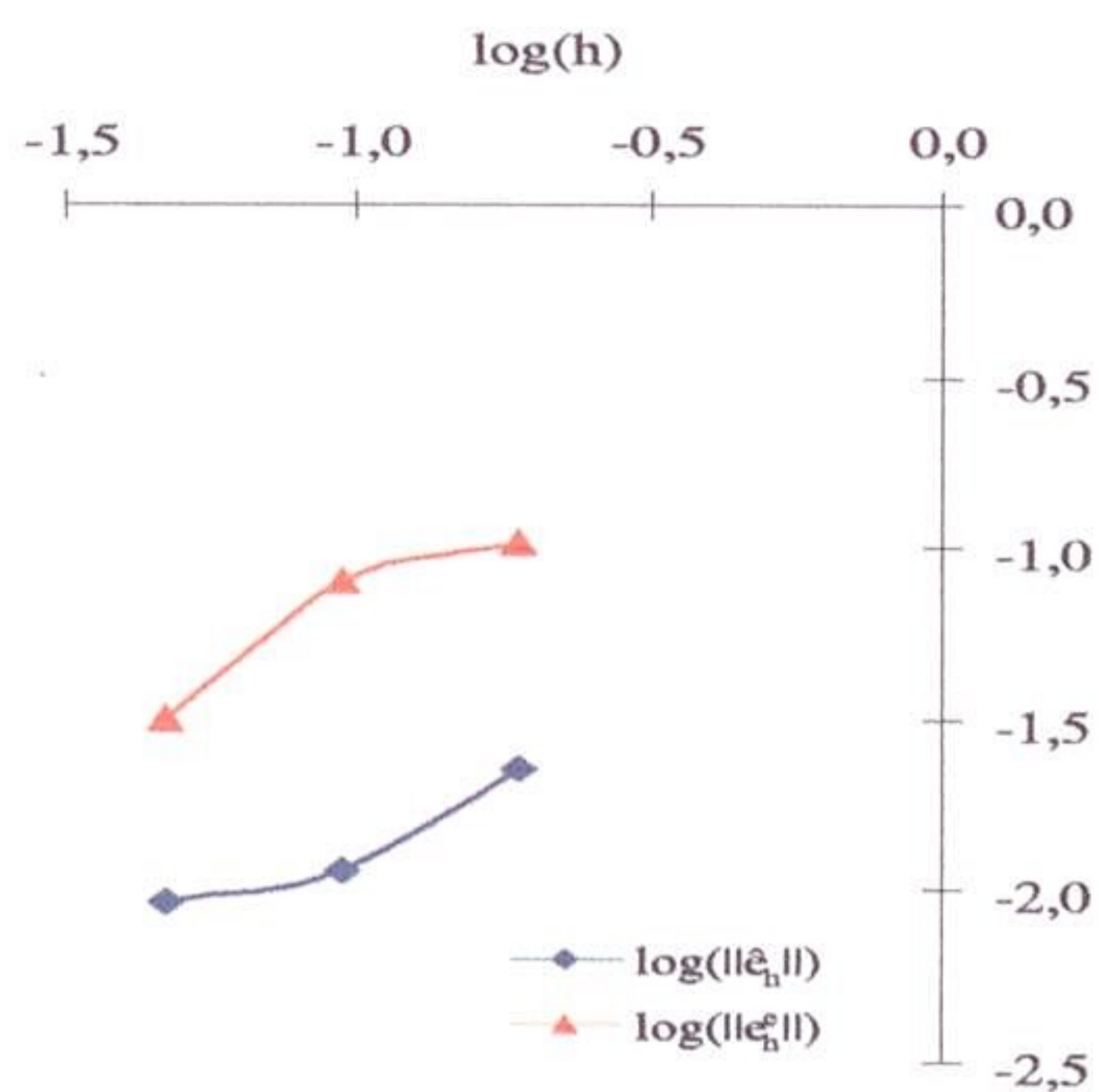


Figura 5.12: Gráfico da convergência das normas $\|\hat{e}_h\|$ e $\|e_h^e\|$

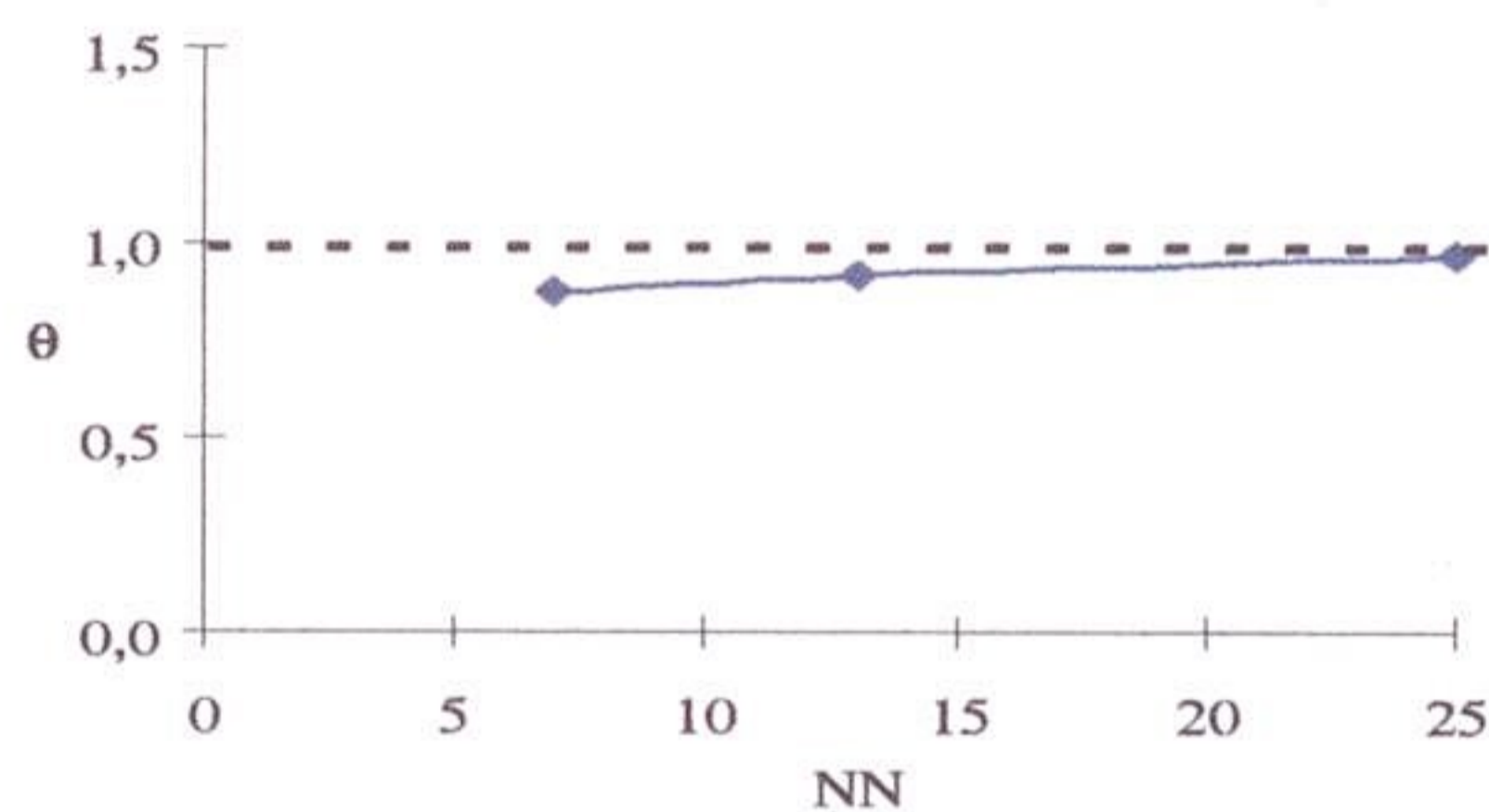


Figura 5.13: Gráfico da convergência do Índice de Efetividade

Malha	NN	h	$\ \dot{\epsilon}^2\ ^2$	$\ \dot{\epsilon}^1\ ^2$	$\ \bar{e}_h\ ^2$	P_L/σ_y
0	7	0,18781	3,37336E-03	1,33029E-02	8,01276E-03	1,9809E-02
1	13	0,09391	2,73370E-03	9,14957E-03	5,28944E-03	1,9355E-02
2	25	0,04695	2,78172E-03	3,87144E-03	9,35737E-04	1,8215E-02

Tabela 5.9: Malhas refinadas uniformemente

Malha	$\ e_h^e\ ^2$	$\ \hat{e}_h\ ^2$	θ	η_h
0	1,04370E-02	5,07445E-04	0,8762	61,31
1	6,28366E-03	1,32213E-04	0,9175	60,53
2	1,00553E-03	8,41872E-05	0,9647	44,12

Tabela 5.10: Malhas refinadas uniformemente - valores para o estudo da convergência

Para a comparação entre os refinamentos uniforme e adaptativo, produziu-se o gráfico da Fig. (5.14), a partir dos dados das Tabelas (5.10) e (5.12). Observa-se que a estratégia adaptativa apresentou uma taxa de convergência bem

maior que a correspondente ao refinamento uniforme.

Malha	NN	$\ \hat{\epsilon}^2\ ^2$	$\ \hat{\epsilon}^1\ ^2$	$\ \bar{e}_h\ ^2$	P_L/σ_y
0	7	3,37336E-03	1,33029E-02	8,01276E-03	1,9809E-02
1	13	2,70571E-03	3,04011E-03	3,88728E-04	1,8170E-03

Tabela 5.11: Malhas refinadas adaptativamente

Malha	$\ e_h^e\ ^2$	η_h
0	1,04370E-02	61,31
1	1,74202E-04	33,67

Tabela 5.12: Malhas refinadas adaptativamente - valores para o estudo da convergência

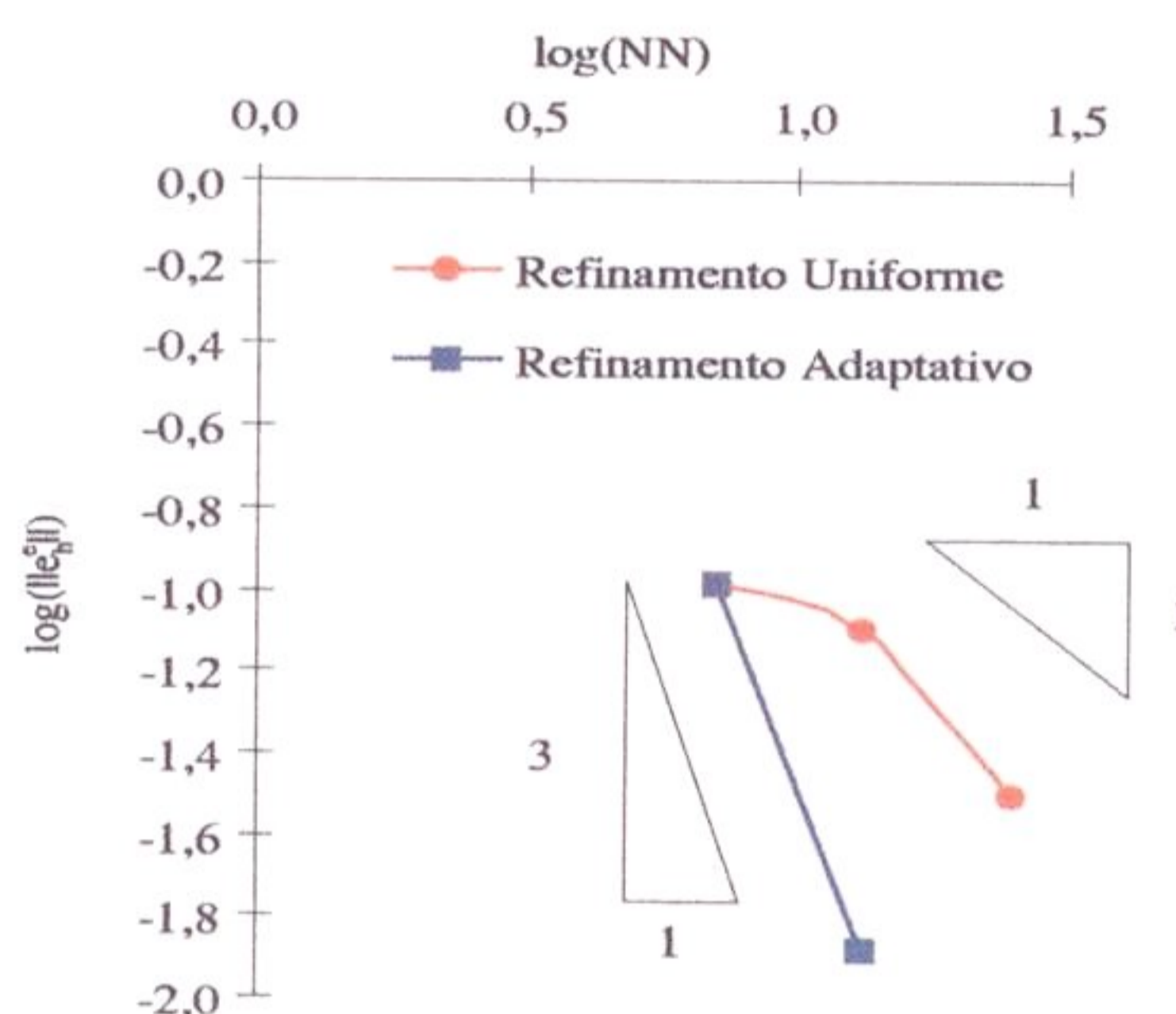


Figura 5.14: Gráfico da convergência da norma do erro $\|e_h^e\|$ para os refinamentos uniforme e adaptativo

5.5.4 Considerações Finais

Em cada caso, duas etapas de resultados foram apresentadas. Na primeira, a eficiência do estimador foi testada, em função dos valores obtidos para uma seqüência de malhas refinadas uniformemente. Para este fim, os gráficos das Figs. (5.3), (5.8) e (5.12) foram produzidos, possibilitando a comparação entre as taxas de convergência da norma de energia global do erro exato, $\|e_h^e\|$ e da norma da solução melhorada $\|\hat{e}_h\|$.

Algumas observações sobre o comportamento do índice de efetividade ainda precisam ser feitas. Analisando-se os gráficos das Figs. (5.4), (5.9) e (5.13),

observa-se que θ mantém-se próximo da unidade, mesmo para malhas grosseiras, indicando uma boa qualidade do estimador. O campo de deformação $\dot{\epsilon}^2$ praticamente coincide com a solução da malha mais refinada (utilizada como solução exata), o que também reforça a precisão da técnica usada. Este fato pode ser verificado pelos gráficos das Figs. (5.3), (5.8) e (5.12), observando-se que as normas de $\|\hat{e}_h\|$ assumem valores bem abaixo do que aqueles correspondentes às normas $\|e_h^e\|$.

Na segunda etapa, pretendeu-se comparar o refinamento adaptativo com o uniforme, em função do número de nós. Os resultados, apresentados nos gráficos das Figs. (5.10) e (5.14), conduzem à observação da melhor eficiência do processo adaptativo. Apenas na Casca Toroidal, gráfico da Fig. (5.5), obtém-se a mesma convergência entre o refinamento uniforme e o adaptativo. Neste caso, alteração no mecanismo ao longo da seqüência de malhas se deve apenas ao deslocamento da rótula intermediária. As demais rótulas plásticas estão fixas nos apoios. Em vista disso, a deformação plástica ocorrerá em toda a casca. O refinamento adaptativo, portanto, dá origem a malhas semelhantes às obtidas pelo refinamento uniforme, determinando a coincidência entre as taxas de convergência de ambos os refinamentos. Nos vasos toro-esféricos, seja fora ou dentro do Padrão ASME, gráficos das Figs. (5.10) e (5.14), constatou-se uma convergência na ordem de **5,5x1** e **3x1**, respectivamente, superior às taxas obtidas para o refinamento uniforme, em torno de **1x1**.

Em vista dos resultados obtidos e das conclusões deles advindas pode-se medir a qualidade da implementação realizada. Bastante cuidado deve, entretanto, ser tomado na comparação com os trabalhos aqui citados como referência, tais como [Zienkiewicz e Zhu, 1987], [Zienkiewicz e Zhu, 1992a], [Zienkiewicz e Zhu, 1992b], [Zienkiewicz e Taylor, 1989a] e [Zienkiewicz e Taylor, 1989b]. O que se tentou fazer foi uma analogia à técnica por eles desenvolvida, em um contexto, porém, bastante diferente, quanto ao tipo de análise. Neles o Método dos Elementos Finitos é utilizado na solução de problemas modelados através de equações diferenciais. O meio contínuo é discretizado em subdomínios (elementos) e seu comportamento passa a ser descrito por um número finito de parâmetros. Usa-se, então, conceitos do cálculo variacional para se construir uma solução aproximada sobre o campo de elementos finitos, [Becker et al., 1981]. Já no presente trabalho o problema origina-se do teorema cinemático da análise limite. Aqui também, o meio contínuo é discretizado

em elementos, e parâmetros são criados para definir o comportamento da estrutura. Diferentemente dos problemas de elementos finitos padrão, não se chega a um sistema de equações mas num problema de otimização, resolvido pela programação linear. Esse fato explica alguns resultados inesperados em uma primeira análise, como a pequena variação da carga limite entre as seqüências de malhas, se comparada à norma do erro estimado, $\|\bar{e}_h\|$, que apresenta uma variação bem maior. Para explicar este fenômeno deve-se enveredar pelos fatores responsáveis pelo erro da solução, [Duarte, 1991]:

- Erro da discretização, que decresce à medida que se refina a malha ou se aumenta a ordem do polinômio de interpolação. Este erro é decorrente da divisão do domínio em elementos finitos e do tipo de função de interpolação escolhida.
- Erro da modelagem matemática, conseqüência das simplificações realizadas na geometria e material do sistema físico real.
- Erro de arredondamento, resultado da limitação imposta pela representação de números reais pelo computador.

Além desses fatores, ainda deve ser incluído:

- Erro na determinação do mecanismo em função da otimização.

Este último depende basicamente da posição dos nós, já que constituem as únicas opções de formação de rótula plástica. É o que ocorre na casca toroidal, Tabela (5.1). Da malha 0 à 1 e 2 à 3 há uma alteração na posição das rótulas plásticas, indicando a redução do erro em função do refinamento realizado. Tal redução se deve à mudança do mecanismo e à discretização da malha. Já entre as malhas 1 e 2, 3 e 4 praticamente não há variação no mecanismo de colapso. A alteração da carga limite deve-se apenas a questões de precisão numérica. Nesses casos, a aproximação entre as duas formulações para o campo de taxas de deformação é resultado somente da redução no tamanho dos elementos. Tal erro sofre, porém, uma limitação imposta pela técnica usada. Na tentativa de se obter uma relação consistente entre $\dot{\epsilon}^1$ e $\dot{\epsilon}^2$ foram deduzidas na Seção (3.4.3) as Integrais (3.45) e (3.46),

estabelecendo-se que $\dot{\epsilon}^1$ e $\dot{\epsilon}^2$ devem se aproximar pela média na direção meridional enquanto que, na direção circunferencial, esta aproximação se dá de uma maneira muito mais forte. A explicação para isso encontra-se na matriz \mathbf{B} , Equação (3.8), que induz no campo $\dot{\epsilon}^1$ uma descontinuidade na direção meridional. Esse fato impede sua aproximação do campo $\dot{\epsilon}^2$, que é contínuo nas duas direções. Logo, nas primeiras malhas, onde não se obteve ainda o mecanismo ideal, a norma do erro recebe a contribuição da diferença dos campos de taxa de deformação, nas duas direções. Com a convergência da solução, apenas a direção meridional continua contribuindo com o erro. Nas Figs. (5.15(a)) e (5.15(b)), tem-se a plotagem dos valores que os campos de taxa de deformação assumem ao longo de cada elemento, para a malha 2, da casca toroidal. A coincidência entre os dois campos na direção circunferencial corresponde às condições impostas pela relação de consistência (3.33), já discutidas na Seção (5.3). O mesmo não acontece na direção meridional, onde o refinamento não produz alterações do valor da carga limite, mas ainda indica a existência de erro. Nesse caso, a condição imposta é de que o resíduo entre os campos de deformação seja zero, apenas na média, como mostra a Fig. (5.15(b)), para todo o domínio.

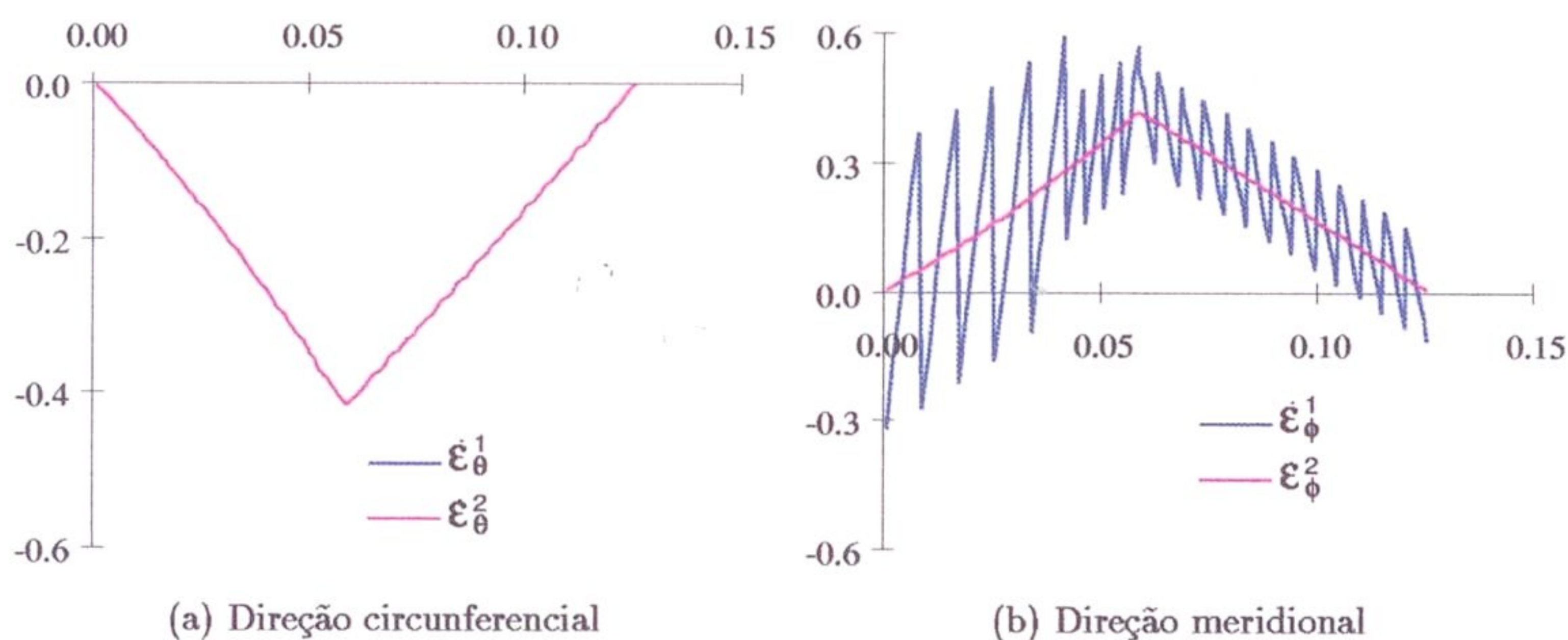


Figura 5.15: Campo das taxas de deformação

Capítulo 6

Desenvolvimento de um Novo Elemento e do seu Campo de Deslocamentos

6.1 Introdução

A definição de um modelo físico para a análise de um problema de engenharia é sempre uma tarefa árdua. A busca de uma lei, que descreva realisticamente o fenômeno em estudo, deve sempre estar atenta ao grau de complexidade que tal avanço representa. A viabilidade de determinada formulação depende de sua capacidade de equilibrar o realismo com a simplicidade do modelo. Dentro desta filosofia, diversos trabalhos, na década de 50, procuraram estabelecer um critério de escoamento para os problemas de cascas axi-simétricas. Um levantamento de alguns dos principais estudos realizados para este fim já foi mostrado na Seção (2.8.2), sendo desnecessário repeti-lo. O objetivo deste capítulo é apresentar uma nova e mais completa superfície de escoamento, obtida a partir da linearização da superfície exata desenvolvida em [Onat, 1955], para cascas cilíndricas. Sua utilização permite a consideração da variação de curvatura, nas regiões situadas entre as rótulas plásticas, sendo aplicável a cascas axi-simétricas genéricas. Para tal, foi necessário desenvolver também um novo elemento de casca cujos campos, para as taxas de desloca-

mento e deformação, fossem compatíveis com essa nova superfície. A implementação dessa formulação através da técnica desenvolvida em [Franco, 1987] possibilita a obtenção de um mecanismo mais preciso e, conseqüentemente, conduz a soluções mais próximas da exata.

