

***FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO
DE VIGAS DE AÇO EM REGIME
ELASTO-PLÁSTICO***

Luiz Antonio de Souza

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

***FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO DE VIGAS DE AÇO
EM REGIME ELASTO-PLÁSTICO***

Luiz Antonio de Souza

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão julgadora:

Prof. Dr. Ricardo Hallal Fakury
EE-UFMG - (Orientador)

Prof. Dr. Roberto Martins Gonçalves
EESC -USP

Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall
EE-UFMG

Profa. Ana Lydia Reis de Castro e Silva
EE-UFMG

Belo Horizonte, outubro de 1999

A meus pais

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo que almejei e consegui.

Ao Professor Ricardo Hallal Fakury pela dedicada e competente orientação, o incentivo, a amizade e, sobretudo, a paciência que foram imprescindíveis para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais, família e amigos por todo o amor, carinho e apoio recebido durante toda a minha vida.

Aos professores, funcionários e colegas do DEES pela convivência agradável neste tempo de relacionamento. Em especial, às queridas Fátima, Iracema e Ângela, pelo carinho e presteza em ajudar. Também ao pessoal do LAMEC pelo companheirismo e auxílio computacional.

Ao CAPES pela bolsa de estudo, que possibilitou a dedicação integral durante parte do trabalho.

À minha amiga Marylane, pelo apoio recebido nos momentos em que precisei.

RESUMO

Quando as ações aplicadas atingem certa intensidade, as barras de aço submetidas à flexão perdem a estabilidade, em um processo que envolve translação perpendicular ao plano das ações e rotação em torno do eixo longitudinal que passa pelo centro de torção da seção transversal. O fenômeno recebe a denominação de flambagem lateral com torção e se constitui em um estado limite último relacionado à instabilidade. A norma brasileira, NBR 8800/86, a especificação americana, AISC/LRFD, a especificação canadense, CAN/CSA-S.16.1, e a maior parte das especificações de projeto de estruturas de aço fornecem procedimentos para determinação da resistência nominal ao momento fletor, com relação a este estado limite, que dependem fundamentalmente da obtenção do valor correto da resistência nominal ao momento fletor. No entanto, estas especificações, e mesmo a literatura técnica especializada, não contêm informações que permitam a obtenção desta resistência nominal para uma enorme gama de situações. Este trabalho apresenta um procedimento numérico, baseado no método da energia, e implementado através de um programa computacional, para se obter valores da resistência nominal considerando situações gerais de carregamento, incluindo ações estabilizantes e desestabilizantes, de condições de contorno nos planos de flexão e de flambagem, incluindo seções internas contidas lateralmente e de seções transversais, incluindo a possibilidade de se ter recortes nas mesas, aberturas na alma e lamelas. Diversos casos são analisados e os resultados comparados com os obtidos pelas especificações de projeto.

ABSTRACT

When a beam bent about its greatest axis moment of inertia, lateral deflection and twisting will occur when the applied load reaches its critical value, unless the beam is provided with properly spaced and designed lateral bracings or the cross section is torsionally stiff. For a perfectly straight beam, the critical load corresponds to the point of bifurcation of equilibrium when out-of-plane bending and twisting deformations become the stable configuration of the member. The phenomenon is an ultimate limit state termed lateral-torsional buckling. The brazilian code NBR 8800/86, the american specification AISC/LRFD, the canadian specification CAN/CSA-S.16.1, and most of the specifications for the design of steel structures recommend the use of approximate expressions to obtain the value of the nominal strength of bending moment in the elastic and inelastic range. In these expressions beams with non-prismatic sections cannot be analyzed, the applied load and the presence of stabilizing and non-stabilizing load are not properly considered and the boundary conditions are limited to the case of constrained torsion and the translation in the buckling plane while the rotation and the warping are hold free. This study presents a numerical procedure, based on energy method, to obtain accurate results for the elastic and inelastic nominal strength to the lateral-torsional buckling, considering many different situations of loading, including stabilizing and non-stabilizing actions, boundary conditions, including the case when the rotation in the buckling plane and the warping are constrained, and variation of the moment of inertia, with doubly-symmetric and singly-symmetric cross section, and with coped beams and beams with reinforcement or with web openings. Several cases are analyzed and the results are compared with those proposed by the design specifications for steel structures.

SUMÁRIO

| | |
|--|----|
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1. Considerações Gerais..... | 1 |
| 1.1.1. Os estados limites nas vigas de aço | 1 |
| 1.1.2. Fatores que influem na resistência à flambagem lateral com torção | 3 |
| 1.2. Descrição Sucinta das Pesquisas a Respeito da Flambagem Lateral com Torção..... | 7 |
| 1.3. Tratamento Normatizado da Flambagem Lateral com Torção | 12 |
| 1.3.1. Procedimento proposto pelo AISC/LRFD [64] | 12 |
| 1.3.2. Procedimento proposto pela NBR 8800 [65]..... | 15 |
| 1.3.3. Procedimento proposto pelo CAN/CSA-S.16.1 [66]..... | 16 |
| 1.3.4. Análise comparativa..... | 17 |
| 1.4. Proposta de Trabalho | 19 |
| | |
| 2. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO AO PROBLEMA DA FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO | 22 |
| 2.1. Regime Elástico | 22 |
| 2.1.1. Considerações gerais..... | 22 |
| 2.1.2. Premissas básicas | 23 |
| 2.1.3. Energia de deformação..... | 25 |
| 2.1.4. Energia potencial | 27 |
| 2.1.4.1. Cargas transversais nos deslocamentos de 1ª ordem | 28 |
| 2.1.4.2. Cargas transversais nos deslocamentos de 2ª ordem | 29 |
| 2.1.4.3. Expressão da energia potencial..... | 32 |
| 2.1.5. Energia potencial total | 32 |
| 2.1.6. Escolha das funções μ_d e ϕ | 34 |
| 2.1.7. Contribuição do segmento i para a expressão de Π | 36 |
| 2.1.8. Montagem da matriz | 40 |
| 2.2. Regime Elasto-Plástico | 42 |
| 2.2.1. Considerações gerais..... | 42 |
| 2.2.2. Módulo Tangente E_T | 44 |

| | |
|--|----|
| 2.2.3. Tensão de flambagem em regime elasto-plástico | 45 |
| 2.2.4. Tensões residuais | 47 |
| 2.2.5. Procedimentos..... | 55 |
| | |
| 3. AUTOMATIZAÇÃO PARA DETERMINAÇÃO DA RESISTÊNCIA AO MOMENTO FLETOR..... | 56 |
| 3.1. Considerações Iniciais | 56 |
| 3.2. Entrada de Dados | 57 |
| 3.3. Cálculo | 60 |
| 3.3.1. Divisão dos segmentos..... | 60 |
| 3.3.2. Propriedades geométricas | 61 |
| 3.3.3. Esforços solicitantes | 62 |
| 3.3.4. Determinante..... | 62 |
| 3.4. Saída de Resultados | 63 |
| 3.5. Exemplos | 63 |
| | |
| 4. APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS..... | 83 |
| 4.1. Introdução | 83 |
| 4.2. Casos de Carregamento e Condições de Contorno | 84 |
| 4.3. Vigas com Seção I Bissimétrica..... | 86 |
| 4.3.1. Comparação com resultados obtidos pelo AISC/LRFD [64], NBR 8800 [65] e CAN/CSA-S.16.1 [66] | 86 |
| 4.3.1.1. Momento uniforme | 86 |
| 4.3.1.2. Carga distribuída..... | 87 |
| 4.3.1.3. Carga concentrada aplicada na seção central | 87 |
| 4.3.1.4. Momento em uma das extremidades | 88 |
| 4.3.2. Comparação dos efeitos das condições de contorno e do nível de aplicação do carregamento | 88 |
| 4.3.2.1. Carga distribuída..... | 89 |
| 4.3.2.2. Carga concentrada aplicada na seção central | 89 |
| 4.3.3. Avaliação do efeito de recorte nas mesas | 90 |
| 4.3.3.1. Momento uniforme | 90 |

| | |
|--|-----|
| 4.3.3.2. Carga distribuída..... | 91 |
| 4.3.3.3. Carga concentrada aplicada na seção central..... | 91 |
| 4.3.4. Vigas com aberturas na alma..... | 92 |
| 4.3.5. Vigas com lamela..... | 93 |
| 4.3.6. Vigas com contenção lateral interna..... | 94 |
| 4.4. Vigas com Outras Seções Transversais..... | 96 |
| 4.4.1. Seção caixão..... | 96 |
| 4.4.2. Seção U..... | 97 |
| 4.4.3. Seção retangular cheia..... | 97 |
| | |
| 5. CONCLUSÕES..... | 98 |
| 5.1. Considerações Gerais..... | 98 |
| 5.2. Vigas com Seção I Duplamente Simétrica..... | 99 |
| 5.3. Vigas com Seções Transversais Diferentes do I Duplamente Simétrico..... | 100 |
| 5.4. Vigas com Contenção Lateral Interna..... | 100 |
| 5.5. Vigas com Variação de Seção Transversal..... | 101 |
| 5.5.1. Vigas com Lamelas..... | 101 |
| 5.5.2. Vigas com Recortes nas Mesas..... | 101 |
| 5.5.3. Vigas com Aberturas na Alma..... | 102 |
| 5.6. Análise Global e Sugestões..... | 102 |
| | |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 104 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1.1 - Flambagem lateral com torção | 3 |
| Figura 1.2 - Modos de flambagem de uma viga de seção I conforme as condições de contorno..... | 4 |
| Figura 1.3 - Situação de momento fletor mais desfavorável..... | 5 |
| Figura 1.4 - Cargas estabilizantes e desestabilizantes..... | 5 |
| Figura 1.5 - Variações na seção transversal | 6 |
| Figura 1.6 - Imperfeições geométricas..... | 7 |
| Figura 1.7 - Resistência nominal M_n em função do índice de esbeltez I e de C_b | 14 |
| Figura 1.8 - Resistência nominal ao momento fletor de acordo com a NBR 8800 [65]. | 16 |
| Figura 1.9 - Resistência nominal ao momento fletor de acordo com a CAN/CSA-S.16.1 [66]..... | 17 |
| Figura 1.10 - Comparação entre os valores da resistência nominal à flambagem lateral com torção | 18 |
| Figura 1.11– Distribuição de tensões residuais para uma viga com seção I..... | 19 |
| Figura 1.12 - Comparação qualitativa de tensões residuais em chapas com bordas laminadas (a), e bordas cortadas a maçarico (b) na formação de perfis I..... | 20 |
| Figura 2.1 - Sistemas de eixos adotados com seus sentidos positivos..... | 23 |
| Figura 2.2 - Variação da tensão de torção livre ao longo da espessura do elemento..... | 25 |
| Figura 2.3 - Deslocamento em 2 ^a ordem devido à aplicação de uma força concentrada. | 29 |
| Figura 2.4 - Deslocamentos em 2 ^a ordem de um elemento de volume $dz.dA$ | 30 |
| Figura 2.5 - Segmento genérico i | 34 |
| Figura 2.6 - Momento fletor solicitante M_x no segmento i | 37 |
| Figura 2.7 - Esquema da montagem da matriz global da viga, através da superposição das matrizes dos segmentos (adaptado da referência 17)..... | 42 |
| Figura 2.8 – Tensões normais na flambagem elasto-plástica..... | 44 |
| Figura 2.9 – Tensões de flambagem em regime elástico e elasto-plástico | 46 |
| Figura 2.10 – Distribuição de tensões residuais para o exemplo de cálculo da curva $f-I$ | 48 |
| Figura 2.11 – Distribuição de tensões residuais para o exemplo de cálculo da curva $f-\lambda$ | 51 |

| | |
|---|----|
| Figura 2.12 – Representação gráfica das curvas $f-I$ e da “distribuição padrão” | 55 |
| Figura 3.1 - Aberturas na alma..... | 58 |
| Figura 3.2 - Determinação do carregamento e do multiplicador crítico. | 59 |
| Figura 3.3 - Divisão dos segmentos..... | 61 |
| Figura 3.4 - (a): forma usual de armazenamento, (b): matriz banda (adaptado da referência 71)..... | 63 |
| Figura 3.5 - Viga VS 300x36..... | 64 |
| Figura 3.6 – Distribuição de tensões residuais para o segundo exemplo..... | 72 |
| Figura 3.7 - Viga VS 300x36 com recortes nas extremidades..... | 73 |
| Figura 4.1 – Distribuição “correta” de tensões residuais com tração nas bordas das mesas..... | 85 |
| Figura 4.2 – Distribuição “correta” de tensões residuais com compressão nas bordas das mesas. | 85 |
| Figura 4.3 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64], NBR 8800 [65] e CAN/CSA-S.16.1 [66] para o caso de momento uniforme..... | 86 |
| Figura 4.4 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64], NBR 8800 [65] e CAN/CSA-S.16.1 [66] para o caso de carga distribuída aplicada no nível do centro de torção. | 87 |
| Figura 4.5 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64], NBR 8800 [65] e CAN/CSA-S.16.1 [66] para o caso de carga concentrada aplicada na seção central, no nível do centro de torção. | 87 |
| Figura 4.6 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64], NBR 8800 [65] e CAN/CSA-S.16.1 [66] para o caso de momento em uma das extremidades..... | 88 |
| Figura 4.7 - Comparação gráfica dos efeitos dos vínculos rígido e de garfo para o caso de carga distribuída..... | 89 |
| Figura 4.8 - Comparação gráfica dos efeitos dos vínculos rígido e de garfo para o caso de carga concentrada aplicada na seção central. | 89 |
| Figura 4.9 - Avaliação gráfica dos recortes nas mesas para o caso de momento uniforme..... | 90 |
| Figura 4.10 - Avaliação gráfica dos recortes nas mesas para o caso de carga | |

| | |
|--|----|
| distribuída. | 91 |
| Figura 4.11 - Comparação gráfica dos recortes nas mesas para o caso de carga concentrada aplicada na seção central. | 91 |
| Figura 4.12 - Aberturas consideradas para o cálculo. | 92 |
| Figura 4.13 - Vão da viga e seção transversal considerados na verificação de viga com lamela. | 93 |
| Figura 4.14 – Gráfico comparativo para o caso de carga distribuída considerando lamela na mesa superior. | 94 |
| Figura 4.15 - Posição da contenção lateral interna. | 94 |
| Figura 4.16 - Vão da viga e seção transversal considerados na verificação de viga com contenção lateral interna. | 95 |
| Figura 4.17 – Resistência nominal, M_n , em função da posição da contenção lateral interna, a | 95 |
| Figura 4.18 - Seções transversais consideradas: (a) caixão, (b) U, e (c) retangular cheia. | 96 |
| Figura 4.19 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64] e NBR 8800 [65] para o caso de carga distribuída e seção caixão. | 96 |
| Figura 4.20 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64] e NBR 8800 [65] para o caso de carga distribuída e seção U. | 97 |
| Figura 4.21 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64] e NBR 8800 [65] para o caso de carga distribuída e seção retangular cheia. | 97 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|----|
| Tabela 4.1 - Casos de carregamento e condições de contorno..... | 84 |
| Tabela 4.2 - Valores do momento crítico para diversos casos de aberturas na alma..... | 93 |

1. INTRODUÇÃO

1.1. Considerações Gerais

1.1.1. Os estados limites nas vigas de aço

As estruturas devem possuir características de resistência e rigidez de forma a terem comportamento adequado durante sua vida útil. Para isto, é necessário que não sejam atingidos os chamados estados limites, ou seja, que as respostas da estrutura não ultrapassem determinados valores além dos quais ela deixa de atender as funções para as quais foi projetada. Os estados limites são divididos em duas categorias: estados limites de utilização e estados limites últimos.

Os estados limites de utilização relacionam-se ao desempenho da estrutura no que se refere à sua utilização econômica, à integridade dos materiais ligados à mesma e ao conforto físico e psicológico dos usuários. Nas vigas de aço de edifícios, os estados limites de utilização mais comuns são as deformações elevadas, elásticas ou permanentes, e vibrações inaceitáveis.

Os estados limites últimos são aqueles relacionados ao esgotamento da capacidade portante da estrutura, ou seja, a sua ocorrência está associada a um colapso parcial ou total. Nas vigas de aço de edifícios, os estados limites últimos que acontecem com maior frequência em decorrência do momento fletor são:

- a plastificação total de uma ou mais seções transversais (formação de rótulas plásticas);
- a flambagem local da mesa comprimida;
- a flambagem local da alma;
- a flambagem lateral com torção.

A rigor, só ocorrerá o colapso por formação de rótulas plásticas quando estas forem em número suficiente para tornar a viga hipostática. No entanto, quando não se está efetuando uma análise plástica, ainda pouco comum na prática, a formação de uma única rótula plástica em vigas com quaisquer condições de contorno é simplificada associada ao colapso por mudar seu grau de indeterminação cinemática.

A flambagem local da mesa comprimida e da alma ocorrem quando a viga possui estes componentes do perfil com esbeltez acima de determinados valores limites, normalmente fornecidos na literatura técnica especializada e nas normas ou especificações de projeto de estruturas de aço.

A flambagem lateral com torção de uma viga perfeitamente reta é um fenômeno de instabilidade que envolve uma flexão lateral, perpendicular ao plano do carregamento, caracterizado pelo deslocamento $m(z)$ do centro de torção, e uma torção, caracterizada pela rotação $f(z)$, conforme mostra a figura 1.1. Essa situação corresponde ao ponto de bifurcação do equilíbrio, quando apenas os deslocamentos no plano de flexão deixam de representar a configuração estável da viga.

Com certa liberalidade, a flambagem lateral com torção tem sido tratada na prática incluindo não somente o problema da bifurcação do equilíbrio, mas também o problema mais geral de força-deslocamento, incorporando os efeitos das chamadas imperfeições geométricas e de material.

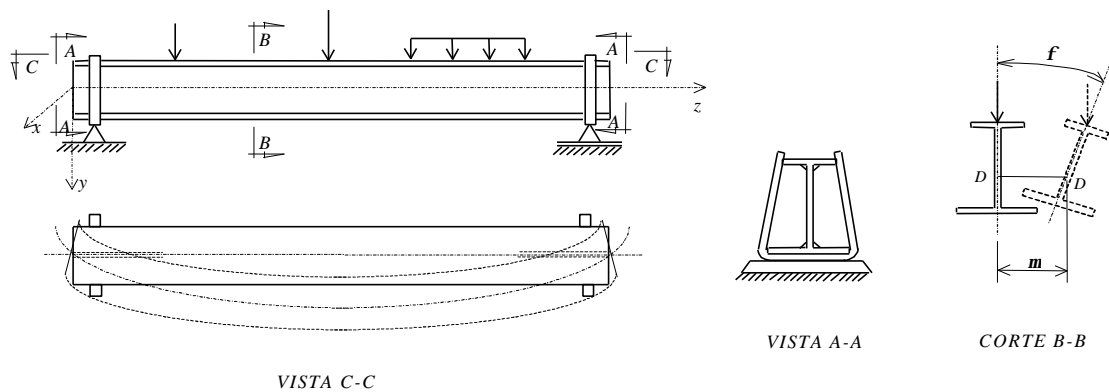


Figura 1.1 - Flambagem lateral com torção

Neste trabalho, será estudado apenas o estado limite último de flambagem lateral com torção em regimes elástico e elasto-plástico de vigas de aço não sujeitas a imperfeições geométricas.

1.1.2. Fatores que influem na resistência à flambagem lateral com torção

A resistência nominal à flambagem lateral com torção, depende de vários fatores, entre os quais merecem destaque:

a) a distância entre as seções com restrição à flambagem lateral com torção

A distância entre seções com restrição à flambagem lateral com torção, denominada comprimento destravado, é inversamente proporcional ao valor da resistência nominal, e pode determinar se o fenômeno se dará em regime elástico ou elasto-plástico, ou ainda sua impossibilidade de ocorrência, em virtude de colapso anterior causado pela formação de uma ou mais rótulas plásticas.

b) as condições de contorno das seções com restrição à flambagem lateral com torção

Os quatro deslocamentos mais importantes, que podem ser impedidos em uma seção transversal restringindo a possibilidade de ocorrência da flambagem lateral com torção, são o giro f e o empenamento w , que é uma função de f , decorrentes da torção, o deslocamento do centro de torção no plano perpendicular ao de flexão, m e a inclinação correspondente, m' . Quanto maior o número destes deslocamentos

impedidos, maior também será a resistência da viga. Na prática, na maioria das vezes, as condições de contorno costumam apresentar as seguintes características:

- todos os deslocamentos (f , w , m e m') impedidos, em um tipo de restrição à flambagem lateral com torção denominado de “vínculo rígido”;
- os deslocamentos f e m impedidos e w e m' liberados, em um tipo de restrição à flambagem lateral com torção denominado de “vínculo de garfo”.

A figura 1.2 apresenta os modos de flambagem, em planta, de uma viga de seção I com estes dois tipos de condições de contorno em ambas as extremidades do comprimento destravado.

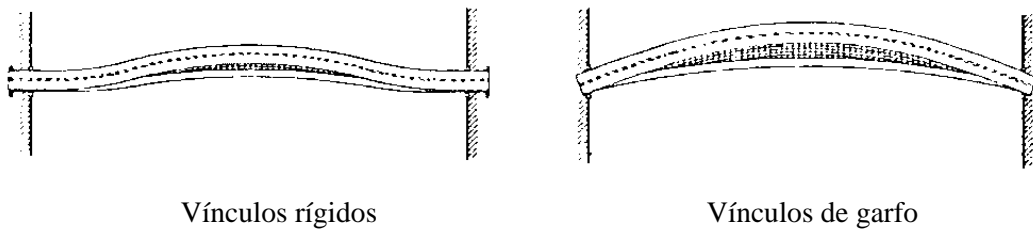


Figura 1.2 - Modos de flambagem de uma viga de seção I conforme as condições de contorno

c) *a seção transversal da viga*

Pode-se ter uma seção transversal mais ou menos resistente à flambagem lateral com torção, ou mesmo seções que não sofram este tipo de instabilidade, como por exemplo, os perfis I fletidos apenas em torno do eixo de menor inércia ou perfis tubulares de seção circular.

d) *a variação do momento fletor*

A situação mais desfavorável é aquela em que o momento fletor é constante ao longo da viga (figura 1.3), uma vez que causa compressão de mesma intensidade em uma parte da seção transversal ao longo de todo o comprimento da viga. Todas as outras situações em que o momento fletor é variável são mais favoráveis.

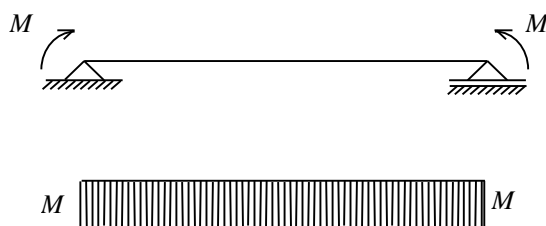


Figura 1.3 - Situação de momento fletor mais desfavorável

e) *a existência de forças transversais estabilizantes ou desestabilizantes*

As forças estabilizantes são aquelas situadas em nível distinto do centro de torção e que tendem a reduzir a torção após a ocorrência do início da flambagem lateral, aumentando a resistência da viga a este tipo de instabilidade (figura 1.4.a). As desestabilizantes, a contrário, são aquelas situadas em nível distinto do centro de torção e cujas linhas de ação se afastam deste ponto após iniciado o fenômeno, aumentando a torção e reduzindo a resistência da viga (figura 1.4.c). Se as forças se situam no nível do centro de torção e suas linhas de ação passam por ele, elas não são nem estabilizantes nem desestabilizantes (figura 1.4.b). Na prática, situações usuais de forças estabilizantes e desestabilizantes ocorrem quando estas são aplicadas nas faces tracionada e comprimida da seção transversal da viga, respectivamente.

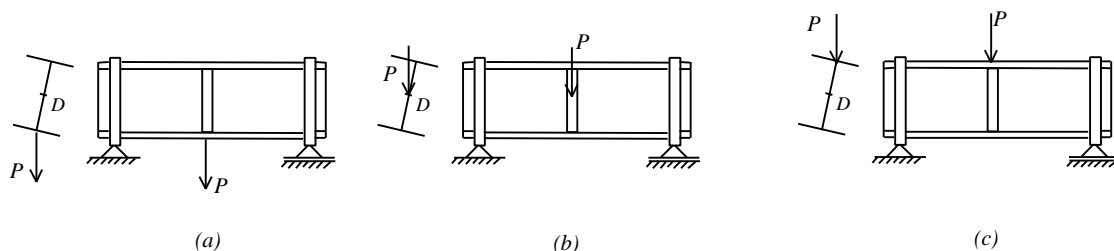


Figura 1.4 - Forças estabilizantes e desestabilizantes

f) *imperfeição de material*

A imperfeição de material envolve basicamente as tensões residuais. A magnitude e a distribuição destas tensões influem na antecipação ou retardamento da passagem da flambagem lateral com torção do regime elástico para o elasto-plástico, e no valor da resistência neste último regime.

g) *variação na seção transversal da viga em virtude de recortes nas mesas, aberturas na alma ou lamelas*

Recortes em uma das mesas ou em ambas as mesas das vigas (figuras 1.5.a e 1.5.b), para facilitar a ligação a outros componentes da estrutura, podem reduzir significativamente a resistência nominal à flambagem lateral com torção. Aberturas na alma (figura 1.5.c), muitas vezes necessárias para permitir a passagem de dutos de serviço, também podem reduzir a resistência da viga. Ao contrário, lamelas colocadas junto a uma mesa da viga (figura 1.5.d) contribuem no sentido de aumentar esta resistência.

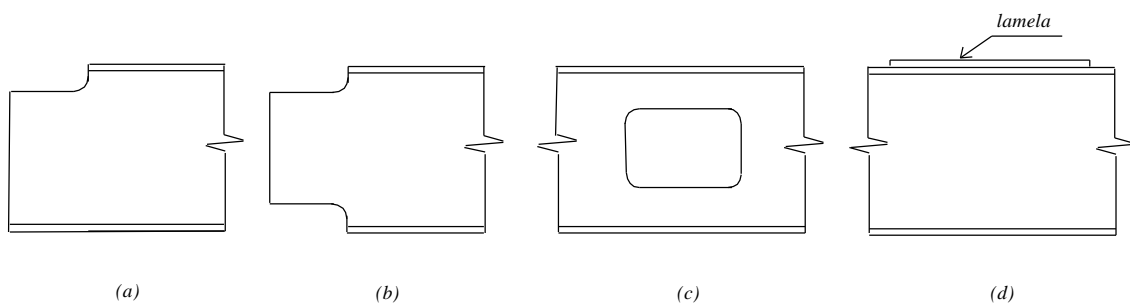


Figura 1.5 - Variações na seção transversal

h) *imperfeições geométricas*

Por imperfeições geométricas entende-se tanto a excentricidade da linha de ação das forças em relação ao centro de torção (figura 1.6.a), quanto uma rotação inicial (figura 1.6.b) ou curvatura inicial (figura 1.6.c) da barra. Quanto maiores forem estas imperfeições, maior será a redução da resistência nominal da viga à flambagem lateral com torção.

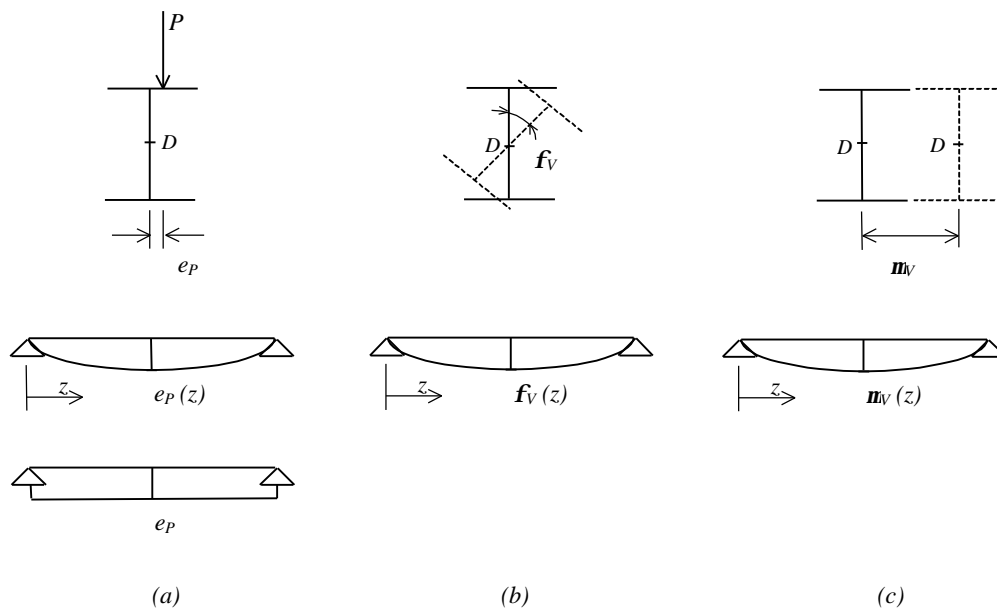


Figura 1.6 - Imperfeições geométricas

i) *deslocamentos no plano de flexão*

Os deslocamentos no plano de flexão, normalmente causados pelo próprio carregamento, transformam a viga em um “arco negativo”. Sua curvatura côncava aumenta a resistência à flambagem lateral com torção, da mesma maneira que a curvatura convexa de um arco reduz a resistência à flambagem.

1.2. Descrição Sucinta das Pesquisas a Respeito da Flambagem Lateral com Torção

A determinação da resistência nominal ao momento fletor para o estado limite último de flambagem lateral com torção vem sendo estudada intensivamente desde a metade do século XIX. De acordo com Procter [1], as primeiras pesquisas relacionadas à flambagem lateral com torção foram feitas por Fairbairn e datam de 1854. Nestas pesquisas, Fairbairn já concluía que se a mesa comprimida tivesse espessura e largura superiores à mesa tracionada, sua resistência à flambagem lateral com torção seria maior. Posteriormente, resultados de ensaios em vigas de aço, obtidos por Burr (1884), Marburg (1909) e Moore (1910), levaram a fórmulas de projeto que mostravam a resistência nominal ao momento fletor como função do índice de esbeltez I da mesa comprimida em relação ao eixo central de inércia situado no plano de flexão. Em 1899, Prandtl [2] apresentou uma solução teórica para o problema da flambagem elástica de

vigas com seção transversal retangular, para vários tipos de carregamento e condições de contorno. Mais ou menos na mesma época, Michell [3] apresentou uma solução similar para o caso de vigas, também com seções transversais retangulares, simplesmente apoiadas submetidas a momento fletor constante.

O primeiro resultado para o valor da resistência nominal à flambagem lateral com torção de uma viga de seção I, em regime elástico, foi obtido por Timoshenko, entre os anos de 1906 e 1910, quando publicou vários artigos sobre o assunto na Rússia e Alemanha. Posteriormente, entre 1951 e 1961, foram feitas revisões destes trabalhos, pelo próprio Timoshenko [4, 5] e por Bleich [6]. Nesta mesma época, Vlasov [7] e Winter [8] trabalharam na busca de soluções para vigas simplesmente apoiadas, sujeitas à flambagem lateral com torção, considerando diferentes condições de contorno.

Ainda por volta da metade do século XX, vários outros pesquisadores se dedicaram a procurar soluções numéricas para o problema de flambagem lateral com torção, entre eles, Massonet [9], Horne [10], Salvadori [11] e Galambos [12]. Mais recentemente, em 1988, Gellin e Lee [13], Pandey e Sherbourne [14] e De Jong [15] apresentaram um método de energia alternativo para determinação da força de flambagem lateral com torção. Uma comparação deste método com o método clássico pode ser vista em Pi et al. [16]. Rachid [17], em 1976, desenvolveu um trabalho em que o método da energia era utilizado para formular um programa computacional que permitia a obtenção do carregamento crítico de instabilidade em seções prismáticas.

Em 1951, o Column Research Council (atualmente, Structural Stability Research Council) iniciou a primeira de uma série de pesquisas sobre o assunto. Nesta mesma época, Salvadori [18] apresentou uma solução aproximada para obtenção do valor da força elástica de flambagem lateral com torção de vigas contínuas. Ele propôs que cada tramo fosse considerado como uma viga simplesmente apoiada. A força crítica do sistema seria considerada igual à menor força crítica dos tramos isolados. Esta solução só seria válida se nos apoios houvesse vínculo de garfo.

