

ANALISE DE PLACAS ORTÓTROPAS COM
NERVURAS DE ENRIJECIMENTO EXCÊNTRICAS
EM RELAÇÃO A SEU PLANO MÉDIO

JOSÉ DE FABRINO BRAGA NETO

DEDICATÓRIA

À minha família, meus pais, meus sogros, meus irmãos , meus cunhados e principalmente à minha esposa Stella e aos nossos filhos, Henrique e Filipe, pelo incentivo, apoio e carinho, sem os quais nada disto teria significado.

AGRADECIMENTOS

Os meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que, de alguma maneira, participaram direta ou indiretamente na elaboração deste trabalho, através de sua boa vontade, cujos nomes são tantos que não ousei enumerá-los para não correr o risco de porventura esquecer algum e, em particular, ao meu orientador Prof. Alcebíades de Vasconcellos Filho.

RESUMO

Neste trabalho é apresentado o sistema computacional PAVEDIF, baseado no método dos elementos finitos, no qual são implementados elementos de placa com forças de membrana e de barra com conexão "off-set". Este sistema possibilita a análise de placas ortótropas com nervuras de enrijecimento excêntricas em relação ao seu plano médio. Para tal, as nervuras são modeladas através de elementos de barra com conexão "off-set" e a placa através de elementos de placa com forças de membrana. Podem ser analisadas pelo sistema PAVEDIF estruturas tais como: pavimentos de edifício, cortinas atirantadas, tabuleiros e encontros de ponte, e outras estruturas afins.

São também pesquisados os efeitos da variação da excentricidade das nervuras de enrijecimento em uma placa carregada transversalmente. Além disto, os resultados obtidos com o "modelo com conexão off-set" são comparados aos obtidos com o "modelo convencional".

ABSTRACT

The finite element based computer system PAVEDIF is presented in this work , including the consideration of membrane forces on the behavior of plate elements, as well as off-set connections. This system is capable of performing the analysis of orthotropic plates with stiffeners excentric in relation to their mid plane. In order to consider this case, the stiffeners are modelled using bar elements with off-set, and the plate using plate elements with membrane forces. Structures that can be analysed using PAVEDIF include: building floors, tie retaining walls, bridge decks and heads, and other similar structures.

The effects of changes in stiffener excentricity for transversely loaded plates are also studied. In addition, the results obtained with the consideration of off-set are compared to the ones obtained from the traditional model used in engineering practice.

SUMARIO

NOTAÇÃO	viii
1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO DA LITERATURA	3
3. FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS	6
3.1 ELEMENTOS DE BARRA	6
3.1.1 ELEMENTO DE TRELIÇA	7
3.1.2 ELEMENTO DE TORÇÃO	9
3.1.3 ELEMENTO DE VIGA	12
3.1.4 ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL	15
3.1.5 ELEMENTO DE BARRA COM CONEXÃO "OFF-SET"	19
3.2 ELEMENTOS DE ESTADO PLANO DE TENSÃO	22
3.2.1 ELEMENTO TRIANGULAR	22
3.2.2 ELEMENTO RETANGULAR	29
3.3 ELEMENTOS DE PLACA	35
3.3.1 ELEMENTO RETANGULAR	35
3.3.2 ELEMENTO TRIANGULAR	46
3.4 ELEMENTO DE PLACA COM FORÇAS DE MEMBRANA	57
3.5 COMPATIBILIDADE DOS ELEMENTOS DE PLACA E DE BARRA	62
4. EQUAÇÕES BÁSICAS DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS	63
5. SISTEMA IMPLEMENTADO	66
5.1 HISTÓRICO	66
5.2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA	67
5.2.1 FLUXOGRAMA DO SISTEMA	68
5.2.1.1 DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DA ESTRUTURA	69
5.2.1.2 GERAÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA	69
5.2.1.3 TESTES DE CONSISTÊNCIA DOS DADOS	70
5.2.1.4 RENUMERAÇÃO DOS NÓS	70

5.2.1.5	MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ	70
5.2.1.6	DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ	71
5.2.1.7	CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS	71
5.2.1.8	CÁLCULO DAS TENSÕES, ESFORÇOS E REAÇÕES	71
5.2.1.9	GRAVAÇÃO / IMPRESSÃO DOS RESULTADOS	72
6.	EXEMPLO DE APLICAÇÃO	73
6.1	PLACA SIMPLEMENTE APOIADA COM ENRIJECEDORES	73
6.2	ESCOLHA DA MALHA	74
6.3	INFLUÊNCIA DA VARIACÃO DO "OFF-SET"	78
6.3.1	GRÁFICOS DE VARIACÃO DA FLECHA w	80
6.3.2	GRÁFICOS DE VARIACÃO DOS MOMENTOS FLETORES M_x E M_y	81
6.3.3	GRÁFICOS DE VARIACÃO DA FORÇA CORTANTE Q_z	83
6.3.4	GRÁFICOS DE VARIACÃO DA FORÇA AXIAL N_x E DA TENSÃO NORMAL σ_x	85
6.4	DIAGRAMAS DE ESFORÇOS	88
6.4.1	DIAGRAMAS COMPARATIVOS DA FORÇA CORTANTE Q_z NAS VIGAS	91
6.4.2	DIAGRAMAS COMPARATIVOS DA FORÇA AXIAL N_x NAS VIGAS	93
6.4.3	DIAGRAMAS COMPARATIVOS DO MOMENTO FLETOR M_y NAS VIGAS	94
6.4.4	DIAGRAMAS COMPARATIVOS DO MOMENTO FLETOR M_x NA PLACA	96
6.4.5	DIAGRAMAS COMPARATIVOS DO MOMENTO FLETOR M_y NA PLACA	97
6.4.6	DIAGRAMAS COMPARATIVOS DO MOMENTO DE TORÇÃO M_{xy} NA PLACA	98
6.4.7	DIAGRAMAS COMPARATIVOS DA TENSÃO NORMAL σ_x NA PLACA	99
6.4.8	DIAGRAMAS COMPARATIVOS DA TENSÃO NORMAL σ_y NA PLACA	100
6.4.9	DIAGRAMAS COMPARATIVOS DA TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{xy} NA PLACA	101
6.4.10	DIAGRAMAS DO MOMENTO FLETOR M_x NA PLACA	102
6.4.11	DIAGRAMAS DO MOMENTO FLETOR M_y NA PLACA	103

6.4.12	DIAGRAMAS DO MOMENTO DE TORÇÃO M_{XY} NA PLACA	104
6.4.13	DIAGRAMAS DA TENSÃO NORMAL σ_x NA PLACA	105
6.4.14	DIAGRAMAS DA TENSÃO NORMAL σ_y NA PLACA	106
6.4.15	DIAGRAMAS DA TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{xy} NA PLACA	107
6.5	DESLOCAMENTOS NO PLANO MÉDIO DA PLACA	108
7.	CONCLUSÕES	110
8.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	112
9.	BIBLIOGRAFIA	114
	APÊNDICE A - INSTRUÇÕES PARA USO DO PROGRAMA PAVEDIF	116
	APÊNDICE B - EXEMPLO DE UMA PLACA COM ENRIJECEDORES EXCÊNTRICOS EM RELAÇÃO A SEU PLANO MÉDIO	133
	B.1 ARQUIVO DE DADOS	134
	B.2 RELATÓRIO DE SAÍDA	136

NOTAÇÃO

LETRAS ROMANAS

A	área da seção transversal de um elemento de barra
$\langle \underline{A} \rangle$	matriz das cargas aplicadas diretamente aos nós
$\langle \underline{A}_{-E} \rangle$	matriz das cargas nodais estaticamente equivalentes ao carregamento dos elementos
$\langle \underline{A}_{-j} \rangle$	matriz das cargas nodais combinadas
$\langle \underline{A}_j \rangle$	matriz dos esforços na extremidade j do trecho elástico do elemento de barra com conexão "off-set"
$\langle \underline{A}_k \rangle$	matriz dos esforços na extremidade k do trecho elástico do elemento de barra com conexão "off-set"
$\langle \underline{A}_M^e \rangle$	matriz dos esforços finais nas extremidades da barra e
$\langle \underline{A}_{Mel}^e \rangle$	matriz dos esforços nas extremidades "j" e "k" do trecho elástico do elemento do barra com conexão "off-set"
$\langle \underline{A}_{ML}^e \rangle$	matriz dos esforços nas extremidades da barra e bi-engastada
$\langle \underline{A}_{Mof}^e \rangle$	matriz dos esforços nas extremidades "p" e "q" do elemento de barra com conexão "off-set"
$\langle \underline{A}_p \rangle$	matriz dos esforços na extremidade p do elemento de barra com conexão "off-set"
$\langle \underline{A}_q \rangle$	matriz dos esforços na extremidade q do elemento de barra com conexão "off-set"
$[B]$	matriz de transformação que associa os deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$ às deformações $\{\epsilon\}$
$[C]$	matriz de transformação que associa os deslocamentos generalizados $\{\alpha^e\}$ aos deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$
$[D]$	matriz de transformação que associa as deformações elásticas às tensões (matriz de elasticidade)

D_{11}	}	constantes elásticas associadas a um elemento ortótropo
D_{12}, D_{21}		
D_{22}, D_{33}		
D_x, D_y		
D_{xy}, D_z		
E		módulo de elasticidade
E'_x, E'_y	}	constantes elásticas associadas a um elemento ortótropo
E''		
$\{f\}$		matriz dos deslocamentos em um ponto do elemento
G		módulo de elasticidade transversal
h		espessura do elemento
I_x		constante de torção
I_y, I_z		momentos de inércia em relação aos eixos baricêntricos y e z
$[k^e]$		matriz de rigidez do elemento e associada aos deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$, referida ao sistema local
$[\underline{k}^e]$		matriz de rigidez do elemento e associada aos deslocamentos nodais $\{\underline{\delta}^e\}$, referida ao sistema global
$[k_{el}^e]$		matriz de rigidez, no sistema local, do trecho elástico do elemento de barra com conexão "off-set"
$[\underline{k}_{el}^e]$		matriz de rigidez, no sistema global, do trecho elástico do elemento de barra com conexão "off-set"
$[K_j]$		matriz de rigidez de nó (global) da estrutura
L		comprimento de um elemento de barra
$\{M\}$		matriz de momentos fletores e de torção no elemento de placa
$\{M^e\}$		matriz dos momentos fletores e de torção no centróide ou nos nós do elemento
M_y		momento fletor nas nervuras

N_x	força axial nas nervuras
[N]	matriz de transformação que associa os deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$ aos deslocamentos em um ponto do elemento
[N']	matriz de transformação que associa os deslocamentos generalizados $\{\alpha^e\}$ aos deslocamentos em um ponto do elemento
$\langle \underline{P}^e \rangle$	matriz de cargas nodais equivalentes ao carregamento do elemento e
$\langle \rho^e \rangle$	matriz de forças de massa
$\langle q^e \rangle$	matriz associada ao carregamento de superfície do elemento
[Q]	matriz de transformação que associa os deslocamentos generalizados $\{\alpha^e\}$ às deformações $\{\epsilon\}$
Q_z	força cortante nas nervuras
$[R_T]$	matriz de transformação (rotação) que associa os deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$ e $\{\delta^e\}$
[S]	matriz de transformação que associa os deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$ às tensões $\{\sigma\}$
$[T_{pj}]$	matriz de transformação que associa as ações no nó j às ações estaticamente equivalentes no nó p
X, Y	forças de massa nas direções x e y
z_p	"off-set" do elemento de barra

LETRAS GREGAS

$\{\alpha^e\}$	matriz dos deslocamentos generalizados do elemento e (matriz dos coeficientes polinomiais)
$\{\gamma\}$	matriz da deformação angular em um ponto do elemento
$\{\delta^e\}$	matriz dos deslocamentos nodais do elemento e referidos ao sistema local
$\{\underline{\delta}^e\}$	matriz dos deslocamentos nodais do elemento e referidos ao sistema global
$\{\delta_{el}^e\}$	matriz dos deslocamentos, no sistema local, das extremidades do trecho elástico do elemento de barra com conexão "off-set"
$\{\delta_{-el}^e\}$	matriz dos deslocamentos, no sistema global, das extremidades do trecho elástico do elemento de barra com conexão "off-set"
$\{\delta_{-F}^e\}$	matriz dos deslocamentos nodais correspondentes aos graus de liberdade
$\{\delta_{-j}^e\}$	matriz dos deslocamentos nodais da estrutura
$\{\delta_{-j}^e\}$	matriz dos deslocamentos, no sistema global, da extremidade j do trecho elástico do elemento de barra com conexão "off-set"
$\{\delta_{-k}^e\}$	matriz dos deslocamentos, no sistema global, da extremidade k do trecho elástico do elemento de barra com conexão "off-set"
$\{\delta_{-p}^e\}$	matriz dos deslocamentos, no sistema global, da extremidade p do elemento de barra com conexão "off-set"
$\{\delta_{-q}^e\}$	matriz dos deslocamentos, no sistema global, da extremidade q do elemento de barra com conexão "off-set"
$\{\delta_{-R}^e\}$	matriz dos deslocamentos impostos aos apoios
Δ	área do triângulo de nós ijk
$\{\varepsilon\}$	matriz das deformações em um ponto do elemento
ν	coeficiente de Poisson
ν_x, ν_y	constantes elásticas associadas a um elemento ortótropo
$\{\sigma\}$	matriz das tensões em um ponto do elemento
$\{\sigma^e\}$	matriz das tensões no centróide ou nos nós do elemento
$\{\tau\}$	matriz da tensão de cisalhamento em um ponto do elemento

MATRIZES DIVERSAS

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}$$

matriz dos deslocamentos em um ponto qualquer do elemento

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{bmatrix}$$

matriz dos deslocamentos do nó i

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{bmatrix}$$

matriz dos esforços na extremidade i da barra

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

matriz das deformações normais e de cisalhamento no plano médio da placa

$$\begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix}$$

matriz das curvaturas e torção da placa

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

matriz das tensões normais e de cisalhamento no plano médio da placa (tensões de membrana)

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix}$$

matriz dos momentos fletores e de torção

1. INTRODUÇÃO

No início da década de 80, as análises mais complexas de modelos estruturais eram feitas em Bureaux de Serviços utilizando-se programas tais como STRESS, STRUDL, STARDYNE. Devido às características e limitações existentes na época, os usuários codificavam suas aplicações manualmente em formulários adequados, perfurando-se os dados em cartões e alimentando-se em seguida o computador. Geralmente, no dia seguinte eram obtidos os resultados e, caso algum erro fosse encontrado, todo o processo se repetia [1].

Com o desenvolvimento dos microcomputadores, novos programas, tão ou mais poderosos quanto os já citados, têm surgido no mercado, tais como COSMOS, ANSYS, SUPERSAP (ALGOR). No entanto, o caráter geral destes programas ainda nos trás algumas desvantagens, tais como: perda da eficiência computacional, isto é, muitos passos lógicos desnecessários em problemas mais simples; necessidade de equipamento de grande capacidade de armazenamento; necessidade de suporte técnico para o software, (na sua grande maioria de origem estrangeira); custo do software bastante significativo quando comparado ao custo do hardware [2].

Os programas especializados, por outro lado, apresentam muitas vantagens, que os tornam bastante atrativos: alta eficiência computacional; possibilidade de uso de equipamento de menor porte; facilidade de aprendizagem e treinamento; custo muito mais acessível.

Não se pretende que o sistema desenvolvido neste trabalho tenha a mesma potencialidade dos programas já citados, pois isto exigiria investimentos muito maiores, tanto técnicos quanto financeiros. Os principais objetivos a serem alcançados são:

- Adquirir o domínio das técnicas computacionais envolvidas na análise de estruturas por microcomputador;
- Desenvolver um software capaz de analisar eficientemente placas nervuradas considerando o efeito da posição relativa das nervuras em relação ao plano médio da placa;
- Utilizar o software desenvolvido para analisar modelos de placa com nervuras excêntricas em relação ao seu plano médio e comparar os resultados obtidos com os de outros modelos.

2. REVISÃO DA LITERATURA

Os primeiros sistemas desenvolvidos para auxílio ao projeto estrutural utilizavam linguagem similar à utilizada pelos engenheiros estruturais. O programa STRESS, de 1962, específico para análise de estruturas reticuladas, seguia esta filosofia. Nos anos subsequentes, já utilizando o método dos elementos finitos, vários sistemas de uso geral surgiram no mercado, tais como: NASTRAN, ASKA, ANSYS, STARDYNE, STRUDL. A principal deficiência desses programas estava na árdua preparação dos dados de entrada e na interpretação dos volumosos relatórios de saídas.

O rápido desenvolvimento dos equipamentos computacionais acelerou a evolução dos softwares para microcomputadores. Novos softwares tais como: COSMOS, SUPERSAP, MICROSAP, SAP90 foram desenvolvidos de forma mais amigável, contando com recursos de geração automática e visualização gráfica [3].

No caso específico das aplicações em engenharia estrutural, esta evolução tem criado novas perspectivas de uso e ampliado o nível de sofisticação dos modelos a serem analisados.

Dentro deste círculo vicioso, no qual softwares mais sofisticados e confiáveis exigem hardwares mais rápidos e poderosos, que por sua vez também permitem o uso de softwares cada vez mais evoluídos, acredita-se haver espaço para o desenvolvimento de softwares especializados como o apresentado neste trabalho.

Assim, idealizou-se um sistema simples, confiável, sintético, voltado para o dia a dia do profissional e com grande facilidade para a geração de modelos estruturais. Optou-se pelo emprego de elementos básicos, já suficientemente testados e aprovados, e

utilizou-se algumas técnicas mais elaboradas de programação, as quais possibilitaram o uso de equipamentos de pequeno porte.

Procedeu-se a uma revisão de tópicos das normas que regem o dimensionamento em concreto armado, de métodos clássicos de cálculo estrutural e de modelagem das malhas habitualmente utilizadas.

Constatou-se que normalmente os engenheiros calculistas utilizam as vigas com seção em "Tê" ou "L" somente para o dimensionamento das armaduras e/ou verificação das deformações, valendo-se, para tal, das prescrições das normas quanto à largura das mesas [5] [7].

No método clássico, isto é, no modelo popularmente denominado de "laje, viga e pilar", os elementos estruturais são analisados independentemente e não, como seria de se esperar, solidariamente. Neste método passa despercebido, por exemplo, que dependendo da posição da viga em relação à laje podem aparecer tensões de cisalhamento na superfície de contato laje-nervura [8], tensões estas responsáveis pela transmissão de esforços de membrana para as lajes [10] e forças normais para as vigas, o que contribui para um aumento na resistência à flexão [11]. Geralmente, nas vigas diretas com seção em "Tê" ou "L" solicitadas por momentos positivos a mesa (laje) é comprimida e a alma (nervura) tracionada, e nas solicitadas por momentos negativos a mesa (laje) é tracionada e a alma (nervura) comprimida. Em ambos os casos deve-se prever uma armadura perpendicular à nervura [6] [8] e no segundo a armadura de tração das vigas também deve ser distribuída nas lajes [9], para evitar a fissuração das mesmas quando em serviço [12]. Desta forma, o dimensionamento e detalhamento merecem uma especial atenção, pois tratam-se de elementos estruturais submetidos à flexo-tração ou flexo-compressão.

Um bom modelo deve, então, ser capaz de simular a estrutura com todas as suas peculiaridades, o mais próximo possível do real. Isto é o que se propõe fazer

neste trabalho, analisando os elementos estruturais solidariamente. Para tal são utilizados elementos de placa com esforços de membrana e elementos de barra sujeitos a flexo-tração ou compressão. Para a correta simulação da posição relativa das lajes e vigas é utilizado o recurso de conexão "off-set".

3. FORMULAÇÃO DOS ELEMENTOS

Este trabalho situa-se no domínio da análise linear de estruturas. Assim sendo, nos elementos formulados a seguir pressupõe-se ocorrerem a linearidade física e geométrica.

3.1 ELEMENTOS DE BARRA

Na figura 3.1 estão representados um elemento de barra ij , de comprimento L e seção transversal constante de área A , os deslocamentos possíveis nos nós i e j , as forças nodais associadas a estes deslocamentos, o sistema global $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ e o sistema de referência local xyz (o plano xy é o plano que contém o elemento) [13].

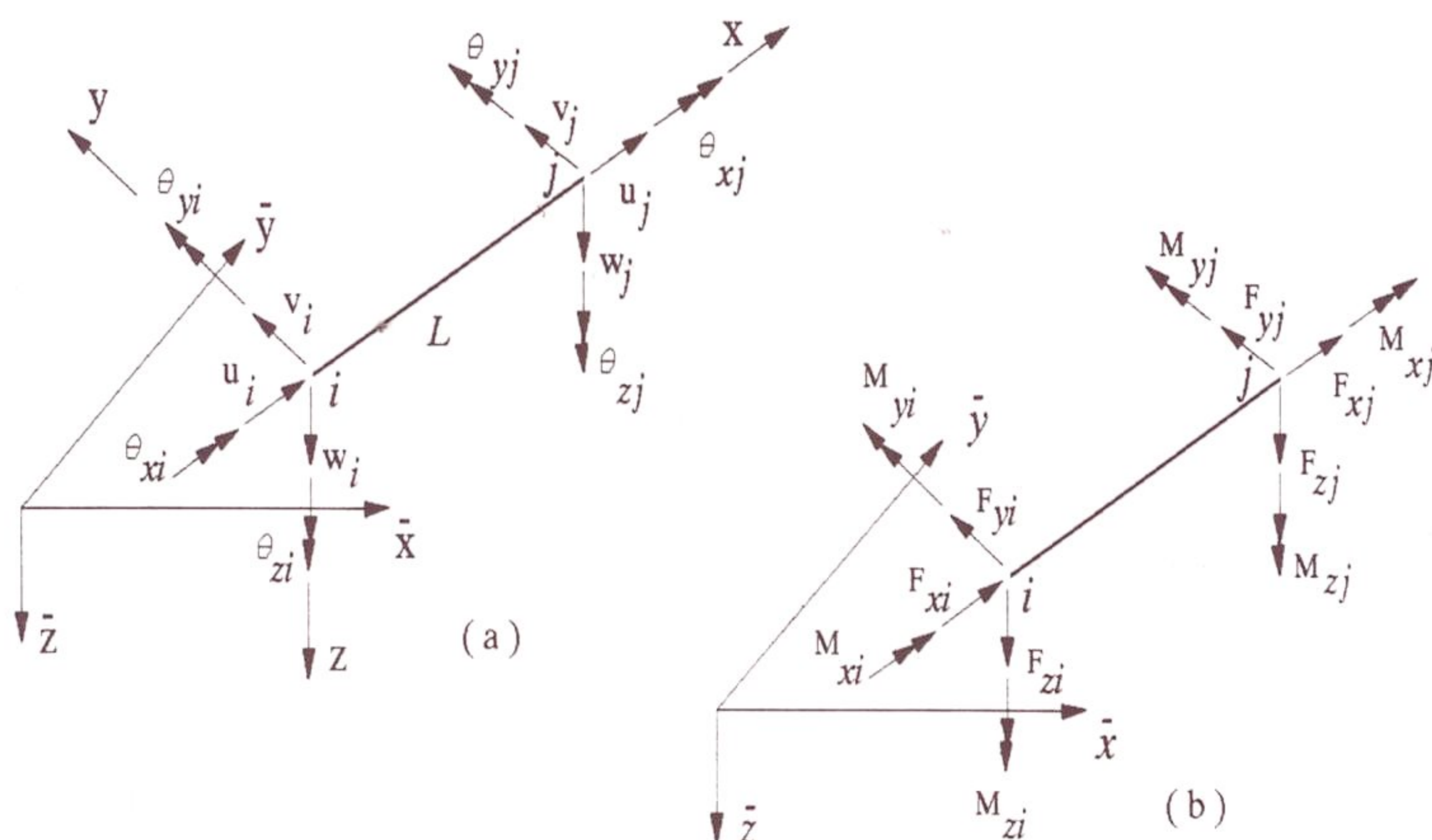


Fig. 3.1 (a) Sistema global $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, sistema local xyz , deslocamentos nodais e (b) esforços nas extremidades da barra

Os deslocamentos em um ponto qualquer do elemento são:

- translação u segundo o eixo dos x
- translação v segundo o eixo dos y
- translação w segundo o eixo dos z
- rotação θ_x segundo o eixo dos x
- rotação θ_y segundo o eixo dos y
- rotação θ_z segundo o eixo dos z

Na formulação dos elementos de barra, baseada no Método dos Elementos Finitos, a análise deve ser feita considerando inicialmente três elementos independentes: de treliça (axial), de torção, de viga (flexão). Em seguida estes elementos podem ser combinados para se obter elementos mais complexos, tal como um elemento de barra de pórtico espacial.

3.11 ELEMENTO DE TRELIÇA

- Função deslocamento

A função deslocamento escolhida para os deslocamentos axiais é a expressão polinomial

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (3.1)$$

que na forma matricial fica

$$\{u\} = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

ou simbolicamente,

$$\{f\} = [N'] \{\alpha^e\} \quad (3.2)$$

Os deslocamentos nodais são dados por (figura 3.2)

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \{\alpha^e\}$$

ou simbolicamente,

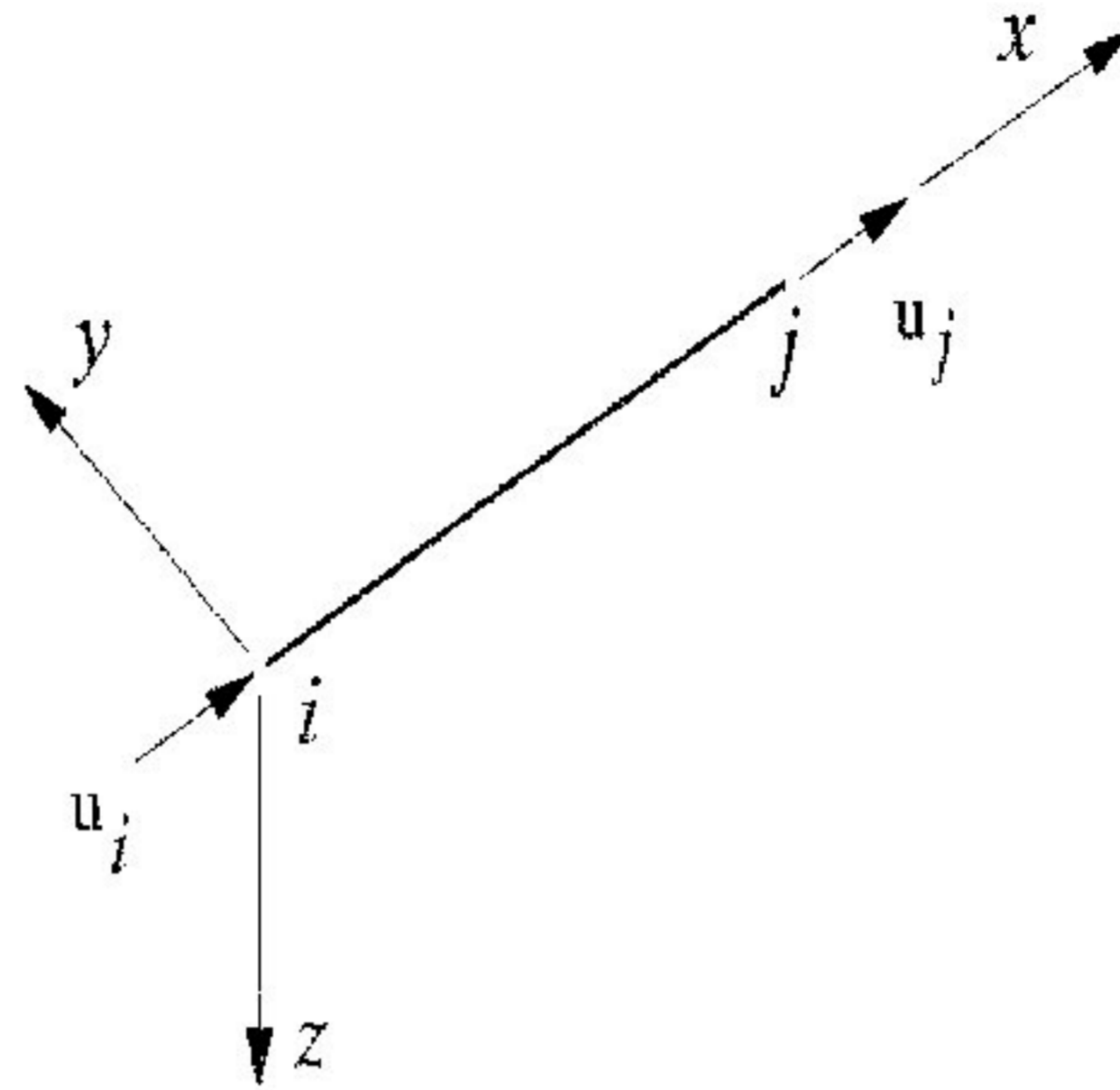


Fig. 3.2 Deslocamentos nodais (treliça) segundo os eixos locais

$$\{\delta^e\} = [C] \{\alpha^e\} \quad (3.3)$$

onde $[C]$ é a matriz 2×2 explicitada acima. Pode-se então calcular o valor de u em um ponto genérico de coordenada (x) uma vez determinados os deslocamentos nodais, já que:

$$\{f\} = [N'] [C]^{-1} \{\delta^e\} \quad (3.4)$$

- Deformações

A matriz das deformações é definida por

$$\{\varepsilon\} = \frac{du}{dx} = \alpha_2$$

ou

$$\{\varepsilon\} = [0 \quad 1] \{\alpha^e\}$$

ou ainda, simbolicamente,

$$\{\varepsilon\} = [Q] \{\alpha^e\} = [Q] [C]^{-1} \{\delta^e\} = [B] \{\delta^e\} \quad (3.5)$$

A equação (3.5) permite calcular as deformações uma vez conhecidos os deslocamentos nodais.

- Tensões

As tensões normais podem ser obtidas através da equação

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x\} = [D] \{\varepsilon_x\}$$

ou

$$\{\sigma\} = [D] [Q] [C]^{-1} \{\delta^e\} = [D] [B] \{\delta^e\} \quad (3.6)$$

onde $[D]$ é a matriz de elasticidade. Pode-se também escrever, resumidamente:

$$\{\sigma\} = [S] \{\delta^e\} \quad (3.7)$$

Para o elemento de treliça a matriz de elasticidade é dada por $[D] = [E]$ onde E é o módulo de elasticidade do material.

- Matriz de rigidez

A matriz de rigidez do elemento é dada por

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (3.8)$$

cuja forma explícita é a que se segue:

$$[k^e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

3.12 ELEMENTO DE TORÇÃO

- Função deslocamento

A função deslocamento escolhida para as rotações é a expressão polinomial [14]

$$\theta_x = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (3.10)$$

que na forma matricial fica

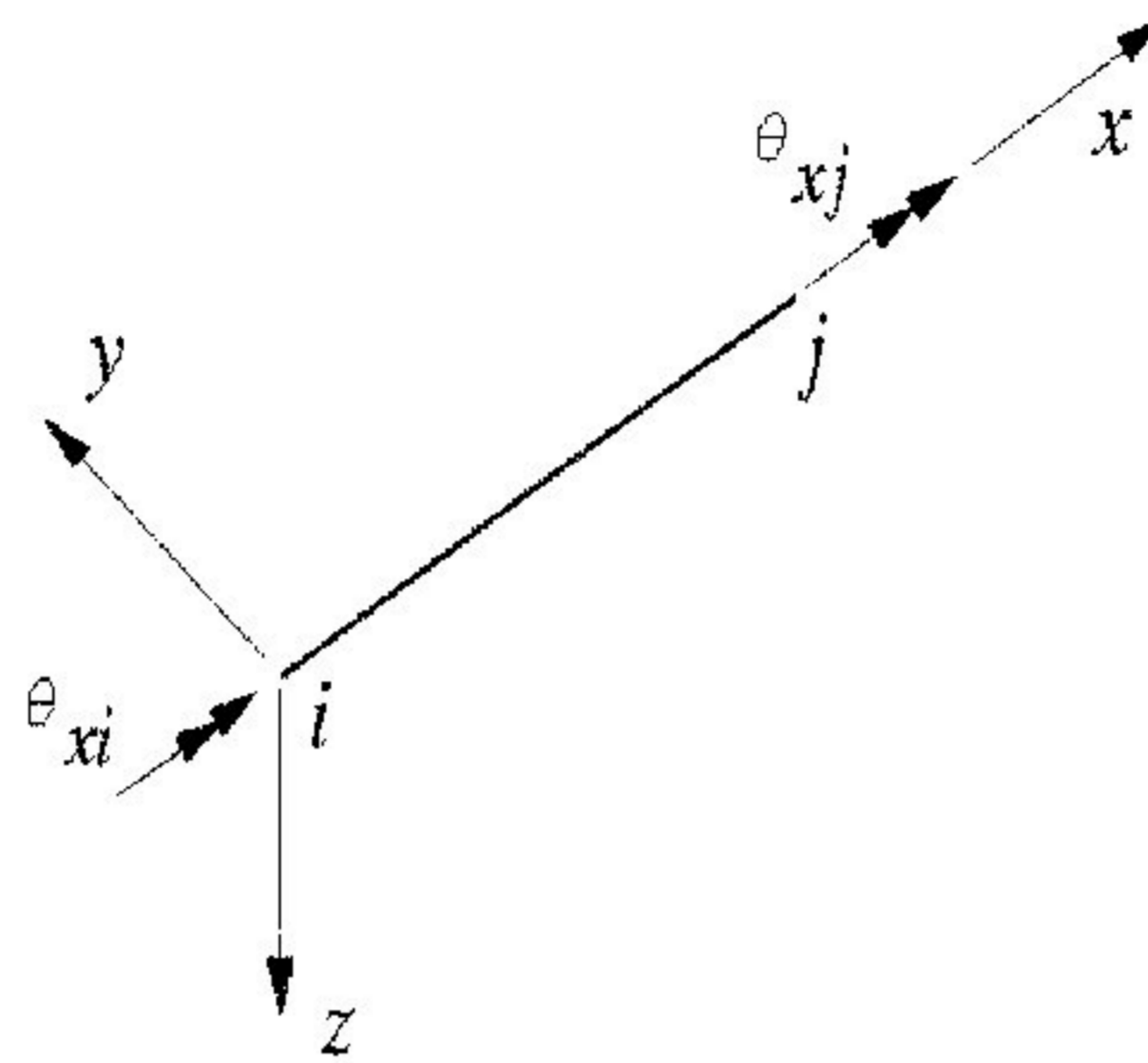


Fig. 3.3 Deslocamentos nodais (torção) segundo os eixos locais

$$\{\theta_x\} = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

ou simbolicamente,

$$\{f\} = [N'] \{\alpha^e\} \quad (3.11)$$

Os deslocamentos nodais são dados por (figura 3.3)

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \{\alpha^e\}$$

ou simbolicamente,

$$\{\delta^e\} = [C] \{\alpha^e\} \quad (3.12)$$

onde $[C]$ é a matriz 2×2 explicitada acima. Pode-se então calcular o valor de θ_x em um ponto genérico de coordenada (x) uma vez determinados os deslocamentos nodais, já que:

$$\{f\} = [N'] [C]^{-1} \{\delta^e\} \quad (3.4 \text{ rep})$$

- Deformações

A matriz das deformações é definida por

$$\{\varepsilon\} = \{\gamma\} = \frac{d\theta}{dx} = \alpha_2$$

ou

$$\{\gamma\} = [0 \quad 1] \{\alpha^e\}$$

ou ainda, simbolicamente,

$$\{\gamma\} = [Q] \{\alpha^e\} = [Q] [C]^{-1} \{\delta^e\} = [B] \{\delta^e\} \quad (3.13)$$

A equação (3.13) permite calcular as deformações de cisalhamento uma vez conhecidos os deslocamentos nodais.

- Tensões

As tensões de cisalhamento podem ser obtidas através da equação

$$\{\sigma\} = \{\tau\} = \{\tau_x\} = [D] \{\gamma\}$$

ou

$$\{\tau\} = [D] [Q] [C]^{-1} \{\delta^e\} = [D] [B] \{\delta^e\} \quad (3.14)$$

onde $[D]$ é a matriz de elasticidade. Pode-se também escrever, resumidamente:

$$\{\sigma\} = [S] \{\delta^e\} \quad (3.7 \text{ rep})$$

Para o elemento de torção a matriz de elasticidade é dada por $[D] = [G I_x]$ onde G é o módulo de elasticidade transversal do material e I_x a constante de torção.

- Matriz de rigidez

A matriz de rigidez do elemento é dada por

$$[k^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (3.8 \text{ rep})$$

cuja forma explícita é a que se segue:

$$[k^e] = \frac{GI_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

3.13 ELEMENTO DE VIGA

- Função deslocamento

A função deslocamento escolhida para o deslocamento transversal v oriundo da flexão no plano xy é a expressão polinomial [15]

$$v = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (3.16)$$

da qual obtém-se a rotação θ_z :

$$\theta_z = \frac{-dv}{dx} = -(\alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2)$$

Reescrevendo na forma matricial as equações acima tem-se

$$\begin{bmatrix} v \\ \theta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & -1 & -2x & -3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

ou simbolicamente,

$$\{f\} = [N^e] \{\alpha^e\} \quad (3.17)$$

Os deslocamentos nodais são dados por

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \\ 0 & -1 & -2x_i & -3x_i^2 \\ 1 & x_j & x_j^2 & x_j^3 \\ 0 & -1 & -2x_j & -3x_j^2 \end{bmatrix} \{\alpha^e\}$$

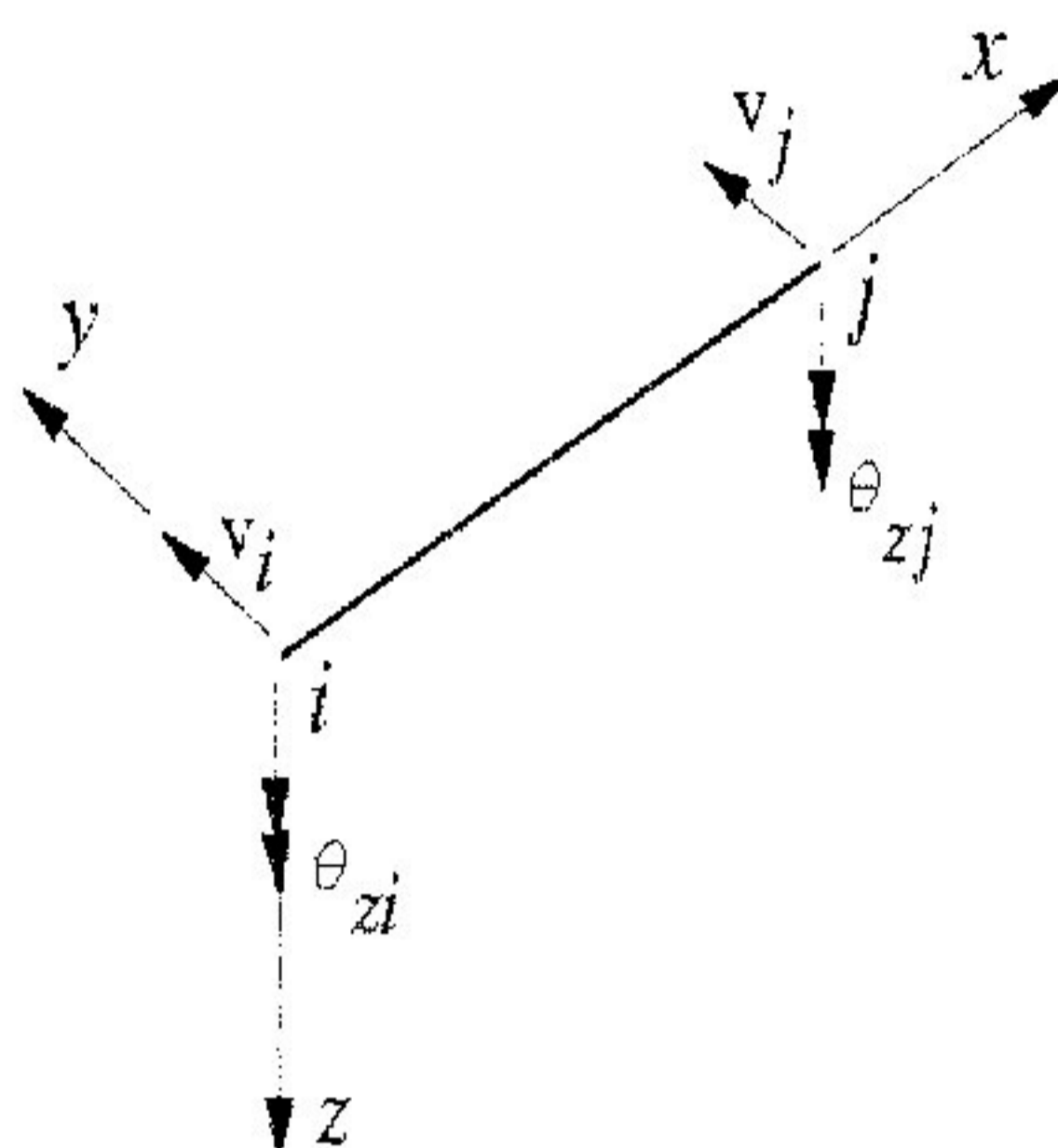


Fig. 3.4 Deslocamentos nodais (flexão no plano xy) segundo os eixos locais

ou simbolicamente,

$$\{\delta^e\} = [C] \{\alpha^e\} \quad (3.18)$$

onde $[C]$ é a matriz 4x4 explicitada acima. Pode-se então calcular o valor de v e θ_z em um ponto genérico de coordenada (x) uma vez determinados os deslocamentos nodais, já que:

$$\{f\} = [N'] [C]^{-1} \{\delta^e\} \quad (3.4 \text{ rep})$$

- Deformações

No caso do elemento de viga é conveniente considerar-se como "deformação" a curvatura. Portanto, a matriz das "deformações" é definida por

$$\{\varepsilon_x\} = \frac{-d^2v}{dx^2} = -(2\alpha_3 + 6\alpha_4 x)$$

ou

$$\{\varepsilon_x\} = -[0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x] \{\alpha^e\}$$

ou ainda, simbolicamente,

$$\{\varepsilon_x\} = [Q] \{\alpha^e\} = [Q] [C]^{-1} \{\delta^e\} = [B] \{\delta^e\} \quad (3.19)$$

A equação (3.19) permite calcular as "deformações" uma vez conhecidos os deslocamentos nodais.

- Tensões

No caso do elemento de viga é conveniente considerar-se como "tensão" o momento fletor. Portanto, a matriz das "tensões" pode ser obtida através da equação

$$\{\sigma\} = \{M_z\} = [D] \{\varepsilon_x\}$$

ou

$$\{\sigma\} = [D] [Q] [C^{-1}] \{\delta^e\} = [D] [B] \{\delta^e\} \quad (3.20)$$

onde [D] é a matriz de elasticidade. Pode-se também escrever, resumidamente:

$$\{\sigma\} = [S] \{\delta^e\} \quad (3.7 \text{ rep})$$

Para o elemento de viga a matriz de elasticidade é dada por $[D] = [E I_z]$ onde E é o módulo de elasticidade do material e I_z o momento de inércia da seção transversal.

- Matriz de rigidez

A matriz de rigidez do elemento é dada por

$$[k^e] = \int_L [B]^T [D] [B] dL \quad (3.8 \text{ rep})$$

cuja forma explícita é a que se segue:

$$[k^e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

No caso da flexão ocorrer no plano xz todas as funções são análogas às apresentadas acima, bastando, portanto, permutar-se os índices e alterar convenientemente os sinais.

3.14 ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL

- Matriz de rigidez

A matriz de rigidez do elemento de barra de pórtico espacial pode ser obtida por superposição somando-se de maneira adequada a contribuição de cada deformação (figura 3.5). Tem-se, então:

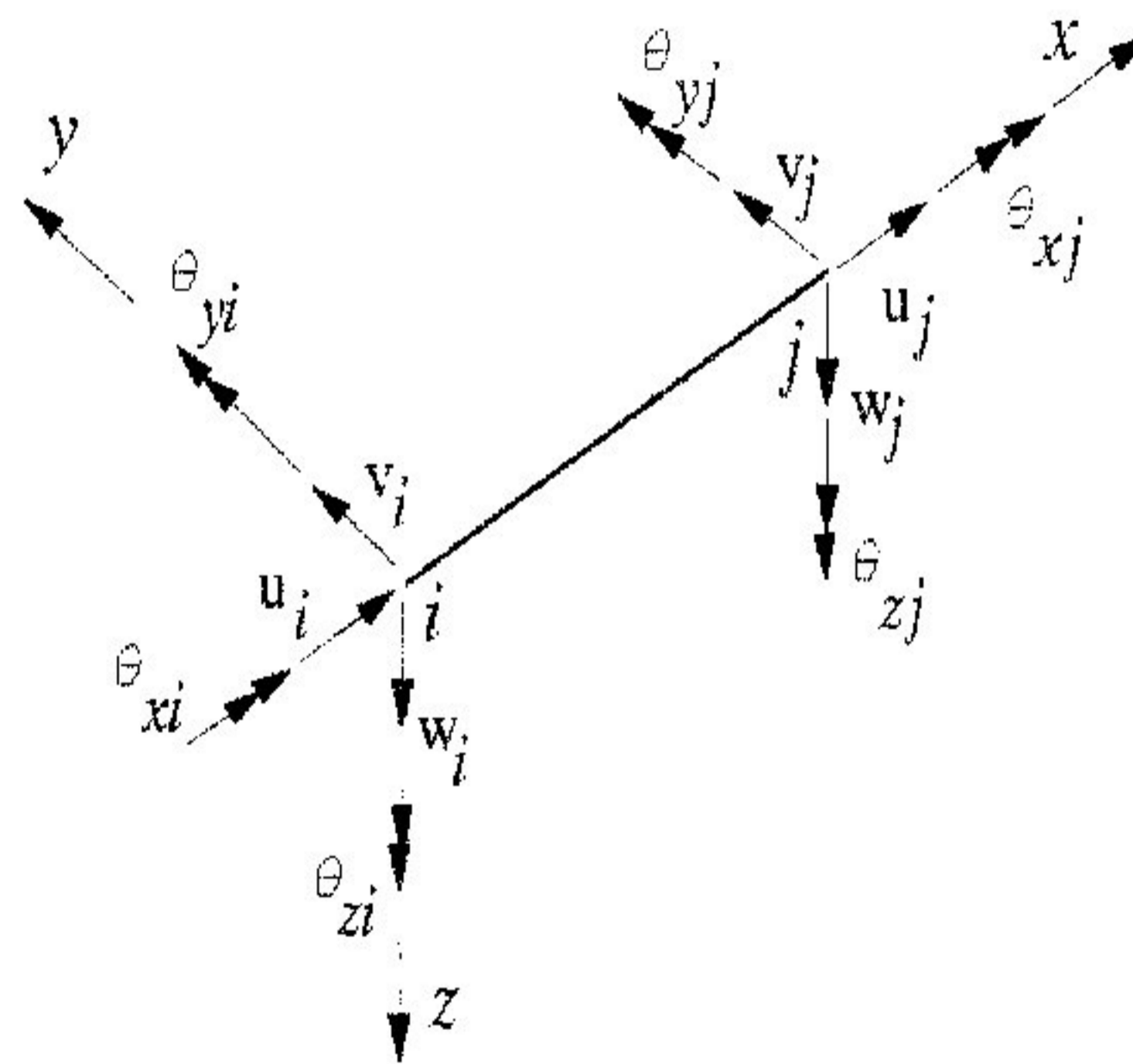


Fig. 3.5 Deslocamentos nodais (pórtico espacial) segundo os eixos locais

$$[k^e] = \begin{bmatrix} SA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -SA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & SB & 0 & 0 & 0 & 0 & -SB & 0 & 0 & 0 & 0 & -SC \\ & & SD & 0 & SE & 0 & 0 & -SD & 0 & SE & 0 & 0 \\ & & & SF & 0 & 0 & 0 & 0 & -SF & 0 & 0 & 0 \\ & & & & SG & 0 & 0 & -SE & 0 & SH & 0 & 0 \\ & & & & & SI & 0 & SC & 0 & 0 & 0 & SL \\ & & & & & & SA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & SB & 0 & 0 & 0 & SC \\ & & & & & & & & SD & 0 & -SE & 0 \\ & & & & & & & & & SF & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & SG & 0 \\ & & & & & & & & & & & SI \end{bmatrix}$$

(simétrica)

onde

$$SA = E A / L$$

$$SC = 6 E I_z / L^2$$

$$SE = 6 E I_y / L^2$$

$$SG = 4 E I_y / L$$

$$SI = 4 E I_z / L$$

$$SB = 12 E I_z / L^3$$

$$SD = 12 E I_y / L^3$$

$$SF = G I_x / L$$

$$SH = 2 E I_y / L$$

$$SL = 2 E I_z / L$$

- Cargas nodais equivalentes

É através de cargas nodais equivalentes que se introduz na análise o efeito dos diversos tipos de sollicitação que atuam nas barras que compõem o modelo estrutural. Para obter-se estas cargas nodais equivalentes é necessário inicialmente calcular-se os esforços nas extremidades da barra engastada, no sistema local, sendo os valores armazenados na matriz $\langle A_{ML}^e \rangle$ (figura 3.6a). A seguir apresenta-se esta matriz $\langle A_{ML}^e \rangle$ para alguns casos computados automaticamente pelo programa PAVEDIF (figura 3.6b, c, d, e e f). As figuras se encarregam de esclarecer o significado das diversas variáveis nas expressões abaixo.