6.2 Prisma Hexagonal

Como já discutido anteriormente, a adoção do prisma hexagonal implica na divisão do elemento de casca em volumes, onde a flexão e o comportamento de membrana ocorrem separadamente. Conseqüentemente, a superfície de escoamento se reduz ao Critério de Tresca nas regiões localizadas entre as rótulas plásticas. É este o critério adotado na técnica de elementos finitos descrita no Capítulo (3). A suposição de curvatura nula produz estimativas superiores para a análise limite e de “Shakedown”, uma vez que a energia dissipada pela mudança de curvatura dentro do elemento, durante a deformação plástica, não é considerada, [Franco, 1993].

Na próxima seção através da análise realizada em [Drucker, 1953] é possível constatar as conseqüências destas simplificações.

6.3 Superfície de Escoamento de Drucker

Em [Drucker, 1953] uma superfície de escoamento, baseada no Critério de Tresca, foi desenvolvida para o caso de tubos cilíndricos de comprimento infinito, sem carga axial. A ausência de forças axiais permite a obtenção da superfície, em duas dimensões, em função dos esforços normal e de flexão nas direções circunferencial e meridional, respectivamente. Na Fig. (6.1) a superfície exata, para esta hipótese de carregamento, está representada em linha cheia. As demais superfícies, em linha tracejada, definem simplificações também utilizadas. Na prática, um carregamento capaz de gerar esse estado de solicitação no elemento é denominado anel de carga, o qual produz esforço normal circunferencial e de flexão meridional.

Adotando o retângulo circunscrito como critério de escoamento, Drucker

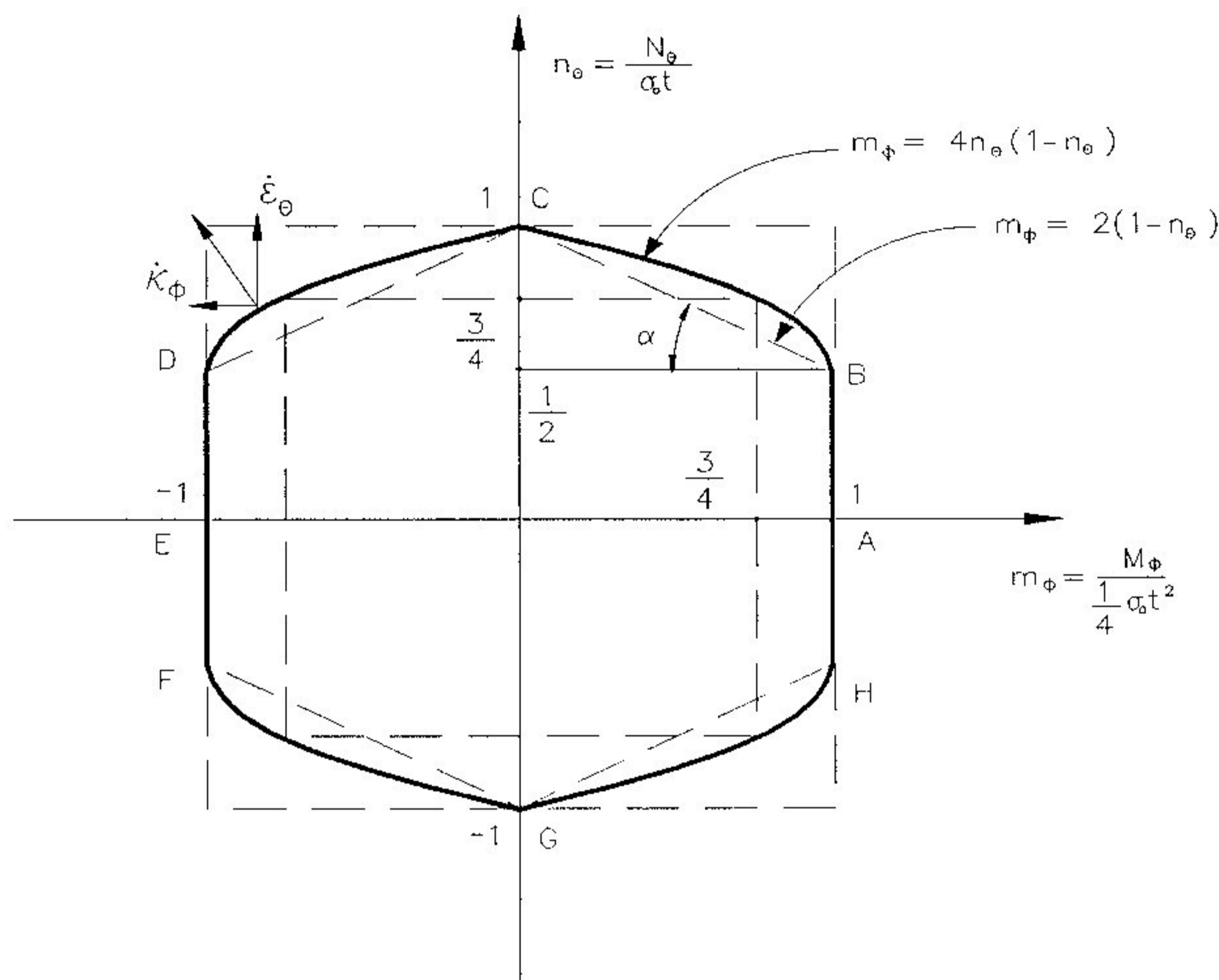


Figura 6.1: Superfície de Escoamento de Drucker para uma casca cilíndrica sem força axial aplica os teoremas do limite superior e inferior da análise limite e obtém a mesma expressão para a carga de colapso anular:

$$\frac{P_L}{\sigma_0} = 2,0 \frac{t}{r} \sqrt{rt} \quad (6.1)$$

sendo r e t o raio e a espessura da parede do tubo cilíndrico.

O mecanismo de colapso utilizado para a abordagem cinemática está representado na Fig. (6.2). Sua forma cônica é explicada pela ausência de mudança de curvatura no instante do colapso, imposta pela utilização da superfície retangular como critério de escoamento. O parâmetro ρ corresponde à distância entre as duas rótulas plásticas extremas, ou seja, ao comprimento do mecanismo de colapso.

A coincidência entre as abordagens estática e cinemática poderia significar em princípio, a obtenção da solução exata. Essa afirmação só é verdadeira dentro das hipóteses adotadas para o escoamento, ou seja, para a superfície retan-

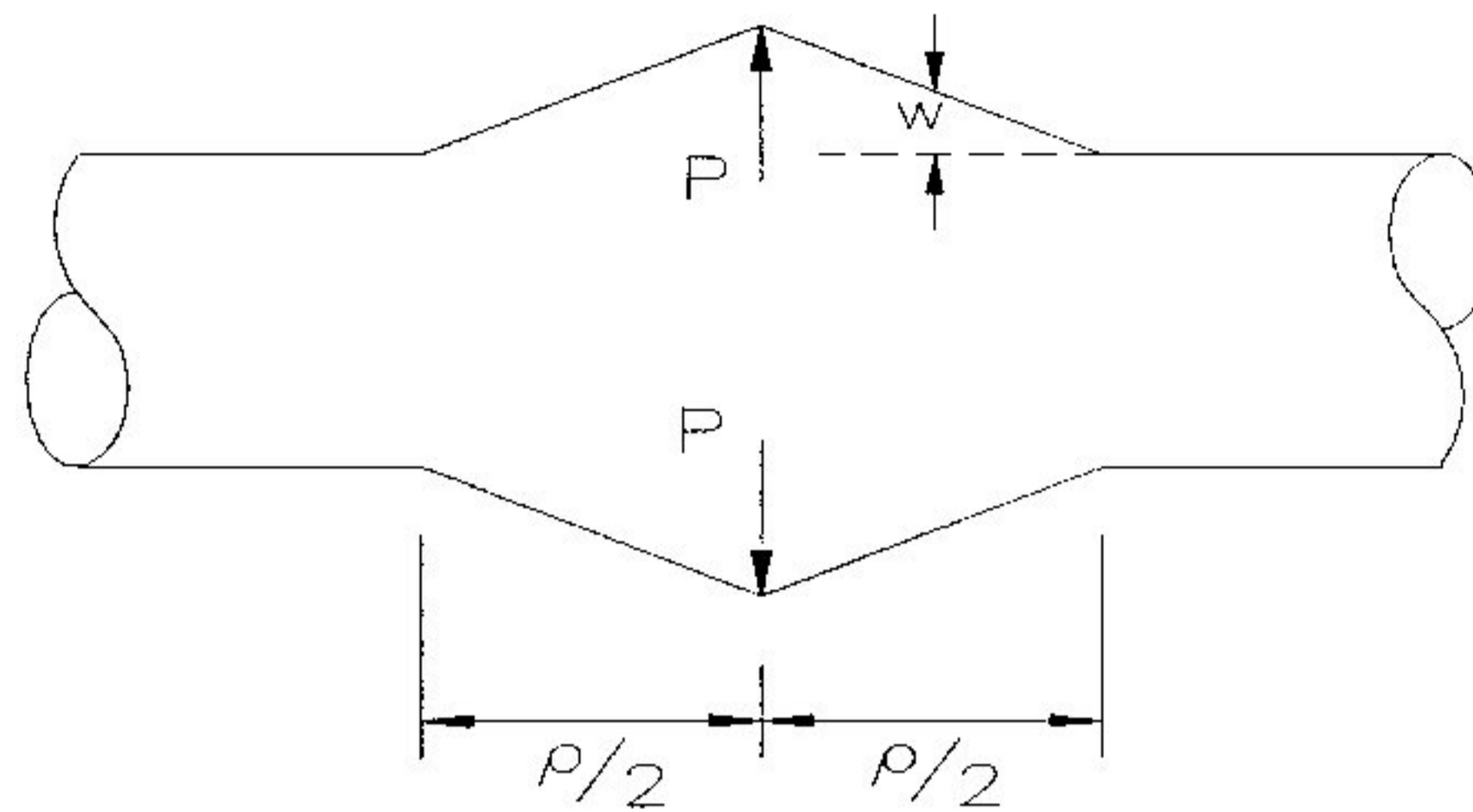


Figura 6.2: Mecanismo cônico de colapso

gular circunscrita. Da mesma maneira, caso fosse utilizado o retângulo inscrito, o resultado seria:

$$\frac{P_L}{\sigma_o} = 1,5 \frac{t}{r} \sqrt{rt} \quad (6.2)$$

Para as superfícies desenhadas na Fig. (6.1), Drucker estabeleceu o valor para a carga de colapso como:

$$\frac{P_L}{\sigma_o} = \beta \frac{t}{r} \sqrt{rt} \quad (6.3)$$

para

$$\rho = 2 \sqrt{rt}$$

O parâmetro β é definido de acordo com o critério de escoamento adotado e assume os seguintes valores:

Superfície de Escoamento	β
Retângulo Inscrito	1,50
Hexágono Inscrito	1,73
Exata	1,82
Retângulo Circunscrito	2,00

Tabela 6.1: Solução de Drucker

A verificação da coincidência entre os limites superior e inferior da carga de colapso para as superfícies retangulares não se repete para o caso do

hexágono e da superfície exata. De acordo com [Drucker, 1953], o limite superior de β para estes casos seria o mesmo do retângulo circunscrito (2,00), se o mecanismo cônico continuasse a ser adotado. Está acima, portanto, dos valores apresentados na Tabela (6.1), obtidos através da análise estática. Este fato pode ser facilmente explicado considerando-se a normalidade do vetor de taxa de deformação, Seção (2.5). Para os dois retângulos, nos lados em que N_θ é constante, a taxa de curvatura deve ser nula, $\dot{\kappa}_\phi = 0$. Tal suposição está de acordo com a utilização do mecanismo cônico. Já os lados \overline{DC} e \overline{CB} do hexágono definem a relação $\dot{\kappa}_\phi t / \dot{\epsilon}_\theta = \pm 2$. As taxas de curvatura e deformação devem, portanto, ocorrer simultaneamente. Este fato não é considerado quando se usa o mecanismo cônico. Uma parcela de energia correspondente à flexão ao longo do comprimento não é calculada, levando-se à obtenção de estimativas superiores para a carga de colapso. Para contornar este problema Drucker propõe um campo de taxas de deslocamentos radiais, \dot{w} , a partir da relação:

$$rt \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} = \pm 2 \dot{w} \quad (6.4)$$

Na próxima seção demonstra-se que a utilização do mecanismo definido em (6.4) fornece, para o hexágono, um limite superior idêntico ao limite inferior, Tabela (6.1). Este valor é, portanto, o exato caso seja adotada a superfície hexagonal como critério de escoamento.

6.4 Solução Cinemática para o Caso da Superfície Hexagonal

Na Seção (6.3) discute-se o problema de um tubo cilíndrico de comprimento infinito, sujeito a uma carga de anel. Com base em [Drucker, 1953] diversos valores para as cargas de colapso, em função da superfície de escoamento, são obtidos. Nesta seção, a análise cinemática é realizada em função da superfície hexagonal, Fig. (6.1). O mecanismo de colapso é o proposto em [Drucker, 1953] como o exato para a superfície de escoamento adotada, através da Equação (6.4).

6.4.1 Análise Cinemática

Seja o mecanismo proposto na Fig. (6.3). Em $x = 0$ e $x = \xi$ tem-se o estado de tensões e deformações correspondente aos pontos D e B da Fig. (6.1). Supõe-se que o perfil das tensões e deformações no mecanismo obedeça as relações impostas ao longo de \overline{DC} e \overline{CB} da superfície hexagonal de escoamento. Para que isto ocorra é necessário que:

$$\frac{\dot{\kappa}_\phi t}{\dot{\epsilon}_\theta} = \pm 2 \quad (6.5)$$

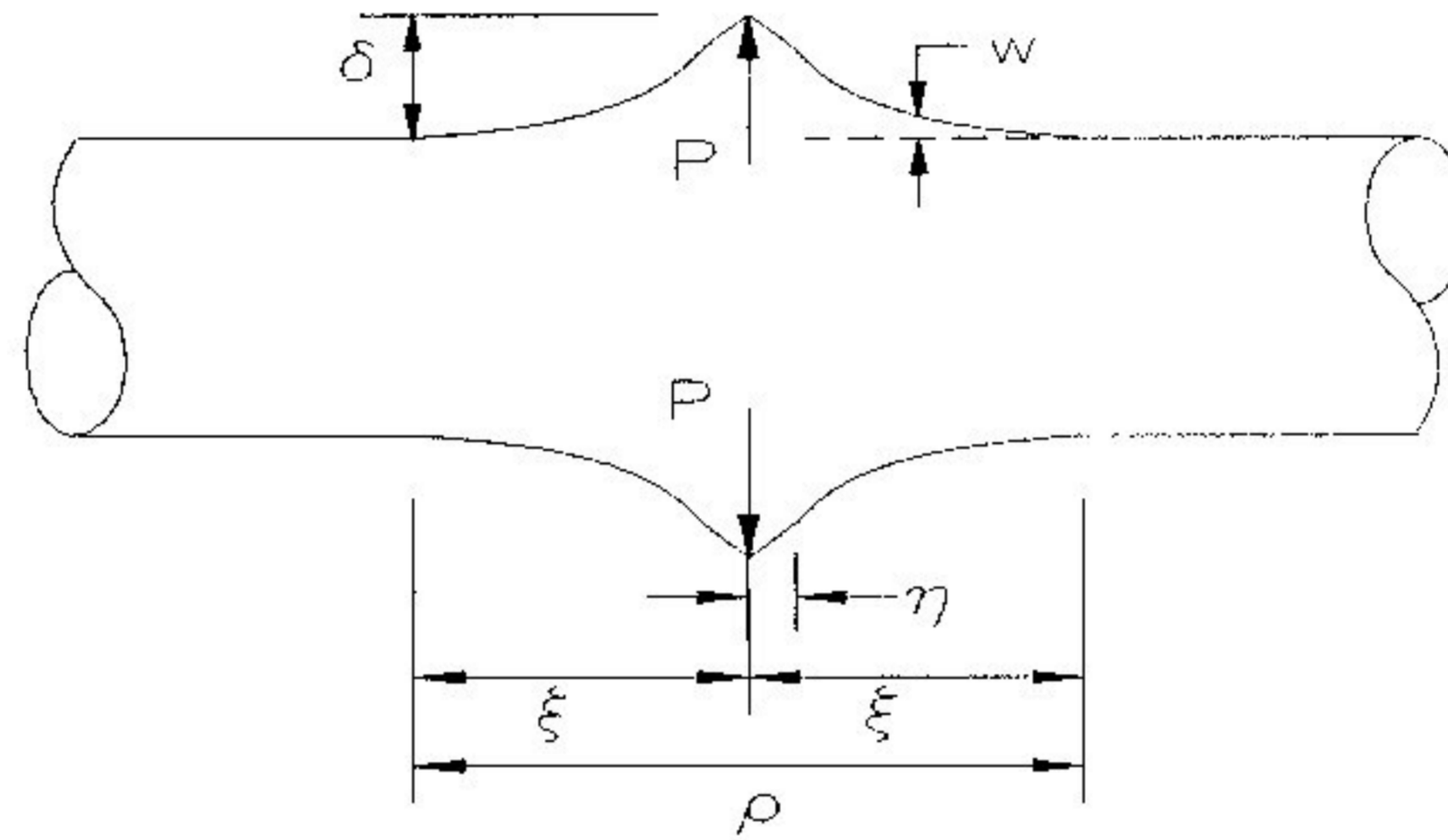


Figura 6.3: Mecanismo colapso para a superfície hexagonal

Lembrando-se que, para a casca cilíndrica, na ausência de força axial, $u = 0$ e através de (2.32) e (2.33), chega-se equação diferencial, já apresentada em (6.4):

$$rt \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} = \begin{cases} -2\dot{w} & \text{para } 0 \leq x \leq \eta \\ 2\dot{w} & \text{para } \eta \leq x \leq \xi \end{cases} \quad (6.6)$$

sendo η a região do mecanismo correspondente ao ponto C da superfície de escoamento.

A solução da Equação (6.6) é:

$$\dot{w} = \begin{cases} \dot{w}_1 = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{2}{rt}}x\right) + c_2 \text{sen}\left(\sqrt{\frac{2}{rt}}x\right) & \text{para } 0 \leq x \leq \eta \\ \dot{w}_2 = c_3 e^{\sqrt{\frac{2}{rt}}x} + c_4 e^{-\sqrt{\frac{2}{rt}}x} & \text{para } \eta \leq x \leq \xi \end{cases} \quad (6.7)$$

Considere, então, as seguintes condições de contorno:

- Para garantir a continuidade das taxas de deslocamento e rotação na região correspondente ao ponto C :

$$\text{Em } x = \eta \rightarrow \begin{cases} \dot{w}_1 = \dot{w}_2 \\ \frac{d\dot{w}_1}{dx} = \frac{d\dot{w}_2}{dx} \end{cases}$$

- Adota-se $\dot{\delta}$ como a taxa de deslocamento na região onde a carga de anel é aplicada:

$$\text{Em } x = 0 \rightarrow \dot{w}_1 = \dot{\delta}$$

- Ao final do mecanismo:

$$\text{Em } x = \xi \rightarrow \dot{w}_2 = 0$$

As constantes c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são, então, obtidas, como:

$$c_1 = \dot{\delta} \quad (6.8)$$

$$c_2 = \frac{\dot{\delta}}{\text{sen} \left(\sqrt{\frac{2}{rt}} \eta \right)} \left[\frac{A}{\text{sen} \left(\sqrt{\frac{2}{rt}} \eta \right) A - \text{sen} \left(\sqrt{\frac{2}{rt}} \eta \right) B} - \cos \left(\sqrt{\frac{2}{rt}} \eta \right) \right] \quad (6.9)$$

$$c_3 = \frac{\dot{\delta}}{\cos \left(\sqrt{\frac{2}{rt}} \eta \right) A - \text{sen} \left(\sqrt{\frac{2}{rt}} \eta \right) B} \quad (6.10)$$

$$c_4 = \frac{\dot{\delta} e^{(2\sqrt{\frac{2}{rt}} \xi)}}{\cos \left(\sqrt{\frac{2}{rt}} \eta \right) A - \text{sen} \left(\sqrt{\frac{2}{rt}} \eta \right) B} \quad (6.11)$$

para

$$A = \left[e^{\left(\sqrt{\frac{2}{rt}}\eta\right)} - e^{\left(2\sqrt{\frac{2}{rt}}\xi - \sqrt{\frac{2}{rt}}\eta\right)} \right]$$

$$B = \left[e^{\left(\sqrt{\frac{2}{rt}}\eta\right)} + e^{\left(2\sqrt{\frac{2}{rt}}\xi - \sqrt{\frac{2}{rt}}\eta\right)} \right]$$

De acordo com [Drucker, 1953], a função de dissipação de energia, por unidade de área, correspondente ao hexágono inscrito assume os seguintes valores para:

- lados verticais onde $|m_\phi| = 1$

$$\frac{\sigma_o t^2}{4} |\dot{\kappa}_\phi| \quad (6.12)$$

- lados inclinados, onde $m_\phi = 2(1 - n_\theta)$, inclusive os pontos em que $|m_\phi| = 1$ e $|n_\theta| = 1$

$$\frac{\sigma_o t}{2} |\dot{\epsilon}_\theta| + \frac{\sigma_o t^2}{4} |\dot{\kappa}_\phi| \quad (6.13)$$

No Apêndice (C), encontra-se demonstrada a obtenção da Equação acima.