Para casos de carregamento diferentes da situação de flexão pura, diversos métodos de obtenção da resistência nominal foram desenvolvidos a partir de 1950, os quais podem ser vistos em várias publicações [19, 20, 21, 22, 23, 24]. Para o caso de vigas sujeitas a carregamentos aplicados abaixo e acima do nível do centro de torção (forças estabilizantes e desestabilizantes), tem-se mais recentemente os trabalhos de Nethercot e Rockey [25] e Nethercot [26], os quais consideram diferentes condições de contorno nas extremidades do comprimento destravado. No caso de vigas em balanço, têm-se os estudos de Anderson e Trahair [27], Nethercot [28] e Poley [29]. Muitos desses casos foram também apresentados por Chen e Lui [30].

Em 1977, Ojalvo e Chambers [31] apresentaram um trabalho onde são consideradas novas variáveis que influenciam o fenômeno da flambagem lateral com torção, entre elas, a presença de enrijecedores que impedem o empenamento das seções transversais em posições críticas. Foram feitos outros trabalhos nesta época relacionados ao assunto, por Vacharajittiphan e Trahair [32], Heins e Potocko [33] e Szewczak et al. [34].

Na década de 70, foram desenvolvidas também, pesquisas para se avaliar a resistência nominal à flambagem lateral com torção em vigas contínuas (Vacharajittiphan e Trahair [35], Nethercot [36], Trahair [37, 38, 39], Hartmann [40]), nas quais recomenda-se um método de solução simples e conservador, baseado na semelhança dos modos de flambagem de vigas contínuas e vigas simples.

Também na década de 70, para a análise inelástica da flambagem lateral com torção, têm-se o trabalho de Fukumoto e Kubo [41], que utiliza o Método das Diferenças Finitas. Entretanto, este método não é suficientemente geral para englobar as diversas situações que ocorrem na prática. Por esta razão, outros autores desenvolveram estudos utilizando o Método da Matriz de Transferência. Entre eles, Unger [42], que fez uso da matriz de transferência derivada do método de Runge-Kutta, e Yoshida e Imoto [43], que derivaram a matriz de transferência diretamente da solução geral das equações diferenciais e utilizaram um procedimento numérico para determinação da resistência à flambagem lateral com torção de vigas considerando vários tipos de condições de contorno.

Ainda para flambagem lateral com torção em regime inelástico, têm-se os estudos de Fukumoto e Galambos [44], em 1966, onde foi analisado o caso de vigas sujeitas a momento aplicado em apenas uma extremidade, considerando a influência das tensões residuais. No caso de momento fletor aplicado nas duas extremidades, Galambos [45] apresentou um método de solução baseado na determinação da redução das rigidezes lateral e de torção após o início do escoamento, incluindo também o efeito das tensões residuais, e propôs uma fórmula simplificada, que reduz consideravelmente o trabalho computacional. Em 1971, Hartmann [46], fez um estudo da derivação das equações diferenciais de compatibilidade e de equilíbrio dos nós internos, que são necessárias ao estudo da flambagem de vigas parcialmente escoadas, tendo seções transversais com pelo menos um eixo de simetria. As equações foram derivadas baseando-se no conceito do módulo tangente. Lay e Galambos [47], em 1966, examinaram o desempenho das contenções laterais em regime inelástico.

Para uma quantificação do efeito das contenções laterais na resistência nominal elástica, Zuk [48], em 1956, estudou oito casos de vigas e colunas. Alguns dos casos foram resolvidos diretamente das equações diferenciais, enquanto outros foram resolvidos aproximadamente pelo método da energia.

Lee e Galambos [49], em 1962, apresentaram os resultados de uma série de ensaios feitos para se estudar o comportamento de vigas curtas. Os objetivos deste estudo foram a determinação do máximo espaçamento entre seções com contenção à flambagem lateral com torção, para que a instabilidade não pudesse ocorrer, em vigas sujeitas a momento constante e, o estudo da resistência pós-flambagem nestas vigas.

No caso de contenção lateral contínua de vigas, estudos realizados entre 1963 e 1985 com métodos teóricos de análise e ensaios utilizando-se diafragmas resistentes à cortante foram apresentados por Lawson e Nethercot [50], Apparao et al. [51], Pincus [52], Errera [53] e Pincus e Fischer [54] entre outros.

Para a análise de vigas com variação na geometria, têm-se os trabalhos de Cheng et al. [55], de 1988, entre outros, onde são analisados os efeitos de recortes nas mesas para facilitar a ligação da viga a outros elementos da estrutura sobre o valor da resistência nominal ao momento fletor. O estudo é feito considerando-se os diversos tamanhos de recorte em relação ao comprimento da viga. Em 1990, Darwin [56] propôs uma fórmula para o modificar o momento de inércia à torção, de maneira a considerar a redução na resistência de vigas com abertura na alma. Também Thevendran e Shanmugan [57], em 1991, fizeram um estudo em que mostraram como as aberturas na alma de vigas submetidas a momento fletor influem na resistência nominal. Eles levaram em consideração a variação na posição das aberturas ao longo do comprimento da viga, e situações em que se tem mais de uma abertura na alma.

Em 1992, Shen e Zhang [58] propuseram um procedimento em que se utiliza o método dos elementos finitos para análise não linear da estabilidade de barras de aço, considerando condições de contorno e seções transversais quaisquer, as tensões residuais e as imperfeições geométricas. Os resultados obtidos foram comparados com os resultados de outros métodos numéricos e dados experimentais. Nesta mesma direção, têm-se também os trabalhos de Lu et al. [59] e Ding e Shen [60]. Para o estudo da influência de imperfeições geométricas, pode-se citar também o estudo de Guo e Chen [61].

Em 1996, Castro e Silva [62] apresentou um procedimento, também baseado no método dos elementos finitos, para a determinação da resistência nominal à flambagem lateral com torção de vigas de aço em regime elástico, considerando as diversas condições de contorno, seções transversais de diferentes formas e variações da seção transversal causadas por recortes nas mesas, aberturas na alma e lamelas.

Gaylord Jr. et al. [63], propôs um método simplificado para o cálculo de vigas em regime elasto-plástico, em que o valor do módulo de elasticidade E de cada elemento é substituído por E_t , cujo cálculo é feito considerando-se a relação entre as tensões de compressão que causam flambagem em regimes elasto-plástico, f_{inel} e elástico, f_{el} .

1.3. Tratamento Normalizado da Flambagem Lateral com Torção

A seguir são descritos os procedimentos utilizados pela especificação americana, AISC/LRFD [64], pela norma brasileira para projeto de estruturas de aço de edifícios, NBR 8800 [65] e pela especificação canadense CAN/CSA-S.16.1 [66], para determinação da resistência nominal ao momento fletor para o estado limite último de flambagem lateral com torção de vigas com seção I duplamente simétrica e feita uma breve comparação entre eles.

1.3.1. Procedimento proposto pelo AISC/LRFD [64]

O valor da resistência nominal ao momento fletor, em regime elástico, é baseado na equação clássica desenvolvida por Timoshenko e Gere [4], para as situações em que as extremidades do comprimento destravado apresentam vínculo de garfo e em que o momento fletor é constante:

$$M_{0cr} = \frac{P}{L_b} \sqrt{EI_y GI_t + \left(\frac{PE}{L_b}\right)^2 I_y C_w} \quad (1.1)$$

onde L_b é a distância entre duas seções contidas lateralmente (comprimento destravado), E o módulo de elasticidade longitudinal do aço, G o módulo de elasticidade transversal do aço, I_y o momento de inércia em relação ao eixo no plano da alma, I_t o momento de inércia à torção e C_w a constante de empenamento.

Para os casos onde o momento fletor não é constante entre as seções contidas lateralmente, o AISC/LRFD [64] propõe que o valor da resistência nominal seja dado por:

$$M_n = C_b M_{0cr} \quad (1.2)$$

onde M_{0cr} é dado pela equação (1) e C_b é um fator de modificação para momento não-uniforme, ou simplesmente fator de momento equivalente, igual a:

$$C_b = \frac{12,5 M_{max}}{2,5 M_{max} + 3 M_A + 4 M_B + 3 M_C} \quad (1.3)$$

onde M_{max} é o maior momento fletor no comprimento destravado, M_A o momento fletor a 1/4 do comprimento destravado, M_B o momento fletor no ponto médio do comprimento destravado e M_C o momento fletor a 3/4 do comprimento destravado, todos em valor absoluto. Esta equação do fator de momento equivalente foi levemente ajustada a partir da seguinte fórmula empírica, proposta por Kirby e Nethercot [67]:

$$C_b = \frac{12}{3(M_A/M_{max}) + 4(M_B/M_{max}) + 3(M_C/M_{max}) + 2} \quad (1.4)$$

Se o parâmetro de esbeltez da viga I , definido como a relação entre o comprimento destravado L_b e o raio de giração em relação ao eixo central de inércia situado no plano médio da alma (r_y) for menor que um valor limite I_r , dado por

$$I_r = \frac{0,707 \mathbf{b}_1}{M_r} \sqrt{I + \sqrt{I + \frac{4 \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_1^2} M_r^2}} \quad (1.5)$$

onde M_r é o momento fletor correspondente ao início do escoamento, igual a

$$M_r = (f_y - f_r) W_x \quad (1.6)$$

sendo f_y o limite de escoamento do aço, f_r a tensão residual de compressão na mesa comprimida, igual a 70 MPa para perfis laminados e 115 MPa para perfis soldados e W_x o módulo resistente elástico, e \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 dados por

$$\mathbf{b}_1 = p \sqrt{G E} \sqrt{I_t A} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{p^2 E}{4 G} \cdot \frac{A(d - t_f)^2}{I_t} \quad (1.8)$$

e maior que outro limite I_p , igual a

$$I_p = 1,75 \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (1.9)$$

a flambagem lateral com torção ocorrerá em regime elasto-plástico, e a resistência nominal é dada simplificada pela equação de uma reta que une os pontos (M_{pl}, I_p) e (M_r, I_r) , fatorada por C_b e limitada em M_{pl} , ou seja:

$$M_n = C_b \left[M_{pl} - (M_{pl} - M_r) \left(\frac{I - I_p}{I_r - I_p} \right) \right] \leq M_{pl} \quad (1.10)$$

onde M_{pl} é o momento de plastificação da viga. Se I não superar I_p , a seção mais solicitada torna-se uma rótula plástica antes que possa ocorrer flambagem lateral com torção na viga, e se I for maior que I_r , a flambagem ocorrerá em regime elástico e a resistência nominal recebe a denominação de momento crítico, sendo representada por M_{cr} .

A figura 1.7 ilustra a variação da resistência nominal ao momento fletor M_n em função do índice de esbeltez I e do valor de C_b .

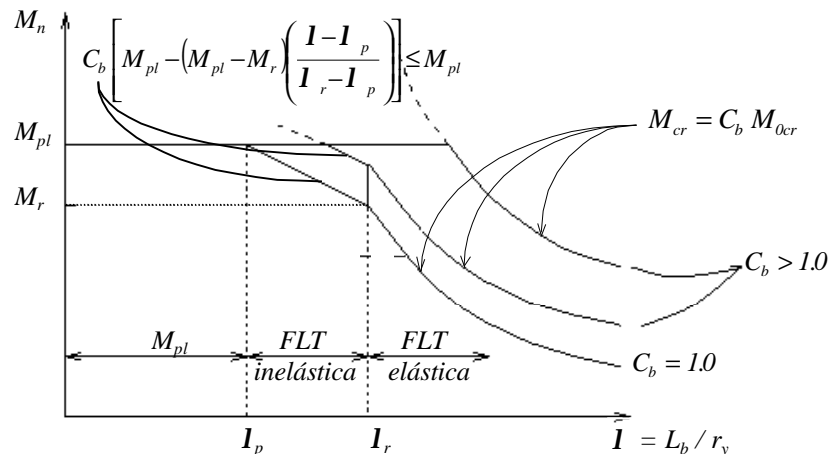


Figura 1.7 - Resistência nominal M_n em função do índice de esbeltez I e de C_b

O AISC/LRFD [64] estabelece também que:

- C_b pode ser simplificada tomando igual a 1,0 para todos os casos, obtendo-se desta forma, porém, muitas vezes valores bastante favoráveis à segurança;
- para vigas em balanço nas quais a extremidade livre não esteja contida lateralmente, os valores de C_b devem ser obrigatoriamente tomados igual a 1,0.

1.3.2. Procedimento proposto pela NBR 8800 [65]

O procedimento proposto pela NBR 8800 [65], é similar àquele do AISC/LFRD [64], conforme mostra a figura 1.8, com as seguintes modificações:

- o fator de momento equivalente C_b deve ser tomado conservativamente igual à unidade, exceto para casos de variação linear ou aproximadamente linear do diagrama de momento fletor, quando usa-se a equação proposta por Salvadori [11]:

$$C_b = 1,75 + 1,05 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) + 0,3 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \leq 2,3 \quad (1.11)$$

onde M_1 e M_2 representam, respectivamente, o menor e o maior dos momentos fletores, em valor absoluto, que atuam nas extremidades do comprimento destravado. A relação (M_1/M_2) tem sinal positivo quando os momentos provocam curvatura reversa, e negativo quando provocam curvatura simples;

- a grandeza I_r é modificada pelo fator C_b , e igual a

$$I_r = \frac{0,707 C_b \mathbf{b}_1}{M_r} \sqrt{I + \sqrt{I + \frac{4 \mathbf{b}_2}{C_b^2 \mathbf{b}_1^2} M_r^2}} \quad (1.12)$$

onde M_r é dado pela expressão (1.6), com a tensão residual de valor igual a 115 MPa para perfis laminados e soldados, e \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 são dados pelas expressões (1.7) e (1.8), respectivamente;

- para I entre I_p e I_r , a flambagem lateral com torção ocorre em regime elasto-plástico, e a resistência nominal é dada simplificada pela equação de uma reta que une os pontos (M_{pl}, I_p) e (M_r, I_r) :

$$M_n = M_{pl} - (M_{pl} - M_r) \left(\frac{I - I_p}{I_r - I_p} \right) \quad (1.13)$$

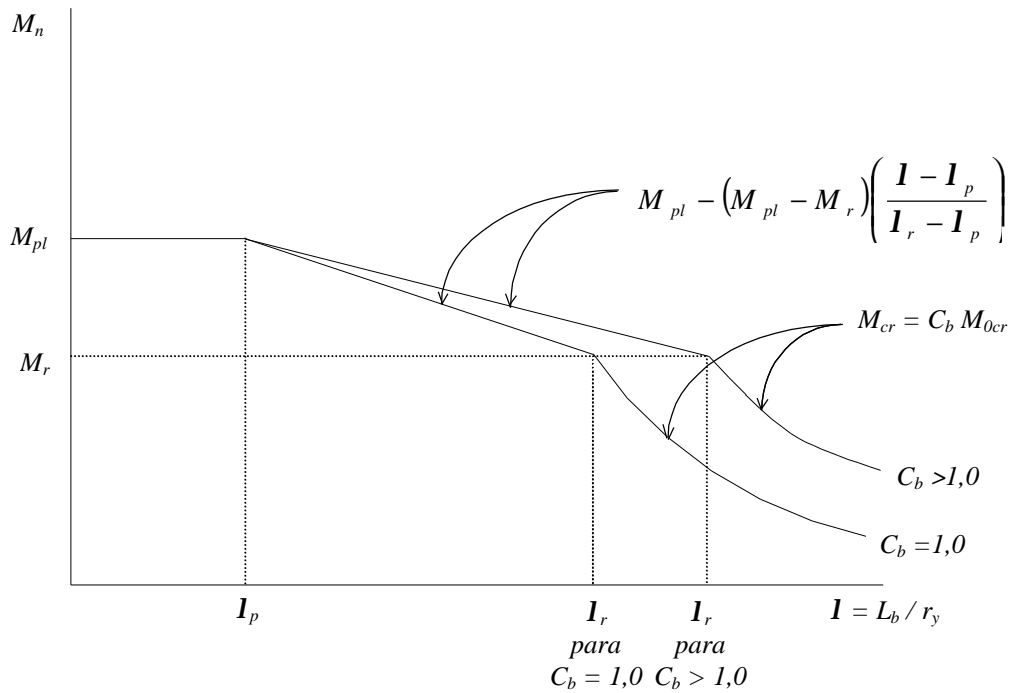


Figura 1.8 - Resistência nominal ao momento fletor de acordo com a NBR 8800 [65]

1.3.3. Procedimento proposto pelo CAN/CSA-S.16.1 [66]

A determinação da resistência nominal ao momento fletor, M_n , para o estado limite último de flambagem lateral com torção, é feita calculando-se inicialmente o momento crítico elástico, M_{cr} , por meio da equação:

$$M_{cr} = C_b \frac{P}{L_b} \sqrt{EI_y GI_t + \left(\frac{PE}{L_b} \right)^2 I_y C_w} \quad (1.14)$$

com C_b calculado como na NBR 8800 [65] (ver sub-item anterior). Se $M_{cr} \leq 0,67 M_{pl}$, a flambagem ocorre em regime elástico, e $M_n = M_{cr}$. Se $M_{cr} > 0,67 M_{pl}$, a flambagem ocorre em regime elasto-plástico, e

$$M_n = 1,15 M_{pl} \left(1 - 0,28 \frac{M_{pl}}{M_{cr}} \right) \leq M_{pl} \quad (1.15)$$

A figura 1.9 ilustra o procedimento.

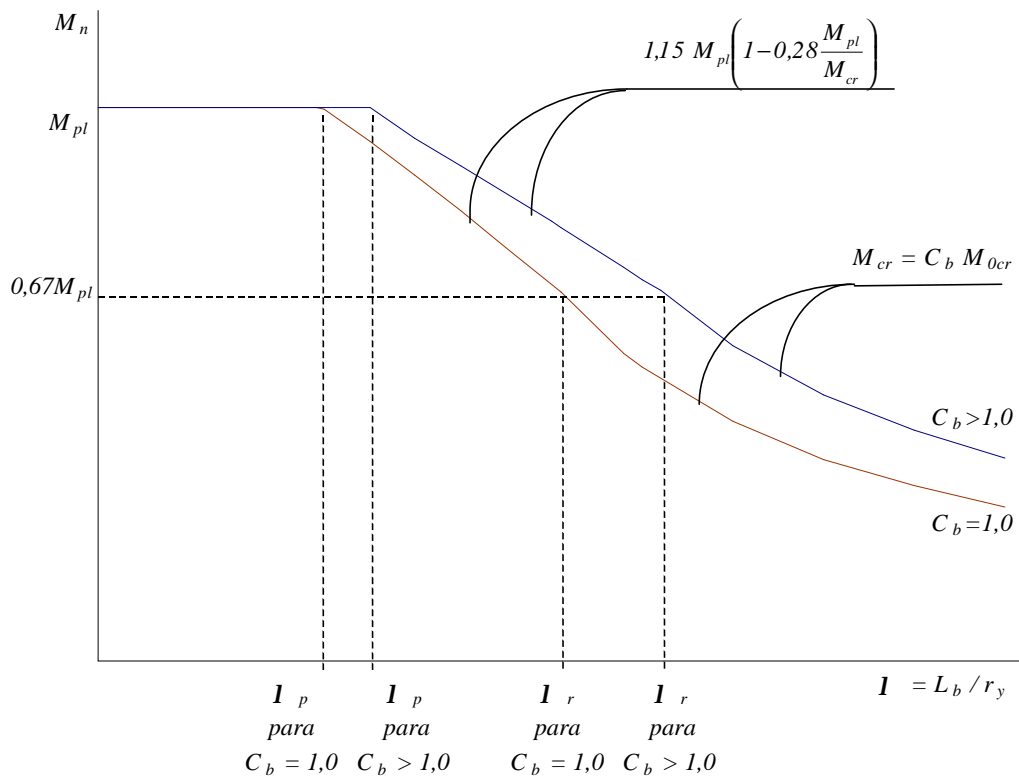


Figura 1.9 - Resistência nominal ao momento fletor de acordo com a CAN/CSA-S.16.1 [66]

1.3.4. Análise comparativa

Para efeito de comparação, foram determinadas as resistências nominais ao momento fletor de uma viga com seção I duplamente simétrica, soldada, com altura igual a 400 mm, largura das mesas igual a 200 mm e espessuras das mesas e da alma iguais a 19 mm e 8 mm, respectivamente, em função de $I = L_b / r_y$, por meio dos procedimentos propostos pelo AISC/LRFD [64], NBR 8800 [65] e CAN/CSA-S.16.1 [66]. As seções contidas lateralmente apresentam vínculo de garfo. O limite de escoamento do aço é igual a 250 MPa. Os resultados estão mostrados na figura 1.10. Tomaram-se dois carregamentos, a saber:

- *Caso 1:* flexão pura, o que significa ter $C_b = 1,00$ nas três especificações;
- *Caso 2:* carregamento hipotético, aplicado no nível do centro de torção, que proporciona $C_b = 1,32$ nas três especificações.

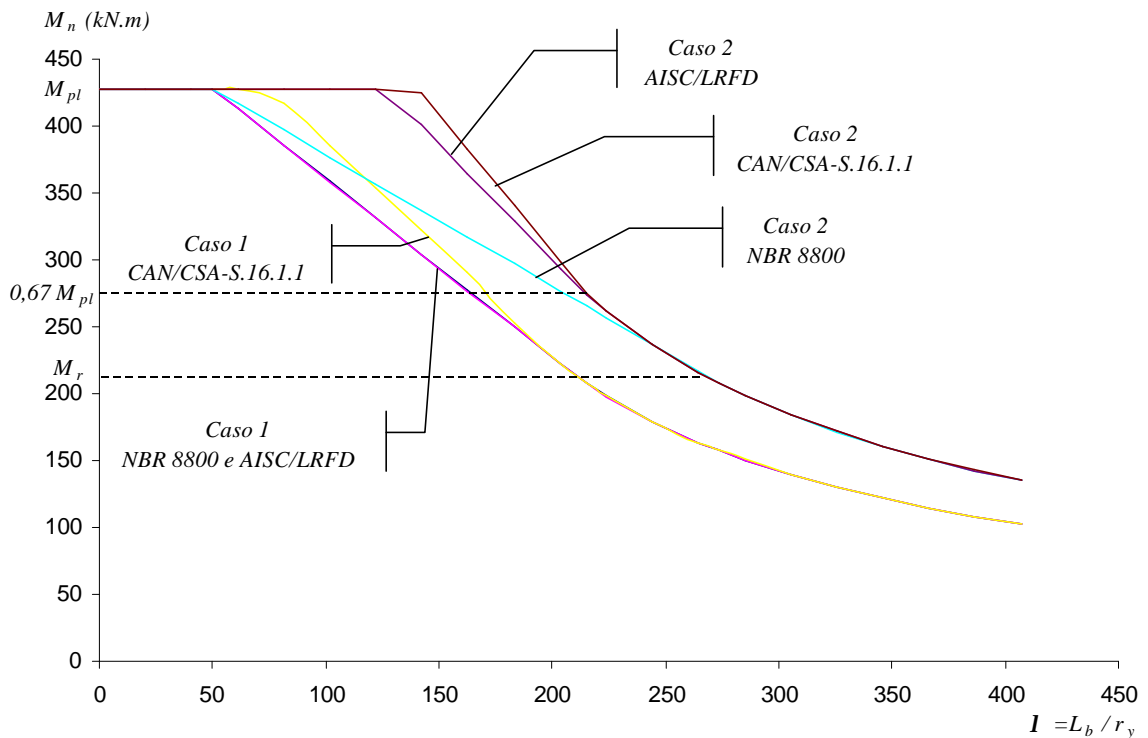


Figura 1.10 - Comparação entre os valores da resistência nominal à flambagem lateral com torção

Os procedimentos das três especificações de projeto de estruturas de aço apresentam as seguintes limitações principais:

- somente fornecem bons resultados se as seções com contenção lateral tiverem vínculo de garfo, uma vez que as equações apenas se aplicam a esta situação;
- a determinação da resistência nominal em regime elasto-plástico é feita de maneira simplificada;
- nas vigas com seção I, a distribuição da tensão residual é considerada sempre similar à apresentada na figura 1.11, com compressão nas bordas das mesas, cujo valor é muitas vezes bastante diferente do valor real (este tipo de distribuição é característico de perfis laminados e de perfis soldados feitos com chapas laminadas). Nos outros tipos de seção, a distribuição de tensões residuais também é considerada de maneira muito simplificada;

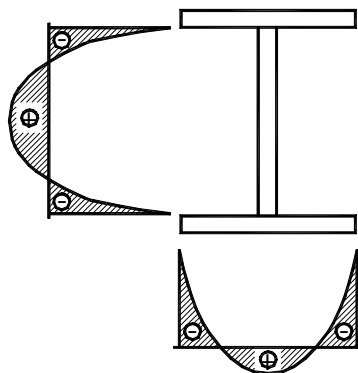


Figura 1.11– Distribuição de tensões residuais para uma viga com seção I

- não consideram a atuação de forças estabilizantes ou desestabilizantes;
- não prevêm qualquer variação da seção transversal;
- no caso de vigas com contenção lateral interna, não consideram o comportamento de peça contínua no plano de flambagem (cada trecho, entre duas seções com contenção lateral é analisado isoladamente);
- não consideram a influência das deformações no plano de flexão;
- não consideram as imperfeições geométricas.

1.4. Proposta de Trabalho

Os procedimentos propostos pelo AISC/LRFD [64], pela NBR 8800 [65] e pelo CAN/CSA-S.16.1 [66], embora parecidos, fornecem valores que podem ser bastante diferentes para a resistência nominal ao momento fletor quando a flambagem lateral com torção ocorre em regime elasto-plástico e o fator de momento equivalente supera a unidade. Nestas circunstâncias, de acordo com Trahair [27], os resultados fornecidos pelo CAN/CSA-S.16.1 [66], estão próximos dos limites superiores dos resultados de ensaios, enquanto que os resultados fornecidos pelo AISC/LRFD [64] se aproximam das médias dos resultados de ensaios. Os resultados fornecidos pela NBR 8800 [65] se situam abaixo destas médias e são os mais conservadores. É importante lembrar que as curvas de resistência das especificações citadas, em regime elasto-plástico, foram consideradas aplicáveis após serem comparadas com resultados de ensaios de perfis laminados ou perfis soldados constituídos por chapas laminadas. No entanto, conforme Pimenta [68], no Brasil, os perfis soldados são feitos com chapas cortadas a maçarico e

- vigas com lamelas, recortes nas mesas e aberturas na alma, no caso de perfis I duplamente simétricos;
- as tensões residuais que efetivamente estão presentes no perfil analisado, no caso de perfis I duplamente simétricos;

As influências das imperfeições geométricas e das deformações no plano de flexão não serão consideradas.

O desenvolvimento do programa computacional será feito tomando por base o programa MCE, desenvolvido por Castro e Silva [62], restrito ao regime elástico, codificado em Pascal e que utiliza o Método dos Elementos Finitos. Inicialmente, o programa MCE será portado para o ambiente Windows, utilizando-se o programa Delphi, da Borland, e a linguagem Object Pascal, o que permitirá:

- uma interface mais amigável com o usuário no que se refere à entrada de dados e apresentação de resultados;
- que sejam processadas vigas com até, aproximadamente, 50.000 elementos (o limite anterior era de cerca de 100 elementos).

Posteriormente, a abrangência do programa MCE será estendida ao regime elasto-plástico por meio da teoria do módulo tangente, trocando-se o módulo de elasticidade E pelo valor do módulo tangente E_t , tendo em vista a máxima tensão elástica de compressão em cada elemento da viga, conforme processo simplificado recomendado por Gaylord Jr. et al. [63].

A relação E_t/E em cada elemento da viga será obtida por meio da relação entre as tensões de compressão que causam flambagem em regimes elasto-plástico, f_{inel} e elástico, f_{el} .

A tensão f_{el} será obtida pela fórmula de Euler e f_{inel} tendo como referência a distribuição real das tensões residuais no perfil analisado, de acordo com processo previsto por Salmon e Johnson [69]. Obviamente, uma pequena imprecisão estará presente, uma vez que se chegará à relação E_t/E tomando-se apenas a máxima tensão de compressão.

2. O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO AO PROBLEMA DA FLAMBAGEM LATERAL COM TORÇÃO

2.1. Regime Elástico

2.1.1. Considerações gerais

Na determinação do carregamento que provoca a flambagem lateral com torção de vigas, considerando-se análise estática, duas formas de energia se envolvem no problema: a energia potencial dos esforços internos ou energia de deformação (U), e a energia potencial dos esforços externos ou simplesmente energia potencial (T). A energia potencial total do sistema (P) é dada pela soma destas duas parcelas de energia, ou seja:

$$P = U + T \quad (2.1)$$

Utilizando-se o Princípio da Conservação da Energia, uma vez que o sistema em questão é conservativo, percebe-se que tais grandezas se interagem de maneira a manter constante sua energia total, ou seja, a diminuição da energia de deformação implica no aumento da energia potencial e vice-versa, de modo que não há variação na energia total. Logo:

$$dP = dU + dT = 0 \quad (2.2)$$

Consegue-se assim, por meio do cálculo variacional, minimizar a energia potencial total e com isso chegar às soluções pretendidas.

2.1.2. Premissas básicas

Tendo por base os trabalhos de Rachid [17], Rachid e Mori [70], Laier e Barreiro [71], Palermo [72] e Castro e Silva [62], é desenvolvida a expressão da energia potencial total de uma viga para o caso da flambagem lateral com torção. Para isto, serão adotadas as seguintes premissas (figura 2.1):

- a espessura t_i é muito menor se comparada com as dimensões da seção transversal e estas são bastante menores que o comprimento da viga;
- a seção não se deforma em seu plano;
- o sistema de eixos xyz é escolhido de forma que a viga tenha sua seção transversal definida pelos eixos centrais de inércia x e y . O seu comprimento será definido ao longo do eixo longitudinal z , que passa pelo centro de gravidade da seção transversal. Além disso, tem-se uma coordenada s ao longo do esqueleto (linha que passa pela espessura média da seção transversal) e permite-se que a espessura t_i possa variar com s . O centro de torção é definido por D , de coordenadas x_D e y_D ;

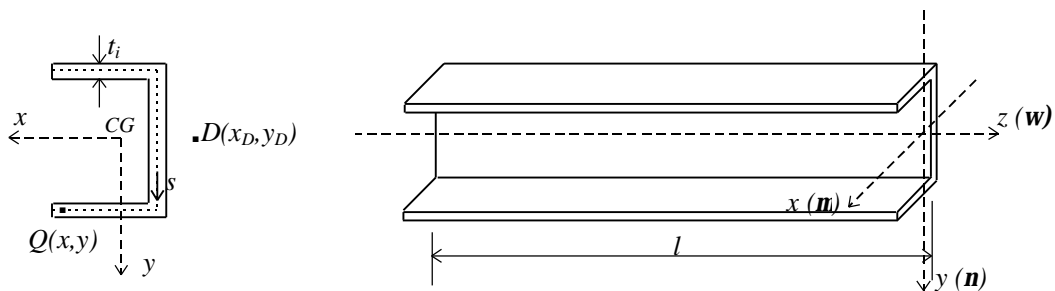


Figura 2.1 - Sistemas de eixos adotados com seus sentidos positivos.

