

*ANÁLISE DE EDIFÍCIOS DE  
ANDARES MÚLTIPLOS COM  
ESTRUTURA METÁLICA*

Vanderli Magalhães de Assis

*Universidade Federal de Minas Gerais*  
*Escola de Engenharia da UFMG*  
*Departamento de Engenharia de Estruturas*

# *ANÁLISE DE EDIFÍCIOS DE ANDARES MÚLTIPLOS COM ESTRUTURA METÁLICA*

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”

Engenheiro Vanderli Magalhães de Assis

## **Comissão Examinadora**

Prof. Dr. Ricardo Hallal Fakury – orientador (DEES - UFMG)

Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall (DEES - UFMG)

Prof. Dr. Alcebiades de Vasconcellos Filho (DEES - UFMG)

Prof. Dr. Eddie Mancini (EESC - USP)

## *RESUMO*

Neste trabalho é apresentado o desenvolvimento de um programa computacional, em linguagem DELPHI, para análise elástica em teoria de 1ª ordem, considerando os efeitos  $P-\Delta$  e  $M-\theta$ , de estruturas tridimensionais de edifícios de andares múltiplos com estrutura metálica, usando o método dos deslocamentos. O programa permite que sejam adotados diversos arranjos estruturais e possui uma interface com o usuário que torna rápida a entrada de dados e fácil a interpretação dos resultados.

A estabilidade lateral dos edifícios pode ser fornecida por pórticos retangulares, nos quais é possível se considerar a influência da semi-rigidez das ligações e a deformação por força cortante em vigas e pilares, sistemas de contraventamento e paredes de cisalhamento planas ou com seção transversal em forma de C, U, H e duplo T, de concreto armado, tratadas pela teoria da flexo-torção. Pode-se ainda considerar na estabilidade lateral a contribuição de paredes de alvenaria e de painéis de fechamento dos mais diversos materiais. As lajes integram os edifícios como diafragmas rígidos em seu plano, compatibilizando todos os deslocamentos no nível dos andares.

O efeito  $P-\Delta$  é considerado simplificadaamente por meio do método da carga lateral equivalente, e o efeito  $M-\theta$ , causado pelos deslocamentos relativos dos pilares devido à rotação do edifício e as cargas axiais nos mesmos, é considerado da mesma forma.

Ao final, apresentam-se exemplos da análise de edifícios, cujos resultados obtidos com o programa desenvolvido, quando possível, são comparados com os resultados de um outro programa, largamente utilizado. Com base nestes exemplos, também se avalia o comportamento dos edifícios levando-se em conta todas as considerações na análise permitidas pelo programa.

Palavras-chaves: edifícios de andares múltiplos, estruturas de aço, análise estrutural.

## *ABSTRACT*

This work consists on developing a computer application in Delphi programming language for structural analysis of tall buildings in steel structures using the displacement method. The program allows several structural arrangements and has an easy user-interface and fast input data as well as the interpretation of the results. The  $P-\Delta$  and  $M-\theta$  are considered for second order effect in the analysis.

The lateral stability of buildings can be assured by rectangular frames, in which is possible to consider the influence of the semi-rigid connections and the deformation by shear force of beams and columns, bracing systems and shear walls with concrete plane cross section in shape of C, U, H and double T section, treated by the bending and torsion theory. It can be also considered in the lateral stability the contribution of masonry panels of the most several materials. The slabs are considered like rigid diaphragm in their planes and they are responsible for the transmission of lateral force to the stability elements.

At the end, some examples of analysis of buildings, whose results were obtained with the developing program, as possible, are being compared with the results of another program, broadly used. With relation to these examples, the behavior of buildings is evaluated taking into account all the analysis considerations which are allowed by the program.

keywords: multi-storey buildings, steel structures, structural analysis

# ÍNDICE

## **CAPÍTULO I**

1	INTRODUÇÃO.....	1
1.1	Considerações Gerais.....	1
1.2	Proposta de Dissertação.....	2
1.3	Trabalhos Anteriores Relevantes.....	4
1.3.1	Estruturas compostas por núcleos de concreto.....	4
1.3.2	Contribuição dos painéis de alvenaria.....	5
1.3.3	Consideração da semi-rigidez das ligações na estrutura.....	5
1.3.4	Barras diagonais de contraventamento.....	6
1.3.5	Deformação por cisalhamento.....	7
1.3.6	Consideração dos efeitos $P-\Delta$ e $M-\theta$ .....	7