Aplicando-se as Funções (6.12) e (6.13) ao longo da metade do mecanismo, obtém-se, como taxa de dissipação de energia interna, por unidade de comprimento circunferencial:

$$\frac{W_i^*}{2\pi r} = \int_0^\xi \left[\frac{\sigma_o t}{2} |\dot{\epsilon}_\theta| + \frac{\sigma_o t^2}{4} |\dot{\kappa}_\phi| \right] dx + \frac{\sigma_o t^2}{4} |\dot{\theta}_{x=0}| + \frac{\sigma_o t^2}{4} |\dot{\theta}_{x=\xi}| \quad (6.14)$$

E para toda a estrutura, considerando-se a simetria do mecanismo:

$$\frac{W_i}{2\pi r} = 2 \frac{W_i^*}{2\pi r} \quad (6.15)$$

sendo

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{x=0} &= \left. \frac{d\dot{w}_1}{dx} \right|_{x=0} \\ \dot{\theta}_{x=\xi} &= \left. \frac{d\dot{w}_2}{dx} \right|_{x=\xi} \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \begin{cases} \frac{\dot{w}_1}{r} & \text{para } 0 \leq x \leq \eta \\ \frac{\dot{w}_2}{r} & \text{para } \eta \leq x \leq \xi \end{cases} \\ \dot{\kappa}_\phi &= \begin{cases} \frac{d^2\dot{w}_1}{dx^2} & \text{para } 0 \leq x \leq \eta \\ \frac{d^2\dot{w}_2}{dx^2} & \text{para } \eta \leq x \leq \xi \end{cases}\end{aligned}$$

Já a taxa de trabalho externo, por unidade de comprimento circunferencial, realizada pela carga de anel P vale:

$$\frac{W_e}{2\pi r} = P\dot{\delta} \quad (6.16)$$

Igualando-se (6.15) a (6.16) obtém-se uma expressão para P em função das coordenadas ξ e η , pois o parâmetro $\dot{\delta}$, sendo comum às duas equações é cancelado:

$$P = \psi(\xi, \eta) \quad (6.17)$$

Pelo teorema cinemático sabe-se que P será no mínimo igual a carga de colapso. Logo, quanto menor o valor de P , mais próxima a solução se encontra da exata. Para a obtenção do menor valor possível de P , resolve-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

cuja solução é:

$$\xi = 1,79\sqrt{\frac{rt}{2}} \qquad \eta = 0,47\sqrt{\frac{rt}{2}}$$

que em (6.17), fornece o valor da carga de colapso

$$\frac{P_L}{\sigma_o} = 1,73t\sqrt{\frac{t}{r}} \qquad (6.19)$$

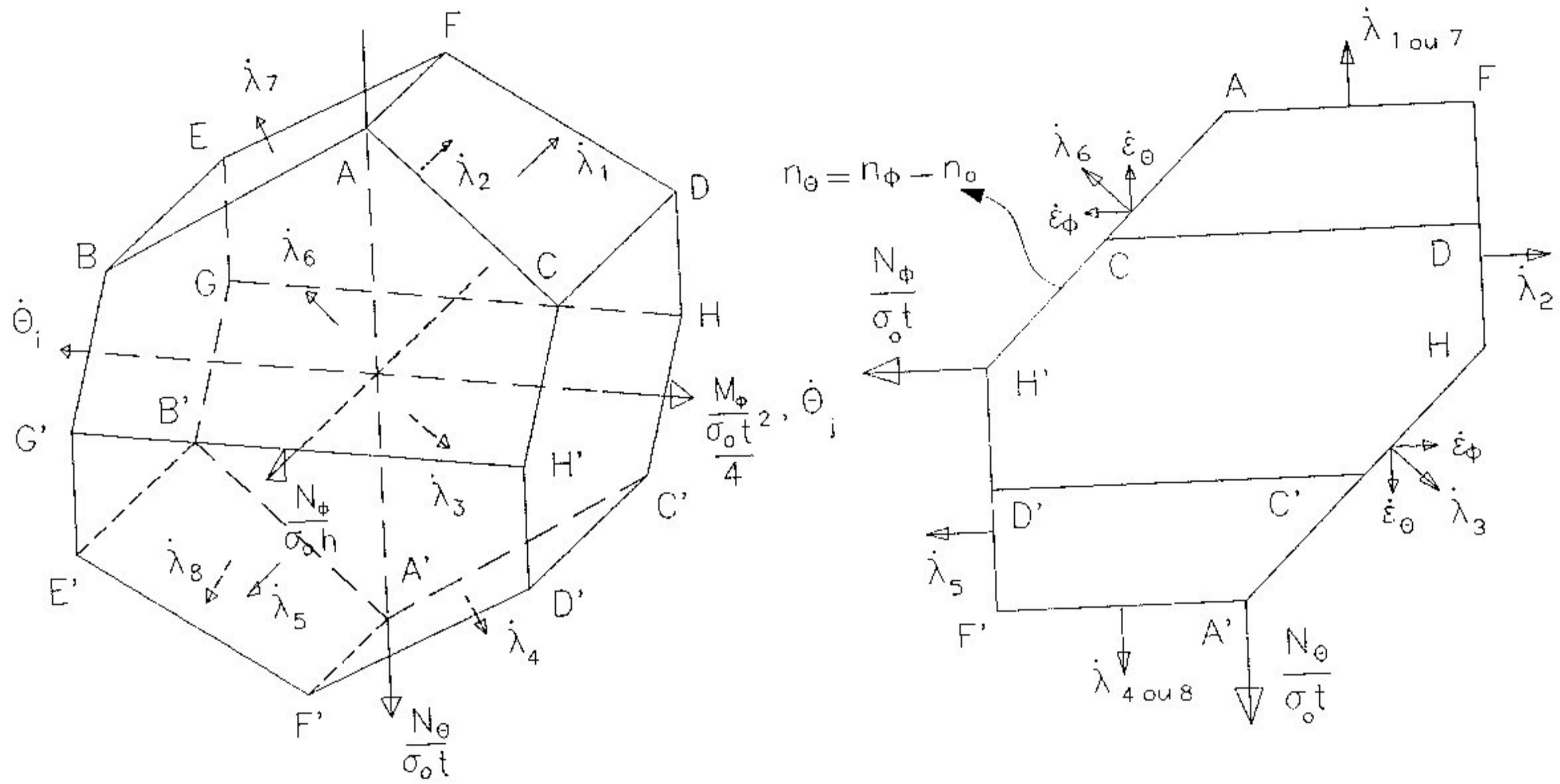
para o mecanismo de tamanho ρ obtido como:

$$\rho = 2\xi = 3,58\sqrt{\frac{rh}{2}} \qquad (6.20)$$

Este valor coincide com o obtido pela análise estática em [Drucker, 1953], mostrado na Tabela (6.1). É, portanto a solução exata para a superfície hexagonal inscrita.

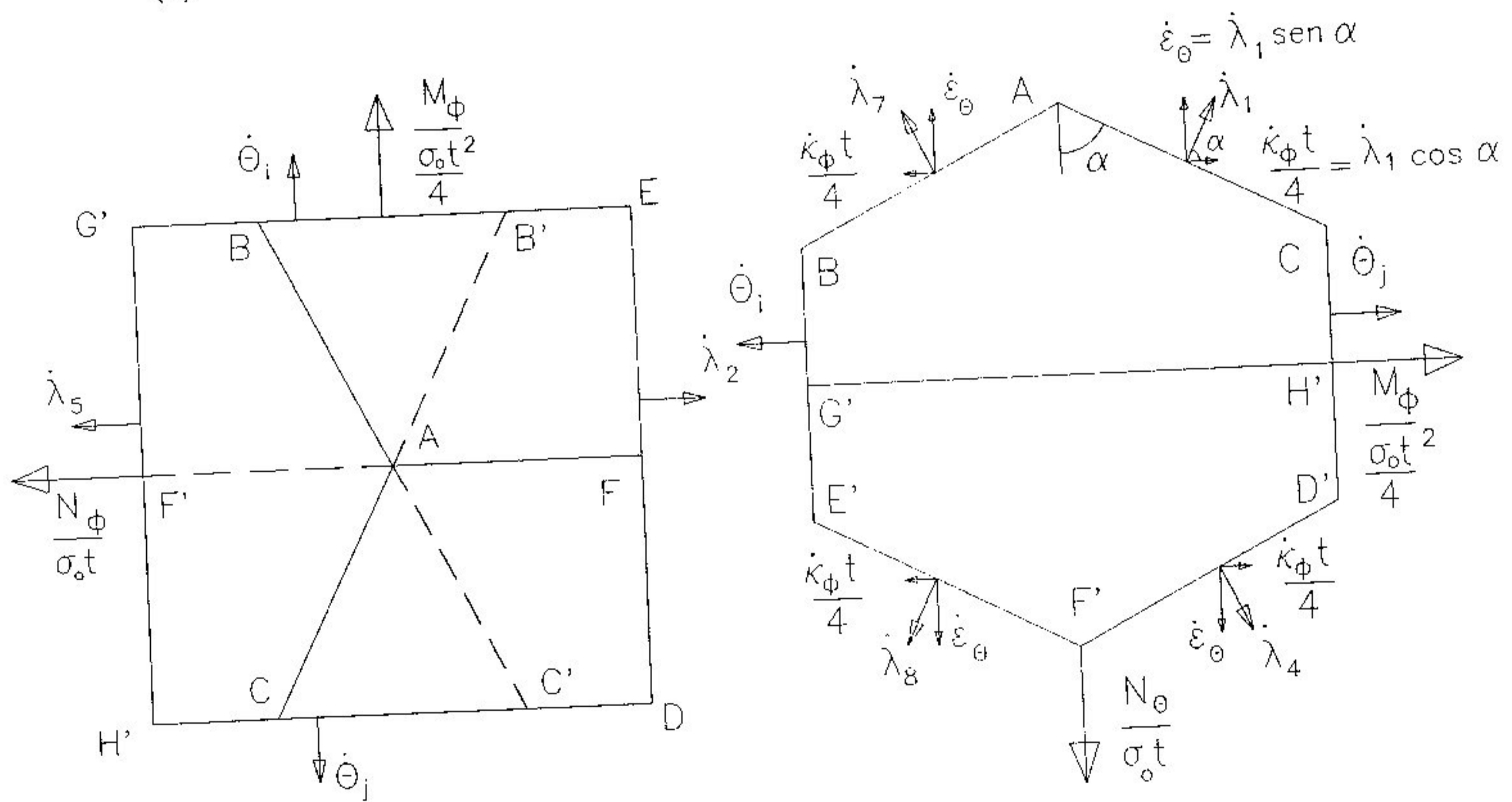
6.5 A Nova Superfície de Escoamento

A superfície retangular de Drucker, discutida na seção anterior, corresponde a uma particularização do prisma hexagonal, para os casos em que não existam tensões normais na direção meridional, ou seja, $N_\phi = 0$. Mesmo quando estas tensões são consideradas, qualquer plano paralelo ao plano $m_\phi n_\theta$ intercepta o prisma na forma retangular. Situação idêntica ocorre quando a interseção se dá com um plano paralelo a $n_\phi m_\phi$. Através de uma analogia com o retângulo circunscrito de Drucker, conclui-se que a utilização desta superfície durante uma análise cinemática conduz, inevitavelmente, a valores super-estimados para a carga de colapso. Neste caso, não se está considerando a parcela de energia dissipada devido a taxa de mudança de curvatura, quando esta ocorre simultaneamente com as taxas de deformação meridional ou circunferencial.



(a) Visão tri-dimensional

(b) Plano paralelo a $n_\phi n_\theta$



(c) Plano paralelo a $n_\phi m_\phi$

(d) Plano paralelo a $m_\phi n_\theta$

Figura 6.4: Superfície de escoamento de dez planos

Com o objetivo de se aprimorar a análise, uma nova superfície foi desenvolvida. Seguindo-se os procedimentos de [Drucker e Shield, 1958] para a obtenção do prisma hexagonal, a superfície exata, Fig. (2.6), foi linearizada, dando origem a uma outra superfície, agora circunscrita, que está representada na Fig. (6.4(a)). Sua interseção com o plano $n_\phi = 0$, Fig. (6.4(d)), coincide com a superfície hexagonal de Drucker. Aplicando-se a propriedade de normalidade do vetor da taxa de deformação, Seção (2.5), obtém-se uma relação entre as taxas de deformação circunferencial e de mudança de curvatura meridional. O mesmo não acontece quando se intercepta a superfície através de planos paralelos a $n_\phi m_\phi$. Neste caso, as taxas de deformação e de mudança de curvatura meridionais permanecem independentes como para o prisma hexagonal.

Pode-se, portanto, afirmar que esta nova superfície é capaz de acomodar a taxa da mudança de curvatura nas regiões entre as rótulas plásticas, para a combinação de M_ϕ e N_θ . A verificação de tal afirmação será feita nas próximas seções após a implementação desta superfície para a técnica descrita no Capítulo (3) e do desenvolvimento de um campo de taxas de deformações compatível com a nova lei de escoamento. O detalhamento desta implementação será realizado seguindo os mesmos passos do Capítulo (3). Apesar do procedimento continuar o mesmo, foram necessárias várias alterações, todas elas apresentadas a seguir. Vários termos já foram definidos nos capítulos anteriores. Serão, portanto, usados naturalmente, sem explicação adicional.

6.6 Novo Elemento para Discretização da Casca

6.6.1 Campo de Deformações Elasto-Plásticas

A formulação de elementos finitos descrita no Capítulo (3) é incompatível com a nova superfície desenvolvida. Pode-se verificar esta afirmação tomando como exemplo o problema da casca cilíndrica. Os deslocamentos, interpolados por polinômios do primeiro grau, produzem, quando se aplica a Equação (3.7), mudança de curvatura nula na direção meridional. Uma nova função de forma deve ser procurada.

Em [Franco, 1993] o campo de deformações elasto-plásticas proposto, tem como base o procedimento adotado em [Zienkiewicz e Taylor, 1989b], para a formulação de um elemento curvo de casca axi-simétrica. Para este caso os parâmetros nodais especificados são os deslocamentos globais e suas derivadas. Dentro de cada elemento, são utilizados como função de forma, os polinômios cúbicos de “Hermite”, [Conte e Boor, 1980]. Sua aplicação atende à exigência de compatibilidade, [Stasa, 1985], necessária para que a convergência da solução seja assegurada. A não verificação desta exigência não impede, no entanto, a convergência da solução. Muitas vezes melhores resultados são obtidos para funções de interpolação, propositadamente não compatíveis. Neste caso é realizado um conjunto de testes, o “Patch Test”, que procura determinar se o tipo de elemento escolhido garantirá uma solução convergente, [Zienkiewicz e Taylor, 1989a]. Na técnica de análise limite, para que seja possível a formação do mecanismo de colapso, é desejável que a descontinuidade da derivada primeira dos deslocamentos seja viável. Isso, no entanto, não acontece quando os parâmetros nodais são interpolados através dos polinômios de “Hermite”, funções de continuidade C_1 ¹. Pelo contrário, tanto os deslocamentos quanto suas derivadas são contínuos.

Para a definição da função de forma, é preciso que se consiga descrever a mudança de curvatura ao longo do elemento e, ao mesmo tempo, que as rótulas plásticas possam ser obtidas nos pontos nodais. O polinômio de Lagrange de ordem dois, [Conte e Boor, 1980], atende a estas exigências, aliado à simplicidade de sua implementação. Os parâmetros a serem interpolados serão apenas os deslocamentos globais, em função dos valores que assumem nos pontos nodais. Para que isto seja possível, um nó deve ser introduzido entre os dois já existentes em cada elemento. A discretização da casca em elementos finitos fica, então descrita como mostrado na Fig. (6.5).

O campo de deslocamentos será expresso como:

$$U_e^i(s) = U_o^i + \Omega^i(s)U_n^i \quad (6.21)$$

para

¹Funções contínuas até a derivada de primeira ordem

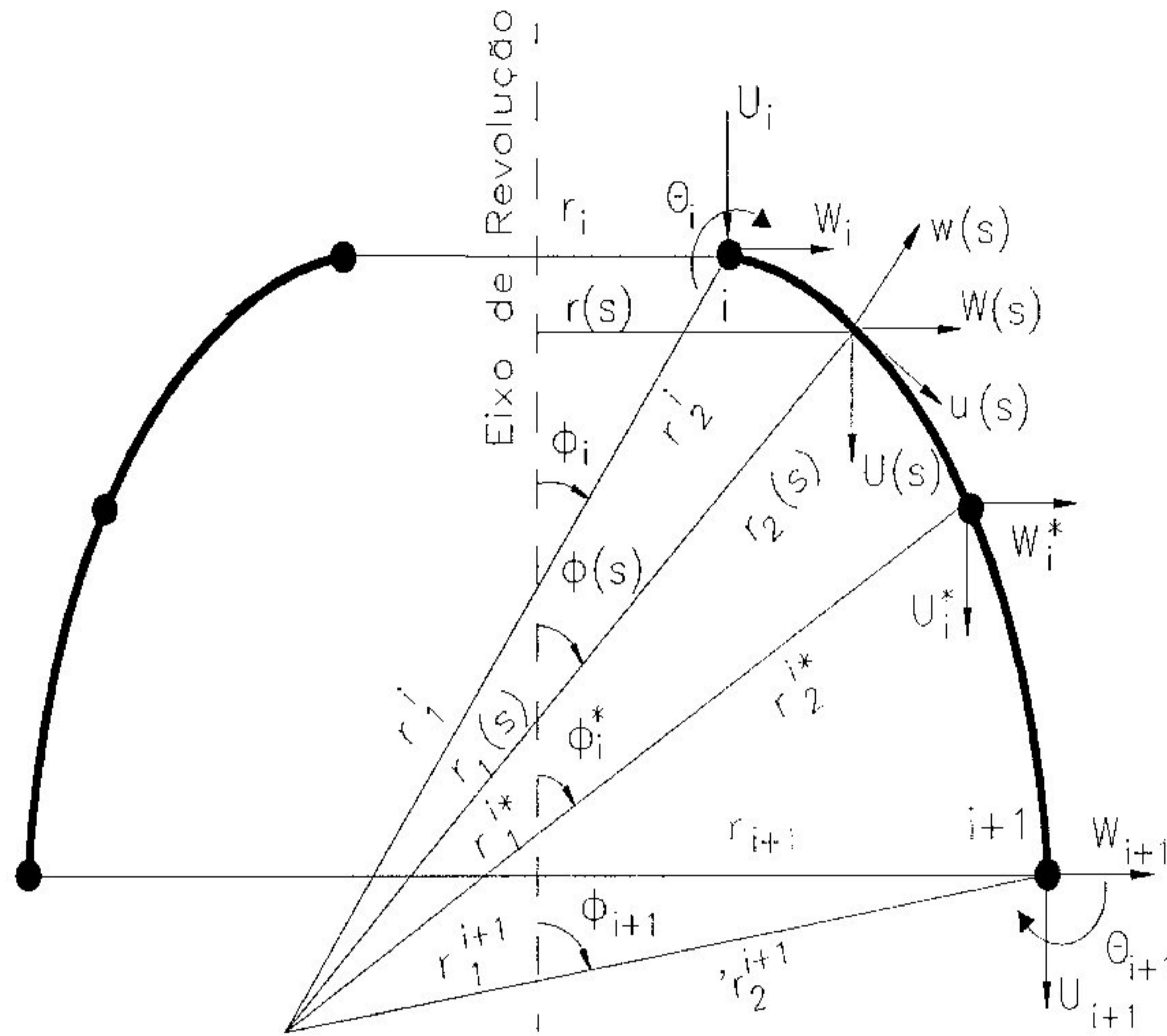


Figura 6.5: Discretização da casca para o novo elemento de três nós

$$U_e^i(s) = \begin{Bmatrix} U(s) \\ W(s) \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

$$U_o^i(s) = \begin{Bmatrix} U_i \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

$$U_n^i = \begin{Bmatrix} U_i^* - U_i \\ U_{i+1} - U_i \\ W_i \\ W_i^* \\ W_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (6.24)$$

$$\Omega^i(s) = \begin{bmatrix} 1 - \xi^2 & \frac{\xi^2 + \xi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\xi^2 - \xi}{2} & 1 - \xi^2 & \frac{\xi^2 + \xi}{2} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

onde

U_i^* e W_i^* são os deslocamentos globais vertical e horizontal no ponto médio do elemento i .

$\Omega^i(s)$ é a nova matriz de funções de interpolação.

ξ é a posição parametrizada, ao longo da superfície média, ou seja, $\xi = \frac{2s - l_i}{l_i}$

Uma vez que a Equação (3.6) permanece a mesma e lembrando-se que a mudança de curvatura está sendo considerada, a equação para o campo de deformações elasto-plásticas torna-se:

$$\epsilon_i^1 = \begin{Bmatrix} \epsilon_\phi^1 \\ \epsilon_\theta^1 \\ \kappa_\phi^1 \end{Bmatrix}^i = \mathbf{B}^i \mathbf{U}_n^i \quad (6.26)$$

para

$$\mathbf{B}^i = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & \frac{1}{r_1} \\ \frac{\cotg\phi}{r_2} & \frac{1}{r_2} \\ \frac{1}{r_1} \frac{d}{ds} & -\frac{d^2}{ds^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{sen}\phi & \text{cos}\phi \\ -\text{cos}\phi & \text{sen}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \xi^2 & \frac{\xi^2 + \xi}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\xi^2 - \xi}{2} & 1 - \xi^2 & \frac{\xi^2 + \xi}{2} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

A expansão de (6.27), para que se obtenha a matriz \mathbf{B}^i da maneira como foi implementada, está apresentada no Apêndice (D).

6.6.2 Campo de Deformações Plásticas

A dedução do campo de deformações plásticas, em função do critério de escoamento definido pela nova superfície, difere em alguns pontos do procedimento utilizado na Seção (3.2.2). A regra associativa relaciona as taxas de deformação com oito, e não mais seis, multiplicadores plásticos. Quatro desses, $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_4$, $\dot{\lambda}_5$ e $\dot{\lambda}_7$ estabelecem uma relação entre as taxas de deformação circunferencial e de mudança de curvatura meridional. Este fato permite que, dentro do elemento, o comportamento não fique

restrito ao de membrana. A taxa de mudança de curvatura na direção meridional pode, portanto, também ser calculada. Considerando-se estas propriedades, o campo de deformações plásticas é definido, para o elemento i , em notação matricial como:

$$\dot{\epsilon}_i^2 = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_\phi^2(s, \phi) \\ \dot{\epsilon}_\theta^2(s, \phi) \\ \dot{\kappa}_\phi^2(s, \phi) \end{Bmatrix}^i = N \dot{\lambda}^i(s) \text{ para } k=1,..6 \quad (6.28)$$

De acordo com as Figs. (6.4).

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{sen}\alpha & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\text{sen}\alpha & \text{sen}\alpha \\ \frac{4}{t} \cos \alpha & 0 & 0 & \frac{4}{t} \cos \alpha & 0 & 0 & -\frac{4}{t} \cos \alpha & -\frac{4}{t} \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

$$\dot{\lambda}^i(s) = \left\{ \dot{\lambda}_1^i(s) \quad \dot{\lambda}_2^i(s) \quad \dot{\lambda}_3^i(s) \quad \dot{\lambda}_4^i(s) \quad \dot{\lambda}_5^i(s) \quad \dot{\lambda}_6^i(s) \quad \dot{\lambda}_7^i(s) \quad \dot{\lambda}_8^i(s) \right\}^T \quad (6.30)$$

Na Fig. (6.4(d)) o valor de α , correspondente ao ângulo que as normais aos lados \overline{BA} e \overline{AC} , fazem com a horizontal, pode ser obtido, como:

$$\alpha = \text{arctg}2 \quad (6.31)$$

Logo

$$\text{sen}\alpha = 0,89443$$

$$\text{cos}\alpha = 0,44721$$

As funções de interpolação dos multiplicadores plásticos permanecem lineares como em (3.17). A utilização de um polinômio de ordem mais alta, como feito para o campo dos deslocamentos, não é necessária neste caso. A taxa de mudança de curvatura já é descrita diretamente em função de $\dot{\lambda}_1$, $\dot{\lambda}_4$, $\dot{\lambda}_5$ e $\dot{\lambda}_7$. Logo, o nó intermediário deve ser considerado apenas para a definição das deformações

elasto-plásticas. O campo das taxas de deformações plásticas é então descrito da seguinte maneira:

$$\dot{\lambda}_k^i(s) = \Lambda(s)\dot{\lambda}_k^n \quad (6.32)$$

Para

$$\Lambda^T(s) = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\xi \\ 1+\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\xi \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

$$\lambda_k^n = \left\{ \dot{\lambda}_1^i \quad \dot{\lambda}_2^i \quad \dots \quad \dot{\lambda}_8^i \quad \dot{\lambda}_1^{i+1} \quad \dot{\lambda}_2^{i+1} \quad \dots \quad \dot{\lambda}_8^{i+1} \right\}^T \quad (6.34)$$

A mudança de curvatura, portanto, não é mais localizada, sendo também interpolada ao longo do elemento. A formação da rótula plástica continua, no entanto, restrita aos pontos nodais. Este fato será, ainda, discutido nesta dissertação.

6.7 Relação Consistente Entre os Campos das Taxas de Deslocamento e dos Multiplicadores Plásticos

De maneira idêntica à Seção (3.4), a imposição de uma relação consistente entre os campos das taxas de deslocamentos e de deformações reduz o problema de análise limite a um problema de minimização a ser resolvido pela programação linear. Agora, porém, a taxa de mudança de curvatura não se restringe apenas aos nós. Deve, portanto, ser considerada durante a formulação da relação consistente.

Adotando-se os mesmos procedimentos da Seção (3.4.1) chega-se também à expressão:

$$\dot{U}_n^i = L^i \dot{\lambda}_k^n \quad (6.35)$$

onde

$$L^i = \bar{C}^{iT} \int_V B^{iT} K^i(s) dV$$

$$K(s) = N \Lambda^i(s)$$

que estabelece a relação de consistência procurada entre o campo de velocidades e das taxas de deformações em cada elemento i .