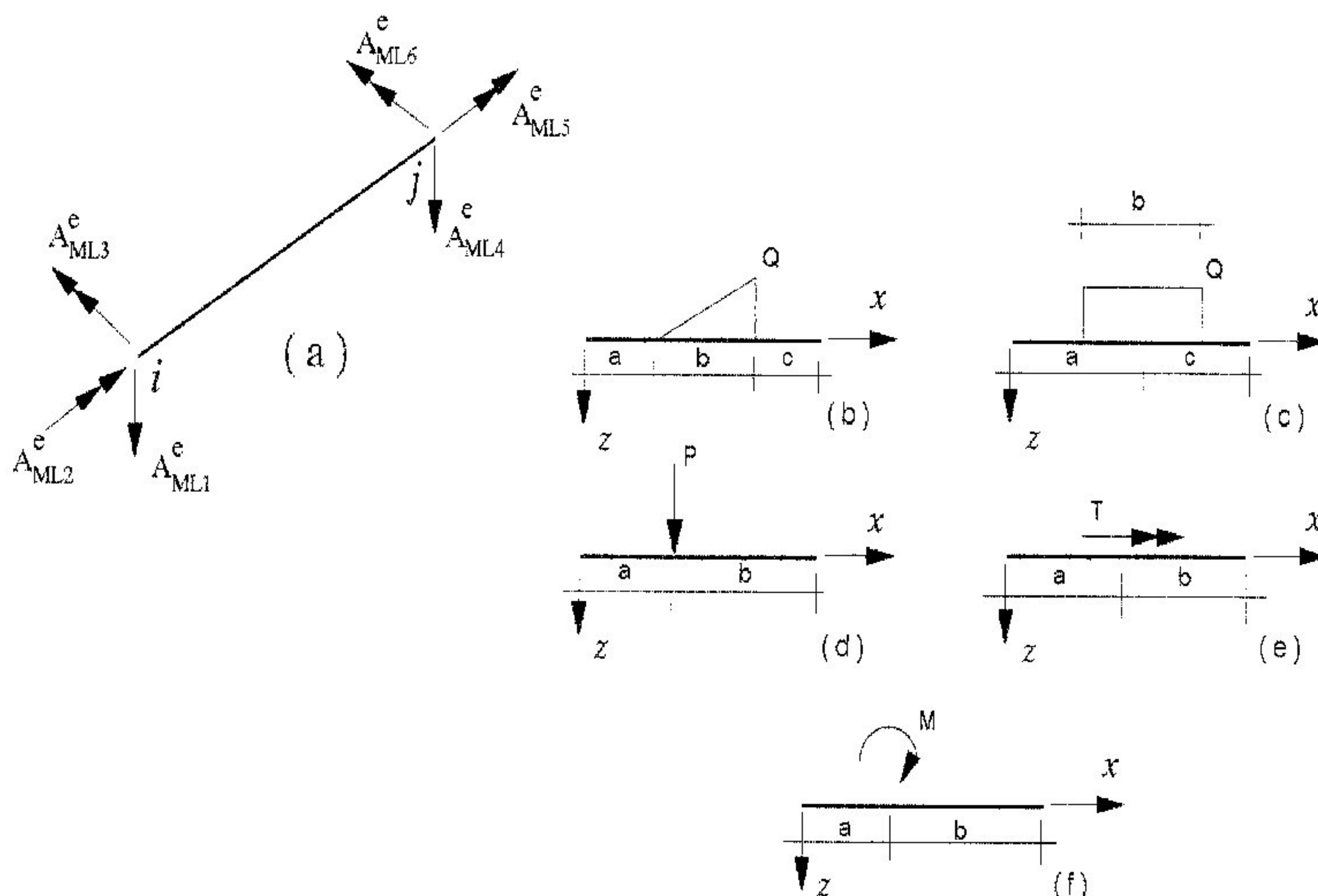


Fig. 3.6 Esforços atuantes nas extremidades da barra e bi-engastada devidos ao carregamento

a) Carga distribuida com variação linear (figura 3.6b)

$$A_{ML1}^e = \frac{-Q b (c + b/3)}{2 L} - \frac{Q b (C1 - C2)}{60 L^3}$$

$$A_{ML3}^e = \frac{-Q b C1}{60 L^2}$$

$$A_{ML4}^e = \frac{-Q b (a + 2b/3)}{2 L} + \frac{Q b (C1 - C2)}{60 L^3}$$

$$A_{ML6}^e = \frac{Q b C2}{60 L^2}$$

$$A_{ML2}^e = A_{ML5}^e = 0$$

$$C1 = 10 c^3 (3a + 2b) + b^2 (10c + 5a + 2b) + 20abc$$

$$C2 = 10 a^3 (3c + b) + b^2 (15c + 10a + 3b) + 40abc$$

b) Carga distribuida uniformemente (figura 3.6c)

$$A_{ML1}^e = \frac{Q b (a - c) (12ac - 3b^2)}{12 L^3} - \frac{Q c b}{L}$$

$$A_{ML3}^e = - \frac{Q b (12ac^2 + b^2 (L - 3c))}{12 L^2}$$

$$A_{ML4}^e = - \frac{Q b (a - c) (12ac - 3b^2)}{12 L^3} - \frac{Q a b}{L}$$

$$A_{ML6}^e = \frac{Q b (12ca^2 + b^2 (L - 3a))}{12 L^2}$$

$$A_{ML2}^e = A_{ML5}^e = 0$$

c) Carga concentrada (figura 3.6d)

$$A_{ML1}^e = - P b^2 (3a + b) / L^3$$

$$A_{ML3}^e = - P a b^2 / L^2$$

$$A_{ML4}^e = - P a^2 (3b + a) / L^3$$

$$A_{ML6}^e = P b a^2 / L^2$$

$$A_{ML2}^e = A_{ML5}^e = 0$$

d) Momento de torção concentrado (figura 3.6e)

$$A_{ML2}^e = - T b / L$$

$$A_{ML5}^e = - T a / L$$

$$A_{ML1}^e = A_{ML3}^e = A_{ML4}^e = A_{ML6}^e = 0$$

e) Momento concentrado (figura 3.6f)

$$A_{ML1}^e = - A_{ML4}^e = 6 M a b / L^3$$

$$A_{ML3}^e = M b (2a - b) / L^2$$

$$A_{ML6}^e = M a (2b - a) / L^2$$

$$A_{ML2}^e = A_{ML5}^e = 0 \quad (3.23)$$

A contribuição de cada elemento para as cargas nodais equivalentes, transformadas para o sistema global, será dada por

$$\{P^e\} = - [R_T]^T \{A_{ML}^e\} \quad (3.24)$$

onde $[R_T]$ é um operador de transformação (rotação).

- Esforços nas extremidades das barras

Obtêm-se os esforços finais nas extremidades da barra através da equação dada a seguir:

$$\{A_M^e\} = \{A_{ML}^e\} + [k^e] \{\delta^e\} \quad (3.25)$$

3.15 ELEMENTO DE BARRA COM CONEXÃO "OFF-SET"

Como se observa na figura 3.7, apenas no caso (b) o eixo da nervura está contido no plano médio da placa. Para modelar corretamente os casos (a) e (c) deve-se introduzir o conceito de barra com conexão "off-set" na qual o trecho jk é considerado elástico e os trechos jp e kq rígidos (figura 3.7d) [16]. Obtem-se a matriz de rigidez do elemento de barra com conexão "off-set", isto é, o elemento $pjkq$, a partir da matriz de rigidez do trecho elástico jk a qual é modificada por meio de operações matriciais como se verá a seguir.

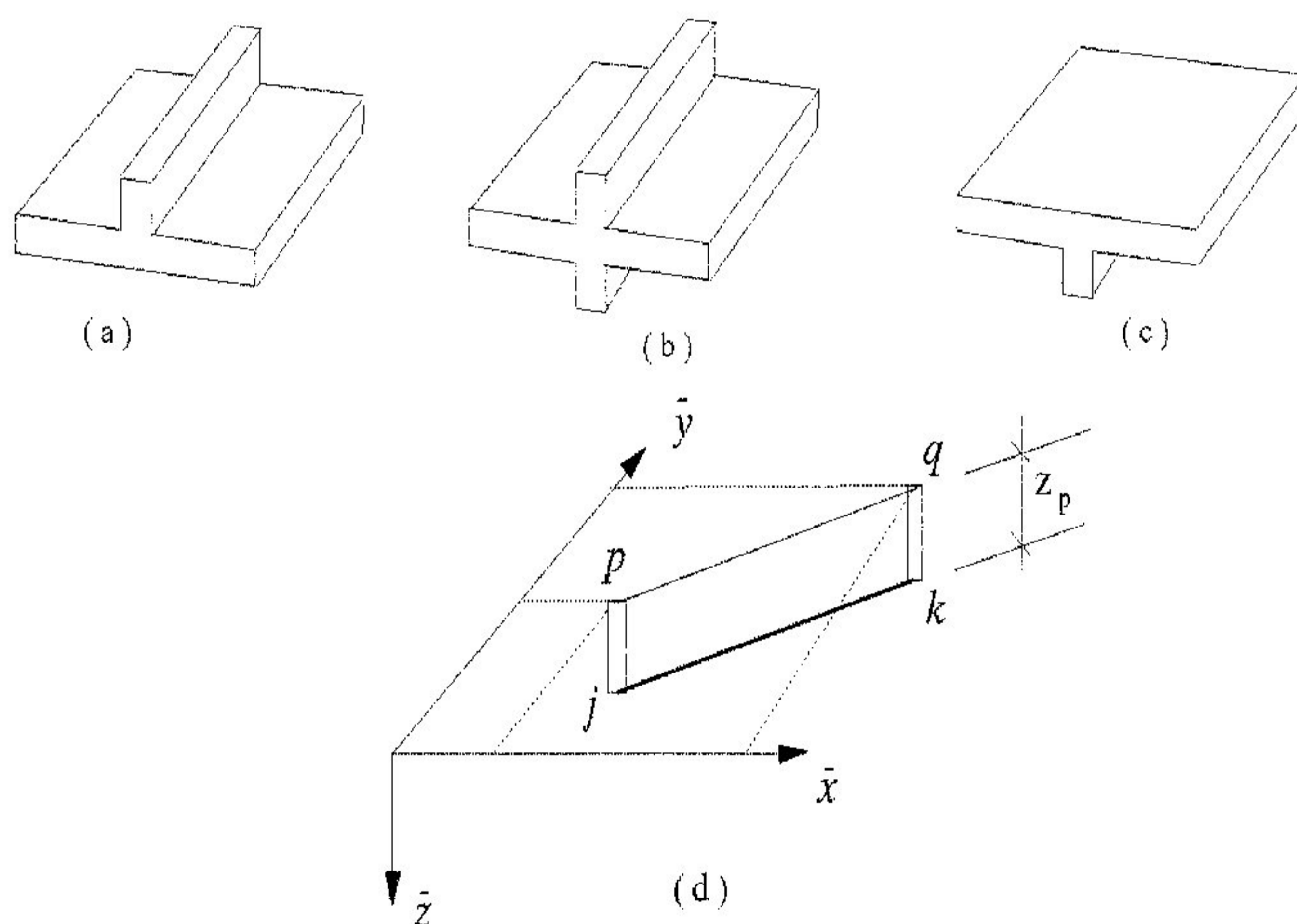


Fig. 3.7 (a, b, c) Placas nervuradas e (d) elemento de barra com conexão "off-set".

Chamando-se genericamente de $\{A_p\}$ e $\{A_j\}$ as matrizes que contêm as seis componentes das ações nos pontos p e j , respectivamente, tem-se

$$\{A_p\} = [T_{pj}] \{A_j\} \quad (3.26)$$

onde a matriz $[T_{pj}]$ é o operador que transforma as ações

conhecidas no ponto j em ações estaticamente equivalentes no ponto p .

Aplicando-se esta transformação a ambas as extremidades das barras obtém-se

$$\begin{bmatrix} \langle A \rangle_p \\ \langle A \rangle_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{pj}] & 0 \\ 0 & [T_{qk}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle A \rangle_j \\ \langle A \rangle_k \end{bmatrix}$$

ou resumidamente,

$$\langle A_{Mof}^e \rangle = [T] \langle A_{Mel}^e \rangle \quad (3.27)$$

A matriz $[T]$ é, portanto, dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_{pj}] & 0 \\ 0 & [T_{qk}] \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

onde, como demonstra-se [16],

$$[T_{pj}] = \begin{bmatrix} [I] & 0 \\ [C_{pj}] & [I] \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$[C_{pj}] = \begin{bmatrix} 0 & z_{pj} & 0 \\ -z_{pj} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

e

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Raciocínio análogo pode ser aplicado em relação aos deslocamentos:

$$\begin{bmatrix} \langle \delta \rangle_p \\ \langle \delta \rangle_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [T_{pj}] & 0 \\ 0 & [T_{qk}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \delta \rangle_j \\ \langle \delta \rangle_k \end{bmatrix}$$

ou resumidamente,

$$\{\underline{\delta}^e\} = [T] \{\delta_{-el}^e\} \quad (3.32)$$

Designando-se por $[k_{-el}^e]$ a matriz de rigidez do trecho elástico jk , as relações ações-deslocamentos são dadas por

$$\{A_{Mel}^e\} = [k_{-el}^e] \{\delta_{-el}^e\} \quad (3.33)$$

Então, transpondo-se a equação (3.32) e substituindo-se em (3.33) chega-se a

$$\{A_{Mel}^e\} = [k_{-el}^e] [T]^T \{\underline{\delta}^e\} \quad (3.34)$$

Assim, substituindo-se $\{A_{Mel}^e\}$ na equação (3.27) obtém-se

$$\{A_{Mof}^e\} = [T] [k_{-el}^e] [T]^T \{\underline{\delta}^e\} \quad (3.35)$$

de onde conclui-se que a matriz de rigidez da barra com conexão "off-set" é

$$[k_{-M}^e] = [T] [k_{-el}^e] [T]^T \quad (3.36)$$

- Esforços nas extremidades das barras

Designando-se por $[k_{el}^e]$ a matriz de rigidez do trecho elástico jk no sistema local, por $\{\delta_{el}^e\}$ a matriz dos deslocamentos na extremidade do trecho elástico jk e por $[R_T]$ a matriz de rotação do trecho elástico jk , obtêm-se os esforços finais nas extremidades do trecho elástico da barra com conexão "off-set" pela equação dada a seguir:

$$\{A_M^e\} = \{A_{ML}^e\} + [k_{el}^e] \{\delta_{el}^e\}$$

ou

$$\{A_M^e\} = \{A_{ML}^e\} + [k_{el}^e] [R_T] [T]^T \{\underline{\delta}^e\} \quad (3.37)$$

3.2 ELEMENTOS DE ESTADO PLANO DE TENSAO

São discutidos neste item os elementos triangular e retangular. Sua escolha ocorreu em função da sua simplicidade e confiabilidade; são elementos bastante testados, com farta documentação técnica e amplamente divulgados nos meios acadêmicos e profissionais.

3.2.1 ELEMENTO TRIANGULAR

- Função deslocamento

Na figura 3.8a está representado um elemento triangular ijk (a numeração deve ser feita no sentido anti-horário), de espessura h . Na figura 3.8b mostram-se, no sistema de global, os deslocamentos em um nó e as forças nodais correspondentes a estes deslocamentos (o plano xy é o plano médio do elemento) [22].

Os deslocamentos em um ponto qualquer do elemento são:

- translação u segundo o eixo dos x
- translação v segundo o eixo dos y

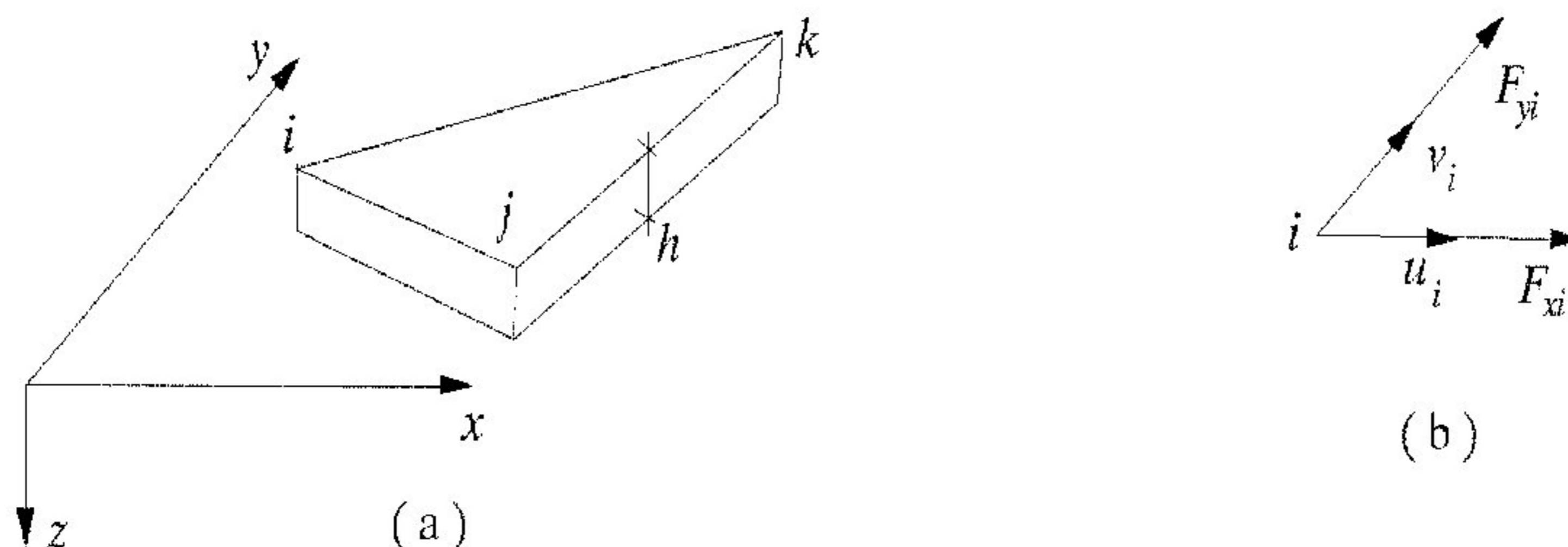


Fig. 3.8 (a) Elemento triangular, (b) deslocamentos e forças nodais

As funções deslocamento escolhidas para estes elementos são as expressões polinomiais

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (3.38)$$

que na forma matricial ficam

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix}$$

ou simbolicamente,

$$\{f\} = [N'] \{\alpha^e\} \quad (3.2 \text{ rep})$$

Os deslocamentos nodais são dados por

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \{\alpha^e\}$$

ou simbolicamente,

$$\{\delta^e\} = [C] \{\alpha^e\} \quad (3.39)$$

onde $[C]$ é a matriz 6×6 explicitada acima. Pode-se então calcular os valores de u e v em um ponto genérico de coordenadas (x,y) uma vez determinados os deslocamentos nodais, já que:

$$\{f\} = [N'] [C]^{-1} \{\delta^e\} \quad (3.4 \text{ rep})$$

- Deformações

Segundo a teoria da elasticidade, aplicada à análise de estado plano de tensões, a matriz das

deformações é definida por

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_6 \\ \alpha_3 + \alpha_5 \end{bmatrix}$$

ou, matricialmente,

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha^e\}$$

ou ainda, simbolicamente,

$$\{\varepsilon\} = [Q] \{\alpha^e\} = [Q] [C]^{-1} \{\delta^e\} = [B] \{\delta^e\} \quad (3.40)$$

A equação (3.40) permite calcular as deformações uma vez conhecidos os deslocamentos nodais.

- Tensões

As tensões normais e tangenciais (figura 3.9) podem ser obtidas através da equação

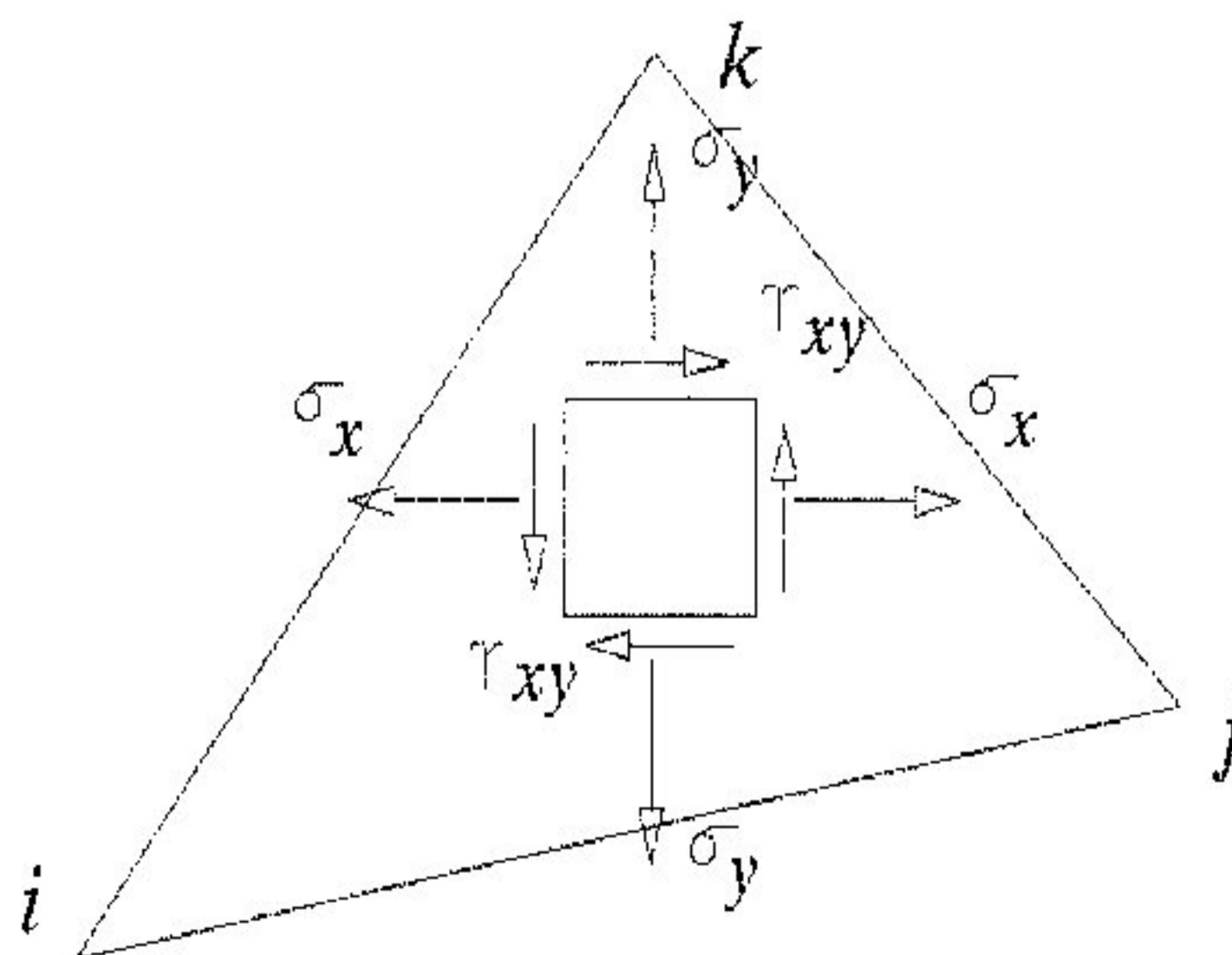


Fig. 3.9 Tensões normais e tangenciais

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [D] \{\epsilon\}$$

ou simbolicamente,

$$\{\sigma\} = [D] [Q] [C]^{-1} \{\delta^e\} = [D] [B] \{\delta^e\} \quad (3.41)$$

onde $[D]$ é a matriz de elasticidade. Pode-se também escrever, resumidamente:

$$\{\sigma\} = [S] \{\delta^e\} \quad (3.7 \text{ rep})$$

Se o elemento é ortótropo, tendo x e y como direções principais de ortotropia, a matriz $[D]$ é dada por

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

onde [27]

$$D_{11} = \frac{E'_x}{1 - \nu_x \nu_y}; \quad D_{12} = \frac{\nu_y E'_x}{1 - \nu_x \nu_y}; \quad D_{33} = G$$

$$D_{21} = \frac{\nu_x E'_y}{1 - \nu_x \nu_y}; \quad D_{22} = \frac{E'_y}{1 - \nu_x \nu_y} \quad (3.43)$$

e E'_x , E'_y , ν_x , ν_y , e G são constantes necessárias para caracterizar as propriedades elásticas do material.

Se o elemento é isótropo tem-se:

$$D_{11} = D_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad D_{12} = D_{21} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2};$$

$$D_{33} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.44)$$

- Matriz de rigidez

A matriz de rigidez do elemento triangular é dada por

$$[k^e] = h \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (3.45)$$

cuja forma explícita é a que se segue [18]

$$[k^e] = \frac{h}{4 \Delta} \begin{bmatrix} SA & SB & SC & SD & SE & SF \\ & SG & SH & SI & SJ & SL \\ & & SM & SN & SO & SP \\ & & & SQ & SR & SS \\ \text{(simétrica)} & & & & ST & SU \\ & & & & & SV \end{bmatrix}$$

(3.46)

onde

h = espessura do elemento

Δ = área do elemento

$$SA = D_{11} (y_j - y_k)^2 + D_{33} (x_k - x_j)^2$$

$$SB = D_{12} (x_k - x_j)(y_j - y_k) + D_{33} (x_k - x_j)(y_j - y_k)$$

$$SC = D_{11} (y_j - y_k)(y_k - y_j) + D_{33} (x_k - x_j)(x_i - x_k)$$

$$SD = D_{12} (x_i - x_k)(y_j - y_k) + D_{33} (x_k - x_j)(y_k - y_i)$$

$$SE = D_{11} (y_i - y_j)(y_j - y_k) + D_{33} (x_j - x_i)(x_k - x_j)$$

$$SF = D_{12} (x_j - x_i)(y_j - y_k) + D_{33} (x_k - x_j)(y_i - y_j)$$

$$SG = D_{22} (x_k - x_j)^2 + D_{33} (y_j - y_k)^2$$

$$SH = D_{12} (x_k - x_j)(y_k - y_i) + D_{33} (x_i - x_k)(y_j - y_k)$$

$$SI = D_{22} (x_k - x_j)(x_i - x_k) + D_{33} (y_j - y_k)(y_k - y_i)$$

$$SJ = D_{12} (x_k - x_j)(y_i - y_j) + D_{33} (x_j - x_i)(y_j - y_k)$$

$$SL = D_{22} (x_j - x_i)(x_k - x_j) + D_{33} (y_i - y_j)(y_j - y_k)$$

$$SM = D_{11} (y_k - y_i)^2 + D_{33} (x_i - x_k)^2$$

$$SN = D_{12} (x_i - x_k)(y_k - y_i) + D_{33} (x_i - x_k)(y_k - y_i)$$

$$SO = D_{11} (y_i - y_j)(y_k - y_i) + D_{33} (x_i - x_k)(x_j - x_i)$$

$$SP = D_{12} (x_j - x_i)(y_k - y_i) + D_{33} (x_i - x_k)(y_i - y_j)$$

$$\begin{aligned}
 SQ &= D_{22} (x_i - x_k)^2 + D_{33} (y_k - y_i)^2 \\
 SR &= D_{12} (x_i - x_k)(y_i - y_j) + D_{33} (x_j - x_i)(y_k - y_i) \\
 SS &= D_{22} (x_i - x_k)(x_j - x_i) + D_{33} (y_i - y_j)(y_k - y_i) \\
 ST &= D_{11} (y_i - y_j)^2 + D_{33} (x_j - x_i)^2 \\
 SU &= D_{12} (x_j - x_i)(y_i - y_j) + D_{33} (x_j - x_i)(y_i - y_j) \\
 SV &= D_{22} (x_j - x_i)^2 + D_{33} (y_i - y_j)^2
 \end{aligned}$$

- Cargas nodais equivalentes

As cargas nodais equivalentes às forças de massa aplicadas ao elemento são dadas por

$$\{P^e\} = h [C^{-1}]^T \iint [N']^T \{p^e\} dx dy \quad (3.47)$$

onde $\{p^e\}$ é a matriz das forças de massa.

Supondo que as forças de massa X e Y são constantes no elemento tem-se [23]

$$\{P^e\} = \frac{h \Delta}{3} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

onde Δ é a área e h a espessura do elemento.

- Tensões no elemento

Neste elemento as tensões são constantes em qualquer ponto do seu interior e podem ser obtidas pela seguinte equação

$$\{\sigma^e\} = \begin{bmatrix} SA & SB & SC & SD & SE & SF \\ SG & SH & SI & SJ & SL & SM \\ SN & SO & SP & SQ & SR & SS \end{bmatrix} \{\delta^e\} \quad (3.49)$$

onde

$$SA = D_{11} (y_j - y_k)$$

$$SB = D_{12}(x_k - x_j)$$

$$SC = D_{11}(y_k - y_i)$$

$$SD = D_{12}(x_i - x_k)$$

$$SE = D_{11}(y_i - y_j)$$

$$SF = D_{12}(x_j - x_i)$$

$$SG = D_{21}(y_j - y_k)$$

$$SH = D_{22}(x_k - x_j)$$

$$SI = D_{21}(y_k - y_i)$$

$$SJ = D_{22}(x_i - x_k)$$

$$SL = D_{21}(y_i - y_j)$$

$$SM = D_{22}(x_j - x_i)$$

$$SN = D_{33}(x_k - x_j)$$

$$SO = D_{33}(y_j - y_k)$$

$$SP = D_{33}(x_i - x_k)$$

$$SQ = D_{33}(y_k - y_i)$$

$$SR = D_{33}(x_j - x_i)$$

$$SS = D_{33}(y_i - y_j)$$

3.2.2 ELEMENTO RETANGULAR

- Função deslocamento

Na figura 3.10a está representado um elemento retangular $ijkl$ (a numeração deve ser feita no sentido horário) de lados a e b , e espessura h . Na figura 3.10b mostram-se, no sistema global, os deslocamentos em um nó e as forças nodais correspondentes a estes deslocamentos (o plano xy é o plano médio do elemento) [17].

Os deslocamentos em um ponto qualquer do elemento são:

- translação u segundo o eixo dos x
- translação v segundo o eixo dos y

As funções deslocamento escolhidas para este elemento são as expressões polinomiais

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned} \quad (3.50)$$

que na forma matricial ficam

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix}$$

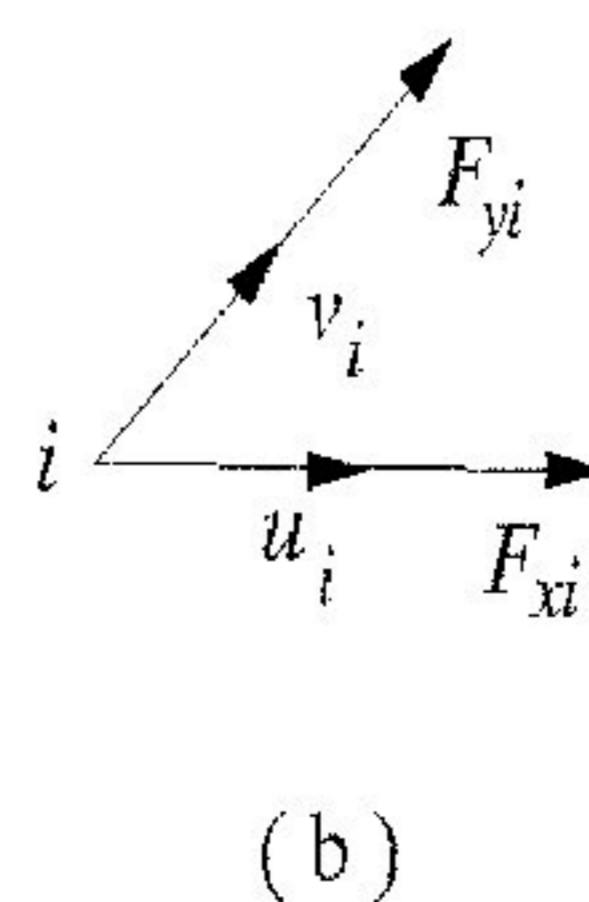
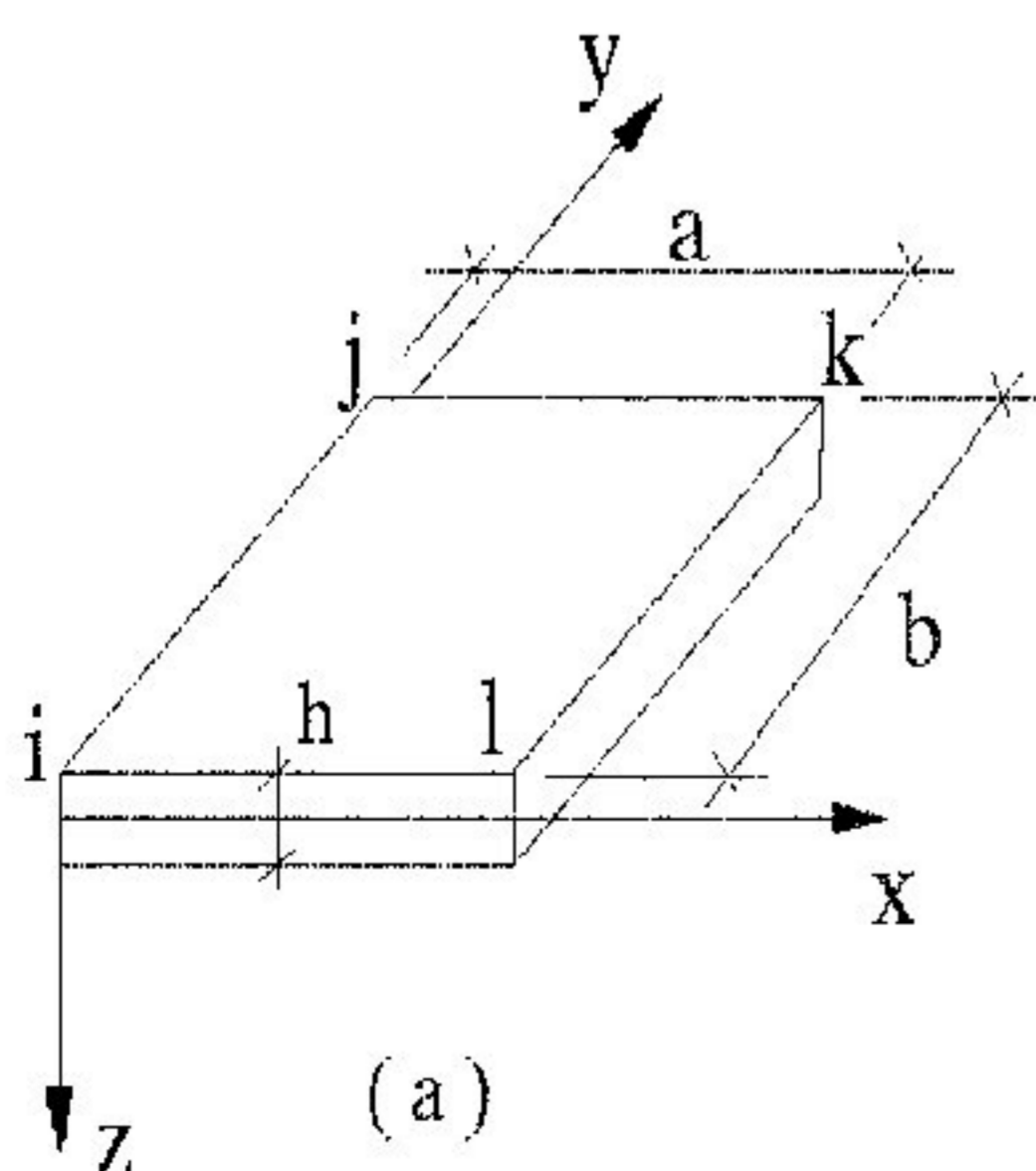


Fig. 3.10 (a) Elemento retangular, (b) deslocamentos e forças nodais

ou simbolicamente,

$$\{f\} = [N'] \{\alpha^e\} \quad (3.2 \text{ rep})$$

Os deslocamentos nodais são dados por

$$\{\delta^e\} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_l \\ v_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_l & y_l & x_l y_l \end{bmatrix} \{\alpha^e\}$$

ou simbolicamente,

$$\{\delta^e\} = [C] \{\alpha^e\} \quad (3.51)$$

onde $[C]$ é a matriz 8×8 explicitada acima. Pode-se então calcular os valores de u e v em um ponto genérico de coordenadas (x,y) uma vez determinados os deslocamentos nodais, já que:

$$\{f\} = [N'] [C]^{-1} \{\delta^e\} \quad (3.4 \text{ rep})$$

- Deformações

Segundo a teoria da elasticidade, aplicada à análise de estado plano de tensões, a matriz das deformações é definida por

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 + \alpha_4 y \\ \alpha_7 + \alpha_8 x \\ \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_6 + \alpha_8 y \end{bmatrix}$$

ou, matricialmente,

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \{\alpha^e\}$$

ou ainda, simbolicamente,

$$\{\varepsilon\} = [Q] \{\alpha^e\} = [Q] [C]^{-1} \{\delta^e\} = [B] \{\delta^e\} \quad (3.52)$$

A equação (3.52) permite calcular as deformações uma vez conhecidos os deslocamentos nodais.

- Tensões

As tensões normais e tangenciais (figura 3.11) podem ser obtidas através da equação

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [D] \{\varepsilon\}$$

ou simbolicamente,

$$\{\sigma\} = [D] [Q] [C]^{-1} \{\delta^e\} = [D] [B] \{\delta^e\} \quad (3.53)$$

onde $[D]$ é a matriz de elasticidade. Pode-se também escrever, resumidamente:

$$\{\sigma\} = [S] \{\delta^e\} \quad (3.7 \text{ rep})$$

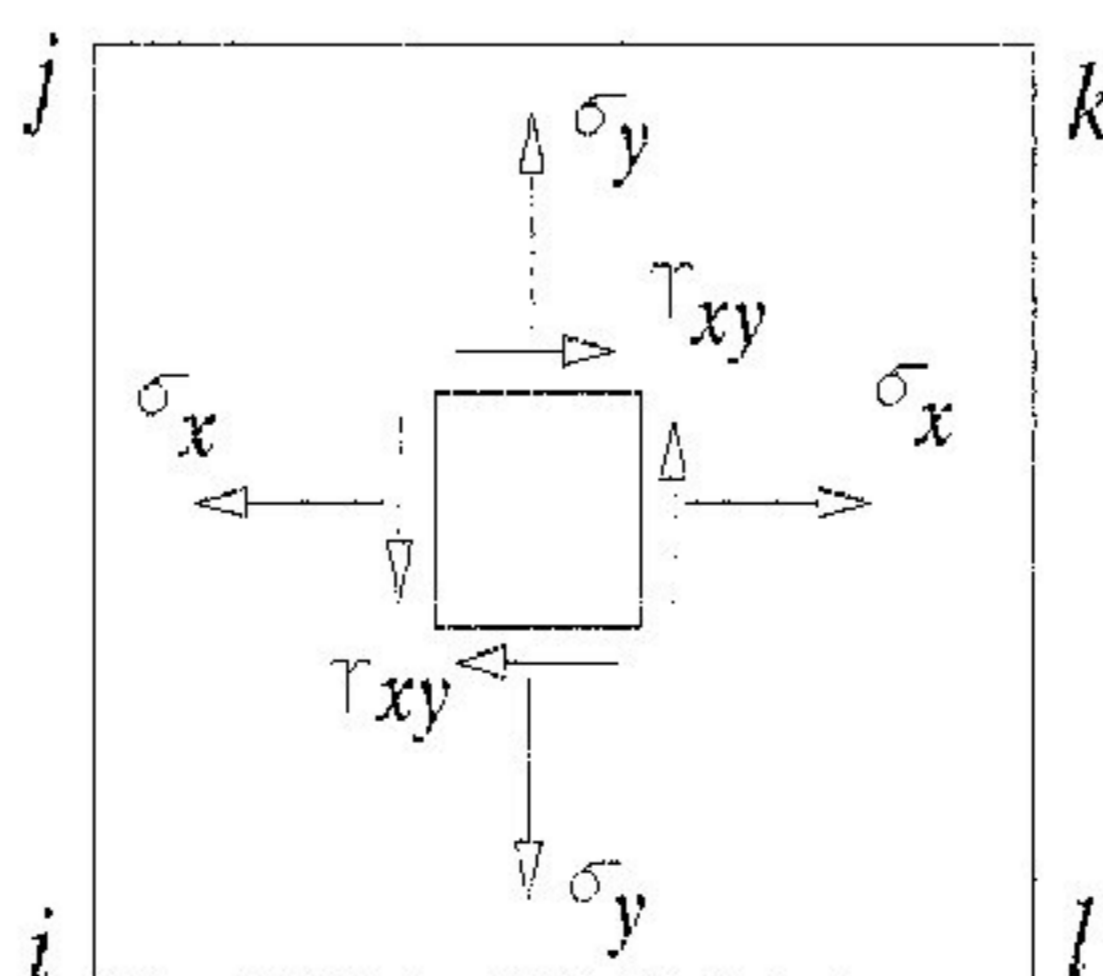


Fig. 3.11 Tensões normais e tangenciais

Se o elemento é ortótropo, tendo x e y como direções principais de ortotropia, a matriz $[D]$ é dada por

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

onde [27]

$$D_{11} = \frac{E'_x}{1 - \nu_x \nu_y}; \quad D_{12} = \frac{\nu_y E'_x}{1 - \nu_x \nu_y}; \quad D_{33} = G$$

$$D_{21} = \frac{\nu_x E'_y}{1 - \nu_x \nu_y}; \quad D_{22} = \frac{E'_y}{1 - \nu_x \nu_y} \quad (3.55)$$

e E'_x , E'_y , ν_x , ν_y , e G são constantes necessárias para caracterizar as propriedades elásticas do material.

Se o elemento é isótropo tem-se:

$$D_{11} = D_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad D_{12} = D_{21} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2};$$

$$D_{33} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.56)$$

- Matriz de rigidez

A matriz de rigidez do elemento retangular é dada por

$$[k^e] = h \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (3.45 \text{ rep})$$

cuja forma explícita é a que se segue [19]

$$[k^e] = \frac{h}{12} \begin{bmatrix} SA & SB & SC & SD & SE & -SB & SF & -SD \\ & SG & -SD & SH & -SB & SI & SD & SJ \\ & & SA & -SB & SF & SD & SE & SB \\ & & & SG & -SD & SJ & SB & SI \\ & & & & SA & SB & SC & SD \\ & & & & & SG & -SD & SH \\ & & & & & & SA & -SB \\ & & & & & & & SG \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

(simétrica)

onde a e b são os lados, h a espessura do elemento, e

$$\rho = a/b$$

$$SA = 4D_{11}\rho^{-1} + 4D_{33}\rho$$

$$SB = 3D_{12} + 3D_{39}$$

$$SC = 2D_{11}\rho^{-1} - 4D_{33}\rho$$

$$SD = -3D_{12} + 3D_{39}$$

$$SE = -2D_{11}\rho^{-1} - 2D_{33}\rho$$

$$SF = -4D_{11}\rho^{-1} + 2D_{33}\rho$$

$$SG = 4D_{22}\rho + 4D_{33}\rho^{-1}$$

$$SH = -4D_{22}\rho + 2D_{33}\rho^{-1}$$

$$SI = -2D_{22}\rho - 2D_{33}\rho^{-1}$$

$$SJ = 2D_{22}\rho - 4D_{33}\rho^{-1}$$

- Cargas nodais equivalentes

As cargas nodais equivalentes às forças de massa aplicadas ao elemento são dadas por

$$\{P^e\} = h [C^{-1}]^T \iint [N']^T \{p^e\} dx dy \quad (3.47 \text{ rep})$$

onde $\{p^e\}$ é a matriz das forças de massa.

Supondo que as forças de massa X e Y são constantes no elemento tem-se [28]

$$\{P^e\} = \frac{abh}{4} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \\ X \\ Y \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

onde a e b são os lados e h a espessura do elemento.

- Tensões nos nós dos elementos

Neste trabalho optou-se por calcular as tensões nos nós do elemento. Isto é feito substituindo-se na equação (3.53) os valores genéricos de x e y pelas coordenadas nodais. Desta forma, fazendo isto nos nós $ijkl$ sucessivamente, chega-se à seguinte equação:

$$\{\sigma^e\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xi} \\ \sigma_{yj} \\ \tau_{xyi} \\ \sigma_{xj} \\ \tau_{yj} \\ \sigma_{xyj} \\ \sigma_{xk} \\ \tau_{yk} \\ \sigma_{xyk} \\ \sigma_{xl} \\ \tau_{yl} \\ \tau_{xyl} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -SA & -SB & 0 & SB & 0 & 0 & SA & 0 \\ -SC & -SD & 0 & SD & 0 & 0 & SC & 0 \\ -SE & -SF & SE & 0 & 0 & 0 & 0 & SF \\ 0 & -SB & -SA & SB & SA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -SD & -SC & SD & SC & 0 & 0 & 0 \\ -SE & 0 & SE & -SF & 0 & SF & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -SA & 0 & SA & SB & 0 & -SB \\ 0 & 0 & -SC & 0 & SC & SD & 0 & -SD \\ 0 & 0 & 0 & -SF & SE & SF & -SE & 0 \\ -SA & 0 & 0 & 0 & 0 & SB & SA & -SB \\ -SC & 0 & 0 & 0 & 0 & SD & SC & -SD \\ 0 & -SF & 0 & 0 & SE & 0 & -SE & SF \end{bmatrix} \{\delta^e\} \quad (3.59)$$

onde a e b são os lados do elemento, e

$$SA = D_{11}/a$$

$$SB = D_{12}/b$$

$$SC = D_{21}/a$$

$$SD = D_{22}/b$$

$$SE = D_{33}/b$$

$$SF = D_{33}/a$$

3.3 ELEMENTOS DE PLACA

São discutidos neste item os elementos triangular e retangular. Sua escolha ocorreu em função da sua simplicidade e confiabilidade; são elementos bastante testados, com farta documentação técnica e amplamente divulgados nos meios acadêmicos e profissionais.

3.3.1 ELEMENTO RETANGULAR

- Função deslocamento

Na figura 3.12a está representado um elemento retangular $ijkl$ (a numeração deve ser feita no sentido horário) de lados a e b , e espessura h . Na figura 3.12b mostram-se, no sistema global, os deslocamentos em um nó e as forças nodais correspondentes a estes deslocamentos (o plano xy é o plano médio da placa) [24].

Os deslocamentos em um ponto qualquer do elemento são:

- translação w segundo o eixo dos z
- rotação θ_x segundo o eixo dos x
- rotação θ_y segundo o eixo dos y

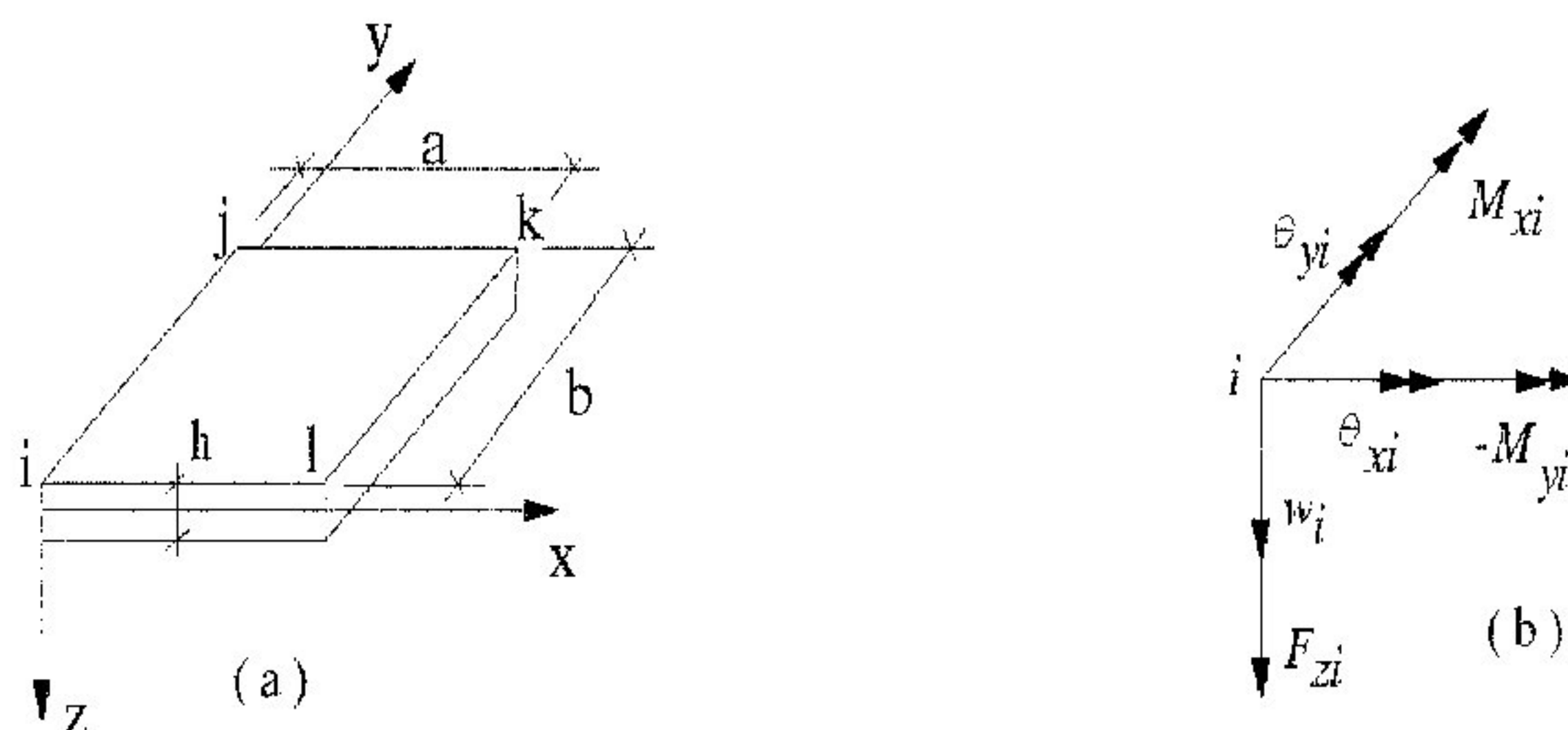


Fig. 3.12 (a) Elemento retangular, (b) deslocamentos e forças nodais

A função deslocamento escolhida para este elemento é a expressão polinomial

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \\ + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$$

da qual se obtêm as rotações θ_x e θ_y :

$$\theta_x = - \frac{\partial w}{\partial y} = - (\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 \\ + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2)$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = (\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + \\ + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3) \quad (3.60)$$

Reescrevendo na forma matricial as equações acima tem-se

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2 y & xy^2 & y^3 & x^3 y & xy^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -x & -2y & 0 & -x^2 & -2xy & -3y^2 & -x^3 & -3xy^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2 y & y^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}$$

ou simbolicamente,

$$\{f\} = [N^e] \{\alpha^e\} \quad (3.2 \text{ rep})$$

Os deslocamentos nodais são dados por

$$\{\delta^e\} = [C] \{\alpha^e\} \quad (3.51 \text{ rep})$$

onde

$$\{\delta^e\} = [w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ w_j \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \ w_k \ \theta_{xk} \ \theta_{yk} \ w_l \ \theta_{xl} \ \theta_{yl}]^T$$

e $[C]$ é a matriz 12×12 explicitada abaixo.

$$[C] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^3 y_i & x_i y_i^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -x_i & -2y_i & 0 & -x_i^2 & -2x_i y_i & -3y_i^2 & -x_i^3 & -3x_i y_i^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_i & y_i & 0 & 3x_i^2 & 2x_i y_i & y_i^2 & 0 & 3x_i^2 & y_i^3 \\ 1 & x_j & y_j & x_j^2 & x_j y_j & y_j^2 & x_j^3 & x_j^2 y_j & x_j y_j^2 & y_j^3 & x_j^3 y_j & x_j y_j^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -x_j & -2y_j & 0 & -x_j^2 & -2x_j y_j & -3y_j^2 & -x_j^3 & -3x_j y_j^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_j & y_j & 0 & 3x_j^2 & 2x_j y_j & y_j^2 & 0 & 3x_j^2 & y_j^3 \\ 1 & x_k & y_k & x_k^2 & x_k y_k & y_k^2 & x_k^3 & x_k^2 y_k & x_k y_k^2 & y_k^3 & x_k^3 y_k & x_k y_k^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -x_k & -2y_k & 0 & -x_k^2 & -2x_k y_k & -3y_k^2 & -x_k^3 & -3x_k y_k^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_k & y_k & 0 & 3x_k^2 & 2x_k y_k & y_k^2 & 0 & 3x_k^2 & y_k^3 \\ 1 & x_l & y_l & x_l^2 & x_l y_l & y_l^2 & x_l^3 & x_l^2 y_l & x_l y_l^2 & y_l^3 & x_l^3 y_l & x_l y_l^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -x_l & -2y_l & 0 & -x_l^2 & -2x_l y_l & -3y_l^2 & -x_l^3 & -3x_l y_l^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x_l & y_l & 0 & 3x_l^2 & 2x_l y_l & y_l^2 & 0 & 3x_l^2 & y_l^3 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Pode-se, então, calcular os valores de w , θ_x e θ_y em um ponto genérico de coordenadas (x,y) uma vez determinados os deslocamentos nodais, já que

$$\{f\} = [N'] [C]^{-1} \{\delta^e\} \quad (3.4 \text{ rep})$$

- Deformações

Na análise de placas é conveniente definir-se como "deformações generalizadas" as curvaturas e a torção. Assim sendo, a matriz $\{\epsilon\}$ é dada por

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{-\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} xy \\ 2\alpha_6 + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy \\ 2(\alpha_5 + 2\alpha_8 x + 2\alpha_9 y + 3\alpha_{11} x^2 + 3\alpha_{12} y^2) \end{bmatrix}$$

ou matricialmente,

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \{\alpha^e\}$$

ou ainda, simbolicamente,

$$\{\varepsilon\} = [Q] \{\alpha^e\} = [Q] [C]^{-1} \{\delta^e\} = [B] \{\delta^e\} \quad (3.62)$$

A equação (3.62) permite calcular as deformações uma vez conhecidos os deslocamentos nodais.