## **CAPÍTULO II**

2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	9
2.1	Numeração dos Nós do Andar.....	9
2.1.1	Sistema global de coordenadas-deslocamento.....	10
2.2	Matriz de Rigidez da Estrutura.....	14
2.2.1	Matriz de rigidez de pilar.....	15
2.2.1.1	Contribuição dos pilares na matriz de rigidez da estrutura.....	17
2.2.2	Matriz de rigidez de vigas.....	20
2.2.2.1	Matriz de rigidez de vigas sem conexões elásticas.....	20
2.2.2.2	Matriz de rigidez de vigas com conexões elásticas.....	21
2.2.2.3	Contribuição das vigas na matriz de rigidez da estrutura.....	23
2.2.3	Rigidez das ligações.....	25
2.2.3.1	Generalidades.....	25
2.2.3.2	Relação momento-rotação das ligações classificadas como flexíveis.....	27
2.2.3.2.1	Ligações com cantoneira simples, cantoneira dupla e chapa de topo.....	27
2.2.3.2.2	Ligação com chapa simples.....	30
2.2.3.3	Relação momento-rotação das ligações classificadas como rígidas.....	31
2.2.3.3.1	Coefficientes de rigidez para as ligações soldadas.....	33
2.2.3.3.2	Coefficientes de rigidez para as ligações parafusadas.....	36
2.2.4	Consideração da rigidez das ligações na análise estrutural.....	38
2.3	Sistemas de Estabilidade da Estrutura.....	40
2.3.1	Sistemas de estabilidade composto por paredes de concreto.....	40

2.3.1.1	Contribuição dos termos de torção.....	41
2.3.1.2	Contribuição dos termos de flexão .....	42
2.3.1.3	Representação da matriz $[R\omega]$ em sub-matrizes $[R\omega_{ij}]$ .....	46
2.3.1.4	Equações de transformação de ações e deslocamentos .....	48
2.3.1.5	Compatibilização de viga-parede .....	50
2.3.1.6	Contribuição das paredes de concreto na matriz de rigidez da estrutura.....	52
2.3.2	Sistema de estabilidade composto por barras diagonais.....	54
2.3.2.1	Contribuição das barras de contraventamento na matriz de rigidez da estrutura .....	57
2.3.3	Sistema de estabilidade composto por painéis de fechamento .....	61
2.3.3.1	Considerações sobre o contraventamento da estrutura .....	62
2.4	Deformação por Cortante.....	65
2.4.1	Considerações gerais .....	65
2.5	Análise Elástica Linear Considerando o Efeito $P-\Delta$ .....	70
2.5.1	Considerações gerais .....	70
2.5.2	Efeito $P-\Delta$ .....	70
2.5.2.1	Processo simplificado.....	70
2.5.3	Efeito $M-\theta$ .....	72

### **CAPÍTULO III**

3	PROGRAMA DE ANÁLISE .....	75
3.1	Considerações Iniciais.....	75
3.2	Numeração dos Nós do Andar.....	76
3.3	Apresentação da Interface do Programa .....	77
3.3.1	Tela inicial.....	77
3.3.2	Tela principal .....	78
3.4	Formulários de Entrada de Dados.....	82
3.4.1	Dados de identificação.....	82
3.4.2	Dados da geometria .....	83
3.4.3	Dados das paredes de concreto .....	84
3.4.4	Dados das vigas.....	86
3.4.5	Tipos de ligações viga-pilar.....	87
3.4.6	Semi-rigidez de ligações flexíveis .....	88
3.4.7	Semi-rigidez de ligações rígidas .....	89
3.4.8	Dados dos pilares.....	91
3.4.9	Dados das barras diagonais .....	91
3.4.10	Dados das alvenarias.....	92

3.4.11	<i>Visualização</i> .....	94
3.4.12	<i>Dados das ações</i> .....	96
3.4.13	<i>Opções de análise</i> .....	97
3.4.14	<i>Relatórios de saída</i> .....	98
3.4.15	<i>Ajuda</i> .....	100

#### ***CAPÍTULO IV***

4	<i>EXEMPLOS COMPARATIVOS</i> .....	102
4.1	<i>Exemplo 1</i> .....	102
4.2	<i>Exemplo 2</i> .....	113
4.3	<i>Exemplo 3</i> .....	115
4.4	<i>Exemplo 4</i> .....	126