- os deslocamentos possíveis de ocorrer são o giro da seção transversal em torno do eixo longitudinal, paralelo ao eixo z , que passa pelo centro de torção (f), a translação horizontal na direção do eixo x (m), a inclinação correspondente (m'), a

translação vertical na direção do eixo y (\mathbf{n}) e o empenamento (\mathbf{w}), que é função da derivada primeira de \mathbf{f} ;

- para um ponto qualquer da seção transversal, Q , que tenha coordenadas genéricas (x,y) , os deslocamentos são dados em função dos deslocamentos do centro de torção D ($\mathbf{m}_D, \mathbf{n}_D$) e do giro \mathbf{f} , que caracterizam a posição deformada,

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_D - (y - y_D) \mathbf{f} \quad (2.3)$$

e

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_D + (x - x_D) \mathbf{f} \quad (2.4)$$

Para o estudo da flambagem lateral com torção, interessará apenas o deslocamento \mathbf{m} dado pela expressão (2.3), que relaciona a translação horizontal na direção do eixo x (\mathbf{m}_D) com a rotação em torno do eixo longitudinal que passa por D (\mathbf{f}). Deve-se ressaltar ainda que, devido ao fato da seção ser indeformável em seu plano, passa-se a ter movimento de corpo rígido no plano xy e os deslocamentos são função apenas de z , ou seja, $\mathbf{m}_D(z)$ e $\mathbf{f}(z)$;

- só serão permitidos carregamentos transversais ou momentos fletores que causem flexão no plano definido pelos eixos y e z , e além disso, as forças transversais devem ter sua linha de ação passando pelo centro de torção;
- os esforços solicitantes a serem considerados são o esforço cortante, o momento fletor e o bimomento;
- as tensões internas consideradas no estudo da estabilidade, segundo a teoria de Vlasov [73] são a tensão normal (f_b) e a tensão de cisalhamento (f_v). A tensão normal, em teoria de 2ª ordem e pequenos deslocamentos, é dada por:

$$f_b = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x + \frac{B}{C_w} w \quad (2.5)$$

onde M_x e I_x são, respectivamente, o momento fletor e o momento de inércia em relação ao eixo x , M_y é o momento fletor, em 2ª ordem, em relação ao eixo y , I_y é o momento de inércia em relação ao eixo y , B é o bimomento, C_w é o momento de inércia setorial ou constante de empenamento e w é a área setorial, dada em função da coordenada s .

A tensão de cisalhamento a ser considerada é apenas aquela decorrente da torção uniforme, ou torção de Saint Venant, (f_{vl}), uma vez que, as parcelas da tensão de cisalhamento oriundas da flexão e da flexo-torção são desprezíveis. Portanto:

$$f_{vl} = \frac{2 M_t}{I_t} r \quad (2.6)$$

onde M_t é o momento de torção uniforme em 2ª ordem, I_t é o momento de inércia à torção e r é a ordenada que parte do esqueleto, perpendicularmente a ele, de forma que a tensão varie linearmente até a borda do elemento, conforme é mostrado na figura 2.2.

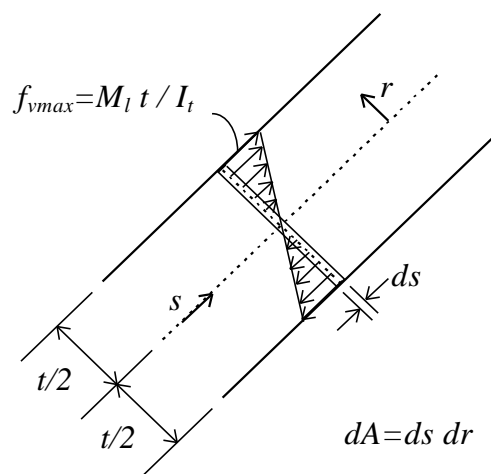


Figura 2.2 - Variação da tensão de torção livre ao longo da espessura do elemento.

2.1.3. Energia de deformação

A única contribuição que se tem para esta parcela da energia, é a do trabalho realizado pelas forças internas segundo os deslocamentos decorrentes da deformação da estrutura. Isto porque, conforme pode-se perceber, o trabalho resultante do movimento de corpo rígido não irá influir nos resultados, uma vez que os esforços internos são

autoequilibrados (ações e reações entre elementos adjacentes). A expressão da energia de deformação é portanto, igual à expressão do trabalho para um elemento infinitesimal de volume dV , sujeito às tensões normais e de cisalhamento, e é dada por:

$$dU = \frac{1}{2} (f_b \mathbf{e} + f_{vl} \mathbf{g}_l) dV \quad (2.7)$$

Integrando-se no volume e aplicando-se as relações da lei de Hooke, chega-se a:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{f_b^2}{E} + \frac{f_{vl}^2}{G} \right) dV \quad (2.8)$$

Substituindo-se f_b pela expressão (2.5) e f_{vl} pela expressão (2.6), e retirando-se os termos constantes das integrais, obtém-se

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{M_x^2}{E I_x^2} \left(\int_A y^2 dA \right) + \frac{M_y^2}{E I_y^2} \left(\int_A x^2 dA \right) + \frac{B^2}{E C_w^2} \left(\int_A w^2 dA \right) \right] dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{4 M_l^2}{G I_t^2} \left(\int_s \int_{-t/2}^{t/2} r^2 dr ds \right) dz \quad (2.9)$$

Resolvendo-se a integral em r do termo entre parêntesis da segunda parcela, tem-se

$$\int_s \int_{-t/2}^{t/2} r^2 dr ds = \int_s \frac{r^3}{3} \Big|_{-t/2}^{t/2} ds = \int_s \frac{t^3}{12} ds = \frac{1}{4} \int_s \frac{t^3}{3} ds \quad (2.10)$$

Por definição,

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (2.11)$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (2.12)$$

$$C_w = \int_A w^2 dA \quad (2.13)$$

e

$$I_t = \int_s \frac{t^3}{3} ds \quad (2.14)$$

Portanto a expressão (2.9) pode ser escrita na forma

$$U = \frac{I}{2} \int_0^l \left(\frac{M_x^2}{E I_x} + \frac{M_y^2}{E I_y} + \frac{B^2}{E C_w} + \frac{M_l^2}{G I_t} \right) dz \quad (2.15)$$

Como os esforços correspondem aos deslocamentos, são válidas as relações:

$$M_x = -E I_x \mathbf{n}_D'' \quad (2.16)$$

$$M_y = -E I_y \mathbf{m}_D'' \quad (2.17)$$

$$B = E C_w \mathbf{f}'' \quad (2.18)$$

e

$$M_l = G I_t \mathbf{f}' \quad (2.19)$$

Relembrando que, para a flambagem lateral com torção, apenas os deslocamentos de translação horizontal (\mathbf{m}_D) e rotação (\mathbf{f}) são importantes, pode-se desconsiderar o termo envolvendo o momento fletor em relação ao eixo x (M_x), pois este esforço levaria a deslocamentos de translação vertical (\mathbf{n}_D). Portanto, levando (2.17) a (2.19) na expressão (2.15), chega-se finalmente à expressão da energia de deformação

$$U = \frac{I}{2} \int_0^l \left[E I_y (\mathbf{m}_D'')^2 + E C_w (\mathbf{f}'')^2 + G I_t (\mathbf{f}')^2 \right] dz \quad (2.20)$$

2.1.4. Energia potencial

Contribui para a energia potencial o trabalho realizado pela ação das forças externas, que pode ser dividido em duas parcelas: uma primeira devida ao trabalho das forças externas nos deslocamentos correspondentes em 1^a ordem, e uma segunda parcela devida ao trabalho destas mesmas forças externas nos deslocamentos de 2^a ordem.

Para facilitar o desenvolvimento da expressão da energia potencial, os termos das duas parcelas serão analisados separadamente e, no final, suas contribuições serão somadas.

2.1.4.1. Forças transversais nos deslocamentos de 1ª ordem

Conforme o item 2.2, somente serão consideradas forças transversais atuando na direção do eixo y de modo que a flexão será sempre no plano yz . Além disso, apenas forças concentradas (P) e forças distribuídas (q) serão previstas.

Para se analisar o trabalho realizado pela ação destas forças, considerando-se os deslocamentos em 1ª ordem, primeiramente aplica-se uma força concentrada P_i , distanciada do nível do centro de torção de um valor e_i . Os deslocamentos do ponto de aplicação da força serão os deslocamentos do centro de torção D .

A parcela da energia devida à ação de todas as forças concentradas, considerando-se a contribuição do trabalho no deslocamento do centro de torção, é dada por

$$T_l^{(P)} = -\sum P_i \mathbf{n}_{Di} \quad (2.21)$$

Para as forças distribuídas, o desenvolvimento é feito de maneira análoga, chegando-se assim à seguinte expressão para a energia potencial decorrente do trabalho das forças atuantes:

$$T_l = T_l^{(P)} + T_l^{(q)} = -\sum P_i \mathbf{n}_{Di} - \int_0^l q \mathbf{n}_D dz \quad (2.22)$$

De acordo com Rachid [17], aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais às forças que estão atuando nos deslocamentos do centro de torção, sendo M_x o esforço interno correspondente, e efetuando-se o cálculo necessário, tem-se que:

$$-\sum P_i \mathbf{n}_{Di} - \int_0^l q \mathbf{n}_D dz = \int_0^l M_x (\mathbf{n}_D'' + \mathbf{m}_D'' \mathbf{f}) dz \quad (2.23)$$

Como apenas os termos em \mathbf{m}_D e \mathbf{f} são relevantes para o presente estudo, e substituindo a expressão anterior na expressão (2.22), chega-se à parcela da energia potencial devida à contribuição das forças transversais:

$$T_1 = \int_0^l M_x \mathbf{m}_D'' \mathbf{f} dz \quad (2.24)$$

2.1.4.2. Forças transversais nos deslocamentos de 2ª ordem

Neste caso, para se considerar o trabalho realizado pela ação destas forças, nos deslocamentos correspondentes em 2ª ordem, será usado o mesmo procedimento do item 2.4.1. Assim, aplicando-se uma força concentrada P_i , excêntrica em relação ao centro de torção de um valor e_i , obtém-se o deslocamento em 2ª ordem mostrado na figura 2.3.

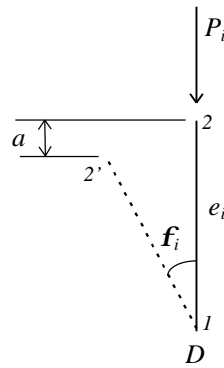


Figura 2.3 - Deslocamento em 2ª ordem devido à aplicação de uma força concentrada.

O deslocamento a , na direção da força, é dado por:

$$a = (1 - \cos \mathbf{f}_i) e_i = 2 \left(\text{sen} \frac{\mathbf{f}_i}{2} \right)^2 e_i \quad (2.25)$$

onde, fazendo-se as aproximações para ângulos pequenos, tem-se:

$$a = \frac{e_i (\mathbf{f}_i)^2}{2} \quad (2.26)$$

A energia devida à ação das forças concentradas é dada por:

$$T_2^{(P)} = - \sum \frac{P_i e_i (\mathbf{f}_i)^2}{2} \quad (2.27)$$

Desenvolvendo-se os termos para as forças distribuídas, chega-se à seguinte expressão para a energia potencial decorrente do trabalho das forças atuantes em deslocamentos de 2ª ordem:

$$T_2 = T_2^{(P)} + T_2^{(q)} = -\sum \frac{P_i e_i (\mathbf{f}_i)^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^l q e (\mathbf{f})^2 dz \quad (2.28)$$

Além disso, conforme Rachid e Mori [70], existe ainda uma contribuição destas forças transversais correspondente aos deslocamentos em 2ª ordem, porém, esta parcela será analisada através da tensão relativa a elas, em 1ª ordem. Neste caso, os momentos fletores e o bimomento decorrentes desta tensão serão relacionados com os carregamentos aplicados. De acordo com o item 2.2, só serão permitidos carregamentos transversais ou momentos fletores que causem flexão no plano definido pelos eixos yz, com o que a sollicitação de momento fletor em relação ao eixo y (M_y) será sempre nula em 1ª ordem, e apenas a parcela do momento M_x da tensão de normal f_b irá contribuir para a expressão da energia potencial.

Ao se considerar a deformação proveniente da atuação destes esforços, verifica-se que um elemento de volume $dz.dA$ (figura 2.4.a) sofre os deslocamentos \mathbf{m} e \mathbf{n} dados pelas expressões (2.3) e (2.4), de modo que sua configuração passa a ser aquela mostrada na figura 2.4.b.

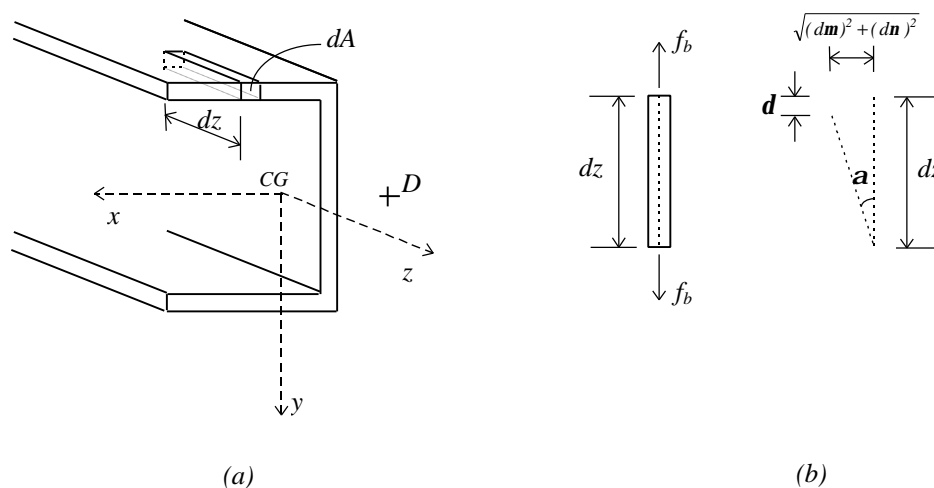


Figura 2.4 - Deslocamentos em 2ª ordem de um elemento de volume $dz.dA$.

A inclinação \mathbf{a} do elemento, é dada por:

$$\mathbf{a} = \frac{\sqrt{(d\mathbf{m})^2 + (d\mathbf{n})^2}}{dz} = \sqrt{\mathbf{m}'^2 + \mathbf{n}'^2} \quad (2.29)$$

e o deslocamento \mathbf{d} na direção z , por

$$\mathbf{d} = (1 - \cos \mathbf{a}) dz = 2 (\sin \mathbf{a} / 2)^2 dz \quad (2.30)$$

Utilizando-se a teoria de pequenos deslocamentos, pode-se aproximar o seno pelo próprio ângulo, ou seja:

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{a}^2}{2} dz \quad (2.31)$$

e levando as relações (2.29) em (2.31), tem-se que

$$\mathbf{d} = \frac{[\mathbf{m}'_D - (y - y_D)\mathbf{f}'^2] + [\mathbf{n}'_D + (x - x_D)\mathbf{f}'^2]}{2} dz \quad (2.32)$$

A energia, considerando-se o trabalho das tensões f_b , devido ao momento fletor M_x e ao bimomento, B , durante o deslocamento \mathbf{d} , é dada então por:

$$T_3 = \int_0^l \int_A f_b dA \mathbf{d} = \int_0^l \int_A \left(\frac{M_x}{I_x} y + \frac{B}{C_w} w \right) dA \mathbf{d} \quad (2.34)$$

Fazendo-se as substituições e simplificações adequadas, chega-se a

$$T_3 = \frac{I}{2} \int_0^l \left[2 M_x (k_y - y_D) + \frac{U_w}{C_w} B \right] (\mathbf{f}')^2 dz \quad (2.35)$$

onde,

$$k_y = \frac{I}{2 I_x} \int_A y (x^2 + y^2) dA \quad (2.36)$$

que é a coordenada do ponto de Kindem na direção do eixo y , e U_w é a constante de Vlasov, dada por

$$U_w = \int_A w (x^2 + y^2) dA \quad (2.37)$$

Esta característica geométrica da seção se anula para seções que tenham pelo menos um eixo de simetria, o que ocorre no caso dos perfis que serão estudados neste trabalho (ver item 1.4). Portanto, esta parcela da energia potencial será desconsiderada nos cálculos subsequentes, e a energia potencial passa a ser:

$$T_3 = \frac{I}{2} \int_0^l 2 M_x (k_y - y_D) (\mathbf{f}')^2 dz \quad (2.38)$$

2.1.4.3. Expressão da energia potencial

Somando-se as parcelas desenvolvidas nos itens 2.4.1 e 2.4.2, obtém-se a energia potencial dos esforços externos, dada por:

$$T = \frac{I}{2} \int_0^l [2 M_x (k_y - y_D) (\mathbf{f}')^2 + 2 M_x \mathbf{m}_D'' \mathbf{f} - q e (\mathbf{f})^2] dz - \frac{I}{2} \sum P_i e_i (\mathbf{f}_i)^2 \quad (2.39)$$

2.1.5. Energia potencial total

A energia potencial total (\mathbf{P}) é dada pela soma da energia de deformação (U), fornecida pela expressão (2.20), com a energia potencial (T), apresentada na expressão (2.39). Portanto, tem-se:

$$\mathbf{P} = \frac{I}{2} \int_0^l [E I_y (\mathbf{m}_D'')^2 + E C_w (\mathbf{f}'')^2 + G I_t (\mathbf{f}')^2 + 2 M_x (k_y - y_D) (\mathbf{f}')^2 + 2 M_x \mathbf{m}_D'' \mathbf{f} - q e (\mathbf{f})^2] dz - \frac{I}{2} \sum P_i e_i (\mathbf{f}_i)^2 \quad (2.40)$$

Ou, na forma de funcional:

$$\mathbf{P} = \int_0^l F(\mathbf{m}_D'', \mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}'') dz - \frac{I}{2} \sum P_i e_i (\mathbf{f}_i)^2 \quad (2.41)$$

onde

$$F(\mathbf{m}_D'', \mathbf{f}, \mathbf{f}', \mathbf{f}'') = \frac{1}{2} \left[E I_y (\mathbf{m}_D'')^2 + E C_w (\mathbf{f}'')^2 + G I_t (\mathbf{f}')^2 + 2 M_x (k_y - y_D) (\mathbf{f}')^2 + 2 M_x \mathbf{m}_D'' \mathbf{f} - q e (\mathbf{f})^2 \right] \quad (2.42)$$

Aplicando-se as equações de Euler, do Cálculo Variacional, dadas para o caso em estudo por:

$$\frac{\mathcal{F} F}{\mathcal{F} \mathbf{m}_D} - \left(\frac{\mathcal{F} F}{\mathcal{F} \mathbf{m}_D'} \right)' + \left(\frac{\mathcal{F} F}{\mathcal{F} \mathbf{m}_D''} \right)'' = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\mathcal{F} F}{\mathcal{F} \mathbf{f}} - \left(\frac{\mathcal{F} F}{\mathcal{F} \mathbf{f}'} \right)' + \left(\frac{\mathcal{F} F}{\mathcal{F} \mathbf{f}''} \right)'' = 0 \quad (2.44)$$

no funcional da energia potencial total, dada pela expressão (2.42), chegam-se às equações diferenciais do problema (admitindo-se seção transversal constante)

$$E I_y \mathbf{m}_D^{IV} + (M_x \mathbf{f})'' = 0 \quad (2.45)$$

$$E C_w \mathbf{f}^{IV} - G I_t \mathbf{f}'' - 2 (k_y - y_D) (M_x \mathbf{f}')' - q e \mathbf{f} + M_x \mathbf{m}_D'' = 0 \quad (2.46)$$

As soluções dessas equações diferenciais são dadas pelas funções $\mathbf{m}_D(z)$ e $\mathbf{f}(z)$, as quais tornam a energia potencial total (\mathbf{P}) estacionária. Entretanto, a resolução destas equações é bastante trabalhosa, sendo interessante muitas vezes recorrer às funções de Bessel. Na prática, no entanto, costuma-se evitar este tipo de solução.

Neste trabalho será utilizado o processo de Rayleigh-Ritz, com o qual se consegue contornar a resolução das equações através da escolha de funções aproximadoras para $\mathbf{m}_D(z)$ e $\mathbf{f}(z)$, sendo estas funções dependentes de alguns parâmetros. Com isso a energia total fica expressa em termos destes parâmetros, e o problema resume-se em encontrar o extremo de uma função de um número finito de variáveis. O único cuidado a se tomar com relação a este método de resolução fica por conta da escolha conveniente das funções aproximadoras, uma vez que as mesmas devem satisfazer as condições de contorno para cada caso particular.

Além disso, sabe-se que a utilização deste processo em problemas de 1ª espécie (bifurcação) conduz a um sistema de equações homogêneas nos parâmetros, e a obtenção da força crítica aproximada é dada com a anulação do determinante dos coeficientes dessas equações.

2.1.6. Escolha das funções m_i e f

Serão adotadas funções contínuas e válidas para um segmento de viga, pois desta forma é possível se evitar o problema das condições de contorno, uma vez que as integrações serão independentes das particularidades de cada caso, as quais serão introduzidas apenas na automatização do método.

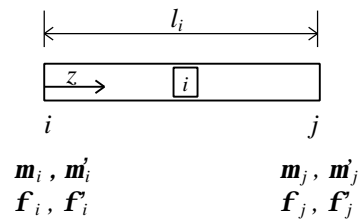


Figura 2.5 - Segmento genérico i .

Um segmento genérico i é apresentado na figura 2.5, onde as extremidades correspondem aos nós i e j , sendo $j=i+1$ e l_i o seu comprimento. Os deslocamentos de cada nó, tomados em relação ao centro de torção, são as translações horizontais na direção do eixo x (\mathbf{m}_i e \mathbf{m}_j), as derivadas destas translações (\mathbf{m}'_i e \mathbf{m}'_j), as rotações da seção (\mathbf{f}_i e \mathbf{f}_j) e as derivadas destas rotações (\mathbf{f}'_i e \mathbf{f}'_j). Estes deslocamentos são os parâmetros que definirão a elástica.

A função a ser adotada para as translações horizontais \mathbf{m}_D é da forma polinomial, dada por

$$\mathbf{m}_D = a z^3 + b z^2 + c z + d \quad (2.47)$$

e as condições de contorno a serem impostas, de modo a que ela atenda aos parâmetros pré-escolhidos, são

- para $z=0$: $\mathbf{m}_D = \mathbf{m}$

$$\mathbf{m}'_D = \mathbf{m}'_i$$

- para $z=l_i$: $\mathbf{m}_D = \mathbf{m}$

$$\mathbf{m}'_D = \mathbf{m}'_j$$

Derivando-se a expressão (2.47) e aplicando-se as condições de contorno apresentadas, determinam-se as expressões de a , b , c e d :

$$a = \frac{(\mathbf{m}'_i + \mathbf{m}'_j)}{l_i^2} - \frac{2(\mathbf{m}_j - \mathbf{m}_i)}{l_i^3} \quad (2.48)$$

$$b = \frac{3(\mathbf{m}_j - \mathbf{m}_i)}{l_i^2} - \frac{(2\mathbf{m}'_i + \mathbf{m}'_j)}{l_i} \quad (2.49)$$

$$c = \mathbf{m}'_i \quad (2.50)$$

e

$$d = \mathbf{m}_i \quad (2.51)$$

Substituindo as expressões (2.48) a (2.51) na expressão (2.47) e efetuando-se as derivadas necessárias para a integração de \mathbf{P} , tem-se

$$\mathbf{m}_D = \left[\frac{(\mathbf{m}'_i + \mathbf{m}'_j)}{l_i^2} - \frac{2(\mathbf{m}_j - \mathbf{m}_i)}{l_i^3} \right] z^3 + \left[\frac{3(\mathbf{m}_j - \mathbf{m}_i)}{l_i^2} - \frac{(2\mathbf{m}'_i + \mathbf{m}'_j)}{l} \right] z^2 + \mathbf{m}'_i z + \mathbf{m}_i \quad (2.52)$$

$$\mathbf{m}'_D = 3 \left[\frac{(\mathbf{m}'_i + \mathbf{m}'_j)}{l_i^2} - \frac{2(\mathbf{m}_j - \mathbf{m}_i)}{l_i^3} \right] z^2 + 2 \left[\frac{3(\mathbf{m}_j - \mathbf{m}_i)}{l_i^2} - \frac{(2\mathbf{m}'_i + \mathbf{m}'_j)}{l} \right] z + \mathbf{m}'_i \quad (2.53)$$

$$\mathbf{m}''_D = 6 \left[\frac{(\mathbf{m}'_i + \mathbf{m}'_j)}{l_i^2} - \frac{2(\mathbf{m}_j - \mathbf{m}_i)}{l_i^3} \right] z + 2 \left[\frac{3(\mathbf{m}_j - \mathbf{m}_i)}{l_i^2} - \frac{(2\mathbf{m}'_i + \mathbf{m}'_j)}{l} \right] \quad (2.54)$$

Para as rotações \mathbf{f} , a função aproximadora também é do tipo polinomial, e os cálculos são feitos como para as translações \mathbf{m} , chegando-se a

$$\mathbf{f} = \left[\frac{(\mathbf{f}'_i + \mathbf{f}'_j)}{l_i^2} - \frac{2(\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i)}{l_i^3} \right] z^3 + \left[\frac{3(\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i)}{l_i^2} - \frac{(2\mathbf{f}'_i + \mathbf{f}'_j)}{l} \right] z^2 + \mathbf{f}'_i z + \mathbf{f}_i \quad (2.55)$$

$$\mathbf{f}' = 3 \left[\frac{(\mathbf{f}'_i + \mathbf{f}'_j)}{l_i^2} - \frac{2(\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i)}{l_i^3} \right] z^2 + 2 \left[\frac{3(\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i)}{l_i^2} - \frac{(2\mathbf{f}'_i + \mathbf{f}'_j)}{l} \right] z + \mathbf{f}'_i \quad (2.56)$$

$$\mathbf{f}'' = 6 \left[\frac{(\mathbf{f}'_i + \mathbf{f}'_j)}{l_i^2} - \frac{2(\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i)}{l_i^3} \right] z + 2 \left[\frac{3(\mathbf{f}_j - \mathbf{f}_i)}{l_i^2} - \frac{(2\mathbf{f}'_i + \mathbf{f}'_j)}{l} \right] \quad (2.57)$$

2.1.7. Contribuição do segmento i para a expressão de P

As expressões (2.52) a (2.57) são levadas na expressão (2.40), e as integrais são efetuadas, no intervalo de comprimento l_i , de maneira a se encontrar a energia potencial total do segmento (P_i), dependente apenas dos parâmetros \mathbf{m} , \mathbf{m}_j , \mathbf{m}'_i , \mathbf{m}'_j , \mathbf{f}_i , \mathbf{f}_j , \mathbf{f}'_i e \mathbf{f}'_j . Portanto, realizando-se as integrações separadamente:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{1}{2} \int_0^{l_i} E I_y (\mathbf{m}''_D)^2 dz &= \frac{E I_y}{2} \left[\frac{12}{l_i^3} (\mathbf{m}_i^2 - 2\mathbf{m}_i \mathbf{m}_j + \mathbf{m}_j^2) + \frac{4}{l_i} (\mathbf{m}_i'^2 + \mathbf{m}_i' \mathbf{m}_j' + \mathbf{m}_j'^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{l_i^2} (\mathbf{m}_i \mathbf{m}_i' + \mathbf{m}_i \mathbf{m}_j' - \mathbf{m}_j \mathbf{m}_i' - \mathbf{m}_j \mathbf{m}_j') \right] \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{1}{2} \int_0^{l_i} E C_w (\mathbf{f}'')^2 dz &= \frac{E C_w}{2} \left[\frac{12}{l_i^3} (\mathbf{f}_i^2 - 2\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_j^2) + \frac{4}{l_i} (\mathbf{f}_i'^2 + \mathbf{f}_i' \mathbf{f}_j' + \mathbf{f}_j'^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{12}{l_i^2} (\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i' + \mathbf{f}_i \mathbf{f}_j' - \mathbf{f}_j \mathbf{f}_i' - \mathbf{f}_j \mathbf{f}_j') \right] \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{1}{2} \int_0^{l_i} G I_t (\mathbf{f}')^2 dz &= \frac{G I_t}{2} \left[\frac{6}{5l_i} (\mathbf{f}_i^2 - 2\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_j^2) + \frac{l_i}{15} (2\mathbf{f}_i'^2 - \mathbf{f}_i' \mathbf{f}_j' + 2\mathbf{f}_j'^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} (\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i' + \mathbf{f}_i \mathbf{f}_j' - \mathbf{f}_j \mathbf{f}_i' - \mathbf{f}_j \mathbf{f}_j') \right] \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\bullet \frac{I}{2} \int_0^{l_i} 2 M_x (k_y - y_D) (\mathbf{f}')^2 dz \quad (2.61)$$

O momento fletor M_x também é uma função de z , uma vez que ele corresponde à sollicitação em um ponto qualquer, devida à atuação de uma força transversal distribuída, a uma distância z da origem do segmento i , conforme é mostrado na figura 2.6, ou seja

$$M_x = M_i + V_i z - \frac{q_i}{2} z^2 \quad (2.62)$$

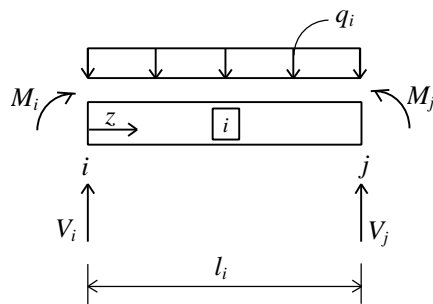


Figura 2.6 - Momento fletor sollicitante M_x no segmento i .

onde M_i e V_i são, respectivamente, o momento fletor e o esforço cortante na seção i , e q_i é a força transversal distribuída no segmento. Portanto, as parcelas da integral devidas ao momento fletor M_x serão dadas em função da equação (2.62). Desta forma a expressão (2.61) pode ser reescrita como a soma das seguintes parcelas

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} \int_0^{l_i} 2 M_i (k_y - y_D) (\mathbf{f}')^2 dz &= M_i (k_y - y_D) \left[\frac{6}{5 l_i} (\mathbf{f}_i^2 - 2\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_j^2) + \right. \\ &\left. + \frac{l_i}{15} (2\mathbf{f}_i'^2 - \mathbf{f}_i \mathbf{f}_j' + 2\mathbf{f}_j'^2) + \frac{1}{5} (\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i' + \mathbf{f}_i \mathbf{f}_j' - \mathbf{f}_j \mathbf{f}_i' - \mathbf{f}_j \mathbf{f}_j') \right] \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{I}{2} \int_0^{l_i} 2 V_i (k_y - y_D) z (\mathbf{f}')^2 dz &= V_i (k_y - y_D) \left[\frac{3}{5} (\mathbf{f}_i^2 - 2\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_j^2) + \right. \\ &\left. + \frac{l_i^2}{30} (\mathbf{f}_i'^2 - \mathbf{f}_i \mathbf{f}_j' + 3\mathbf{f}_j'^2) + \frac{l_i}{5} (\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i' - \mathbf{f}_j \mathbf{f}_i') \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 \frac{q_i}{2} (k_y - y_D) z^2 (\mathbf{f}')^2 dz = -\frac{q_i}{2} (k_y - y_D) \left[\frac{12 l_i}{35} (\mathbf{f}_i^2 - 2\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j + \mathbf{f}_j^2) + \frac{l_i^3}{105} (2\mathbf{f}_i'^2 - 3\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j' + 9\mathbf{f}_j'^2) + \frac{l_i^2}{35} (5\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i' - 2\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j' - 5\mathbf{f}_j \mathbf{f}_i' + 2\mathbf{f}_j \mathbf{f}_j') \right] \quad (2.65)$$

$$\bullet \frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 M_x \mathbf{m}_D'' \mathbf{f} dz \quad (2.66)$$

Novamente, substituir-se-á o momento fletor M_x pela expressão (2.62), de modo que a expressão (2.66) passa a ser dada pela soma das seguintes integrais

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 M_i \mathbf{m}_D'' \mathbf{f} dz = M_i \left[\frac{6}{5 l_i} (-\mathbf{f}_i \mathbf{m}_i + \mathbf{f}_i \mathbf{m}_j + \mathbf{f}_j \mathbf{m}_i - \mathbf{f}_j \mathbf{m}_j) + \frac{1}{10} (-\mathbf{f}_i \mathbf{m}_i' + \mathbf{f}_j \mathbf{m}_i' - \mathbf{f}_i' \mathbf{m}_i + \mathbf{f}_i' \mathbf{m}_j - \mathbf{f}_j' \mathbf{m}_i + \mathbf{f}_j' \mathbf{m}_j) + \frac{l_i}{30} (-4\mathbf{f}_i' \mathbf{m}_i' + \mathbf{f}_i' \mathbf{m}_j' + \mathbf{f}_j' \mathbf{m}_i' - 4\mathbf{f}_j' \mathbf{m}_j') + \frac{11}{10} (-\mathbf{f}_i \mathbf{m}_i' + \mathbf{f}_j \mathbf{m}_j') \right] \quad (2.67)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 V_i z \mathbf{m}_D'' \mathbf{f} dz = V_i \left[\frac{1}{10} (-\mathbf{f}_i \mathbf{m}_i + \mathbf{f}_i \mathbf{m}_j - 11\mathbf{f}_j \mathbf{m}_i + 11\mathbf{f}_j \mathbf{m}_j) + \frac{l_i}{10} (-2\mathbf{f}_i \mathbf{m}_i' + \mathbf{f}_i \mathbf{m}_j' + 2\mathbf{f}_j \mathbf{m}_i' + 3\mathbf{f}_j \mathbf{m}_j' - \mathbf{f}_j' \mathbf{m}_i + \mathbf{f}_j' \mathbf{m}_j) + \frac{l_i^2}{30} (-\mathbf{f}_i' \mathbf{m}_i' + \mathbf{f}_i' \mathbf{m}_j' - 3\mathbf{f}_j' \mathbf{m}_j') \right] \quad (2.68)$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^{l_i} 2 \frac{q_i}{2} z^2 \mathbf{m}_D'' \mathbf{f} dz = -\frac{q_i}{2} \left[\frac{l_i}{35} (\mathbf{f}_i \mathbf{m}_i - \mathbf{f}_i \mathbf{m}_j + 34\mathbf{f}_j \mathbf{m}_i - 34\mathbf{f}_j \mathbf{m}_j) + \frac{l_i^2}{210} (-11\mathbf{f}_i \mathbf{m}_i' + 17\mathbf{f}_i \mathbf{m}_j' + 46\mathbf{f}_j \mathbf{m}_i' + 158\mathbf{f}_j \mathbf{m}_j' + 3\mathbf{f}_i' \mathbf{m}_i - 3\mathbf{f}_i' \mathbf{m}_j - 18\mathbf{f}_j' \mathbf{m}_i + 18\mathbf{f}_j' \mathbf{m}_j) + \frac{l_i^3}{210} (-2\mathbf{f}_i' \mathbf{m}_i' + 5\mathbf{f}_i' \mathbf{m}_j' - 2\mathbf{f}_j' \mathbf{m}_i' - 16\mathbf{f}_j' \mathbf{m}_j') \right] \quad (2.69)$$

$$\bullet -\frac{1}{2} \int_0^{l_i} q_i e_i (\mathbf{f})^2 dz = -\frac{q_i e_i}{2} \left[\frac{l_i}{35} (13\mathbf{f}_i^2 + 9\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j + 13\mathbf{f}_j^2) + \frac{l_i^3}{210} (2\mathbf{f}_i'^2 - 3\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j' + 2\mathbf{f}_j'^2) + \frac{l_i^2}{210} (22\mathbf{f}_i \mathbf{f}_i' - 13\mathbf{f}_i \mathbf{f}_j' + 13\mathbf{f}_j \mathbf{f}_i' - 22\mathbf{f}_j \mathbf{f}_j') \right] \quad (2.70)$$

$$\bullet \quad -\frac{1}{2} \sum_i P_i e_i (\mathbf{f}_i)^2 = -\frac{1}{2} (P_i e_i \mathbf{f}_i^2 + P_j e_j \mathbf{f}_j^2) \quad (2.71)$$

A energia potencial total (\mathbf{P}) é dada então pelo somatório das energias potenciais (\mathbf{P}_i) de cada elemento, ou seja

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad (2.72)$$

onde n é o número de segmentos em que a viga foi dividida. Desta maneira, a energia passa a ser uma função quadrática dos $4(n+1)$ parâmetros \mathbf{m} , \mathbf{m}'_i , \mathbf{f}_i , \mathbf{f}'_i com $i=1,2,\dots,n+1$, referentes às seções transversais que delimitam os n segmentos.