Além da introdução da taxa de mudança de curvatura, as funções de interpolação foram alteradas e novos multiplicadores plásticos incluídos. O detalhamento desta relação está disponível no Apêndice (E).

6.8 O Algoritmo de Elementos Finitos

Para a formulação do problema de minimização, as mesmas condições estabelecidas em (3.47) são adotadas. As alterações provenientes da introdução da curvatura dentro do elemento e da nova função de interpolação, bem como seu processo de implementação são definidos a seguir.

6.8.1 Equação Geral de Restrição

Assim como na Seção (3.5.1) apenas os dois casos de carregamento, a pressão interna e a carga de anel foram considerados.

Pressão Interna

Repetindo-se (3.48) tem-se:

$$W_E = \int_S p \dot{U}_n^i dS = \int_S p_i \dot{w} dS + F \dot{U}_n^1 \quad (6.36)$$

O primeiro termo de (6.36) deve ser definido em função dos valores nodais das taxas de deslocamentos globais, através das Relações (6.21) e (3.6). Sendo $dS = 2\pi r ds$ e $ds = \frac{l_i}{2} d\xi$ tem-se então:

$$\int_S p_i \dot{w} dS = 2\pi p_i \sum_{i=1}^{NE} \left[IFUI(i) \dot{U}_i + IFUJI(i) (\dot{U}_i^* - \dot{U}_i) + IFUI1I(i) (\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_i) + IFWII(i) \dot{W}_i + IFWJ(i) \dot{W}_i^* + IFWI1I(i) \dot{W}_{i+1} \right] \quad (6.37)$$

para

$$IFUI(i) = \left[- \int_{-1}^1 \cos \phi r \frac{l_i}{2} d\xi \right]$$

$$IFUJI(i) = \left[- \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) \cos \phi r \frac{l_i}{2} d\xi \right]$$

$$IFUI1I(i) = \left[- \int_{-1}^1 \frac{\xi^2 + \xi}{2} \cos \phi r \frac{l_i}{2} d\xi \right]$$

$$IFWII(i) = \left[- \int_{-1}^1 \frac{\xi^2 - \xi}{2} \sin \phi r \frac{l_i}{2} d\xi \right]$$

$$IFWJ(i) = \left[- \int_{-1}^1 (1 - \xi^2) \operatorname{sen} \phi r \frac{l_i}{2} d\xi \right]$$

$$IFWII(i) = \left[- \int_{-1}^1 \frac{\xi^2 + \xi}{2} \operatorname{sen} \phi r \frac{l_i}{2} d\xi \right]$$

O problema de minimização, resolvido pela programação linear, deve ser formulado em função dos multiplicadores plásticos e taxas de rotações. Logo, as componentes da taxa de deslocamento global precisam ser substituídas por funções desses parâmetros. No Apêndice (E) tais funções são desenvolvidas, tendo como base a Relação (6.35).

Carga de Anel Aplicada no Ponto Nodal i

A Equação (3.49) permanece a mesma:

$$W_E = 2\pi r_i P_i \dot{w}_i \quad (6.38)$$

que se torna, após a aplicação de (3.6):

$$W_E = 2\pi r_i P_i \left(-\dot{U}_i \cos \phi_i + \dot{W}_i \operatorname{sen} \phi_i \right) \quad (6.39)$$

Esta expressão é válida para qualquer nó que não coincida com o eixo de revolução da casca, onde $r_i = 0$. Para que possa ser usada dentro da formulação da programação linear, também deve ter seus termos substituídos por funções dos multiplicadores plásticos definidas no Apêndice (E).

6.8.2 Função de Custo

De acordo com a Seção (3.5.2), a função de custo, obtida a partir da taxa de energia dissipada internamente, é descrita como:

$$K_S = \int_V (\boldsymbol{\sigma}^c)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c dV = \overbrace{\int_{V_E} (\boldsymbol{\sigma}^c)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c dV}^{I_1} + \overbrace{\int_{V_R} (\boldsymbol{\sigma}^c)^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c dV}^{I_2} \quad (6.40)$$

Os dois termos, relativos à energia dissipada dentro do elemento e nas rótulas serão tratados separadamente.

Parcela relativa ao elemento

Quando a superfície adotada era o prisma hexagonal, Fig. (2.7), a condição de escoamento dentro do elemento reduzia-se ao Critério de Tresca. As relações tensão-deformação eram bastante simples. No caso da superfície de dez planos, Fig. (6.4(a)) o mesmo não ocorre, pois a introdução da taxa de mudança de curvatura inviabiliza o tratamento de membrana que era concedido ao elemento. Adotando-se o procedimento utilizado no Apêndice (C), as funções de energia de dissipação, por unidade de área, para os estados de tensão pertencentes a cada face da nova superfície de escoamento, são obtidas a seguir:

- Faces $ACDF$, $ABEF$, $A'C'D'F'$ e $A'B'E'F'$:

Apesar de existir, N_ϕ não contribui para o escoamento, caso se considere a face $ACDF$ da superfície de dez planos. É possível, portanto, reduzir a lei de escoamento para a superfície em duas dimensões mostrada na Fig. (6.4(d)). De (6.29) as taxas de deformação e de mudança de curvatura são definidas em função dos multiplicadores plásticos como:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_\theta &= -\dot{\lambda}_1 \operatorname{sen} \alpha \\ \dot{\kappa}_\phi &= \frac{4}{t} \dot{\lambda}_1 \cos \alpha \end{aligned} \quad (6.41)$$

A hipótese de se considerar apenas as tensões resultantes N_θ e M_ϕ conduz à um problema semelhante à análise feita em [Drucker, 1953] e já discutida anteriormente. A função de dissipação de energia por unidade de área, descrita aplicando-se (6.41) em (6.13), é a seguinte:

$$D_A = \frac{\sigma_o t}{2} \dot{\lambda}_1 \operatorname{sen} \alpha + \sigma_o t \dot{\lambda}_1 \cos \alpha$$

Colocando-se em evidência o termo $\cos \alpha$ e lembrando-se que $\operatorname{tg} \alpha = 2$ obtém-se:

$$D_A = 2\sigma_o t \cos \alpha \dot{\lambda}_1 \quad (6.42)$$

As demais faces, formadas pelos planos inclinados, apresentam o mesmo estado de tensão e deformação, com o escoamento definido pelas tensões N_θ e M_ϕ . Fazendo-se, pois, as alterações relativas aos multiplicadores plásticos correspondentes, tem-se:

– Face $ABEF$:

$$D_A = 2\sigma_o t \cos \alpha \dot{\lambda}_7 \quad (6.43)$$

– Face $A'C'D'F'$:

$$D_A = 2\sigma_o t \cos \alpha \dot{\lambda}_4 \quad (6.44)$$

– Face $A'B'E'F'$:

$$D_A = 2\sigma_o t \cos \alpha \dot{\lambda}_8 \quad (6.45)$$

• Faces $ABG'H'C$ e $A'B'GHC'$:

Nestas duas faces assume-se novamente o comportamento de membrana para o elemento, Fig. (6.4(b)). Seja por exemplo a face $ABG'H'C$. As taxas de deformação e de mudança de curvatura são obtidas em função da Matriz (6.29):

$$\dot{\epsilon}_\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_6 \quad (6.46)$$

$$\dot{\epsilon}_\phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\lambda}_6$$

A função de dissipação de energia por unidade de área corresponde a:

$$D_A = n_\phi n_\phi + n_\theta n_\theta \quad (6.47)$$

Aplicando-se em (6.47) as relações entre n_ϕ e n_θ , da Fig. (6.4(b)), e escrevendo-se $\dot{\epsilon}_\theta$ e $\dot{\epsilon}_\phi$ em função de $\dot{\lambda}_6$, Equação (6.46), obtém-se:

$$D_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_o t \dot{\lambda}_6 \quad (6.48)$$

Analogamente para a face $A'B'GHC'$:

$$D_A = \frac{\sqrt{2}}{2} \sigma_o t \dot{\lambda}_3 \quad (6.49)$$

- Faces $F'D'H'G'E'$ e $FDHGE$:

Nestas faces o escoamento ocorre apenas na direção meridional. Logo, a função de dissipação de energia por unidade de área será:

– Face $F'D'H'G'E'$:

$$D_A = \sigma_o t \dot{\lambda}_5 \quad (6.50)$$

– Face $FDHGE$

$$D_A = \sigma_o t \dot{\lambda}_2 \quad (6.51)$$

Através das contribuições calculadas de (6.42) a (6.51), a parcela da função de custo, relativa a um elemento i qualquer é descrita como:

$$\frac{I_1^i}{2\pi\sigma_o} = t_i \int_{l_i} r_i \left[2 \cos \alpha (\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_7 + \dot{\lambda}_4 + \dot{\lambda}_8) + (\dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_5) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\dot{\lambda}_3 + \dot{\lambda}_6) \right] ds \quad (6.52)$$

ou em função das coordenadas parametrizadas ξ :

$$\frac{I_1^i}{2\pi\sigma_o} = t_i \int_{-1}^1 r_i \left[2 \cos \alpha (\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_7 + \dot{\lambda}_4 + \dot{\lambda}_8) + (\dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_5) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\dot{\lambda}_3 + \dot{\lambda}_6) \right] \frac{l_i}{2} d\xi \quad (6.53)$$

Parcela relativa à rótula

A parcela da função de custo calculada nos pontos nodais é calculada em função do estado de tensões e deformações correspondentes às faces $CDHC'D'H'$ e $BEGB'E'G'$. Apenas a flexão meridional é considerada. Nada se altera, portanto, com relação à Equação (3.59). Para um nó i :

$$I_2 = 2\pi r_i \int_{-t_i/2}^{t_i/2} (\sigma_\phi^c)^i y \dot{\theta}_i dy \quad (6.54)$$

No momento de formação da rótula plástica o diagrama de distribuição das tensões meridionais toma a forma retangular, Fig. (6.6). Assumindo-se esta distribuição, a integração de (6.54) ao longo da espessura resulta em:

$$I_2 = 2\pi r_i \frac{\sigma_o t^2}{4} \dot{\theta}_i \quad (6.55)$$

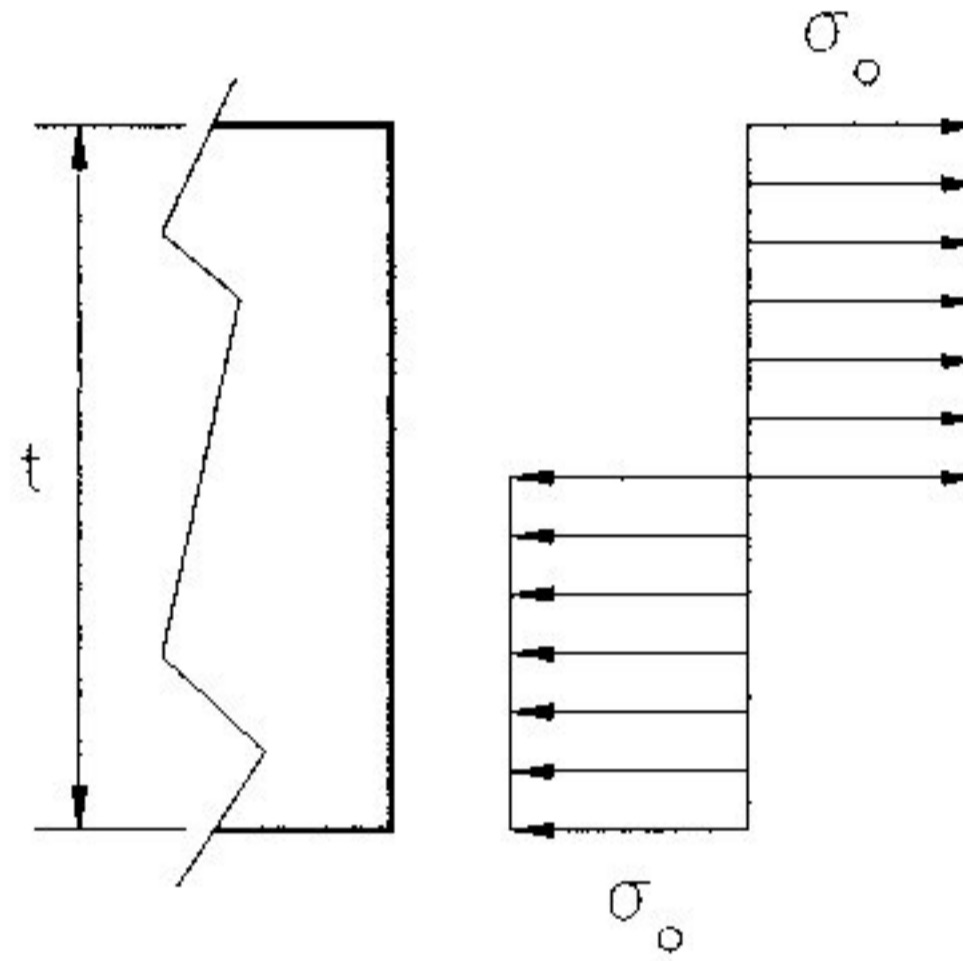


Figura 6.6: Diagrama das tensões meridionais após a formação da rótula plástica

Somando-se, então, (6.53) e (6.55) ao longo de todo o comprimento da estrutura, chega-se finalmente à função de custo a ser implementada para o problema de minimização:

$$K_S = 2\pi\sigma_o \sum_{i=1}^{NE} \left\{ t_i \int_{-1}^1 r_i \left[2 \cos \alpha (\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_7 + \dot{\lambda}_4 + \dot{\lambda}_8) + (\dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_5) + \frac{\sqrt{2}}{2} (\dot{\lambda}_3 + \dot{\lambda}_6) \right] \frac{l_i}{2} d\xi \right\} + 2\pi \sum_{i=1}^{NE+1} \left\{ r_i \frac{\sigma_o t_i^2}{4} \dot{\theta}_i \right\} \quad (6.56)$$

6.8.3 Equações de Restrição

Na Seção (6.6.1) foi visto que, durante a definição das funções de interpolação, a descontinuidade nodal das rotações deveria ser permitida. Tal exigência deriva da hipótese do mecanismo de colapso, que, independentemente de se incluir ou não a curvatura no interior do elemento, parte do princípio da possível ocorrência de rótulas plásticas. Nesse sentido a equação de restrição permanece a mesma que (3.60), ou seja:

$$\dot{\theta}_i = \frac{d\dot{w}^{i(+)}}{ds} - \frac{d\dot{w}^{i(-)}}{ds} \quad (6.57)$$

que em função das coordenadas nos elementos i e $i + 1$, adjacentes ao nó i , torna-se:

$$\dot{\theta}_i = \frac{d\dot{w}^i}{ds}(l_{i-1}) - \frac{d\dot{w}^{i+1}}{ds}(0) \quad (6.58)$$

Em [Franco, 1987], para assegurar que não existirão valores negativos para as variáveis do problema de Programação Linear, são definidas as seguintes variáveis auxiliares não-negativos:

$$\dot{\theta}_i = \dot{\theta}_i^+ - \dot{\theta}_i^- \quad (6.59)$$

de modo que:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i^+ &= \dot{\theta}_i & \text{se } \dot{\theta} > 0 \\ \dot{\theta}_i^- &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i^+ &= 0 & \text{se } \dot{\theta} < 0 \\ \dot{\theta}_i^- &= \dot{\theta}_i \end{aligned}$$

A taxa de deslocamento radial \dot{w} pode ser encontrada em função da coordenada parametrizada ξ através de (6.21) e (3.6). Sabendo-se que $d\xi/ds = 2/l_i$ a derivada de \dot{w} com relação a s , para cada elemento i , é a seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{w}^i}{ds}(\xi) = & \dot{U}_i \left[-\frac{2\xi - 1}{l_i} \cos \phi + \frac{\xi^2 - \xi}{2} \frac{\text{sen} \phi}{r_1} \right] + \dot{W}_i \left[\frac{2\xi - 1}{l_i} \text{sen} \phi + \frac{\xi^2 - \xi}{2} \frac{\cos \phi}{r_1} \right] + \\ & \dot{U}_i^* \left[\frac{4\xi}{l_i} \cos \phi + (1 - \xi^2) \frac{\text{sen} \phi}{r_1} \right] + \dot{W}_i^* \left[-\frac{4\xi}{l_i} \text{sen} \phi + (1 - \xi^2) \frac{\cos \phi}{r_1} \right] + \\ & \dot{U}_{i+1} \left[-\frac{2\xi + 1}{l_i} \cos \phi + \frac{\xi^2 + \xi}{2} \frac{\text{sen} \phi}{r_1} \right] + \dot{W}_{i+1} \left[\frac{2\xi + 1}{l_i} \text{sen} \phi + \frac{\xi^2 + \xi}{2} \frac{\cos \phi}{r_1} \right] \end{aligned} \quad (6.60)$$

Substituindo-se (6.60) em (6.58) para os valores de ξ correspondentes ao nó i nos dois elementos adjacentes i e $i + 1$ obtém-se, finalmente, a equação de restrição:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i = \dot{\theta}_i^+ - \dot{\theta}_i^- = & (\dot{U}_{i+1} - \dot{U}_i) CU_1 + (\dot{U}_i - \dot{U}_{i-1}) CU_2 + \\ & (\dot{U}_i^* - \dot{U}_i) CU_3 + (\dot{U}_{i-1}^* - \dot{U}_{i-1}) CU_4 + \\ & \dot{W}_i C_1 + \dot{W}_{i+1} C_2 + \dot{W}_{i-1} C_3 + \dot{W}_{i-1}^* C_4 + \dot{W}_i^* C_5 \end{aligned} \quad (6.61)$$

onde

$$\begin{aligned} CU_1 &= \frac{\cos \phi_i}{l_i} & CU_2 &= \frac{3 \cos \phi_i}{l_{i-1}} \\ CU_3 &= -\frac{4 \cos \phi_i}{l_i} & CU_4 &= -\frac{4 \cos \phi_i}{l_{i-1}} \\ C_1 &= -3 \text{sen} \phi_i \frac{l_i + l_{i-1}}{l_i l_{i-1}} & C_2 &= -\frac{\text{sen} \phi_i}{l_i} \\ C_3 &= -\frac{\text{sen} \phi_i}{l_{i-1}} & C_4 &= -\frac{4 \text{sen} \phi_i}{l_{i-1}} \\ C_5 &= -\frac{4 \text{sen} \phi_i}{l_i} \end{aligned}$$

De (6.61) conclui-se que a equação de restrição correspondente a um nó i envolve as taxas de deslocamentos nos pontos nodais pertencentes aos dois elementos adjacentes a este nó. Quando estas taxas são definidas com base nos multiplicadores plásticos, através da Relação (6.35), cada equação de restrição estará lidando com os oito $\dot{\lambda}$'s de cinco nós. Conseqüentemente, cada restrição nodal é formulada em função de quarenta $\dot{\lambda}$'s e as duas variáveis correspondentes à rótula plástica, $\dot{\theta}_i^+$ e $\dot{\theta}_i^-$. O diagrama da combinação de variáveis das equações de restrição para toda a estrutura está apresentado na Fig. (6.7).

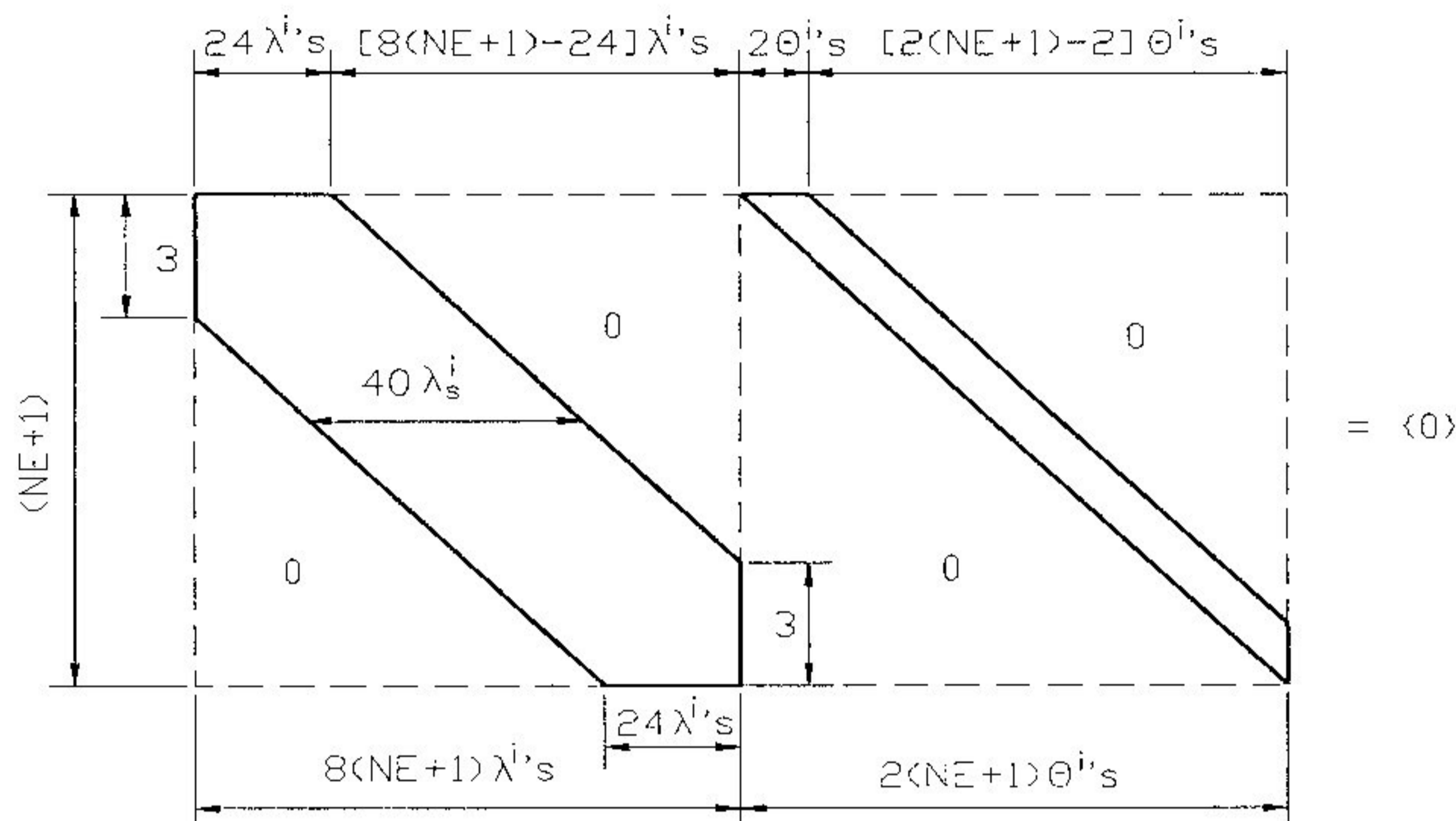


Figura 6.7: Diagrama das equações de restrição, $(NE + 1) \times 10(NE + 1)$

6.8.4 Condições de Contorno

As condições de contorno definidas na Seção (3.5.4) não se alteraram após a formulação da superfície de escoamento de dez planos. Sua adaptação ao problema de programação linear repete os procedimentos já adotados anteriormente. Através da Relação (6.35), desenvolvida no Apêndice (E), as Equações (3.62), (3.63), (3.64) e (3.65) são redefinidas em função dos multiplicadores plásticos.

6.9 Soluções Numéricas

Será analisado, primeiramente, o problema de uma casca cilíndrica sujeita aos dois tipos de carregamentos, descritos na Seção (6.8.1). Para verificação da técnica desenvolvida, os resultados serão comparados com os obtidos para a superfície hexagonal e com soluções analíticas. Os dados referentes à geometria da estrutura, bem como as soluções obtidas antes das modificações propostas neste capítulo, podem ser encontrados na Seção (4.4). Por último será apresentada a análise de uma casca cônica cujos resultados também serão comparados com os correspondentes à superfície hexagonal, além de outras soluções disponíveis na literatura.