- Tensões

Na análise de placas é conveniente definir-se como "tensões generalizadas" os momentos fletores e de torção. Desta forma, a matriz $\{\alpha\}$ é dada por (figura 3.13)

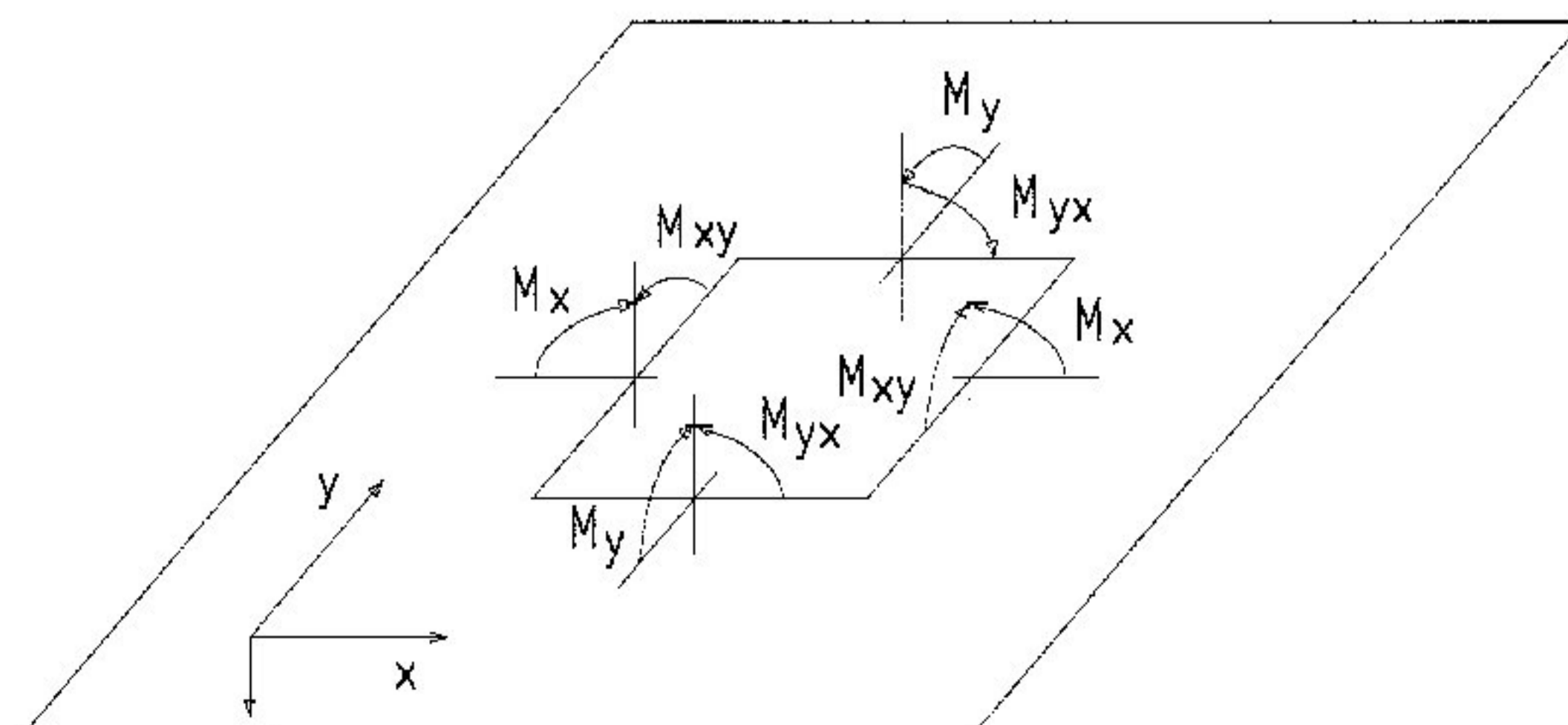


Fig. 3.13 Momentos fletores e de torção

$$\langle \sigma \rangle = \langle M \rangle = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [D] \langle \varepsilon \rangle$$

ou

$$\langle \sigma \rangle = \langle M \rangle = [D][Q][C]^{-1} \langle \delta^e \rangle = [D][B] \langle \delta^e \rangle \quad (3.63)$$

onde $[D]$ é a matriz de elasticidade. Pode-se também escrever resumidamente

$$\langle \sigma \rangle = \langle M \rangle = [S] \langle \delta^e \rangle \quad (3.7 \text{ rep})$$

Se a placa é ortótropa, tendo x e y como direções principais de ortotropia, a matriz $[D]$ é dada por

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

onde

$$D_x = \frac{E'_x h^3}{12}; \quad D_y = \frac{E'_y h^3}{12}; \quad D_1 = \frac{E'' h^3}{12};$$

$$D_{xy} = \frac{G h^3}{12} \quad (3.65)$$

e E'_x , E'_y , E'' e G são as constantes elásticas do material e h a espessura da placa.

Se a placa é isotrópica tem-se

$$E'_x = E'_y = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad E'' = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.66)$$

e a matriz $[D]$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$[D] = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

- Matriz de rigidez

A matriz de rigidez do elemento retangular de placa é dada por

$$[k^e] = [C^{-1}]^T \left(\iint [Q]^T [D] [Q] dx dy \right) [C^{-1}] \quad (3.68)$$

cuja forma explícita é a que se segue [20]

$$[k^e] = \frac{1}{15ab} \begin{bmatrix} SF & -SD & SE & SM & SH & SJ & SY & -SQ & SU & SX & SO & SS \\ & SA & -SB & -SH & SG & 0 & SQ & SP & 0 & SO & SN & 0 \\ & & SC & SJ & 0 & SI & -SU & 0 & ST & -SS & 0 & SR \\ & & & SF & SD & SE & SX & -SO & SS & SY & SQ & SU \\ & & & & SA & SB & -SO & SN & 0 & -SQ & SP & 0 \\ & & & & & SC & -SS & 0 & SR & -SU & 0 & ST \\ & & & & & & SF & SD & -SE & SM & -SH & -SJ \\ & & & & & & & SA & -SB & SH & SG & 0 \\ & & & & & & & & SC & -SJ & 0 & SI \\ & & & & & & & & & SF & -SD & -SE \\ & & & & & & & & & & SA & SB \\ & & & & & & & & & & & SC \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

(simétrica)

onde a e b são os lados do elemento, e

$$\rho = a/b$$

$$SA = 20a^2 D_y + 8b^2 D_{xy}$$

$$SB = 15ab D_1$$

$$SC = 20b^2 D_x + 8a^2 D_{xy}$$

$$SD = 30a\rho D_y + 15b D_1 + 6b D_{xy}$$

$$SE = 30b\rho^{-1} D_x + 15a D_1 + 6a D_{xy}$$

$$SF = 60\rho^{-2} + 60\rho^2 D_y + 30 D_1 + 84 D_{xy}$$

$$\begin{aligned}
 SG &= 10a^2D_y - 2b^2D_{xy} \\
 SH &= -30apD_y - 6bD_{xy} \\
 SI &= 10b^2D_y - 8a^2D_{xy} \\
 SJ &= 15b\rho^{-1}D_x - 15aD_1 - 6aD_{xy} \\
 SM &= 30\rho^{-2}D_x - 60\rho^2D_y - 30D_1 - 84D_{xy} \\
 SN &= 10a^2D_y - 8b^2D_{xy} \\
 SO &= -15apD_y + 15bD_1 + 6bD_{xy} \\
 SP &= 5a^2D_y + 2b^2D_{xy} \\
 SQ &= 15apD_y - 6bD_{xy} \\
 SR &= 10b^2D_x - 2a^2D_{xy} \\
 SS &= 30b\rho^{-1}D_x + 6aD_{xy} \\
 ST &= 5b^2D_x + 2a^2D_{xy} \\
 SU &= 15b\rho^{-1}D_x - 6aD_{xy} \\
 SX &= 60\rho^{-2}D_x + 30\rho^2D_x - 30D_1 - 84D_{xy} \\
 SY &= -30\rho^{-2}D_x - 30\rho^2D_y + 30D_1 + 84D_{xy}
 \end{aligned}$$

- Cargas nodais equivalentes

A seguir determinam-se as cargas nodais equivalentes a um carregamento transversal, com variação linear, atuando em todo o elemento (figura 3.14). Como este material não foi encontrado na bibliografia utilizada

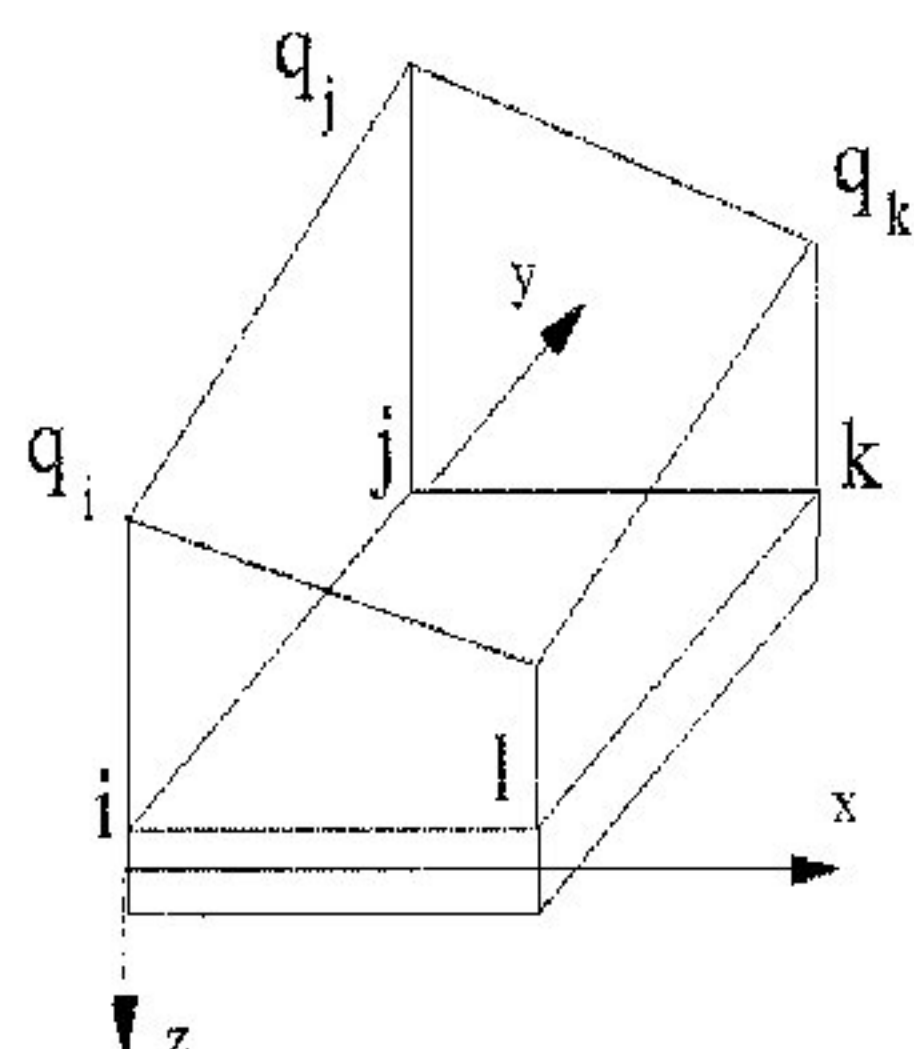


Fig. 3.14 Carregamento transversal com variação linear

optou-se pela sua dedução, o que foi feito em co-autoria com a eng^a Elizabeth Vieira Maia. Assim sendo, utilizando os valores conhecidos do carregamento nos nós ijk pode-se determinar o valor da carga q^e em um ponto qualquer de coordenadas (x, y) . A equação do plano passando pelos pontos (x_i, y_i, q_i) , (x_j, y_j, q_j) , (x_k, y_k, q_k) é dada por

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} y_j - y_i & q_j - q_i \\ y_k - y_i & q_k - q_i \end{vmatrix} (x - x_i) + \begin{vmatrix} q_j - q_i & x_j - x_i \\ q_k - q_i & x_k - x_i \end{vmatrix} (y - y_i) + \\ & + \begin{vmatrix} x_j - x_i & y_j - y_i \\ x_k - x_i & y_k - y_i \end{vmatrix} (q^e - q_i) = 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

ou resumidamente,

$$A (x - x_i) + B (y - y_i) + C (q^e - q_i) = 0 \quad (3.71)$$

As coordenadas dos nós ijk do elemento são dadas por

$$\begin{array}{lll} x_i = 0 & ; & x_j = 0 & ; & x_k = a \\ y_i = 0 & ; & y_j = b & ; & y_k = b \end{array}$$

Substituindo estes valores na equação (3.71) tem-se

$$A (x - 0) + B (y - 0) + C (q^e - q_i) = 0 \quad (3.72)$$

Explicitando o valor de q^e na equação (3.72) tem-se

$$q^e = - \frac{A x + B y}{C} + q_i \quad (3.73)$$

Calculando os determinantes e substituindo seus valores na equação (3.73), encontra-se o valor da carga em um ponto genérico de coordenadas (x, y)

$$q^e = \frac{[q_k - q_j]}{a} x + \frac{[q_j - q_i]}{b} y + q_i \quad (3.74)$$

As cargas nodais equivalentes às forças de superfície aplicadas ao elemento são dadas por

$$\{P^e\} = [C^{-1}]^T \iint [N']^T \{q^e\} dx dy \quad (3.75)$$

Para obter-se o vetor das cargas equivalentes é preciso, portanto, inverter a matriz $[C]$. Substituindo as coordenadas dos nós $ijkl$ na matriz $[C]$ dada em (3.61) obtem-se:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & -3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & -2b & 0 & -a^2 & -2ab & -3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a & 2ab & b & 0 & 3ab & b \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 & -a^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

A matriz $[C]^{-1}$ é determinada a seguir:

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3/a^2 & 0 & -2/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/ab & 1/a & -1/b & 1/ab & 0 & 1/b & -1/ab & 0 \\ -3/b^2 & 2/b & 0 & 3/b^2 & 1/b & 0 & 0 & 0 \\ 2/a^2 & 0 & 1/a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/a^2b & 0 & 2/ab & -3/a^2b & 0 & -2/ab & 3/a^2b & 0 \\ 3/ab^2 & -2/ab & 0 & -3/ab^2 & -1/ab & 0 & 3/ab^2 & 0 \\ 2/b^3 & -1/b^2 & 0 & -2/b^3 & -1/b^2 & 0 & 0 & 0 \\ -2/a^3b & 0 & -1/a^2b & 2/a^3b & 0 & 1/a^2b & -2/a^3b & 0 \\ -2/ab^3 & 1/ab^2 & 0 & 0 & 1/ab^2 & 0 & -2/ab^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 3/a^2 & 0 & -1/a \\
 0 & 0 & 1/ab & -1/a & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -2/a^3 & 0 & 1/a^2 \\
 0 & -1/ab & -3/a^2b & 0 & 1/ab \\
 1/ab & 0 & 0 & 2/ab & 0 \\
 0 & 0 & 2/a^3b & 0 & 0 \\
 0 & 1/a^2b & 2/ab^3 & 0 & -1/a^2b \\
 -1/ab & 0 & 2/ab^3 & -1/ab^2 & 0
 \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

Com este resultado e após laboriosas operações matriciais chega-se, conforme demonstrado por Fabrino e Maia, às cargas nodais equivalentes:

$$\{P^e\} = ab \begin{bmatrix}
 (7/40) q_i + (3/40) q_k \\
 -b [(1/40) q_i + (1/360) q_j + (1/72) q_k] \\
 a [(1/36) q_i - (1/360) q_j + (1/60) q_k] \\
 (3/40) q_i + (1/10) q_j + (3/40) q_k \\
 b [(1/60) q_i + (1/90) q_j + (1/72) q_k] \\
 a [(1/72) q_i + (1/90) q_j + (1/60) q_k] \\
 (3/40) q_i + (7/40) q_j \\
 b [(1/60) q_i - (1/360) q_j + (1/36) q_k] \\
 -a [(1/72) q_i + (1/360) q_j + (1/40) q_k] \\
 (7/40) q_i + (1/10) q_j + (7/40) q_k \\
 -b [(1/40) q_i - (1/90) q_j + (1/36) q_k] \\
 -a [(1/36) q_i - (1/90) q_j + (1/40) q_k]
 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

- Momentos nos nós do elemento

Os momentos fletores e de torção em um ponto genérico do elemento são dados por

$$\{\sigma\} = \{M\} = [D]\{\epsilon\} = [D][Q][C^{-1}]\{\delta^e\} = [D][B]\{\delta^e\} \quad (3.79)$$

Aplicando a equação (3.79) sucessivamente aos nós $ijkl$ do elemento, obtém-se

$$\{\sigma^e\} = \{M^e\} = \begin{bmatrix} \langle M_i \rangle \\ \langle M_j \rangle \\ \langle M_k \rangle \\ \langle M_l \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D] & [Q_i] & [C^{-1}] \\ [D] & [Q_j] & [C^{-1}] \\ [D] & [Q_k] & [C^{-1}] \\ [D] & [Q_l] & [C^{-1}] \end{bmatrix} \{\delta^e\} \quad (3.80)$$

cuja forma explícita é $(M_{xi}, M_{yi}, M_{xyi}, \dots, M_{xyl})$ são os momentos fletores e de torção nos nós i, j, k e l)

$$\begin{bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{xyi} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{xyj} \\ M_{xk} \\ M_{yk} \\ M_{xyk} \\ M_{xl} \\ M_{yl} \\ M_{xyl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SA & -SH & SM & SD & -SK & 0 & 0 & 0 & 0 & SF & 0 & SP \\ SB & -SI & SN & SE & -SL & 0 & 0 & 0 & 0 & SG & 0 & SQ \\ -SC & SJ & -SO & SC & 0 & SO & -SC & 0 & 0 & SC & -SJ & 0 \\ SD & SK & 0 & SA & SH & SM & SF & 0 & SP & 0 & 0 & 0 \\ SE & SL & 0 & SB & SI & SN & SG & 0 & SQ & 0 & 0 & 0 \\ -SC & 0 & -SO & SC & SJ & SO & -SC & -SJ & 0 & SC & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & SF & 0 & -SP & SA & SH & -SM & SD & SK & 0 \\ 0 & 0 & 0 & SG & 0 & -SQ & SB & SI & -SN & SE & SL & 0 \\ -SC & 0 & 0 & SC & SJ & 0 & -SC & -SJ & -SO & SC & 0 & -SO \\ SF & 0 & -SP & 0 & 0 & 0 & SD & -SK & 0 & SA & -SH & -SM \\ SG & 0 & -SQ & 0 & 0 & 0 & SE & -SL & 0 & SB & -SI & -SN \\ -SC & SJ & 0 & SC & 0 & 0 & -SC & 0 & SO & SC & -SJ & -SO \end{bmatrix} \{\delta^e\} \quad (3.81)$$

onde a e b são os lados do elemento, e

$$\begin{aligned} \rho &= a/b & SA &= 6D_x/\rho + 6\rho D_1 \\ SB &= 6D_y\rho + 6D_1/\rho & SC &= 2D_{xy} \\ SD &= -6\rho D_1 & SE &= -6\rho D_y \\ SF &= -6D_x/\rho & SG &= -6D_1/\rho \\ SH &= 4aD_1 & SI &= 4aD_y \\ SJ &= 2bD_{xy} & SK &= 2aD_1 \\ SL &= 2aD_y & SM &= 4bD_x \\ SN &= 4bD_1 & SO &= 2aD_{xy} \\ SP &= 2bD_x & SQ &= 2bD_1 \end{aligned}$$

3.3.2 ELEMENTO TRIANGULAR

- Função deslocamento

Na figura 3.15a está representado um elemento triangular ijk (a numeração deve ser feita no sentido anti-horário) de espessura h . Na figura 3.15b mostram-se, no sistema global, os deslocamentos em um nó e as forças correspondentes a estes deslocamentos (o plano xy é o plano médio da placa) [25].

Os deslocamentos em um ponto qualquer do elemento são:

- translação w segundo o eixo dos z
- rotação θ_x segundo o eixo dos x
- rotação θ_y segundo o eixo dos y

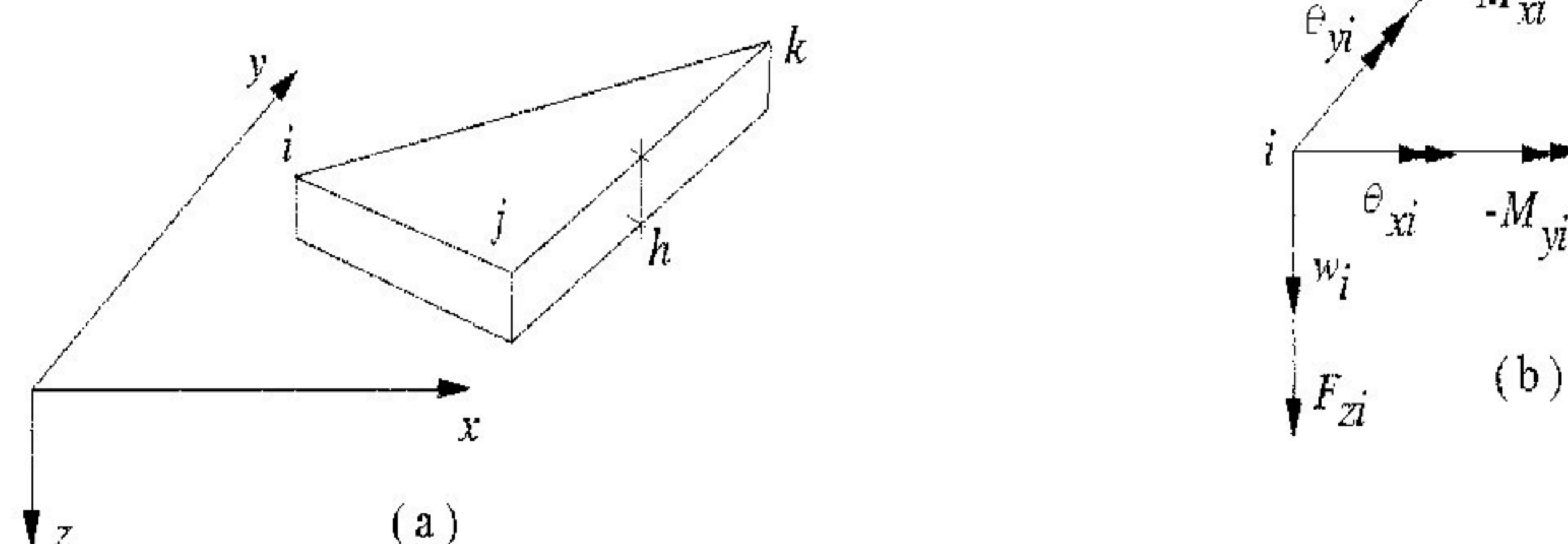


Fig. 3.15 (a) Elemento triangular, (b) deslocamentos e forças nodais.

Utiliza-se para a formulação que se segue as coordenadas de área. A lei de variação para o deslocamento transversal w é formada pela superposição de dois deslocamentos (figura 3.16). O primeiro deslocamento w^R é devido a um movimento de corpo rígido (deformações nulas). O segundo deslocamento \bar{w} é obtido admitindo-se que o elemento está simplesmente apoiado nos nós (translações nodais e movimento de corpo rígido nulos).

Portanto, o deslocamento total é dado por

$$w = w^R + \bar{w} = [N] \{\delta^e\} \quad (3.82)$$

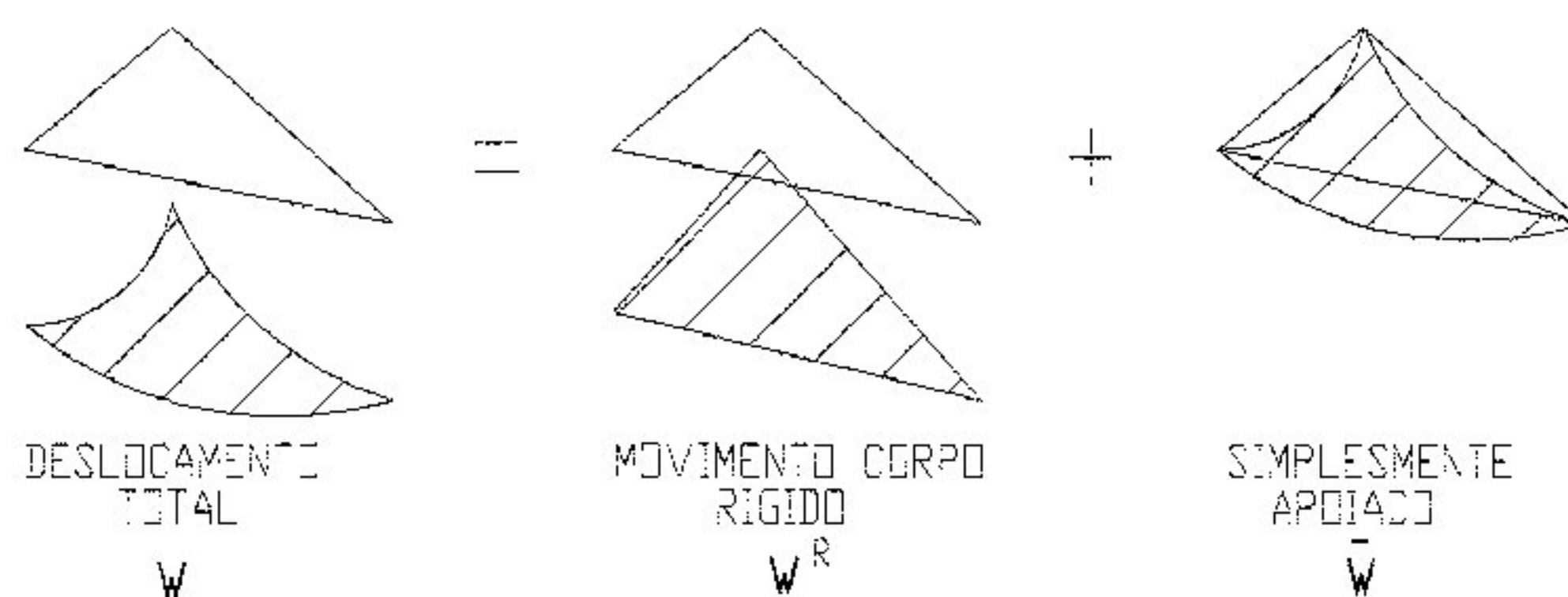


Fig. 3.16 Movimento de corpo rígido e flexão do elemento

Para a dedução da expressão de w^R , basta aplicar a equação do plano que passa por três pontos de coordenadas (x_i, y_i, w_i) , (x_j, y_j, w_j) e (x_k, y_k, w_k) sendo w_i , w_j e w_k as translações dos nós i , j e k . Obtem-se, então,

$$w^R = w_i L_i + w_j L_j + w_k L_k \quad (3.83)$$

onde L_i , L_j e L_k são as coordenadas de área de um ponto genérico do elemento definidas por

$$\begin{aligned} L_i &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \\ L_j &= (a_j + b_j x + c_j y) / 2\Delta \\ L_k &= (a_k + b_k x + c_k y) / 2\Delta \end{aligned} \quad (3.84)$$

Tomando-se um sistema local cuja origem coincide com o centroide C do triângulo ijk tem-se (figura 3.17) [26]:

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \end{aligned} \quad (3.85)$$

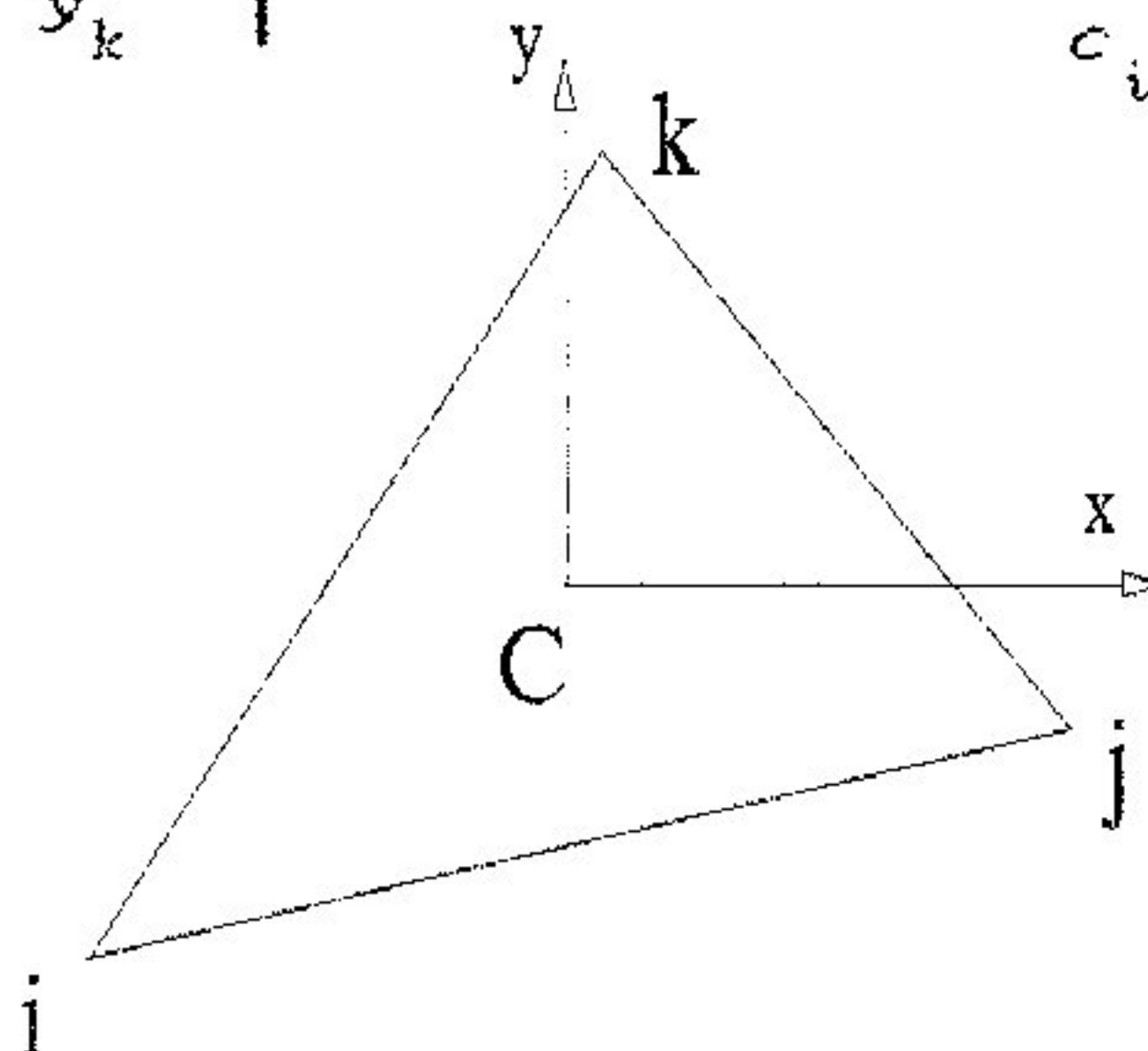


Fig. 3.17 Sistema local no centroide do elemento

Os valores de a_j, \dots, c_k são obtidos por permutação cíclica dos índices ijk .

Pode-se, então, escrever

$$\bar{w}^R = [L_i \ 0 \ 0 \ L_j \ 0 \ 0 \ L_k \ 0 \ 0] \{\delta^e\} \quad (3.86)$$

onde os deslocamentos nodais são dados por

$$\{\delta^e\} = [w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ w_j \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \ w_k \ \theta_{xk} \ \theta_{yk}]^T \quad (3.87)$$

Na dedução da expressão de \bar{w} as demonstrações são extremamente longas e laboriosas; apresenta-se a seguir uma síntese destas deduções. A expressão de \bar{w} é dada por

$$\bar{w} = [N_{xi} \ N_{yi} \ N_{xj} \ N_{yj} \ N_{xk} \ N_{jk}] [T] \{\delta^e\} \quad (3.88)$$

onde

$$\begin{aligned} N_{xi} &= b_k (CL_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - b_j (CL_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \\ N_{yi} &= c_k (CL_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - c_j (CL_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \\ N_{xj} &= b_i (CL_j^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - b_k (CL_j^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \\ N_{yj} &= c_i (CL_j^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - c_k (CL_j^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \\ N_{xk} &= b_j (CL_k^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - b_i (CL_k^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \\ N_{yk} &= c_j (CL_k^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - c_i (CL_k^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \end{aligned} \quad (3.89)$$

A matriz $[T]$ é dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} c_i/2\Delta & 1 & 0 & c_j/2\Delta & 0 & 0 & c_k/2\Delta & 0 & 0 \\ -b_i/2\Delta & 0 & 1 & -b_j/2\Delta & 0 & 0 & -b_k/2\Delta & 0 & 0 \\ c_i/2\Delta & 0 & 0 & c_j/2\Delta & 1 & 0 & c_k/2\Delta & 0 & 0 \\ -b_i/2\Delta & 0 & 0 & -b_j/2\Delta & 0 & 1 & -b_k/2\Delta & 0 & 0 \\ c_i/2\Delta & 0 & 0 & c_j/2\Delta & 0 & 0 & c_k/2\Delta & 1 & 0 \\ -b_i/2\Delta & 0 & 0 & -b_j/2\Delta & 0 & 0 & -b_k/2\Delta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

- Deformações

Na análise de placas é conveniente definir-se como "deformações generalizadas" as curvaturas e a torção. Assim sendo, a matriz $\{\varepsilon\}$ é dada por

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

Pode-se escrever, resumidamente, que

$$\{\varepsilon\} = [B] \{\delta^e\} \quad (3.91)$$

A matriz $[B]$ é dada por

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{-\partial^2 N_{xi}}{\partial x^2} & \frac{-\partial^2 N_{yi}}{\partial x^2} & \frac{-\partial^2 N_{xj}}{\partial x^2} & \frac{-\partial^2 N_{yj}}{\partial x^2} & \frac{-\partial^2 N_{xk}}{\partial x^2} & \frac{-\partial^2 N_{yk}}{\partial x^2} \\ \frac{-\partial^2 N_{xi}}{\partial y^2} & \frac{-\partial^2 N_{yi}}{\partial y^2} & \frac{-\partial^2 N_{xj}}{\partial y^2} & \frac{-\partial^2 N_{yj}}{\partial y^2} & \frac{-\partial^2 N_{xk}}{\partial y^2} & \frac{-\partial^2 N_{yk}}{\partial y^2} \\ \frac{2\partial^2 N_{xi}}{\partial x \partial y} & \frac{2\partial^2 N_{yi}}{\partial x \partial y} & \frac{2\partial^2 N_{xj}}{\partial x \partial y} & \frac{2\partial^2 N_{yj}}{\partial x \partial y} & \frac{2\partial^2 N_{xk}}{\partial x \partial y} & \frac{2\partial^2 N_{yk}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad [T]$$

ou, simbolicamente,

$$[B] = [\bar{B}] [T] \quad (3.92)$$

onde

$$[\bar{B}] = [A'] [B'] / (8\Delta^3) \quad (3.93)$$

A matriz $[A']$ é dada por

$$[A'] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Antes de definir a matriz [B'] é necessário introduzir-se os seguintes valores:

$$a = x_j y_k - x_k y_j$$

$$E_1 = a (b_i b_j + b_j b_k + b_k b_i)$$

$$E_2 = a [(c_i b_j + b_i c_j) + (c_j b_k + b_j c_k) + (c_k b_i + b_k c_i)]$$

$$E_3 = a (c_i c_j + c_j c_k + c_k c_i)$$

$$E_4 = b_i b_j b_k$$

$$E_5 = c_i b_j b_k + c_j b_k b_i + c_k b_i b_j$$

$$E_6 = c_i c_j c_k + c_j c_k c_i + c_k c_i c_j$$

$$E_7 = c_i c_j c_k$$

$$X_1^i = b_i^2 a + 2ab_i b_j$$

$$X_2^i = 2b_i c_i a + 2b_j c_i a + 2b_k c_i a$$

$$X_3^i = c_i^2 a + 2ac_i c_j$$

$$X_4^i = b_i^2 b_j$$

$$X_5^i = b_i^2 c_j + 2b_i c_i b_j$$

$$X_6^i = c_i^2 b_j + 2b_i c_i c_j$$

$$X_7^i = c_i^2 c_j$$

$$Y_1^i = b_i^2 a + 2ab_i b_k$$

$$Y_2^i = 2b_i c_i a + 2b_k c_i a + 2b_j c_i a$$

$$Y_3^i = c_i^2 a + 2ac_i c_k$$

$$Y_4^i = b_i^2 b_k$$

$$Y_5^i = b_i^2 c_k + 2b_i c_i b_k$$

$$Y_6^i = c_i^2 b_k + 2b_i c_i c_k$$

$$Y_7^i = c_i^2 c_k$$

$$F^i = (b_k - b_j)/2$$

$$G^i = (c_k - c_j)/2$$

Os valores de X_1^j, X_2^j, \dots, G^k , que também são necessários, são obtidos por permutação cíclica dos índices ijk .

A matriz [B'], então, é dada por

$$[B'] = \begin{bmatrix} (BX)_1^i & (BY)_1^i & (BX)_1^j & (BY)_1^j & (BX)_1^k & (BY)_1^k \\ (BX)_2^i & (BY)_2^i & (BX)_2^j & (BY)_2^j & (BX)_2^k & (BY)_2^k \\ (BX)_3^i & (BY)_3^i & (BX)_3^j & (BY)_3^j & (BX)_3^k & (BY)_3^k \\ (BX)_4^i & (BY)_4^i & (BX)_4^j & (BY)_4^j & (BX)_4^k & (BY)_4^k \\ (BX)_5^i & (BY)_5^i & (BX)_5^j & (BY)_5^j & (BX)_5^k & (BY)_5^k \\ (BX)_6^i & (BY)_6^i & (BX)_6^j & (BY)_6^j & (BX)_6^k & (BY)_6^k \\ (BX)_7^i & (BY)_7^i & (BX)_7^j & (BY)_7^j & (BX)_7^k & (BY)_7^k \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} (BX)_L^i &= X_L^i b_k - Y_L^i b_j + E_L F^i \\ (BY)_L^i &= X_L^i c_k - Y_L^i c_j + E_L G^i \end{aligned} \right\} \quad (L = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

Os demais valores $(BX)_L^j, \dots, (BY)_L^k$ são obtidos por permutação cíclica dos índices ijk .

- Tensões

Na análise de placas é conveniente definir-se como "tensões generalizadas" os momentos fletores e de torção. Desta forma, a matriz $\{\sigma\}$ é dada por (figura 3.18)

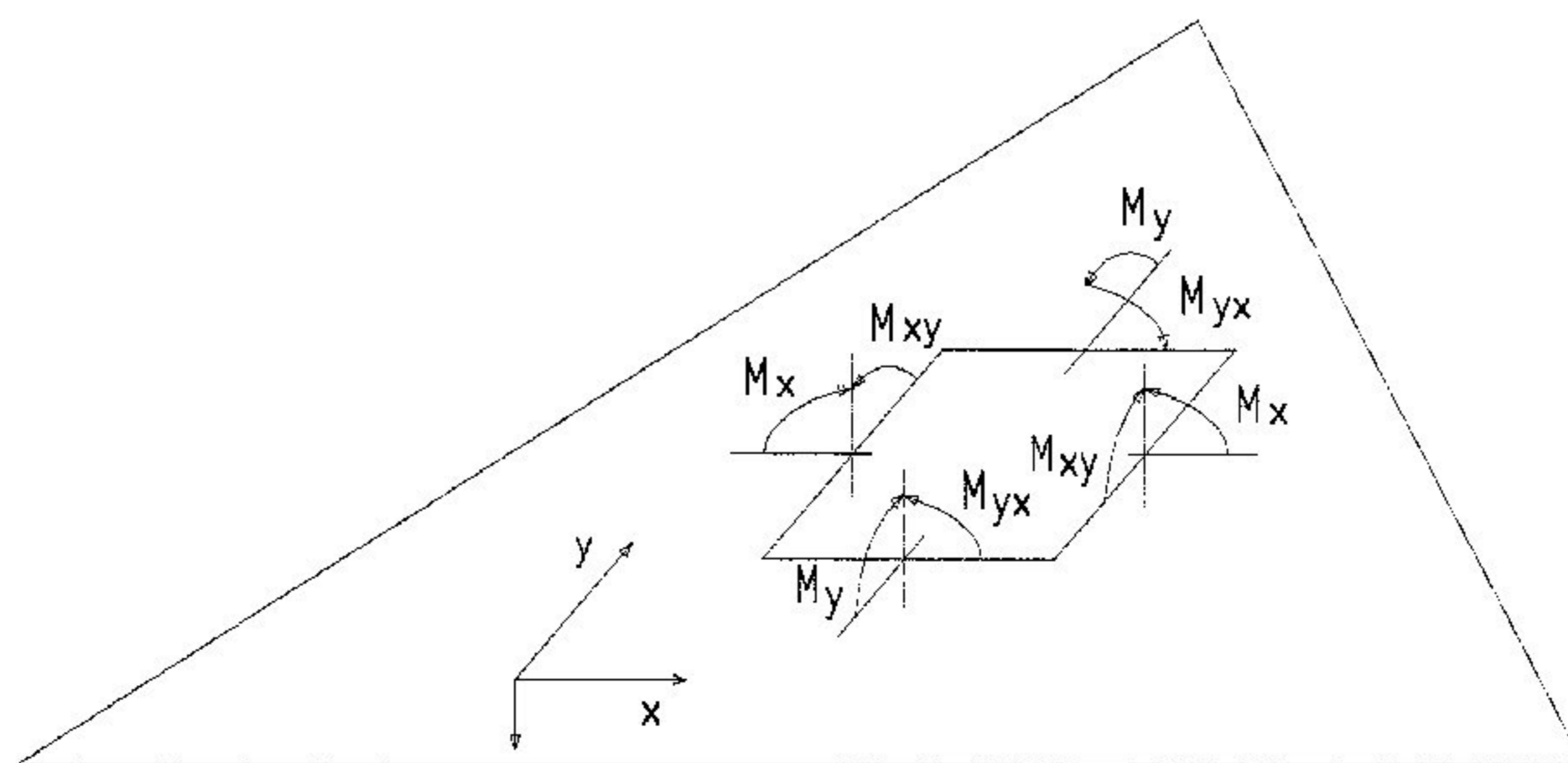


Fig. 3.18 Momentos fletores e de torção

$$\langle \sigma \rangle = \langle M \rangle = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [D] \langle \epsilon \rangle$$

ou

$$\langle \sigma \rangle = \langle M \rangle = [D] [B] \langle \delta^e \rangle = [D] [\bar{B}] [T] \langle \delta^e \rangle$$

ou, ainda,

$$\langle \sigma \rangle = \langle M \rangle = \frac{1}{8\Delta^3} [D] [A'] [B'] [T] \langle \delta^e \rangle \quad (3.96)$$

onde $[D]$ é a matriz de elasticidade. Pode-se também escrever resumidamente

$$\langle \sigma \rangle = [S] \langle \delta^e \rangle \quad (3.7 \text{ rep})$$

Se a placa é ortótropa, tendo x e y como direções principais de ortotropia, a matriz $[D]$ é dada por

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.64 \text{ rep})$$

onde

$$D_x = \frac{E'_x h^3}{12}; \quad D_y = \frac{E'_y h^3}{12}; \quad D_1 = \frac{E'' h^3}{12};$$

$$D_{xy} = \frac{G h^3}{12} \quad (3.65 \text{ rep})$$

e E'_x , E'_y , E'' e G são as constantes elásticas do material e h a espessura da placa.

Se a placa é isotrópica tem-se

$$E'_x = E'_y = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad E'' = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

(3.66 rep)

e a matriz [D] pode ser escrita da seguinte forma

$$[D] = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.87 \text{ rep})$$

- Matriz de rigidez

A matriz de rigidez de um elemento de placa é dada por

$$[k^e] = \iint [B]^T [D] [B] dx dy \quad (3.97)$$

Substituindo em (3.97) o valor de [B] conforme indicado nas expressões (3.92) e (3.93), e deixando sob o sinal da integral apenas o produto [A']^T [D] [A'] que é função de x e y, obtém-se

$$[k^e] = \frac{1}{64\Delta^2} [T]^T [B']^T (\iint [A']^T [D] [A'] dx dy) [B'] [T] \quad (3.98)$$

A seguir deve-se avaliar a integral

$$\iint [A']^T [D] [A'] dx dy$$

após o que é possível obter-se pela equação (3.98) o valor da matriz de rigidez [k^e].

Após laboriosos cálculos chega-se a

$$= \Delta \cdot \begin{bmatrix} 4D_x & 0 & 4D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4D_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4D_1 & 0 & 4D_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3D_x(SQX) & D_x(SXY) & D_1(SQX) & 3D_1(SXY) \\ 0 & 0 & 0 & D_x(SXY) & (SQ1) & (SQ2) & D_1(SQY) \\ 0 & 0 & 0 & D_1(SQX) & (SQ2) & (SQ3) & D_y(SXY) \\ 0 & 0 & 0 & 3D_1(SXY) & D_1(SQY) & D_y(SXY) & 3D_y(SQY) \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

onde

$$(SQX) = x_i^2 + x_j^2 + x_k^2$$

$$(SQY) = y_i^2 + y_j^2 + y_k^2$$

$$(SXY) = x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k$$

$$(SQ1) = D_x (SQY)/3 + 4D_{xy} (SQX)/3$$

$$(SQ2) = D_x (SXY)/3 + 4D_{xy} (SXY)/3$$

$$(SQ3) = D_y (SQX)/3 + 4D_{xy} (SQY)/3$$

Pode-se, agora, calcular a matriz de rigidez do elemento triangular pela equação (3.98), conforme anteriormente mencionado.