No equilíbrio, a energia é estacionária, e pode-se estabelecer que

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{m}_i} = 0 \quad (2.73)$$

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{m}'_i} = 0 \quad (2.74)$$

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{f}_i} = 0 \quad (2.75)$$

$$\frac{\delta \mathbf{P}}{\delta \mathbf{f}'_i} = 0 \quad (2.76)$$

Constitui-se desta forma um sistema de $4(n+1)$ equações lineares e homogêneas, e o carregamento que conduz ao valor nulo do determinante da matriz dos coeficientes é aquele que causa a flambagem lateral com torção da barra. Essa matriz pode ser escrita condensadamente como:

$$[A] = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^2 \mathbf{P} \\ \mathbf{1} g_i \quad \mathbf{1} g_j \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

onde g representa qualquer um dos parâmetros \mathbf{m} ou \mathbf{f} .

2.1.8. Montagem da matriz

A matriz dos coeficientes, para um segmento i , é apresentada a seguir. Esta matriz é simétrica, de tamanho 8x8, onde cada linha corresponde a uma das equações dadas pelas expressões (2.73) a (2.76), e cada coluna contém os coeficientes do mesmo parâmetro.

Para a montagem da matriz global da viga, é feita uma superposição das matrizes dos vários segmentos, de maneira que os nós correspondentes às seções intermediárias se compatibilizem. A matriz formada tem tamanho $4(n+1) \times 4(n+1)$, e todos os elementos diferentes daqueles oriundos das matrizes dos segmentos, são nulos. A configuração da matriz superposta é mostrada na figura 2.7.

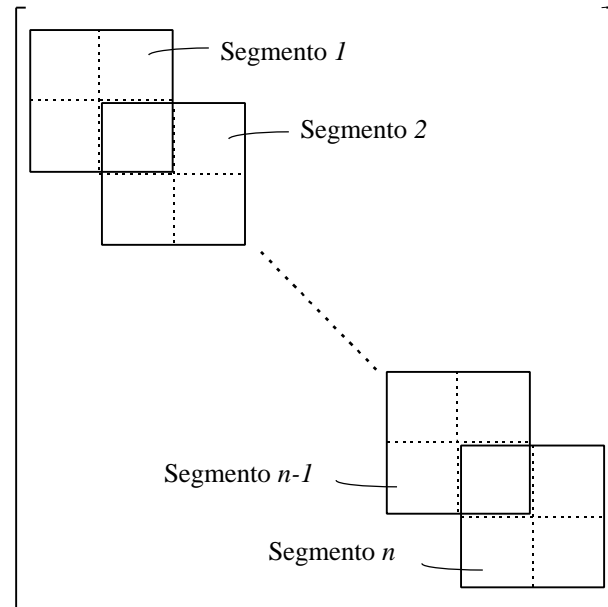


Figura 2.7 - Esquema da montagem da matriz global da viga, através da superposição das matrizes dos segmentos (adaptado da referência 17).

De posse da matriz acima e por meio da implementação automática do método descrito neste capítulo, fica relativamente simples a determinação do carregamento crítico para o estado limite último de flambagem lateral com torção.

2.2. Regime Elasto-Plástico

2.2.1. Considerações gerais

De acordo com Gaylord Jr. et al. [63], a figura 2.8 mostra as tensões normais na seção transversal de uma viga fletida no plano y-z com as fibras externas submetidas a uma tensão normal f maior que a tensão que delimita os regimes elástico e elasto-plástico, f_p , dada por

$$f_p = f_y - f_r \quad (2.78)$$

onde f_y é o limite de escoamento e f_r a máxima tensão residual de compressão. Se a translação do centro de torção durante a flambagem lateral tem o sentido negativo de x , a flexão resultante em relação ao eixo y provoca tração no lado negativo do eixo x das mesas e compressão no lado positivo. Se o aumento de momento é de ordem maior que o deslocamento correspondente, a distribuição de tensões se altera para a mostrada na figura 2.8b, onde o acréscimo de tensão é governado pelo módulo tangente E_t e o decréscimo pelo módulo de elasticidade E (figura 2.8d).

Por outro lado, não há necessidade de ter reversão de tensão se o incremento de momento é um efeito de primeira ordem (figura 2.8.c). Este comportamento é análogo ao da flambagem inelástica de barras axialmente comprimidas [68]. Ou seja, a distribuição de tensão na figura 2.8.b faz com que se altere a rigidez EI_y , válida em regime elástico, para $E_r I_y$, onde E_r é o módulo reduzido ou duplo módulo, enquanto que a distribuição de tensão na figura 2.8.c faz com que EI_y se altere para $E_T I_y$, onde E_T é o módulo tangente.

A torção produz tensão de cisalhamento (torção de Saint Venant) e, por causa da restrição ao empenamento, tensão normal nas mesas. Como esta tensão deve ser sobreposta às tensões normais indicadas na figura 2.8, a rigidez EC_w , válida em regime elástico, deve ser alterada para $E_r C_w$, de acordo com a hipótese assumida para a rigidez à flexão EI_y . As tensões de cisalhamento de Saint Venant devem ser sobrepostas a quaisquer outras tensões de cisalhamento que ocorram durante a flambagem. Entretanto, a soma destas tensões de cisalhamento é, geralmente, relativamente pequena na maior parte da seção transversal e não costuma exceder a tensão limite do regime elástico. Por essa razão, o módulo de elasticidade transversal, G , que governa a rotação da seção transversal no início da flambagem é praticamente igual ao do regime elástico. Assim, o valor da rigidez à torção, GJ , em regime elástico pode ser mantido em regime elasto-plástico.

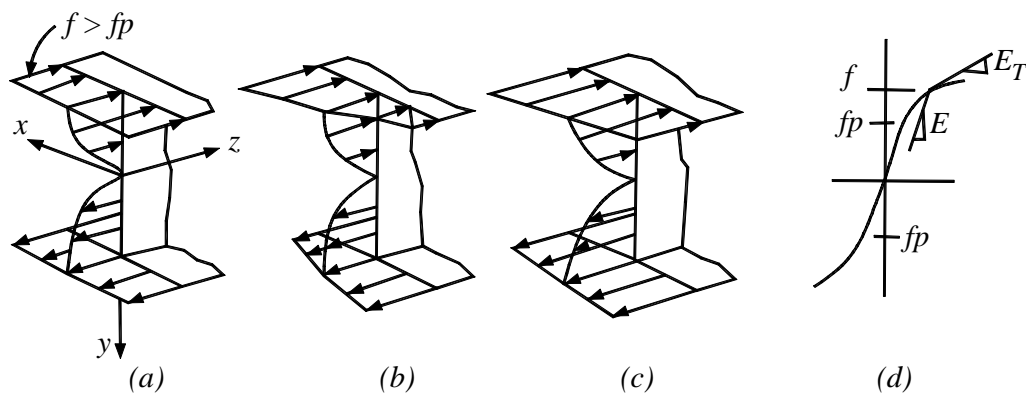


Figura 2.8 – Tensões normais na flambagem elasto-plástica

Levando-se em conta as considerações feitas, o procedimento apresentado em 2.1 para a flambagem em regime elástico pode ser estendido para o regime elasto-plástico desde que a rigidez a flexão EI_y e a rigidez ao empenamento EC_w sejam alteradas para $E_T I_y$ e $E_T C_w$, respectivamente, onde E_T é o módulo tangente.

O valor do módulo varia ao longo do comprimento da viga, e pode ser obtido considerando o nível da tensão normal de compressão quando o momento crítico elástico é atingido, e também a distribuição de tensões residuais na seção transversal, conforme se mostrará no sub-item seguinte.

2.2.2. Módulo Tangente E_T

Sabe-se que em uma barra axialmente comprimida, a flambagem em regime elástico ocorre a uma tensão dada pela equação representativa da hipérbole de Euler:

$$f_{cr} = \frac{P^2 E}{I^2} \quad (2.79)$$

onde I é o índice de esbeltez da barra.

Em regime elasto-plástico, substitui-se o módulo de elasticidade E pelo módulo tangente E_T , e a tensão de flambagem é dada por

$$f_{cr} = \frac{\mathbf{p}^2 E_T}{\mathbf{I}^2} \quad (2.80)$$

logo, pode-se fazer

$$\frac{E_T}{E} = \frac{f_{inel}}{f_{cr}} \quad (2.81)$$

Gaylord Jr. et al. [63] recomendam usar, no caso de barras fletidas, um procedimento similar para determinar a relação $\frac{E_T}{E}$ quando a flambagem lateral com torção ocorre em regime elasto-plástico. Por este procedimento, determina-se a tensão de compressão máxima na seção transversal correspondente à flambagem lateral em regime elástico, dada por

$$f_{el} = \frac{M_{cr}}{\mathbf{w}_c} \quad (2.82)$$

onde M_{cr} é o momento fletor que causa a flambagem elástica e \mathbf{w}_c é o módulo de resistência relacionado às fibras comprimidas. Supõe-se que toda a seção transversal está submetida a esta tensão e a relação $\frac{E_T}{E}$ fica

$$\frac{E_T}{E} = \frac{f_{inel}}{f_{el}} \quad (2.83)$$

O problema então passa a ser a determinação da tensão de flambagem em regime elasto-plástico, f_{inel} .

2.2.3. Tensão de flambagem em regime elasto-plástico

Supondo que toda a seção transversal da barra encontra-se submetida a uma tensão constante de compressão, a flambagem em regime elasto-plástico ocorrerá para um valor desta tensão dado por

$$f_{inel} = f_y - \frac{f_r (f_y - f_r) \mathbf{I}^2}{\mathbf{p}^2 E} \quad (2.84)$$

onde f_r é a mínima tensão residual de compressão. Esta equação é empírica, e foi proposta em 1960 pelo Column Research Council (CRC) e, desde então, tem sido usada em diversas especificações de projeto de estruturas de aço, principalmente nos Estados Unidos. Observa-se que a mesma representa uma parábola começando com um vértice em $f_{inel} = f_y$, onde $I = 0$ e terminando no ponto $f_{inel} = f_y - f_r$, onde intercepta e tangencia a hipérbole de Euler (equação 2.79).

Tendo em vista a equação (2.79), que por sua vez, fica substituída pela equação (2.82), vem:

$$f_{inel} = f_y \left[1 - \frac{f_r (f_y - f_r)}{f_y f_{el}} \right] \quad (2.85)$$

A figura 2.9 ilustra as tensões de flambagem em regime elástico e elasto-plástico.

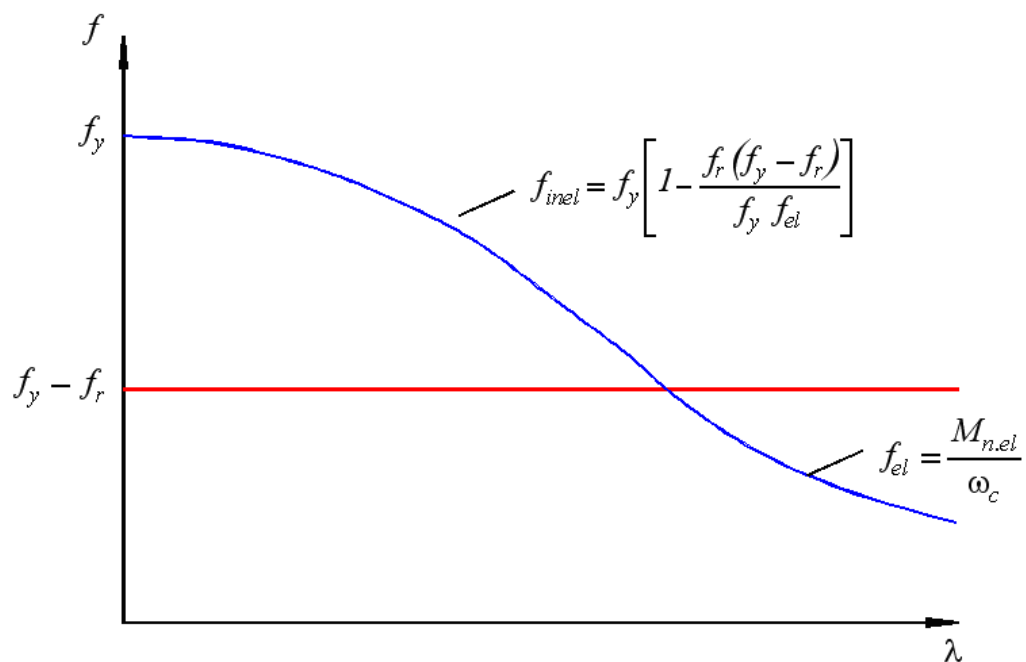


Figura 2.9 – Tensões de flambagem em regime elástico e elasto-plástico

Esta relação entre a tensão de flambagem e o índice de esbeltez I depende exclusivamente do valor de f_r e será chamada aqui de “relação padrão”, ou “distribuição padrão de tensões residuais”.

2.2.4. Tensões residuais

Para se ter uma curva $f-I$ mais precisa, que leve em conta a distribuição real das tensões residuais no perfil, permitindo assim chegar a um valor mais correto da relação E_T/E , pode-se usar um procedimento baseado em proposição de Salmon e Johnson [69]. Por este procedimento, para um I qualquer, o valor de E_T pode ser representado por

$$E_T = E \frac{I_e}{I} \quad (2.86)$$

onde I é o momento de inércia em relação ao eixo da seção transversal situada no plano de flexão e I_e é um momento de inércia efetivo, dado por

$$I_e = \int_{A_{el}} a^2 dA \quad (2.87)$$

com A_{el} sendo a parte da área da seção transversal que se mantém elástica e a a distância dos elementos dessa área ao eixo de flexão.

A seguir são mostrados exemplos de cálculo destas curvas para os casos de compressão e de tração nas bordas das mesas de um perfil e suas correspondentes representações gráficas. Será tomado um perfil I300x150x19x9,5 e aço com limite de escoamento de 25kN/cm².

| Perfil I (300 x 150 x 19 x 9,5) | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| $I = 1070,62 \text{ cm}^4$ | $I_{alma} = 1,87 \text{ cm}^4$ |
| $A = 81,89 \text{ cm}^2$ | $A_{alma} = 24,89 \text{ cm}^2$ |
| $f_y = 25 \text{ kN/cm}^2$ | |

Caso I – Tensão de compressão nas bordas das mesas

Para esse exemplo, as mesas foram divididas em 30 elementos e tomou-se a distribuição de tensões residuais mostrada na figura 2.10 (considerou-se a tensão residual na alma como sendo nula):

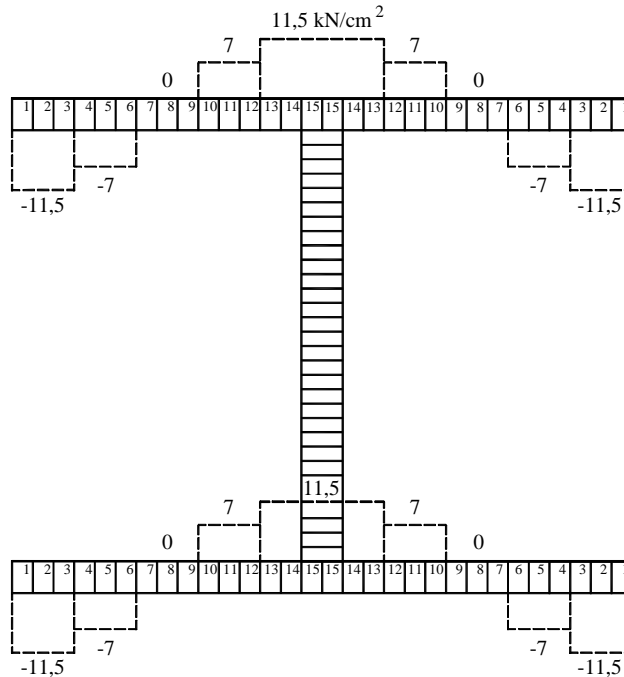


Figura 2.10 – Distribuição de tensões residuais para o exemplo de cálculo da curva $f-I$

1º Escoamento:

$$f_{cr} = f_y - f_r = 13,5 \frac{kN}{cm^2} \quad \Rightarrow \quad P_{cr} = f_{cr} \cdot A = 13,5 \cdot 81,89 = 1105,52 kN$$

$$I = 1070,62 cm^4 \quad \rightarrow \quad f_{cr} = \frac{p^2 E}{I^2} \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{p^2 E}{f_{cr}}} = 122,42$$

Elementos escoados: 1, 2 e 3

$$I_e = \frac{1,9 \cdot 12^3}{6} + 1,87 = 549,07 cm^4 \quad \rightarrow \quad f_{cr} = \frac{p^2 E I_e}{I^2} \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{p^2 E I_e}{f_{cr}}} = 87,67$$

Notar que $f_{cr} = 13,5 \frac{kN}{cm^2}$ vai de $I = 122,42$ até $I = 87,67$, pelo escoamento súbito dos elementos 1, 2 e 3.

2º Escoamento:

Para que os elementos 4, 5 e 6 escoem, deve-se ter neles uma tensão adicional de $4,5 \frac{kN}{cm^2}$ (os elementos 1, 2 e 3 não absorvem mais aumento de tensão, por já terem atingido f_y).

$$P_{cr_{ad}} = 4,5 \cdot (A - 0,5 \cdot 12 \cdot 1,9) = 317,21 kN$$

$$f_{cr_{ad}} = \frac{P_{cr_{ad}}}{A} = \frac{317,21}{81,89} = 3,87 \frac{kN}{cm^2} \quad \Rightarrow \quad f_{cr} = 13,5 + 3,87 = 17,37 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\text{escoados 1 a 3:} \quad I_e = 549,07 cm^4 \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{p^2 E \frac{549,07}{1070,62}}{17,37}} = 77,29$$

$$\text{escoados 1 a 6:} \quad I_e = \frac{1,9 \cdot 9^3}{6} + 1,87 = 232,72 cm^4 \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{p^2 E \frac{232,72}{1070,62}}{17,37}} = 50,32$$

3º Escoamento:

Para que os elementos 7, 8 e 9 escoem, deve-se ter neles uma tensão adicional de $7,0 \frac{kN}{cm^2}$ (com a adição desta tensão adicional, os elementos da alma também escoam, por terem atingido f_y).

$$P_{cr_{ad}} = 7,0 \cdot (A - 0,5 \cdot 24 \cdot 1,9) = 413,63 kN$$

$$f_{cr_{ad}} = \frac{P_{cr_{ad}}}{A} = \frac{413,63}{81,89} = 5,05 \frac{kN}{cm^2} \quad \Rightarrow \quad f_{cr} = 17,37 + 5,05 = 22,42 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\text{escoados 1 a 6: } I_e = 232,72 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{232,72}{1070,62}}{22,42}} = 44,29$$

$$\text{escoados 1 a 9: } I_e = \frac{1,9 \cdot 6^3}{6} = 68,40 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{68,40}{1070,62}}{22,42}} = 24,01$$

4º Escoamento:

Para que os elementos 10, 11 e 12 escoem, deve-se ter neles uma tensão adicional de $7,0 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.

$$P_{crad} = 7,0 \cdot (0,5 \cdot 24 \cdot 1,9) = 159,60 \text{ kN}$$

$$f_{crad} = \frac{P_{crad}}{A} = \frac{159,60}{81,89} = 1,95 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \Rightarrow \quad f_{cr} = 22,42 + 1,95 = 24,37 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{escoados 1 a 9: } I_e = 68,40 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{68,40}{1070,62}}{24,37}} = 23,03$$

$$\text{escoados 1 a 12: } I_e = \frac{1,9 \cdot 3^3}{6} = 8,55 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{8,55}{1070,62}}{24,37}} = 8,14$$

5º Escoamento:

Para que os elementos 13, 14 e 15 escoem, deve-se ter neles uma tensão adicional de $4,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.

$$P_{crad} = 4,5 \cdot (0,5 \cdot 12 \cdot 1,9) = 51,30 \text{ kN}$$

$$f_{crad} = \frac{P_{crad}}{A} = \frac{51,30}{81,89} = 0,63 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \Rightarrow \quad f_{cr} = 24,37 + 0,63 = 25,00 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\text{escoados 1 a 12: } I_e = 8,55 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{p^2 E \frac{8,55}{1070,62}}{25,00}} = 8,04$$

$$\text{escoados 1 a 15: } I_e = \frac{1,9 \cdot 0^3}{6} = 0,00 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{p^2 E \frac{0,00}{1070,62}}{25,00}} = 0,00$$

Caso II – Tensão de tração nas bordas das mesas

Para o Caso II, tomou-se a mesma distribuição de tensões residuais apresentada na figura 2.10, porém invertendo-se os sinais (figura 2.11).

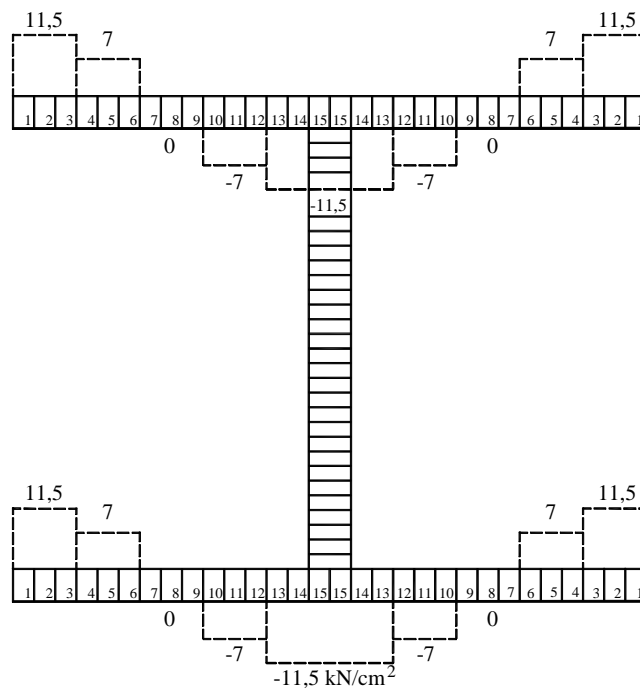


Figura 2.11 – Distribuição de tensões residuais para o exemplo de cálculo da curva f - λ

1º Escoamento:

$$f_{cr} = f_y - f_r = 13,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \Rightarrow \quad P_{cr} = f_{cr} \cdot A = 13,5 \cdot 81,89 = 1105,52 \text{ kN}$$

$$I = 1070,62 \text{ cm}^4 \quad \rightarrow \quad f_{cr} = \frac{p^2 E}{I^2} \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{p^2 E}{f_{cr}}} = 122,42$$

Elementos escoados: 13, 14 e 15

$$I_e = 1070,62 - \frac{1,9 \cdot (0,5 \cdot 6)^3}{6} = 1062,07 \text{ cm}^4 \quad \rightarrow$$

$$f_{cr} = \frac{\mathbf{p}^2 E \frac{I_e}{I}}{I^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{l} = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{I_e}{I}}{f_{cr}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{1062,07}{1070,62}}{13,5}} = 121,93$$

2º Escoamento:

Para que os elementos 10, 11 e 12 escoem, deve-se ter neles uma tensão adicional de

$$4,5 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

$$P_{crad} = 4,5 \cdot (A - 0,5 \cdot 12 \cdot 1,9) = 317,21 \text{ kN}$$

$$f_{crad} = \frac{P_{crad}}{A} = \frac{317,21}{81,89} = 3,87 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad \Rightarrow \quad f_{cr} = 13,5 + 3,87 = 17,37 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

escoados 13 a 15: $I_e = 1062,07 \text{ cm}^4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{l} = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{1062,07}{1070,62}}{17,37}} = 107,49$

escoados 10 a 15: $I_e = 1070,62 - \frac{1,9 \cdot (0,5 \cdot 12)^3}{6} = 1002,22 \text{ cm}^4 \Rightarrow$

$$\mathbf{l} = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{1002,22}{1070,62}}{17,37}} = 104,42$$

3º Escoamento:

Para que os elementos 7, 8 e 9 escoem, deve-se ter neles uma tensão adicional de

$$7,0 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \text{ (com a adição desta tensão adicional, os elementos da alma também escoam,$$

por terem atingido f_y).

$$P_{crad} = 7,0 \cdot (A - 0,5 \cdot 24 \cdot 1,9) = 413,63 \text{ kN}$$

$$f_{crad} = \frac{P_{crad}}{A} = \frac{413,63}{81,89} = 5,05 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \Rightarrow f_{cr} = 17,37 + 5,05 = 22,42 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

escoados 10 a 15: $I_e = 1002,22 \text{ cm}^4 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{1002,22}{1070,62}}{22,42}} = 91,91$

escoados 7 a 15: $I_e = 1070,62 - \frac{1,9 \cdot (0,5 \cdot 18)^3}{6} - 1,87 = 837,90 \text{ cm}^4 \Rightarrow$

$$I = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{837,90}{1070,62}}{22,42}} = 84,04$$

4º Escoamento:

Para que os elementos 4, 5 e 6 escoem, deve-se ter neles uma tensão adicional de $7,0 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.

$$P_{crad} = 7,0 \cdot (0,5 \cdot 24 \cdot 1,9) = 159,60 \text{ kN}$$

$$f_{crad} = \frac{P_{crad}}{A} = \frac{159,60}{81,89} = 1,95 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \Rightarrow f_{cr} = 22,42 + 1,95 = 24,37 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

escoados 7 a 15: $I_e = 837,90 \text{ cm}^4 \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{837,90}{1070,62}}{24,37}} = 80,61$

escoados 4 a 15: $I_e = 1070,62 - \frac{1,9 \cdot (0,5 \cdot 24)^3}{6} - 1,87 = 521,55 \text{ cm}^4 \Rightarrow$

$$I = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{521,55}{1070,62}}{24,37}} = 63,60$$

5º Escoamento:

Para que os elementos 1, 2 e 3 escoem, deve-se ter neles uma tensão adicional de

$$4,5 \frac{kN}{cm^2}.$$

$$P_{cr_{ad}} = 4,5 \cdot (0,5 \cdot 12 \cdot 1,9) = 51,30 kN$$

$$f_{cr_{ad}} = \frac{P_{cr_{ad}}}{A} = \frac{51,30}{81,89} = 0,63 \frac{kN}{cm^2} \quad \Rightarrow \quad f_{cr} = 24,37 + 0,63 = 25,00 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\text{escoados 4 a 15:} \quad I_e = 521,55 cm^4 \quad \Rightarrow \quad I = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{521,55}{1070,62}}{25,00}} = 62,79$$

$$\text{escoados 1 a 15:} \quad I_e = 1070,62 - \frac{1,9 \cdot (0,5 \cdot 30)^3}{6} - 1,87 = 0,00 cm^4 \quad \Rightarrow$$

$$I = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2 E \frac{0,00}{1070,62}}{25,00}} = 0,00$$

A figura 2.12 mostra graficamente as curvas $f-I$ obtidas acima. Como estas curvas apresentam trechos com a mesma tensão para uma faixa de valores do índice de esbeltez I , em decorrência do número de elementos e da distribuição de tensões residuais adotada, as mesmas foram “melhoradas” para efeito de análise, tomando-se os pontos médios dos trechos retos. Essas curvas “melhoradas” são apresentadas sobrepostas às curvas $f-I$ na figura 2.12, que mostra também a curva da “distribuição padrão”.

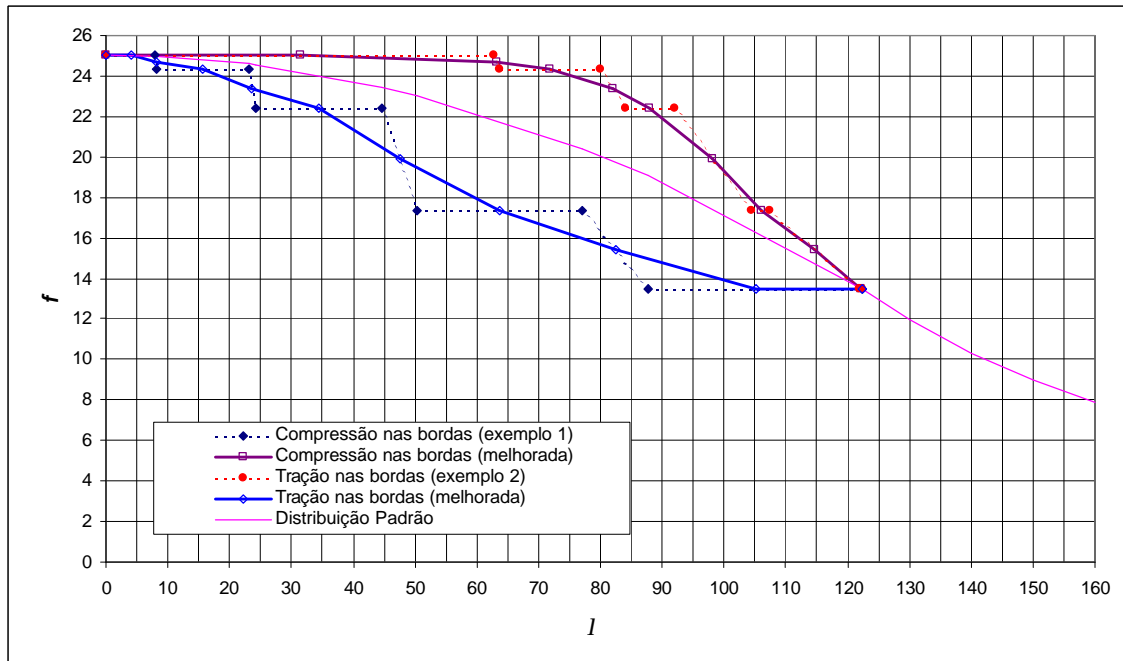


Figura 2.12 – Representação gráfica das curvas f - l e da “distribuição padrão”

2.2.5. Procedimentos

Para o cálculo da resistência nominal ao momento fletor (M_n) utilizam-se os seguintes passos: divide-se a viga em grandes elementos, considerando-se as seções onde houver mudanças de geometria (início e fim de recortes, de lamelas ou de aberturas na alma), forças e momentos aplicados ou algum deslocamento impedido nos planos de flexão ou de flambagem. Feito isso, cada um desses elementos é subdividido em elementos menores. Obtém-se então, através do método dos elementos finitos, o valor do momento crítico elástico (M_{cr}). Baseado no momento atuante em cada um dos elementos da viga, é feita a correção de seus módulos de elasticidade conforme descrito no item 2.2.2. Repetindo-se o processo de cálculo obtém-se M_n .