Casca Cilíndrica Sujeita a uma Carga de Anel

Na Seção (4.4.1) o problema de uma casca cilíndrica sujeita a uma carga de anel, Fig. (4.1), foi analisado com o objetivo de se verificar a validade da equação de restrição, desenvolvida em função da distribuição das tensões elásticas ao longo da casca. Neste procedimento, usou-se o prisma hexagonal para definir as condições de escoamento. O mesmo problema foi resolvido após a implementação das modificações na técnica desenvolvida em [Franco, 1987], devido a introdução do novo elemento e da nova superfície de dez planos, Fig. (6.4(a)). Os resultados correspondentes a estas análises estão apresentados na Tabela (6.2). O termo “Comprimento do Mecanismo”, já foi utilizado na Seção (4.5.3), e se refere ao comprimento, ao longo da casca, da região em que ocorrem as deformações plásticas no momento do colapso. É, portanto, a distância, ρ , entre as duas rótulas plásticas extremas. Os resultados numéricos são também confrontados na Tabela (6.2), com os valores correspondentes à solução analítica de [Drucker, 1953], Equação (6.3). Essa comparação só é possível devido a ausência de carga axial que reduz a análise a um problema a duas dimensões. O tamanho do mecanismo obtido para a superfície hexagonal, Fig. (6.3), é obtido através da Equação (6.20).

Análise	$P_L/\sigma_o (m)$	$\rho (m)$
Numérica - Prisma Hexagonal	$0,44722 \cdot 10^{-2}$	$0,89443 \cdot 10^{-1}$
Numérica - Superfície de dez planos	$0,39096 \cdot 10^{-2}$	0,11250
Drucker - Retângulo Circunscrito	$0,44721 \cdot 10^{-2}$	$0,89443 \cdot 10^{-1}$
Drucker - Hexágono Inscrito	$0,38684 \cdot 10^{-2}$	0,11321

Tabela 6.2: Soluções para uma casca cilíndrica sujeita a uma carga de anel

O mecanismo de colapso para a superfície de dez planos foi calculado a partir da distância entre os nós 23 e 43, Fig. (6.8). Uma vez que a casca foi dividida em 64 elementos de comprimento $0,5625 \cdot 10^{-2}m$, o comprimento total do mecanismo é:

$$\rho = 20 \cdot 0,5625 \cdot 10^{-2} = 0,11250m$$

Sendo uma análise cinemática sabe-se que quanto menor a solução mais próxima está da exata. A carga de colapso obtida para a nova superfície satisfaz esta exigência. Sua precisão, entretanto, pode ser verificada comparando-se

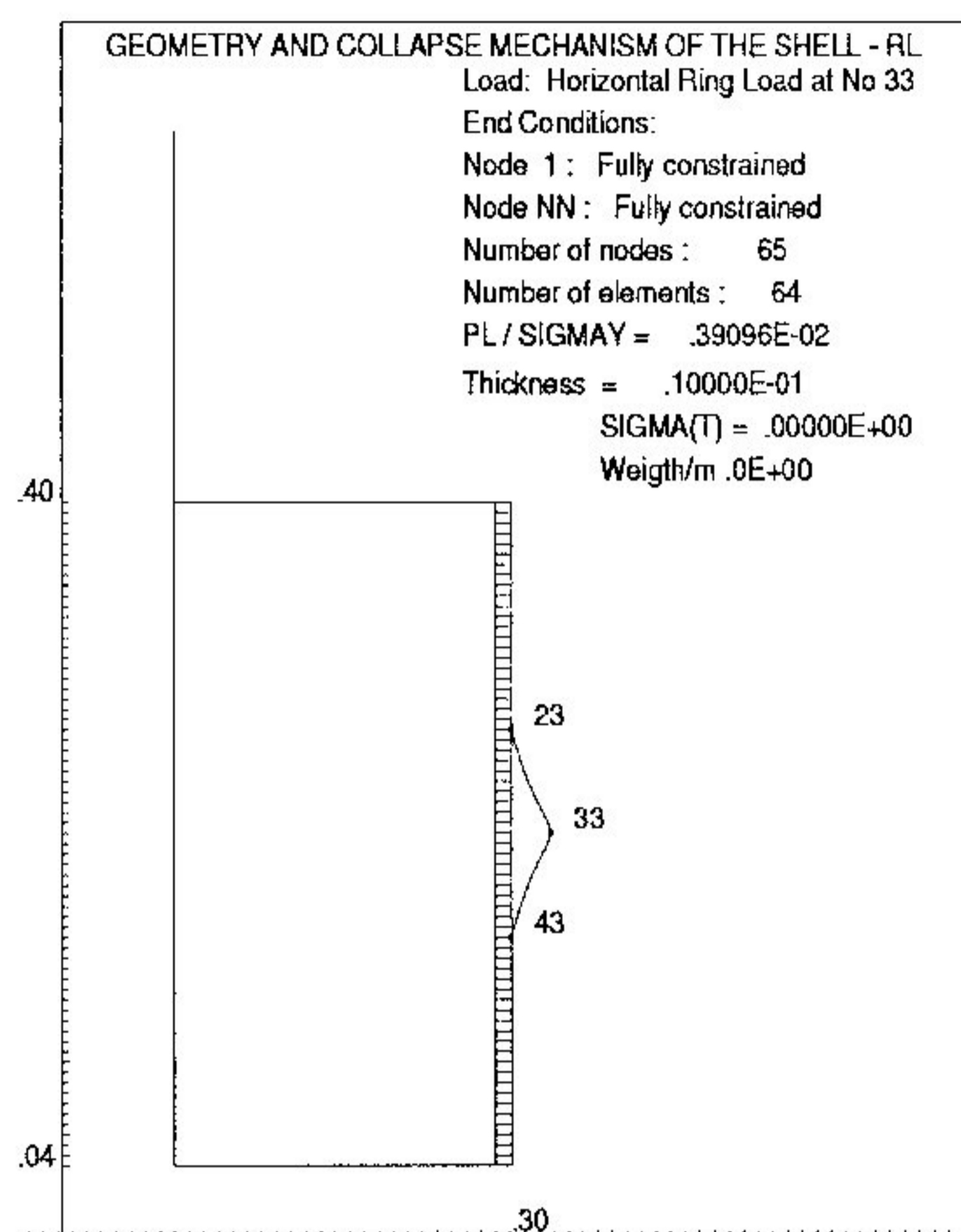


Figura 6.8: Solução para a casca cilíndrica sujeita a uma carga P de anel, para a nova superfície de escoamento

este resultado com a solução analítica para o hexágono inscrito. Os resultados foram bastante próximos, tanto para a carga de colapso, P_L , quanto para o comprimento do mecanismo, ρ . Este fato já era esperado. Para o prisma hexagonal a solução coincide exatamente com a obtida através do retângulo circunscrito, pois em ambas as formulações adotou-se o mecanismo cônico, Fig. (6.2). A introdução da superfície de dez planos permitiu que se considerasse o comportamento de flexão dentro do elemento, estando de acordo com o mecanismo adotado na análise realizada através do hexágono inscrito, Fig. (6.3). Enquanto na superfície de dez planos o campo das taxas de deslocamentos é interpolado por um polinômio do segundo grau, no caso do hexágono, ele é descrito através de funções trigonométricas e exponenciais, Equações (6.6). Esta diferença na definição do campo das taxas de deslocamentos explica porque, apesar de bem próximas, estas soluções não coincidiram.

Casca Cilíndrica Sujeita à Pressão Interna

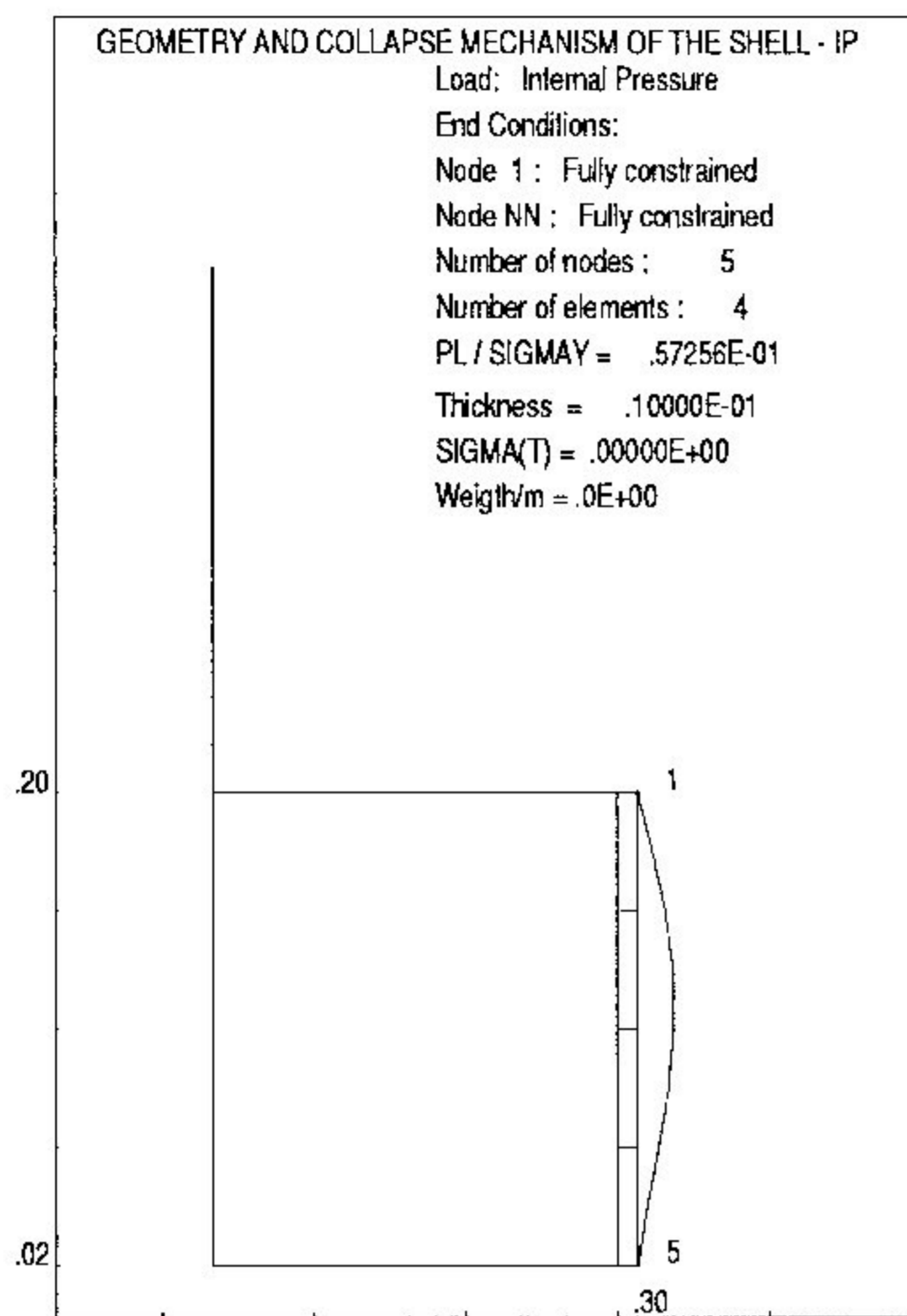
O problema da casca cilíndrica sujeita à pressão interna é analisado para a mesma geometria definida no estudo da carga de anel. Na Tabela (6.3), estão os resultados obtidos na Seção (4.4.2), para a análise numérica utilizando-se do prisma hexagonal e a solução analítica de [Hodge, 1963], Equação (4.26). Estes resultados são comparados ao encontrado, usando-se a superfície de dez planos como critério de escoamento, Fig. (6.9(a)). Nesse caso, o efeito do carregamento não é localizado, fazendo com que o mecanismo plástico englobe toda a estrutura. A coincidência entre os resultados obtidos na Seção (4.4.2) e através de [Hodge, 1963] é devido à utilização, em ambos os casos, da mesma superfície de escoamento, o prisma hexagonal. Com a introdução da nova superfície de dez planos, espera-se que o campo de deformações plásticas possa aproximar com maior precisão o mecanismo real. A solução encontrada para a carga de colapso, adotando-se esta superfície, é inferior às outras duas. Dentro da análise cinemática, onde a aproximação é feita pelo limite superior, este fato revela uma melhoria da solução que se encontra mais próxima da carga real.

Análise	P_L/σ_o
Numérica - Prisma Hexagonal	$0,53086 \cdot 10^{-1}$
Numérica - Superfície de dez planos	$0,51852 \cdot 10^{-1}$
[Hodge, 1963]	$0,53086 \cdot 10^{-1}$

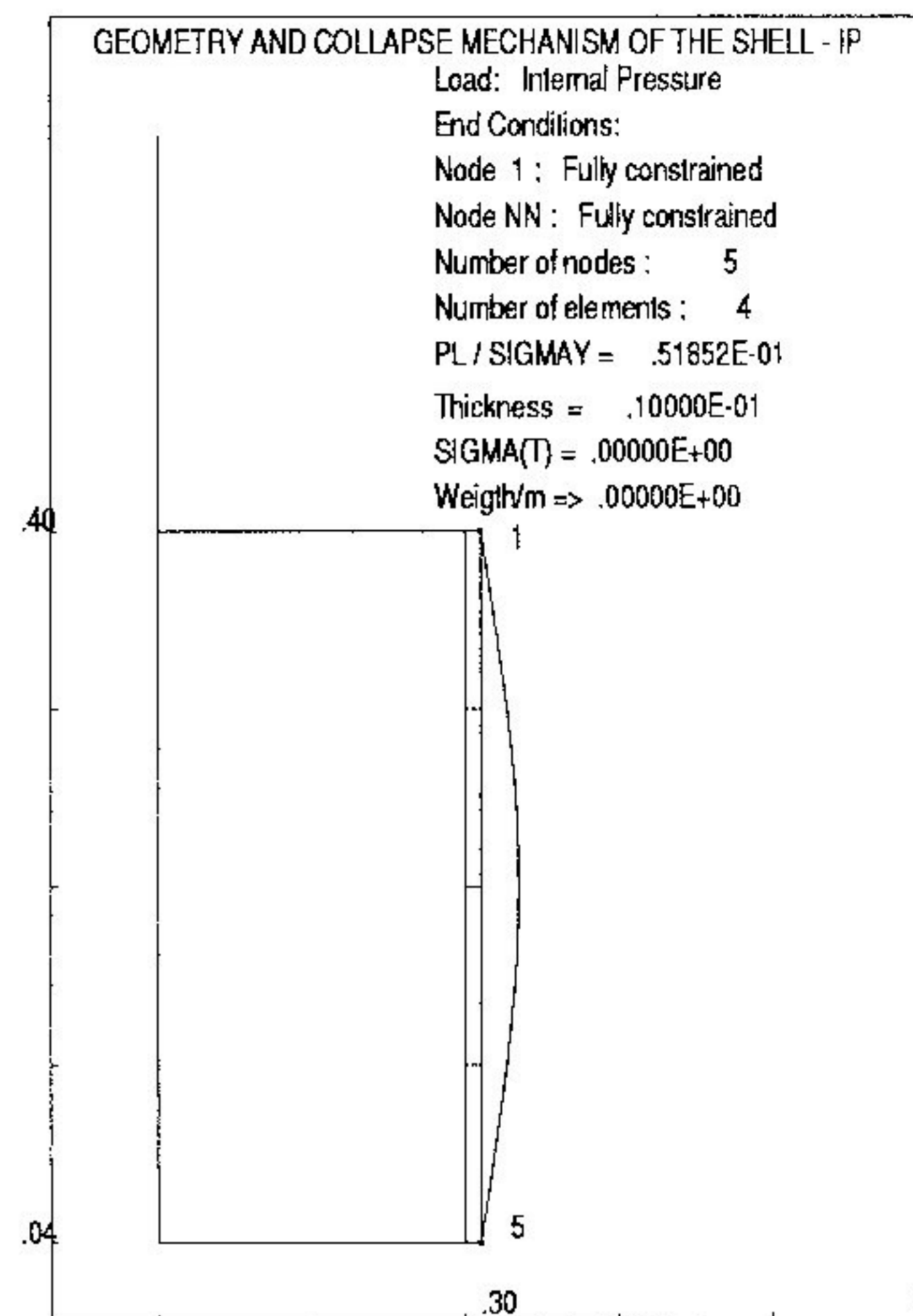
Tabela 6.3: Soluções para uma casca cilíndrica sujeita à pressão interna

A partir das Figs. (6.9(a) a 6.9(d)) é possível fazer-se uma análise do comportamento da casca quanto a variação de seu comprimento. A solução de membrana para uma casca cilíndrica é obtida pela seguinte fórmula:

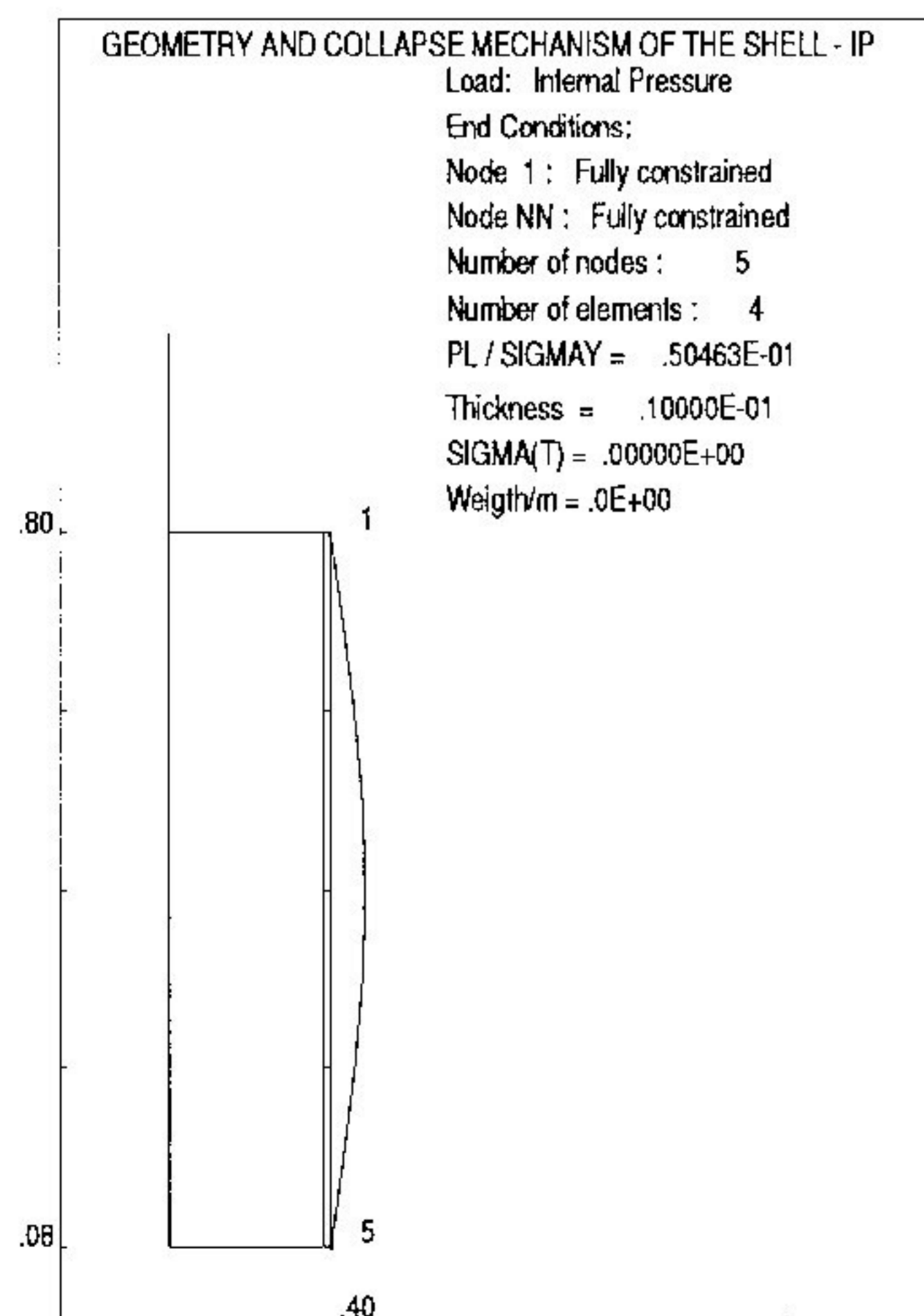
$$\frac{P_L}{\sigma_o} = \frac{t}{r}$$



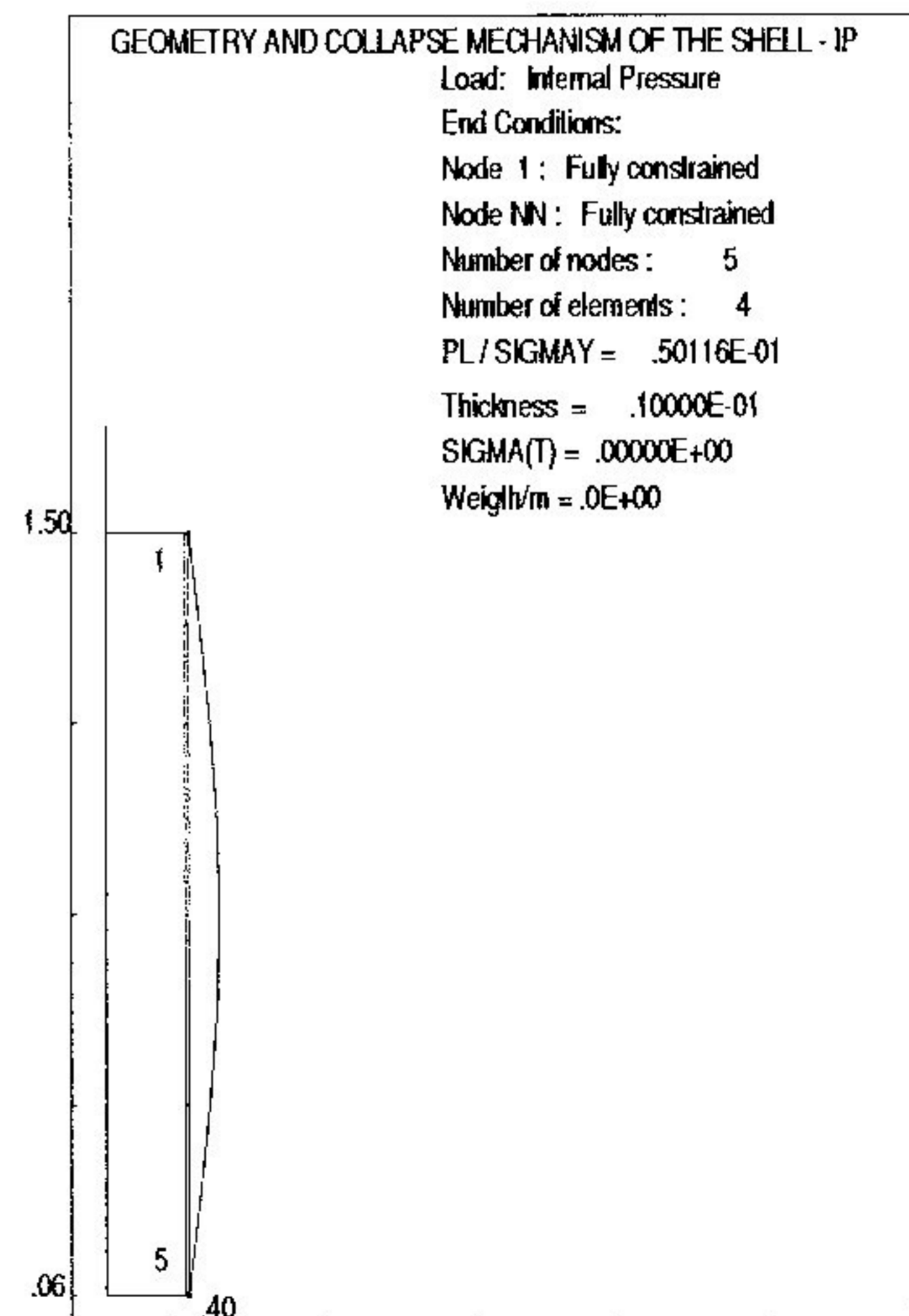
(a) Casca cilíndrica de comprimento
 0,18m



(b) Casca cilíndrica de comprimento
 0,36m



(c) Casca cilíndrica de comprimento
 0,72m



(d) Casca cilíndrica de comprimento
 1,44m

Figura 6.9: Soluções para a casca cilíndrica sujeita à pressão interna, raio $r = 20\text{cm}$ e espessura $t = 1\text{cm}$

Portanto, para a geometria do problema analisado nesta seção, a carga correspondente ao colapso da estrutura, devido apenas aos esforços de membrana, seria $P_L/\sigma_o = 0.05$. Na Fig. (6.9(d)), onde se tem a casca cilíndrica de maior comprimento, a carga de colapso encontra-se bem próxima deste valor, indicando uma tendência de comportamento de membrana para a estrutura. À medida que o comprimento da casca é reduzido, o comportamento de flexão passa a predominar, produzindo um acréscimo nos valores para a carga de colapso. Sabe-se, da teoria de cascas finas, [Kelkar e Sewell, 1987], que os esforços de flexão decorrentes da restrição nos apoios, são função do raio e espessura da casca, entre outros valores. Seu efeito, no entanto, devido sua distribuição exponencial, limita-se a regiões próximas ao apoio, como já foi discutido na Seção (4.5). Para determinadas combinações de raio e espessura, os esforços de flexão podem assumir valores significativos na região central da casca, caso seu comprimento seja pequeno. Se isso ocorrer poderá haver, inclusive, a formação de uma terceira rótula nessa região. Na Fig. (6.10) esse caso é verificado, reduzindo-se, para 10cm, o comprimento da casca cilíndrica analisada.