- Cargas nodais equivalentes

A seguir determinam-se as cargas nodais equivalentes a um carregamento transversal, com variação linear, atuando em todo o elemento (figura 3.19). Como este material não foi encontrado na bibliografia utilizada optou-se pela sua dedução, o que foi feito em co-autoria com a eng^a Elizabeth Vieira Maia. Assim sendo, utilizando os valores conhecidos do carregamento nos nós $i/j/k$ pode-se determinar o valor da carga q^e em um ponto qualquer de coordenadas (x,y) . A equação do plano, expressa segundo as coordenadas de área, passando pelos pontos (x_i, y_i, q_i) , (x_j, y_j, q_j) , (x_k, y_k, q_k) é dada por

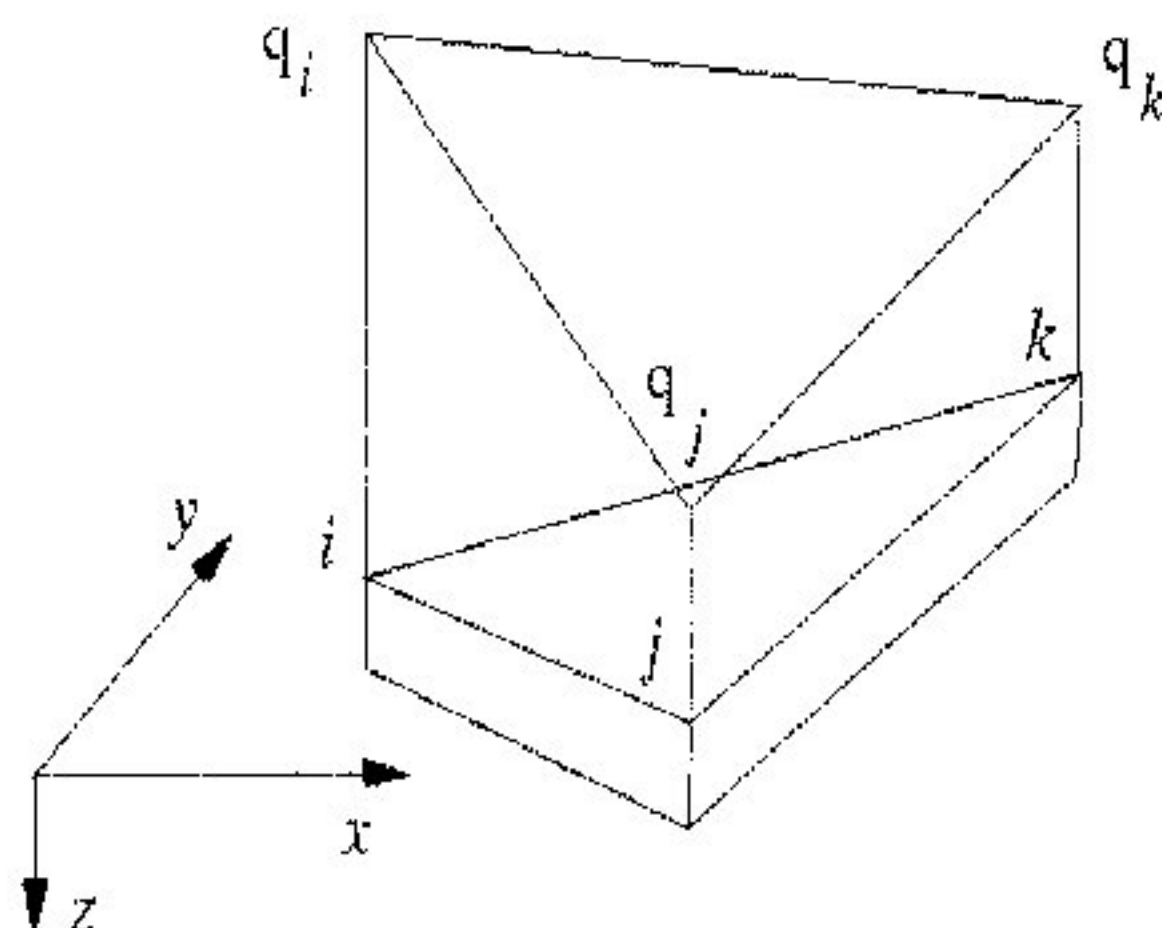


Fig. 3.19 Carregamento transversal com variação linear

$$\{q^e\} = q_i L_i + q_j L_j + q_k L_k \quad (3.100)$$

As cargas nodais equivalentes às forças de superfície aplicadas ao elemento são dadas por

$$\{P^e\} = \iint [N]^T \{q^e\} dx dy \quad (3.101)$$

Deve-se, portanto, determinar a forma explícita da matriz $[N]$ para poder-se calcular a integral dada em (3.101). Como se viu,

$$w = w^R + \bar{w} = [N] \{\delta^e\} \quad (3.82 \text{ rep})$$

sendo

$$w^R = [L_i \ 0 \ 0 \ L_j \ 0 \ 0 \ L_k \ 0 \ 0] \{\delta^e\} \quad (3.86 \text{ rep})$$

e

$$\bar{w} = [N_{xi} \ N_{yi} \ N_{xj} \ N_{yj} \ N_{xk} \ N_{jk}] [T] \{\delta^e\} \quad (3.88 \text{ rep})$$

Sua forma explícita, obtida após algumas operações matriciais é, então, dada por

$$[N] = \begin{bmatrix} L_i + L_i^2 L_j + L_i^2 L_k - L_i L_j^2 - L_i L_k^2 \\ b_k (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - b_j (L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \\ c_k (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - c_j (L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \\ L_j + L_j^2 L_i + L_j^2 L_k - L_j L_i^2 - L_j L_k^2 \\ b_i (L_j^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - b_k (L_j^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \\ c_i (L_j^2 L_k + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - c_k (L_j^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \\ L_k + L_k^2 L_i + L_k^2 L_j - L_k L_i^2 - L_k L_j^2 \\ b_j (L_k^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - b_i (L_k^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \\ c_j (L_k^2 L_i + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) - c_i (L_k^2 L_j + \frac{1}{2} L_i L_j L_k) \end{bmatrix}^T \quad (3.102)$$

As cargas nodais podem agora ser calculadas substituindo-se a matriz $[N]$ dada em (3.102) na expressão

da integral dada em (3.101). Para tal basta efetuar o produto matricial e integrar termo a termo utilizando-se a integral clássica

$$\iint L_i^a L_j^b L_k^c dx dy = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2\Delta \quad (3.103)$$

Após laboriosas operações matriciais chega-se, conforme demonstrado por Fabrino e Maia, às cargas nodais equivalentes

$$\{P^e\} = \frac{\Delta}{45} \begin{bmatrix} 8q_i + \frac{7}{2}(q_j + q_k) \\ \frac{1}{8}(7q_i(b_k - b_j) + q_j(5b_k - 3b_j) + q_k(3b_k - 5b_j)) \\ \frac{1}{8}(7q_i(c_k - c_j) + q_j(5c_k - 3c_j) + q_k(3c_k - 5c_j)) \\ 8q_j + \frac{7}{2}(q_i + q_k) \\ \frac{1}{8}(7q_j(b_i - b_k) + q_k(5b_i - 3b_k) + q_i(3b_i - 5b_k)) \\ \frac{1}{8}(7q_j(c_i - c_k) + q_k(5c_i - 3c_k) + q_i(3c_i - 5c_k)) \\ 8q_k + \frac{7}{2}(q_i + q_j) \\ \frac{1}{8}(7q_k(b_j - b_i) + q_i(5b_j - 3b_i) + q_j(3b_j - 5b_i)) \\ \frac{1}{8}(7q_k(c_j - c_i) + q_i(5c_j - 3c_i) + q_j(3c_j - 5c_i)) \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

onde Δ é a área do elemento.

- Momentos no centróide do elemento

Neste elemento os momentos fletores e de torção em um ponto qualquer do seu interior podem ser obtidos pela equação (3.96) dada a seguir

$$\{o^e\} = \{M^e\} = \frac{1}{8\Delta^3} [D] [A'] [B'] [T] \{\delta^e\} \quad (3.105)$$

Para obter-se os momentos no centróide do elemento basta fazer $x = y = 0$ (coordenadas do centróide) na matriz $[A']$ dada em (3.94) e efetuar o produto matricial acima indicado.

3.4 ELEMENTO DE PLACA COM FORÇAS DE MEMBRANA

- Função deslocamento

Os elementos triangular e retangular de estado plano de tensão podem ser combinados com os elementos triangular e retangular de flexão de placa para darem origem aos elementos triangular e retangular de placa com forças de membrana.

Isto é possível porque quando os deslocamentos são pequenos tanto os esforços e deslocamentos de flexão de placa quanto os esforços e deslocamentos de estado plano de tensão são completamente independentes entre si, o que permite a sua superposição sem interferência mútua.

A seguir apresenta-se uma síntese das características destes elementos; maiores detalhes podem ser encontrados na bibliografia citada [21].

Combinando-se os deslocamentos dos elementos de placa com os dos elementos de estado plano de tensão tem-se, em um ponto qualquer do novo elemento, cinco deslocamentos, a saber:

- | | | |
|---|---|------------------------|
| - translação u segundo o eixo dos x | } | estado plano de tensão |
| - translação v segundo o eixo dos y | | |
| - translação w segundo o eixo dos z | } | flexão de placa |
| - rotação θ_x segundo o eixo dos x | | |
| - rotação θ_y segundo o eixo dos y | | |

As funções deslocamento do novo elemento são as mesmas dos elementos originais desacoplados, tanto para os elementos retangulares quanto para os triangulares.

A matriz $\{\delta^e\}$ é, portanto, dada por

$$\{\delta^e\} = [u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \quad u_j \ v_j \ w_j \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \quad \dots]^T \quad (3.106)$$

- Deformações

Combinando-se convenientemente as matrizes das deformações dos elementos desacoplados obtém-se para o novo elemento:

$$\{\varepsilon\} = \left[\begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \vphantom{\left[\begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right]} \\ \vphantom{\left[\begin{array}{c} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{array} \right]} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{estado plano de tensão} \\ \text{flexão de placa} \end{array} \quad (3.107)$$

onde ε_x , ε_y e γ_{xy} são as deformações normais e de cisalhamento no plano médio da placa e χ_x , χ_y e χ_{xy} as curvaturas e torção da placa

- Tensões

Combinando-se convenientemente as matrizes das tensões dos elementos desacoplados obtém-se para o novo elemento:

$$\{\sigma\} = \left[\begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \vphantom{\left[\begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right]} \\ \vphantom{\left[\begin{array}{c} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right]} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{estado plano de tensão} \\ \text{flexão de placa} \end{array} \quad (3.108)$$

onde σ_x , σ_y e τ_{xy} são as tensões normais e de cisalhamento no plano médio da placa e M_x , M_y e M_{xy} os momentos fletores e de torção da placa

- Matriz de rigidez

Denominando-se por $[k^P]$ a matriz de rigidez

do elemento retangular de estado plano de tensão (3.57) e por $[k^b]$ a matriz de rigidez do elemento retangular de placa (3.69) tem-se:

$$[k^p] = \begin{bmatrix} k_{11}^p & k_{12}^p & k_{13}^p & k_{14}^p \\ k_{21}^p & k_{22}^p & k_{23}^p & k_{24}^p \\ k_{31}^p & k_{32}^p & k_{33}^p & k_{34}^p \\ k_{41}^p & k_{42}^p & k_{43}^p & k_{44}^p \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

$$[k^b] = \begin{bmatrix} k_{11}^b & k_{12}^b & k_{13}^b & k_{14}^b \\ k_{21}^b & k_{22}^b & k_{23}^b & k_{24}^b \\ k_{31}^b & k_{32}^b & k_{33}^b & k_{34}^b \\ k_{41}^b & k_{42}^b & k_{43}^b & k_{44}^b \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

onde 1, 2, 3 e 4 designam os nós do elemento. Desta forma, as matrizes $[k_{ij}^p]$ e $[k_{ij}^b]$ têm, respectivamente, as dimensões 2x2 e 3x3 e suas formas explícitas podem ser obtidas, respectivamente, em (3.57) e (3.69).

É conveniente agora, expandir-se as matrizes $[k^p]$ e $[k^b]$ para que possam ser somadas adequadamente:

$$[k^p] = \begin{bmatrix} k_{11}^p & 0 & k_{12}^p & 0 & k_{13}^p & 0 & k_{14}^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^p & 0 & k_{22}^p & 0 & k_{23}^p & 0 & k_{24}^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^p & 0 & k_{32}^p & 0 & k_{33}^p & 0 & k_{34}^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41}^p & 0 & k_{42}^p & 0 & k_{43}^p & 0 & k_{44}^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.111)

$$[k^b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^b & 0 & k_{12}^b & 0 & k_{13}^b & 0 & k_{14}^b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^b & 0 & k_{22}^b & 0 & k_{23}^b & 0 & k_{24}^b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{31}^b & 0 & k_{32}^b & 0 & k_{33}^b & 0 & k_{34}^b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{41}^b & 0 & k_{42}^b & 0 & k_{43}^b & 0 & k_{44}^b \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Designando por $[k^e]$ a matriz de rigidez do elemento retangular de placa com forças de membrana pode-se escrever, simbolicamente,

$$[k^e] = [k^p] + [k^b] \quad (3.113)$$

ou, em detalhes,

$$[k^e] = \begin{bmatrix} k_{11}^p & 0 & k_{12}^p & 0 & k_{13}^p & 0 & k_{14}^p & 0 \\ 0 & k_{11}^b & 0 & k_{12}^b & 0 & k_{13}^b & 0 & k_{14}^b \\ k_{21}^p & 0 & k_{22}^p & 0 & k_{23}^p & 0 & k_{24}^p & 0 \\ 0 & k_{21}^b & 0 & k_{22}^b & 0 & k_{23}^b & 0 & k_{24}^b \\ k_{31}^p & 0 & k_{32}^p & 0 & k_{33}^p & 0 & k_{34}^p & 0 \\ 0 & k_{31}^b & 0 & k_{32}^b & 0 & k_{33}^b & 0 & k_{34}^b \\ k_{41}^p & 0 & k_{42}^p & 0 & k_{43}^p & 0 & k_{44}^p & 0 \\ 0 & k_{41}^b & 0 & k_{42}^b & 0 & k_{43}^b & 0 & k_{44}^b \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Esta matriz tem dimensão 20x20.

- Cargas nodais equivalentes

Designando por $\{P^p\}$ a matriz das cargas nodais equivalentes do elemento retangular de estado plano

de tensão (3.58) e por $\{P^b\}$ a do elemento retangular de placas (3.78) tem-se:

$$\{P^p\} = \begin{bmatrix} P^p_{-1} \\ P^p_{-2} \\ P^p_{-3} \\ P^p_{-4} \end{bmatrix} \quad \{P^b\} = \begin{bmatrix} P^b_{-1} \\ P^b_{-2} \\ P^b_{-3} \\ P^b_{-4} \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

onde 1, 2, 3 e 4 designam os nós do elemento. Desta forma, as matrizes $\{P^p\}$ e $\{P^b\}$ têm, respectivamente, as dimensões 2x1 e 3x1 e suas formas explícitas podem ser obtidas, respectivamente, em (3.58) e (3.78).

É conveniente, agora, expandir-se as matrizes $\{P^p\}$ e $\{P^b\}$ para que possam ser somadas adequadamente:

$$\{P^p\} = \begin{bmatrix} P^p_{-1} \\ 0 \\ P^p_{-2} \\ 0 \\ P^p_{-3} \\ 0 \\ P^p_{-4} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \{P^b\} = \begin{bmatrix} 0 \\ P^b_{-1} \\ 0 \\ P^b_{-2} \\ 0 \\ P^b_{-3} \\ 0 \\ P^b_{-4} \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

Designando por $\{P^e\}$ a matriz das cargas nodais equivalentes do elemento retangular de placa com forças de membrana pode-se escrever, simbolicamente,

$$\{P^e\} = \{P^p\} + \{P^b\} \quad (3.117)$$

ou, em detalhes,

$$\{P^e\} = [P^p_{-1} \quad P^b_{-1} \quad P^p_{-2} \quad P^b_{-2} \quad P^p_{-3} \quad P^b_{-3} \quad P^p_{-4} \quad P^b_{-4}]^T \quad (3.118)$$

- Tensões nos elementos

Uma vez resolvido o sistema de equações e determinados os deslocamentos nodais da estrutura, as tensões e momentos no elemento são determinadas com as equações (3.49), (3.59), (3.81) e (3.105) relativas, respectivamente, aos elementos triangular e retangular de estado plano de tensão, e elementos retangular e triangular de placa.

3.5 COMPATIBILIDADE DOS ELEMENTOS DE PLACA E DE BARRA

Como se constata examinando os diversos elementos apresentados, a rotação θ_z ocorre apenas no elemento de barra de pórtico espacial e no elemento de barra com conexão "off-set". Este fato pode gerar uma singularidade da matriz de rigidez da estrutura e resolver este problema, compatibilizando corretamente elementos diferentes com graus de liberdade diferentes, foi um desafio encontrado na implantação do sistema.

A solução adotada foi supor inicialmente restringidas todas as rotações θ_z , com o que se afasta a possibilidade da matriz de rigidez da estrutura ficar singular. Em seguida estas restrições são gradualmente eliminadas à medida em que alguma barra de pórtico espacial ou com conexão "off-set" ofereça resistência a estas rotações, ou seja, contribua para os elementos da matriz de rigidez da estrutura correspondentes a estas rotações.

Diversos testes foram elaborados utilizando o programa SUPERSAP, escolhido por se tratar de um programa clássico e conceituado nos meios acadêmicos e profissionais. Os resultados foram altamente satisfatórios o que comprovou a eficácia da técnica idealizada.

4 . EQUAÇÕES BÁSICAS DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS

O método de análise matricial mais empregado para cálculo de estruturas é o Método dos Deslocamentos.

No Método dos Deslocamentos as incógnitas são os deslocamentos sofridos pelos nós, ou seja, translações e/ou rotações. Uma vez determinados estes valores, calculam-se os esforços e tensões.

Ao modelar-se a estrutura real em um modelo discretizado, passa-se a trabalhar com nós e elementos. Expressando-se o equilíbrio dos nós nas direções dos deslocamentos nodais obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\{ \underline{A}_j \} = [\underline{K}_j] \{ \underline{\delta}_j \} \quad (4.1)$$

sendo $\{ \underline{A}_j \}$ a matriz das cargas nodais combinadas, $[\underline{K}_j]$ a matriz de rigidez de nó e $\{ \underline{\delta}_j \}$ a matriz dos deslocamentos nodais.

Deve-se, então, proceder à geração da matriz de rigidez $[\underline{K}_j]$, que é formada a partir das matrizes de rigidez dos elementos $[\underline{k}^e]$, ambas referidas ao sistema global, e obtida por:

$$[\underline{k}^e] = [\underline{R}_T]^T [\underline{k}^e] [\underline{R}_T] \quad (4.2)$$

onde $[\underline{R}_T]$ é um operador de transformação (rotação) e $[\underline{k}^e]$ é a matriz de rigidez dos elementos em relação ao sistema local.

É possível obter-se a matriz $[\underline{K}_j]$ através de operações matriciais formais, mas como é pouco eficiente em termos computacionais optou-se por obtê-la somando-se diretamente, de maneira adequada, as contribuições de cada

elemento:

$$[\underline{K}_j] = \sum_{i=1}^m [\underline{k}^e] \quad (4.3)$$

onde m é o número de elementos.

Realizando de maneira sistemática esta somatória e separando-se os termos correspondentes aos deslocamentos (F) dos correspondentes às restrições (R), a matriz $[\underline{K}_j]$ pode ser particionada em:

$$[\underline{K}_j] = \begin{bmatrix} K_{-FF} & K_{-FR} \\ K_{-RF} & K_{-RR} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

As cargas aplicadas aos nós e aos elementos são inicialmente tratadas de forma diferente. As cargas aplicadas aos nós são armazenadas diretamente na matriz $\{ \underline{A} \}$. As cargas no elemento são transformadas em cargas nodais equivalentes ao carregamento aplicado e armazenadas na matriz $\{ \underline{P}^e \}$.

A matriz das cargas nodais $\{ \underline{A}_{-E} \}$ estaticamente equivalentes ao carregamento dos elementos é obtido, então, por:

$$\{ \underline{A}_{-E} \} = \sum_{i=1}^m \{ \underline{P}^e \} \quad (4.5)$$

Finalmente, chega-se à matriz das cargas nodais combinadas:

$$\{ \underline{A}_{-J} \} = \{ \underline{A} \} + \{ \underline{A}_{-E} \} \quad (4.6)$$

Pode-se agora rearranjar e particionar as matrizes $\{ \underline{A}_{-J} \}$ e $\{ \underline{\delta}_{-J} \}$, à semelhança da matriz de rigidez de nó, em:

$$\{ \underline{A}_{-J} \} = \begin{bmatrix} \{ \underline{A}_{-FC} \} \\ \{ \underline{A}_{-RC} \} \end{bmatrix} \quad \{ \underline{\delta}_{-J} \} = \begin{bmatrix} \{ \underline{\delta}_{-F} \} \\ \{ \underline{\delta}_{-R} \} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Tem-se, então, o seguinte sistema:

$$\{A_{-FC}\} = [K_{-FF}] \{\delta_{-F}\} + [K_{-FR}] \{\delta_{-R}\} \quad (4.8)$$

$$\{A_{-RC}\} = [K_{-RF}] \{\delta_{-F}\} + [K_{-RR}] \{\delta_{-R}\} \quad (4.9)$$

A equação (4.8) pode ser escrita de forma a explicitar $\{\delta_{-F}\}$:

$$\{\delta_{-F}\} = [K_{-FF}]^{-1} (\{A_{-FC}\} - [K_{-FR}] \{\delta_{-R}\}) \quad (4.10)$$

Levando-se o resultado de $\{\delta_{-F}\}$ da equação (4.10) na equação (4.9) obtém-se $\{A_{-RC}\}$.

A matriz dos deslocamentos nodais $\{\delta^e\}$ do elemento, no sistema local, é calculada pela equação:

$$\{\delta^e\} = [R_T] \{\delta_{-F}\} \quad (4.11)$$

onde $\{\delta_{-F}\}$ é a matriz dos deslocamentos nodais do elemento, no sistema global.

A etapa seguinte será a determinação dos esforços e/ou tensões nos elementos. Os esforços finais nas extremidades dos elementos de barra são dados por:

$$\{A_M^e\} = \{A_{ML}^e\} + [k^e] \{\delta^e\} \quad (4.12)$$

onde todas as matrizes são referidas ao sistema local; $\{A_{ML}^e\}$ contém os esforços nas extremidades engastadas devido às ações aplicadas na barra e ; $[k^e]$ é a matriz de rigidez da barra.

As tensões e momentos nos elementos de placa com forças de membrana são calculadas pelas equações (3.49), (3.59), (3.81) e (3.105) anteriormente determinadas para os elementos triangular e retangular de estado plano de tensão, e elementos retangular e triangular de placa. Note-se que estas equações são formas especializadas da equação geral dada a seguir:

$$\{\sigma^e\} = [D] [B] \{\delta^e\} \quad (4.13)$$

5 . SISTEMA IMPLEMENTADO

5.1 HISTÓRICO

O sistema implementado neste trabalho baseia-se, em boa parte, na tese de doutoramento "O Método dos Elementos Finitos: Fundamentos Teóricos - Automatização - Aplicações a Problemas de Placas e de Elasticidade Plana" do Prof. Alcebiades de Vasconcellos Filho (COPPE - 1970). Nesta tese é apresentado um programa para a análise de placas carregadas transversalmente e de problemas de estados planos de tensão e deformação. Os elementos utilizados são o retangular e o triangular para placas e o triangular para elasticidade plana. Foi adotada a técnica de subestruturação para possibilitar a análise de estruturas de grande porte.

Posteriormente, em 1983, o programa original foi adaptado para uso em microcomputadores HP85. Nesta ocasião optou-se por fazer somente o programa para análise de estados planos de tensão e deformação, tendo sido acrescentado, ainda, o elemento retangular.

Em 1987 o programa de estados planos de tensão e deformação foi adaptado para uso em microcomputadores da linha IBM-PC, tendo sido desenvolvido também o programa para análise de placas. Desde então estes programas têm sofrido manutenções e modificações de forma a torná-los mais amigáveis, sendo que a última versão é datada de 1992.

Assim sendo, pode-se considerar como mais uma etapa nesta linha de pesquisa o programa PAVEDIF desenvolvido nesta dissertação. Neste programa foram implementados os elementos triangular e retangular de placa com forças de membrana, além do elemento de barra de pórtico espacial com conexão "off-set". Estes elementos são particularmente

úteis na análise de pisos de edifícios, tabuleiros e encontros de pontes e estruturas afins.

5.2 DESCRIÇÃO DO SISTEMA

O sistema implementado baseia-se no Método dos Deslocamentos.

O programa PAVEDIF é composto dos seguintes módulos integrados:

- Pré-processador
- Processador
- Pós-processador

Pré-processador - Não foi o objetivo principal deste trabalho desenvolver um pré-processador que interaja com o usuário, mas sim desenvolver um sistema que seja capaz de gerar com facilidade os dados de entrada facilitando, portanto, a modelagem da estrutura. Utiliza-se um arquivo de dados previamente editado conforme os comandos apresentados no apêndice A. Este arquivo possibilita a geração dos dados da estrutura, de forma amigável, à semelhança dos programas Ansys, Adina, Stardyne e SAP90.

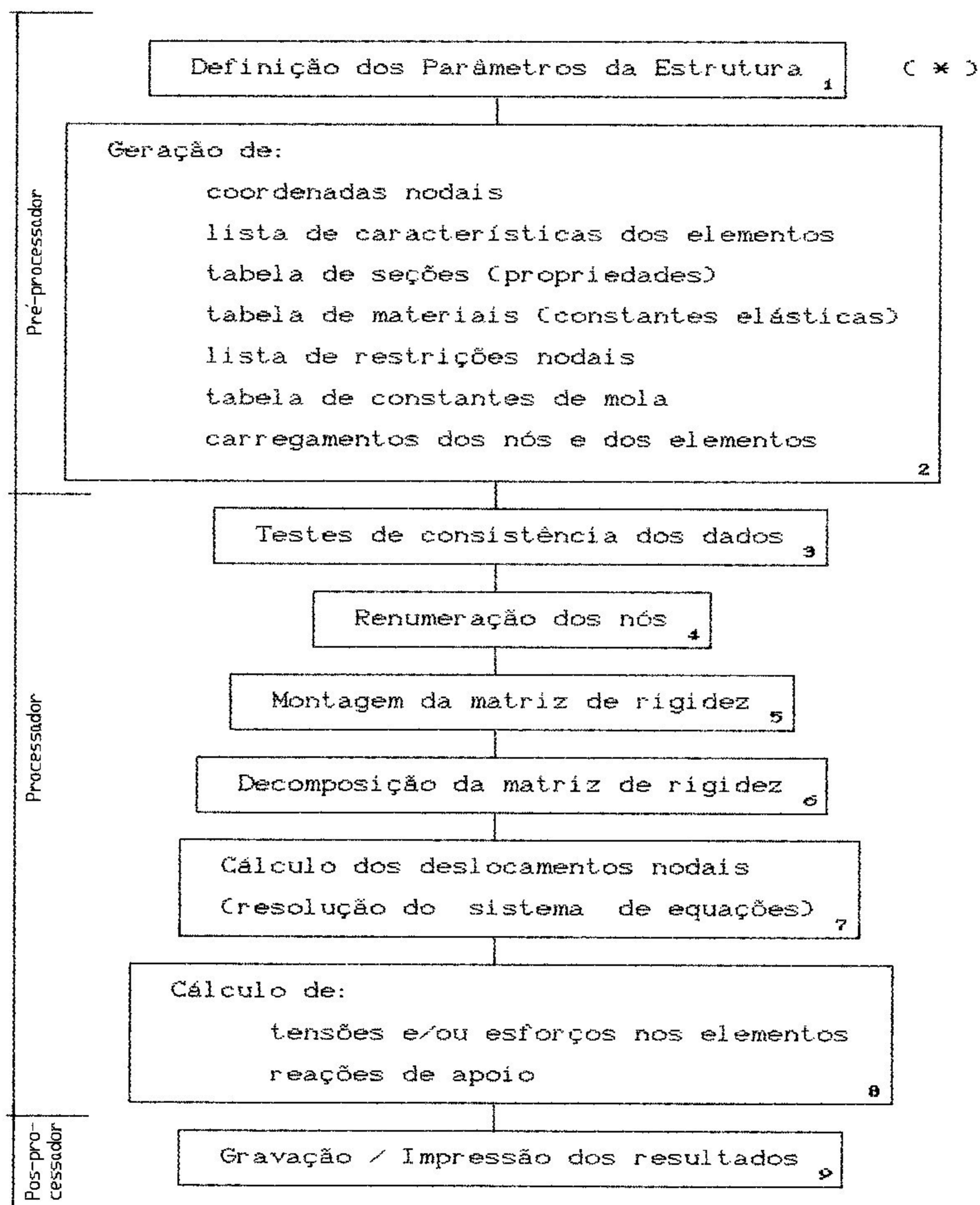
Processador - O processador incorpora técnicas de renumeração dos nós, de montagem da matriz de rigidez da estrutura e de resolução do sistema de equações. Os elementos utilizados são suficientemente testados e aprovados, e possuem vasta documentação técnica. Criou-se um processador simples e confiável e que possibilita o uso de equipamentos de pequeno porte.

Pós-processador - O pós-processador limita-se à impressão das tabelas de deslocamentos nodais, reações de apoio, esforços e tensões nos elementos.

O ambiente de programação consiste do sistema operacional MS-DOS, versão 3.2 e da linguagem Quick-Basic, versão 4.0 da Microsoft.

5.2.1 FLUXOGRAMA DO SISTEMA

A seguir apresenta-se um fluxograma resumido do sistema desenvolvido:



(*) os dados são lidos de um arquivo previamente editado

Cada uma das nove etapas acima é agora comentada resumidamente.

5.2.11 DEFINIÇÃO DOS PARÂMETROS DA ESTRUTURA

Nesta etapa do programa são lidos, de um arquivo ASCII previamente editado, parâmetros básicos da estrutura tais como: número de carregamentos, número de nós, número de elementos, número de nós com restrição e/ou apoios elásticos, que são necessários para o dimensionamento das matrizes de dados da estrutura.

5.2.12 GERAÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA

Nesta fase do programa são gerados dados da estrutura tais como:

- Coordenadas nodais
 - . coordenadas no plano xy
- Lista de características dos elementos
 - . tipo
 - . nós
 - . espessura / seção transversal
 - . material
- Tabelas de seções
 - . área
 - . momentos de inércia
 - . constante de torção
- Tabelas de materiais
 - . constantes elásticas
- Lista de restrições nodais
 - . código para liberação e/ou restrição
 - . código para apoio elástico
- Tabela de constantes de mola
 - . rigidezes à translação e rotação segundo os eixos x, y e z

- Carregamentos

- . dos nós: forças e momentos segundo os eixos x , y e z
- . dos elementos: forças de massa e superfície nos elementos de placa e cargas distribuídas e concentradas nos elementos de barra

Foram desenvolvidas diversas rotinas para facilitar a geração automática dos dados da estrutura, necessitando um mínimo de informações iniciais.

5.2.13 TESTES DE CONSISTENCIA DOS DADOS

Neste programa são feitos diversos testes de consistência dos dados, à medida em que estes vão sendo gerados. Procurou-se, assim, evitar o processamento de uma estrutura incompleta ou gerada incorretamente. São emitidas mensagens auxiliares sobre possíveis erros encontrados.

5.2.14 RENUMERAÇÃO DOS NÓS

Sabe-se que a dimensão da matriz de rigidez está diretamente relacionada à numeração dos nós; portanto, tornou-se imperioso a implementação de uma subrotina que minimize esta dimensão.

Para tal, desenvolveu-se um algoritmo baseado no artigo de RICHARD ROSEN "Matrix Bandwidth Minimization" [29].

5.2.15 MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Nesta etapa monta-se a matriz de rigidez de nó da estrutura com a contribuição das matrizes de rigidez dos elementos.

A matriz de rigidez é a estrutura de dados

que mais afeta a eficiência computacional, pela sua dimensão. Observando o fato de que a matriz de rigidez é simétrica, deve-se armazenar apenas os elementos da matriz triangular superior. Outro aspecto importante é que os coeficientes não nulos normalmente estão agrupados em uma faixa (banda) ao longo da diagonal principal, e apenas estes coeficientes devem ser armazenados.

5.2.16 DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Nesta etapa do programa decompõe-se a matriz de rigidez. Adotou-se o método de Cholesky em conjunto com o processo da partição do sistema de equações em blocos, observando a triangularização segundo as linhas, conforme proposto por SORIANO [30]. A utilização de memória periférica constituiu-se no recurso encontrado para eliminar a limitação da memória central. Procurou-se reduzir ao mínimo necessário a transferência de dados entre a memória central e a periférica (e vice e versa).

5.2.17 CALCULO DOS DESLOCAMENTOS NODAIS

Nesta etapa do programa resolve-se o sistema de equações, isto é, calcula-se os deslocamentos nodais da estrutura, pelo método de Cholesky com partição em blocos, conforme mencionado anteriormente.

5.2.18 CALCULO DAS TENSOES, ESFORÇOS E REAÇÕES

Uma vez obtidos os deslocamentos nodais, pode-se calcular as tensões e/ou os esforços nos elementos bem como as reações de apoio da estrutura, o que é feito nesta etapa do programa.

5.2.19 GRAVAÇÃO / IMPRESSÃO DOS RESULTADOS

O relatório de saída, com todas as tabelas de dados e resultados, é gravado em um arquivo sequencial ASCII, que pode ser impresso quando desejado. Note-se que também é possível acessar este arquivo com qualquer editor de texto.

6. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

6.1 PLACA SIMPLEMENTE APOIADA COM ENRIJECEDORES

Optou-se pela apresentação de um exemplo bastante simples constituído de uma placa quadrada de 4x4 metros e enrijecida por duas vigas perpendiculares conforme mostrado na figura 6.1.a. Esta placa é simplesmente apoiada no seu contorno, tem espessura $h = 10$ cm e está sujeita a uma carga uniforme de 1 t/m^2 . As vigas de enrijecimento tem 10 cm de largura e altura total de 20 cm, conforme se vê no detalhe da figura 6.1.b. Admitiu-se que o material da placa e vigas é isótropo com módulo de elasticidade $E = 2100000 \text{ t/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. A posição relativa das vigas de enrijecimento em relação ao plano médio da placa será determinada posteriormente pelos motivos que se exporão oportunamente.

A escolha deste exemplo relaciona-se ao fato desta estrutura ser facilmente calculada por outros processos o que facilita a comparação de resultados e, conseqüentemente, permite destacar aspectos considerados relevantes.

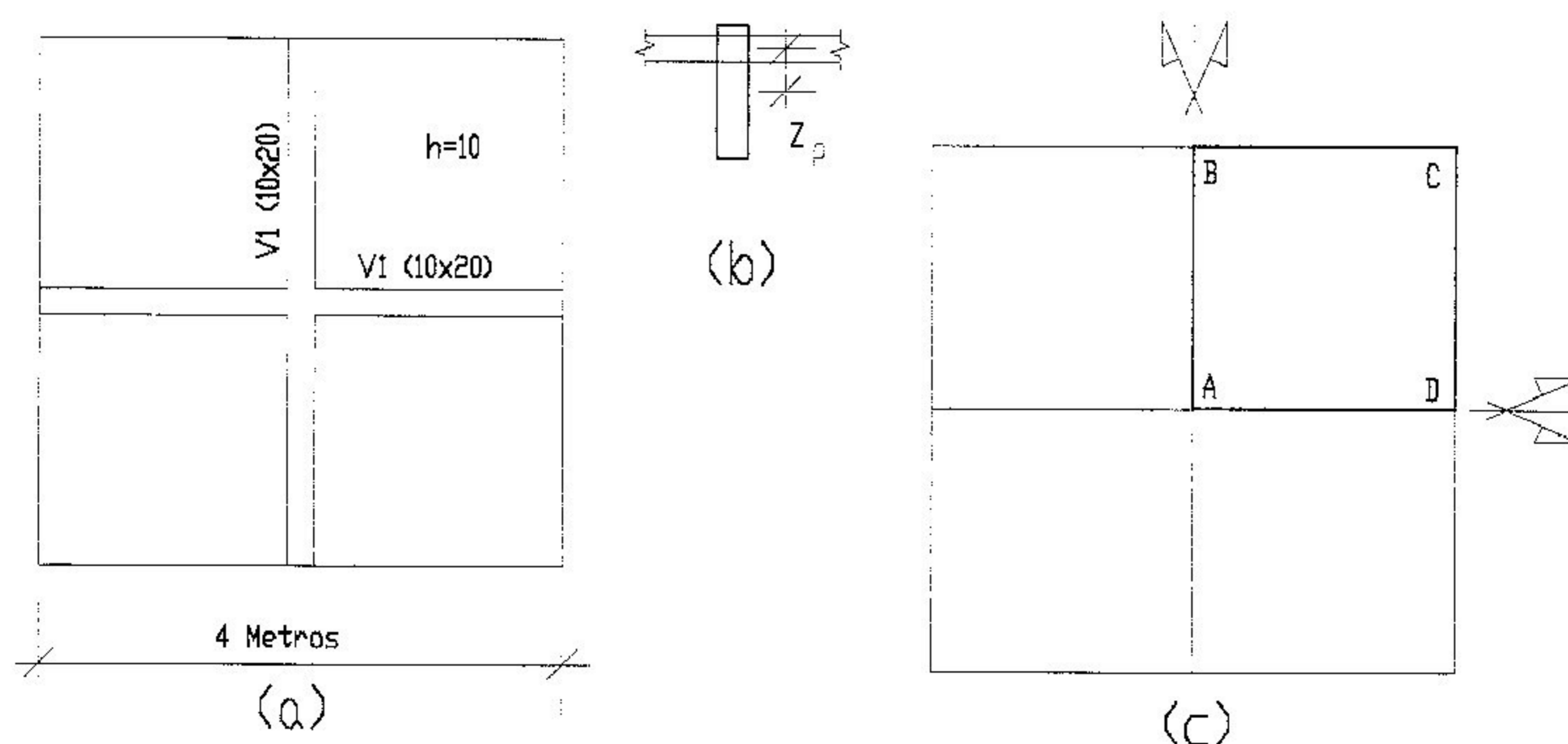


Fig. 6.1 (a) Placa enrijecida e (c) quadrante processado

6.2 ESCOLHA DA MALHA

Ao analisar-se uma estrutura modelada com elementos finitos, deve-se atentar sempre para a precisão dos resultados. Uma malha pobre, composta por poucos elementos, leva a uma aproximação grosseira, isto é, os resultados não são confiáveis. Uma malha refinada, composta por muitos elementos, leva a um resultado bastante próximo do exato, porém, o tempo gasto com a codificação, processamento e análise dos resultados pode ser excessivo. Na prática, a malha considerada ideal é aquela em que o analista consegue um equilíbrio entre a precisão dos resultados e o tempo gasto na análise do modelo. Contudo, neste trabalho a precisão dos resultados é importante e, por isto, diversas malhas serão pesquisadas sem a preocupação com o tempo gasto.

Assim sendo, no exemplo da figura 6.1 serão processadas as malhas 2x2, 4x4, 6x6, 8x8, 10x10, 12x12, 14x14, 16x16, 18x18 e 20x20. Na figura 6.2 estão representadas, para ilustração, as malhas 2x2, 10x10 e 20x20.

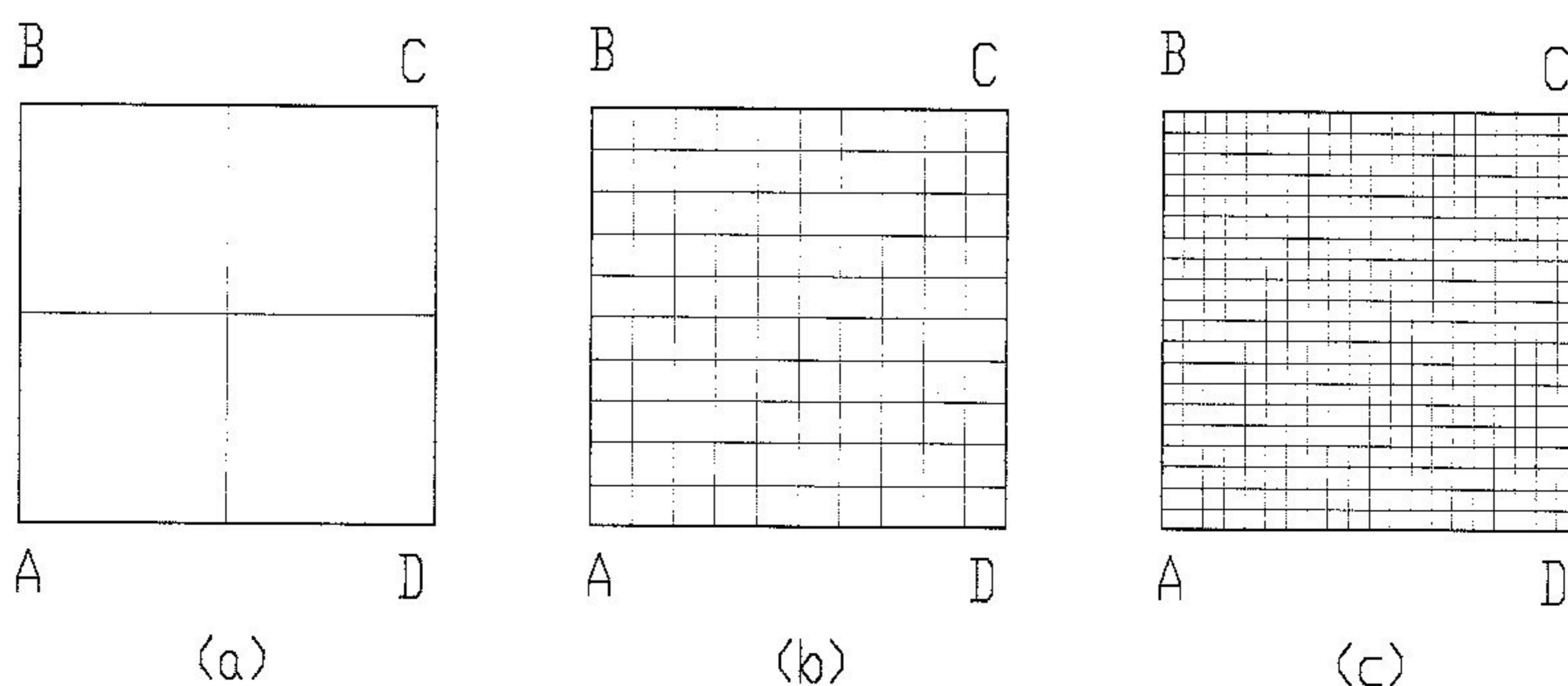


Fig. 6.2 Malhas: (a) 2x2, (b) 10x10 e (c) 20x20

Utilizou-se um microcomputador 386 DX de 33 MHz com 4 Mb de memória central para processar os programas PAVEDIF e SUPERSAP.

Na tabela 6.1 são apresentados, para as diversas malhas, os valores da flecha no nó 1 e dos momentos fletores no centróide do elemento nº 1 calculados com o programa SUPERSAP. Estes valores são apresentados para efeito de comparação com os valores obtidos com o programa PAVEDIF, conforme tabela 6.2.

Malha	Flecha no nó 1 (cm)	Variação (%)	Momento no elemento 1 (t.m)	Variação (%)	Tempo (min.)
2x2	0,42075	--	0,4440	--	0,6199
4x4	0,46337	10,12	0,5481	23,46	0,8440
6x6	0,47157	1,77	0,5685	3,71	1,2001
8x8	0,47446	0,61	0,5760	1,32	1,7310
10x10	0,47579	0,28	0,5796	0,64	2,5724
12x12	0,47652	0,15	0,5817	0,35	3,9125
14x14	0,47695	0,09	0,5828	0,20	5,5540
16x16	0,47724	0,06	0,5837	0,14	7,4241
18x18	0,47743	0,03	0,5843	0,11	10,7610
20x20	0,47757	0,03	0,5846	0,06	18,2610

Tabela 6.1 - Resultados obtidos com o programa SUPERSAP

A coluna variação corresponde à diferença entre o resultado da malha processada e o resultado da malha anterior, dividida pelo resultado da malha anterior, e expressa em porcentagem.

Observa-se que os resultados encontrados a partir de um certo refinamento possuem uma variação muito pequena. Além disto, comparando-se os resultados da malha 10x10 com os da malha 20x20, verifica-se uma variação de 0,37% no valor da flecha no nó 1 e de apenas 0,86% no valor dos momentos fletores no elemento 1.

Na tabela 6.2, análoga à tabela 6.1, são apresentados os valores obtidos com o programa PAVEDIF.

Malha	Flecha no nó 1 (cm)	Variação (%)	Momento no elemento 1 (t/m ²)	Variação (%)	Tempo (min.)
2x2	0,5019	--	0,5089	--	0,1665
4x4	0,4842	3,53	0,5666	11,35	0,4332
6x6	0,4808	0,70	0,5773	1,87	1,0660
8x8	0,4796	0,25	0,5811	0,66	2,1331
10x10	0,4791	0,10	0,5828	0,32	3,8830
12x12	0,4788	0,06	0,5839	0,17	6,7248
14x14	0,4786	0,04	0,5846	0,11	10,6081
16x16	0,4785	0,02	0,5849	0,07	15,9753
18x18	0,4784	0,02	0,5852	0,06	23,1737
20x20	0,4783	0,02	0,5855	0,04	32,8662

Tabela 6.2 - Resultados obtidos com o programa PAVEDIF

Pode-se dizer que os resultados variam muito pouco a partir de um certo refinamento. Comparando-se os resultados da malha 10x10 com os da malha 20x20 obtém-se uma variação de apenas 0,17% no valor da flecha no nó 1 e de apenas 0,45% no valor dos momentos fletores no elemento 1.

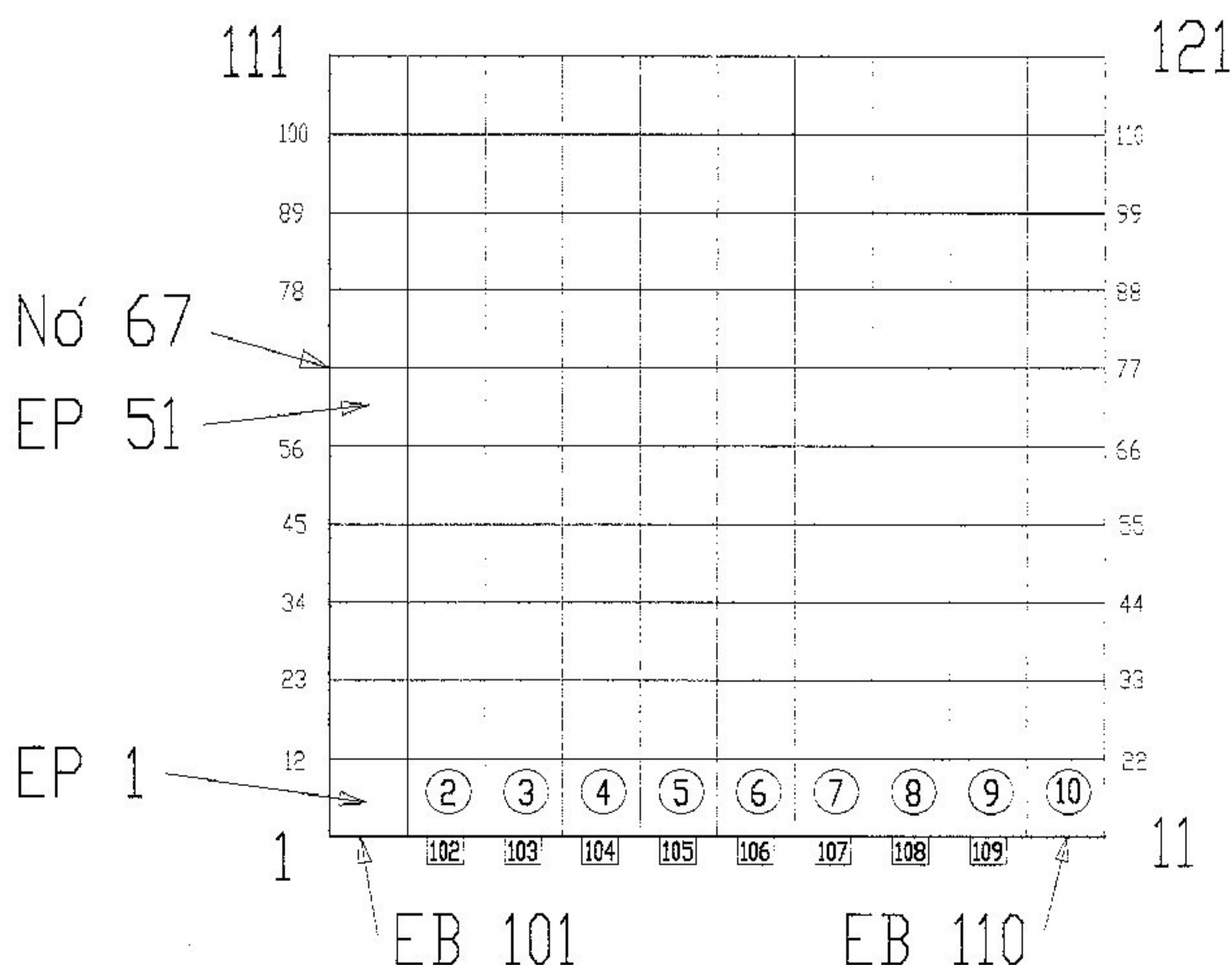


Fig. 6.3 Malha 10x10

Assim sendo, pode-se considerar a malha 10x10 (figura 6.3) como satisfatória, tanto no programa SUPERSAP quanto no programa PAVEDIF e, neste exemplo, é desnecessário utilizar malhas mais refinadas. Observa-se ainda que a malha de 10x10 com 100 elementos no quadrante corresponde a 400 elementos na placa original.

Na tabela 6.3 são comparados os valores obtidos com os programas SUPERSAP e PAVEDIF.

Malha	Flecha no nó 1 Diferença (%)	Momento no elemento 1 Diferença (%)	Tempo de processamento Diferença (%)
2x2	19,29	14,61	-73,14
4x4	4,50	3,37	-48,67
6x6	1,96	1,54	-11,17
8x8	1,08	0,88	23,23
10x10	0,70	0,55	50,95
12x12	0,48	0,38	71,88
14x14	0,35	0,29	91,00
16x16	0,26	0,22	115,18
18x18	0,20	0,16	116,25
20x20	0,15	0,15	120,02

Tabela 6.3 - Comparação SUPERSAP x PAVEDIF

Observando-se os valores da tabela 6.3 pode-se dizer que os resultados do programa PAVEDIF são bons quando comparados aos do programa SUPERSAP.

Nota-se também, na tabela 6.3, que os tempos de processamento do programa PAVEDIF são inferiores aos do programa SUPERSAP até a malha 6x6, mas a partir deste ponto estes tempos passam a ser superiores. Isto mostra que o tratamento de grandes sistemas de equações pelo programa PAVEDIF precisa ser melhorado. Por outro lado, este problema é naturalmente solucionado com o aumento de memória do núcleo central do computador.

Examinaremos agora o que ocorre quando se comparam os resultados obtidos nos dois programas levando

em consideração o efeito da conexão "off-set".

Na tabela 6.4 são comparados os valores obtidos com os dois programas, PAVEDIF e SUPERSAP, para a placa do exemplo proposto (malha 10x10) para alguns valores de "off-set".

off-set	Flecha no nó 1 (cm) SUPERSAP	Flecha no nó 1 (cm) PAVEDIF	Diferença (cm)	Momento no Elemento 1 (t.m) SUPERSAP	Momento no Elemento 1 (t.m) PAVEDIF	Diferença (t.m)
0,15	,24090	,24240	,0015	0,2750	0,2762	,0012
0,50	,04354	,04407	,0005	0,0338	0,0332	,0006
1,00	,01474	,01517	,0004	0,0009	0,0008	,0001

Tabela 6.4 - Comparação SUPERSAP x PAVEDIF com "off-set"

Observando-se os valores da tabela 6.4 pode-se dizer que os resultados do programa PAVEDIF, levando em consideração os efeitos da conexão "off-set", também são bons quando comparado aos do programa SUPERSAP.