Há de se notar que uma pequena imprecisão estará presente, uma vez que o processo utilizado para a correção dos valores dos módulos de elasticidade é um processo simplificado, pois utiliza-se apenas a máxima tensão de compressão.

| | m_i | m_i' | f_i | f_i' | m_j | m_j' | f_j | f_j' |
|------------------------------------|-------------------------|------------------------|--|---|---|--|--|---|
| $\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{m}_i}$ | $\frac{12 EI_y}{l_i^3}$ | $\frac{6 EI_y}{l_i^2}$ | $-\frac{6 M_i}{5 l_i} - \frac{V_i}{10} - \frac{q_i l_i}{70}$ | $-\frac{M_i}{10} - \frac{q_i l_i^2}{140}$ | $-\frac{12 EI_y}{l_i^3}$ | $\frac{6 EI_y}{l_i^2}$ | $\frac{6 M_i}{5 l_i} - \frac{11 V_i}{10} - \frac{17 q_i l_i}{35}$ | $-\frac{M_i}{10} - \frac{V_i l_i}{10} + \frac{3 q_i l_i^2}{70}$ |
| $\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{m}_i'}$ | | $\frac{4 EI_y}{l_i}$ | $-\frac{11 M_i}{10} - \frac{V_i l_i}{5} + \frac{11 q_i l_i^2}{420}$ | $-\frac{2 M_i l_i}{15} - \frac{V_i l_i^2}{30} + \frac{q_i l_i^3}{210}$ | $-\frac{6 EI_y}{l_i^2}$ | $\frac{2 EI_y}{l_i}$ | $\frac{M_i}{10} + \frac{V_i l_i}{5} - \frac{23 q_i l_i^2}{210}$ | $\frac{M_i l_i}{30} + \frac{q_i l_i^3}{210}$ |
| $\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{f}_i}$ | | | $\frac{12 EC_w}{l_i^3} + \frac{6 GI_t}{5 l_i} + (\frac{12 M_i}{5 l_i} + \frac{6 V_i}{5} - \frac{12 q_i l_i}{35})(k_y - y_D) - \frac{13 q_i e_i l_i}{35} - P_i e_i$ | $\frac{6 EC_w}{l_i^2} + \frac{GI_t}{10} + (\frac{M_i}{5} + \frac{V_i l_i}{5} - \frac{q_i l_i^2}{14})(k_y - y_D) - \frac{11 q_i e_i l_i^2}{210}$ | $\frac{6 M_i}{5 l_i} + \frac{V_i}{10} + \frac{q_i l_i}{70}$ | $-\frac{M_i}{10} + \frac{V_i l_i}{10} - \frac{17 q_i l_i^2}{420}$ | $-\frac{12 EC_w}{l_i^3} - \frac{6 GI_t}{5 l_i} - (\frac{12 M_i}{5 l_i} + \frac{6 V_i}{5} - \frac{12 q_i l_i}{35})(k_y - y_D) - \frac{9 q_i e_i l_i}{70}$ | $\frac{6 EC_w}{l_i^2} + \frac{GI_t}{10} + (\frac{M_i}{5} + \frac{q_i l_i^2}{35})(k_y - y_D) + \frac{13 q_i e_i l_i^2}{420}$ |
| $\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{f}_i'}$ | | | | $\frac{4 EC_w}{l_i} + \frac{2 GI_t l_i}{15} + (\frac{4 M_i l_i}{15} + \frac{V_i l_i^2}{15} - \frac{2 q_i l_i^3}{105})(k_y - y_D) - \frac{q_i e_i l_i^3}{105}$ | $\frac{M_i}{10} + \frac{q_i l_i^2}{140}$ | $\frac{M_i l_i}{30} + \frac{V_i l_i^2}{30} - \frac{q_i l_i^3}{84}$ | $-\frac{6 EC_w}{l_i^2} - \frac{GI_t}{10} - (\frac{M_i}{5} + \frac{V_i l_i}{5} - \frac{q_i l_i^2}{14})(k_y - y_D) - \frac{13 q_i e_i l_i^2}{420}$ | $\frac{2 EC_w}{l_i^2} - \frac{GI_t l_i}{30} - (\frac{M_i l_i}{15} + \frac{V_i l_i^2}{30} - \frac{q_i l_i^3}{70})(k_y - y_D) + \frac{q_i e_i l_i^3}{140}$ |
| $\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{m}_j}$ | | | | | $\frac{12 EI_y}{l_i^3}$ | $-\frac{6 EI_y}{l_i^2}$ | $-\frac{6 M_i}{5 l_i} - \frac{11 V_i}{10} + \frac{17 q_i l_i}{35}$ | $\frac{M_i}{10} + \frac{V_i l_i}{10} - \frac{3 q_i l_i^2}{70}$ |
| $\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{m}_j'}$ | | | | | | $\frac{4 EI_y}{l_i}$ | $\frac{11 M_i}{10} + \frac{9 V_i l_i}{10} - \frac{79 q_i l_i^2}{210}$ | $-\frac{2 M_i l_i}{15} - \frac{V_i l_i^2}{10} + \frac{4 q_i l_i^3}{105}$ |
| $\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{f}_j}$ | | | | | | | $\frac{12 EC_w}{l_i^3} + \frac{6 GI_t}{5 l_i} + (\frac{12 M_i}{5 l_i} + \frac{6 V_i}{5} - \frac{12 q_i l_i}{35})(k_y - y_D) - \frac{13 q_i e_i l_i}{35} - P_j e_j$ | $\frac{6 EC_w}{l_i^2} + \frac{GI_t}{10} + (\frac{M_i}{5} + \frac{q_i l_i^2}{35})(k_y - y_D) + \frac{13 q_i e_i l_i^2}{420}$ |
| $\frac{\mathbb{P}}{\mathbb{f}_j'}$ | | | | | | | | $\frac{4 EC_w}{l_i} + \frac{2 GI_t l_i}{15} + (\frac{4 M_i l_i}{15} + \frac{V_i l_i^2}{15} - \frac{2 q_i l_i^3}{105})(k_y - y_D) - \frac{q_i e_i l_i^3}{105}$ |

3. AUTOMATIZAÇÃO PARA DETERMINAÇÃO DA RESISTÊNCIA AO MOMENTO FLETOR

3.1. Considerações Iniciais

O processo proposto apresenta facilidade de implementação automatizada e fornece, para casos de instabilidade em regime elástico, resultados considerados bastante precisos. Para os casos de instabilidade em regime elasto-plástico, os resultados, conforme será mostrado no Capítulo 4, também são bons, uma vez que são similares àqueles obtidos por outros processos de análise numérica e por ensaios. Assim sendo, foi desenvolvido um programa para micro-computadores em linguagem Object Pascal, através do compilador Delphi 2.0, que possibilita o cálculo da resistência nominal ao momento fletor para a flambagem lateral com torção de vigas de aço. São tratados perfis com as seções transversais citadas no item 1.4 (perfis de seção transversal duplamente simétrica ou monossimétrica dos tipos I, U, retangular cheia e caixão) com quaisquer condições de contorno nos planos de flexão e de flambagem, vigas com variações de inércia, como aquelas que possuem lamelas, aberturas na alma e recortes nas mesas para ligações, e é permitida a atuação de ações estabilizantes ou desestabilizantes.

O programa desenvolvido, que será denominado Programa FLT, pode ser considerado dividido em três grandes partes. A primeira consiste da entrada dos dados relativos ao problema que se quer analisar, a segunda do procedimento de cálculo, onde todas as verificações necessárias são feitas levando-se em conta as particularidades de cada caso, e a última da montagem de um arquivo com os resultados. Cada uma destas partes são detalhadas nos itens seguintes.

3.2. Entrada de Dados

Visando a facilidade de utilização do programa, permitiu-se a opção de se ter a entrada de dados interativa e amigável ou por arquivo. No caso da entrada interativa, os dados podem ser salvos ou não, para uso posterior. Os arquivos de dados têm extensão *.dat*.

As informações que o programa necessita são:

- as unidades a serem utilizadas, N ou kN para as forças e mm ou cm para os comprimentos;
- o limite de escoamento f_y ;
- o tipo de seção transversal, podendo-se escolher entre perfis I com dois eixos de simetria ou com um eixo de simetria no plano médio da alma, perfis U não sujeitos à torção, seções retangulares cheias, e perfis caixão duplamente simétricos, todos fletidos em torno do eixo de maior inércia;
- a identificação da viga;
- o vão da viga, independentemente de qualquer apoio ou contenção lateral intermediária, pois os mesmos serão considerados posteriormente;
- as dimensões da seção transversal do perfil escolhido;
- a distribuição das tensões residuais: o valor da máxima tensão de compressão, no caso da distribuição padrão ou o valor da tensão em cada elemento da seção (a mesa e os flanges são divididos em 30 elementos cada um, permitindo-se a especificação do valor da tensão residual em cada um deles);
- a existência ou não de recortes, aberturas ou lamelas. Caso existam, deve-se indicar o número de ocorrências, suas posições na viga e as dimensões. No caso dos

recortes, deve-se ainda determinar em qual mesa estão ou se existem em ambas. Para as aberturas, prevê-se a possibilidade delas serem retangulares ou circulares, excêntricas ou concêntricas, com ou sem reforços na alma, quando então deve-se fornecer os dados geométricos adicionais (figura 3.1);

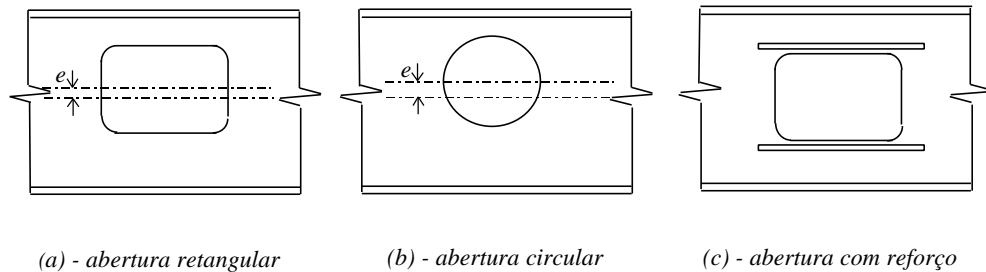


Figura 3.1 - Aberturas na alma.

- o carregamento atuante, onde são previstas forças concentradas, forças distribuídas e momentos aplicados. Em todos os casos deve-se fornecer a posição de atuação na viga e a intensidade. Além disso, nos dois primeiros casos, é necessário fornecer a posição em relação ao centro de torção (excentricidade), uma vez que estão sendo consideradas as possibilidades de ocorrência de forças estabilizantes e desestabilizantes;
- a existência ou não de apoios e contenções laterais intermediárias, indicando, para os casos em que existir, sua posição na viga;
- as condições de contorno nas extremidades da viga, bem como nas seções onde existirem apoios ou contenções laterais internas. Os vínculos são definidos por meio dos deslocamentos que eles impedem. Quando o deslocamento for livre, deve-se adotar um código 0 e quando for impedido, adota-se 1. Estes deslocamentos foram descritos no item 1.1.2.

No que se refere à intensidade das ações, deve-se esclarecer que a referência ao carregamento crítico será feita em função de um multiplicador crítico. Assim, entram-se com os valores reais das ações, mesmo quando atuarem tipos diferentes de carregamentos. O programa identificará a menor força concentrada atuante, tomando-a

como referência, adotando internamente um valor unitário para ela e um valor proporcional para as demais. Partindo-se de um valor nulo para as ações, vai-se incrementando o carregamento, mantendo-se as proporções, até que o carregamento crítico seja atingido. Quando isto ocorrer, a razão entre o valor da força de referência e o seu valor crítico é o multiplicador crítico, e todas as outras forças são relacionadas a ele. Caso não existam forças concentradas atuando na viga, a menor força distribuída é tomada como referência, e se estas também não estiverem atuando, toma-se o menor momento fletor aplicado.

Seja por exemplo, o caso mostrado na figura 3.2, onde atuam duas forças concentradas de valores $5,0\text{ kN}$ e $10,0\text{ kN}$, uma força distribuída em toda a viga de $25,0\text{ kN/m}$ e um momento fletor aplicado na extremidade inicial de $15,0\text{ kN.m}$. A força concentrada de $5,0\text{ kN}$ é tomada como referência, e as outras como uma razão desta. Em seguida as forças são zeradas, e incrementadas proporcionalmente, até que o determinante da matriz se anule. Imaginando-se, por exemplo, que o valor da força de referência neste instante seja de $15,0\text{ kN}$, tem-se que o multiplicador crítico é igual a 3, ou seja, o carregamento crítico para este exemplo é dado por duas forças concentradas de $15,0\text{ kN}$ e $30,0\text{ kN}$ respectivamente, uma força distribuída de $75,0\text{ kN/m}$, e um momento fletor aplicado de $45,0\text{ kN.m}$.

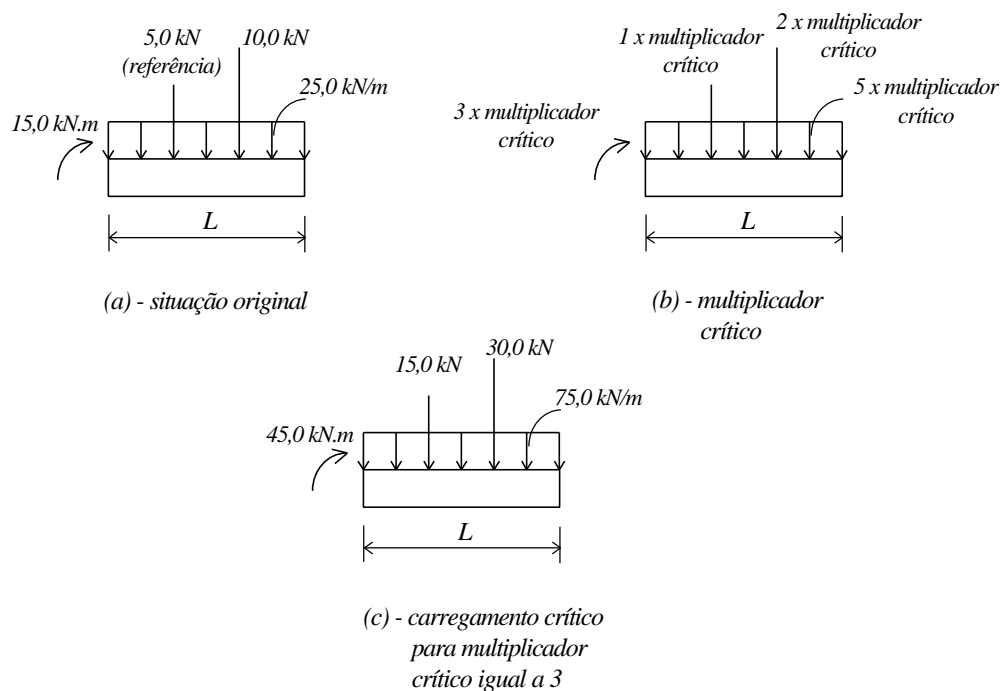


Figura 3.2 - Determinação do carregamento e do multiplicador crítico.

3.3. Cálculo

Conforme mostrou-se no capítulo anterior, o cálculo do carregamento crítico elástico implica em se anular o determinante da matriz dos coeficientes apresentada no item 2.8. Para isso, é necessário que a viga seja dividida em segmentos, e que, para cada segmento, sejam calculadas suas propriedades geométricas e os esforços solicitantes nas extremidades. Além disso, deve-se usar um processo incremental para o carregamento, até que seja atingido o valor que causa a flambagem lateral com torção.

A divisão da viga e o cálculo das propriedades geométricas são feitos apenas uma vez, e mantêm-se constantes durante os cálculos do determinante da matriz. Entretanto, a cada vez que o carregamento é incrementado, deve-se atualizar os valores dos esforços solicitantes.

Após encontrado o multiplicador crítico elástico e , conseqüentemente, o momento crítico elástico M_{cr} , o processo é repetido, substituindo-se E por E_T em cada segmento, conforme item 2.2.2, de modo a se encontrar o valor da resistência nominal ao momento fletor, M_n , em regime elasto-plástico.

Algumas particularidades dos procedimentos envolvidos neste cálculo estão explicados nos itens subsequentes.

3.3.1. Divisão dos segmentos

Inicialmente é feita uma divisão grosseira da viga, considerando as seções onde houver mudanças na geometria, ou seja, no início e no fim de recortes, de aberturas e de lamelas (figura 3.3.a), as seções onde houverem forças e momentos aplicados (figura 3.3.b) e as seções onde houver algum deslocamento impedido no plano de flexão ou de flambagem (figura 3.3.c).

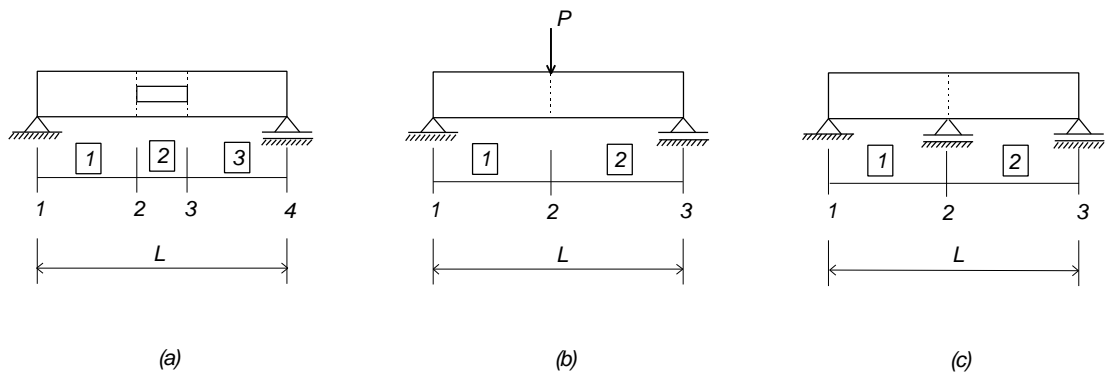


Figura 3.3 - Divisão dos segmentos.

Essa primeira divisão é feita para se evitar a execução de cálculos desnecessários. Um exemplo pode ser visto pela figura 3.3.a, onde apesar de se ter variação da seção transversal na viga, no segmento ela é constante. Portanto pode-se calcular as propriedades geométricas apenas para os três segmentos. Daí a importância do armazenamento das posições de mudança de segmento.

Em seguida, cada segmento é subdividido, de forma a melhorar a precisão dos resultados e manter compatíveis seus comprimentos. Para que não haja uma variação grande nestes comprimentos, o menor deles é automaticamente subdividido em dez partes, e os outros em um número de partes equivalentes, limitadas em vinte. Diversos processamentos foram feitos, tendo-se constatado que este procedimento conduz a resultados bastante bons.

3.3.2. Propriedades geométricas

O cálculo das propriedades geométricas é feito de maneira automática, utilizando-se apenas as dimensões da seção e as variações de geometria existentes. Para esta automatização, foi necessário fazer o computador “entender” como eram as seções transversais em cada trecho da viga.

O procedimento utilizado foi baseado no trabalho de Tamagna e Hennemann [70], no qual foi desenvolvido um programa para cálculo das propriedades geométricas

dividindo a seção em elementos. Neste trabalho, a principal preocupação é a sistemática da entrada dos elementos componentes da seção transversal, onde existe uma regra de entrada dos nós que definem cada elemento. Em seguida os elementos são tratados separadamente, tomando-se a formulação relativa ao cálculo das propriedades geométricas em função das distâncias aos eixos e centros principais da seção inteira.

Para o programa desenvolvido, foi necessário fazer algumas adaptações, uma vez que seria bastante complicado entrar com os nós da seção transversal ao invés da largura e espessura dos elementos, como se optou por fazer. A dificuldade está principalmente no fato de que são permitidas mudanças na geometria, e ficaria muito trabalhoso fornecer as posições dos nós para todas as seções existentes. A solução encontrada foi fornecer uma regra de leitura interna para o programa, dependente apenas do tipo da seção e do elemento que se está calculando, pois para cada elemento estão armazenadas as informações relativas à existência de recortes, lamelas e aberturas.

3.3.3. Esforços solicitantes

Para o cálculo dos esforços solicitantes que atuam nas extremidades de cada segmento da viga, foi desenvolvida uma sub-rotina para o programa, baseada em Gere e Weaver [71], que calcula os valores dos momentos fletores e forças cortantes nas seções extremas de cada elemento da viga. Estes esforços solicitantes são atualizados a cada iteração, considerando-se os valores das ações atuantes.

3.3.4. Determinante

Após o cálculo dos esforços solicitantes é feita a montagem da matriz dos elementos e o cálculo do determinante. Para reduzir a quantidade de memória alocada, optou-se por um processo otimizado de cálculo, onde a matriz é armazenada em forma de banda, reduzindo-se as dimensões de $4(n+1) \times 4(n+1)$, figura 3.4.a, para $4(n+1) \times 8$, figura 3.4.b, onde n é o número de segmentos em que a viga foi dividida. Após montada esta matriz, é aplicada uma rotina de fatoração, também baseada em Gere e Weaver [71], que utiliza o processo de Cholesky modificado. O determinante é dado pela multiplicação dos elementos da primeira coluna desta matriz banda fatorada.

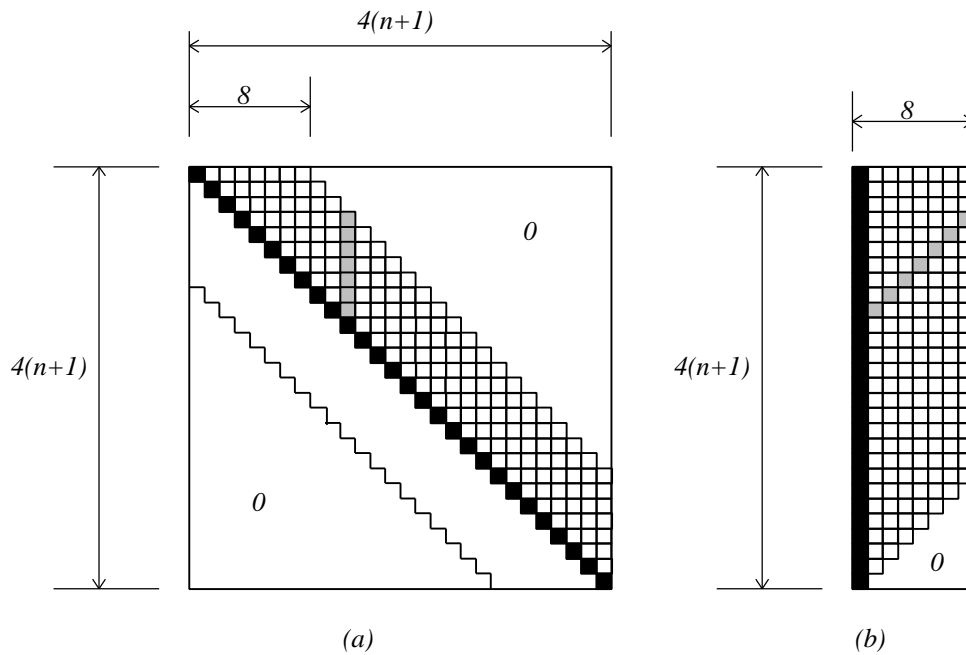


Figura 3.4 - (a): forma usual de armazenamento, (b): matriz banda (adaptado da referência 71).

3.4. Saída de Resultados

Os resultados são fornecidos na tela do computador, havendo também a possibilidade de salvá-los em forma de arquivo, com extensão *.out*. Nos resultados, novamente são apresentados os dados do problema para conferência; o carregamento; os multiplicadores críticos para os regimes elástico e elasto-plástico; o momento crítico M_{cr} para a regime elástico e a resistência nominal ao momento fletor M_n para o regime elasto-plástico, com suas respectivas posições na viga e a distribuição do momento fletor ao longo do comprimento da viga.

3.5. Exemplos

Será apresentado um exemplo, com o objetivo de ilustrar o que foi relatado neste capítulo, e também a utilização do programa. Serão mostradas as telas de entrada interativa com a sequência descrita no item 3.2.

Tomemos como exemplo uma viga I metálica biapoiada, perfil VS 300x36, com 4 m de vão, submetida a uma força concentrada de 10,0 kN aplicada no meio do vão no nível do

centro de torção. Existem contenções laterais nas extremidades e na seção média da viga em vínculo de garfo (figura 3.5).

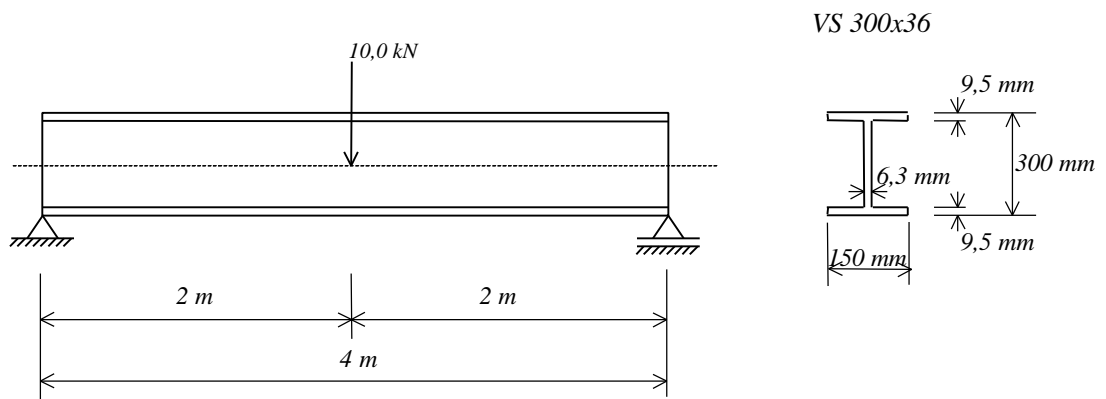


Figura 3.5 - Viga VS 300x36

Mostram-se a seguir as telas da entrada de dados interativa:

Entrada de Dados UFMG

Unidades: kN e cm

Unidades: Força kN N Comprimento cm mm

Tensão de escoamento (f_y): kN/cm²

Tipo de seção transversal:

Dados da Viga

Identificação:

Vão total (L):

Altura (d):

Espessura da alma (t_w):

Largura da mesa superior (b_{fs}):

Espessura da mesa superior (t_{fs}):

Largura da mesa inferior (b_{fi}):

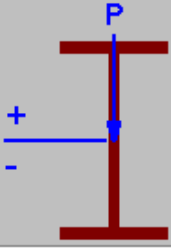
Espessura da mesa inferior (t_{fi}):

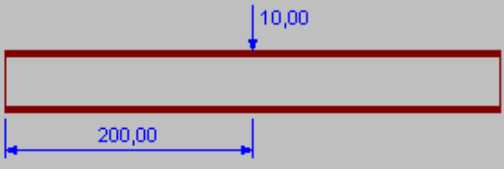
Entrada de Dados UFMG

Unidades: kN e cm

Carga Concentrada 01

Convenção de sinal para distância vertical da carga em relação ao centro de torção





Coordenada (z):

Valor (P):

Distância vertical:

Entrada de Dados UFMG

Unidades: kN e cm

Condições de contorno para Z = 0 cm

0 = Livre 1 = Impedido

Deslocamento vertical:

Rotação em torno do eixo x:

Deslocamento lateral:

Rotação no plano de flambagem:

Rotação em torno do centro de torção:

Empenamento:



Entrada de Dados

Unidades: kN e cm

UFMG

Condições de contorno para $Z = 400,00$ cm

0 = Livre 1 = Impedido

| | |
|---------------------------------------|----------------------------|
| Deslocamento vertical: | <input type="checkbox"/> 1 |
| Rotação em torno do eixo x: | <input type="checkbox"/> 0 |
| Deslocamento lateral: | <input type="checkbox"/> 1 |
| Rotação no plano de flambagem: | <input type="checkbox"/> 0 |
| Rotação em torno do centro de torção: | <input type="checkbox"/> 1 |
| Empenamento: | <input type="checkbox"/> 0 |



Cancelar Anterior Concluir

A seguir, é apresentado o arquivo de saída de resultados:

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Programa FLT
Flambagem lateral com torção de vigas de aço
em regimes elástico e elasto-plástico

Março/1998

Autor..... : Luiz Antonio de Souza
Orientadores : Prof. Ricardo Hallal Fakury
 : Profa. Ana Lydia Reis de Castro e Silva

Dados Gerais do Problema

Unidades: Força..... = kN
Comprimento = cm

Tipo de perfil.....: Perfil I

Dados da Barra

Identificação: Carga Concentrada Seção I Distribuição Padrão

Dimensões....: Vão Teórico (L) = 400,00 cm
Altura do Perfil (d) = 30,00 cm
Espessura da alma (tw) = 0,63 cm
Largura da mesa superior (bfs) = 15,00 cm
Espessura da mesa superior (tfs) = 0,95 cm
Largura da mesa inferior (bfi) = 15,00 cm
Espessura da mesa inferior (tfi) = 0,95 cm

Propriedades Geométricas

Elemento 1 (z = 0,00 a z = 200,00 cm) :

momento de inércia x (Ix) = 7302,0056 cm⁴
momento de inércia y (Iy) = 534,9803 cm⁴
momento de inércia a torção (It) = 10,9950 cm⁴
constante de empenamento (Cw) = 112740,0996 cm⁶
coord. do ponto de Kindem y (Ky) = 0,0000 cm
dist. do centro de torção
ao centro de gravidade (yo) = 0,0000 cm
Mpl = 13458,1519 kN.cm

Elemento 2 (z = 200,00 a z = 400,00 cm) :

momento de inércia x (Ix) = 7302,0056 cm⁴
momento de inércia y (Iy) = 534,9803 cm⁴
momento de inércia a torção (It) = 10,9950 cm⁴
constante de empenamento (Cw) = 112740,0996 cm⁶
coord. do ponto de Kindem y (Ky) = 0,0000 cm

dist. do centro de torção
ao centro de gravidade (y_o) = 0,0000 cm
M_{pl} = 13458,1519 kN.cm

Recortes

Não existem recortes nas mesas

Aberturas

Não existem aberturas na alma

Lamelas

Não existem lamelas

Cargas Concentradas

Número de cargas concentradas = 1

Carga concentrada 1:

posição = 200,00 cm
valor = 130,72 kN
excentricidade = 0,00 cm

Cargas Distribuídas

Não existem cargas distribuídas

Momentos Aplicados

Não existem momentos aplicados

Seções Internas Contidas Lateralmente

Não existem seções internas contidas lateralmente

Apoios Intermediários

Não existem apoios intermediários

Condições de Contorno

Posição 1 (z = 0,00 cm):

| | |
|-------------------------------|------------|
| deslocamento vertical | = impedido |
| rotação no plano de flexão | = livre |
| deslocamento lateral | = impedido |
| rotação no plano de flambagem | = livre |
| rotação em torno do CT | = impedida |
| empenamento | = livre |