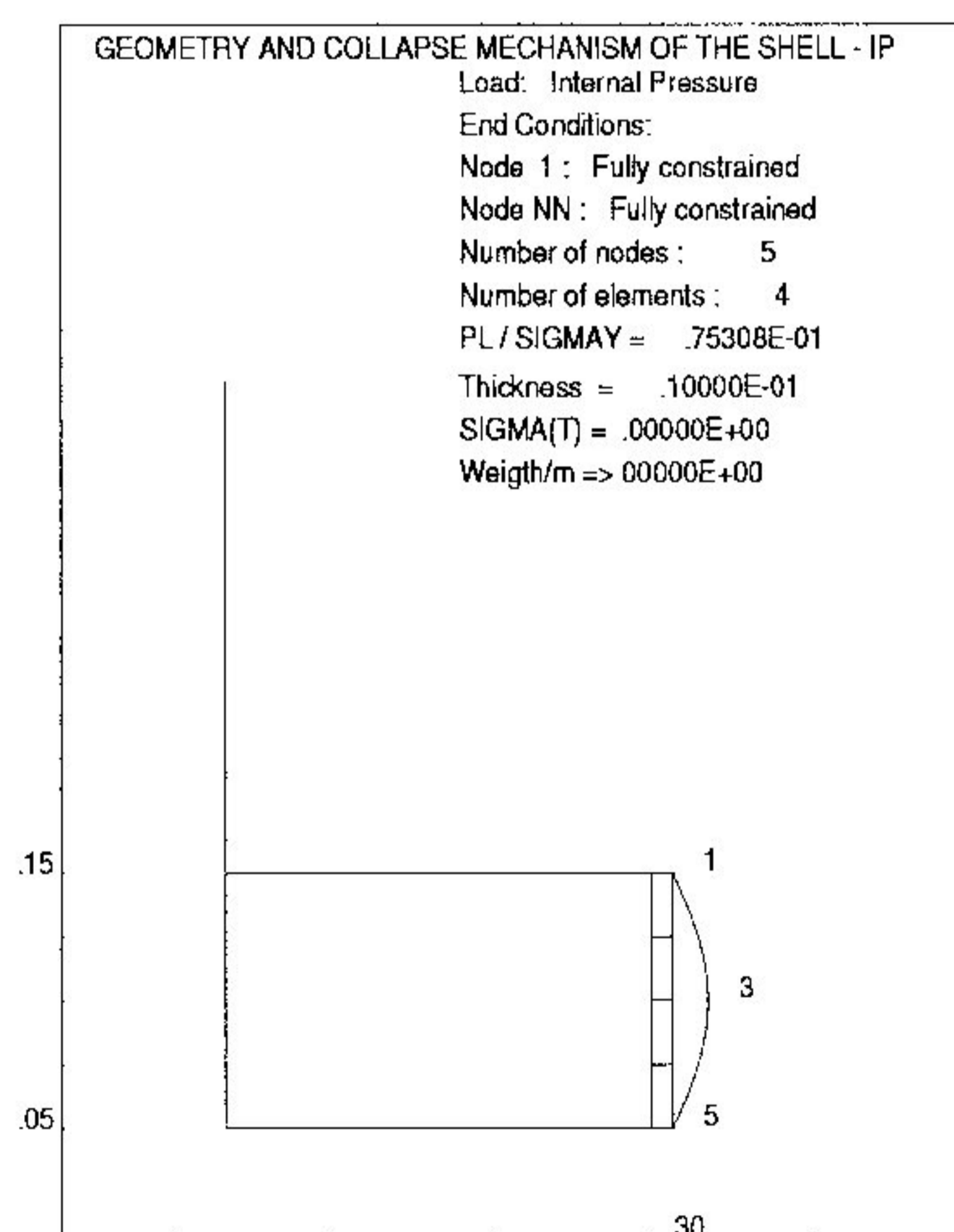


Figura 6.10: Casca cilíndrica sujeita à pressão interna - Solução com a presença da rótula central

Concluindo, pode-se afirmar que a presença da rótula central para o caso do mecanismo cônico era devido apenas às limitações impostas por aquela formulação. O elemento desenvolvido tinha um comportamento exclusivo de membrana e a formação do mecanismo só era possível com o aparecimento dessa rótula. A inclusão da mudança de curvatura para o novo elemento permite uma transição suave do campo de deformações entre os dois apoios, sem a necessidade de se formar a rótula central. Esse comportamento, certamente, está mais próximo da realidade, principalmente para cilindros longos onde predominam os esforços de membrana. Com o novo elemento e a nova superfície, a rótula central aparecerá somente quando as distribuições dos momentos a partir dos apoios exercerem influência na região central da estrutura, através da interação entre as mesmas. Conseguiu-se, assim, através dessa nova formulação, desenvolver um modelo para o mecanismo de colapso mais preciso e mais realístico.

Casca Cônica Sujeita à Pressão Interna

Na Fig. (6.11) a relação entre os parâmetros geométricos de uma casca cônica engastada em sua extremidade inferior é definida. Apesar de ser um problema teórico, a análise dessa estrutura é válida como forma de demonstrar o aperfeiçoamento da técnica, utilizada nessa dissertação, após a implementação da nova superfície de escoamento e do novo elemento.

Na Tabela (6.4) procura-se comparar os resultados das análises cinemáticas, realizadas por [Morelle, 1986] e [Ponter, et al, 1990], com aqueles obtidos pela presente técnica, utilizando-se a condição de escoamento definida pelo prisma hexagonal e pela superfície de dez planos.

Análise	P_L/σ_o
[Morelle, 1986]	$0,48168 \cdot 10^{-1}$
[Ponter, et al, 1990]	$0,518 \cdot 10^{-1}$
Prisma hexagonal	$0,52100 \cdot 10^{-1}$
Superfície de dez planos	$0,47360 \cdot 10^{-1}$

Tabela 6.4: Soluções para uma casca cônica sujeita à pressão interna

Os resultados para a análise numérica realizada pela técnica de ele-

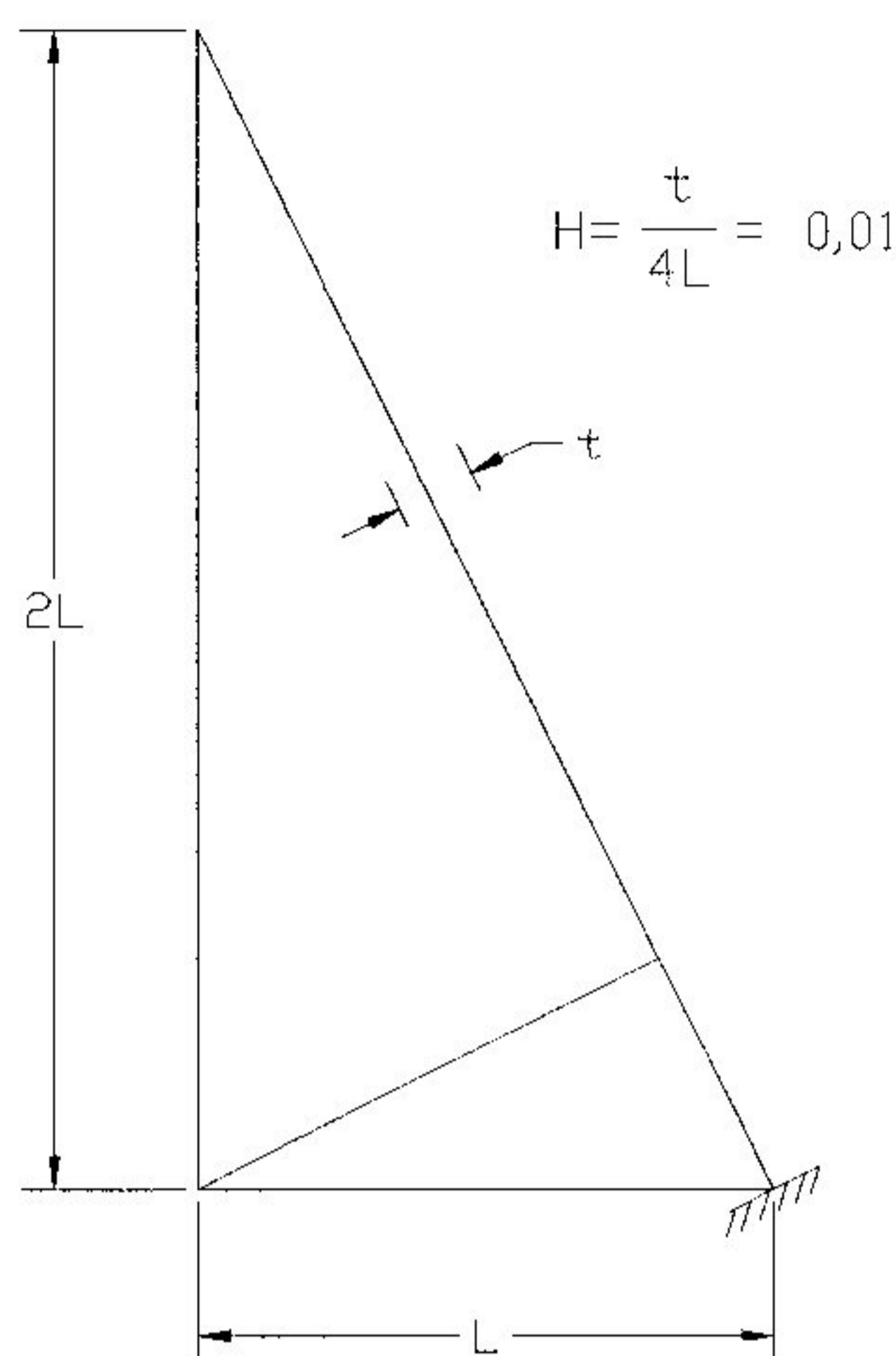
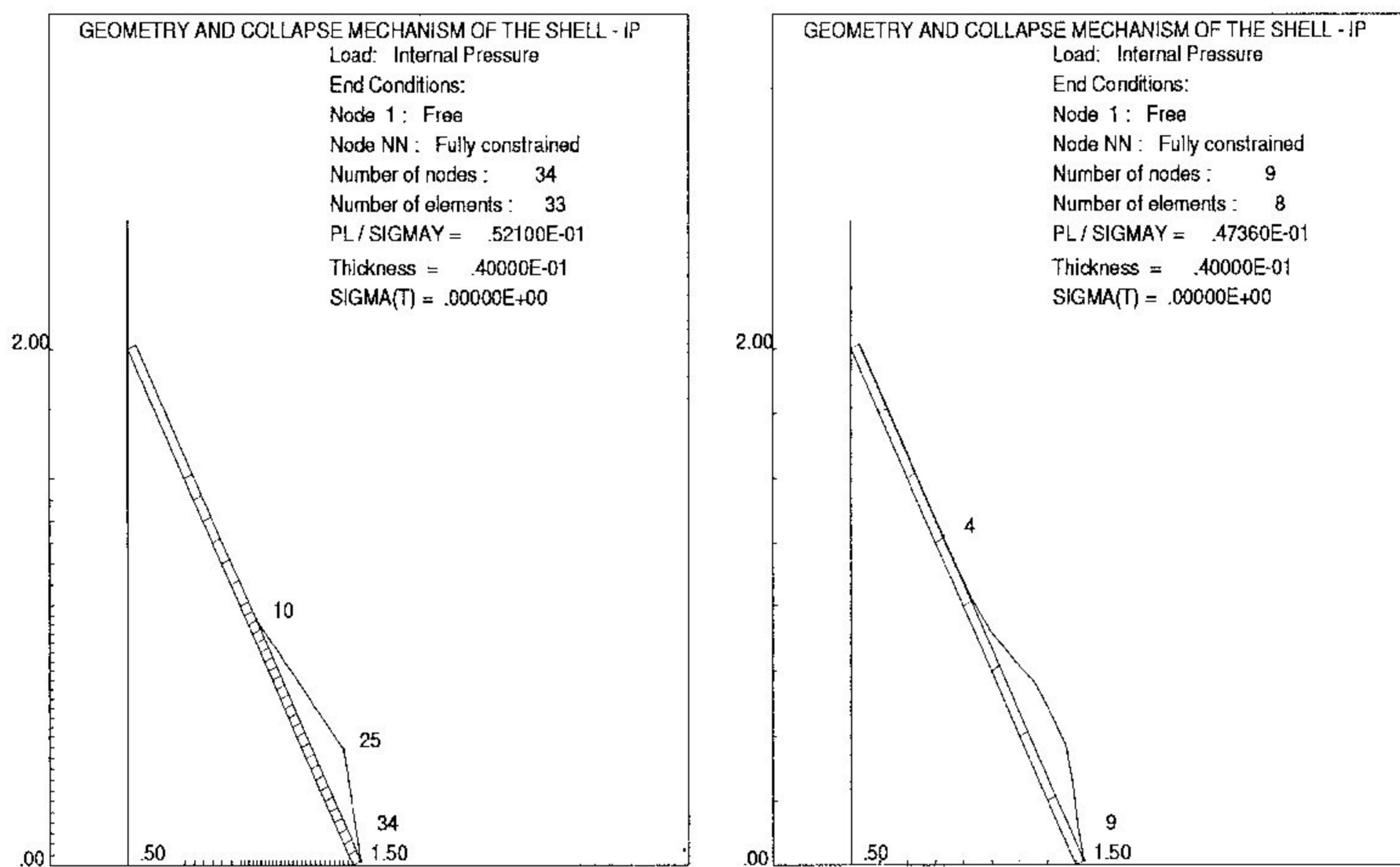


Figura 6.11: Casca Cônica - Geometria

mentos finitos apresentada neste trabalho, através das duas superfícies de escoamento, são ilustrados pelas Figs. (6.12(a)) e (6.12(b)). Sobre o mecanismo de colapso obtido, duas informações precisam ser discutidas. A rótula no ponto nodal 4, Fig.(6.12(b)), pode ser desprezada pois o valor da rotação calculada nesse local é muito pequeno, se comparado à rotação presente no último nó. Essa conclusão pode ser facilmente verificada observando-se a suavidade da mudança na geometria da casca, entre os elementos 3 e 4, adjacentes ao nó 4. Outra informação importante se refere à ausência da rótula central, ao contrário do que ocorre na Fig. (6.12(a)). Assim como no problema da casca cilíndrica sujeita a uma pressão interna, aqui o efeito de flexão proveniente das restrições no apoio, exercerá influência apenas localmente. O mecanismo cônico, consequência do emprego do prisma hexagonal, não permite que isso ocorra, gerando aproximações super-estimadas para a carga de colapso. A partir da nova superfície de dez planos, a curvatura meridional é introduzida dentro do elemento, possibilitando a obtenção de mecanismos mais precisos e, portanto, de cargas menores, para um número relativamente pequeno de elementos. De fato, com apenas 8 elementos foi possível chegar a uma melhor solução do que a obtida com 33 elementos, adotando-se o prisma hexagonal como superfície de escoamento.

Em função dos resultados apresentados para as cascas cilíndricas e cônicas, pode-se concluir que as modificações sugeridas neste capítulo representam um avanço para a técnica desenvolvida em [Franco, 1987]. Os problemas analisados correspondem, no entanto, às cascas cujas linhas meridionais são retas. A formulação apresentada abrange também as cascas curvas e sua implementação e verificação ficará a cargo de futuros trabalhos.



(a) Solução obtida a partir do prisma hexagonal

(b) Solução obtida a partir da superfície de dez planos

Figura 6.12: Solução e Mecanismo de Colapso, para uma casca cônica com espessura $t = 4\text{cm}$

Capítulo 7

Considerações Finais

7.1 Introdução

Ao longo desta dissertação, procurou-se apresentar as diversas contribuições, realizadas para a melhoria da técnica de elementos finitos para análise limite e de “shakedown”, proposta em [Franco, 1987]. Nos dois primeiros capítulos foi feita uma rápida revisão de conceitos básicos e os principais aspectos da técnica de análise foram descritos. As mudanças propostas para o seu aperfeiçoamento são encontradas no restante do texto. Para cada tópico introduzido, ao lado da formulação desenvolvida, foram analisados alguns exemplos, através dos quais demonstrou-se o sucesso da implementação realizada. Neste último capítulo pretende-se reunir as conclusões registradas anteriormente para que se tenha uma visão global do avanço alcançado ao final desta pesquisa. São apresentadas, também, algumas sugestões para trabalhos futuros, importantes para o desenvolvimento de uma nova tecnologia no campo de análise limite de “shakedown” de vasos de pressão.

7.2 Conclusões

A proposta do trabalho apresentado no Capítulo (4) foi, a princípio, realizar um estudo da saia de sustentação de um tambor de coqueamento, através da técnica de análise limite de elementos finitos, já desenvolvida. As modificações introduzidas, para se adequar este caso ao algoritmo existente, contribuíram para a obtenção de um procedimento, onde a solução elástica do problema é utilizada em substituição ao carregamento indireto. A verificação de tal procedimento foi realizada através de alguns exemplos e ao final foi feito o estudo da saia de sustentação. Além da determinação da temperatura de colapso a análise incluiu ainda um estudo dos deslocamentos ao longo da estrutura, verificando-se que a formação do mecanismo plástico constitui-se um fenômeno localizado. A interferência do peso do tambor de coque na resistência última da estrutura foi também avaliada. Concluiu-se que, para a condição de escoamento definida pelo prisma hexagonal, a presença de uma carga vertical, no topo da saia, somente produziria algum efeito se fosse de tração.

O trabalho desenvolvido no Capítulo (5), apesar de estar ainda em seu estágio inicial, gerou resultados bastante satisfatórios, o que pode ser constatado através dos problemas estudados. A análise dos gráficos apresentados demonstrou que o estimador de erro proposto supera as limitações do indicador até então usado, produzindo uma medida quantitativa para o erro da malha de elementos finitos. Verificou-se, ainda, a confiabilidade da chamada solução melhorada, $\hat{\epsilon}_e^2$, que mesmo para malhas grossas aproximou-se da solução exata. Implementou-se, também, uma estratégia de refinamento adaptativo fundamentada no estimador de erro desenvolvido. Os resultados provenientes de sua aplicação foram significativamente melhorados, obtendo-se taxas de convergência muito superiores com relação ao refinamento uniforme.

Finalmente, no Capítulo (6), foi introduzida uma condição de escoamento mais sofisticado proveniente da linearização da superfície de escoamento exata de cascas cilíndricas axi-simétricas. Para sua adaptação à técnica de análise limite e de “shakedown” utilizada, um novo elemento finito e um campo de deslocamentos correspondente teve que ser desenvolvido. Essa formulação foi testada e verificada através de três problemas, dois de cascas cilíndricas e um de casca cônica. Para

todos eles, os resultados para as cargas de colapso foram melhores do que os obtidos com o elemento e superfície de escoamento anteriores. Também o novo mecanismo plástico, mais realístico, devido à consideração da taxa de mudança de curvatura no interior dos elementos, mostrou-se sensível à variação dos parâmetros geométricos, ao contrário do que ocorria anteriormente.

Após a discussão acima, pode-se, então, afirmar que o objetivo deste trabalho, estabelecido no primeiro capítulo, foi contemplado. As alterações realizadas na técnica desenvolvida em [Franco, 1987] e [Franco e Ponter, 1994a] e verificadas por meio dos diversos exemplos propostos nesta dissertação representaram um avanço significativo para o desenvolvimento desta tecnologia.

7.3 Sugestões para Futuros Trabalhos

Durante a realização desta pesquisa, diversas questões relacionadas com o caminho escolhido para a solução dos temas propostos, foram levantadas. Muitas delas foram esclarecidas, naturalmente, à medida que a formulação era desenvolvida. As demais, porém, continuaram presentes, e foram algumas vezes citadas ao longo desta dissertação. O que se faz a seguir é, reunindo tais questões, sugerir alguns estudos, como forma complementar deste trabalho, tornando a técnica utilizada, mais eficiente e abrangente.

Com relação ao estudo realizado na saia de sustentação do tambor de coque, há ainda um extenso caminho a ser percorrido. Para a análise da resistência última, os esforços de compatibilização entre a saia e o tambor foram tratados como cargas estáticas. São, entretanto, cíclicas, assim como o gradiente de temperatura ao longo do comprimento da saia. A realização de uma análise completa de “shakedown” somente seria possível após a consideração deste carregamento. Para isso, a função de custo precisa ser alterada com a introdução de cargas dependentes do tempo. Esse procedimento está descrito em [Franco, 1987], que com base nos teoremas cinemáticos de Koiter, estabelece os fundamentos para tal implementação. A novidade, para esse caso, seria o carregamento indireto, provocado pela presença do tambor. A utilização da solução elástica, favorece, entretanto, tal procedimento, uma vez que o carregamento é introduzido em função dos esforços solicitantes. Ao final,

para que se tenha uma idéia global do comportamento da estrutura, uma análise, envolvendo todos os seus elementos de cascas, precisaria ser realizada. Estes elementos (cascas cilíndricas, toroidais, esféricas e cônicas) e algumas combinações (cascas toro-esféricas e cilíndrico-esféricas), já se encontram implementados, restando apenas interagi-las entre si.

Os resultados favoráveis, para a implementação do estimador de erro e do processo adaptativo do Capítulo (5), servem como um estímulo para futuros desenvolvimentos nesse tópico. Algumas conclusões obtidas intuitivamente, e embasadas pelos resultados apresentados, merecem uma formulação matemática mais sólida. O estabelecimento de uma maneira sistemática de separar o erro proveniente da determinação do mecanismo de colapso do erro de discretização contribuiria para uma maior eficiência do estimador. A implementação dos processos adaptativos do tipo r e p e sua combinação com o processo h apresenta-se, também, como uma realidade bastante viável.

A implementação do novo elemento e da condição de escoamento regida pela nova superfície de dez planos torna possível outras propostas de trabalhos, interagindo-a com os desenvolvimentos anteriores. Primeiramente, sua aplicação na análise da saia de sustentação permitiria uma interpretação mais precisa de seu comportamento e da interferência do peso do tambor. A introdução da taxa de mudança de curvatura no interior do elemento permitiria que a força axial contribuisse para a determinação do colapso, mesmo para os casos de compressão. Muitas das questões levantadas ao final do Capítulo (5) poderiam ser esclarecidas a partir da nova superfície. A condição de aproximação pela média para os campos de taxas de deformação independentes na direção meridional, não mais existe para a nova condição de escoamento. O refinamento poderia, portanto, ser realizado com muito mais eficiência, uma vez que o erro de discretização já não persistiria. Antes disso, entretanto, um estudo da relação de consistência entre os campos de taxa de deformação, analogamente ao que foi feito na Seção (3.4.2), precisaria ser realizado. Sendo assim, as estruturas de cascas curvas, cuja formulação para os elementos já se encontra estabelecida, poderiam ser analisadas. Finalmente uma superfície de escoamento mais complexa, com doze planos, [Franco, 1993], possibilitando a interação entre as taxas de mudança de curvatura e de deformação na direção axial, produziria uma técnica muito mais abrangente.