6.3 INFLUENCIA DA VARIACAO DO "OFF-SET"

Uma vez definida a malha a ser utilizada (figura 6.3), passou-se a analisar o efeito da variação do "off-set" z_p das barras nas flechas e esforços, mantidas constantes a altura da placa e a seção transversal das vigas. Vários exemplos foram processados e alguns resultados são mostrados na tabela 6.5. Nesta tabela são apresentados os valores da flecha w no nó 1, o momento fletor M_y e a força axial N_x no nó 1 do elemento de barra EB 101, a força cortante Q_z no nó 11 do elemento de barra 110, o momento fletor M_x e a tensão normal de membrana σ_x no nó 1 do elemento de placa EP 1 e o momento fletor M_x no nó 67 do elemento de placa S1, calculados pelo programa PAVEDIF.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
z_p off- set (m)	w nó 1 (cm)	M_y EB. 101 no 1 (t.m)	N_x EB. 101 nó 1 (t)	Q_z EB. 110 nó 11 (t)	M_x EP. 1 nó 1 (t.m)	σ_x EP. 1 nó 1 (t/m ²)	M_x EP. 51 nó 67 (t.m)
0	,47910	,18830	0	0,2360	,58830	0	,32579
0.05	,43170	,16790	2,3460	0,3214	,52460	-21,46	,26958
0.10	,33340	,12740	3,5730	0,5006	,39800	-31,15	,15068
0.15	,24240	,09116	3,8480	0,6688	,28490	-32,52	,03839
0.20	,17600	,06525	3,6840	0,7924	,20390	-30,59	-,04439
0.30	,10000	,03592	3,0630	0,9348	,11230	-25,02	-,13998
0.40	,06349	,02193	2,5150	1,0040	,06855	-20,41	-,18619
0.50	,04407	,01452	2,1050	1,0400	,04539	-17,02	-,21078
0.60	,03274	,01021	1,7990	1,0610	,03190	-14,52	-,22509
0.70	,02562	,00749	1,5670	1,0750	,02430	-12,63	-,23419
0.80	,02088	,00569	1,3850	1,0840	,01778	-11,15	-,24018
0.90	,01757	,00443	1,2400	1,0900	,01385	-9,98	-,24437
1.00	,01517	,00351	1,1220	1,0950	,01100	-9,02	-,24749
1.50	,00938	,00132	0,7560	1,1060	,00412	-6,08	-,25478
2,00	,00732	,00053	0,5700	1,1090	,00168	-4,58	-,25739
2,50	,00636	,00017	0,4570	1,1110	,00054	-3,67	-,25858
3,00	,00584	,00002	0,3813	1,1120	-,00007	-3,06	-,25927
4,00	,00532	-,00022	0,2862	1,1130	-,00069	-2,30	-,25998
6,00	,00495	-,00036	0,1910	1,1140	-,00113	-1,53	-,26037
8,00	,00482	-,00041	0,1433	1,1140	-,00129	-1,51	-,26058
10,00	,00476	-,00043	0,1146	1,1140	-,00136	-0,92	-,26068
100,0	,00475	-,00047	0,0114	1,1140	-,00148	-0,092	-,26079
1000,	,00475	-,00047	0,0011	1,1140	-,00148	-0,009	-,26078
-0,50	,04407	,01452	-2,105	1,0400	,04539	17,02	-,21078
-1,00	,01517	,00351	-1,122	1,0950	,01100	9,02	-,24749
-2,00	,00732	,00053	-,5700	1,1090	,00168	4,58	-,25739
-3,00	,00584	,00002	-,3813	1,1120	-,00007	3,06	-,25927

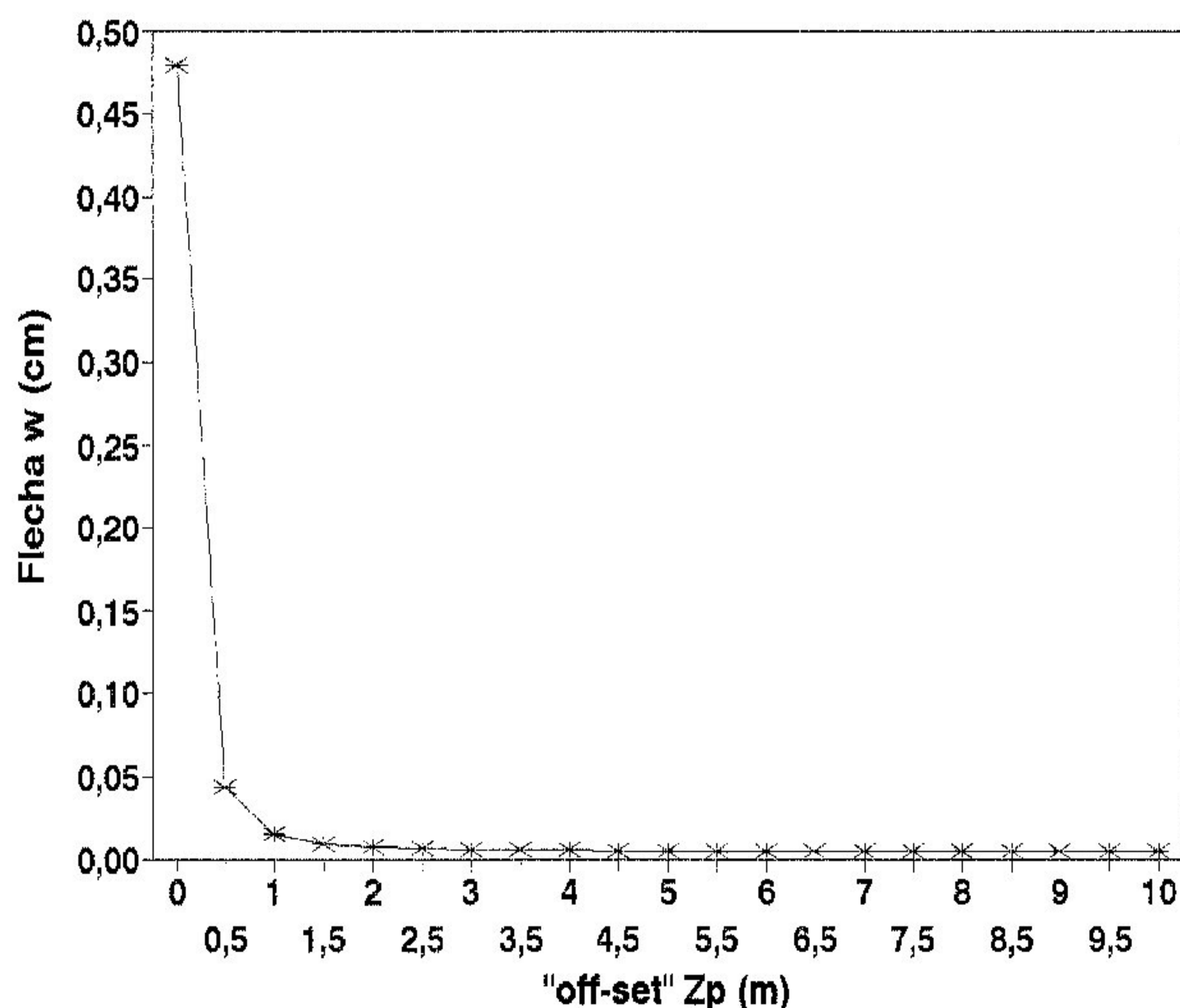
Tabela 6.5 - Efeito da variação do Off-Set.

Com os valores obtidos na tabela 6.5 pode-se observar graficamente a variação dos resultados, o que se fará a seguir.

6.3.1 GRAFICOS DE VARIACAO DA FLECHA W

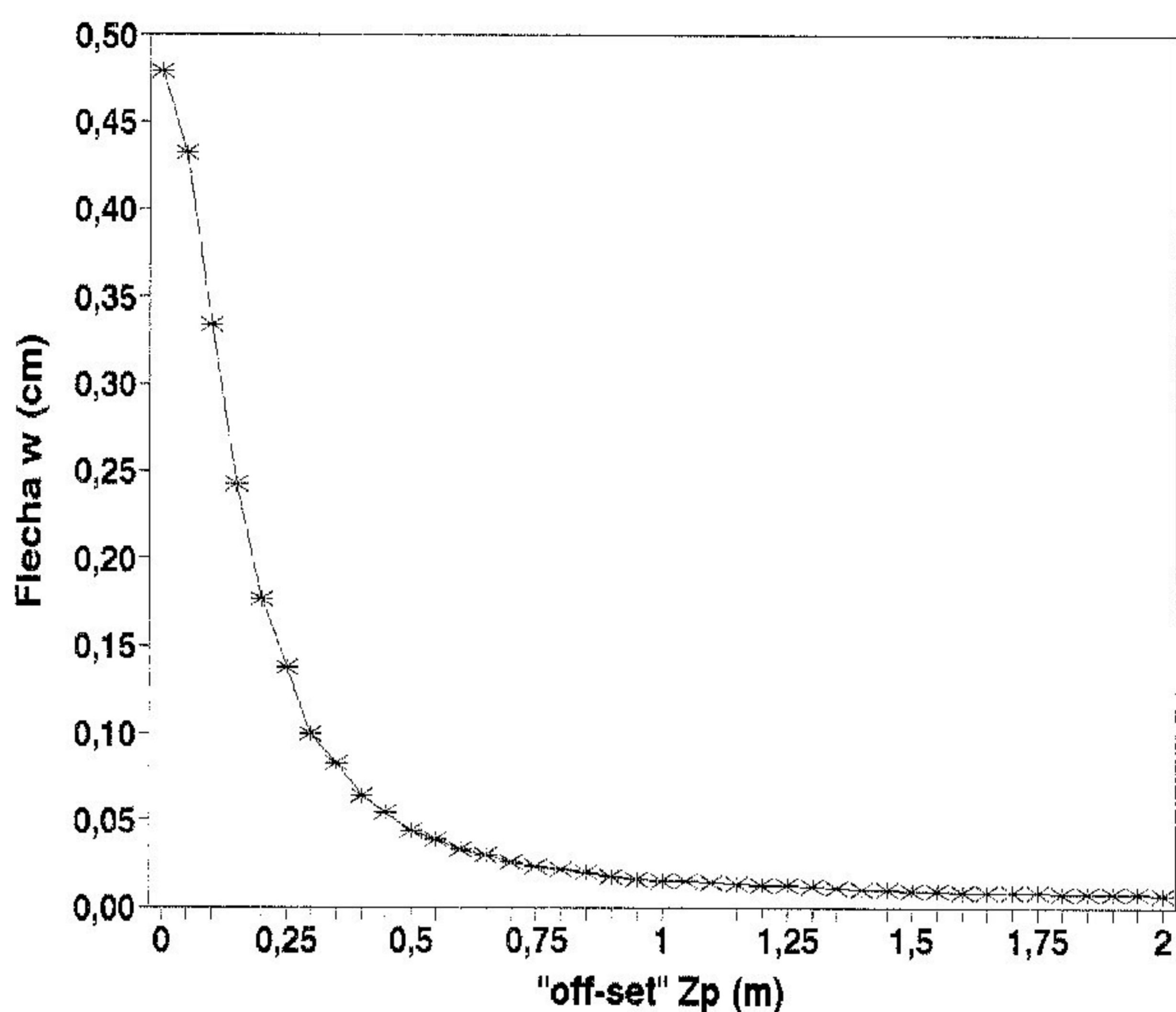
Observa-se na coluna 2 da tabela 6.5 que a variaçao do valor z_p do "off-set" alterou a rigidez da estrutura. Pode-se constatar que há uma variaçao bastante significativa da flecha para os valores de z_p variando de 0 a 0,5 m já que para $z_p = 0,5$ m a flecha reduziu-se a menos de 1/10 do seu valor inicial. Todavia, a partir deste ponto os gráficos 6.1a e 6.1b mostram claramente que a reduçao da flecha não é significativa ainda que se aumente muito o valor do "off-set". É oportuno observar que os valores da flecha tendem a estabilizar-se, a partir de $z_p = 10$ m, ao redor de $w = 0,0047$ cm.

Outro aspecto relevante é que o gráfico da flecha no nó 1 não se altera para valores negativos do "off-set", isto é, pode-se inverter a posiçao do "off-set" sem alterar-se o valor da flecha.



Obs: Gráfico idêntico para valores negativos do "off-set"

Gráf. 6.1.a - Flecha w no nó 1 (z_p de 0 a 10m)



Obs: Gráfico idêntico para valores negativos do "off-set"

Gráf. 6.1.b - Flecha w no nó 1 (z_p de 0 a 2m)

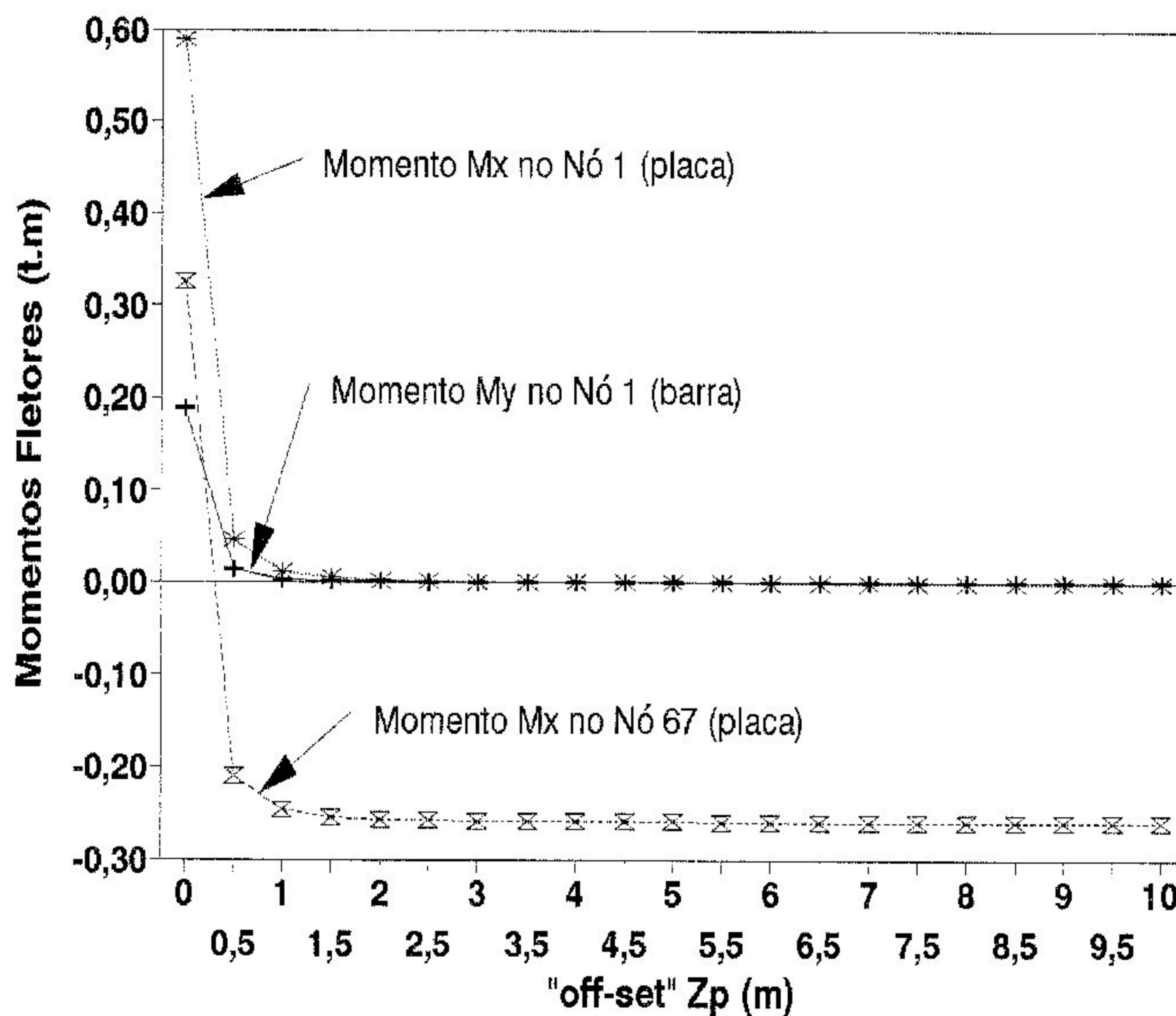
6.3.2 GRAFICOS DE VARIAÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES M_x E M_y

Observando-se as colunas 3 e 6 da tabela 6.5 nota-se que o aumento do valor z_p do "off-set" provocou uma diminuição dos momentos fletores M_y e M_x nos elementos EB.101 e EP.1, respectivamente. Pode-se constatar que há uma variação bastante significativa dos momentos fletores M_y e M_x para os valores de z_p variando de 0 a 0,5 m já que para $z_p = 0,5$ m M_y e M_x reduziram-se a menos de 1/10 do seus valores iniciais. Todavia, a partir deste ponto os gráficos 6.2a e 6.2b mostram claramente que a redução de M_y e M_x não é significativa ainda que se aumente muito o valor do "off-set". É oportuno observar que os valores dos momentos fletores tendem a estabilizar-se, a partir de $z_p = 10$ m, sendo aproximadamente $M_y = -0,00047$ t.m e $M_x = -0,00148$ t.m.

Nota-se na coluna 8 da tabela 6.5 que o

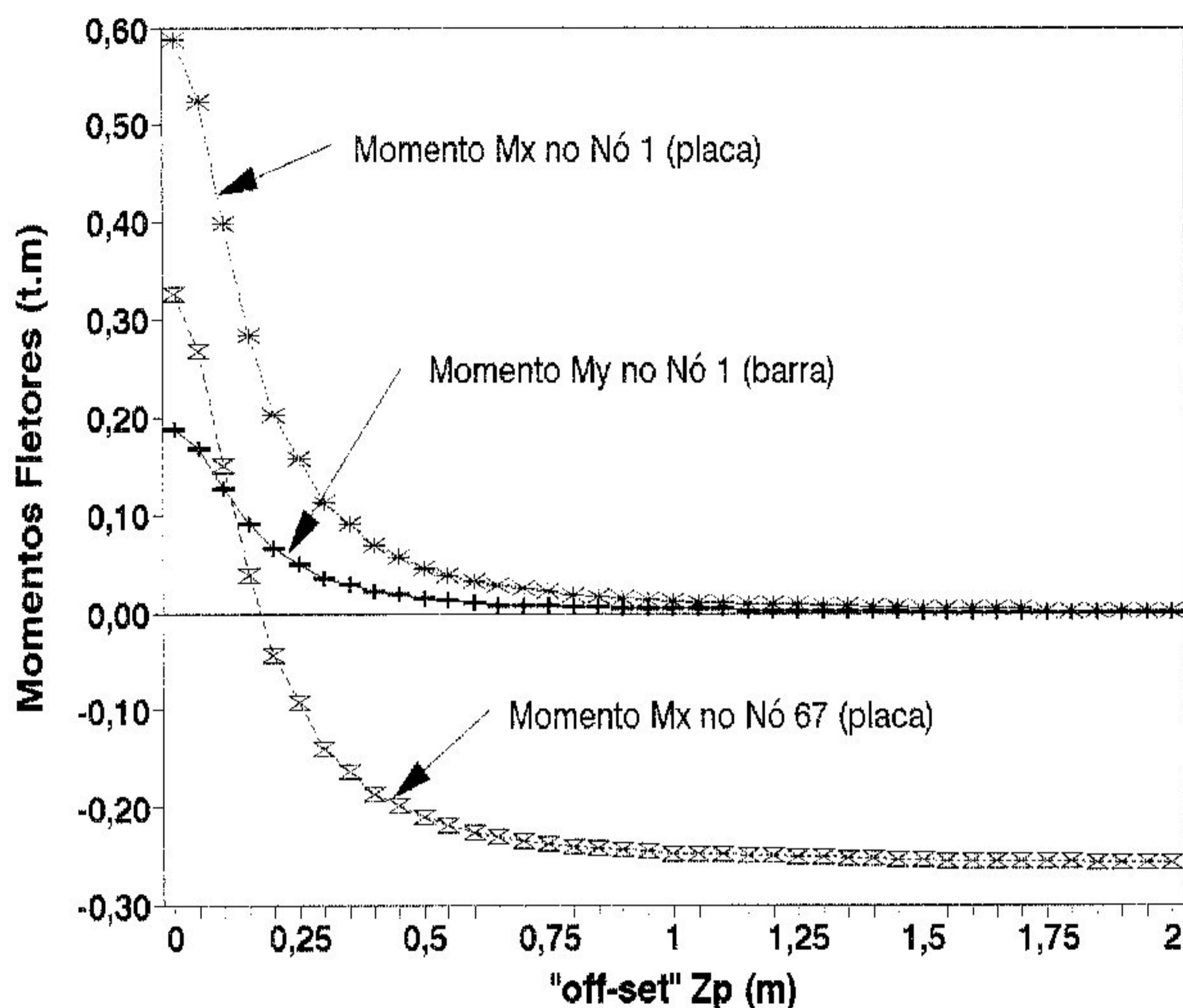
aumento do valor do "off-set" provocou uma inversão do valor do momento fletor M_x no nó 67 do elemento EP.51, que passou de positivo para negativo. Observa-se também que este momento fletor M_x tende a se estabilizar, a partir de $z_p = 1,5$ m, próximo de $M_x = -0,26080$ t.m.

Analogamente ao que ocorre com as flechas, o gráfico dos momentos fletores também não se altera para valores negativos do "off-set".



Obs: Gráfico idêntico para valores negativos do "off-set"

Gráf. 6.2.a - Momentos Fletores M_x e M_y (z_p de 0 a 10m)



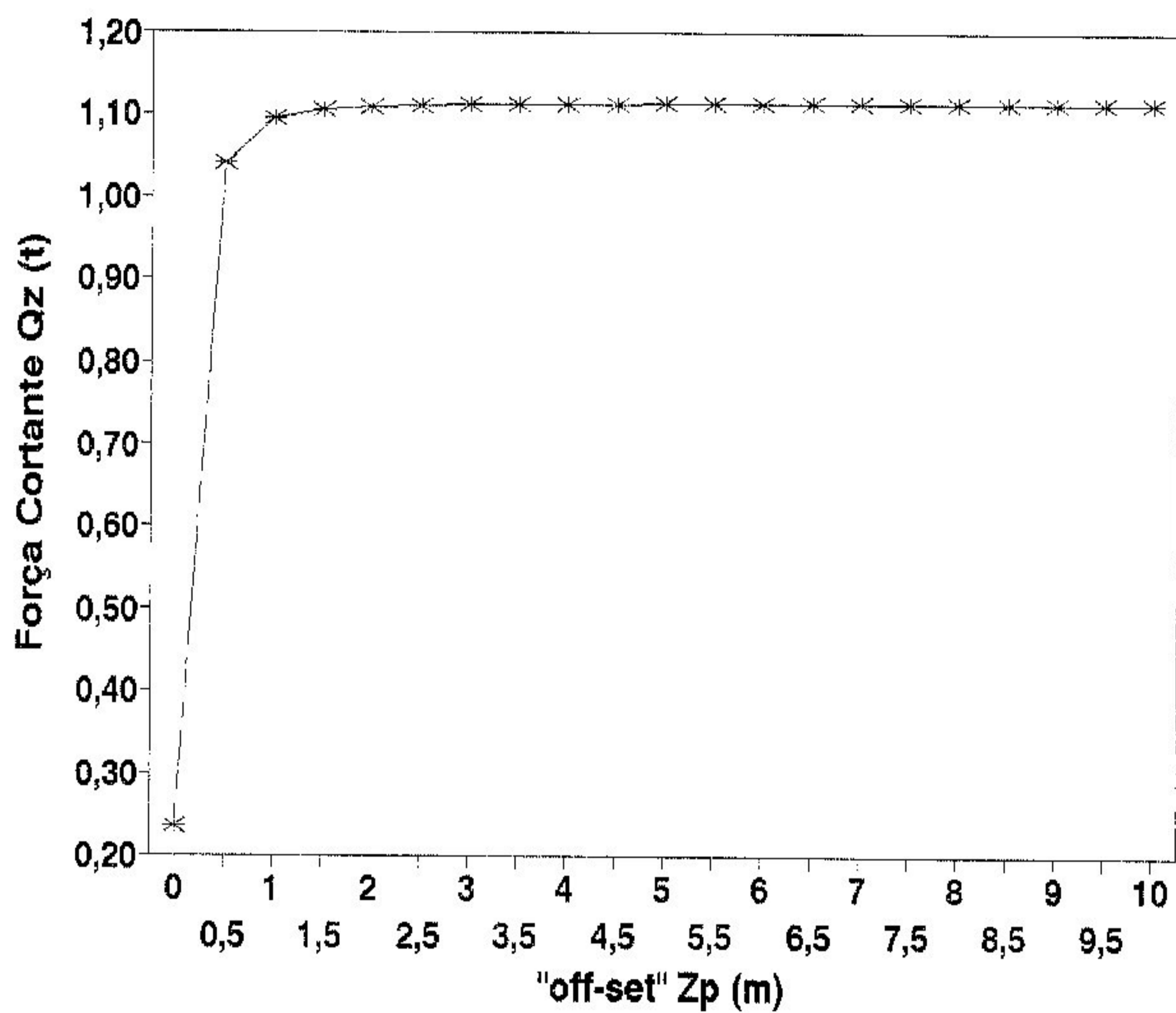
Obs: Gráfico idêntico para valores negativos do "off-set"

Gráf. 6.2.b - Momentos Fletores M_x e M_y (z_p de 0 a 2m)

6.3.3 GRAFICOS DE VARIACAO DA FORÇA CORTANTE Q_z

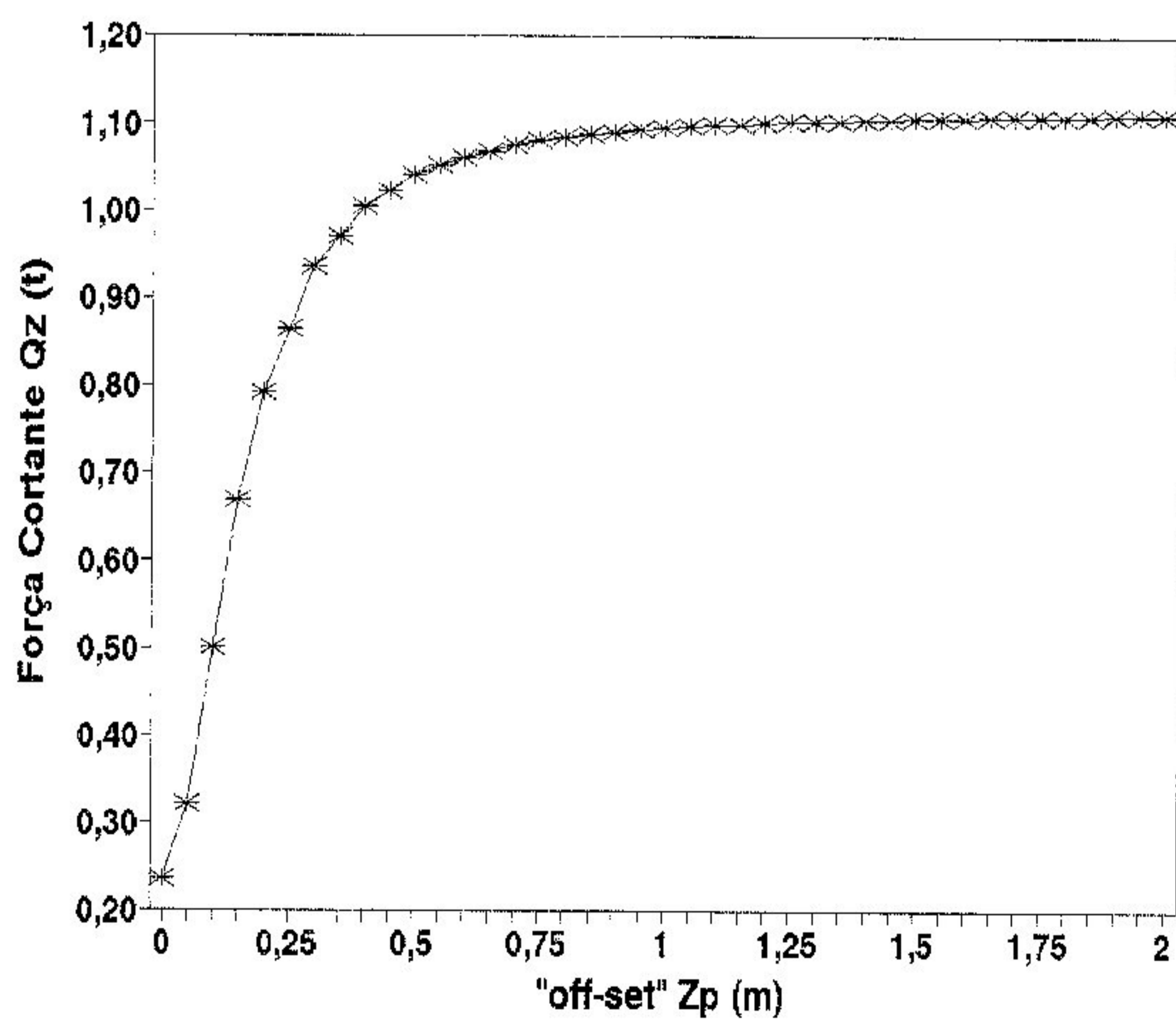
Conforme observa-se na coluna 5 da tabela 6.5, bem como nos gráficos 6.3a e 6.3b, a força cortante Q_z no nó 11 do elemento EB.110 cresce com o aumento do valor do "off-set". É oportuno observar que o valor de Q_z praticamente não se altera a partir de $z_p = 1,0$ m, estabilizando-se em torno de $Q_z = 1,114$ t.

Nota-se ainda, que o valor da força cortante Q_z não muda de sinal ao se inverter a posição do "off-set".



Obs: Gráfico idêntico para valores negativos do "off-set"

Gráf. 6.3.a - Força Cortante Q_z (z_p de 0 a 10m)



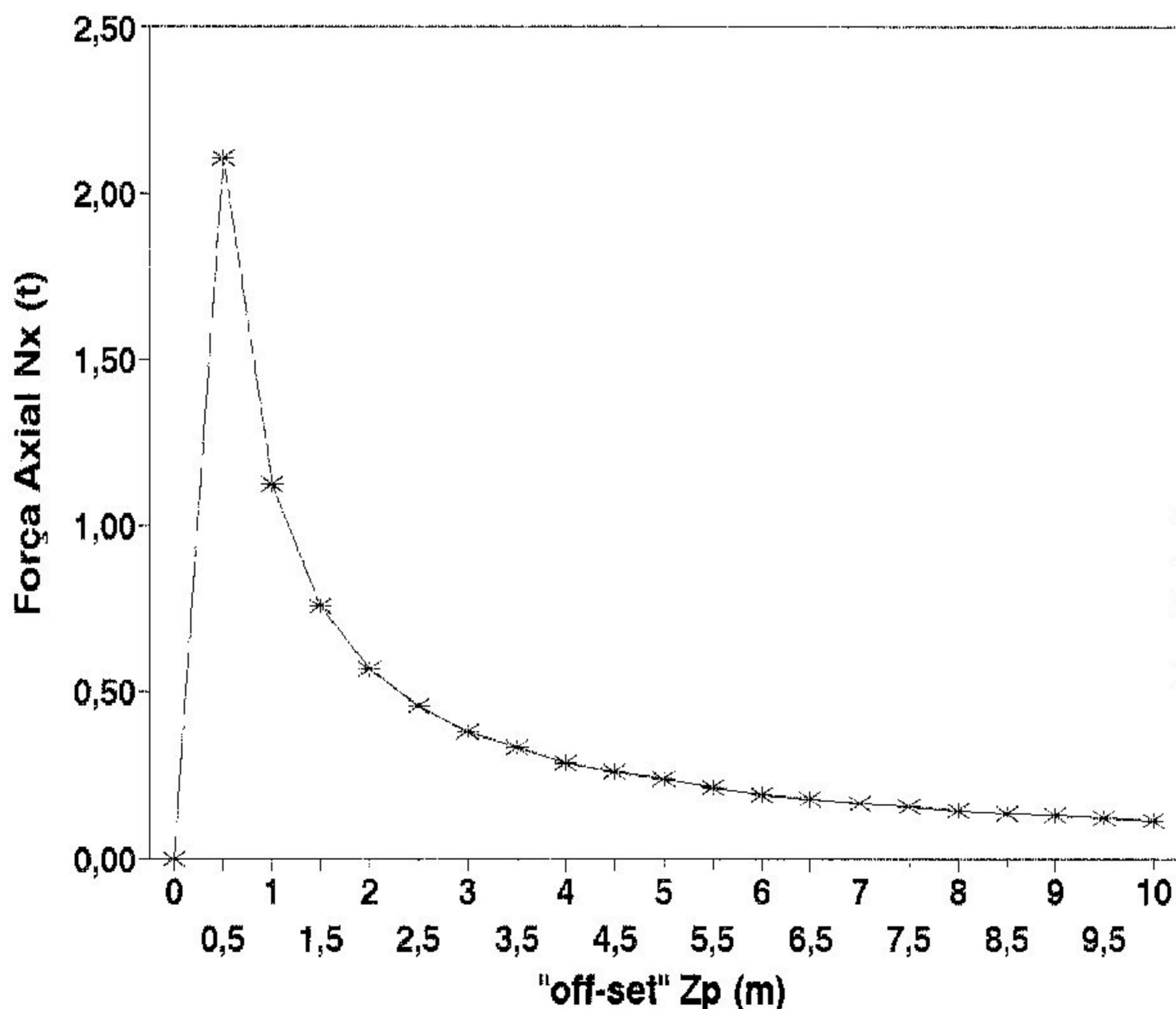
Obs: Gráfico idêntico para valores negativos do "off-set"

Gráf. 6.3.b - Força Cortante Q_z (z_p de 0 a 2m)

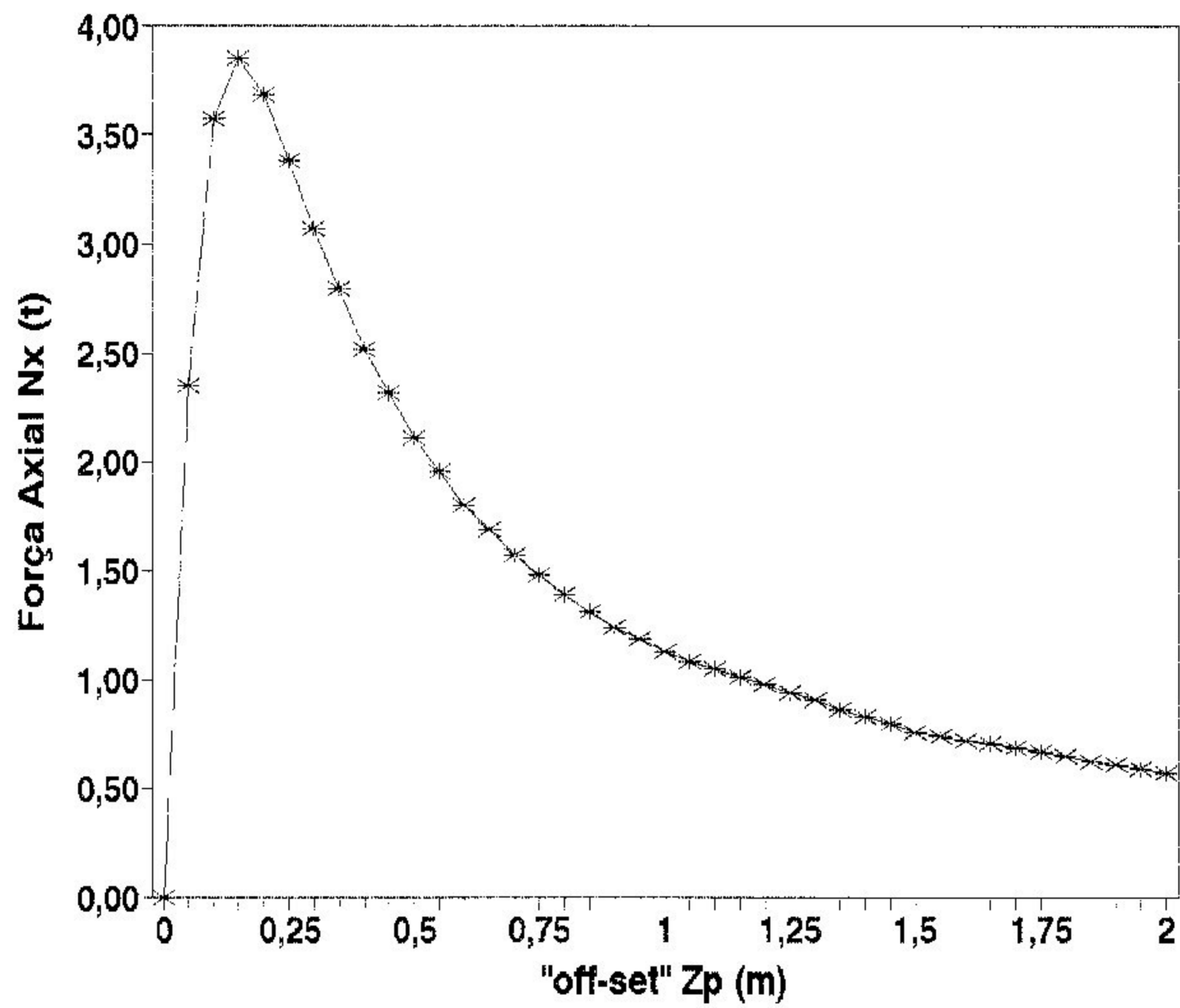
6.3.4 GRAFICOS DE VARIACAO DA FORÇA AXIAL N_x E DA TENSAO NORMAL σ_x

Observa-se nas colunas 4 e 7 da tabela 6.5 que para o valor do "off-set" igual a zero a força axial N_x no elemento EB.101 e a tensão normal σ_x no plano médio do elemento EP.1 são iguais a zero. Pequenos incrementos no valor do "off-set" provocaram, a princípio, uma rápida elevação tanto de N_x quanto σ_x . De fato, como mostram os gráficos 6.4a e 6.4b, o valor máximo de N_x ocorre para $z_p = 0,15$ m. Da mesma forma, como mostram os gráficos 6.5a e 6.5b o valor máximo de σ_x também ocorre para $z_p = 0,15$ m. Posteriormente, com o contínuo incremento no valor do "off-set" os valores de N_x e σ_x sofreram uma diminuição gradativa, tendendo assintoticamente para zero.

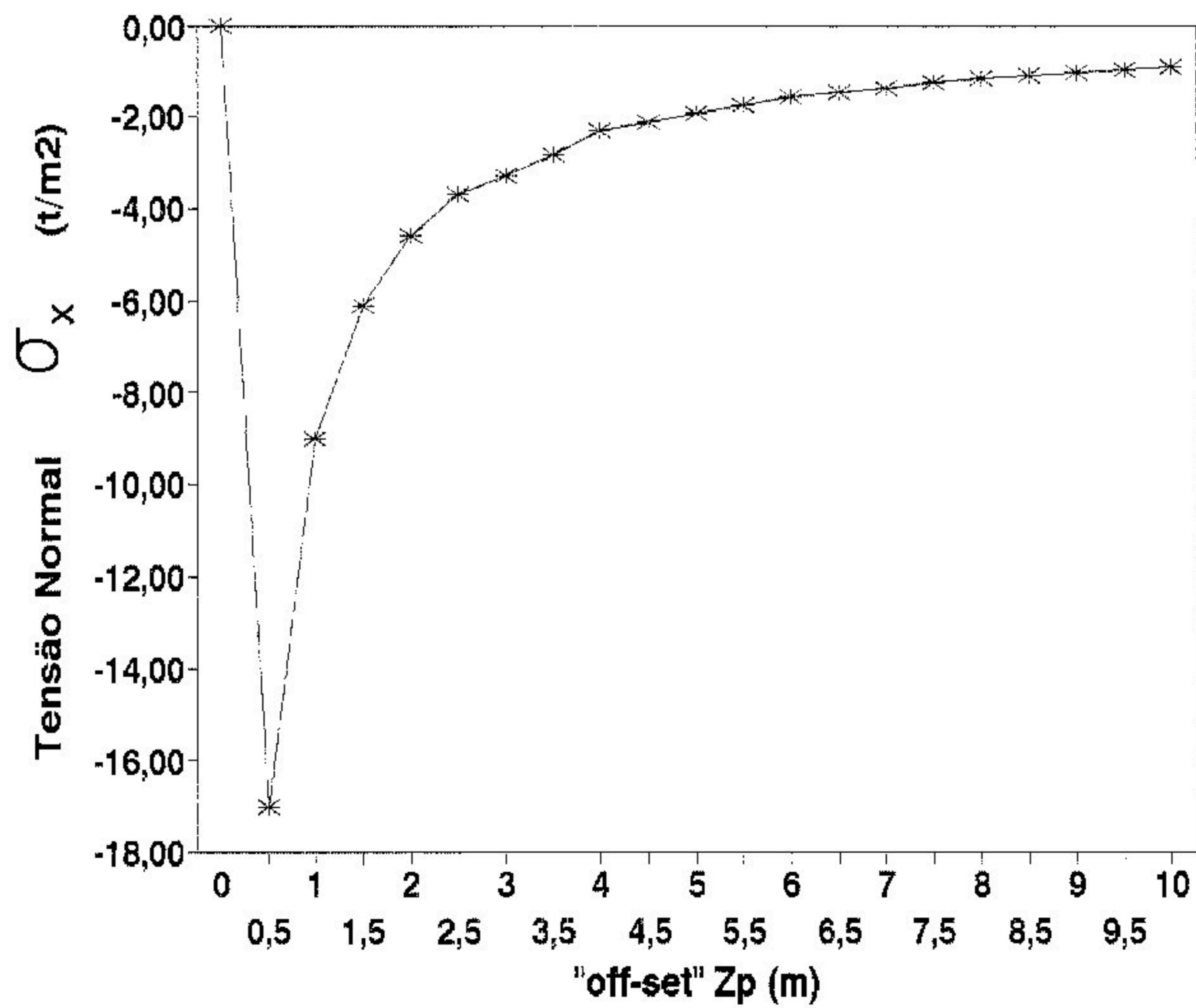
É oportuno observar que os valores da força axial nas barras e das tensões de membrana na placa mudam de sinal quando a posição do "off-set" é invertida. Todavia, os valores absolutos dos esforços não se alteram.



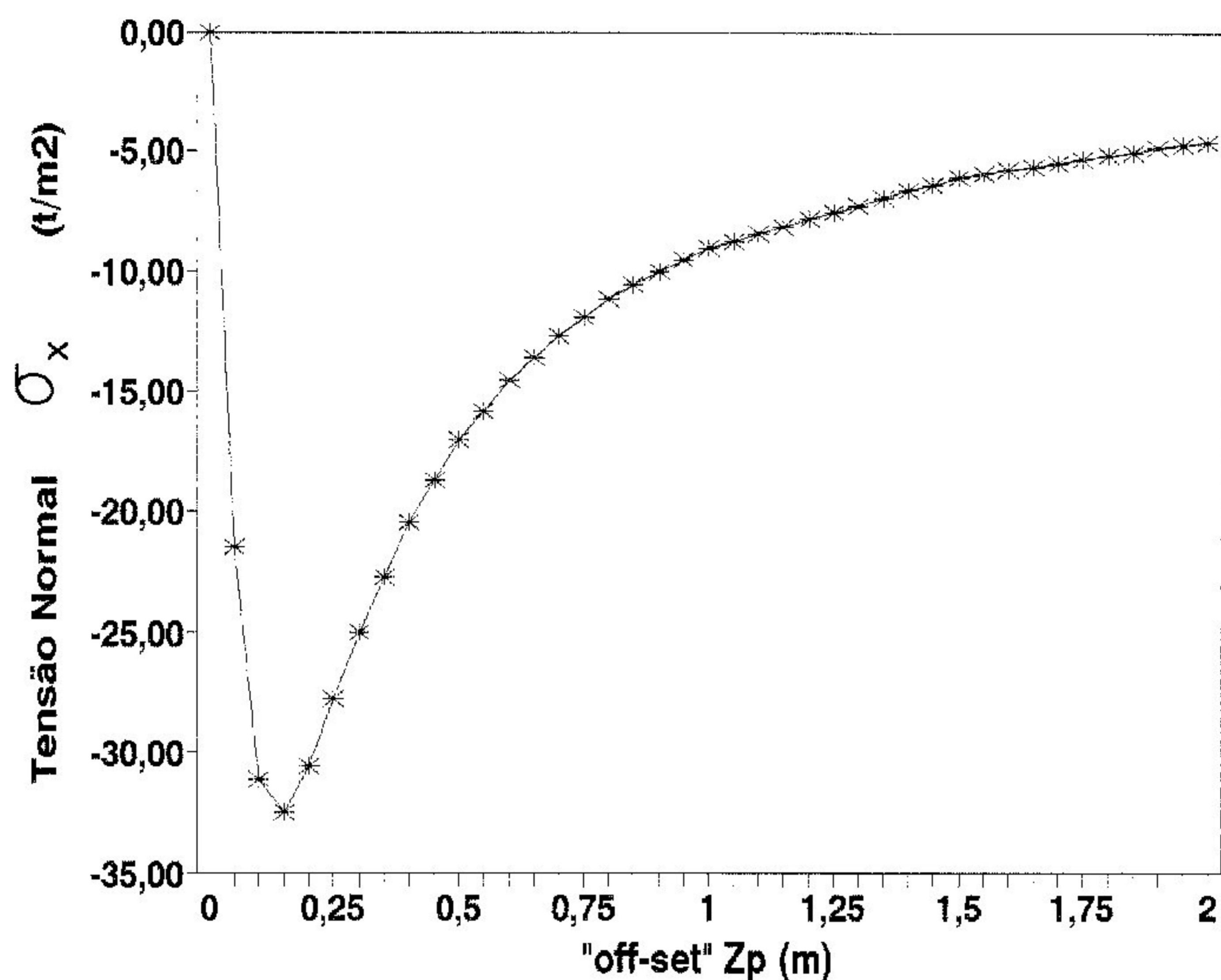
Gráf. 6.4.a - Força Axial N_x (z_p de 0 a 10m)



Gráf. 6.4.b - Força Axial N_x (z_p de 0 a 2m)



Gráf. 6.5.a - Tensão Normal σ_x (z_p de 0 a 10m)



Gráf. 6.5.b - Tensão Normal σ_x (z_p de 0 a 2m)

Os diagramas apresentados a seguir foram obtidos a partir dos resultados da placa processada com $z_p = 0,15$ m. A escolha deste valor de "off-set" deveu-se ao fato de que, com ele, foram obtidas as máximas tensões de membrana no centro da placa e a máxima força axial no meio do vão das vigas. Como estes esforços não são considerados no modelo convencional, a discrepância entre os resultados obtidos com este modelo e o modelo com "off-set" deve aumentar. Pode-se, além do mais, comparar os resultados obtidos com o modelo com "off-set" com os do modelo de viga "T".

6.4 DIAGRAMAS DE ESFORÇOS

Uma vez definido o valor do "off-set" $z_p = 0,15$ m, passa-se, agora, a analisar a variação dos esforços ao longo da estrutura. Na tabela 6.6 são apresentados os momentos fletores M_y , as forças axiais N_x e as forças cortantes Q_z nos nós inicial e final das barras EB.101 a EB.110.

(1) Barra	(2) Nó	(3) Q_z (t)	(4) N_x (t)	(5) M_y (t.m)
101	1	-0,00135	-3,848	0,09116
	2	0,00135	3,848	-0,09143
102	2	0,01336	-3,833	0,09353
	3	-0,01336	3,833	-0,09086
103	3	0,05981	-3,775	0,09845
	4	-0,05981	3,775	-0,08649
104	4	0,12950	-3,640	0,10380
	5	-0,12950	3,640	-0,07786
105	5	0,21490	-3,405	0,10790
	6	-0,21490	3,405	-0,06496
106	6	0,31030	-3,053	0,10990
	7	-0,31030	3,053	-0,04787
107	7	0,41070	-2,576	0,10890
	8	-0,41070	2,576	-0,02678
108	8	0,51040	-1,971	0,10420
	9	-0,51040	1,971	-0,00211
109	9	0,60040	-1,246	0,09480
	10	-0,60040	1,246	0,02529
110	10	0,66880	-0,439	0,07799
	11	-0,66880	0,439	0,05577

Tabela 6.6 - Esforços nas barras - "off-set" = 0.15m

Nas tabelas 6.7.a e b são apresentadas as médias dos momentos fletores e de torção M_x , M_y e M_{xy} , e das tensões normais e de cisalhamento σ_x , σ_y e τ_{xy} em alguns nós da estrutura.

(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
Nó	M_x (t.m)	M_y (t.m)	M_{xy} (t/m)	Nó	M_x (t.m)	M_y (t.m)	M_{xy} (t.m)
1	,28490	,28490	-,00708	67	,03841	,20370	-,01256
2	,28370	,26270	,00115	68	,12960	,21740	,01784
3	,28030	,21830	-,00079	69	,18600	,23730	,04719
4	,27160	,16890	-,00323	70	,21590	,24760	,07020
5	,25640	,12100	-,00605	71	,22790	,24830	,09515
6	,23400	,07682	-,00919	72	,22670	,23740	,11930
7	,20370	,03841	-,01256	73	,21440	,21440	,14180
8	,16530	,00812	-,01601	74	,19050	,17880	,16150
9	,11900	-,01072	-,01941	75	,15180	,13070	,17720
10	,06271	-,01584	-,02163	76	,09233	,07076	,18740
11	-,14520	-,02905	-,02619	77	,00307	,00061	,19090
23	,21830	,28030	-,00079	89	-,01072	,11900	-,01941
24	,25850	,28250	,02903	90	,06560	,13340	,00121
25	,27940	,27940	,04465	91	,10670	,15370	,03331
26	,28540	,26610	,05109	92	,12710	,16550	,06346
27	,27940	,24530	,05278	93	,13570	,16950	,10070
28	,26320	,21820	,05123	94	,13640	,16500	,13930
29	,23730	,18600	,04719	95	,13070	,15180	,17720
30	,20130	,14890	,04097	96	,11820	,12940	,21250
31	,15370	,10670	,03331	97	,09711	,09711	,24270
32	,09074	,05774	,02604	98	,06231	,05400	,26400
33	-,00277	-,00055	,02290	99	,00292	,00058	,27190
45	,12100	,25640	-,00605	111	-,02905	-,14520	-,02619
46	,19830	,26670	,02799	112	,00654	,03271	-,01417
47	,24530	,27940	,05278	113	-,00055	-,00277	,02290
48	,26860	,28190	,06809	114	,00086	,00429	,05790
49	,27480	,27480	,08011	115	,00057	,00287	,10120
50	,26750	,25690	,08893	116	,00063	,00315	,14610
51	,24830	,22790	,09515	117	,00061	,00307	,19090
52	,21660	,18750	,09894	118	,00061	,00306	,23360
53	,16950	,13570	,10070	119	,00058	,00292	,27190
54	,10120	,07306	,10120	120	,00065	,00327	,30270
55	,00287	,00057	,10120	121	0	0	,31710

Tabela 6.7.a - Momentos fletores e de torção em nós da estrutura - "off-set"=0,15m

(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	(2)	(3)	(4)
Nó	σ_x (t/m ²)	σ_y (t/m ²)	τ_{xy} (t/m ²)	Nó	σ_x (t/m ²)	σ_y (t/m ²)	τ_{xy} (t/m ²)
1	-32,52	-32,52	0	67	-8,33	-50,37	22,620
2	-34,60	-29,05	1,620	68	-8,77	-36,80	21,360
3	-39,87	-23,81	3,977	69	-11,74	-26,66	18,400
4	-45,36	-18,43	7,451	70	-12,72	-18,99	15,010
5	-49,36	-13,73	11,880	71	-12,08	-13,69	11,500
6	-51,16	-10,22	17,020	72	-10,26	-10,22	8,228
7	-50,37	-8,33	22,620	73	-7,76	-7,76	5,307
8	-46,63	-8,66	28,410	74	-5,09	-5,48	2,769
9	-39,46	-12,68	34,080	75	-2,73	-2,45	0,759
10	-23,64	-23,55	39,480	76	-1,09	2,23	-0,246
11	-21,31	-76,11	41,430	77	0,357	9,39	-0,334
23	-23,81	-39,87	3,977	89	-12,68	-39,46	34,080
24	-24,44	-33,00	7,223	90	-12,24	-26,09	27,570
25	-26,96	-26,96	10,230	91	-12,76	-15,05	19,080
26	-28,82	-21,53	12,480	92	-10,87	-8,94	12,140
27	-29,63	-17,03	14,510	93	-7,62	-5,68	6,977
28	-29,02	-13,70	16,510	94	-4,66	-3,88	3,339
29	-26,66	-11,74	18,400	95	-2,45	-2,73	0,759
30	-22,19	-11,34	19,760	96	-1,01	-1,66	-0,981
31	-15,05	-12,76	19,080	97	-0,26	-0,26	-1,841
32	-7,64	-16,38	13,280	98	0,006	1,72	-1,519
33	-2,63	-9,20	7,502	99	0,265	3,93	-0,887
45	-13,73	-49,36	11,880	111	-76,11	-21,31	41,430
46	-14,21	-37,97	13,660	112	-47,22	-10,87	15,610
47	-17,03	-29,63	14,510	113	-9,20	-2,63	7,502
48	-16,30	-23,08	14,420	114	4,474	-0,26	3,549
49	-18,12	-18,12	13,770	115	9,395	0,332	1,543
50	-16,55	-14,56	12,790	116	10,48	0,429	0,396
51	-13,69	-12,08	11,500	117	9,386	0,356	-0,334
52	-9,82	-10,16	9,687	118	6,943	0,261	-0,773
53	-5,68	-7,62	6,977	119	3,927	0,264	-0,887
54	-2,44	-2,15	3,506	120	1,477	0,512	-0,628
55	0,332	9,39	1,543	121	0,528	0,528	-0,364

Tabela 6.7.b - Tensões normais e de cisalhamento em nós da estrutura - "off-set"=0,15m

Com os valores obtidos nas tabelas 6.6, 6.7.a e 6.7.b pode-se observar graficamente a variação dos esforços ao longo da estrutura, o que se fará a seguir.