Posição 2 (z = 400,00 cm):

| | |
|-------------------------------|------------|
| deslocamento vertical | = impedido |
| rotação no plano de flexão | = livre |
| deslocamento lateral | = impedido |
| rotação no plano de flambagem | = livre |
| rotação em torno do CT | = impedida |
| empenamento | = livre |

=====> Regime Elástico =====

Multiplicador crítico = 1,29902593

Momento Crítico (Mcr) = 16981,08 kN.cm

Posição de Mcr..... = 200,00 cm

Distribuição de Momento Fletor

| | |
|-----------------------------|----------------|
| Posição 1 (z = 0,00 cm) : | 0,00 kN.cm |
| Posição 2 (z = 20,00 cm) : | 1698,11 kN.cm |
| Posição 3 (z = 40,00 cm) : | 3396,22 kN.cm |
| Posição 4 (z = 60,00 cm) : | 5094,32 kN.cm |
| Posição 5 (z = 80,00 cm) : | 6792,43 kN.cm |
| Posição 6 (z = 100,00 cm) : | 8490,54 kN.cm |
| Posição 7 (z = 120,00 cm) : | 10188,65 kN.cm |
| Posição 8 (z = 140,00 cm) : | 11886,76 kN.cm |

Posição 9 (z = 160,00 cm) : 13584,86 kN.cm
 Posição 10 (z = 180,00 cm) : 15282,97 kN.cm
 Posição 11 (z = 200,00 cm) : 16981,08 kN.cm
 Posição 12 (z = 220,00 cm) : 15282,97 kN.cm
 Posição 13 (z = 240,00 cm) : 13584,86 kN.cm
 Posição 14 (z = 260,00 cm) : 11886,76 kN.cm
 Posição 15 (z = 280,00 cm) : 10188,65 kN.cm
 Posição 16 (z = 300,00 cm) : 8490,54 kN.cm
 Posição 17 (z = 320,00 cm) : 6792,43 kN.cm
 Posição 18 (z = 340,00 cm) : 5094,32 kN.cm
 Posição 19 (z = 360,00 cm) : 3396,22 kN.cm
 Posição 20 (z = 380,00 cm) : 1698,11 kN.cm
 Posição 21 (z = 400,00 cm) : 0,00 kN.cm

===== Regime Elasto-Plástico =====

Multiplicador crítico = 1,00000000

Resistência Nominal ao Momento Fletor (Mn) = 13072,16 kN.cm

Posição de Mn..... = 200,00 cm

Distribuição de Momento Fletor

Posição 1 (z = 0,00 cm) : 0,00 kN.cm
 Posição 2 (z = 20,00 cm) : 1307,22 kN.cm
 Posição 3 (z = 40,00 cm) : 2614,43 kN.cm
 Posição 4 (z = 60,00 cm) : 3921,65 kN.cm
 Posição 5 (z = 80,00 cm) : 5228,87 kN.cm
 Posição 6 (z = 100,00 cm) : 6536,08 kN.cm
 Posição 7 (z = 120,00 cm) : 7843,30 kN.cm
 Posição 8 (z = 140,00 cm) : 9150,52 kN.cm
 Posição 9 (z = 160,00 cm) : 10457,73 kN.cm
 Posição 10 (z = 180,00 cm) : 11764,95 kN.cm
 Posição 11 (z = 200,00 cm) : 13072,16 kN.cm
 Posição 12 (z = 220,00 cm) : 11764,95 kN.cm
 Posição 13 (z = 240,00 cm) : 10457,73 kN.cm
 Posição 14 (z = 260,00 cm) : 9150,52 kN.cm
 Posição 15 (z = 280,00 cm) : 7843,30 kN.cm

Posição 16 (z = 300,00 cm) : 6536,08 kN.cm
 Posição 17 (z = 320,00 cm) : 5228,87 kN.cm
 Posição 18 (z = 340,00 cm) : 3921,65 kN.cm
 Posição 19 (z = 360,00 cm) : 2614,43 kN.cm
 Posição 20 (z = 380,00 cm) : 1307,22 kN.cm
 Posição 21 (z = 400,00 cm) : 0,00 kN.cm

>+++++<

Tempo gasto no cálculo : 0 minuto(s) e 55 segundo(s)

Ainda com o objetivo de ilustrar a utilização do programa, será apresentado o mesmo exemplo anterior com as seguintes modificações:

- Distribuição de tensões residuais conforme figura 3.6;

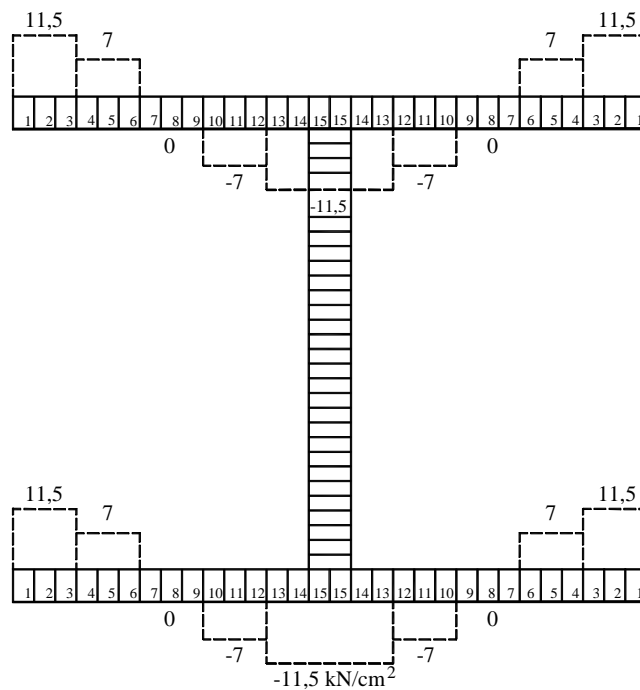


Figura 3.6 – Distribuição de tensões residuais para o segundo exemplo

- Força concentrada na seção central atuando no nível da face superior da viga (figura 3.7);

- Recorte na mesa superior para facilitar ligação, nas duas extremidades (figura 3.7).

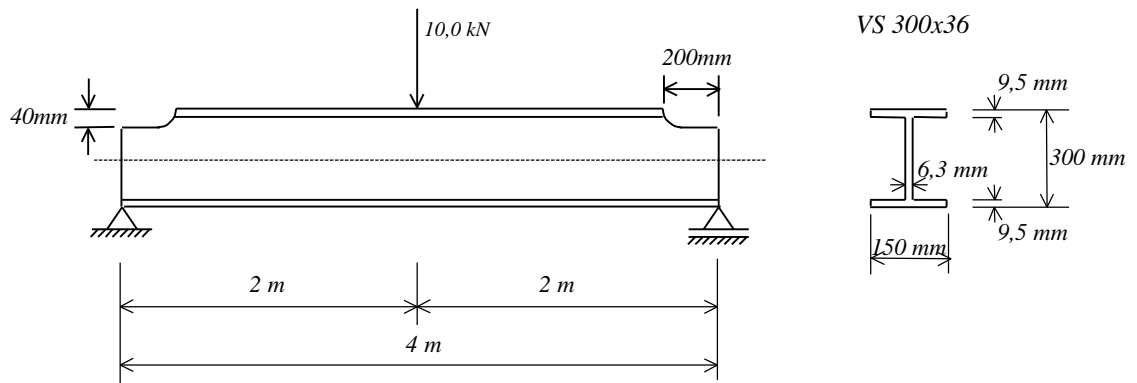


Figura 3.7 - Viga VS 300x36 com recortes nas extremidades

Mostram-se a seguir as telas da entrada de dados interativa:

Entrada de Dados UFMG

Unidades: kN e cm

Unidades
 Força: kN N
 Comprimento: cm mm

Tensão de escoamento (fy): kN/cm²

Tipo de seção transversal:

Dados da Viga

Identificação:

Vão total (L):

Altura (d):

Espessura da alma (tw):

Largura da mesa superior (bfs):

Espessura da mesa superior (tfs):

Largura da mesa inferior (bfi):

Espessura da mesa inferior (tfi):

Entrada de Dados x

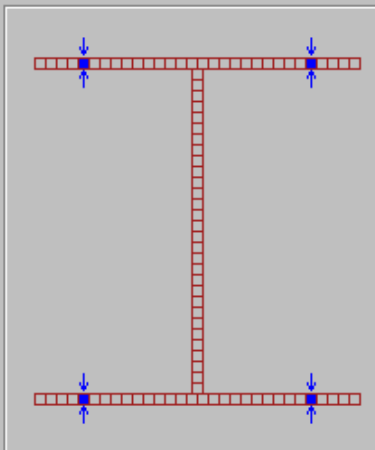
Unidades: kN e cm UFMG

Distribuição das tensões residuais

Padrão

Máxima tensão de compressão: kN/cm²

"Correta"



| Elemento | Valor |
|----------|-------|
| 1 | 11,5 |
| 2 | 11,5 |
| 3 | 11,5 |
| 4 | 7 |
| 5 | 7 |
| 6 | 7 |
| 7 | 0 |
| 8 | 0 |
| 9 | 0 |

Entrada de Dados x

Unidades: kN e cm UFMG

A viga apresenta :

Recortes nas mesas

Aberturas

Lamelas

Cargas Concentradas Quantidade:

Cargas Distribuídas

Momentos Aplicados

Seções internas contidas lateralmente

Apoios intermediários

Entrada de Dados x

Unidades: kN e cm UFMG

Recortes nas mesas

Posição

Extremidade inicial
 Extremidade final
 Ambas as extremidades

Extremidade inicial

Recorte em ambas as mesas
 Recorte na mesa superior
 Recorte na mesa inferior

Dimensões

Comprimento:

Altura:

Extremidade final

Recorte em ambas as mesas
 Recorte na mesa superior
 Recorte na mesa inferior

Dimensões

Comprimento:

Altura:

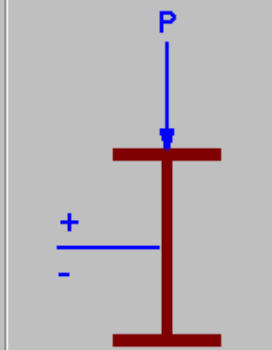
X Cancelar
◀ Anterior
Próxima ▶

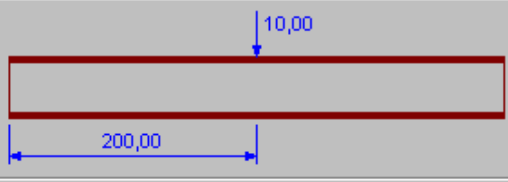
Entrada de Dados x

Unidades: kN e cm UFMG

Carga Concentrada 01

Convenção de sinal para distância vertical da carga em relação ao centro de torção





Coordenada (z):

Valor (P):

Distância vertical:

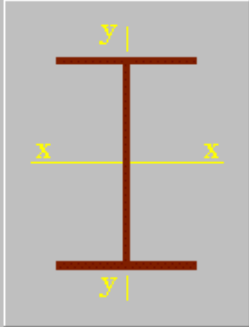
X Cancelar
◀ Anterior
Próxima ▶

Entrada de Dados x

Unidades: kN e cm UFMG

Condições de contorno para $Z = 0$ cm

0 = Livre 1 = Impedido

| | | |
|---------------------------------------|---|---|
| Deslocamento vertical: | 1 |  |
| Rotação em torno do eixo x: | 0 | |
| Deslocamento lateral: | 1 | |
| Rotação no plano de flambagem: | 0 | |
| Rotação em torno do centro de torção: | 1 | |
| Empenamento: | 0 | |

Entrada de Dados x

Unidades: kN e cm UFMG

Condições de contorno para $Z = 400,00$ cm

0 = Livre 1 = Impedido

| | | |
|---------------------------------------|---|---|
| Deslocamento vertical: | 1 |  |
| Rotação em torno do eixo x: | 0 | |
| Deslocamento lateral: | 1 | |
| Rotação no plano de flambagem: | 0 | |
| Rotação em torno do centro de torção: | 1 | |
| Empenamento: | 0 | |

A seguir, é apresentado o arquivo de saída de resultados:

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Programa FLT
Flambagem lateral com torção de vigas de aço
em regimes elástico e elasto-plástico

Março/1998

Autor..... : Luiz Antonio de Souza
Orientadores : Prof. Ricardo Hallal Fakury
 Prof. Ana Lydia Reis de Castro e Silva

Dados Gerais do Problema

Unidades: Força..... = kN
 Comprimento = cm

Tipo de perfil.....: Perfil I

Dados da Barra

Identificação: Carga Concentrada Seção I Distribuição Correta

Dimensões....: Vão Teórico (L) = 400,00 cm
 Altura do Perfil (d) = 30,00 cm
 Espessura da alma (tw) = 0,63 cm
 Largura da mesa superior (bfs) = 15,00 cm
 Espessura da mesa superior (tfs) = 0,95 cm
 Largura da mesa inferior (bfi) = 15,00 cm
 Espessura da mesa inferior (tfi) = 0,95 cm

Propriedades Geométricas

Elemento 1 (z = 0,00 a z = 20,00 cm) :

| | | |
|---|--------|---------------------------|
| momento de inércia x | (Ix) = | 2104,7358 cm ⁴ |
| momento de inércia y | (Iy) = | 267,7194 cm ⁴ |
| momento de inércia a torção | (It) = | 6,4144 cm ⁴ |
| constante de empenamento | (Cw) = | 0,0483 cm ⁶ |
| coord. do ponto de Kindem y (Ky) | = | -3,0763 cm |
| dist. do centro de torção ao centro de gravidade | (yo) = | 6,7530 cm |
| Mpl | = | 5087,5322 kN.cm |

Elemento 2 (z = 20,00 a z = 200,00 cm) :

| | | |
|---|--------|-----------------------------|
| momento de inércia x | (Ix) = | 7302,0056 cm ⁴ |
| momento de inércia y | (Iy) = | 534,9803 cm ⁴ |
| momento de inércia a torção | (It) = | 10,9950 cm ⁴ |
| constante de empenamento | (Cw) = | 112740,0996 cm ⁶ |
| coord. do ponto de Kindem y (Ky) | = | 0,0000 cm |
| dist. do centro de torção ao centro de gravidade | (yo) = | 0,0000 cm |
| Mpl | = | 13458,1519 kN.cm |

Elemento 3 (z = 200,00 a z = 380,00 cm) :

| | | |
|---|--------|-----------------------------|
| momento de inércia x | (Ix) = | 7302,0056 cm ⁴ |
| momento de inércia y | (Iy) = | 534,9803 cm ⁴ |
| momento de inércia a torção | (It) = | 10,9950 cm ⁴ |
| constante de empenamento | (Cw) = | 112740,0996 cm ⁶ |
| coord. do ponto de Kindem y (Ky) | = | 0,0000 cm |
| dist. do centro de torção ao centro de gravidade | (yo) = | 0,0000 cm |
| Mpl | = | 13458,1519 kN.cm |

Elemento 4 (z = 380,00 a z = 400,00 cm) :

| | | |
|----------------------------------|--------|---------------------------|
| momento de inércia x | (Ix) = | 2104,7358 cm ⁴ |
| momento de inércia y | (Iy) = | 267,7194 cm ⁴ |
| momento de inércia a torção | (It) = | 6,4144 cm ⁴ |
| constante de empenamento | (Cw) = | 0,0483 cm ⁶ |
| coord. do ponto de Kindem y (Ky) | = | -3,0763 cm |
| dist. do centro de torção | | |

ao centro de gravidade (yo) = 6,7530 cm
Mpl = 5087,5322 kN.cm

Recortes

Recorte Inicial (mesa superior):

posição inicial = 0,00 cm
posição final = 20,00 cm
altura = 4,00 cm

Recorte Final (mesa superior):

posição inicial = 380,00 cm
posição final = 400,00 cm
altura = 4,00 cm

Aberturas

Não existem aberturas na alma

Lamelas

Não existem lamelas

Cargas Concentradas

Número de cargas concentradas = 1

Carga concentrada 1:

posição = 200,00 cm
valor = 10,00 kN
excentricidade = 15,00 cm

Cargas Distribuídas

Não existem cargas distribuídas

Momentos Aplicados

Não existem momentos aplicados

Seções Internas Contidas Lateralmente

Não existem seções internas contidas lateralmente

Apoios Intermediários

Não existem apoios intermediários

Condições de Contorno

Posição 1 (z = 0,00 cm):

| | |
|-------------------------------|------------|
| deslocamento vertical | = impedido |
| rotação no plano de flexão | = livre |
| deslocamento lateral | = impedido |
| rotação no plano de flambagem | = livre |
| rotação em torno do CT | = impedida |
| empenamento | = livre |

Posição 2 (z = 400,00 cm):

| | |
|-------------------------------|------------|
| deslocamento vertical | = impedido |
| rotação no plano de flexão | = livre |
| deslocamento lateral | = impedido |
| rotação no plano de flambagem | = livre |
| rotação em torno do CT | = impedida |
| empenamento | = livre |

=====> Regime Elástico <=====

Multiplicador crítico = 8,21313321

Momento Crítico (Mcr) = 8213,13 kN.cm

Posição de Mcr..... = 200,00 cm

Distribuição de Momento Fletor

Posição 1 (z = 0,00 cm) : 0,00 kN.cm

| | | |
|------------|-----------------|-----------------|
| Posição 2 | (z = 2,00 cm) | : 82,13 kN.cm |
| Posição 3 | (z = 4,00 cm) | : 164,26 kN.cm |
| Posição 4 | (z = 6,00 cm) | : 246,39 kN.cm |
| Posição 5 | (z = 8,00 cm) | : 328,53 kN.cm |
| Posição 6 | (z = 10,00 cm) | : 410,66 kN.cm |
| Posição 7 | (z = 12,00 cm) | : 492,79 kN.cm |
| Posição 8 | (z = 14,00 cm) | : 574,92 kN.cm |
| Posição 9 | (z = 16,00 cm) | : 657,05 kN.cm |
| Posição 10 | (z = 18,00 cm) | : 739,18 kN.cm |
| Posição 11 | (z = 20,00 cm) | : 821,31 kN.cm |
| Posição 12 | (z = 29,00 cm) | : 1190,90 kN.cm |
| Posição 13 | (z = 38,00 cm) | : 1560,50 kN.cm |
| Posição 14 | (z = 47,00 cm) | : 1930,09 kN.cm |
| Posição 15 | (z = 56,00 cm) | : 2299,68 kN.cm |
| Posição 16 | (z = 65,00 cm) | : 2669,27 kN.cm |
| Posição 17 | (z = 74,00 cm) | : 3038,86 kN.cm |
| Posição 18 | (z = 83,00 cm) | : 3408,45 kN.cm |
| Posição 19 | (z = 92,00 cm) | : 3778,04 kN.cm |
| Posição 20 | (z = 101,00 cm) | : 4147,63 kN.cm |
| Posição 21 | (z = 110,00 cm) | : 4517,22 kN.cm |
| Posição 22 | (z = 119,00 cm) | : 4886,81 kN.cm |
| Posição 23 | (z = 128,00 cm) | : 5256,41 kN.cm |
| Posição 24 | (z = 137,00 cm) | : 5626,00 kN.cm |
| Posição 25 | (z = 146,00 cm) | : 5995,59 kN.cm |
| Posição 26 | (z = 155,00 cm) | : 6365,18 kN.cm |
| Posição 27 | (z = 164,00 cm) | : 6734,77 kN.cm |
| Posição 28 | (z = 173,00 cm) | : 7104,36 kN.cm |
| Posição 29 | (z = 182,00 cm) | : 7473,95 kN.cm |
| Posição 30 | (z = 191,00 cm) | : 7843,54 kN.cm |
| Posição 31 | (z = 200,00 cm) | : 8213,13 kN.cm |
| Posição 32 | (z = 209,00 cm) | : 7843,54 kN.cm |
| Posição 33 | (z = 218,00 cm) | : 7473,95 kN.cm |
| Posição 34 | (z = 227,00 cm) | : 7104,36 kN.cm |
| Posição 35 | (z = 236,00 cm) | : 6734,77 kN.cm |
| Posição 36 | (z = 245,00 cm) | : 6365,18 kN.cm |
| Posição 37 | (z = 254,00 cm) | : 5995,59 kN.cm |
| Posição 38 | (z = 263,00 cm) | : 5626,00 kN.cm |
| Posição 39 | (z = 272,00 cm) | : 5256,41 kN.cm |

Posição 40 (z = 281,00 cm) : 4886,81 kN.cm
 Posição 41 (z = 290,00 cm) : 4517,22 kN.cm
 Posição 42 (z = 299,00 cm) : 4147,63 kN.cm
 Posição 43 (z = 308,00 cm) : 3778,04 kN.cm
 Posição 44 (z = 317,00 cm) : 3408,45 kN.cm
 Posição 45 (z = 326,00 cm) : 3038,86 kN.cm
 Posição 46 (z = 335,00 cm) : 2669,27 kN.cm
 Posição 47 (z = 344,00 cm) : 2299,68 kN.cm
 Posição 48 (z = 353,00 cm) : 1930,09 kN.cm
 Posição 49 (z = 362,00 cm) : 1560,50 kN.cm
 Posição 50 (z = 371,00 cm) : 1190,90 kN.cm
 Posição 51 (z = 380,00 cm) : 821,31 kN.cm
 Posição 52 (z = 382,00 cm) : 739,18 kN.cm
 Posição 53 (z = 384,00 cm) : 657,05 kN.cm
 Posição 54 (z = 386,00 cm) : 574,92 kN.cm
 Posição 55 (z = 388,00 cm) : 492,79 kN.cm
 Posição 56 (z = 390,00 cm) : 410,66 kN.cm
 Posição 57 (z = 392,00 cm) : 328,53 kN.cm
 Posição 58 (z = 394,00 cm) : 246,39 kN.cm
 Posição 59 (z = 396,00 cm) : 164,26 kN.cm
 Posição 60 (z = 398,00 cm) : 82,13 kN.cm
 Posição 61 (z = 400,00 cm) : 0,00 kN.cm

=====> Regime Elasto-Plástico <=====

Multiplicador crítico = 8,21313321

Resistência Nominal ao Momento Fletor (Mn) = 8213,13 kN.cm

Posição de Mn..... = 200,00 cm

A flambagem ocorreu em regime elástico

>+++++<

Tempo gasto no cálculo : 0 minuto(s) e 19 segundo(s)

4. APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

4.1. Introdução

Para que pudessem ser mostradas todas as potencialidades do Programa FLT, foram feitos vários processamentos, procurando cobrir situações diversas.

Foram analisados casos de vigas de seção I bissimétrica, a mais utilizada na prática, quando o carregamento atua no nível do centro de torção, no nível da mesa inferior e no nível da mesa superior. Sempre que possível, os resultados foram comparados com aqueles fornecidos pela especificação americana AISC/LRFD [64], pela Norma Brasileira NBR 8800 [65] e pela especificação canadense CAN/CSA-S.16.1 [66].

Além da seção I bissimétrica foram analisados perfis com seção U, caixão e retangular cheia, para casos de carregamento atuando no nível do centro de torção. Os resultados obtidos foram apresentados paralelamente aos valores fornecidos pelas especificações já mencionadas, exceto a CAN/CSA-S.16.1 [66].

Para as variações de condições de contorno, foram observadas situações em que ocorrem contenções laterais internas ao longo do comprimento da viga, além de casos de vínculos rígidos para efeito da flambagem lateral com torção.

Considerou-se também os casos com variação de geometria na seção transversal, onde foram analisadas vigas com lamelas de reforço soldadas às mesas, vigas com recortes nas extremidades para ligação, e vigas com aberturas na alma.

Para o limite de escoamento do aço, adotou-se um valor igual a 250 MPa.

Comentários e conclusões a respeito dos resultados obtidos serão feitos no capítulo 5.

4.2. Casos de Carregamento e Condições de Contorno

Os casos de carregamento e condições de contorno no plano de flexão analisados estão apresentados na Tabela 4.1.

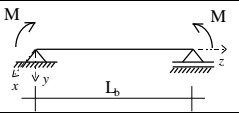
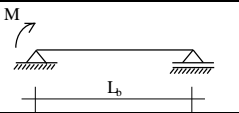
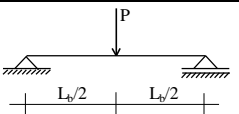
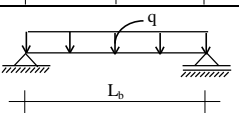
| | |
|----|--|
| 01 |  |
| 02 |  |
| 03 |  |
| 04 |  |

Tabela 4.1 - Casos de carregamento e condições de contorno.

Serão consideradas as seguintes possibilidades de condições de contorno quanto à flambagem lateral com torção:

- vínculos de garfo nas duas extremidades;
- vínculos rígidos em ambas as extremidades.

Para efeito de consideração das tensões residuais, foram tomadas três situações:

- distribuição padrão, conforme mostrado em 2.2.3;
- distribuição “correta” com tração nas bordas das mesas, conforme se vê na figura 4.1;

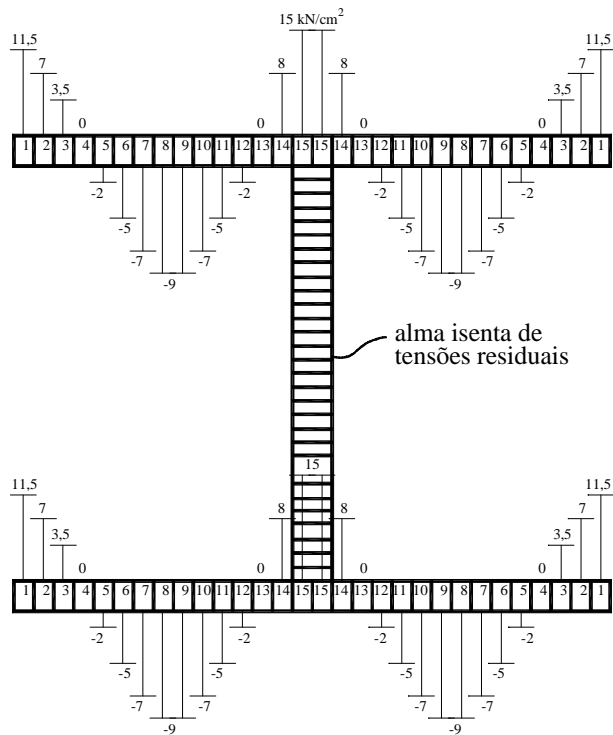


Figura 4.1 – Distribuição “correta” de tensões residuais com tração nas bordas das mesas.

- distribuição “correta” com compressão nas bordas das mesas, conforme se vê na figura 4.2.

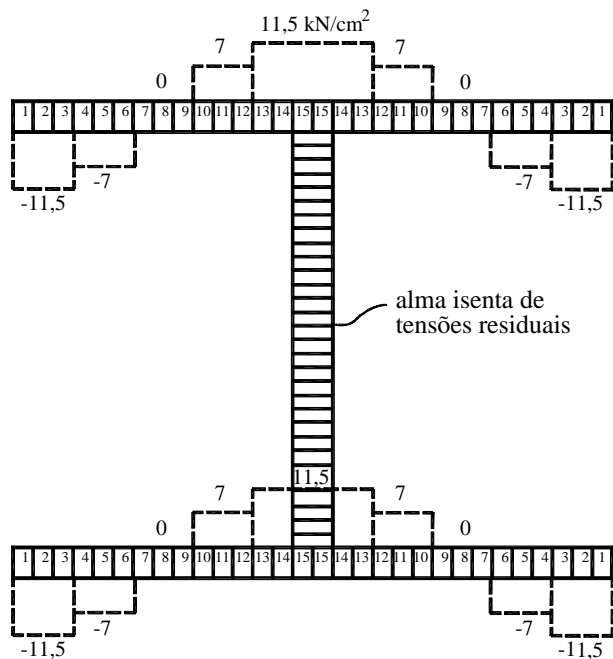


Figura 4.2 – Distribuição “correta” de tensões residuais com compressão nas bordas das mesas.

Em todos os casos analisados, o vão L é igual ao comprimento destravado L_b .

4.3. Vigas com Seção I Bissimétrica

Para as vigas com seção I bissimétrica, foram estudados todos os casos apresentados na Tabela 4.1, usando-se a “distribuição padrão”, e a distribuição “correta” de tensões residuais, tanto para compressão nas bordas das mesas como para tração nas bordas. Os resultados obtidos foram mostrados juntamente com os valores fornecidos pelo AISC/LRFD [64], pela NBR 8800 [65] e pela CAN/CSA-S.16.1 [66], por meio de gráficos, nos sub-itens 4.3.1.1, 4.3.1.2, 4.3.1.3 e 4.3.1.4 (figuras 4.3 a 4.6).

4.3.1. Comparação com resultados obtidos pelo AISC/LRFD [64], NBR 8800 [65] e CAN/CSA-S.16.1 [66]

Para estes exemplos, foi usado um perfil soldado de dimensões 400x200x16x6,3 e vínculo de garfo em ambas as extremidades, fletidos em torno do eixo perpendicular à alma.

4.3.1.1. Momento uniforme

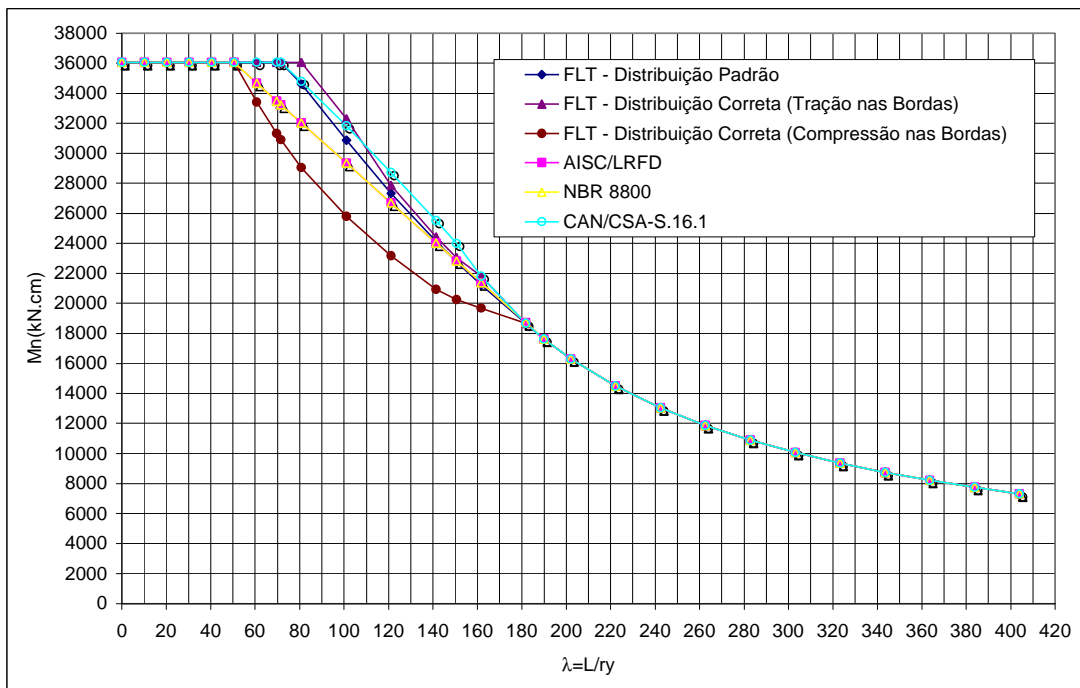


Figura 4.3 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64], NBR 8800 [65] e CAN/CSA-S.16.1 [66] para o caso de momento uniforme.