Uma série de outras alterações, que contribuiriam para o aprimoramento da técnica, podem ainda ser citados. A substituição da atual rotina de programação linear por outra mais robusta eliminaria, talvez, alguns problemas de instabilidade numérica. A conversão do código escrito na linguagem FORTRAN-77 para a linguagem C tornaria o programa mais flexível em sua interação com a arquitetura da máquina. A substituição das rotinas gráficas, usadas atualmente, por pacotes mais completos, permitiria a apresentação dos dados em três dimensões, tornado mais clara sua interpretação.

Todas as sugestões acima representam, em uma primeira análise, propostas de trabalhos altamente viáveis. É verdade que essa conclusão deve ser analisada com o devido cuidado. Sabe-se, porém que os primeiros passos, para o estabelecimento de uma técnica eficiente de análise limite e de “shakedown”, foram dados e que as soluções obtidas nesta dissertação tornam o prosseguimento desta pesquisa bastante promissor.

Referências Bibliográficas

- [1] [Brauchli e Oden, 1971]: Brauchli, H e Oden, J. T; “*Conjugate Approximation Function in Finite-Element Analysis*”, Quarterly of Applied Mathematics, vol. 29, 65-90, 1971.
- [2] [Chen e Han, 1988]: Chen, W. F. e Han, D. J.; “*Plasticity for Structural Engineers*”, Springer-Verlag New York Inc., 1988.
- [3] [Conte e Boor, 1980]: Conte, S. D., Boor, C.; “*Elementary Numerical Analysis - An Algorithmic Approach*”, McGraw-Hill Book, Inc., 1980.
- [4] [Corradi, 1983]: Corradi, L.; “*A Displacement Formulation for the Finite Element Elastic-Plastic Problem*”, Meccanica, 18, pp. 77-91, 1983.
- [5] [Drucker, 1953]: Drucker, D. C.; “*Limit Analysis of Cylindrical Shells Under Axially-symmetric Loading*”, Proc. 1st Midwest Conf. Solids Mech., Urbana, Ill, pp. 158-163, 1953.
- [6] [Drucker, 1967]: Drucker, D. C.; “*Introduction to mechanics of deformable solids*”, McGraw-Hill Book, Inc., 1967.
- [7] [Drucker et al., 1951]: Drucker, D. C., Prager, W., Greenberg, H. J.; “*Extended Limit Design Theorems for Continuous Media*”, Contract N7 onr-358, Office of Naval Research/Brown University, 1951.
- [8] [Drucker e Shield, 1958]: Drucker, D. C. e Shield, R. T.; “*Limit Analysis of Symmetrically Loaded Thin Shells of Revolution*”, J. Appl. Mech., vol. 25, Trans. ASME 1958.

- [9] [Duarte, 1991]: Duarte, C. A. M.; “*Estudo da versão p do Método de Elementos Finitos para Problemas da Elasticidade e de Potencial*”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Novembro de 1991
- [10] [Figueiredo, 1992]: Figueiredo, A. M. G.; “*Processo Adaptativo R-H Global Conjugado com Método Multimalha para Elementos Finitos*”, Dissertação de Mestrado do DEES/EEUFMG, Fevereiro de 1992.
- [11] [Figueiredo, 1992]: Figueiredo, A. M. G.; “*Processo Adaptativo R-H Global Conjugado com Método Multimalha para Elementos Finitos*”, Dissertação de Mestrado do DEES/EEUFMG, 1992.
- [12] [Franco, 1987]: Franco, J. R. Q.; “*Bounding Techniques in Shakedown and Ratchetting*”, Ph.D. Thesis, University of Leicester, 1987.
- [13] [Franco, 1993]: Franco, J. R. Q.; “*An Improved Displacement Formulation for the Finite Element Computation of Shakedown Problems on Axisymmetrical Shells*”, TICON Report 93-09 1993.
- [14] [Franco e Ponter, 1994a]: Franco, J. R. Q. e Ponter, A. R. S.; “*A General Technique for the Finite Element Shakedown and Limit Analysis of Axisymmetrical Shells - Part 1 - Theory and Fundamental Relations*”, TICAM Report 94-04, University of Texas at Austin, 1994.
- [15] [Franco e Ponter, 1994b]: Franco, J. R. Q. e Ponter, A. R. S.; “*A General Technique for the Finite Element Shakedown and Limit Analysis of Axisymmetrical Shells - Part 2 - Numerical Algorithm and Applications*”, TICAM Report 94-04, University of Texas at Austin, 1994.
- [16] [Franco e Ponter, 1994b]: Franco, J. R. Q. e Ponter, A. R. S.; “*A General Technique for the Finite Element Shakedown and Limit Analysis of Axisymmetrical Shells - Numerical Algorithm and Applications*”, In. J. for Num. Meth. in Eng., a ser publicado.
- [17] [Franco et al, 1995]: Franco, J. R. Q., Ponter, A. R. S.; e Oden, J. T., “*Métodos Adaptativos de Elementos Finitos para a Computação de Problemas de Cargas Limites e de Shakedown de Cascas Axi-simétricas*”, Revista Internacional de Métodos Computacionais em Ingeniería, 1995.

- [18] [Hodge, 1960]: Hodge, P. G. Jr.; “*Yield Conditions for Rotationally Symmetric Shells Under Axisymmetric Loading*”, Journal of Applied Mechanics, 27, 323-331, June 1960.
- [19] [Hodge, 1963]: Hodge, P. G. Jr.; “*Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells*”, Prentice-Hall, Inc., 1963.
- [20] [Karedeniz, 1983]: Karedeniz, S.; “*The Development of Upper Bound and Associated Finite Element Techniques for the Plastic Shakedown of Thermally Loaded Structures*”, Ph.D. Thesis, Leicester University, 1983.
- [21] [Karedeniz e Ponter, 1984]: Karedeniz, S. e Ponter, A. R. S.; “*A Linear Programming Upper Bound Approach to the Shakedown Limit of Thin Shells Subjected to Variable Thermal Loading*”, J. of Strain Analysis, vol. 19, n° 4, 221-229, 1984.
- [22] [Kelkar e Sewell, 1987]: Kelkar, V. S. and Sewell, R. T.; “*Fundamentals of the Analysis and Design of Shell Structures*”, Prentice-Hall, Inc., pp. 82-111, 1987.
- [23] [Koiter, 1956]: Koiter, W. T.; “*A New General Theorem on Shakedown of Elastic Plastic Structures*”, Proc. Konk. Ned. Akad. Wett., B. 59, pp. 24-34, 1956.
- [24] [Magalhães, 1994]: Magalhães, M. C.; “*Análise de Estimador de Erro Baseado em Técnica Superconvergente de Recuperação para o Método dos Elementos Finitos*”, Dissertação de Mestrado do DEES/EEUFMG, 1994.
- [25] [Malvern, 1969]: Malvern, L. E.; “*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*”, Prentice-Hall, Inc., 1969.
- [26] [Matos e Ramos, 1984]: Matos, P. L. e Ramos, M. A.; “*Relatório de Viagem à RPBC - Problemas na Suportação dos Tambores de Coqueamento*”, Comunicação Técnica SEMEC-123/84, CEMPES, Rio de Janeiro, Setembro de 1984.
- [27] [Morelle, 1986]: Morelle, P.; “*Numerical Shakedown Analysis of Axisymmetric Sandwich Shells*”, Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 23, 2071-2088, 1986.
- [28] [Becker et al., 1981]: Becker, B. E., Carcy, G. F., Oden, J. T.; “*Finite Elements - An Introduction - Vol I*”, Prentice-Hall, Inc., 1981.

- [29] [Oden e Brauchli, 1971]: Oden, J. T. e Brauchli, H. J.; “*On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximations*”, Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 3, 317-325, 1971.
- [30] [Oden e Reddy, 1973]: Oden, J. T. e Reddy, J. N.; “*Note on an Approximation Method for Computing Consistent Conjugate Stresses in Elastic Finite Elements*”, Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 6, 55-61, 1973.
- [31] [Onat e Prager, 1954]: Onat, E. T. e Prager W.; “*Limite Analyses of Shell of Revolution*”, Proc. Roy. Netherlands Acad. Sci., vol. 57, 534-548, 1954.
- [32] [Onat, 1955]: Onat, E. T.; “*The Plastic Collapse of Cylindrical Shells Under Axially Symmetrical Loading*”, Quartely of Applied Mathematics, vol. 33, 63-72, 1955.
- [33] [Ponter, et al, 1990]: Ponter, A. R. S., Karadeniz, S. e Carter, K. F.; “*The Computation of Shakedown Limits for Structural Components Subjected to Variable Thermal Loading*”, Report EUR 12686, Directorate General, Science, Research and Development, Commission of the European Communities, Brussels, Chap. W, 93, 1990.
- [34] [Prager, 1959]: Prager, W.; “*An introduction to Plasticity*”, Addison-Wesley Publish. Co., Inc., 1959.
- [35] [Shield e Drucker, 1958]: Shield, R. T. e Drucker, D. C.; “*Limit Strength of Thin Walled Pressure Vessels with an ASME Standard Torispherical Head*”, Congress. of Applied Mechanics, 665-672, 1959.
- [36] [Stasa, 1985]: Stasa, F. L.; “*Applied Finite Element Analysis for Engineers*”, CBS Publishing, 1985.
- [37] [Timoshenko e Krieger, 1959]: Timoshenko S., Woinowsky-Krieger, S.; “*Theory of Plates and Shells*”, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.
- [38] [Ugural, 1981]: Ugural, A. C.; “*Stresses in Plates and Shells*”, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1981.
- [39] [Washizu, 1982]: Washizu, K., “*Variational Methods in Elasticity and Plasticity*”, Pergamon Press Ltd., 1982.

- [40] [Weaver e Gere, 1980: Weaver, W., Jr., e Gere, J. M.; “*Matrix Analysis of Framed Structures*”, Van Nostrand Reinhold Company, Inc., 2^a ed., 1980.
- [41] [Zienkiewicz e Morgan, 1983]: Zienkiewicz, O. C. e Morgan, K.; “*Finite Elements and Approximation*”, John Wiley & Sons, Inc., 1983.
- [42] [Zienkiewicz e Taylor, 1989a]: Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L.; “*The Finite Element Method - 4th ed. - Vol. 1 - Basic formulation and linear problems*”, McGraw-Hill International, Inc, 1989 Editions.
- [43] [Zienkiewicz e Taylor, 1989b]: Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L.; “*The Finite Element Method - 4th ed. - Vol. 2 - Solid and fluid mechanics Dynamics and non-linearity*”, McGraw-Hill International, Inc., 1991 Editions.
- [44] [Zienkiewicz et al., 1989]: Zienkiewicz, O. C., Zhu, J. Z. e Gong, N. G.; “*Effective and practical h-p-version adaptive analysis procedures for the finite element method*”, In. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 28, pp. 879-891, 1989.
- [45] [Zienkiewicz e Zhu, 1987]: Zienkiewicz, O. C. e Zhu, J. Z.; “*A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis*”, In. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 24, pp. 337-357, 1987.
- [46] [Zienkiewicz e Zhu, 1992a]: Zienkiewicz, O. C. e Zhu, J. Z.; “*The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique*”, In. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 33, pp. 1331-1364, 1992.
- [47] [Zienkiewicz e Zhu, 1992b]: Zienkiewicz, O. C. e Zhu, J. Z.; “*The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 2: Error Estimates and Adaptivity*”, In. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 33, pp. 1365-1382, 1992.

Bibliografia

Brauchli, H e Oden, J. T.; “*Conjugate Approximation Function in Finite-Element Analysis*”, Quarterly of Applied Mathematics, vol. 29, 65-90, 1971.

Chen, W. F. e Han, D. J.; “*Plasticity for Structural Engineers*”, Springer-Verlag New York Inc., 1988.

Conte, S. D., Boor, C.; “*Elementary Numerical Analysis - An Algorithmic Approach*”, McGraw-Hill Book, Inc., 1980.

Corradi, L.; “*A Displacement Formulation for the Finite Element Elastic-Plastic Problem*”, Meccanica, 18, pp. 77-91, 1983.

Becker, B. E., Carey, G. F., Oden, J. T.; “*Finite Elements - An Introduction - Vol I*”, Prentice-Hall, Inc., 1981.

Bree, J.; “*Elastic-plastic Behaviour of Thin Tubes Subjected to Internal Pressure and Intermittent High-heat Fluxes with Application to Fast-nuclear-reactor Fuel Elements*”, Journal of Strain Analysis, vol. 2, n° 3, 1967.

Bree, J.; “*Incremental Growth Due to Creep and Plastic Yielding of Thin Tubes Subjected to Internal Pressure and Cyclic Thermal Stresses*”, Journal of Strain Analysis, vol. 3, n° 2, 1968.

Drucker, D. C.; “*Limit Analysis of Cylindrical Shells Under Axially-symmetric Loading*”, Proc. 1st Midwest Conf. Solids Mech., Urbana, Ill, pp. 158-163, 1953.

Drucker, D. C.; “*Introduction to mechanics of deformable solids*”, McGraw-Hill Book, Inc., 1967.

Drucker, D. C., Prager, W., Greenberg, H. J.; "*Extended Limit Design Theorems for Continuous Media*", Contract N7 onr-358, Office of Naval Research/Brown University, 1951.

Drucker, D. C. e Shield, R. T.; "*Limit Analysis of Symmetrically Loaded Thin Shells of Revolution*", J. Appl. Mech., vol. 25, Trans. ASME 1958.

Duarte, C. A. M.; "*Estudo da versão p do Método de Elementos Finitos para Problemas da Elasticidade e de Potencial*", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Novembro de 1991

Figueiredo, A. M. G.; "*Processo Adaptativo R-H Global Conjugado com Método Multimalha para Elementos Finitos*", Dissertação de Mestrado do DEES/EEUFMG, Fevereiro de 1992.

Figueiredo, A. M. G.; "*Processo Adaptativo R-H Global Conjugado com Método Multimalha para Elementos Finitos*"; Dissertação de Mestrado do DEES/EEUFMG, 1992.

Findlay, G. E., Spence, J.; "*Applying the Shakedown Concept to Pressure Vessel Design*", The Engineer, 1968.

Franco, J. R. Q.; "*Bounding Techniques in Shakedown and Ratchetting*", Ph.D. Thesis, University of Leicester, 1987.

Franco, J. R. Q.; "*An Improved Displacement Formulation for the Finite Element Computation of Shakedown Problems on Axisymmetrical Shells*", TICON Report 93-09 1993.

Franco, J. R. Q. e Ponter, A. R. S.; "*A General Technique for the Finite Element Shakedown and Limit Analysis of Axisymmetrical Shells - Part 1 - Theory and Fundamental Relations*"; TICAM Report 94-04, University of Texas at Austin, 1994.

Franco, J. R. Q. e Ponter, A. R. S.; "*A General Technique for the Finite Element Shakedown and Limit Analysis of Axisymmetrical Shells - Part 2 - Numerical Algorithm and Applications*", TICAM Report 94-04, University of Texas at Austin, 1994.

Franco, J. R. Q. e Ponter, A. R. S.; “*A General Technique for the Finite Element Shakedown and Limit Analysis of Axisymmetrical Shells - Numerical Algorithm and Applications*”, In. J. for Num. Meth. in Eng., a ser publicado.

Franco, J. R. Q., Ponter, A. R. S.; e Oden, J. T., “*Métodos Adaptativos de Elementos Finitos para a Computação de Problemas de Cargas Limites e de Shakedown de Cascas Axi-simétricas*”, Revista Internacional de Métodos Computacionais em Engenharia, 1995.

Franco, J. R. Q.; “*Shakedown and Ratchetting Above the Limit of Reversed Plasticity*”, TICOM Report 93-06, February 1993.

Hodge, P. G. Jr.; “*Yield Conditions for Rotationally Symmetric Shells Under Axisymmetric Loading*”, Journal of Applied Mechanics, 27, 323-331, June 1960.

Hodge, P. G. Jr.; “*Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells*”, Prentice-Hall, Inc., 1963.

Karedeniz, S.; “*The Development of Upper Bound and Associated Finite Element Techniques for the Plastic Shakedown of Thermally Loaded Structures*”, Ph.D. Thesis, Leicester University, 1983.

Karedeniz, S. e Ponter, A. R. S.; “*A Linear Programming Upper Bound Approach to the Shakedown Limit of Thin Shells Subjected to Variable Thermal Loading*”, J. of Strain Analysis, vol. 19, n° 4, 221-229, 1984.

Kelkar, V. S. and Sewell, R. T.; “*Fundamentals of the Analysis and Design of Shell Structures*”, Prentice-Hall, Inc., pp. 82-111, 1987.

Koiter, W. T.; “*A New General Theorem on Shakedown of Elastic Plastic Structures*”, Proc. Konk. Ned. Akad. Wett., B. 59, pp. 24-34, 1956.

Leckie, F. A.; “*Shakedown Pressures for Flush Cylinder-sphere Shell Intersections*”, Journal Mechanical Engineering Science, vol. 2, n° 4, 1965.

Leckie, F. A. e Penny, R. K.; “*Shakedown Loads for Radial Nozzles in Spherical Pressure Vessels*”, Int. J. Solids Structures, vol. 2, n° 4, pp. 743-755, 1967.

Magalhães, M. C.; “*Análise de Estimador de Erro Baseado em Técnica Superconvergente de Recuperação para o Método dos Elementos Finitos*”, Dissertação de Mestrado do DEES/EEUFMG, 1994.

Malvern, L. E.; “*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*”, Prentice-Hall, Inc., 1969.

Matos, P. L. e Ramos, M. A.; “*Relatório de Viagem à RPBC - Problemas na Suportação dos Tambores de Coqueamento*”, Comunicação Técnica SEMEC-123/84, CEMPES, Rio de Janeiro, Setembro de 1984.

Morelle, P.; “*Numerical Shakedown Analysis of Axisymmetric Sandwich Shells*”, Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 23, 2071-2088, 1986.

Oden, J. T. e Brauchli, H. J.; “*On the Calculation of Consistent Stress Distribution in Finite Element Approximations*”, Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 3, 317-325, 1971.

Oden, J. T. e Reddy, J. N.; “*Note on an Approximation Method for Computing Consistent Conjugate Stresses in Elastic Finite Elements*”, Int. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 6, 55-61, 1973.

Onat, E. T. e Prager W.; “*Limite Analyses of Shell of Revolution*”, Proc. Roy. Netherlands Acad. Sci., vol. 57, 534-548, 1954.

Onat, E. T.; “*The Plastic Collapse of Cylindrical Shells Under Axially Symmetrical Loading*”, Quartely of Applied Mathematics, vol. 33, 63-72, 1955.

Ponter, A. R. S., Karadeniz, S. e Carter, K. F.; “*The Computation of Shakedown Limits for Structural Components Subjected to Variable Thermal Loading*”, Report EUR 12686, Directorate General, Science, Research and Development, Commission of the European Communities, Brussels, Chap. W, 93, 1990.

Prager, W.; “*An introduction to Plasticity*”, Addison-Wesley Publish. Co., Inc., 1959.

Prager, W., Hodge, P. G. Jr.; “*Theory of Perfectly Plastic Solids*”, John Wiley & Sons, Inc., 1951.

Robinson, M.; "*Some Comments on the Stress Concentration and Shakedown Factors for Spherical Pressure Vessels with Flush Radial Cylindrical Nozzles*", Journal Mechanical Engineering Science, vol. 21, n° 3, 1979.

Szabó, B. e Babuska, I.; "*Finite Element Analysis*", John Wiley & Sons, Inc., 1991.

Shield, R. T. e Drucker, D. C.; "*Limit Strength of Thin Walled Pressure Vessels with an ASME Standard Torispherical Head*", Congress. of Applied Mechanics, 665-672, 1959.

Stasa, F. L.; "*Applied Finite Element Analysis for Engineers*", CBS Publishing, 1985.

Timoshenko S., Woinowsky-Krieger, S.; "*Theory of Plates and Shells*", McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.

Ugural, A. C.; "*Stresses in Plates and Shells*", McGraw-Hill Book Company, Inc., 1981.

Washizu, K., "*Variational Methods in Elasticity and Plasticity*", Pergamon Press Ltd., 1982.

Weaver, W., Jr., e Gere, J. M.; "*Matrix Analysis of Framed Structures*", Van Nostrand Reinhold Company, Inc., 2ª ed., 1980.

Zienkiewicz, O. C. e Morgan, K.; "*Finite Elements and Approximation*", John Wiley & Sons, Inc., 1983.

Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L.; "*The Finite Element Method - 4th ed. - Vol. 1 - Basic formulation and linear problems*", McGraw-Hill International, Inc, 1989 Editions.

Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L.; "*The Finite Element Method - 4th ed. - Vol. 2 - Solid and fluid mechanics Dynamics and non-linearity*", McGraw-Hill International, Inc., 1991 Editions.

Zienkiewicz, O. C., Zhu, J. Z. e Gong, N. G.;, "*Effective and practical h-p-version adaptive analysis procedures for the finite element method*", In. J. for Num. Meth.

in Eng., vol. 28, pp. 879-891, 1989.

Zienkiewicz, O. C. e Zhu, J. Z.; “*A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis*”, In. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 24, pp. 337-357, 1987.

Zienkiewicz, O. C. e Zhu, J. Z.; “*The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique*”, In. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 33, pp. 1331-1364, 1992.

Zienkiewicz, O. C. e Zhu, J. Z.; “*The Superconvergent Patch Recovery and a Posteriori Error Estimates. Part 2: Error Estimates and Adaptivity*”, In. J. for Num. Meth. in Eng., vol. 33, pp. 1365-1382, 1992.