6.4.1 DIAGRAMAS COMPARATIVOS DA FORÇA CORTANTE Q_z NAS VIGAS

Observa-se na coluna 3 da tabela 6.6 a variação da força cortante Q_z nas barras EB.101 a EB.110. Estes valores estão representados no gráfico 6.6 no diagrama de $z_p = 0,15$ m. Pode-se observar que os elementos de barra mais próximos ao apoio das vigas são os mais afetados pela força cortante. Foram também representados graficamente, para comparação, os diagramas de força cortante para $z_p = 0$ (sem a conexão "off-set"), para $z_p = 10$ m e para o modelo convencional.

Neste trabalho entende-se por modelo

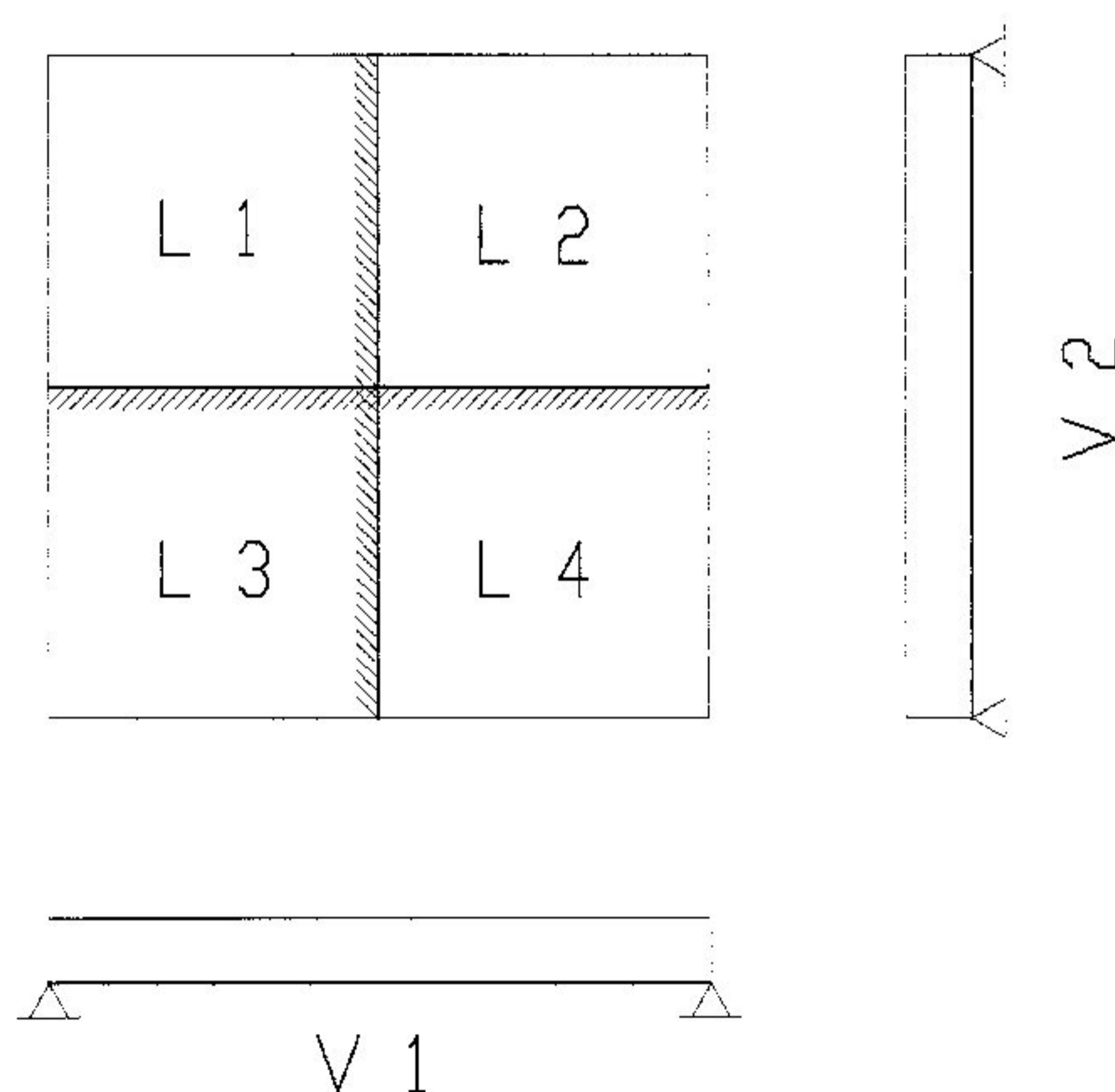
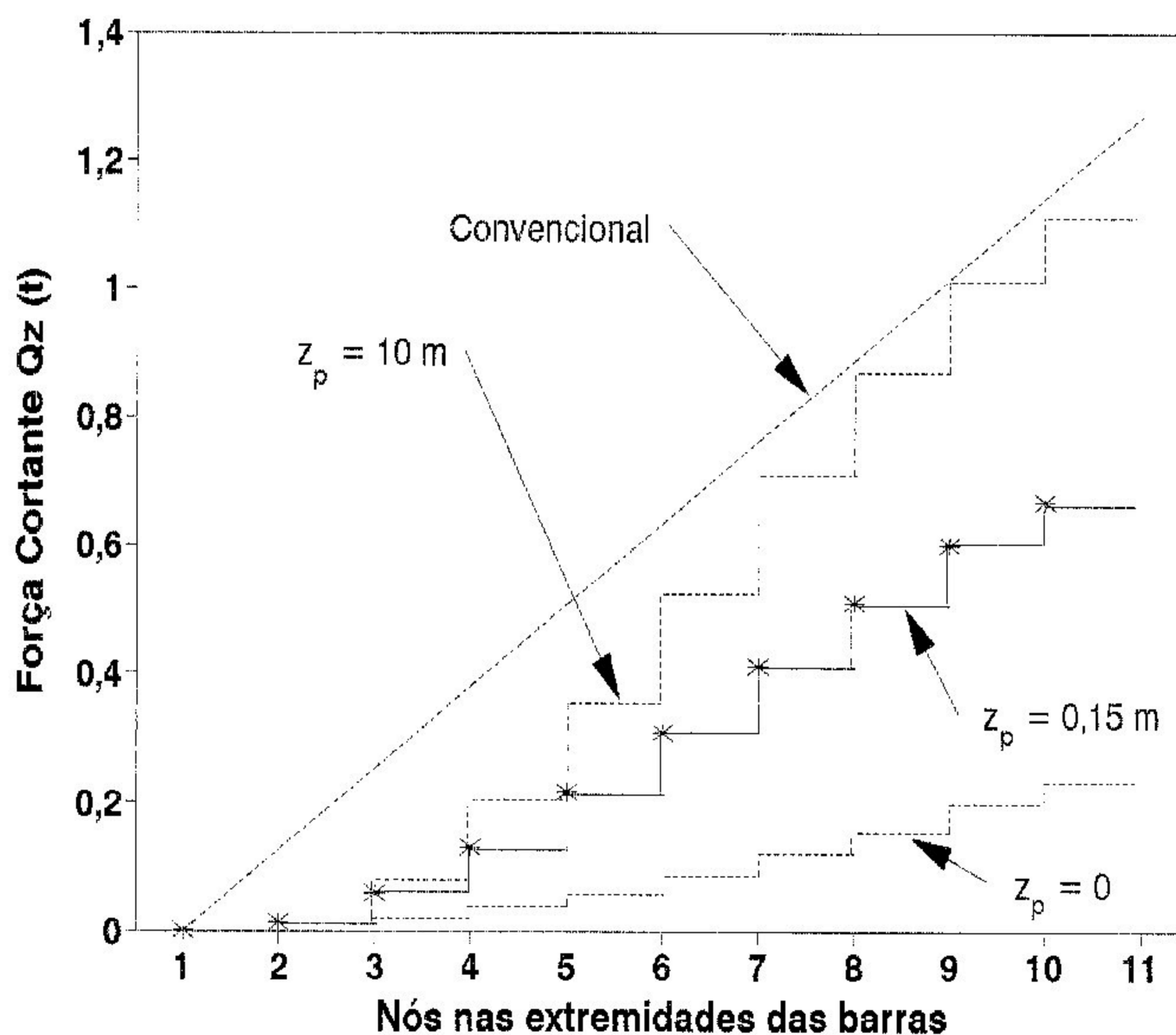


Fig. 6.4 Modelo convencional

convencional aquele esquematizado na figura 6.4 no qual:

- as lajes são calculadas pelo método dos Elementos Finitos (teoria da elasticidade) e consideradas engastadas em dois lados e simplesmente apoiadas nos outros dois,
- as reações das lajes sobre os apoios são uniformizadas,
- as vigas são bi-apoiadas e uniformemente carregadas com as reações das lajes.

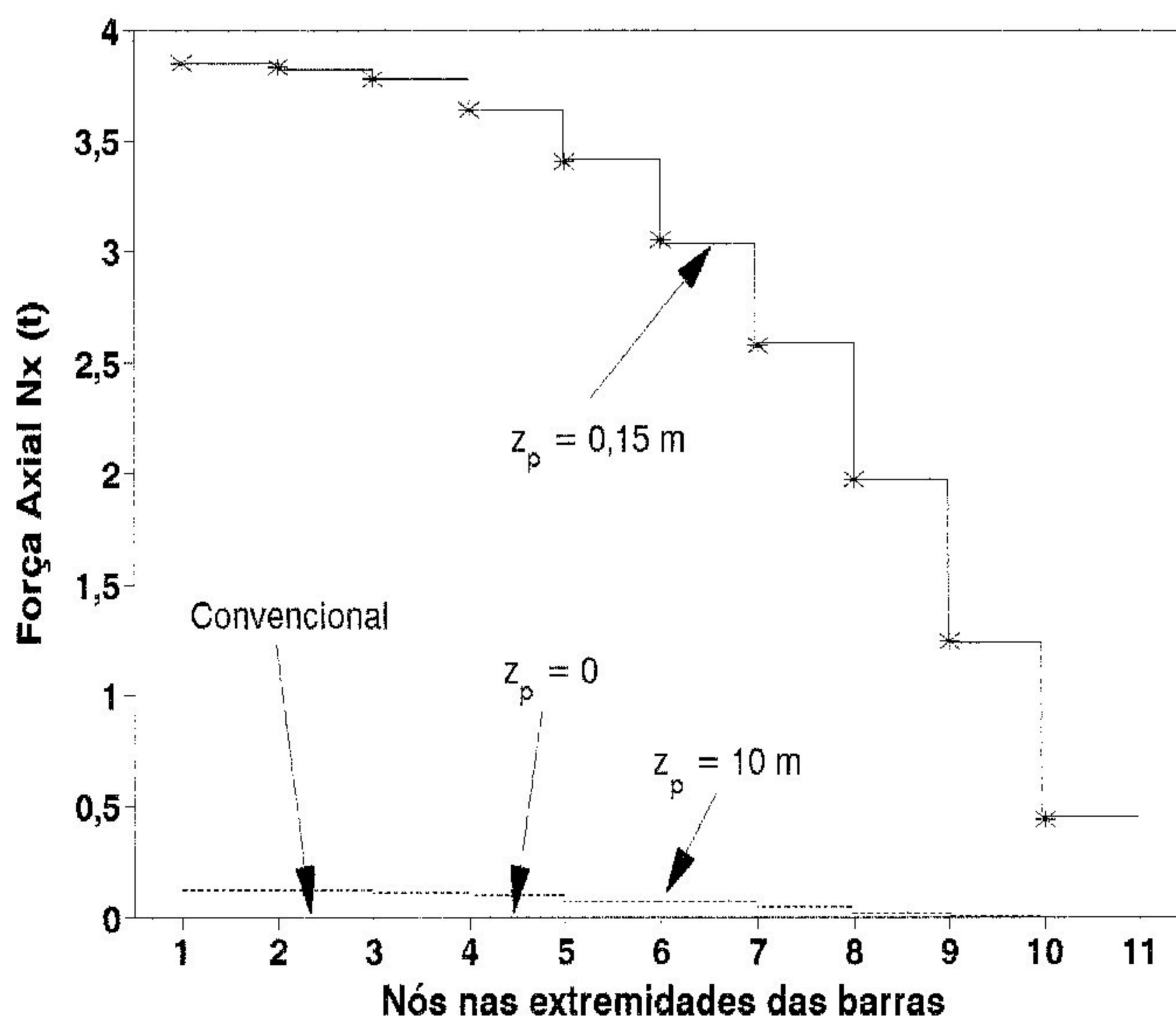
Nota-se que a força cortante nas barras aumenta com o aumento de z_p e que os diagramas de $z_p = 10$ m e do modelo convencional são razoavelmente próximos entre si.



Gráf. 6.6 - Diagrama da Força Cortante Q_z nas vigas

6.4.2 DIAGRAMAS COMPARATIVOS DA FORÇA AXIAL N_x NAS VIGAS

Observa-se na coluna 4 da tabela 6.6 a variação da força axial N_x nas barras EB.101 a EB.110. Estes valores estão representados no gráfico 6.7 no diagrama de $z_p = 0,15$ m. Pode-se observar que os elementos de barra mais próximos ao centro da placa são os mais afetados pela força axial (de tração). Deve-se observar, ainda, que as forças axiais para $z_p = 0$ são nulas, hipótese esta, aliás, adotada no modelo convencional. Conseqüentemente, a inspeção do gráfico 6.7 evidencia uma nítida diferença entre os valores de N_x obtidos com $z_p = 0,15$ m e os do modelo convencional. As forças axiais no diagrama de $z_p = 10$ m são pequenas mas não chegam a anular-se pois são elas, com seu grande braço de alavanca ($z_p = 10$ m), as responsáveis pela elevada rigidez da placa.

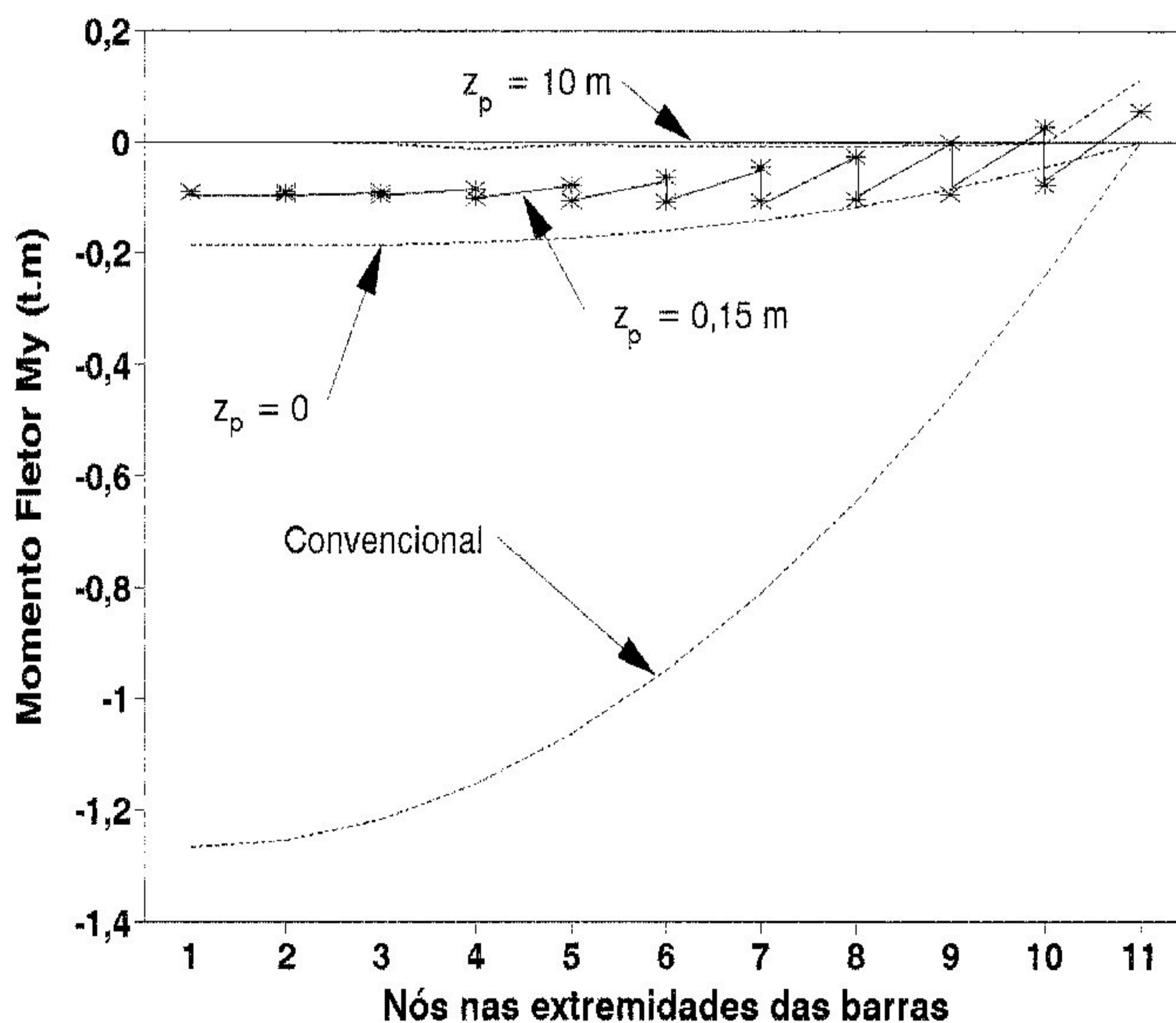


Gráf. 6.7 - Diagrama da Força Axial N_x nas vigas

6.4.3 DIAGRAMAS COMPARATIVOS DO MOMENTO FLETOR M_y NAS VIGAS

Observa-se na coluna 5 da tabela 6.6 a variação dos momentos fletores M_y nas barras EB.101 a EB.110. Estes valores estão representados no gráfico 6.8 no diagrama de $z_p = 0,15$ m. Foram também representados graficamente, para comparação, os diagramas de momento fletor para $z_p = 10$ m, para $z_p = 0$ (sem a conexão "off-set") e para o modelo convencional. É interessante observar que o momento fletor M_y diminui à medida em que z_p aumenta.

Observa-se também uma grande diferença entre os momentos M_y obtidos com o modelo convencional e os obtidos com o modelo com "off-set". Aliás, isto é de se esperar, uma vez que a nervura adotada (10 x 20 cm) é pouco rígida e seu momento fletor será sempre de pequeno valor. Por outro lado, no modelo convencional a viga absorve



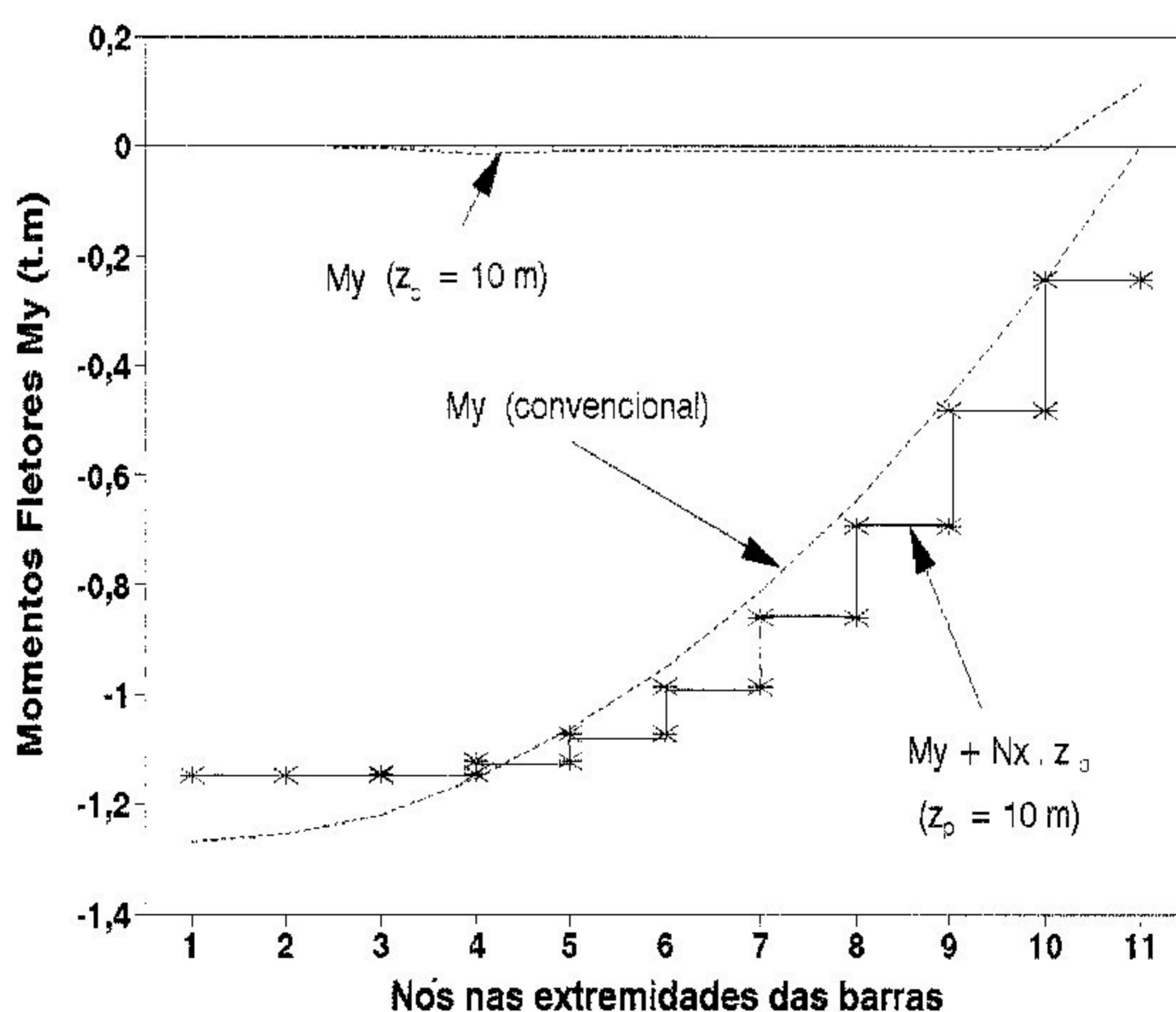
Gráf. 6.8 - Diagrama do Momento Fletor M_y nas vigas

grande parte das cargas aplicadas à placa ocasionando, desta forma, o aparecimento de momentos fletores elevados.

Nota-se a ocorrência de descontinuidades, nos nós das barras, no diagrama de momentos fletores para $z_p = 0,15$ m. Isto ocorre porque os "off-sets" aplicam momentos concentrados nos nós das barras. O valor das descontinuidades diminui com o aumento do número de elementos, como é natural nos processos numéricos.

Note-se, todavia, que as nervuras também contribuem para o equilíbrio global da estrutura com um momento adicional devido à excentricidade z_p da força axial em relação ao plano médio da placa, cujo valor é igual a $N_x \times z_p$.

Para ilustrar a contribuição das nervuras no equilíbrio global da estrutura é apresentado o gráfico 6.9 onde estão representados os valores de $M_y + N_x \times z_p$ para $z_p = 10$ m e M_y para o modelo convencional. Nota-se que estes diagramas são razoavelmente próximos entre si, o que comprova que a nervura com "off-set" $z_p = 10$ m tem comportamento semelhante ao de uma viga com grande rigidez.

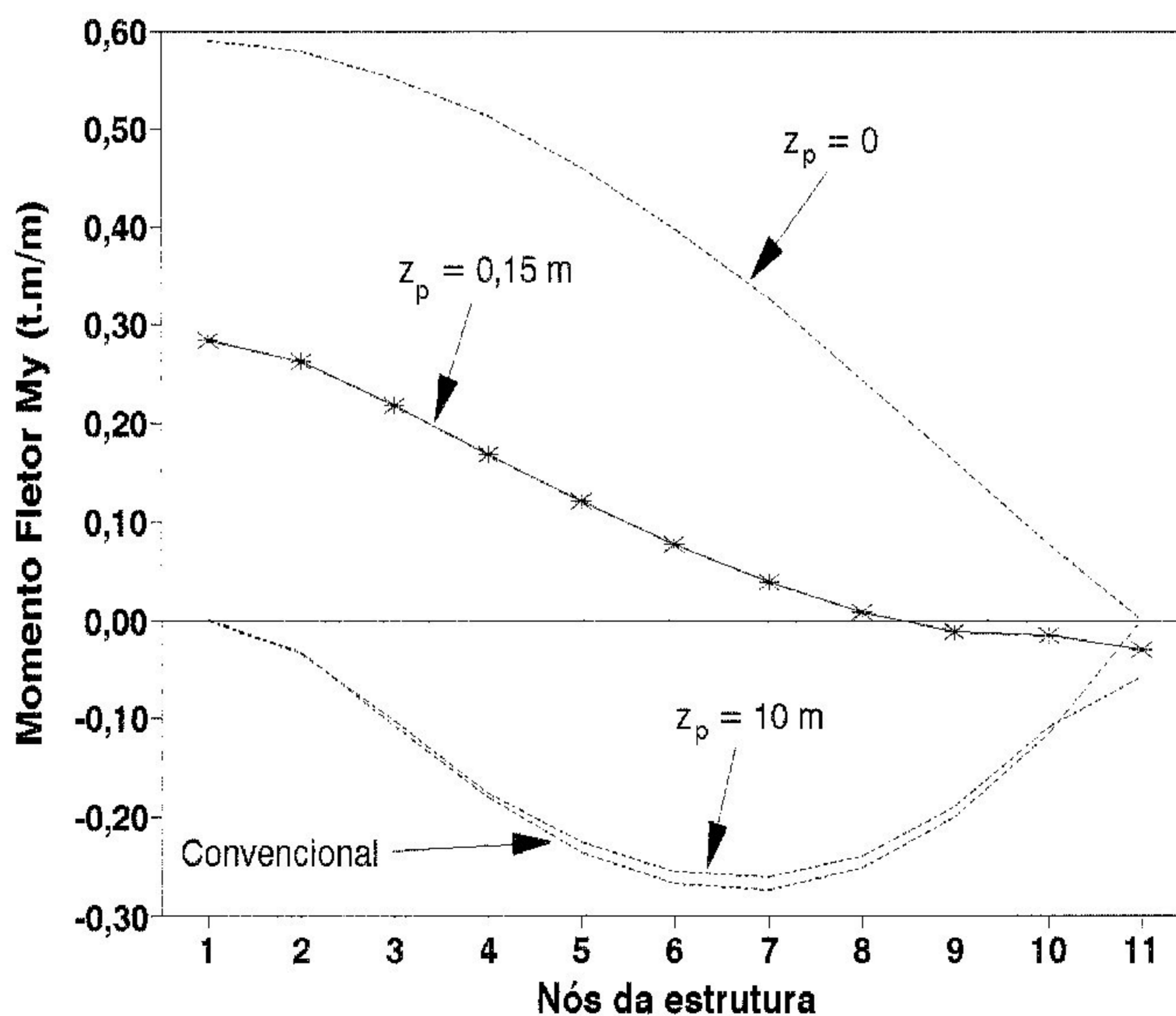


Gráf. 6.9 - Contribuição da excentricidade z_p da força axial N_x

6.4.5 DIAGRAMAS COMPARATIVOS DO MOMENTO FLETOR M_y NA PLACA

Observa-se na coluna 3 da tabela 6.7.a a variação do momento fletor M_y ao longo da placa. Os valores de M_y nos nós 1 a 11 da placa estão representados no gráfico 6.11 no diagrama de $z_p = 0,15$ m. Foram também representados graficamente, para comparação, os diagramas de M_y para $z_p = 0$ (sem a conexão "off-set"), para $z_p = 10$ m e para o modelo convencional. Nota-se que os valores de M_y tendem a passar de positivos para negativos com o aumento de z_p e que os diagramas de $z_p = 10$ m e do modelo convencional são razoavelmente próximos entre si.

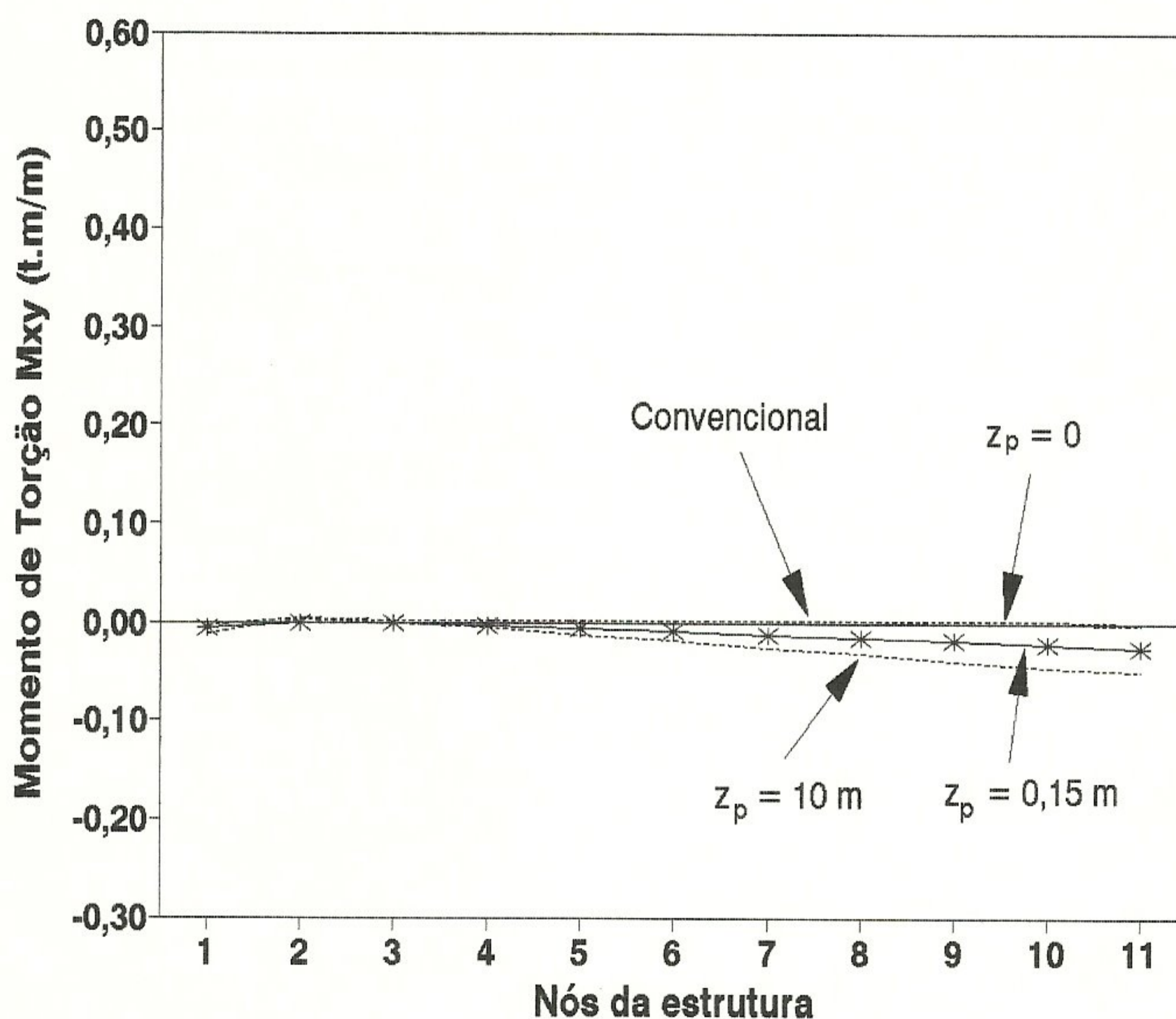
Nota-se, também, uma perturbação no valor de M_y (deve ser nulo) no nó 11 para $z_p = 0,15$ m e $z_p = 10$ m. Isto ocorre devido à presença do "off-set" neste nó. O valor desta perturbação diminui com o aumento do número de elementos, como é natural nos processos numéricos.



Gráf. 6.11 - Diagramas Comparativos do Momento Fletor M_y

6.4.6 DIAGRAMAS COMPARATIVOS DO MOMENTO DE TORÇÃO M_{xy} NA PLACA

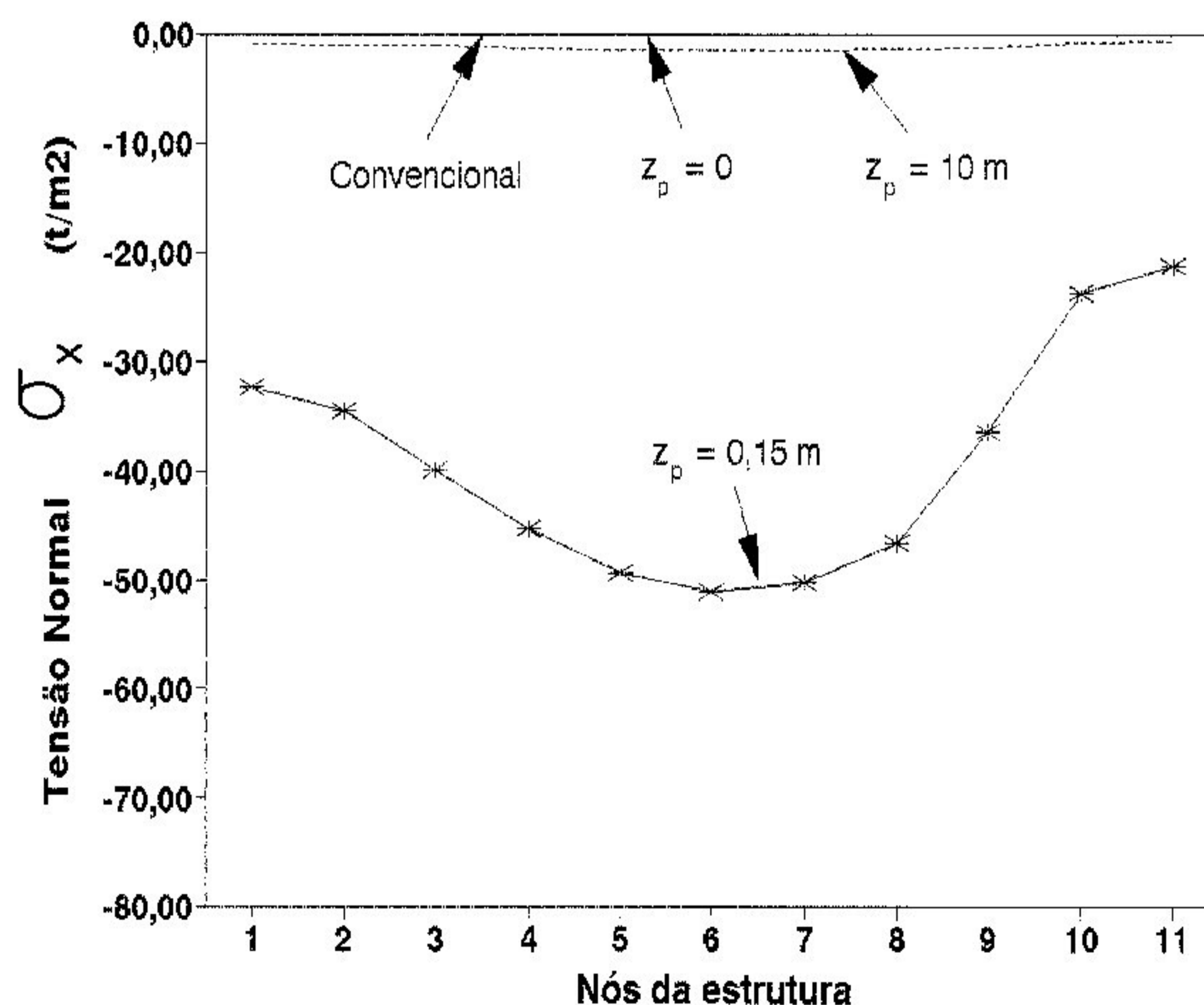
Observa-se na coluna 4 da tabela 6.7.a a variação do momento de torção M_{xy} ao longo da placa. Os valores de M_{xy} nos nós 1 a 11 da placa estão representados no gráfico 6.12 no diagrama de $z_p = 0,15$ m. Foram também representados graficamente, para comparação, os diagramas de M_{xy} para $z_p = 0$ (sem a conexão "off-set"), para $z_p = 10$ m e para o modelo convencional. Nota-se, como era de se esperar, que os valores de M_{xy} são muito próximos de zero.



Gráf. 6.12 - Diagramas Comparativos do Momento de Torção M_{xy}

6.4.7 DIAGRAMAS COMPARATIVOS DA TENSÃO NORMAL σ_x NA PLACA

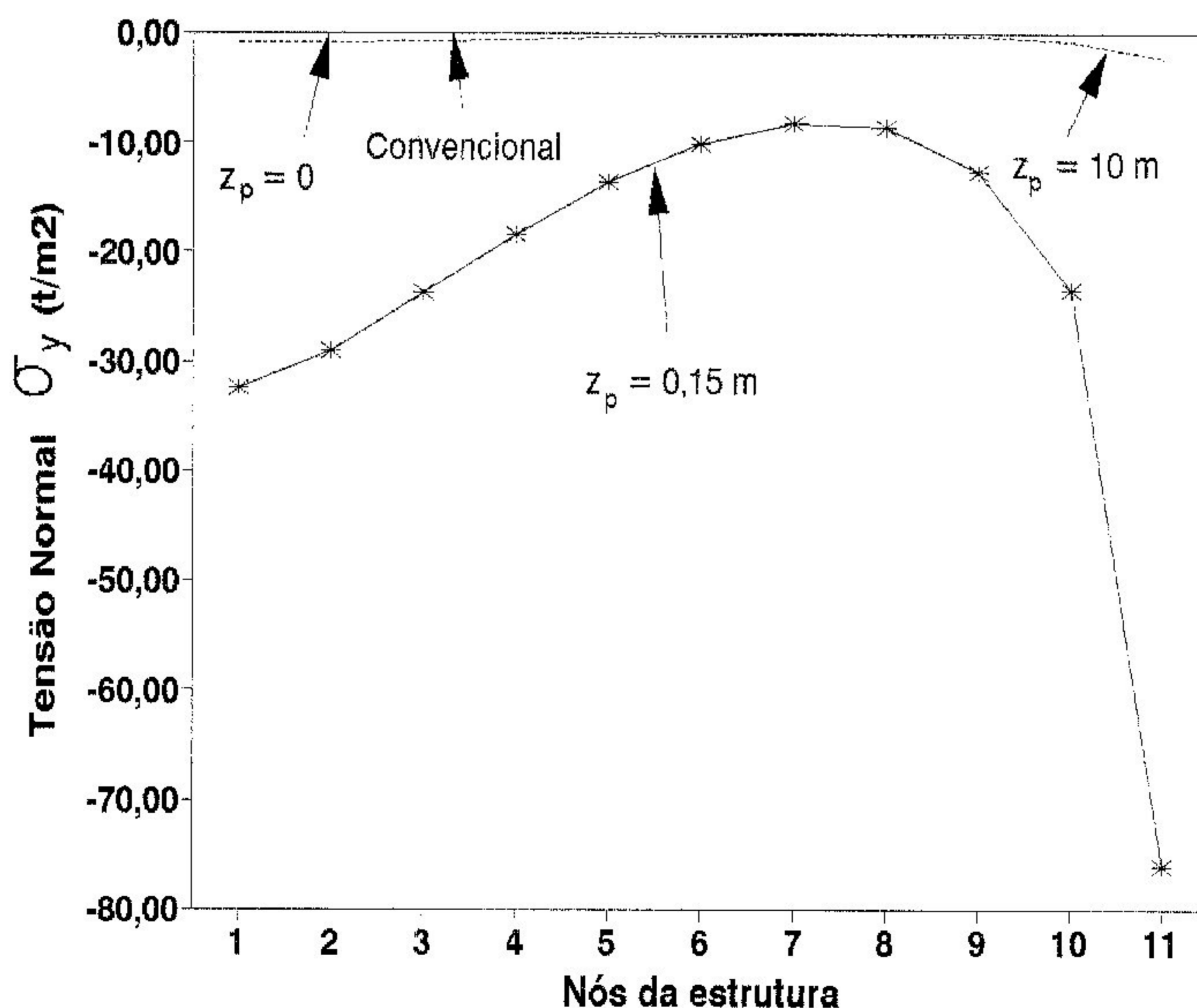
Observa-se na coluna 2 da tabela 6.7.b a variação da tensão normal σ_x (no plano médio) ao longo da placa. Os valores de σ_x nos nós 1 a 11 da placa estão representados no gráfico 6.13 no diagrama de $z_p = 0,15$ m. Foram também representados graficamente, para comparação, o diagrama de σ_x para $z_p = 0$ (sem a conexão "off-set"), para $z_p = 10$ m e para o modelo convencional. Deve-se observar, ainda, que as tensões normais σ_x para $z_p = 0$ e para o modelo convencional são nulas. As tensões normais σ_x no diagrama de $z_p = 10$ m são pequenas, devido à elevada rigidez da placa, mas não chegam a se anular. Nota-se que σ_x para $z_p = 0,15$ m tem seu valor máximo no nó 6 e que no nó 11, onde deve ser nula, ainda existe uma tensão residual. Isto ocorre porque o "off-set" aplica uma força concentrada no nó 11 da placa. O valor desta perturbação diminui com o aumento do número de elementos, como é natural nos processos numéricos.



Gráf. 6.13 - Diagramas Comparativos da Tensão Normal σ_x

6.4.8 DIAGRAMAS COMPARATIVOS DA TENSÃO NORMAL σ_y NA PLACA

Observa-se na coluna 3 da tabela 6.7.b a variação da tensão normal σ_y (no plano médio) ao longo da placa. Os valores de σ_y nos nós 1 a 11 da placa estão representados no gráfico 6.14 no diagrama de $z_p = 0,15$ m. Foram também representados graficamente, para comparação, o diagrama de σ_y para $z_p = 0$ (sem a conexão "off-set"), para $z_p = 10$ m e para o modelo convencional. Deve-se observar, ainda, que as tensões normais σ_y para $z_p = 0$ e para o modelo convencional são nulas. As tensões normais σ_y no diagrama de $z_p = 10$ m são muito pequenas, devido à elevada rigidez da placa, mas não chegam a se anular. Nota-se uma forte elevação no valor de σ_y no nó 11 da placa. Nota-se, também, que σ_y tem valores expressivos na região central da placa.

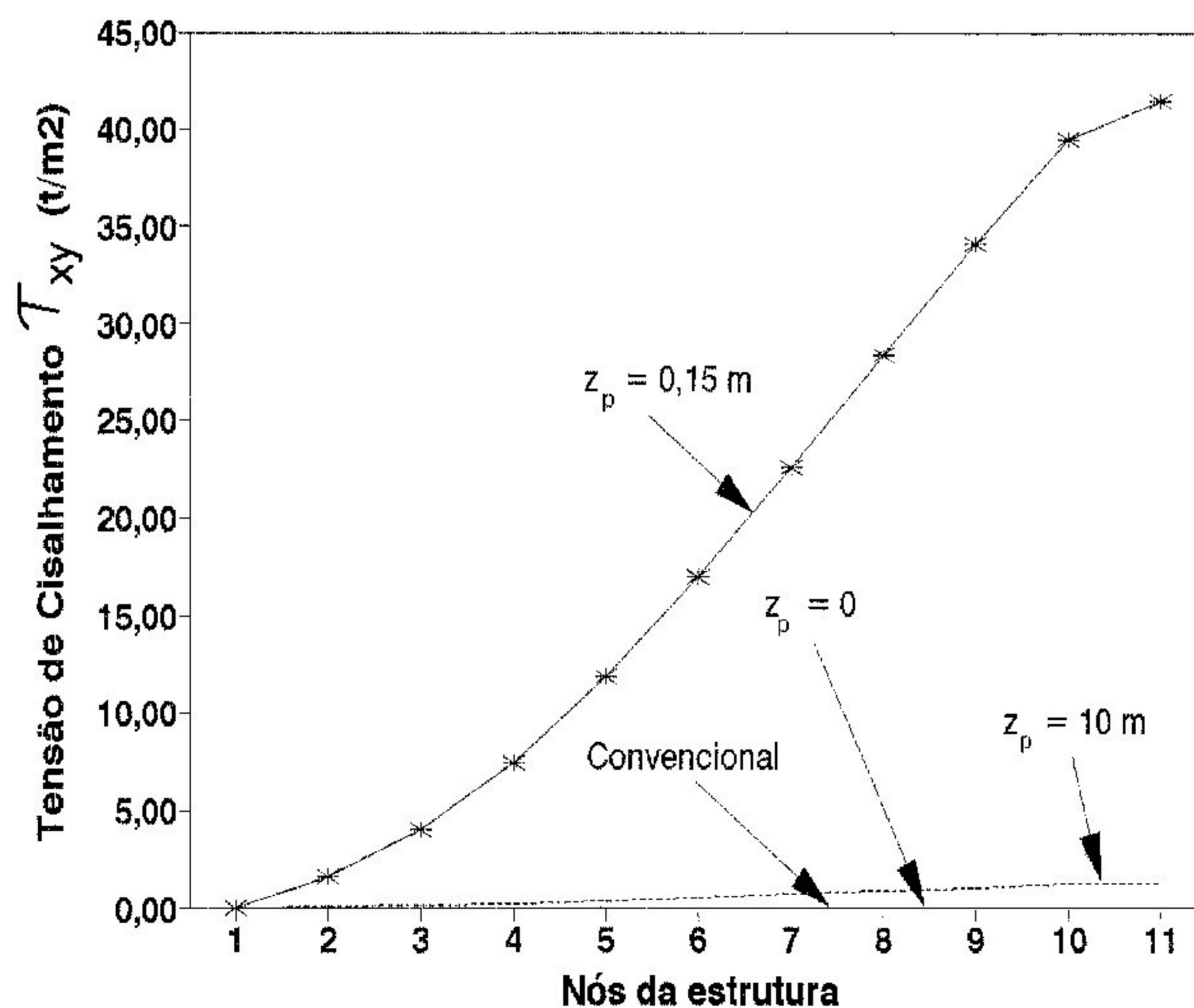


Gráf. 6.14 - Diagramas Comparativos da Tensão Normal σ_y

6.4.9 DIAGRAMAS COMPARATIVOS DA TENSÃO DE CISALHAMENTO

τ_{xy} NA PLACA

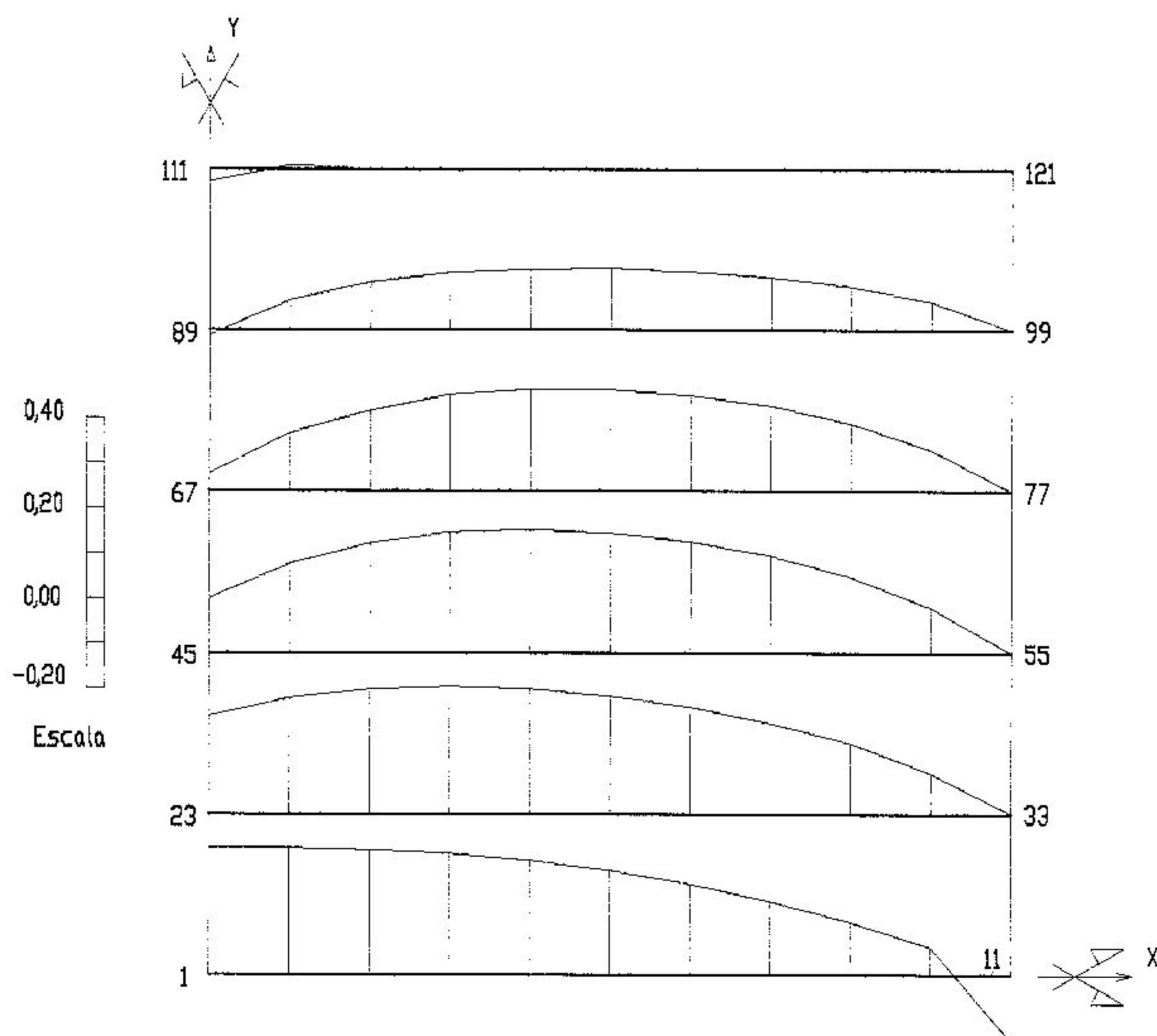
Observa-se na coluna 4 da tabela 6.7.b a variação da tensão de cisalhamento τ_{xy} (no plano médio) ao longo da placa. Os valores de τ_{xy} nos nós 1 a 11 da placa estão representados no gráfico 6.15 no diagrama de $z_p = 0,15$ m. Foram também representados graficamente, para comparação, o diagrama de τ_{xy} para $z_p = 0$ (sem a conexão "off-set"), para $z_p = 10$ m e para o modelo convencional. Deve-se observar, ainda, que as tensões de cisalhamento τ_{xy} para $z_p = 0$ e para o modelo convencional são nulas. As tensões de cisalhamento τ_{xy} no diagrama de $z_p = 10$ m são muito pequenas, devido à elevada rigidez da placa, mas não chegam a se anular. Observa-se também que as tensões de cisalhamento são nulas no centro da placa e aumentam à medida em que se aproxima dos apoios, tal como ocorre em vigas bi-apoiadas.