4.3.1.2. Força distribuída

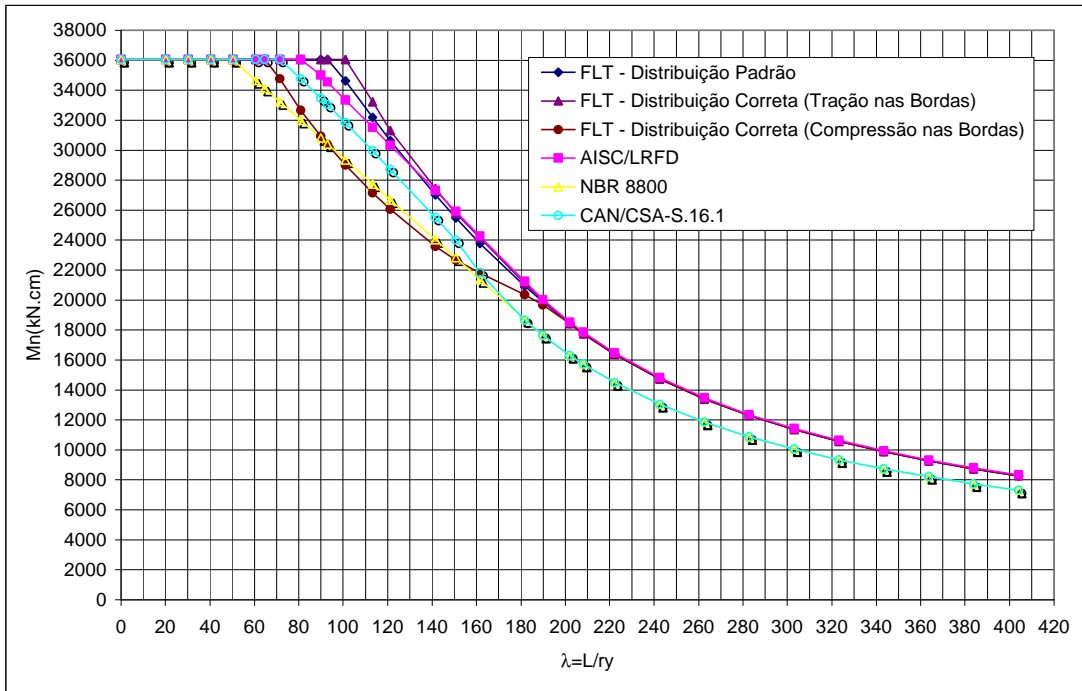


Figura 4.4 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64], NBR 8800 [65] e CAN/CSA-S.16.1 [66] para o caso de força distribuída aplicada no nível do centro de torção.

4.3.1.3. Força concentrada aplicada na seção central

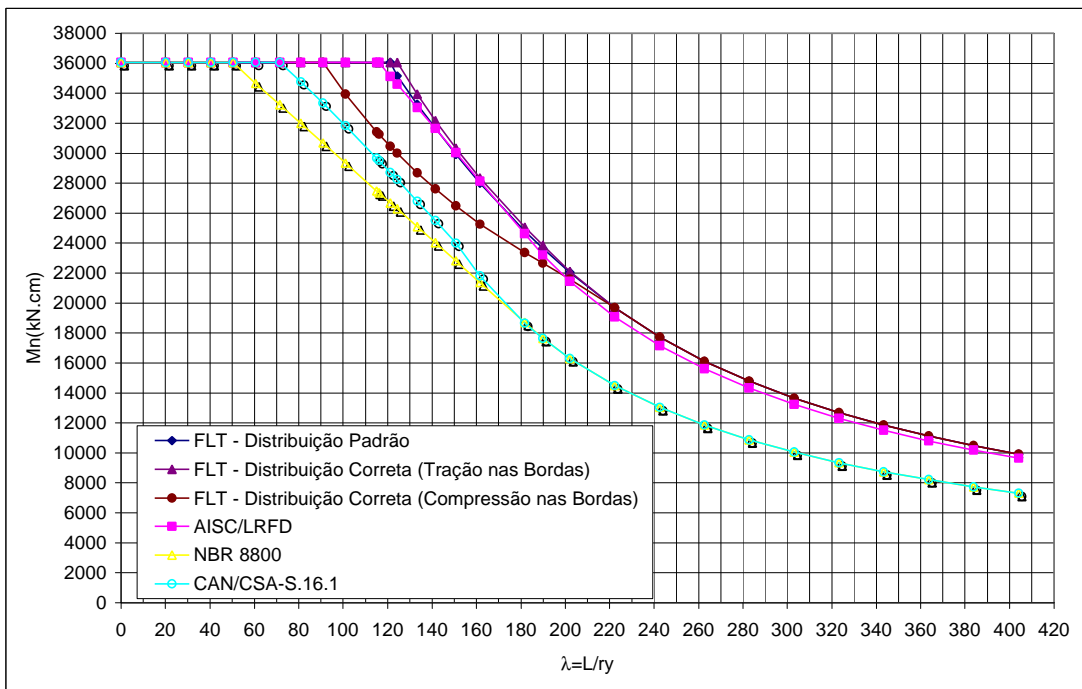


Figura 4.5 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64], NBR 8800 [65] e CAN/CSA-S.16.1 [66] para o caso de força concentrada aplicada na seção central, no nível do centro de torção.

4.3.1.4. Momento em uma das extremidades

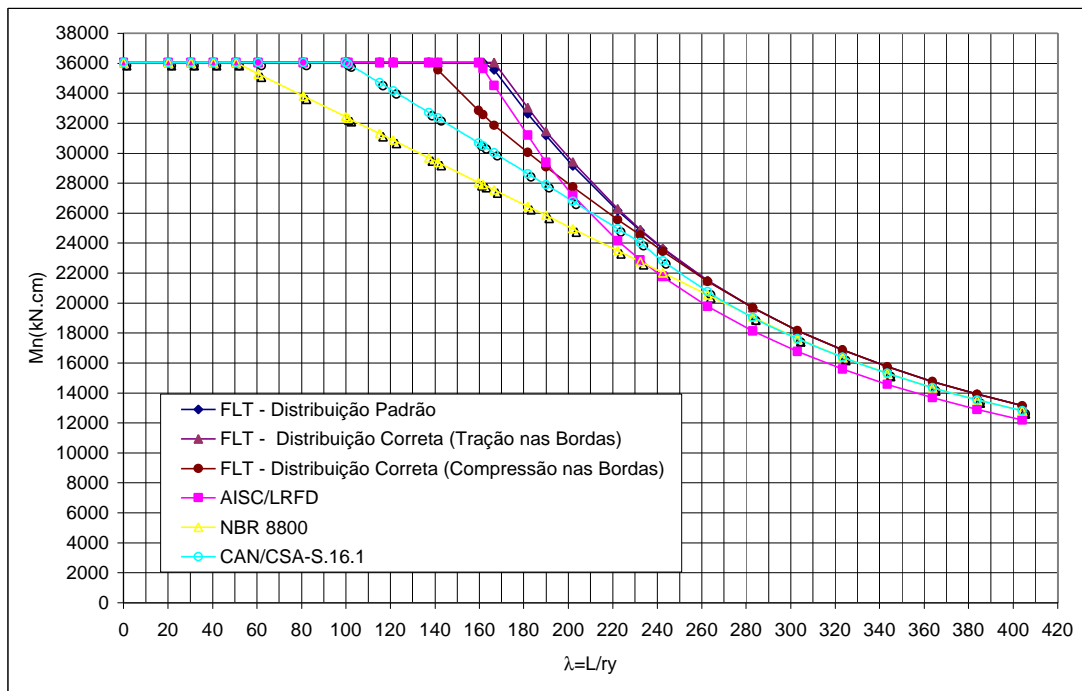


Figura 4.6 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64], NBR 8800 [65] e CAN/CSA-S.16.1 [66] para o caso de momento em uma das extremidades.

4.3.2. Comparação dos efeitos das condições de contorno e do nível de aplicação do carregamento

Para estes exemplos, foi usado um perfil laminado IP 300 de dimensões 300x150x10,7x6,1, fletido em torno do eixo perpendicular à alma e vínculo de garfo ou rígido em ambas as extremidades. O carregamento é constituído por força distribuída ou força concentrada na seção central, aplicada no nível do centro de torção, da mesa superior ou da mesa inferior

4.3.2.1. Força distribuída

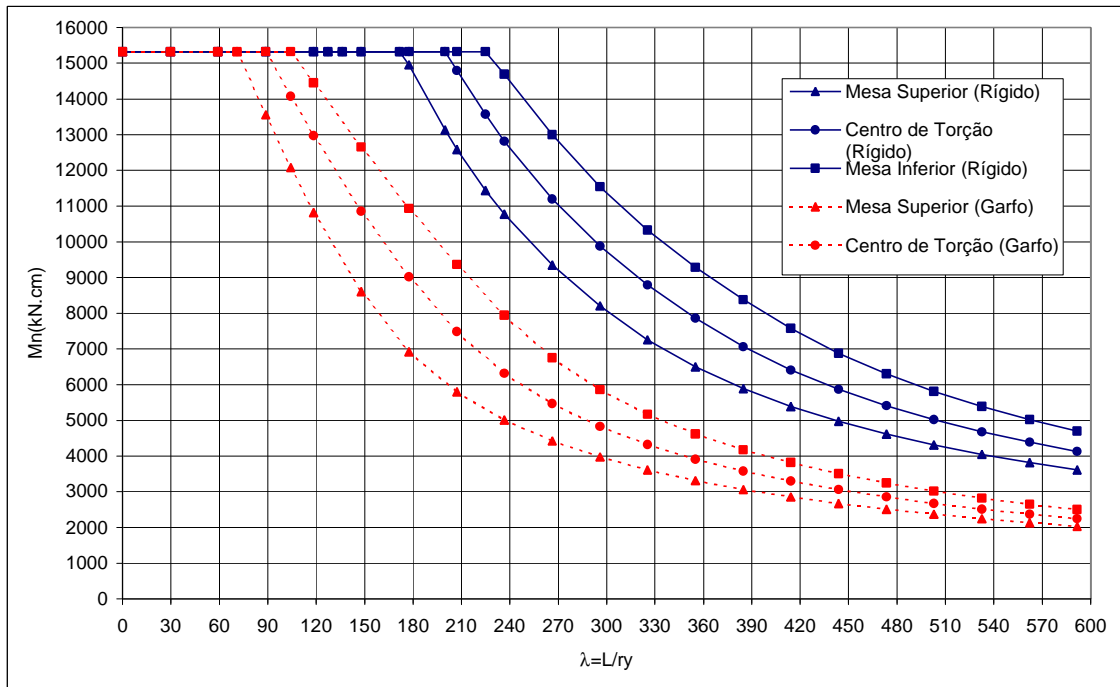


Figura 4.7 - Comparação gráfica dos efeitos dos vínculos rígido e de garfo para o caso de força distribuída.

4.3.2.2. Força concentrada aplicada na seção central

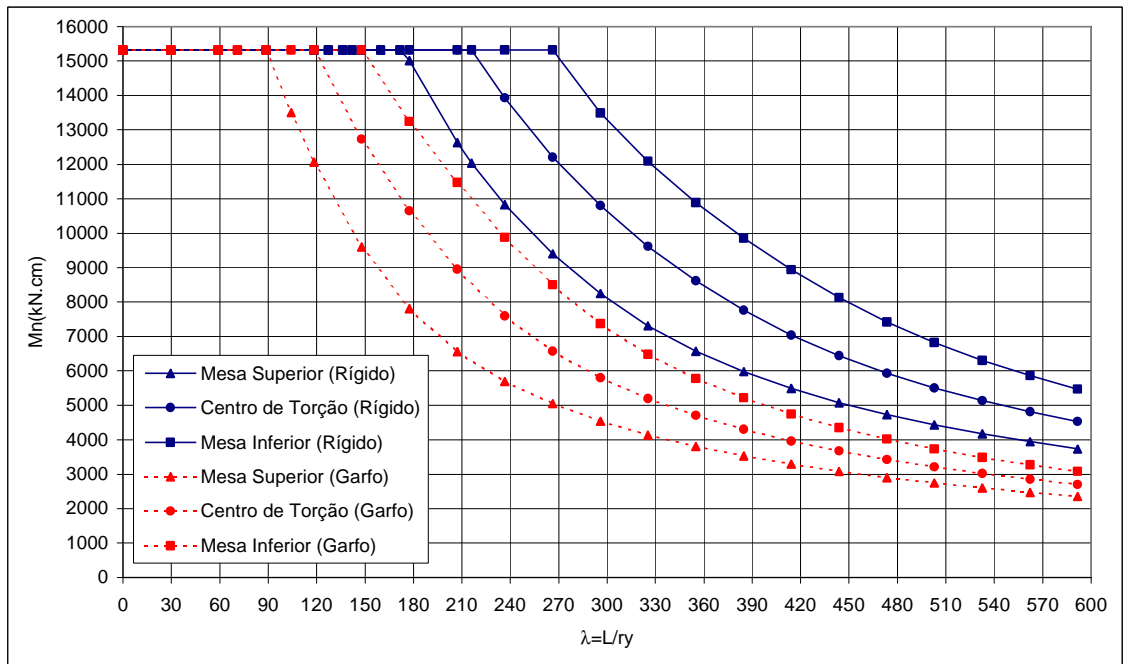


Figura 4.8 - Comparação gráfica dos efeitos dos vínculos rígido e de garfo para o caso de força concentrada aplicada na seção central.

4.3.3. Avaliação do efeito de recorte nas mesas

Muitas vezes é necessário que se façam recortes nas mesas de vigas com seção I, de maneira a possibilitar sua ligação a outros elementos da construção. Estes recortes influem na resistência nominal à flambagem lateral com torção, principalmente se forem feitos na mesa comprimida.

Para estes exemplos, foi usado um perfil laminado IP 300 de dimensões 300x150x10,7x6,1 (em mm), vínculo de garfo e um recorte na mesa superior da viga, em ambas as extremidades, com altura de 25mm e comprimento de 3% do vão.

Foram tomadas as situações de momento uniforme, força distribuída aplicada no nível do centro de torção e força concentrada na seção central aplicada no nível do centro de torção.

4.3.3.1. Momento uniforme

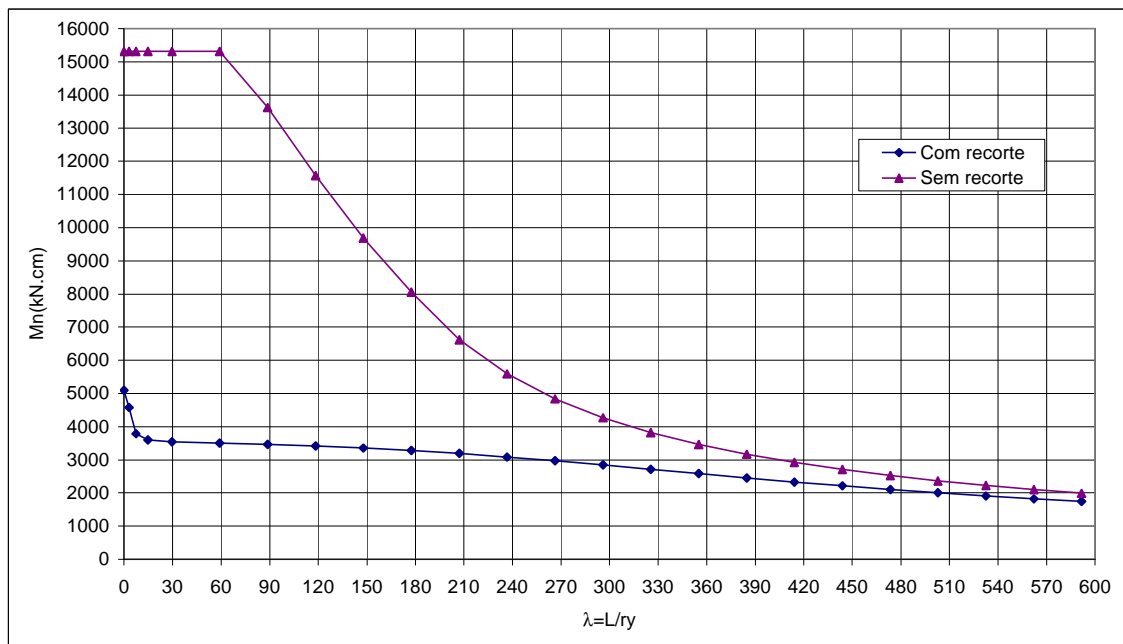


Figura 4.9 - Avaliação gráfica dos recortes nas mesas para o caso de momento uniforme.

4.3.3.2. Força distribuída

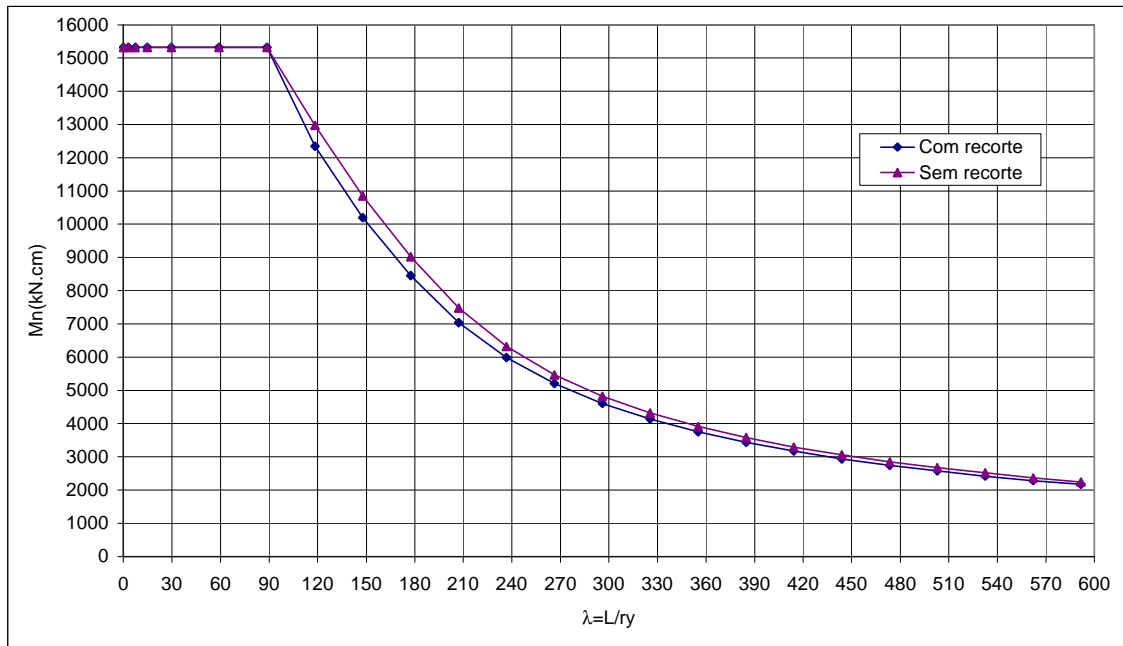


Figura 4.10 - Avaliação gráfica dos recortes nas mesas para o caso de força distribuída.

4.3.3.3. Força concentrada aplicada na seção central

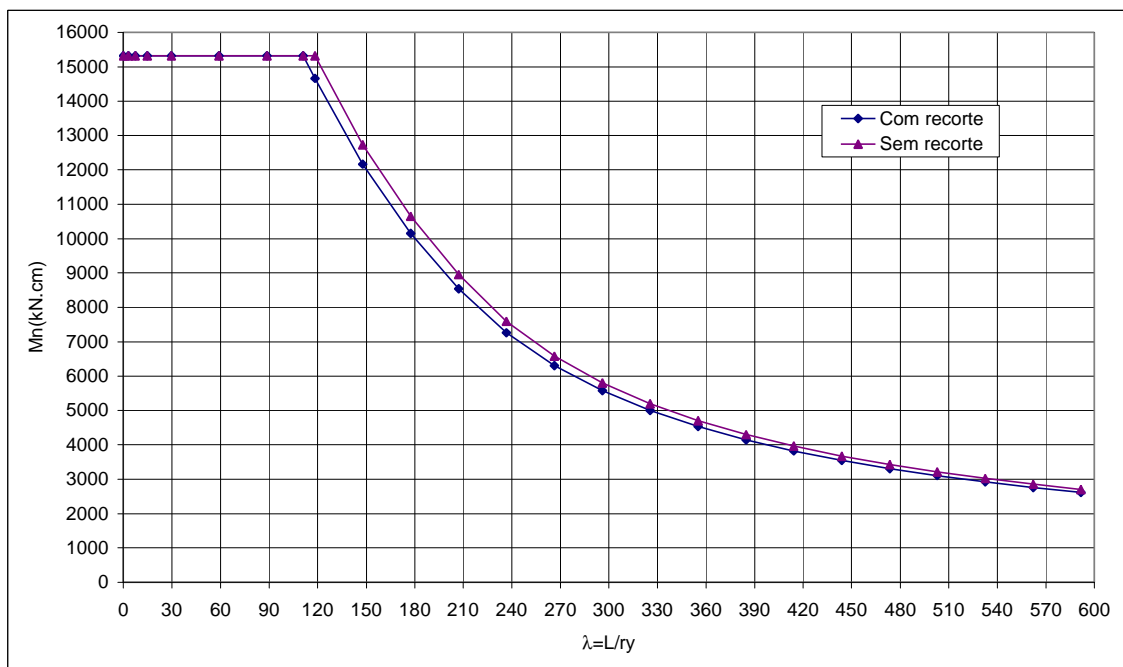


Figura 4.11 - Comparação gráfica dos recortes nas mesas para o caso de força concentrada aplicada na seção central.

4.3.4. Vigas com aberturas na alma

As vigas de edifícios muitas vezes possuem aberturas na alma para colocação de equipamentos, passagem de dutos, inspeção da estrutura e vários outros fins. Entretanto, a presença destas aberturas reduz a resistência nominal da viga, inclusive no que diz respeito à flambagem lateral com torção.

De maneira a avaliar como as aberturas influenciam o valor da resistência nominal à flambagem lateral com torção em regime elasto-plástico foram analisadas algumas situações representativas para o caso de uma viga com aberturas dispostas ao longo do seu comprimento.

A viga analisada possui vão de $9,00\text{ m}$, com extremidades com vínculo de garfo, e está submetida a um carregamento distribuído em todo seu comprimento, caso 04 da Tabela 4.1, atuando no nível do centro de torção. A seção transversal é um perfil I duplamente simétrico, soldado, com altura igual a 450 mm , larguras das mesas igual a 200 mm e espessuras das mesas e da alma iguais a 19 mm e $6,3\text{ mm}$, respectivamente. Foram previstas 5 aberturas na alma em posições diferentes, porém simétricas em relação ao meio do vão, colocadas separadamente ou em conjunto (figura 4.12), e com dimensões de $0,90\text{ m} \times 0,30\text{ m}$, sendo que, o centro da abertura coincide com o centro de gravidade da seção transversal.

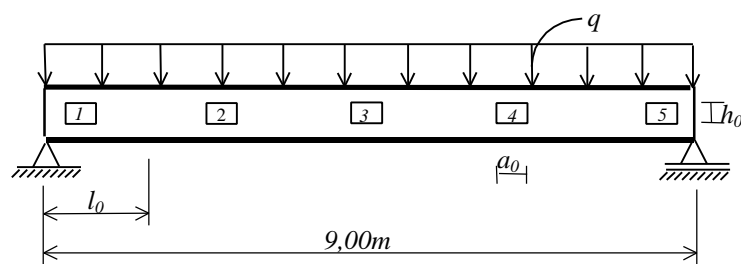


Figura 4.12 - Aberturas consideradas para o cálculo.

Os resultados obtidos com o Programa FLT estão apresentados na Tabela 4.2.

| | Resistência Nominal, M_n (kN.cm) |
|-----------------------|---------------------------------------|
| Sem abertura | 28704 |
| Aberturas 1 e 5 | 28583 |
| Aberturas 2 e 4 | 28599 |
| Abertura 3 | 28592 |
| Aberturas 1, 2, 4 e 5 | 28521 |
| Aberturas 1 a 5 | 28456 |

Tabela 4.2 - Valores da resistência nominal ao momento fletor para diversos casos de aberturas na alma.

4.3.5. Vigas com lamela

Para se estudar como a utilização de lamelas influi na resistência nominal ao momento fletor, em regime elasto-plástico, considerando-se o estado limite último de flambagem lateral com torção, tomou-se uma viga de seção I bissimétrica com uma chapa soldada na mesa superior, com espessura e largura iguais às deste elemento.

Inicialmente calculou-se o valor da resistência nominal para a viga sem lamela. Em seguida, calcularam-se as resistências nominais para o comprimento da lamela variando de $0,1L$ até L , ou seja, até que toda a mesa estivesse coberta, e finalmente calculou-se a resistência nominal para uma viga monossimétrica na qual a mesa superior possuísse espessura igual à soma da espessura da lamela e a espessura da mesa original.

Analisou-se uma viga com força distribuída em todo o vão aplicada no nível do centro de torção, caso 04 da Tabela 4.1, e vínculo de garfo. A seção transversal e o vão da viga são mostrados na figura 4.13.

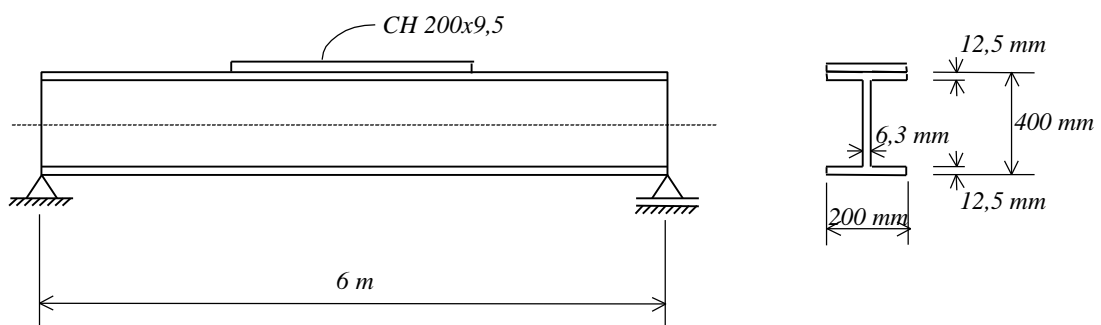


Figura 4.13 - Vão da viga e seção transversal considerados na verificação de viga com lamela.

Os resultados estão apresentados na figura 4.14, onde são plotados os valores dos multiplicadores críticos em função da variação do comprimento da chapa de reforço.

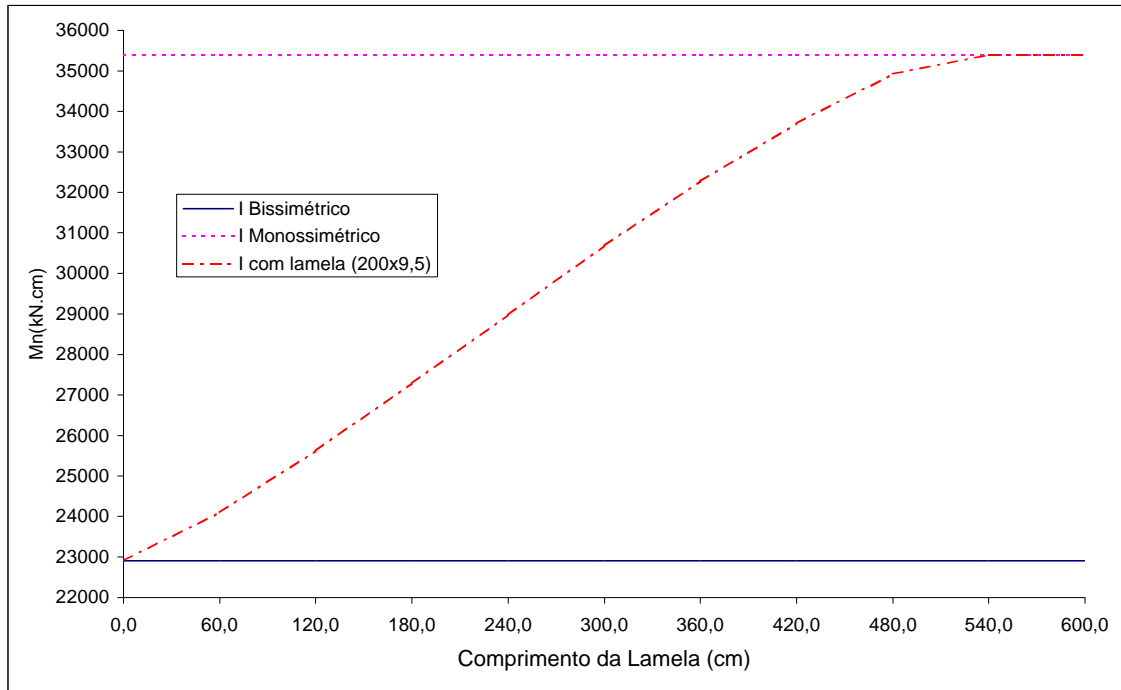


Figura 4.14 – Gráfico comparativo para o caso de força distribuída considerando lamela na mesa superior.

4.3.6. Vigas com contenção lateral interna

Para se estudar a influência da contenção lateral interna na resistência nominal ao momento fletor, em regime elasto-plástico, estudou-se o caso de uma viga com seção I duplamente simétrica com uma seção interna contida lateralmente com vínculo de garfo. A posição desta seção contida, definida por a , variou ao longo do comprimento da viga, de modo a se determinar como tal restrição afeta o valor da resistência nominal ao momento fletor (figura 4.15).

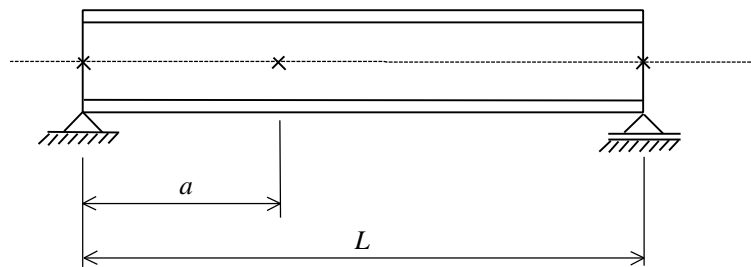


Figura 4.15 - Posição da contenção lateral interna.

O carregamento utilizado foi uma força distribuída ao longo do comprimento da viga, aplicada no nível do centro de torção, caso 04 da Tabela 4.1, e vínculo de garfo. A seção transversal adotada e o vão da viga estão mostrados na figura 4.16, e os valores obtidos para a resistência nominal ao momento fletor, M_n , na figura 4.17, onde os mesmos são plotados em função da posição da contenção lateral interna, a .

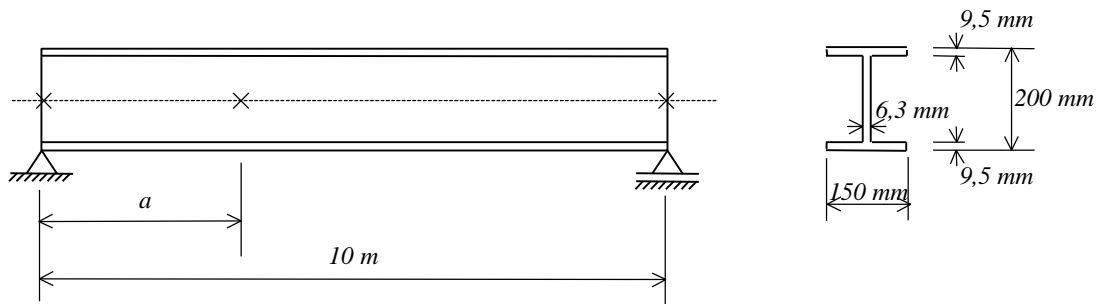


Figura 4.16 - Vão da viga e seção transversal considerados na verificação de viga com contenção lateral interna.

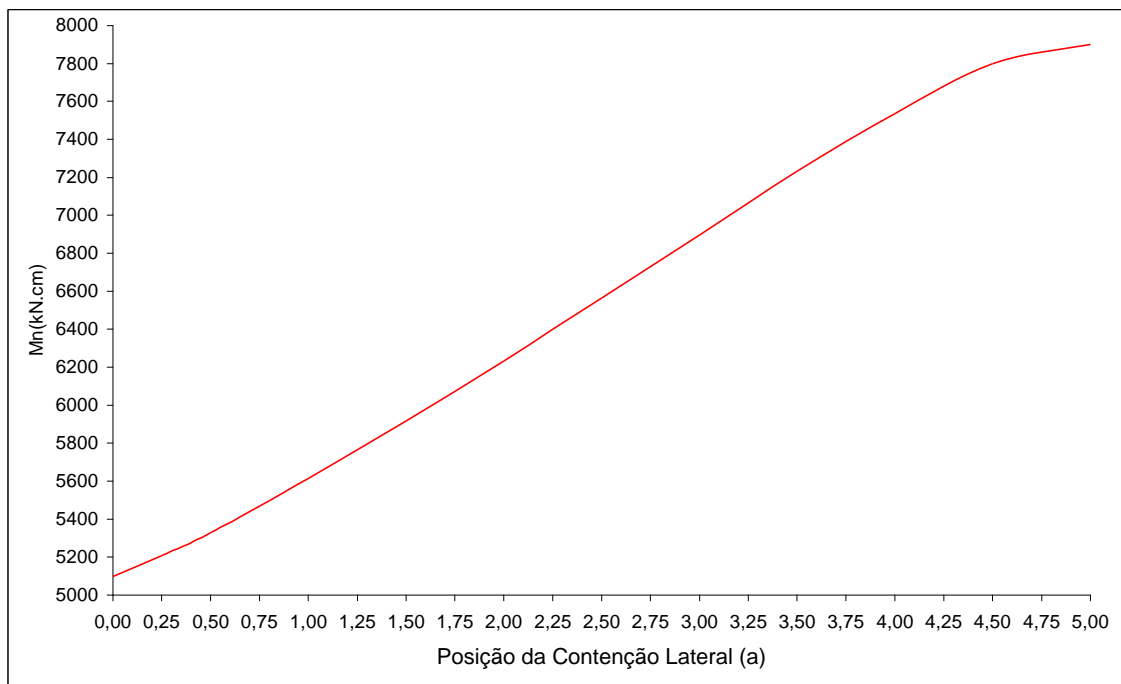


Figura 4.17 – Resistência nominal, M_n , em função da posição da contenção lateral interna, a .