Apêndice A

Obtenção da Relação Consistente Através da Norma de Energia

A norma de energia local para um elemento i e uma malha h foi definida na Seção (5.3) como:

$$\|\mathbf{e}_h^*\|_i = \left(\int_{V_i} (\dot{\mathbf{e}}_h^2 - \dot{\mathbf{e}}_h^1)^T \mathbf{D} (\dot{\mathbf{e}}_h^2 - \dot{\mathbf{e}}_h^1) dV \right)^{1/2} = \left(\int_{V_i} \mathbf{e}_\varepsilon^T \mathbf{D} \mathbf{e}_\varepsilon dV \right)^{1/2} \quad (\text{A.1})$$

Substituindo-se as relações (3.23) e (3.21) em (5.1), obtém-se:

$${}^i \mathbf{e}_\varepsilon^* = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\Sigma}^i \quad (\text{A.2})$$

que sendo usada na Equação (A.1), juntamente com a Equação (3.32) fornece:

$$\|\mathbf{e}_h^*\|_i^2 = \int_{V_i} (\boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\Sigma}^i)^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\Sigma}^i dV \quad (\text{A.3})$$

ou seja,

$$\| \mathbf{e}_h^* \|_i^2 = \int_{V_i} \boldsymbol{\Sigma}^{iT} \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\Sigma}^i dV \quad (\text{A.4})$$

Derivando-se com relação à variável generalizada $\boldsymbol{\Sigma}^i$, tem-se:

$$\frac{d\| \mathbf{e}_h^* \|_i}{d\boldsymbol{\Sigma}^i} = \int_{V_i} \left\{ \left[\boldsymbol{\Sigma}^{iT} \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\psi}_i \right]^T + \left[\boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\Sigma}^i \right]^T \right\} dV \quad (\text{A.5})$$

Como o termo $\boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\psi}_i$ é simétrico, a expressão acima se reduz a:

$$\frac{d\| \mathbf{e}_h^* \|_i}{d\boldsymbol{\Sigma}^i} = \int_{V_i} 2\boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\Sigma}^i dV \quad (\text{A.6})$$

Usando-se a Relação (A.2) chega-se a:

$$\frac{d\| \mathbf{e}_h^* \|_i}{d\boldsymbol{\Sigma}^i} = \int_{V_i} 2\boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{e}_\varepsilon^i dV \quad (\text{A.7})$$

Substitui-se, a seguir, o vetor \mathbf{e}_ε^i pela diferença entre as duas formulações das taxas de deformação, Equação (5.1), e iguala-se a expressão a zero, para que se tenha a sua minimização, obtendo-se.

$$\frac{d\| \mathbf{e}_h^* \|_i}{d\boldsymbol{\Sigma}^i} = \int_{V_i} \boldsymbol{\psi}_i^T (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^1 - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^2) dV = 0 \quad (\text{A.8})$$

Das relações (3.8), (3.13) e (3.35) pode-se rescrever a Equação (A.8) como:

$$\int_{V_i} \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{B}^i dV \dot{\mathbf{U}}_n^i = \int_{V_i} \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{K}^i(s) dV \dot{\boldsymbol{\lambda}}_k^n \quad (\text{A.9})$$

A introdução da matriz \mathbf{H} se dá por meio da Expressão (3.37). A equação acima torna-se, então:

$$\int_{V_i} \mathbf{H}^{iT} \mathbf{R}_i^{iT} \mathbf{B}^i dV \dot{\mathbf{U}}_n^i = \int_{V_i} \mathbf{H}^{iT} \mathbf{R}_i^{iT} \mathbf{K}^i(s) dV \dot{\boldsymbol{\lambda}}_k^n \quad (\text{A.10})$$

Como a matriz \mathbf{H} é formada por termos independentes de sua posição ao longo do domínio, pode ser retirada da integral e colocada em evidência:

$$\mathbf{H}^{iT} \int_{V_i} \mathbf{R}_i^{iT} \mathbf{B}^i dV \dot{\mathbf{U}}_n^i = \mathbf{H}^{iT} \int_{V_i} \mathbf{R}_i^{iT} \mathbf{K}^i(s) dV \dot{\boldsymbol{\lambda}}_k^n \quad (\text{A.11})$$

e após a introdução de (3.36) tem-se:

$$\mathbf{H}^{iT} (\mathbf{H}^{iT})^{-1} \dot{\mathbf{U}}_n^i = \mathbf{H}^{iT} \int_{V_i} \mathbf{R}_i^{iT} \mathbf{K}^i(s) dV \dot{\boldsymbol{\lambda}}_k^n \quad (\text{A.12})$$

que se reduz a:

$$\dot{\mathbf{U}}_n^i = \mathbf{H}^{iT} \int_{V_i} \mathbf{R}_i^{iT} \mathbf{K}^i(s) dV \dot{\boldsymbol{\lambda}}_k^n \quad (\text{A.13})$$

exatamente a relação consistente (3.39), obtida na Seção (3.4.2).

Apêndice B

Condição para que o Estimador de Erro seja Assintoticamente Exato

O Teorema utilizado em [Zienkiewicz e Taylor, 1989b], onde se demonstra como um estimador de erro assintoticamente exato pode ser encontrado, é estabelecido para a formulação usada nesta dissertação da seguinte maneira:

Teorema

Sejam $\|\mathbf{e}_h^e\| = \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e^2 - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_h^1\|$ e $\|\hat{\mathbf{e}}_h\| = \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e^2 - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_h^2\|$, as normas de energia dos erros para os campos das taxas de deformação entre a solução exata $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^2$ e as soluções $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^1$ e $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^2$ (solução melhorada), respectivamente, de uma malha genérica h . Pode-se afirmar que $\|\bar{\mathbf{e}}_h\|$, a norma de energia que define o estimador de erro, Equação 5.3, será assintoticamente exata se:

$$\|\hat{\mathbf{e}}_h\|/\|\mathbf{e}_h^e\| \rightarrow 0 \quad \text{quando a norma de energia real do erro } \|\mathbf{e}\| \rightarrow 0.$$

Prova

Reescrevendo-se o estimador $\|\bar{\mathbf{e}}_h\|$ como:

$$\|\bar{\mathbf{e}}_h\| = \|\dot{\mathbf{e}}_h^2 - \dot{\mathbf{e}}_h^1\| = \|(\dot{\mathbf{e}}_e^2 - \dot{\mathbf{e}}_h^1) - (\dot{\mathbf{e}}_e^2 - \dot{\mathbf{e}}_h^2)\| \quad (\text{B.1})$$

Aplica-se a inequação do triângulo obtendo-se:

$$\|\dot{\mathbf{e}}_e^2 - \dot{\mathbf{e}}_h^1\| - \|\dot{\mathbf{e}}_e^2 - \dot{\mathbf{e}}_h^2\| \leq \|\bar{\mathbf{e}}_h\| \leq \|\dot{\mathbf{e}}_e^2 - \dot{\mathbf{e}}_h^1\| + \|\dot{\mathbf{e}}_e^2 - \dot{\mathbf{e}}_h^2\| \quad (\text{B.2})$$

ou

$$\|\mathbf{e}_h^e\| - \|\hat{\mathbf{e}}_h\| \leq \|\bar{\mathbf{e}}_h\| \leq \|\mathbf{e}_h^e\| + \|\hat{\mathbf{e}}_h\| \quad (\text{B.3})$$

Usando-se a definição do índice de efetividade, Equação 5.4, segue:

$$\left(1 - \frac{\|\hat{\mathbf{e}}_h\|}{\|\mathbf{e}_h^e\|}\right) \leq \theta \leq \left(1 + \frac{\|\hat{\mathbf{e}}_h\|}{\|\mathbf{e}_h^e\|}\right) \quad (\text{B.4})$$

A inequação acima estabelece que o índice de efetividade aproxima-se da unidade quando a razão $\|\hat{\mathbf{e}}_h\|/\|\mathbf{e}_h^e\| \rightarrow 0$. Logo, estará assegurado que o estimador de erro seja assintoticamente exato caso $\|\hat{\mathbf{e}}_h\|$ convirja para zero a uma taxa maior do que $\|\mathbf{e}_h^e\|$.

Apêndice C

Determinação da Função de Energia Dissipada para os Lados Inclinados da Superfície de Drucker

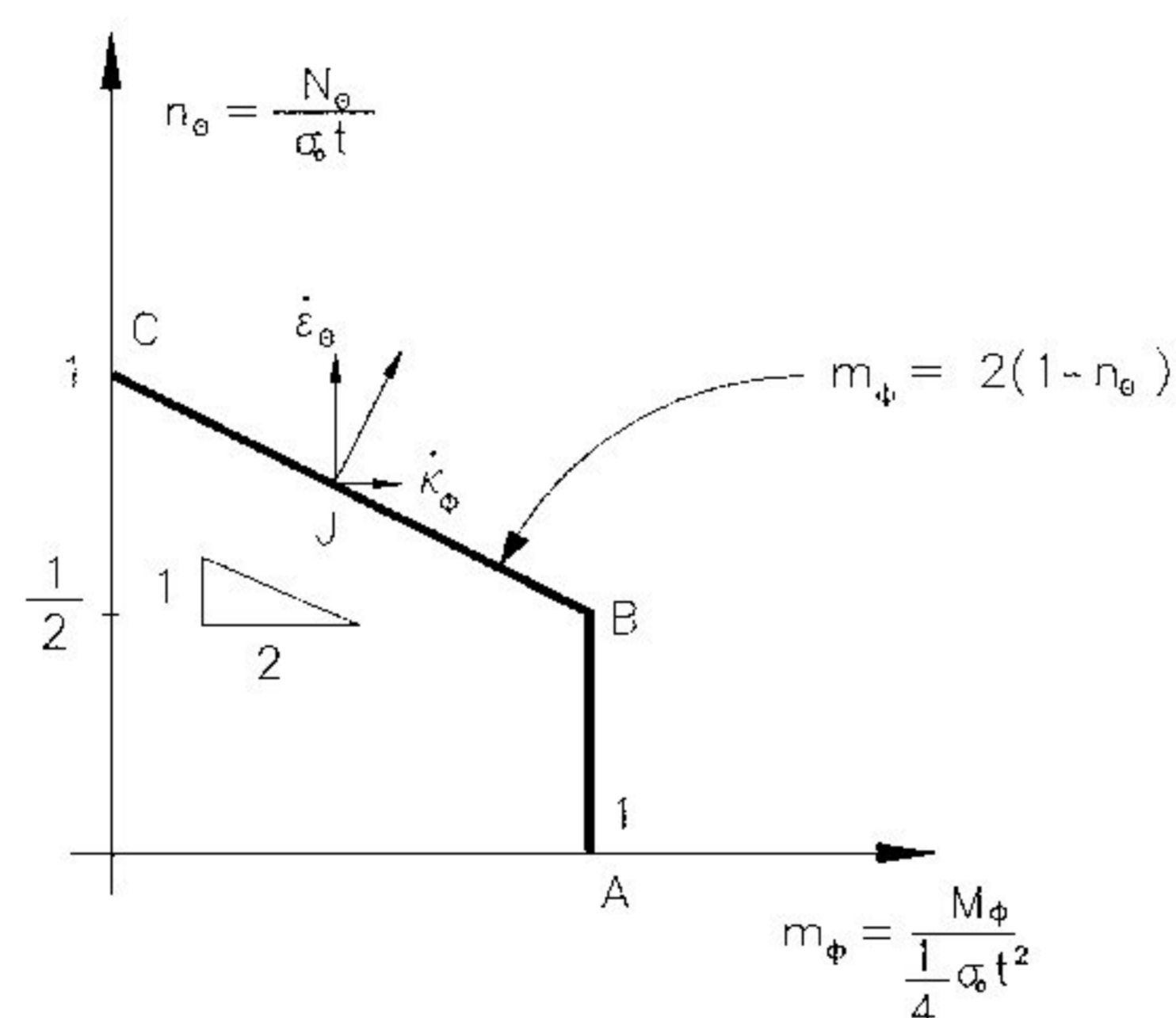


Figura C.1: Lado \overline{CB} da superfície de Drucker

Na determinação da função de energia de dissipação para os lados inclinados da superfície de Drucker, Fig. (6.1), será considerado o lado \overline{CB} representado na Fig. (C.1). A função obtida é, todavia, válida para os demais lados \overline{CD} , \overline{GH} e \overline{GF} .

Para um estado de tensões qualquer, pertencente à superfície de escoamento, a função de dissipação de energia por unidade de área é definida como:

$$D_A = N_\theta \dot{\epsilon}_\theta + M_\phi \dot{\kappa}_\phi \quad (\text{C.1})$$

Caso se considere o estado de tensões J , localizado entre os pontos C e B da Fig. (C.1), a Equação (C.1) torna-se:

$$D_A = n_\theta \sigma_o t \dot{\epsilon}_\theta + (2 - 2n_\theta) \frac{\sigma_o t^2}{4} \dot{\kappa}_\phi$$

que expandida fornece:

$$D_A = n \sigma_o t \dot{\epsilon}_\theta + \left(\frac{\sigma_o t^2}{4} \dot{\kappa}_\phi + \frac{\sigma_o t^2}{4} \dot{\kappa}_\phi \right) - n \frac{\sigma_o t^2}{2} \dot{\kappa}_\phi$$

Da relação entre $\dot{\epsilon}_\theta$ e $\dot{\kappa}_\phi$ sabe-se que:

$$\dot{\epsilon}_\theta = \frac{\dot{\kappa}_\phi t}{2} \quad (\text{C.2})$$

logo

$$D_A = n \sigma_o t \dot{\epsilon}_\theta + \frac{\sigma_o t}{2} \dot{\epsilon}_\theta + \frac{\sigma_o t^2}{4} \dot{\kappa}_\phi - n \sigma_o t \dot{\epsilon}_\theta$$

A função de dissipação de energia por unidade de área será, então:

$$D_A = \frac{\sigma_o t}{2} \dot{\epsilon}_\theta + \frac{\sigma_o t^2}{4} \dot{\kappa}_\phi$$

Esta expressão permanece válida para os demais lados inclinados da superfície de Drucker, caso as taxas de deformação e de mudança de curvatura sejam escritas em seu valor absoluto, como a seguir:

$$D_A = \frac{\sigma_o t}{2} |\dot{\epsilon}_\theta| + \frac{\sigma_o t^2}{4} |\dot{\kappa}_\phi| \quad (\text{C.3})$$

A Expressão (C.3) pode ser definida também como função independente das taxas de deformação ou de mudança de curvatura. Para isso basta aplicar a Relação (C.2). Tem-se, dessa maneira:

$$D_A = \sigma_o t |\dot{\epsilon}_\theta| \quad (C.4)$$

ou

$$D_A = \frac{\sigma_o t^2}{2} |\dot{\kappa}_\phi| \quad (C.5)$$

Apêndice D

Obtenção do Operador Definidor do Campo de Deformações

Realizando-se o produto de matrizes em (6.27) obtém-se, para cada elemento i :

$$\mathbf{B}^i = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} \end{bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

Sendo:

$$B_{11} = -\frac{4\xi}{l_i} \text{sen} \phi$$

$$B_{12} = \frac{(2\xi + 1)}{l_i} \text{sen} \phi$$

$$B_{13} = \frac{(2\xi - 1)}{l_i} \text{cos} \phi$$

$$B_{14} = -\frac{4\xi}{l_i} \text{cos} \phi$$

$$B_{15} = \frac{(2\xi + 1)}{l_i} \text{cos} \phi$$

$$B_{21} = 0$$

$$B_{22} = 0$$

$$B_{23} = \frac{(\xi^2 - \xi)}{2} \frac{1}{r_2 \text{sen} \phi}$$

$$B_{24} = (1 - \xi) \frac{1}{r_2 \text{sen} \phi}$$

$$B_{25} = \frac{(\xi^2 + \xi)}{2} \frac{1}{r_2 \text{sen} \phi}$$

$$B_{31} = 2 \left[-\frac{4 \cos \phi}{l_i^2} + \frac{2\xi \text{sen} \phi}{l_i r_1} \right]$$

$$B_{32} = 2 \left[\frac{2 \cos \phi}{l_i^2} - \frac{2\xi + 1}{2l_i} \frac{\text{sen} \phi}{r_1} \right]$$

$$B_{33} = 2 \left[-\frac{2 \text{sen} \phi}{l_i^2} - \frac{2\xi - 1}{2l_i} \frac{\cos \phi}{r_1} \right]$$

$$B_{34} = 2 \left[\frac{4 \text{sen} \phi}{l_i^2} + \frac{2\xi \cos \phi}{l_i^2 r_1} \right]$$

$$B_{35} = 2 \left[-\frac{2 \text{sen} \phi}{l_i^2} - \frac{2\xi + 1}{2l_i} \frac{\cos \phi}{r_1} \right]$$

Na obtenção dos elementos de \mathbf{B}^i , duas relações foram utilizadas:

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{2}{l_i}$$

$$ds = d\phi r_1$$

Logo:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{d\xi} = \frac{l_i}{r_1 2}$$

Apêndice E

Relação de Consistência entre os Campos de Velocidades e dos Multiplicadores Plásticos

E.1 Implementação da Relação de Consistência

A implementação da relação de consistência (6.35) passa, necessariamente, pelas seguintes etapas:

- Determinação da matriz \bar{C}^i , através das Equações (3.30) e (6.27):

$$\bar{C}^i = \int_V B^{iT} B^i dV^{-1} \quad (\text{E.1})$$

- Determinação da matriz K^i , através das Equações (6.29), (6.33):

$$\mathbf{K}^i(s) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen}\alpha(1 - \xi) & 4/t \cos \alpha(1 - \xi) \\ -(1 - \xi) & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2(1 - \xi) & \sqrt{2}/2(1 - \xi) & 0 \\ 0 & \text{sen}\alpha(1 - \xi) & 4/t \cos \alpha(1 - \xi) \\ (1 - \xi) & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2(1 - \xi) & -\sqrt{2}/2(1 - \xi) & 0 \\ 0 & -\text{sen}\alpha(1 - \xi) & -4/t \cos \alpha(1 - \xi) \\ 0 & \text{sen}\alpha(1 - \xi) & -4/t \cos \alpha(1 - \xi) \\ 0 & -\text{sen}\alpha(1 + \xi) & 4/t \cos \alpha(1 - \xi) \\ -(1 + \xi) & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2(1 + \xi) & \sqrt{2}/2(1 + \xi) & 0 \\ 0 & \text{sen}\alpha(1 + \xi) & 4/t \cos \alpha(1 - \xi) \\ (1 + \xi) & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2(1 + \xi) & -\sqrt{2}/2(1 + \xi) & 0 \\ 0 & -\text{sen}\alpha(1 + \xi) & -4/t \cos \alpha(1 + \xi) \\ 0 & \text{sen}\alpha(1 + \xi) & -4/t \cos \alpha(1 + \xi) \end{bmatrix}^T \quad (\text{E.2})$$

- Finalmente, substituindo-se (E.1) e (E.2) em (6.35) obtém-se:

Elemento $i - 1$:

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_{i-1}^* - \dot{U}_{i-1} \\ \dot{U}_i - \dot{U}_{i-1} \\ \dot{W}_{i-1} \\ \dot{W}_i^* \\ \dot{W}_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^{i-1} & \cdots & L_{18}^{i-1} & L_{19}^{i-1} & L_{110}^{i-1} & \cdots & L_{116}^{i-1} \\ L_{21}^{i-1} & \cdots & L_{28}^{i-1} & L_{29}^{i-1} & L_{210}^{i-1} & \cdots & L_{216}^{i-1} \\ L_{31}^{i-1} & \cdots & L_{38}^{i-1} & L_{39}^{i-1} & L_{310}^{i-1} & \cdots & L_{316}^{i-1} \\ L_{41}^{i-1} & \cdots & L_{48}^{i-1} & L_{49}^{i-1} & L_{410}^{i-1} & \cdots & L_{416}^{i-1} \\ L_{51}^{i-1} & \cdots & L_{58}^{i-1} & L_{59}^{i-1} & L_{510}^{i-1} & \cdots & L_{516}^{i-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1^{i-1} \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_8^{i-1} \\ \dot{\lambda}_1^i \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_8^i \end{Bmatrix} \quad (\text{E.3})$$

Elemento i :

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_i^* - \dot{U}_i \\ \dot{U}_{i+1} - \dot{U}_i \\ \dot{W}_i \\ \dot{W}_i^* \\ \dot{W}_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^i & \cdots & L_{18}^i & L_{19}^i & L_{110}^i & \cdots & L_{116}^i \\ L_{21}^i & \cdots & L_{28}^i & L_{29}^i & L_{210}^i & \cdots & L_{216}^i \\ L_{31}^i & \cdots & L_{38}^i & L_{39}^i & L_{310}^i & \cdots & L_{316}^i \\ L_{41}^i & \cdots & L_{48}^i & L_{49}^i & L_{410}^i & \cdots & L_{416}^i \\ L_{51}^i & \cdots & L_{58}^i & L_{59}^i & L_{510}^i & \cdots & L_{516}^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\lambda}_1^i \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_8^i \\ \dot{\lambda}_1^{i+1} \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_8^{i+1} \end{pmatrix} \quad (\text{E.4})$$

Os parâmetros nodais são, portanto, descritos em função dos multiplicadores plásticos dos nós pertencentes ao elemento em questão.

E.2 Definição das Taxas de Deslocamento \dot{W}_i

Observando-se (E.3) e (E.4) conclui-se que, para cada ponto nodal i , a taxa de deslocamento \dot{W}_i assume dois valores em função dos elementos $i-1$ e i . Em [Franco, 1987], para que o campo das taxas de deslocamentos seja contínuo, adota-se a média entre tais valores. Repetindo-se, então, este procedimento tem-se:

$$\dot{W}_i = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^8 \left[L_{5k}^{i-1} \dot{\lambda}_k^{i-1} + (L_{5k+8}^{i-1} + L_{3k}^i) \dot{\lambda}_k^i + L_{3k+8}^i \dot{\lambda}_k^{i+1} \right] \right\} \quad (\text{E.5})$$

onde

$$\begin{aligned} L_{51}^0 \cdots L_{58}^0 &= 0 \\ L_{39}^{NN} \cdots L_{316}^{NN} &= 0 \end{aligned}$$

Logo, o cálculo de \dot{W}_i envolve os multiplicadores plásticos dos três nós pertencentes aos elementos adjacentes $i-1$ e i .

E.3 Definição das Taxas de Deslocamento \dot{U}_i e \dot{U}_i^*

A partir das Relações (E.4) e (E.5) é possível descrever-se as componentes, em um nó i , do vetor U_i , ou seja, $\dot{U}_i^* - \dot{U}_i$, $\dot{U}_{i+1} + \dot{U}_i$, \dot{W}_i e \dot{W}_i^* , em função dos multiplicadores

plásticos, definidos em i e nós adajcentes. O mesmo não ocorre, entretanto, para a componente axial \dot{U}_i . Para sua obtenção o seguinte procedimento é adotado em [Franco, 1987]:

Seja \dot{U}_1 prescrito como uma condição de contorno do problema. Aplicando-se (E.4) tem-se até o elemento $i - 1$:

$$\begin{array}{rcl} \text{Elemento} & & \\ 1 & \dot{U}_2 - \dot{U}_1 & = f_1(\dot{\lambda}) \\ 2 & \dot{U}_3 - \dot{U}_2 & = f_2(\dot{\lambda}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ i-1 & \dot{U}_i - \dot{U}_{i-1} & = f_{i-1}(\dot{\lambda}) \end{array}$$

que resulta em:

$$\sum_{j=1}^{i-1} (\dot{U}_{j+1} - \dot{U}_j) = \dot{U}_i - \dot{U}_1 = \sum_{j=1}^{i-1} f_j(\dot{\lambda}) \quad (\text{E.6})$$

No caso de \dot{U}_{NN} ser a condição de contorno prescrita, um procedimento semelhante conduz a:

$$\begin{array}{rcl} \text{Elemento} & & \\ i & \dot{U}_{i+1} - \dot{U}_i & = f_i(\dot{\lambda}) \\ i+1 & \dot{U}_{i+2} - \dot{U}_{i+1} & = f_{i+1}(\dot{\lambda}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ NE & \dot{U}_{NN} - \dot{U}_{NE} & = f_{NE}(\dot{\lambda}) \end{array}$$

logo,

$$\sum_{j=i}^{NE} (\dot{U}_{j+1} - \dot{U}_j) = \dot{U}_{NN} - \dot{U}_i = \sum_{j=i}^{NE} f_j(\dot{\lambda}) \quad (\text{E.7})$$

Adotando-se a Equação (E.7) e efetuando-se o somatório de $f_j(\dot{\lambda})$ de acordo com (E.4), a velocidade \dot{U}_i é definida como:

$$\dot{U}_i = \dot{U}_{NN} + \sum_{k=1}^8 \left[-L_{2k}^i \dot{\lambda}_k^i - \sum_{j=i+1}^{NN} (L_{2k+8}^{j-1} + L_{2k}^j) \dot{\lambda}_k^j \right] \quad (\text{E.8})$$

O conhecimento de \dot{U}_i permite o cálculo de \dot{U}_i^* , correspondente ao nó interno ao elemento i . De (E.4) sabe-se que:

$$\dot{U}_i^* - \dot{U}_i = \sum_{k=1}^8 (L_{1k}^i \dot{\lambda}_k^i + L_{1k+8}^i \dot{\lambda}_k^{i+1}) \quad (\text{E.9})$$

Logo, substituindo (E.8) em (E.9) chega-se finalmente a:

$$\dot{U}_i^* = \dot{U}_{NN} + \sum_{k=1}^8 \left[-L_{2k}^i \dot{\lambda}_k^i - \sum_{j=i+1}^{NN} (L_{2k+8}^{j-1} + L_{2k}^j) \dot{\lambda}_k^j \right] + \sum_{k=1}^8 (L_{1k}^i \dot{\lambda}_k^i + L_{1k+8}^i \dot{\lambda}_k^{i+1}) \quad (\text{E.10})$$