Gráf. 6.15 - Diagramas Comparativos da Tensão de Cisalhamento τ_{xy}

6.4.10 DIAGRAMAS DO MOMENTO FLETOR M_x NA PLACA

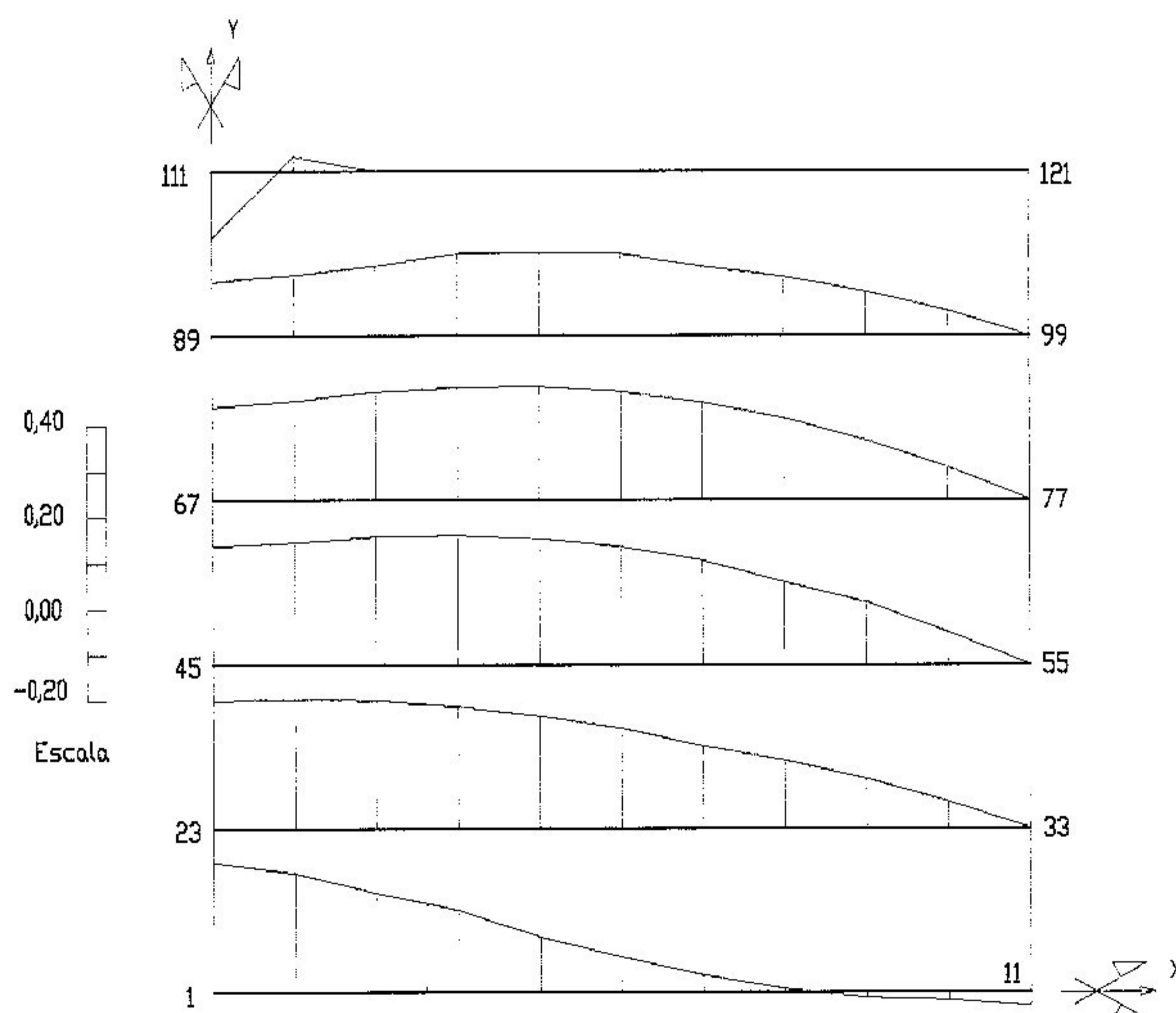
Observa-se na coluna 2 da tabela 6.7.a a variação do momento fletor M_x ao longo da placa. Os valores de M_x nos nós da estrutura estão representados no gráfico 6.16 para $z_p = 0,15$ m. Foram traçados os diagramas de M_x para os nós 1 a 11, 23 a 33, 45 a 55, 67 a 77, 89 a 99 e 111 a 121. No eixo das abscissas estão representados os nós e no eixo das ordenadas estão representados os valores dos momentos fletores M_x . Nota-se, também, que M_x tem valores mais expressivos no centro da placa e que vão diminuindo à medida em que se afasta desta região. Observa-se uma redução de M_x na região da nervura na direção y à medida em que se aproxima do nó 111. Nos apoios os valores de M_x são nulos, como era de se esperar. Observam-se, todavia, perturbações nos valores de M_x nos nós 11 e 111 devidas à existência da conexão "off-set", porém sua propagação é rapidamente amortecida.



Gráf. 6.16 - Diagramas do Momento Fletor M_x na placa

6.4.11 DIAGRAMAS DO MOMENTO FLETOR M_y NA PLACA

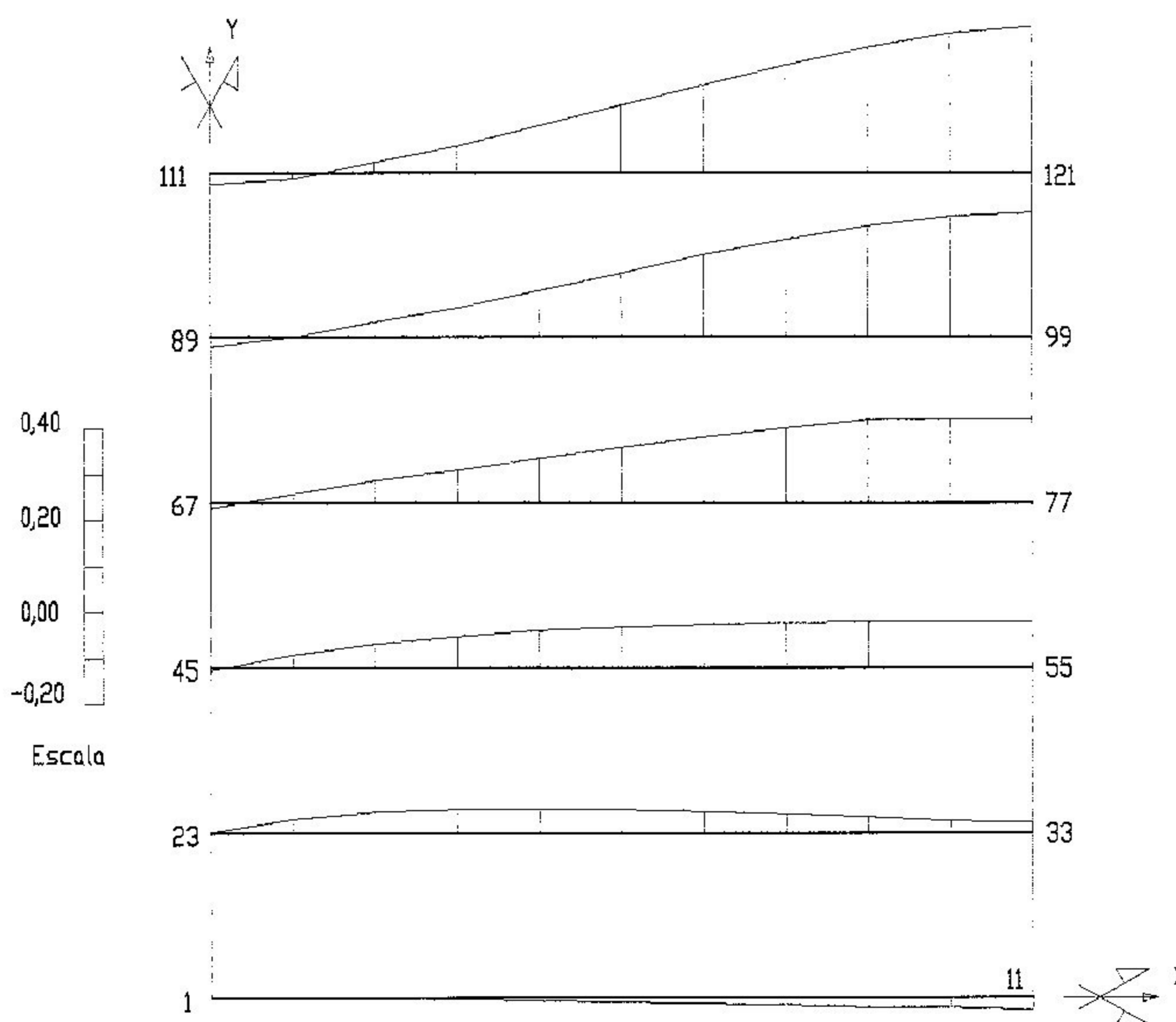
Observa-se na coluna 3 da tabela 6.7.a a variação do momento fletor M_y ao longo da placa. Os valores de M_y nos nós da estrutura estão representados no gráfico 6.17 para $z_p = 0,15$ m. Foram traçados os diagramas de M_y para os nós 1 a 11, 23 a 33, 45 a 55, 67 a 77, 89 a 99 e 111 a 121. No eixo das abscissas estão representados os nós e no eixo das ordenadas estão representados os valores dos momentos fletores M_y . Nota-se, também, que M_y tem valores mais expressivos no centro da placa e que vão diminuindo à medida em que se afasta desta região. Observa-se uma redução de M_y na região das nervuras sendo bastante significativa a que ocorre na nervura na direção x. Nos apoios os valores de M_y são nulos, como era de se esperar. Observam-se, todavia, perturbações nos nós 11 e 111 devidas à existência da conexão "off-set", porém sua propagação é rapidamente amortecida.



Gráf. 6.17 - Diagramas do Momento Fletor M_y na placa

6.4.12 DIAGRAMAS DO MOMENTO DE TORÇÃO M_{xy} NA PLACA

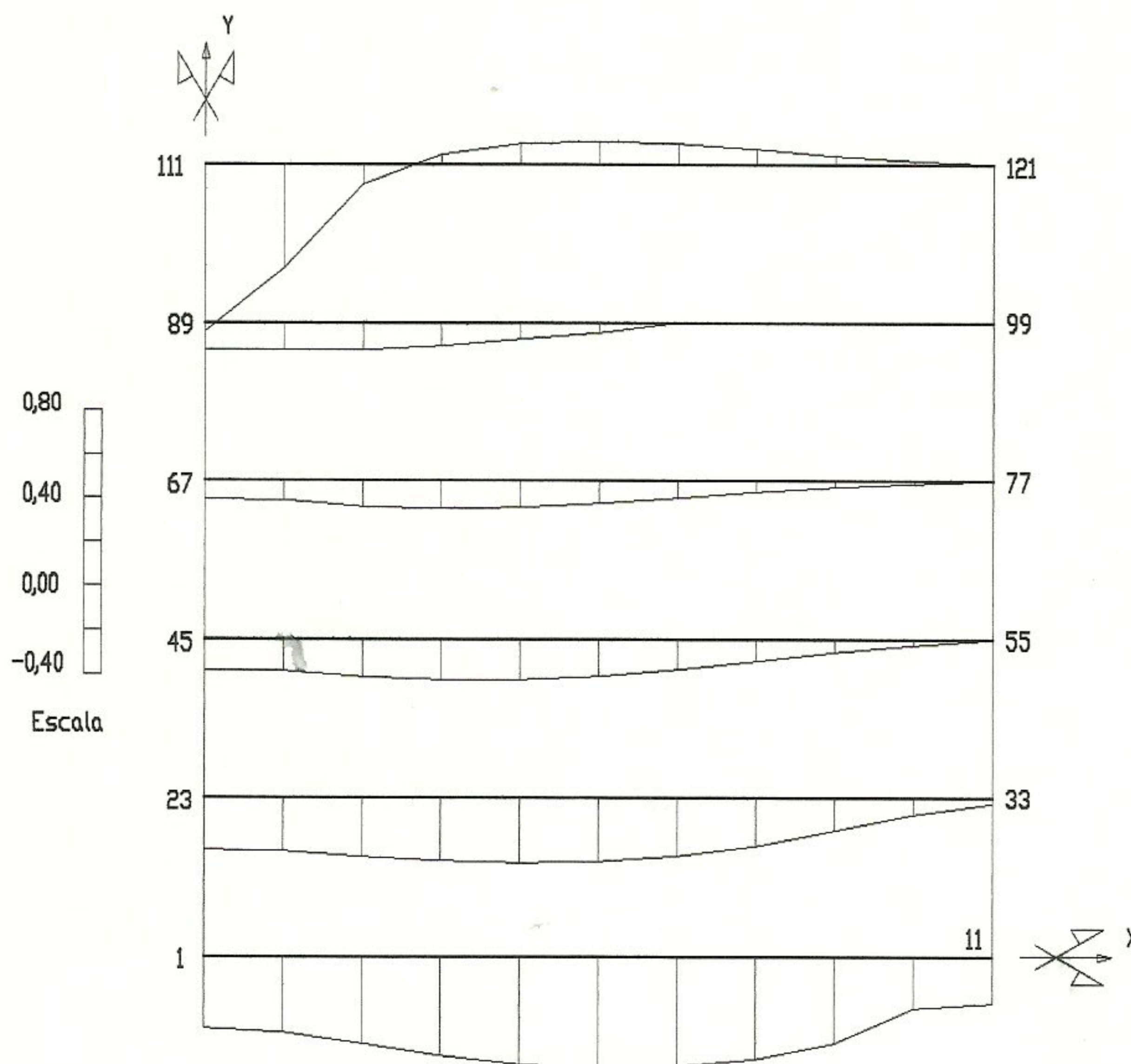
Observa-se na coluna 4 da tabela 6.7.a a variação do momento de torção M_{xy} ao longo da placa. Os valores de M_{xy} nos nós da estrutura estão representados no gráfico 6.18 para $z_p = 0,15$ m. Foram traçados os diagramas de M_{xy} para os nós 1 a 11, 23 a 33, 45 a 55, 67 a 77, 89 a 99 e 111 a 121. No eixo das abscissas estão representados os nós e no eixo das ordenadas estão representados os valores dos momentos de torção M_{xy} . Nota-se, também, que M_{xy} tem valores mais expressivos no vértice da placa e que vão diminuindo à medida em que se afasta desta região. Nos eixos de simetria os valores de M_{xy} são praticamente nulos, como era de se esperar.



Gráf. 6.18 - Diagrama do Momento de Torção M_{xy} na placa

6.4.13 DIAGRAMAS DA TENSÃO NORMAL σ_x NA PLACA

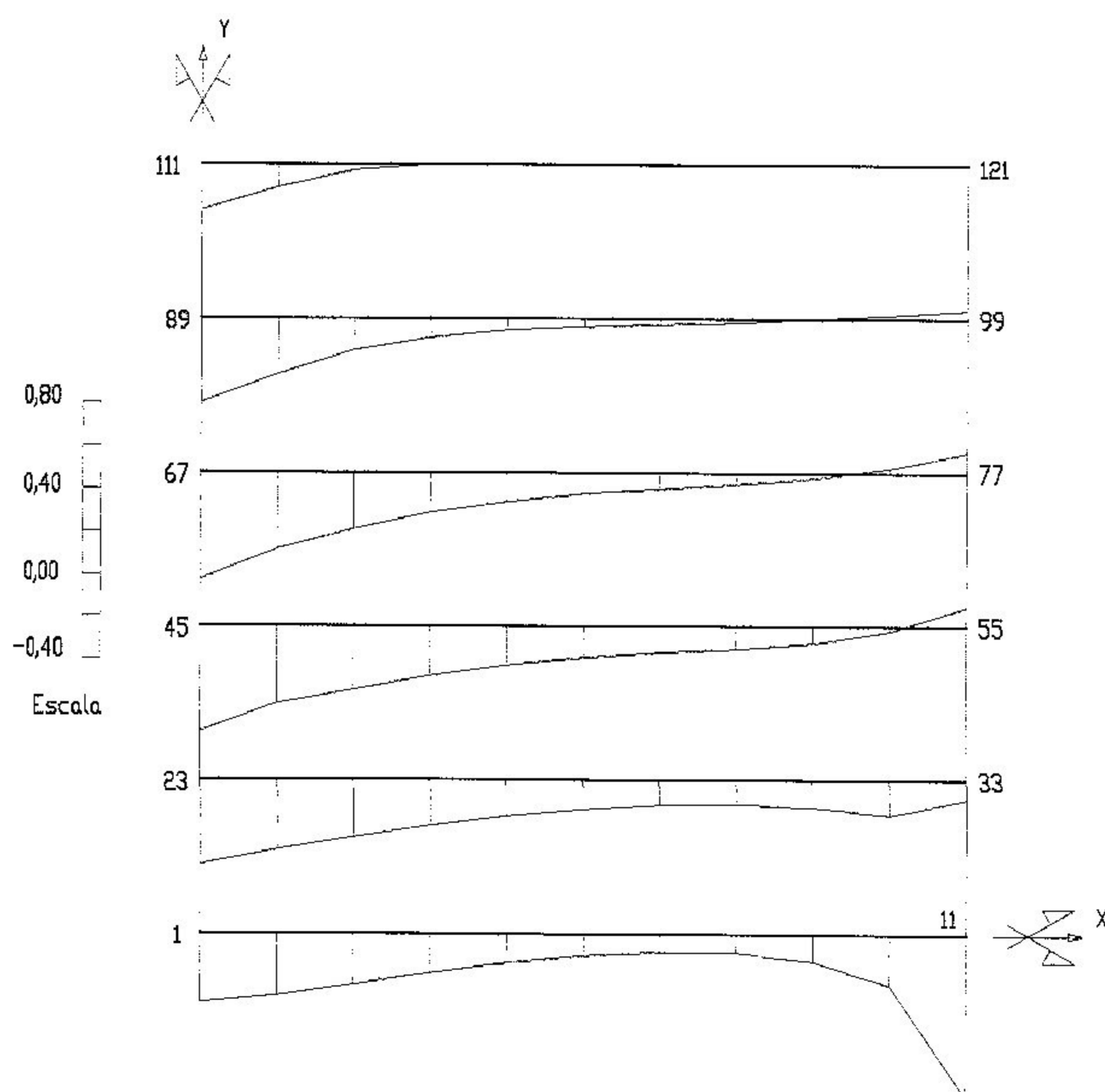
Observa-se na coluna 2 da tabela 6.7.b a variação da tensão normal σ_x (no plano médio) ao longo da placa. Os valores de σ_x nos nós da estrutura estão representados no gráfico 6.19 para $z_p = 0,15$ m. Foram traçados os diagramas de σ_x para os nós 1 a 11, 23 a 33, 45 a 55, 67 a 77, 89 a 99 e 111 a 121. No eixo das abscissas estão representados os nós e no eixo das ordenadas estão representados os valores das tensões normais σ_x . Nota-se uma perturbação na tensão normal σ_x no nó 11, que deve ser nula, devida à uma força concentrada aplicada pela conexão "off-set". Observa-se, ainda, uma forte elevação no valor de σ_x no nó 111 da placa, cuja propagação na direção y é rapidamente amortecida. Constata-se, também, que as tensões normais σ_x são máximas na região da nervura na direção x, diminuindo à medida em que se afasta da mesma.



Gráf. 6.19 - Diagrama da Tensão Normal σ_x na placa

6.4.14 DIAGRAMAS DA TENSÃO NORMAL σ_y NA PLACA

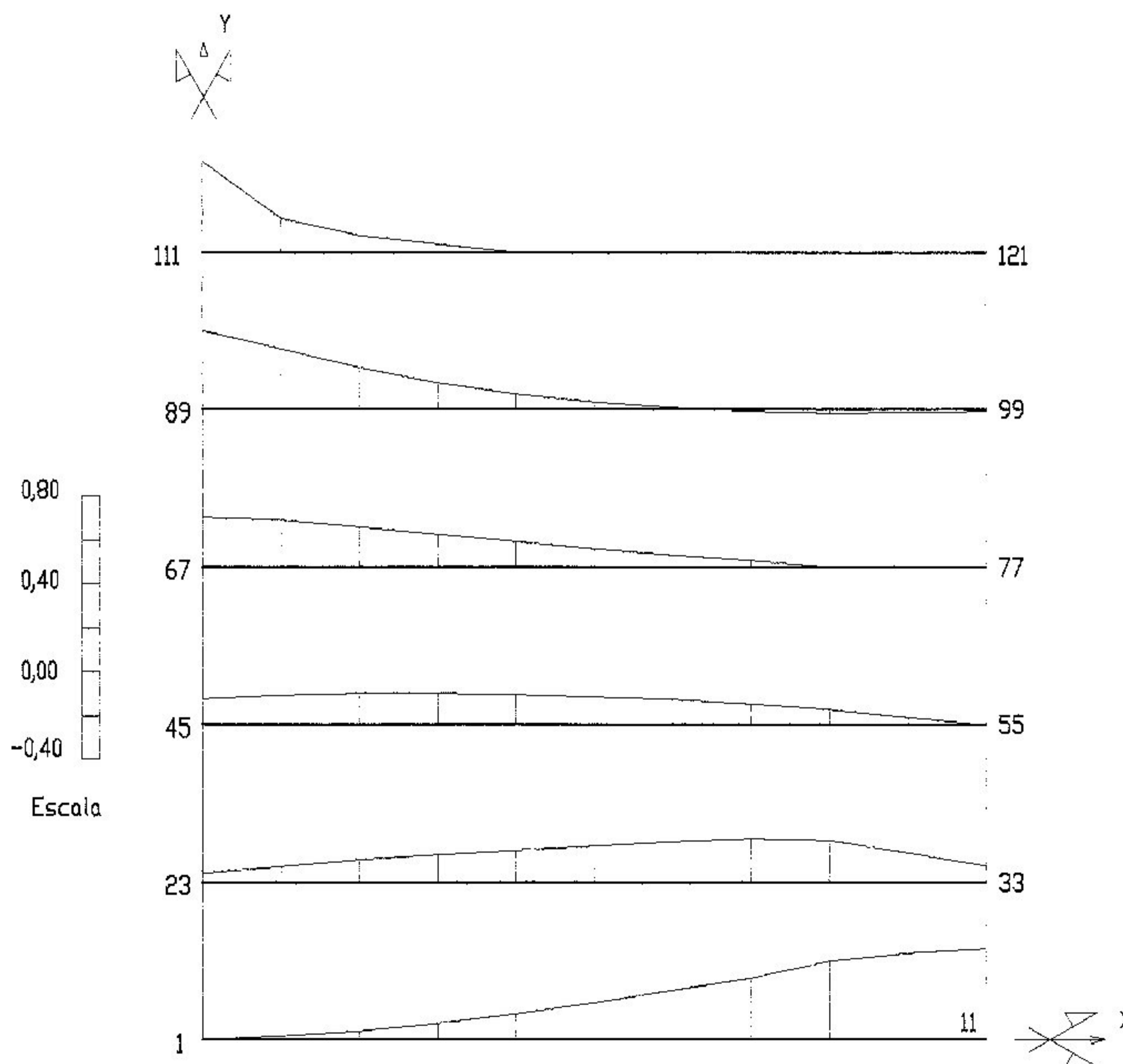
Observa-se na coluna 3 da tabela 6.7.b a variação da tensão normal σ_y (no plano médio) ao longo da placa. Os valores de σ_y nos nós da estrutura estão representados no gráfico 6.20 para $z_p = 0,15$ m. Foram traçados os diagramas de σ_y para os nós 1 a 11, 23 a 33, 45 a 55, 67 a 77, 89 a 99 e 111 a 121. No eixo das abscissas estão representados os nós e no eixo das ordenadas estão representados os valores das tensões normais σ_y . Nota-se uma perturbação na tensão normal σ_y no nó 111, que deve ser nula, devida à uma força concentrada aplicada pela conexão "off-set". Observa-se, ainda, uma forte elevação no valor de σ_y no nó 11 da placa, cuja propagação na direção x é rapidamente amortecida. Constata-se, também, que as tensões normais σ_y são máximas na região da nervura na direção y, diminuindo à medida em que se afasta da mesma.



Gráf. 6.20 - Diagrama da Tensão Normal σ_y na placa

6.4.15 DIAGRAMAS DA TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{xy} NA PLACA

Observa-se na coluna 4 da tabela 6.7.b a variação da tensão de cisalhamento τ_{xy} (no plano médio) ao longo da placa. Os valores de τ_{xy} nos nós da estrutura estão representados no gráfico 6.21 para $z_p = 0,15$ m. Foram traçados os diagramas de τ_{xy} para os nós 1 a 11, 23 a 33, 45 a 55, 67 a 77, 89 a 99 e 111 a 121. No eixo das abscissas estão representados os nós e no eixo das ordenadas estão representados os valores das tensões de cisalhamento τ_{xy} . Sabe-se que τ_{xy} deve ser nula ao longo dos apoios, mas há perturbações nas proximidades dos nós 11 e 111 devidas à presença de fortes forças verticais no apoio das nervuras. Deve-se notar, ainda, que ao longo da nervura na direção x a distribuição de τ_{xy} é análoga à que ocorre em uma viga bi-apoiada.



Gráf. 6.21 - Diagrama da Tensão de Cisalhamento τ_{xy} na placa

6.5 DESLOCAMENTOS NO PLANO MEDIO DA PLACA

Na figura 6.5 está representada, em linha tracejada, a malha 10x10 adotada no modelo calculado. Também está representada, em linha contínua, a malha 10x10 deformada processada com o modelo com "off-set" $z_p = 0,15$ m. Foi utilizado um fator de ampliação igual a 5000 para melhor visualização dos deslocamentos. Nota-se uma forte influência das nervuras nos deslocamentos, uma vez que sua presença dá origem a tensões normais de compressão e cisalhamento ao longo de seu comprimento. Pode-se dizer que a nervura trabalha à semelhança de uma "viga armada" na qual a placa funciona como mesa de compressão.

Pode-se observar, também, que os elementos mais deformados são os de número 10 e 91, o que pode ser notado visualmente. Isto explica as elevadas tensões σ_y e

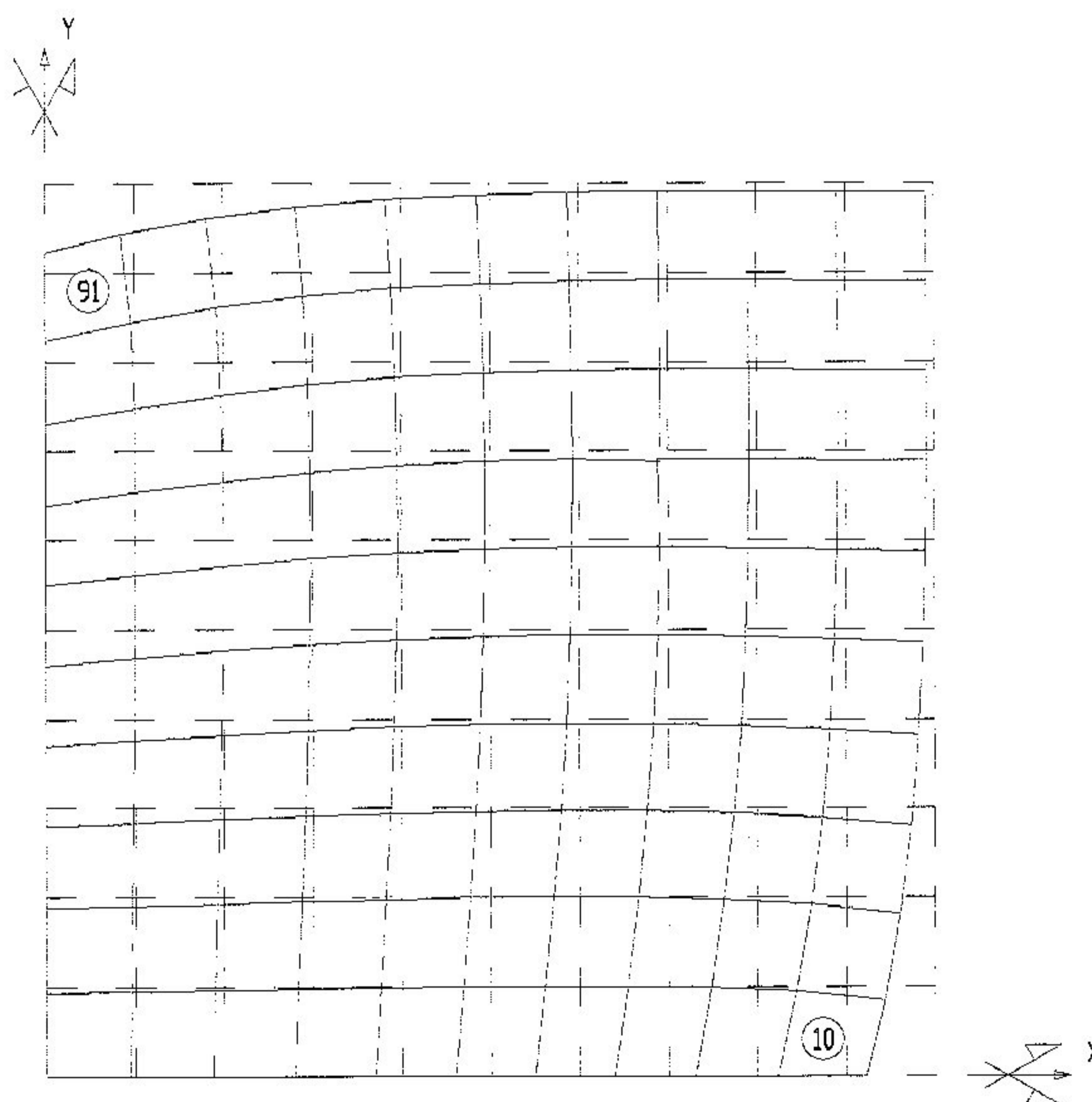


Fig. 6.5 Deslocamentos no plano médio da placa para $z_p = 0,15$ m

τ_{xy} no elemento 10 e σ_x e τ_{xy} no elemento 91, conforme anteriormente comentado.

É interessante observar que tanto no modelo convencional quanto no modelo com $z_p = 0$ a malha 10x10 permanece, evidentemente, indeformada. A figura 6.5 por si só ilustra a significativa diferença de comportamento desses modelos em relação ao modelo com "off-set" $z_p = 0,15$ m.

7. CONCLUSÕES

Os principais objetivos deste trabalho foram examinar a influência da excentricidade das nervuras de enrijecimento em uma placa carregada transversalmente e desenvolver um sistema computacional especializado capaz de analisar estruturas onde esta excentricidade em relação ao plano médio da placa seja relevante. Acredita-se que ambos os objetivos foram alcançados.

Na escolha do exemplo de aplicação considerou-se importante pesquisar a influência da variação do valor do "off-set" do elemento de barra na rigidez e na distribuição dos esforços da estrutura, bem como comparar os resultados obtidos com o "modelo com conexão off-set" aos obtidos com o "modelo convencional".

Das análises realizadas concluímos que:

- a) em placas com nervuras de enrijecimento excêntricas em relação a seu plano médio analisadas desprezando-se esta excentricidade pode-se obter resultados pouco confiáveis;
- b) a consideração da variação da excentricidade da nervura de enrijecimento mostra que a rigidez e distribuição dos esforços na estrutura são fortemente afetados em determinada faixa do valor da excentricidade; neste caso os resultados obtidos com o "modelo com conexão off-set" divergem consideravelmente dos obtidos com o "modelo convencional";
- c) a inversão da posição relativa das nervuras em relação ao plano médio da placa, que corresponde à inversão dos valores do "off-set", não afeta o valor dos resultados, exceto o da força axial nas nervuras e os das tensões de membrana na placa, cujos valores são os mesmos porém com o sinal invertido;
- d) a excentricidade da nervura provoca um efeito semelhante ao de uma "viga armada" onde a nervura é tracionada e a

placa funciona como mesa de compressão ou, inversamente, a nervura é comprimida e a placa tracionada; evidentemente, no primeiro caso é possível falar-se em um "modelo de viga com seção T";

e) nas placas com nervuras excêntricas em relação ao seu plano médio é, em geral, conveniente dimensionar-se tanto as nervuras quanto a placa à flexo-tração ou flexo-compressão.

Para possíveis trabalhos futuros, pode-se sugerir o seguinte:

- a) desenvolver um pré-processador que interaja com o usuário, para atender aos adeptos desta interação;
- b) desenvolver uma rotina mais eficiente de resolução de sistema de equações em blocos;
- c) desenvolver um pós-processador que permita a combinação de carregamentos, a visualização da estrutura indeformada e deformada, bem como o traçado de diagramas de esforços;
- d) pesquisar em detalhe o reflexo da excentricidade das nervuras em relação ao plano médio da placa no seu dimensionamento bem como no da placa.

8 . REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) MAIA, E. V.; Projeto e Implementação de um Sistema Amigável para Análise de Pórticos Espaciais, dissertação de mestrado, Belo Horizonte, EEUFMG, 1992, p. 22.
- (2) Id., Ibid. p. 3.
- (3) Id., Ibid. p. 21.
- (4) Id., Ibid. p. 24.
- (5) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS; Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado, NBR 6118, Rio de Janeiro, ABNT, 1982, p. 9.
- (6) Id., Ibid. p. 41.
- (7) ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS; Projeto e Execução de Pontes em Concreto Armado, NBR 7187, Rio de Janeiro, ABNT, 1982, p. 60.
- (8) Id., Ibid. p. 36.
- (9) Id., Ibid. p. 63.
- (10) SUSSEKIND, J. C.; Curso de Concreto Armado, Volume 1, São Paulo, Editora Globo, 1989, p. 134.
- (11) PFEIL, W.; Pontes em Concreto Armado, Volume 1, Rio de Janeiro, LTC Editora, 1985, p. 182.
- (12) Id., Ibid. p. 185.
- (13) WEAVER, Jr., W.; GERE, J. M.; Matrix Analysis of Framed Structures, New York, D. Van Nostrand Company, 1990, p. 452.
- (14) Id., Ibid. p. 455.
- (15) Id., Ibid. p. 458.
- (16) Id., Ibid. p. 424.
- (17) ROCKEY, K. C.; EVANS, H. R.; GRIFFITHS, D. W.; NETHERCOT, D. A.; The Finite Element Method, Great Britain, Granada Publishing Limited, 1975, p. 77.
- (18) Id., Ibid. p. 69.
- (19) Id., Ibid. p. 98.
- (20) Id., Ibid. p. 110.

- (21) Id., Ibid. p. 116.
- (22) VASCONCELLOS FILHO, A.; Método dos Elementos Finitos: Automatização - Aplicações a problemas de Placas e de Elasticidade Plana, tese de doutorado, Rio de Janeiro COPPE / UFRJ, 1970, p. 47.
- (23) Id., Ibid. p. 57.
- (24) Id., Ibid. p. 58.
- (25) Id., Ibid. p. 72.
- (26) Id., Ibid. p. 73.
- (27) LEKHNITSKII, S. G.; Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Moscou, Mir Publischers, 1981, p. 63.
- (28) WEAVER, J. W.; JOHNSTON, P. R.; Finite Elements for Structural Analysis, New Jersey, Prentice Hall Inc., 1984, p. 78.
- (29) CONTROL DATA CORPORATION; Stardyne Theoretical Manual, Minneapolis, Data Services Publication, 1978.
- (30) SORIANO, H. J. ; Sistemas de Equações Algébricas Lineares em Problemas Estruturais, apostila, Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1981, p. 3-21.

9 . B I B L I O G R A F I A

- WEAVER, Jr., W.; GERE, J. M.; Matrix Analysis of Framed Structures, New York, D. Van Nostrand Company, 1990, 546 p.
- VASCONCELLOS FILHO, A.; Teoria das Estruturas, Belo Horizonte, Imprensa Universitária da UFMG, 1986, 457 p.
- VASCONCELLOS FILHO, A.; Método dos Elementos Finitos: Automação - Aplicações a Problemas de Placas e de Elasticidade Plana, tese de doutorado, Rio de Janeiro, COPPE / UFRJ, 1970, 244 p.
- VASCONCELLOS FILHO, A.; Complementos de Análise Matricial das Estruturas, apostila, Belo Horizonte, 1989, 175 p.
- ROCKEY, K. C.; EVANS, H. R.; GRIFFITHS, D. W.; NETHERCOT, D. A.; The Finite Element Method, Great Britain, Granada Publishing Limited, 1975, 239 p.
- BATHE, K. J.; Finite Element Procedures in Engineering Analysis, New Jersey, Prentice Hall Inc., 1982, 735 p.
- MEYERS, V. J.; Matrix Analysis of Structures, New York, Harper & Row Publishers, 1983, 497 p.
- SORIANO, H. L.; Sistemas de Equações Algébricas Lineares em Problemas Estruturais, apostila, Lisboa, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, 1981, 262 p.
- TEPEDINO, J. M.; Flexão Normal Simples, apostila, Belo Horizonte, Edições COTEC, 1982, 39 p.
- TEPEDINO, J. M.; Flexão Normal Composta, apostila, Belo Horizonte, Edições COTEC, 1982, 60 p.
- PFEIL, W.; Pontes em Concreto Armado, Volume 1, Rio de Janeiro, LTC Editora, 1985, 225 p.
- PFEIL, W.; Pontes em Concreto Armado, Volume 2, Rio de Janeiro, LTC Editora, 1985, 265 p.
- SUSSEKIND, J. C.; Curso de Concreto Armado, Volume 1, São Paulo, Editora Globo, 1989, 376 p.

- SUSSEKIND, J. C.; Curso de Concreto Armado, Volume 2, São Paulo, Editora Globo, 1991, 280 p.
- RUSCH; Tabelas para Cálculo de Pontes, 110 p.
- MICROSOFT; Learning and Using Microsoft QuickBasic, Redmond, Microsoft Corporation, 1987, 386 p.
- KNECHT, K.; QuickBasic Avançado, Rio de Janeiro, Editora Ciência Moderna, 1989, 364 p.
- INMAN, D.; ALBRECHT, B.; Using QuickBasic, Califórnia, Osborne McGraw-Hill, 1989, 436 p.
- JAMISA, K.; Microsoft QuickBasic - Guia de Referência Básica, São Paulo, McGraw-Hill, 1990, 196 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS; Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado, NBR 6118, Rio de Janeiro, ABNT, 1982, 76 p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS; Projeto e Execução de Pontes em Concreto Armado e Protendido, NBR 7187, Rio de Janeiro, ABNT, 1986, 95 p.
- LEKHNITSKII, S. G.; Theory of Elasticity of an Anisotropic Body, Moscou, Mir Publishers, 1981, 430 p.
- MAIA, E. V.; Projeto e Implementação de um Sistema Amigável para Análise de Pórticos Espaciais, dissertação de mestrado, Belo Horizonte, EEUFMG, 1992, 232 p.
- CONTROL DATA CORPORATION; Stardyne Users Information Manual, Minneapolis, Data Services Publication, 1978, 520 p.
- CONTROL DATA CORPORATION; Stardyne Theoretical Manual, Minneapolis, Data Services Publication, 1978, 470 p.
- ALGOR INTERACTIVE SYSTEMS; Algor FEA Reference Manual, Pittsburgh, Algor Interactive Systems Inc., 1989, 476 p.
- WEAVER, Jr., W.; JOHNSTON, P. R.; Finite Elements for Structural Analysis, New Jersey, Prentice Hall Inc., 1984, 403 p.

A P Ê N D I C E A

INSTRUÇÕES PARA USO DO PROGRAMA

" P A V E D I F "

- GERAÇÃO DOS ARQUIVOS DE DADOS E DO RELATÓRIO DE SAÍDA

O arquivo de dados (Nome.Ext) deve ser gerado com qualquer editor de texto, em ASCII, com nome e extensão sugestivos. Caso a extensão não seja fornecida o programa adotará a extensão (.INP) automaticamente. O arquivo do relatório de saída (Nome.Ext) também será em ASCII e seu nome, se não for indicado, será igual ao nome do arquivo de dados, com a extensão (.OUT).

Para leitura e gravação, pode-se selecionar o disco e o subdiretório de preferência, para ambos os arquivos.

A geração do arquivo de dados deve ser feita com os comandos apresentados a seguir.

- PARAMETROS DA ESTRUTURA

Registros:

TL\$

NLS ISO NEL NJ NREJ IMPE IRIG

Definição dos campos:

TL\$ - Assunto ou título do trabalho

NLS - Número de carregamentos

ISO - $\left\{ \begin{array}{l} 0 - \text{Estruturas isótropas} \\ 1 - \text{Estruturas ortótropas} \end{array} \right.$

NEL - Número de elementos

NJ - Número de nós

NREJ - Número de nós com restrição e/ou apoios elásticos
 IMPE - $\left\{ \begin{array}{l} 0 - \text{Imprime somente tensões médias nos nós} \\ 1 - \text{Imprime também tensões em elementos escolhidos} \end{array} \right.$
 IRIG - $\left\{ \begin{array}{l} 0 - \text{Não existe constante de mola} \\ 1 - \text{Existe uma constante de mola} \\ 2 - \text{Existem várias constantes de mola} \end{array} \right.$

- COORDENADAS NODAIS

"NO" - Comando para entrada individual

Registros:

```
JCJ)  XCJ)  YCJ)
:
:
0      -      Encerra a tarefa
```

Definição dos campos:

JCJ) - Número do nó
 XCJ) - Coordenada x
 YCJ) - Coordenada y

"NOGL" - Comando para geração em linha

Registros:

```
JCJ)  XI  YI  JA  XA  YA  IA
:
:
0      -      Encerra a tarefa
```

Definição dos campos:

JCJ) - Número do nó inicial
 XI - Coordenada x do nó inicial
 YI - Coordenada y do nó inicial
 JA - Número do nó final na direção A
 XA - Coordenada x do nó final
 YA - Coordenada y do nó final
 IA - Incremento na numeração dos nós

"NOGB" - Comando para geração bi-dimensional

Registros:

```

JCJ)  XI  YI  JA  XA  YA  IA  JB  XB  YB  IB
:
0      -   Encerra a tarefa

```

Definição dos campos:

JCJ) - Número do nó inicial
 XI, YI - Coordenadas x e y do nó inicial
 JA, JB - Números dos nós finais nas direções A e B
 XA, YA - Coordenadas x e y do nó final na direção A
 XB, YB - Coordenadas x e y do nó final na direção B
 IA, IB - Incrementos na numeração dos nós nas direções A e B

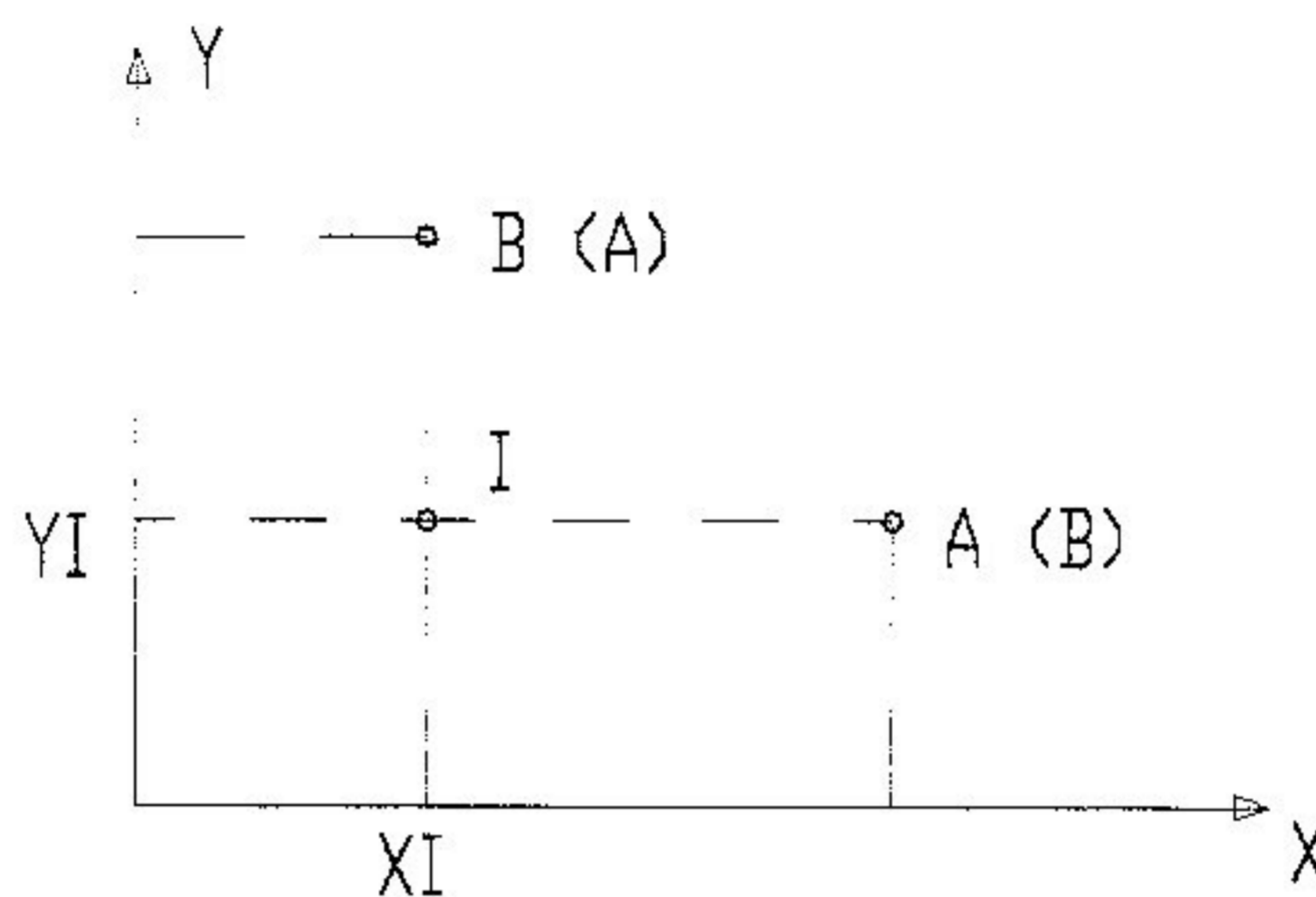


Fig. A.1 Coordenadas nodais

"NOCP" - Comando para cópia de nós gerados

Registros:

```

N  I  J  IA  X  Y  IB
:
0      -   Encerra a tarefa

```

Definição dos campos:

N - Número de vezes a copiar
 I, J - Nó inicial e final da sequência de nós
 IA - Incremento na numeração dos nós da sequência
 X, Y - Incremento nas coordenadas x e y dos nós
 IB - Incremento na numeração dos nós para novas sequências

- GERAÇÃO DOS ELEMENTOS DE PLACA

"PL" - Comando para entrada individual

Registros:

```

  J  J1CJ  J2CJ  JK CJ  JLCJ  ESPCJ  MATCJ
  :
  0      -   Encerra a tarefa

```

Definição dos campos:

J - Número do elemento
 J1CJ ... JLCJ - Nós do elemento
 ESPCJ - Espessura do elemento
 MATCJ - Número do material

"PLGL" - Comando para geração em linha

Registros:

```

  J  I1  J1  K1  L1  JA  XA  IA  ESPCJ  MATCJ
  :
  0      -   Encerra a tarefa

```

Definição dos campos:

J - Número do elemento inicial
 I1, J1, K1, L1 - Nós do elemento
 JA - Número do elemento final na direção A
 XA - Incremento na numeração dos nós
 IA - Incremento na numeração dos elementos
 ESPCJ - Espessura dos elementos
 MATCJ - Número do material

"PLGB" - Comando para geração bi-dimensional

Registros:

```

  J  I1  J1  K1  L1  JA  XA  IA  JB  XB  IB  ESPCJ  MATCJ
  :
  0      -   Encerra a tarefa

```

Definição dos campos:

J - Número do elemento inicial

I1, J1, K1, L1 - Nós do elemento

JA, JB - Números dos elementos finais nas direções A e B

XA, XB - Incrementos na numeração dos nós nas direções A e B

IA, IB - Incrementos na numeração dos elementos nas direções A e B

ESPCJ) - Espessura dos elementos

MATCJ) - Número do material

Obs: Caso L1 ou JLCJ) sejam iguais a 0 (zero) serão gerados elementos triangulares.