4.4. Vigas com Outras Seções Transversais

Para as vigas com seção caixão, seção U e seção retangular cheia foi estudado o caso 04 apresentado na Tabela 4.1, para força uniformemente distribuída atuando no nível do centro de torção. Foram obtidos valores para a resistência nominal, à medida em que se variava o vão da viga, os quais estão apresentados em gráficos. As seções transversais utilizadas estão mostradas na figura 4.18.

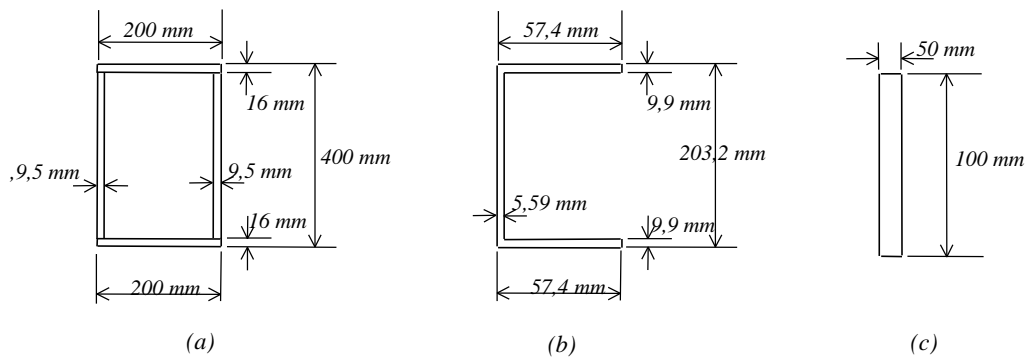


Figura 4.18 - Seções transversais consideradas: (a) caixão, (b) U, e (c) retangular cheia.

4.4.1. Seção caixão

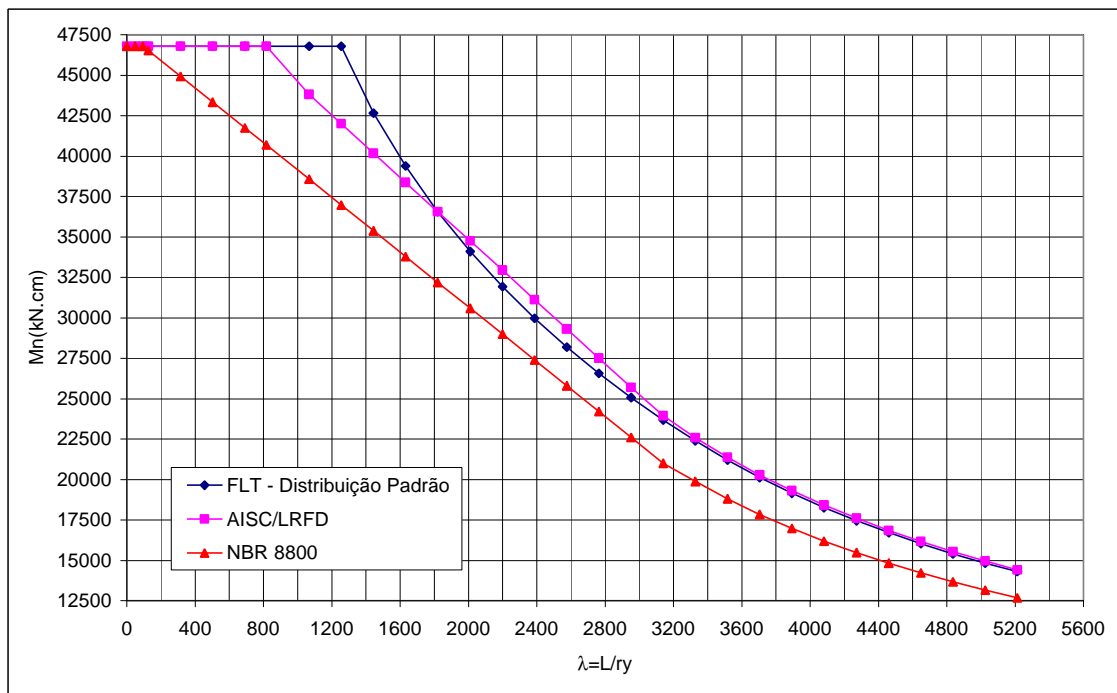


Figura 4.19 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64] e NBR 8800 [65] para o caso de força distribuída e seção caixão.

4.4.2. Seção U

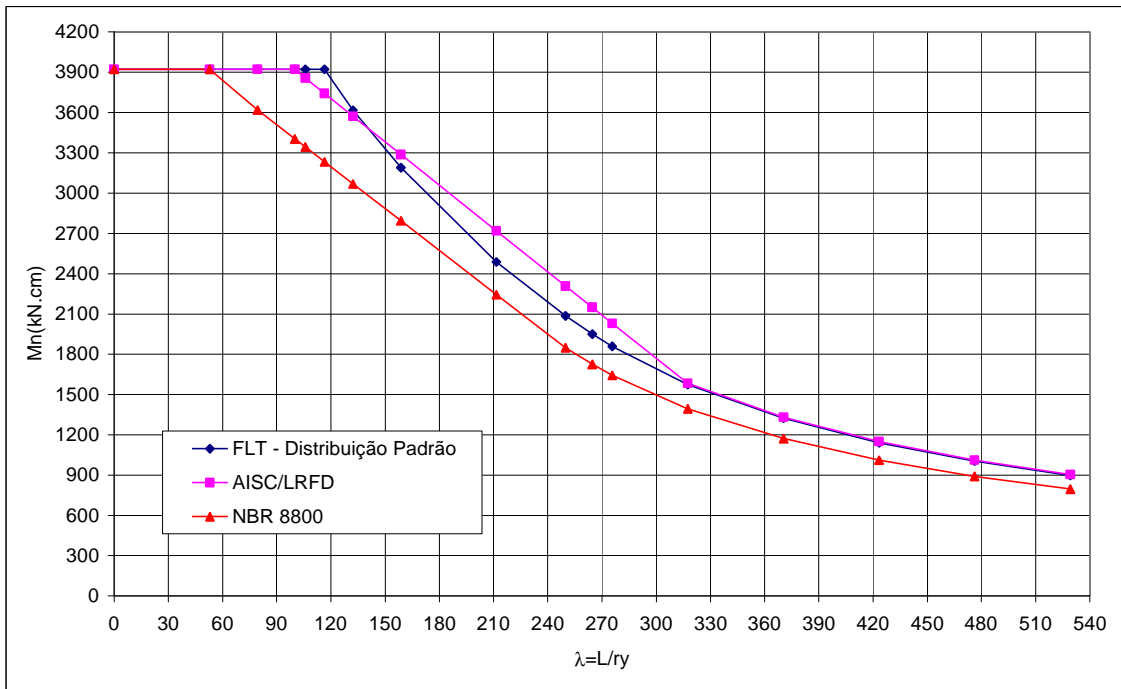


Figura 4.20 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64] e NBR 8800 [65] para o caso de força distribuída e seção U.

4.4.3. Seção retangular cheia

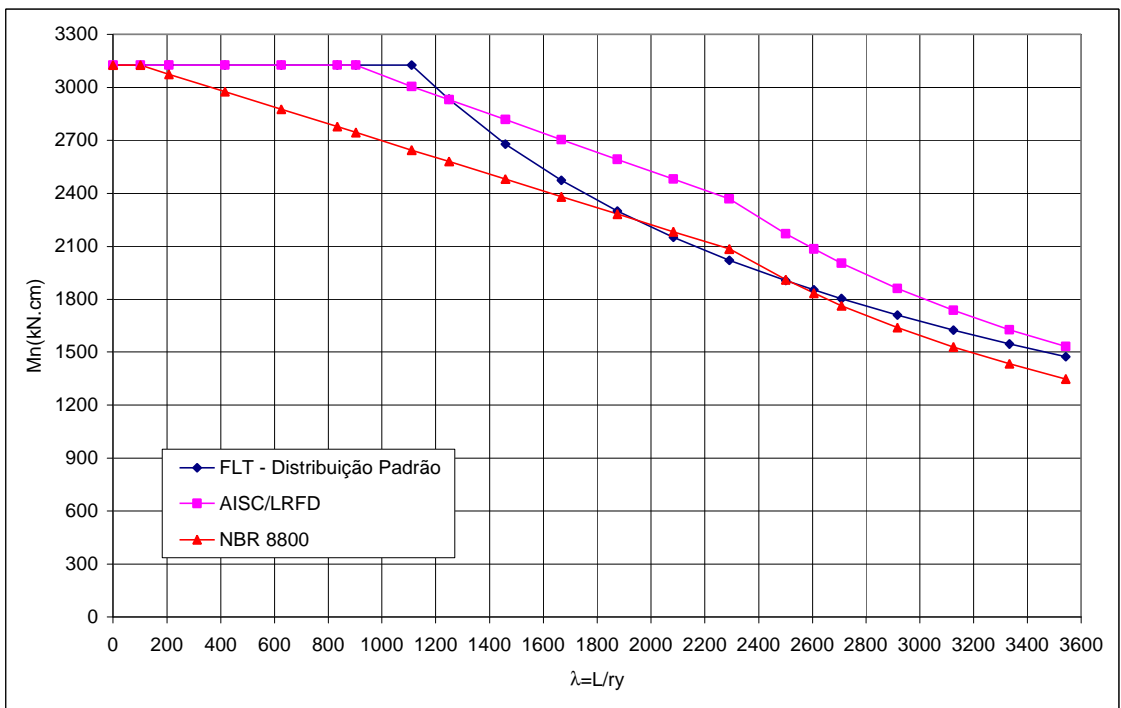


Figura 4.21 - Comparação gráfica dos resultados com os obtidos pelo AISC/LRFD [64] e NBR 8800 [65] para o caso de força distribuída e seção retangular cheia.

5. CONCLUSÕES

5.1. Considerações Gerais

De acordo com o que foi mostrado nos itens 1.3.1, 1.3.2 e 1.3.3, quanto mais preciso for o valor do coeficiente C_b para o AISC/LRFD [64], a NBR 8800 [65] e o CAN/CSA-S.16.1 [66], mais correto será o valor da resistência nominal ao momento fletor para o estado limite último de flambagem lateral com torção obtido ao se fazer uso dos procedimentos destas três especificações de projeto de estruturas de aço, independentemente da instabilidade ocorrer em regime elástico ou inelástico. No entanto, nestes mesmos itens, viu-se que estas especificações, tomadas como referência neste trabalho, apresentam uma série de limitações que tornam, para diversas situações, impossível obter valores precisos da resistência nominal ao momento fletor (M_n) e C_b , e muitas vezes, até obter qualquer valor para estas grandezas.

Ao se usar o Programa FLT, desenvolvido no presente trabalho, todas as limitações quanto à determinação de M_n deixam de existir, uma vez que o mesmo permite:

- qualquer carregamento na viga;
- qualquer condição de contorno no plano de flexão;
- qualquer condição de contorno para flambagem lateral com torção;
- a atuação de forças estabilizantes ou desestabilizantes;
- variação da seção transversal, em função de recortes nas mesas, aberturas na alma ou lamelas;

- a consideração de comportamento de peça contínua no plano de flambagem nas vigas com contenções laterais internas;
- qualquer distribuição de tensões residuais para perfis I duplamente simétricos.

Além disso, os resultados são obtidos com rapidez e objetividade, e mostraram-se confiáveis, com as concordâncias constatadas nas comparações feitas no capítulo precedente. A entrada de dados do programa é simples e interativa, e a saída de resultados de imediata compreensão.

5.2. Vigas com Seção I Duplamente Simétrica

Analisando-se os resultados obtidos para a resistência nominal ao momento fletor, M_n , com o AISC/LRFD [64], a NBR 8800 [65] e o CAN/CSA-S16.1 [66] e comparando-os com os obtidos pelo Programa FLT para os casos 01 a 04, para seção I bissimétrica e forças transversais aplicadas, quando existentes, no nível do centro de torção, os quais são mostrados na Tabela 4.1, pode-se concluir que:

- quando se usa a distribuição padrão de tensões residuais, os resultados obtidos pelo programa FLT ficam muito próximos dos obtidos pelo AISC/LRFD [64] e pelo CAN/CSA-S16.1 [66] que são muito parecidos entre si em todos os quatro casos de carregamento.
 - muito próximos dos obtidos pela NBR 8800 [65] nos casos 01 e 02 da tabela 4.1, e significativamente superior aos desta Norma nos casos 03 e 04. Isto ocorre porque a NBR 8800 adota $C_b = 1,00$ nestes casos, em um procedimento conservador;
- quando se usa a distribuição de tensões residuais hipotética com tração nas bordas das mesas, a resistência nominal aumenta bastante e, ao contrário, quando se usa a distribuição de tensões residuais hipotética com compressão nas bordas, a resistência nominal diminui consideravelmente (esta distribuição é mais desfavorável que a padrão);

Para se verificar o efeito da troca de vínculo de garfo pelo vínculo rígido na determinação da resistência nominal ao momento fletor, usou-se uma viga com seção I bissimétrica, força distribuída ao longo do comprimento da viga e força concentrada na seção central, ambas aplicadas no nível do centro de torção, na mesa superior da viga ou na mesa inferior.

Como esperado, isso contribuiu para um significativo aumento nos valores da resistência nominal ao momento fletor.

5.3. Vigas com Seções Transversais Diferentes do I Duplamente Simétrico

Para as seções caixão e U, os valores obtidos pelo programa FLT foram praticamente os mesmos fornecidos pelo AISC/LRFD [64] e maiores que os fornecidos pela NBR 8800 [65]. Isso ocorreu basicamente pelo fato da NBR 8800 [65] conservativamente tomar $C_b = 1,00$ para o caso de força uniformemente distribuída.

Para a seção retangular cheia, os valores obtidos pelo programa FLT variaram entre os fornecidos pelo AISC/LRFD [64] e pela NBR 8800 [65], ultrapassando os do AISC/LRFD [64] numa pequena faixa do índice de esbeltez, próxima da plastificação da seção transversal.

5.4. Vigas com Contenção Lateral Interna

Para se analisar como a posição de uma contenção lateral interna, em vínculo de garfo, afeta o valor da resistência nominal ao momento fletor, M_n , estudou-se uma viga biapoiada, na qual esta posição variou de $0,1 L$ até $0,5 L$, considerando-se uma força distribuída ao longo de todo o vão, atuando no nível do centro de torção.

Analisando-se os resultados fornecidos pelo Programa FLT, observa-se que, à medida em que a contenção interna desloca-se da extremidade para o centro da viga, há um aumento considerável na resistência ao momento fletor para a flambagem lateral com torção (cerca de 55% para o caso analisado).

5.5. Vigas com Variação de Seção Transversal

5.5.1. Vigas com Lamelas

De modo a se estudar como a utilização de lamelas nas mesas influi na resistência ao momento fletor da viga, colocou-se uma lamela na mesa superior (mesa comprimida) da seção transversal de uma viga com seção I duplamente simétrica. Permitiu-se que esta lamela variasse, simetricamente em relação ao centro do vão, desde a situação de comprimento igual a zero, ou seja, de um I bissimétrico simples, até a situação de comprimento igual ao comprimento da viga, correspondente a uma seção I monossimétrica em que a espessura da mesa superior é igual à soma das espessuras da lamela e da mesa superior.

Considerando-se uma força distribuída ao longo de todo o vão, atuando no nível do centro de torção e vínculo de garfo, obteve-se o gráfico mostrado na figura 4.14. Nota-se que houve um aumento na resistência da peça ao se aumentar o comprimento lamela, de modo que a resistência nominal ao momento fletor variou do valor correspondente à seção I bissimétrica ao correspondente à seção monossimétrica, como se esperava.

5.5.2. Vigas com Recortes nas Mesas

Analisou-se a influência de recortes feitos na mesas, nas extremidades do comprimento destravado, sobre o valor da resistência nominal ao momento fletor.

Para isto, foram comparados os valores obtidos pelo programa FLT no caso de uma viga sem recortes e outra com recorte na mesa superior da viga, em ambas as extremidades, com comprimento igual a 3% do vão e profundidade de 25mm.

Para o caso de momento uniforme, o mais desfavorável, verificou-se uma grande redução da resistência, uma vez que a resistência nominal, como era de se esperar, apresentou como limite superior o momento de plastificação de seção T da região recortada.

Para os casos de força distribuída e força concentrada na seção central, ambas atuando no nível do centro de torção, não se notou uma perda significativa de resistência, devido à forma do diagrama de momento fletor, onde as seções onde estão os recortes são menos solicitadas.

5.5.3. Vigas com Aberturas na Alma

Para se avaliar como as aberturas na alma influem no valor do momento crítico, foi estudada uma viga com aberturas variando ao longo de seu comprimento destravado, e os resultados comparados com aqueles obtidos com a mesma viga sem aberturas.

Observando-se os resultados apresentados na Tabela 4.2, nota-se que a variação na resistência da viga é pouco significativa, comparando-se a situação de viga sem abertura com a situação de viga com aberturas em várias posições.

5.6. Análise Global e Sugestões

Tendo-se em mente os objetivos iniciais do estudo proposto, que foram o desenvolvimento de um método de determinação da resistência nominal ao momento fletor para flambagem lateral com torção de vigas de aço, considerando situações quaisquer de carregamento, geometria e condições de contorno, sua implementação através de um programa computacional, e após a avaliação dos resultados obtidos, torna-se possível agora fazer uma análise global do trabalho realizado.

Considerando-se os processamentos executados com o Programa FLT, descritos no capítulo 4, percebe-se que os mesmos foram bastante ilustrativos, abrangendo situações diversificadas. Além disso, observando-se as análises feitas, nota-se que os resultados foram bastante coerentes. Isto demonstra que o método escolhido, embora simplificado quando a flambagem não ocorre em regime elástico, e a maneira como ele foi desenvolvido e implementado atingiram os resultados esperados.

Contudo, verificou-se que alguns itens merecem um estudo complementar, os quais serão apresentados apenas como sugestão para futuras pesquisas. Além disso, existem

assuntos correlatos para os quais seria interessante um desenvolvimento semelhante ao que foi apresentado aqui. Portanto, sugere-se:

- o tratamento de outras seções transversais além daquelas previstas no programa FLT;
- a possibilidade de consideração de distribuição qualquer de tensões residuais e outros perfis, além do I bissimétrico;
- a possibilidade de consideração das imperfeições descritas no item 1.1.2.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Procter, A.N., *Laterally Unsupported Beams*, Journal of Structural Engineering, Vol. 10, No. 7, July, 1932, p. 274.
- [2] Prandtl, L., *Kipperscheinungen*, Dissertation, Munich, 1899.
- [3] Michell, A.G.M., *Elastic Stability of Long Beams under Transverse Forces*, Phil. Mag., Vol. 48, 1899, p. 298.
- [4] Timoshenko, S.P., *History of the Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [5] Timoshenko, S.P., and Gere, J.M., *Theory of Elastic Stability*, 2nd. Ed., Engineering Societies Monographs, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [6] Bleich, F., *Buckling Strength of Metal Structures*, Engineering Societies Monographs, McGraw-Hill, New York, 1952 (Prepared in cooperation with Column Research Council.)
- [7] Vlasov, V.Z., *Thin-Walled Elastic Beams*, 2nd. Ed., Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, Israel, 1961.
- [8] Winter, G., *Strength of Slender Beams*, Transactions, ASCE, Vol. 109, 1944, pp. 1165-1182.
- [9] Massonnet, C., *Buckling of Thin-Walled Bars with Open Cross Section*, Hommage de la Faculté des Sc. Appl. University of Liège, à l'A.I.Lg. G. Thone, editor (in French), 1947, pp. 135-146.
- [10] Horne, M.R., *The Flexural-Torsional Buckling of Members of Symmetric I-Section under Combined Thrust and Unequal Terminal Moments*, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. Vol. 7, Part 4, 1954, pp. 410-426.
- [11] Salvadori, M.G., *Lateral Buckling of I-Beams*, ASCE Transaction. Vol. 120, 1955, pp. 1165-1177.
- [12] Galambos, T.V., *Structural Members and Frames*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.
- [13] Gellin, S., and Lee, G.C., *Finite Elements Available for the Analysis of Noncurved Thin-Walled Structures*, "Finite Elements Analysis of Thin-Walled Structures", J. W. Bull, Ed., Elsevier Applied Science, London, U.K., 1988, pp. 1-45.

- [14] Pandey, M.D., and Sherbourne, A.N., *Elastic, Lateral-Torsional Stability of Beams: General Considerations*, Journal of Structural Engineering., ASCE, 116 (2), 1990, pp. 317-335.
- [15] De Jong, H., *An Approach to More Complicated Lateral-Buckling Problems*, J. Constr. Steel Res., 16 (3), 1990, pp. 231-246.
- [16] Pi, Y.L., Trahair, N.S., and Rajasekaran, S., *Energy Equation for Beam Lateral Buckling*, Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 6, June, 1992, pp. 1462-1479.
- [17] Rachid, M., *Instabilidade de Barras de Seção Delgada*, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 1976. (Tese de Doutorado)
- [18] Salvadori, M.G., *Lateral Buckling of Beams of Rectangular Cross Section Under Bending and Shear*, Proceedings of the First U.S. Congress of Applied Mechanics, ASME, New York, 1951, p. 403.
- [19] Brown, P.T., and Trahair, N.S., *Finite Integral Solution of Differential Equations*, Civil Engineering Transactions. Institute of Engineers, Australia, CE10, No. 2, October, 1968, pp. 193-196.
- [20] Barsoum, R.S., and Gallagher, R.H., *Finite Element Analysis of Torsional and Torsional-Flexural Stability Problems*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, 1970, pp. 335-352.
- [21] Powell, G., and Klingner, R., *Elastic Lateral Buckling of Steel Beams*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 96, No. ST9, 1970, pp. 1919-1932.
- [22] Nethercot, D.A., and Rockey, K.C., *Finite Element Solutions for the Buckling of Columns and Beams*, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 13, 1971, pp. 945-949.
- [23] Lee, G.C., *A Survey of Literature on the Lateral Instability of Beams*, Welding Research Council Bulletin, No. 60, August, 1960.
- [24] Clark, J.W., and Hill, H.N., *Lateral Buckling of Beams*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 86, No. ST7, July, 1960, pp. 175-196.
- [25] Rockey, K.C., and Nethercot, D.A., *A Unified Approach to the Elastic Lateral Buckling of Beams*, The Structural Engineer. Vol. 49, No. 7, July, 1971, pp. 321-330.
- [26] Nethercot, D.A., *Elastic Lateral Buckling of Beams*, Chapter 1 in the book: "Beams and Beam-Columns - Stability and Strength". R. Narayanan, editor. Elsevier Applied Science Publishers, London and New York, 1983.

- [27] Trahair, N.S., and Anderson, J.M., *Stability of Monosymmetric Beams and Cantilevers*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 98, No. ST1, January, 1972, pp. 269-286.
- [28] Nethercot, D.A., *The Effective Lengths of Cantilevers as Governed by Lateral Buckling*, The Structural Engineer. Vol. 51, No. 5, May, 1973, pp. 161-168.
- [29] Poley, S., *Lateral Buckling of Cantilevered I-Beams Under Uniform Load*, Transactions of the ASCE, Vol. 121, 1956, p. 786.
- [30] Chen, W.F., and Lui, E.M., *Structural Stability-Theory and Implementation*, Elsevier Science Publishing, 1987, Chap. 5.
- [31] Ojalvo, M., and Chambers, R.S., *Effects of Warping Restraints on I-Beam Buckling*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 103, No. ST12, 1977, pp. 2351-2360.
- [32] Vacharajittiphan, P., and Trahair, N.S., *Warping and Distortion of I-Section Joints*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 100, No. ST3, 1974, pp. 547-564.
- [33] Heins, C.P., and Potocko, R.A., *Torsional Stiffening of I-Girder Webs*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 105, No. ST8, 1979, pp. 1689-1700.
- [34] Szewczak, R.M., Smith, E.A., and DeWolf, J.T., *Beams with Torsional Stiffeners*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 109, No. ST7, 1983, pp. 1635-1647.
- [35] Vacharajittiphan, P., and Trahair, N.S., *Analysis of Lateral Buckling in Plane Frames*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 101, No. ST7, 1975, pp. 1497-1516.
- [36] Nethercot, D.A., *Buckling of Laterally and Torsionally Restrained Beams*, Journal of the Engineering Mechanics Division. ASCE, Vol. 99, No. EM4, 1973, pp. 773-792.
- [37] Trahair, N.S., *Elastic Stability of Continuous Beams*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 95, No. ST6, June, 1969, pp. 1295-1312.
- [38] Trahair, N.S., *Lateral Buckling of Beams and Beam-Columns*, in "Theory of Beam-Columns", Vol. 2, W. F. Chen and T. Astuta, McGraw-Hill, New York, 1977, Chap. 3.
- [39] Trahair, N.S., *The Behaviour and Design of Steel Structures*, Chapman & Hall, London, 1977.
- [40] Hartmann, A.J., *Elastic Lateral Buckling of Continuous Beams*, Journal of the Structural Division. ASCE, Vol. 93, No. ST4, 1967, pp. 11-28.

- [41] Fukumoto, Y., and Kubo, M., *Lateral Buckling Strength of Beams with Bracing System*, (in Japanese) Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers, No. 196, December, 1971, pp. 19-28.
- [42] Unger, B., *Elastisches Kippen von beliebig gelagerten und aufgehängten Durchlaufträgern mit einfach-symmetrischem, in Trägerachse veränderlichem Querschnitt unter Verwendung einer Abwandlung des Reduktionsverfahrens als Lösungsmethode*, Der Stahlbau, Heft 5, 1969, pp. 135-142, Heft 6, 1969, pp. 181-184.
- [43] Yoshida, H., and Imoto, Y., *Inelastic Lateral Buckling of Restrained Beams*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, No. EM2, April, 1973, pp. 343-366.
- [44] Fukumoto, Y., and Galambos, T.V., *Inelastic Lateral-Torsional Buckling of Beam-Columns*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 92, No. ST2, April, 1966, pp. 41-61.
- [45] Galambos, T.V., *Inelastic Lateral Buckling of Beams*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 89, No. ST5, October, 1963, pp. 217-242.
- [46] Hartmann, A.J., *Inelastic Flexural-Torsional Buckling*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 97, No. EM4, Proc. Paper 8294, August, 1971, pp. 1103-1119.
- [47] Lay, M.G., and Galambos, T.V., *Bracing Requirements for Inelastic Steel Beams*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 92, No. ST2, April, 1966, pp. 207-228.
- [48] Zuk, W., *Lateral Bracing Forces on Beams and Columns*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 82, No. EM3, July, 1956, pp. 1032-1-16.
- [49] Lee, G.C., and Galambos, T.V., *Post-Buckling Strength of Wide-Flange Beams*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 88, No. EM1, February, 1962, pp. 59-75.
- [50] Lawson, R.M., and Nethercot, D.A., *Lateral Stability of I-Beams Restrained by Profiled Sheeting*, The Structural Engineer, Vol. 63B, No. 1, March, 1985.
- [51] Apparao, T.V.S.R., Errera, S.J., and Fisher, G.P., *Columns Braced by Girts and a Diaphragm*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, No. ST5, May, 1969, pp. 965-990.
- [52] Pincus, G., *The Performance of Columns and Beams Continuously Braced with Diaphragms*, thesis presented to Cornell University, in 1963, in partial fulfillment for the degree of Doctor of Philosophy.

- [53] Errera, S.J., Pincus, G., and Fisher, G.P., *Columns and Beams Braced by Diaphragms*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 93, No. ST1, February, 1967, pp. 295-318.
- [54] Pincus, G., and Fisher, G.P., *Behaviour of Diaphragm-Braced Columns and Beams*, Journal of the Structural Division ASCE, Vol. 92, No. ST2, April, 1966, pp. 323-350.
- [55] Cheng, J.R., Yura, J.A. and Johnson, C.P., *Lateral Buckling of Coped Steel Beams*, Technical papers. Journal of Structural Engineer, Vol. 114, No. 1, January, 1988.
- [56] Darwin, D., *Steel and Composite Beams with Web Openings*, Steel Design Series No. 2, American Institute of Steel Construction, Chicago, 1990.
- [57] Thevendran, V. e Shanmugam, N. E., *Lateral Buckling of Doubly Symmetric Beams Containing Openings*, Journal of Engineering Mechanics. ASCE, Vol. 117, No. 7, July, 1991, 1427-1441.
- [58] Shen, Z., and Zhang, Q., *Nonlinear Stability Analysis of Steel Members by Finite Element Method*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 118, No. 3, March 1992, pp. 445-461.
- [59] Lu, L.-W., Shen, S., Shen,Z., and Hu, X., *Theory of Stability of Steel Structural Members*, Chinese Architectural Industrial Publishing House, Beijing, China (in chinese), 1983.
- [60] Ding, K., and Shen, Z., *Finite Element Solution of the Elastic Plastic Lateral Buckling of Thin-Walled Members*, J. Tongji Univ., 1(14), (in chinese), 1986.
- [61] Guo, Y., and Chen, S., *Elasto-Plastic Post-Buckling Interaction Analysis of Cold-Formed Sections by Finite Strip Method*, Stability of Metal Structures, Proc. Fourth Int. Colloquium on Structural Stability, Asian Section, beijing, China, 1989.
- [62] Reis, A. L. F., *O Método da Energia Aplicado à Flambagem Lateral com Torção de Vigas de Aço*, Escola de Engenharia da UFMG, Belo Horizonte, Agosto 1996. (Dissertação de Mestrado).
- [63] E. H. Gaylord Jr, C. N. Gaylord and J. E. Stallmeyer, *Design of Steel Structures*, McGraw Hill, New York, 3rd. ed., 1992.
- [64] Manual of Steel Construction, *Load and Resistance Factor Design*, 2nd ed., American Institute of Steel
- [65] Associação Brasileira de Normas Técnicas, *Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios – NBR 8800*, Rio de Janeiro, 1986.

- [66] Canadian Institute of Steel Construction, *Limit States Design of Steel Structures*, CAN/CSA-S16.1-94, Ontário, 1994.
- [67] Kirby, P.A. and Nethercot, D.A., *Design for Structural Stability*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1979.
- [68] Pimenta, R. J., *Proposição de uma Curva de Flambagem para Perfis I Soldados Formados por Chapas Cortadas a Maçarico*, Escola de Engenharia da UFMG, Belo Horizonte, Abril 1997. (Dissertação de Mestrado).
- [69] Salmon, C.G., and Johnson, J.E., *Steel Structures, Design and Behaviour*, Ed. Harper & Row, New York, 1990.
- [70] Rachid, M. e Mori, D.D., *Instabilidade: Flambagem de Barras de Seção Delgada por Torção e Flexão*, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 1993.
- [71] Laier, J.E. e Barreiro, J.C., *Complementos de Resistência dos Materiais*, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 1983.
- [72] Palermo Jr., L., *Esforços de Flexão e Flexo-Torção em Teoria de Segunda Ordem*, Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, Julho 1985. (Dissertação de Mestrado)
- [73] Vlasov, V.Z., *Pieces Longues en Voiles Minces*, 10^a ed. Trad. de G. Smirnoff, Paris, Eyrolles, 1962.