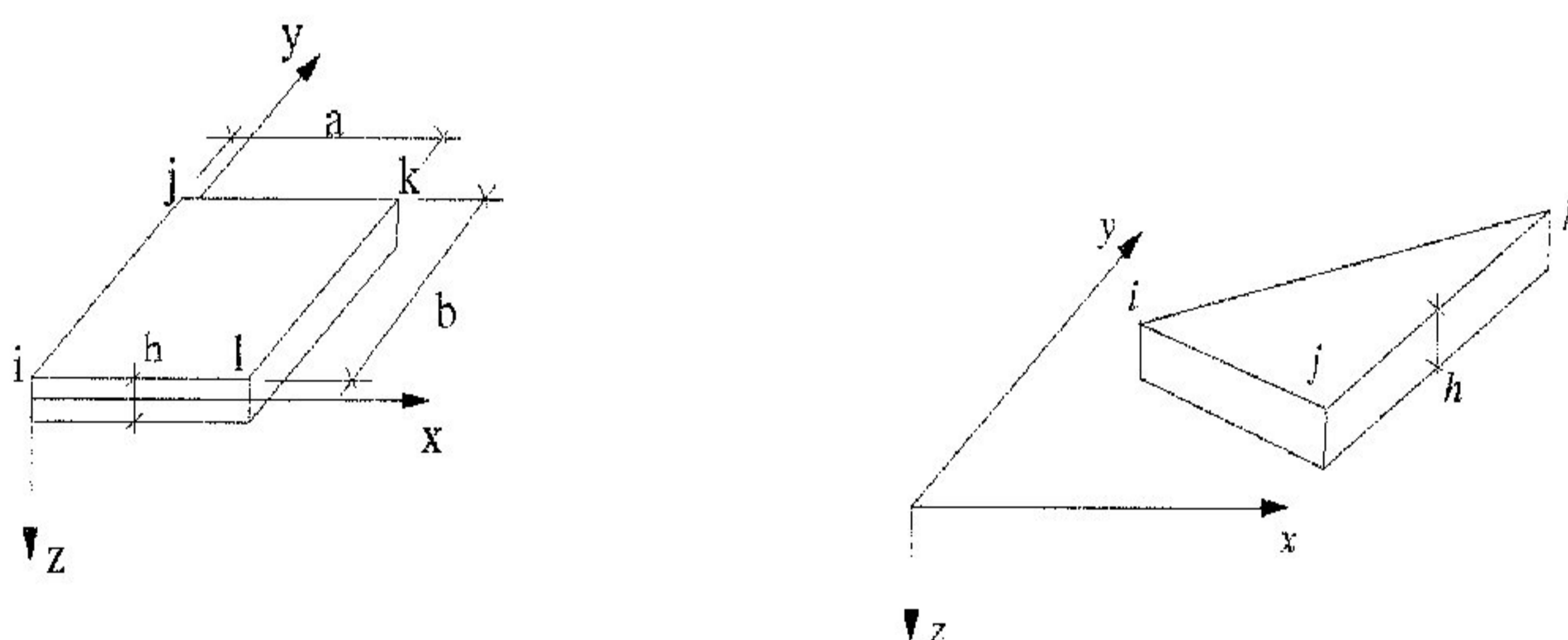


Fig. A.2 Elementos de Placa

- GERACAO DOS ELEMENTOS DE BARRA

"EL" - Comando para entrada individual

Registros:

J J1CJ) JJCJ) LPPCJ) MATCJ) OFSCJ)

⋮

0 - Encerra a tarefa

Definição dos campos:

J - Número do elemento

J1CJ), JJCJ) - Nós do elemento

LPPCJ) - Número da seção do elemento

MATCJD - Número do material
 OFSCJD - "Off-set" da barra na direção z

"ELGL" - Comando para geração em linha

Registros:

```

  J  I1  J1  JA  XA  IA  LPPCJD  MATCJD  OFSCJD
  ⋮
  0      -  Encerra a tarefa
  
```

Definição dos campos:

J - Número do elemento
 I1, J1 - Nós do elemento
 JA - Número do elemento final na direção A
 XA - Incremento na numeração dos nós na direção A
 IA - Incremento na numeração dos elementos na direção A
 LPPCJD - Número da seção do elemento
 MATCJD - Número do material
 OFSCJD - "Off-set" da barra na direção z

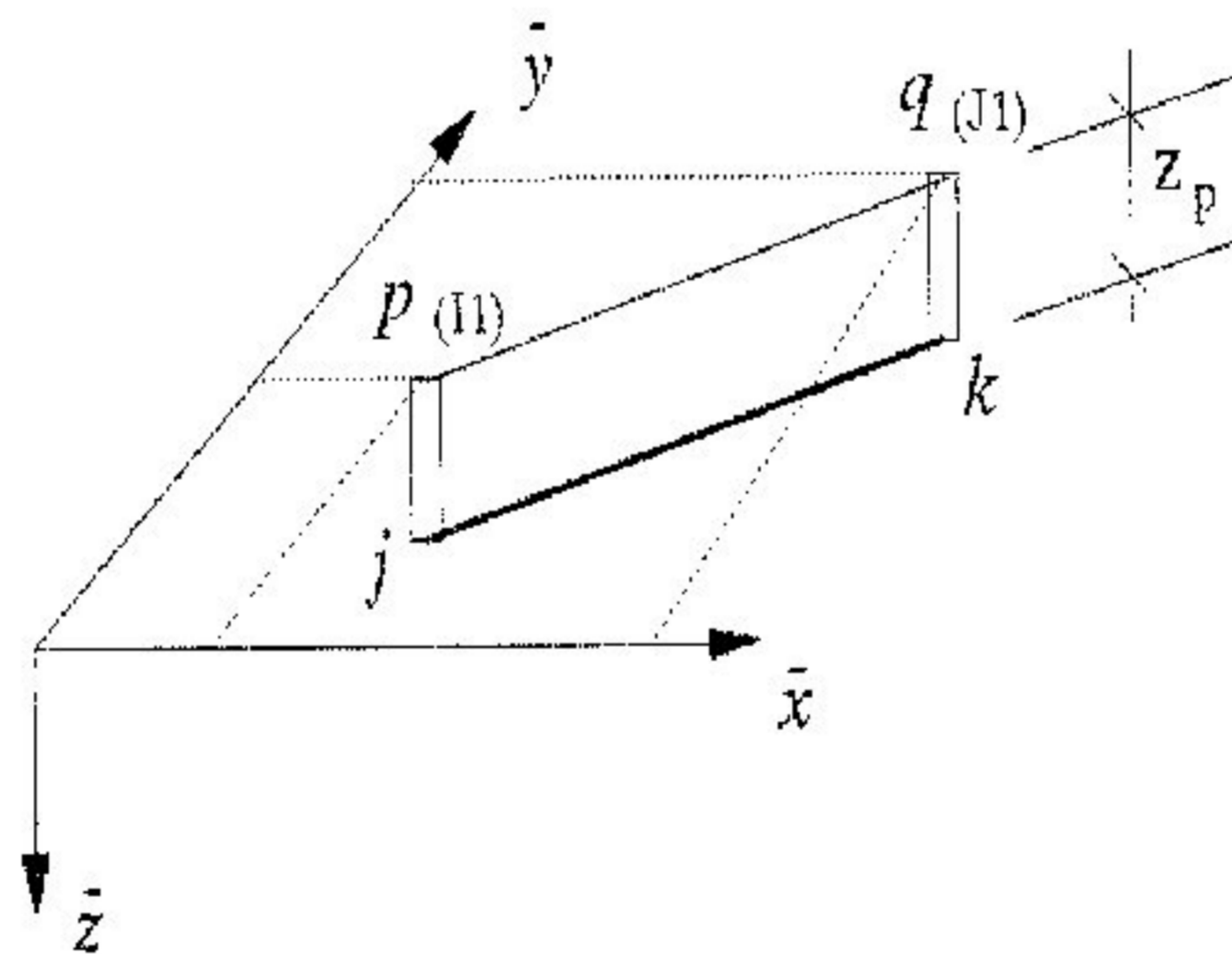


Fig A.3 Elemento de Barra

"ELCP" - Comando para cópia de elementos

Registros:

```

  N  I  J  IA  IB  XB
  ⋮
  0      -  Encerra a tarefa
  
```

Definição dos campos:

- N - Número de vezes a copiar
- I, J - Elemento inicial e final da sequência
- IA - Incremento na numeração dos elementos da sequência
- IB - Incremento na numeração dos elementos para as novas sequências
- XB - Incremento na numeração dos nós para as novas sequências

- TABELA DE SEÇÕES (Número de Barras \neq 0)

Opção 1 - Propriedades calculadas

"LPP" - Comando para entrada individual

Registros:

```

J  BCJ)  HCJ)
:
:
0      -  Encerra a tarefa

```

Definição dos campos:

- J - Número da seção
- BCJ) - Largura da seção
- HCJ) - Altura da seção

Opção 2 - Propriedades fornecidas

"LPP" - Comando para entrada individual

Obs: Se BCJ)=0 então a linha de edição deverá ser:

Registros:

```

J  0  ACJ)  IX(J)  IY(J)  IZ(J)

```

Definição dos campos:

- J - Número da seção
- 0 - Código para fornecimento das propriedades
- ACJ) - Área da seção transversal
- IX(J) - Constante de Torção
- IY(J), IZ(J) - Momentos de inércia em relação ao eixos y e z

Obs: Pode-se combinar as duas formas em uma única tabela.

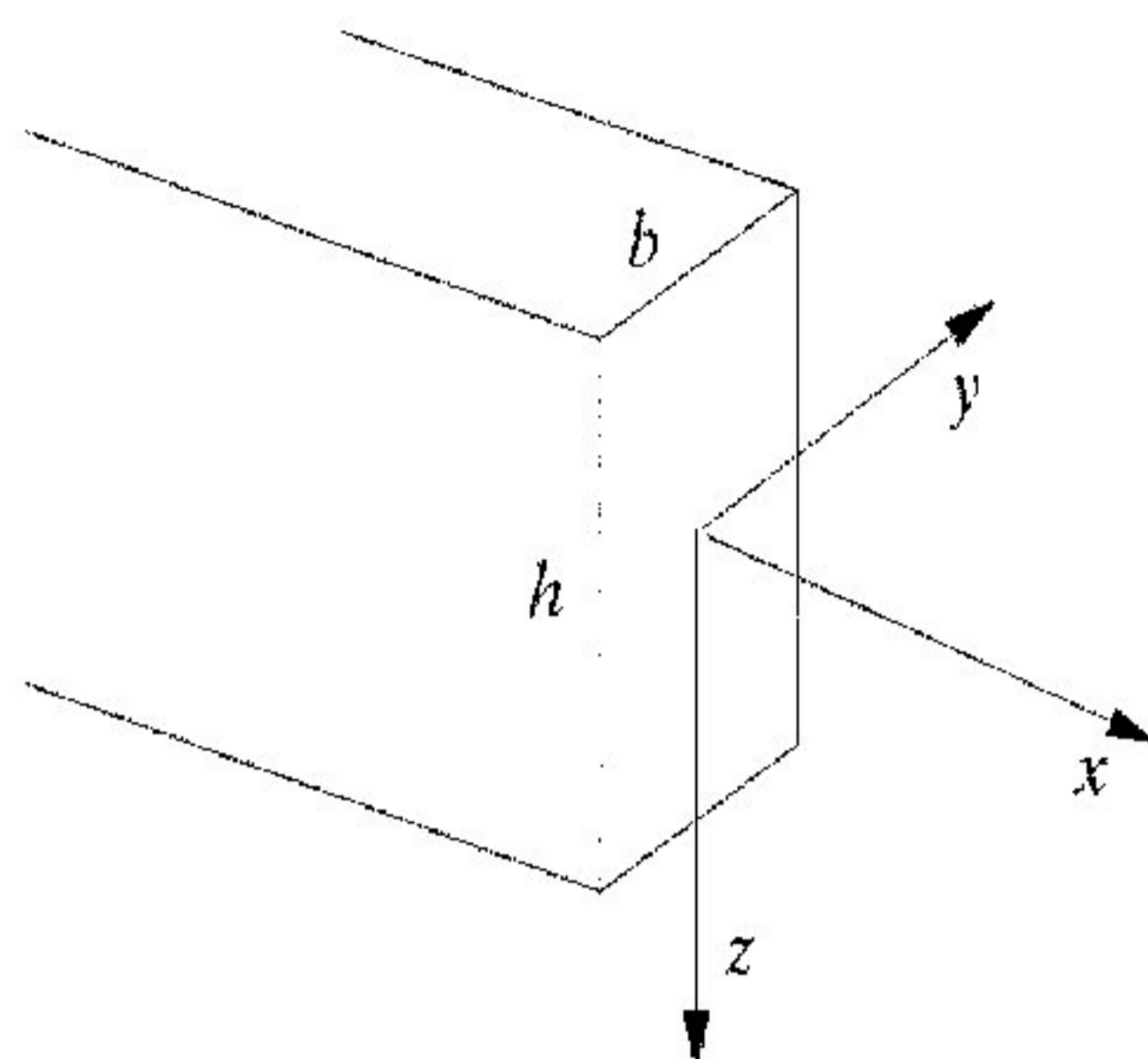


Fig. A.4 Seções transversais de barras prismáticas

- TABELA DE MATERIAIS

Estruturas Isótropas (ISO = 0)

"LCE" - Comando para entrada individual

Registros:

```
J  ECJ)  CPCJ)
:
:
0      -  Encerra a tarefa
```

Definição dos campos:

J - Número do material
 ECJ) - Módulo de elasticidade
 CPCJ) - Coeficiente de Poisson

Estruturas Ortótropas (ISO = 1)

"LCE" - Comando para entrada individual

Registros:

```
J  EXCJ)  CPXCJ)  EYCJ)  CPYCJ)  GCJ)
:
:
0      -  Encerra a tarefa
```


Definição dos campos:

J - Número do material
 EXC(J) - Constante elástica E'_x do material
 CPX(J) - Constante elástica ν_x do material
 EYC(J) - Constante elástica E'_y do material
 CPY(J) - Constante elástica ν_y do material
 GC(J) - Constante elástica G do material

- LISTA DE RESTRIÇÕES NODAIS

"RN" - Comando para entrada individual

Registros:

J RLC(1) RLC(2) RLC(3) RLC(4) RLC(5) RLC(6)
 ⋮
 0 - Encerra a tarefa

Definição dos campos:

J - Número do nó com restrição e/ou apoio elástico
 RLC(1) ... RLC(6) - Condições de apoio

{	0 - liberado
	1 - restrito
	2 - apoio elástico (IRIG ≠ 0)

"RNGL" - Comando para geração em linha

Registros:

J JA IA RLC(1) RLC(2) RLC(3) RLC(4) RLC(5) RLC(6)
 ⋮
 0 - Encerra a tarefa

Definição dos campos:

J - Número do nó inicial com restrição e/ou apoio elástico
 JA - Nó final
 IA - Incremento na numeração nodal

RLC(1) ... RLC(6) - Condições de apoio

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 - \text{liberado} \\ 1 - \text{restrito} \\ 2 - \text{apoio elástico (IRIG} \neq 0) \end{array} \right.$$

- TABELA DE CONSTANTES DE MOLA (IRIG \neq 0)

IRIG = 1 (somente uma constante de mola)

"AE" - Comando para entrada individual

Registro:

RIGA

Definição do campo:

RIGA - Única constante de mola

IRIG = 2 (várias constantes de mola)

"AE" - Comando para entrada individual

Registros:

J RIG(1) RIG(2) RIG(3) RIG(4) RIG(5) RIG(6)

⋮

0 - Encerra a tarefa

Definição dos campos:

J - Nó com apoio elástico

RIG(1) ... RIG(6) - Valores das constantes de mola

"AEGL" - Comando para geração em linha

Registros:

J JA IA RIG(1) RIG(2) RIG(3) RIG(4) RIG(5) RIG(6)

⋮

0 - Encerra a tarefa

Definição dos campos:

J - Nó inicial com apoio elástico

JA - Nó final

IA - Incremento na numeração nodal

RIG(1) ... RIG(6) - Valores das constantes de mola

Obs: Observar que $RL(i)=2$ onde houver constante de mola.

- ESCOLHA DE ELEMENTOS DE PLACA PARA IMPRESSAO DAS TENSÕES

"TEE" - Comando para entrada individual

Registros:

J

⋮

0 - Encerra a tarefa

Definição dos campos:

J - Número do elemento

"TEGL" - Comando para geração em linha

Registros:

J JA IA

⋮

0 - Encerra a tarefa

Definição dos campos:

J - Número do elemento inicial

JA - Elemento final

IA - Incremento na numeração dos elementos

"TEGB" - Comando para geração bi-dimensional

Registros:

J JA IA JB IB

⋮

0 - Encerra a tarefa

Definição dos campos:

- J - Número do elemento inicial
- JA - Elemento final na direção A
- IA - Incremento na numeração dos elementos na direção A
- JB - Elemento final na direção B
- IB - Incremento na numeração dos elementos na direção B

- CONSIDERAÇÕES GERAIS

Após gerar esta primeira parte de dados, deve-se finalizar com a palavra "FIM" para que o programa inicie os cálculos.

Não existe sequência obrigatória na introdução das tarefas; no entanto, para que seja realizada uma tarefa de cópia é necessário que a sequência original já tenha sido gerada.

O programa faz testes de consistência de dados e detecta automaticamente grande parte dos possíveis erros de digitação, informando as prováveis causas.

Ao se introduzir diversas vezes a coordenada de um mesmo nó, por exemplo, prevalece somente a última declaração. Isto é válido para qualquer dado fornecido desde que não interfira com a sequência lógica dos dados.

Caso não tenha sido detectado nenhum erro, o programa passa para a etapa seguinte onde são lidos os dados referentes aos carregamentos, que devem ser codificados conforme os comandos apresentados a seguir.

- CARREGAMENTO NODAL

"CNO" - Comando para entrada individual

Registros:

J FX FY FZ MX MY MZ

⋮

0 - Encerra a tarefa

Definição dos campos:

J - Número do nó
 FX - Força na direção x
 FY - Força na direção y
 FZ - Força na direção z
 MX - Momento em torno do eixo x
 MY - Momento em torno do eixo y
 MZ - Momento em torno do eixo z

"CNOG" - Comando para geração em linha

Registros:

```

  J  JA  IA  FX  FY  FZ  MX  MY  MZ
  ⋮
  0      -  Encerra a tarefa
  
```

Definição dos campos:

J - Número do nó inicial
 JA - Nó final
 IA - Incremento na numeração dos nós
 FX - Força na direção x
 FY - Força na direção y
 FZ - Força na direção z
 MX - Momento em torno do eixo x
 MY - Momento em torno do eixo y
 MZ - Momento em torno do eixo z

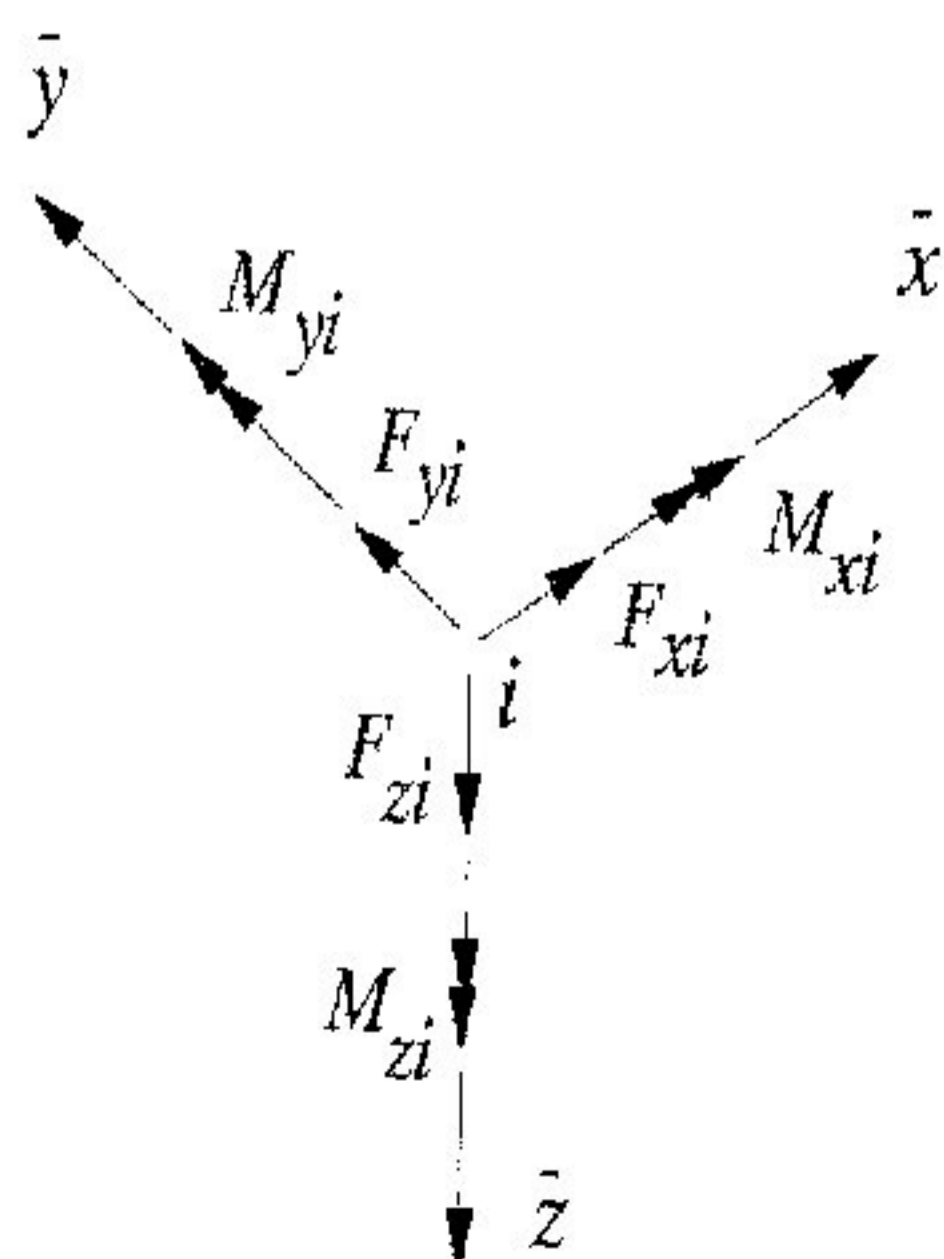


Fig. A.5 Carregamento aplicado diretamente aos nós

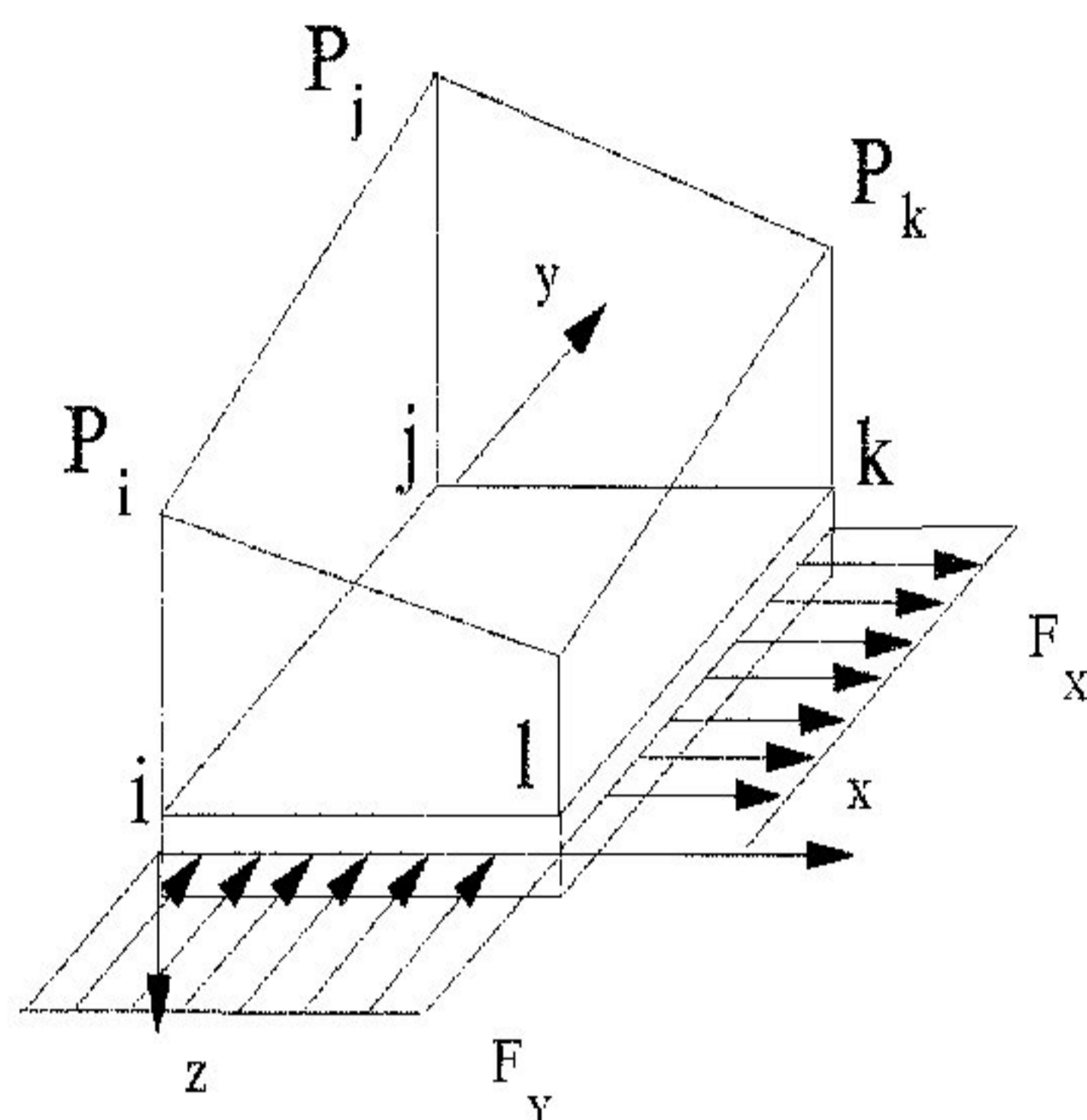


Fig. A.6 Carregamento nos elementos de placa

- CARREGAMENTO NAS BARRAS

"CEL" - Comando para entrada individual

Registros:

```

J      1  QX1  QX2  X1  X2
      2  P  X1
      3  T  X1
      4  M  X1
      5  AML(J,1) ... AML(J,6)
      ⋮
      0      -  Encerra o carregamento na barra
      ⋮
      0      -  Encerra a tarefa
  
```

Definição dos campos:

- J - Número do elemento
- 1 - Código para carregamento linearmente distribuído
- QX1, QX2 - Ordenadas do carregamento linearmente distribuído
- X1, X2 - Posição de aplicação do carregamento
- 2 - Código para carga concentrada
- P - Valor da carga concentrada

3 - Código para momento (torção) concentrado
 T - Valor do momento (torção) concentrado
 4 - Código para momento (fletor) concentrado
 M - Valor do momento (fletor) concentrado
 5 - Código para carregamento nas extremidades da barra
 $A_{ML}(J,1) \dots A_{ML}(J,6)$ - Ações na extremidade da barra

"CELG" - Comando para geração em linha

Registros:

```

  J  JA  IA      1  QX1  QX2  X1  X2
                    2  P  X1
                    3  T  X1
                    4  M  X1
                    5  AML(J,1) ... AML(J,6)
                    :
                    :
                    0  -      Encerra o carregamento na barra
                    :
                    0  -      Encerra a tarefa

```

Definição dos campos:

J - Número do elemento inicial
 JA - Elemento final
 IA - Incremento na numeração dos elementos
 1 - Código para carregamento linearmente distribuído
 QX1, QX2 - Ordenadas do carregamento linearmente distribuído
 X1, X2 - Posição de aplicação do carregamento
 2 - Código para carga concentrada
 P - Valor da carga concentrada
 3 - Código para momento (torção) concentrado
 T - Valor do momento (torção) concentrado
 4 - Código para momento (fletor) concentrado
 M - Valor do momento (fletor) concentrado
 5 - Código para carregamento nas extremidades da barra
 $A_{ML}(J,1) \dots A_{ML}(J,6)$ - Ações na extremidade da barra

- Obs: . Válido somente para barras com tamanhos e carregamentos iguais
- . Caso seja fornecido o valor $X2 = 0$ o carregamento distribuído será considerado até o final da barra

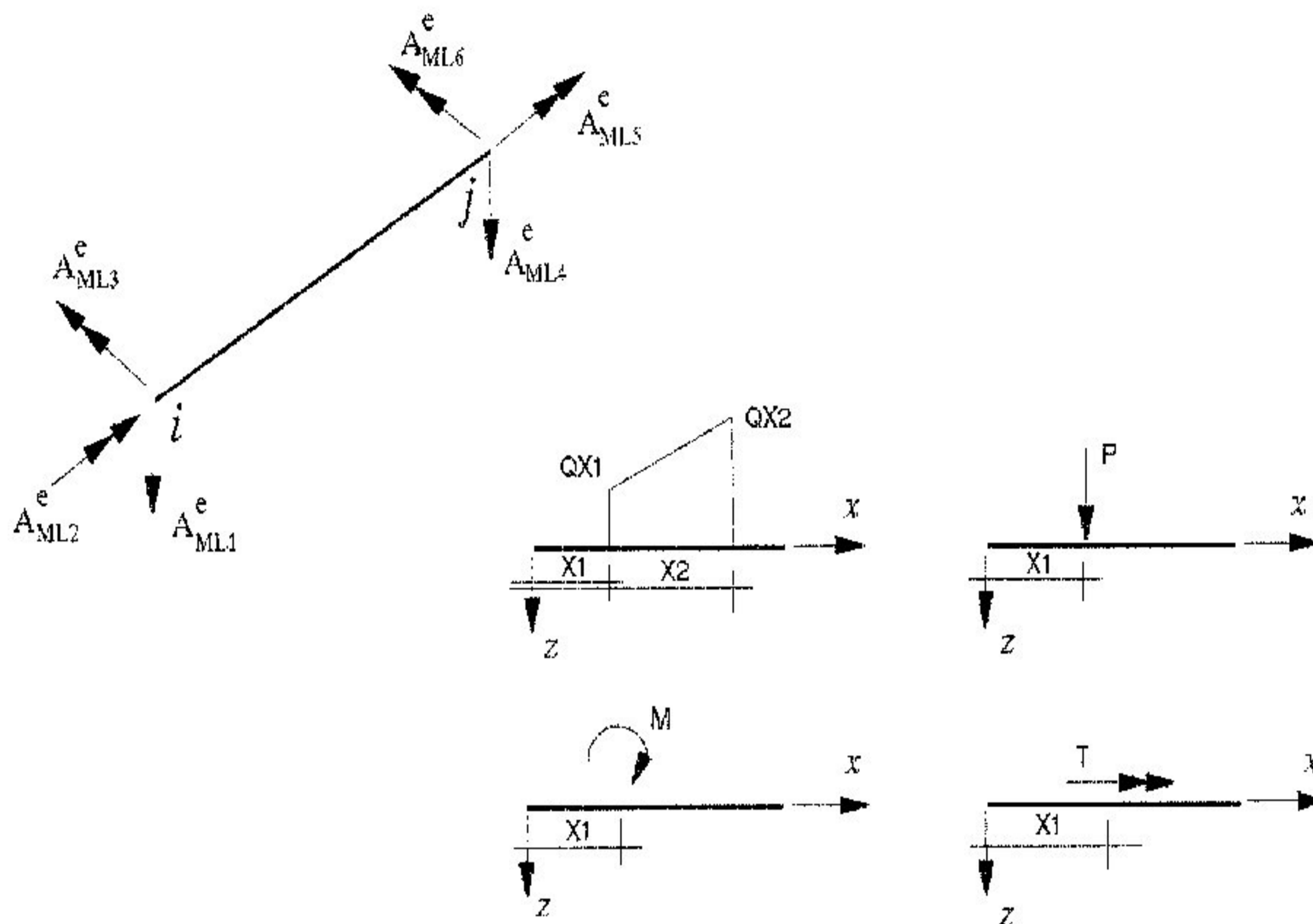


Fig. A.7 Carregamentos nos elementos de barra

- CONSIDERAÇÕES GERAIS

Após a digitação dos dados do carregamento número 1 deve-se finalizar com a palavra "FIM" para que o programa execute os cálculos e grave os resultados; os dados dos carregamentos seguintes também são digitados no mesmo arquivo tendo como separador a palavra "FIM", entre cada um deles. Todos os carregamentos serão lidos e calculados automaticamente.

Num mesmo carregamento serão sempre acumuladas as cargas nos nós e nos elementos. Portanto, não prevalecerá a última informação e sim a somatória destas cargas.

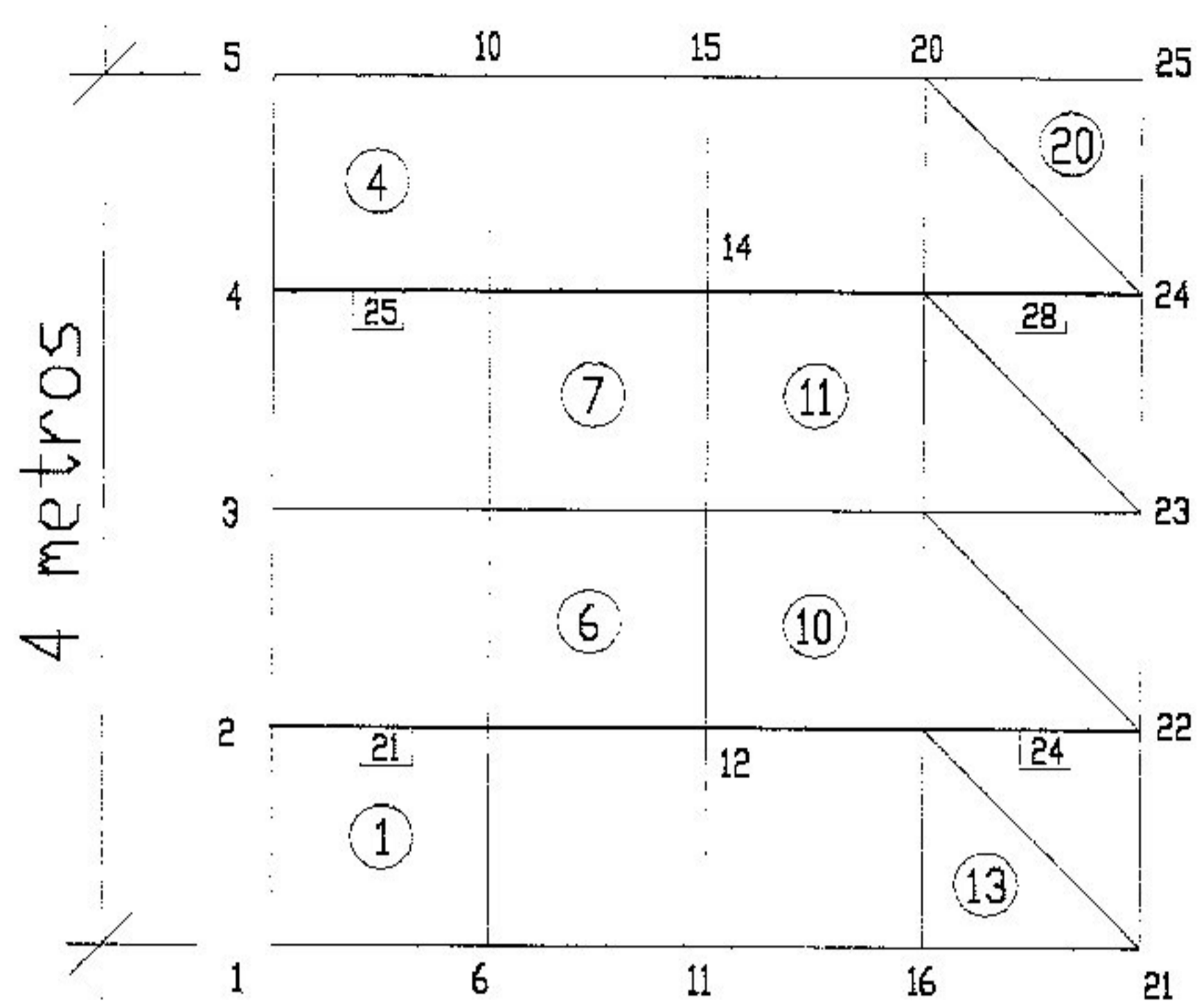


Fig. B.1 Estrutura codificada

```

NOGL                                     (Geração em linha de nós)
2 0 1 5 0 4 1
0

NOGB                                     (Geração bi-dimensional de nós)
5 1 0 10 1 4 1 16 3 0 5
0

NOCP                                     (Geração de cópias de nós)
1 16 20 1 1 0 5
0

PL                                       (Geração individual de elementos de placa)
1 1 2 7 6 0.1 1
13 16 21 17 0 0.1 1
0

PLGL                                     (Geração em linha de elementos de placa)
2 2 3 8 7 4 1 1 0.1 1
15 17 22 18 0 19 1 2 0.1 1
14 21 22 17 0 20 1 2 0.1 1
0

PLGB                                     (Geração bi-dimensional de elementos de placa)
5 6 7 12 11 8 1 1 9 5 4 0.1 1
0

EL                                       (Geração individual de elementos de barra)
21 2 7 1 1 0
0

ELGL                                     (Geração em linha de elementos de barra)
22 7 12 24 5 1 1 1 0
0

ELCP                                     (Geração de cópias de elementos de barra)
1 21 24 1 4 2
0

```


B.2 RELATÓRIO DE SAIDA

Titulo do servico:

Teste de entrada de dados - Estrut. 1

Parametros da Estrutura:

Estrutura Ortotropa

Numero de Carregamentos.: 3

Numero de Elementos.....: 28

Numero de Nos.....: 25

Numero de Nos Suportes...: 6

Opcao de Impressao.....: 1

Opcao de Rig. do Apoio...: 2

No	X	Y	TranX	TranY	TranZ	Rot. X	Rot. Y	Rot. Z
1	0.00	0.00	0	0	0	0	0	0
2	0.00	1.00	1	1	1	0	0	0
3	0.00	2.00	0	0	0	0	0	0
4	0.00	3.00	1	1	1	0	0	0
5	0.00	4.00	0	0	0	0	0	0
6	1.00	0.00	0	0	0	0	0	0
7	1.00	1.00	0	0	0	0	0	0
8	1.00	2.00	0	0	0	0	0	0
9	1.00	3.00	0	0	0	0	0	0
10	1.00	4.00	0	0	0	0	0	0
11	2.00	0.00	0	0	0	0	0	0
12	2.00	1.00	0	0	2	1	1	1
13	2.00	2.00	0	0	0	0	0	0
14	2.00	3.00	0	0	1	2	2	2
15	2.00	4.00	0	0	0	0	0	0
16	3.00	0.00	0	0	0	0	0	0
17	3.00	1.00	0	0	0	0	0	0
18	3.00	2.00	0	0	0	0	0	0
19	3.00	3.00	0	0	0	0	0	0
20	3.00	4.00	0	0	0	0	0	0
21	4.00	0.00	0	0	0	0	0	0
22	4.00	1.00	1	1	2	0	0	0
23	4.00	2.00	0	0	0	0	0	0
24	4.00	3.00	1	1	2	0	0	0
25	4.00	4.00	0	0	0	0	0	0

Elem	JI	JJ	JK	JL	Esp	LPP	LCE	OFS	LTE
1	1	2	7	6	0.10	0	1	0.00	1
2	2	3	8	7	0.10	0	1	0.00	1
3	3	4	9	8	0.10	0	1	0.00	1
4	4	5	10	9	0.10	0	1	0.00	1
5	6	7	12	11	0.10	0	1	0.00	1
6	7	8	13	12	0.10	0	1	0.00	1
7	8	9	14	13	0.10	0	1	0.00	1
8	9	10	15	14	0.10	0	1	0.00	1
9	11	12	17	16	0.10	0	1	0.00	1
10	12	13	18	17	0.10	0	1	0.00	1
11	13	14	19	18	0.10	0	1	0.00	1
12	14	15	20	19	0.10	0	1	0.00	1
13	16	21	17	0	0.10	0	1	0.00	0

14	21	22	17	0	0.10	0	1	0.00	0
15	17	22	18	0	0.10	0	1	0.00	0
16	22	23	18	0	0.10	0	1	0.00	0
17	18	23	19	0	0.10	0	1	0.00	0
18	23	24	19	0	0.10	0	1	0.00	0
19	19	24	20	0	0.10	0	1	0.00	0
20	24	25	20	0	0.10	0	1	0.00	0
21	2	7	0	0	0.00	1	1	0.00	2
22	7	12	0	0	0.00	1	1	0.00	2
23	12	17	0	0	0.00	1	1	0.00	2
24	17	22	0	0	0.00	1	1	0.00	2
25	4	9	0	0	0.00	1	1	0.00	2
26	9	14	0	0	0.00	1	1	0.00	2
27	14	19	0	0	0.00	1	1	0.00	2
28	19	24	0	0	0.00	1	1	0.00	2

Prop	b	h	Area	Ix	Iy	Iz
1	25.0	50.0	0.125E+04	0.179E+06	0.260E+06	0.651E+05

Mat	Ex	CPx	Ey	CPy	G
1	0.100E+04	0.50	0.500E+03	0.25	0.267E+03

No	RigTx	RigTy	RigTz	RigRx	RigRy	RigRz
12	.000E+00	.000E+00	.500E+03	.000E+00	.000E+00	.000E+00
14	.000E+00	.000E+00	.000E+00	.100E+03	.100E+03	.100E+03
22	.000E+00	.000E+00	.100E+03	.000E+00	.000E+00	.000E+00
24	.000E+00	.000E+00	.100E+03	.000E+00	.000E+00	.000E+00

Elementos escolhidos p/ impressao das tensoes

1 2 3 4 5 6 9 10 13 14

Carregamento numero: 1

Carga Aplicada nos Nos

No	Forca X	Forca Y	Forca Z	Mom. X	Mom. Y	Mom. Z
13	0.000	0.000	10.000	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00

Deslocamentos Nodais

No	Tran. X	Tran. Y	Tran. Z	Rot. X	Rot. Y	Rot. Z
1	.0000D+0	.0000D+0	-.4791D-8	-.3694D-9	.3490D-7	.0000D+0
2	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.1292D-7	.3804D-7	.0000D+0
3	.0000D+0	.0000D+0	-.3949D+0	-.5159D-2	.1480D+1	.0000D+0
4	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.2466D-1	.3255D-9	.0000D+0
5	.0000D+0	.0000D+0	-.2466D-1	.2466D-1	.1792D-8	.0000D+0
6	.0000D+0	.0000D+0	.2635D-7	-.5078D-8	.2525D-7	.0000D+0
7	.0000D+0	.0000D+0	.3472D-7	-.1236D-7	.2802D-7	.0000D+0
8	.0000D+0	.0000D+0	.1768D+1	-.9976D-2	.3884D+1	.0000D+0
9	.0000D+0	.0000D+0	.1852D-9	.2466D-1	-.1616D-9	.0000D+0
10	.0000D+0	.0000D+0	-.2466D-1	.2466D-1	.1359D-8	.0000D+0
11	.0000D+0	.0000D+0	.4321D-7	-.6336D-8	.9107D-8	.0000D+0
12	.0000D+0	.0000D+0	.5000D-7	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0
13	.0000D+0	.0000D+0	.5416D+1	.2170D-1	-.1574D+0	.0000D+0
14	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.2466D-1	.4262D-9	.0000D+0
15	.0000D+0	.0000D+0	-.2466D-1	.2466D-1	-.1303D-8	.0000D+0
16	.0000D+0	.0000D+0	.4409D-7	-.4413D-8	-.2240D-8	.0000D+0
17	.0000D+0	.0000D+0	.5077D-7	-.1275D-7	.8528D-9	.0000D+0

18	.0000D+0	.0000D+0	.1634D+1	-.2134D+0	-.3601D+1	.0000D+0
19	.0000D+0	.0000D+0	.9811D-9	.2466D-1	.8350D-9	.0000D+0
20	.0000D+0	.0000D+0	-.2466D-1	.2466D-1	-.2736D-8	.0000D+0
21	.0000D+0	.0000D+0	.4114D-7	-.7129D-8	-.4443D-8	.0000D+0
22	.0000D+0	.0000D+0	.5153D-7	-.1405D-7	.7822D-9	.0000D+0
23	.0000D+0	.0000D+0	-.5527D+0	.2607D+0	-.1842D+1	.0000D+0
24	.0000D+0	.0000D+0	.1404D-8	.2466D-1	.2067D-9	.0000D+0
25	.0000D+0	.0000D+0	-.2466D-1	.2466D-1	.7898D-8	.0000D+0

Esforços nas Extremidades das Barras

B. No	Forca. X	Forca. Y	Forca. Z	Mom. X	Mom. Y	Mom. Z	
21	2	.0000E+0	.0000E+0	-.5290E+1	-.2700E-1	-.3389E-1	.0000E+0
	7	.0000E+0	.0000E+0	.5290E+1	.2700E-1	-.5256E+1	.0000E+0
22	7	.0000E+0	.0000E+0	-.3971E+1	-.5893E+0	.5311E+1	.0000E+0
	12	.0000E+0	.0000E+0	.3971E+1	.5893E+0	-.9282E+1	.0000E+0
23	12	.0000E+0	.0000E+0	-.1079E+1	.6081E+0	-.7614E+0	.0000E+0
	17	.0000E+0	.0000E+0	.1079E+1	-.6081E+0	-.3173E+0	.0000E+0
24	17	.0000E+0	.0000E+0	.1998E+0	.6191E-1	.1183E+0	.0000E+0
	22	.0000E+0	.0000E+0	-.1998E+0	-.6191E-1	.8149E-1	.0000E+0
25	4	.0000E+0	.0000E+0	-.3226E+0	.2532E-1	-.3446E-1	.0000E+0
	9	.0000E+0	.0000E+0	.3226E+0	-.2532E-1	-.2882E+0	.0000E+0
26	9	.0000E+0	.0000E+0	.9920E+0	.5834E+0	.3429E+0	.0000E+0
	14	.0000E+0	.0000E+0	-.9920E+0	-.5834E+0	.6491E+0	.0000E+0
27	14	.0000E+0	.0000E+0	-.1095E+1	-.6247E+0	-.6541E+0	.0000E+0
	19	.0000E+0	.0000E+0	.1095E+1	.6247E+0	-.4412E+0	.0000E+0
28	19	.0000E+0	.0000E+0	.3046E+0	.6964E-1	.3159E+0	.0000E+0
	24	.0000E+0	.0000E+0	-.3046E+0	-.6964E-1	-.1132E-1	.0000E+0

Esforços nos Elementos de Placa

E. Nos	Sig. X	Tensao Sig. Y	Tau. XY	Flexao Mx	Flexao My	Flexao Mxy	
1	1	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.2795D-9	.0107D-9	.1894D-9
1	2	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.5764D-9	-.1131D-8	-.0450D-9
1	7	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.1700D-8	.0366D-9	-.0613D-9
1	6	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.1402D-8	.1322D-9	.1731D-9
2	2	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.5666D-1	.1133D+0	-.3034D-1
2	3	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.1087D-1	-.9687D-1	-.3013D-1
2	8	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.2741D+0	.3717D+0	.7671D-1
2	7	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.2520D+0	-.5041D+0	.7650D-1
3	3	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.1068D-1	-.9725D-1	.3056D-1
3	4	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.5852D-1	.1170D+0	.3034D-1
3	9	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.2506D+0	-.5013D+0	-.7650D-1
3	8	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.2734D+0	.3731D+0	-.7628D-1
4	4	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.1074D-9	-.1926D-9	.0304D-9
4	5	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.0500D-9	-.0500D-9	.0339D-9
4	10	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.0652D-9	.1362D-9	.0363D-9
4	9	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.0973D-9	-.3790D-9	.0328D-9
5	6	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.1589D-8	.1790D-9	.2497D-9
5	7	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.1720D-8	.0416D-9	-.3555D-9
5	12	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.4063D-8	.2185D-8	-.8834D-9
5	11	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.9941D-9	-.3928D-9	-.2783D-9
6	7	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.2520D+0	-.5041D+0	.1047D-1
6	8	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.3836D+0	.3443D+0	.9060D-2
6	13	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.2181D+1	.1903D+1	-.1705D+0
6	12	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.7747D+0	-.1549D+1	-.1691D+0
9	11	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.2176D-8	-.0973D-9	-.4856D-9

9	12	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.3898D-9	.1267D-8	.1666D-9
9	17	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.3536D-9	-.9102D-9	.7089D-9
9	16	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.3085D-9	.0496D-9	.0566D-9
10	12	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.7747D+0	-.1549D+1	.1611D+0
10	13	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	.2191D+1	.1905D+1	.1715D+0
10	18	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.5459D+0	.2365D+0	.1847D-1
10	17	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.2233D+0	-.4466D+0	.8020D-2
13	Ct	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.2031D-9	-.3290D-9	.1737D-9
14	Ct	.0000D+0	.0000D+0	.0000D+0	-.0442D-9	-.3561D-9	.1371D-9

Esforços Medios nos Nos

No	Esf.	Sig. x Mx	Sig. y My	Tau. xy Mxy	Alfa Alfa	Sig. 1 M. 1	Sig. 2 M. 2
1	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	.2795E-9	.0107E-9	.1894E-9	-27.3	.3774E-9	-.0871E-9
2	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	.2833E-1	.5666E-1	-.1517E-1	-23.4	.2174E-1	.6325E-1
3	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	.1078E-1	-.9706E-1	.2141E-3	-0.1	.1078E-1	-.9706E-1
4	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	.2926E-1	.5852E-1	.1517E-1	23.0	.2281E-1	.6496E-1
5	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	.0500E-9	-.0500E-9	.0339E-9	-17.0	.0604E-9	-.0604E-9
6	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	.1495E-8	.1556E-9	.2114E-9	-8.7	.1528E-8	.1230E-9
7	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.1260E+0	-.2520E+0	.2174E-1	-9.5	.1224E+0	-.2557E+0
8	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.3285E+0	.3587E+0	-.5968E-3	-0.0	.3285E+0	.3587E+0
9	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.1253E+0	-.2506E+0	-.2174E-1	9.5	-.1216E+0	-.2543E+0
10	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	.0328E-9	.1281E-9	-.0440E-9	-21.4	.0156E-9	.1454E-9
11	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	.1585E-8	-.2451E-9	-.3819E-9	11.3	.1662E-8	-.3216E-9
12	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.3873E+0	-.7747E+0	-.2015E-2	0.2	-.3873E+0	-.7747E+0
13	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	.2183E+1	.1899E+1	.4520E-2	-0.9	.2183E+1	.1899E+1
14	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.3851E+0	-.7703E+0	.2015E-2	-0.3	-.3851E+0	-.7703E+0
15	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	.5218E-9	.0155E-9	.1120E-9	-11.9	.5455E-9	-.0081E-9
16	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.2558E-9	-.1397E-9	.1152E-9	31.6	-.3267E-9	-.0687E-9
17	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.2888E-1	-.8563E-1	-.2345E-1	19.7	-.2044E-1	-.9407E-1
18	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.2755E+0	.9776E-1	-.9532E-2	-1.4	-.2757E+0	.9801E-1
19	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.1108E+0	-.1092E+0	.3167E-1	44.2	-.1417E+0	-.7831E-1
20	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.2788E-9	-.7553E-9	-.0039E-9	0.4	-.2787E-9	-.7553E-9
21	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.1237E-9	-.3425E-9	.1554E-9	-27.4	-.0430E-9	-.4232E-9
22	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0

	Flex	-.1704E-1	-.8552E-2	-.5781E-1	-42.9	-.7076E-1	.4517E-1
23	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.1476E+0	-.3579E-1	.3942E-1	17.5	-.1601E+0	-.2329E-1
24	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.1301E-1	-.8620E-2	.2051E-1	41.9	-.3144E-1	.9813E-2
25	Memb	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	45.0	.0000E+0	.0000E+0
	Flex	-.2100E-9	-.1106E-9	-.1603E-9	-36.3	-.3281E-9	.0075E-9

Reacoes de Apoio

No	Forca X	Forca Y	Forca Z	Mom. X	Mom. Y	Mom. Z
12	.0000E+0	.0000E+0	-.2500E-4	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0
14	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0	-.2466E+1	-.4262E-7	.0000E+0
22	.0000E+0	.0000E+0	-.5153E-5	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0
24	.0000E+0	.0000E+0	-.1404E-6	.0000E+0	.0000E+0	.0000E+0

Visando reduzir o volume de material impresso, não são apresentados os resultados dos carregamentos 2 e 3 em virtude da sua similaridade com os do carregamento 1.