#### ***CAPÍTULO V***

5	<i>CONCLUSÕES</i> .....	129
---	-------------------------	-----

# ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1.1: Resistência lateral de edifício típico com estruturas de concreto.....</i>	<i>1</i>
<i>Figura 1.2: Resistência lateral de edifício típico com estruturas metálicas.....</i>	<i>2</i>
<i>Figura 2.1: Numeração de nós de um andar típico.....</i>	<i>10</i>
<i>Figura 2.2: Numeração das coordenadas deslocamentos de um andar típico.....</i>	<i>13</i>
<i>Figura 2.3: Elementos que compõem a estrutura de edifícios.....</i>	<i>14</i>
<i>Figura 2.4: Sistemas de coordenadas para pilares.....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 2.5: Sistemas de coordenadas para VIGA-X e VIGA-Y.....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 2.6: Vigas com conexões elásticas.....</i>	<i>21</i>
<i>Figura 2.7: Deslocamentos unitários nos graus de liberdade da VIGA-X.....</i>	<i>22</i>
<i>Figura 2.8: Classificação das ligações.....</i>	<i>26</i>
<i>Figura 2.9: Curvas momento-rotação das ligações.....</i>	<i>27</i>
<i>Figura 2.10: Parâmetros das ligações de cantoneira simples e dupla e chapa de topo.....</i>	<i>29</i>
<i>Figura 2.11: Parâmetros da ligação de chapa simples.....</i>	<i>30</i>
<i>Figura 2.12: Ligações rígidas e transmissão de esforços.....</i>	<i>32</i>
<i>Figura 2.13: Enrijecedor horizontal nas extremidades dos pilares.....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 2.14: Valores do coeficiente <math>\alpha</math> para ligações parafusadas.....</i>	<i>37</i>
<i>Figura 2.15: Parâmetros da ligação parafusada rígida com chapa de topo.....</i>	<i>38</i>
<i>Figura 2.16: Formas das seções das paredes de concreto.....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 2.17: Sistemas de coordenadas para paredes de concreto.....</i>	<i>41</i>
<i>Figura 2.18: Transformação de eixos do CG para o CC.....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 2.19: Sistemas de coordenadas para paredes de concreto.....</i>	<i>46</i>
<i>Figura 2.20: Transformação do sistema de eixos local para global.....</i>	<i>48</i>
<i>Figura 2.21: Transformação de ações nas extremidades para o CC.....</i>	<i>49</i>
<i>Figura 2.22: Sistema de coordenadas local.....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 2.23: Posições possíveis para barra de contraventamento.....</i>	<i>55</i>
<i>Figura 2.24: Contribuição da barra diagonal na matriz de rigidez global da estrutura.....</i>	<i>58</i>
<i>Figura 2.25: Transformação de painel de alvenaria em barra equivalente.....</i>	<i>62</i>
<i>Figura 2.26: Esquema de iteração entre pórtico e painel.....</i>	<i>63</i>
<i>Figura 2.27: Parâmetros para transformação da alvenaria em barra de aço.....</i>	<i>64</i>
<i>Figura 2.28: Ensaio em pórticos metálicos preenchidos com alvenarias realizados no LAEES.....</i>	<i>65</i>
<i>Figura 2.29: Vigas com numeração dos deslocamentos.....</i>	<i>66</i>
<i>Figura 2.30: Deslocamentos unitários nos graus de liberdade da VIGA-X.....</i>	<i>66</i>
<i>Figura 2.31: Consideração do efeito <math>P-\Delta</math>.....</i>	<i>71</i>

<i>Figura 2.32: Efeito <math>P-\Delta</math> para edifícios</i> .....	72
<i>Figura 2.33: Forças cortantes decorrentes das forças normais nos pilares</i> .....	73
<i>Figura 2.34: Momento de torção adicional na estrutura</i> .....	74
<i>Figura 3.1: Tela inicial do programa</i> .....	77
<i>Figura 3.2: Tela principal do programa</i> .....	78
<i>Figura 3.3: Quadro de diálogo “Salvar como” padrão do Windows</i> .....	79
<i>Figura 3.4: Identificação da estrutura</i> .....	83
<i>Figura 3.5: Dados da geometria da estrutura</i> .....	84
<i>Figura 3.6: Dados das paredes de concreto</i> .....	85
<i>Figura 3.7: Nós de vértices no sentido anti-horário</i> .....	85
<i>Figura 3.8: Dados das paredes de concreto</i> .....	86
<i>Figura 3.9: Dados das vigas da estrutura</i> .....	87
<i>Figura 3.10: Tipos de ligações nas extremidades das vigas</i> .....	88
<i>Figura 3.11: Parâmetros para cálculo da rigidez de ligações flexíveis</i> .....	89
<i>Figura 3.12: Parâmetros para cálculo da rigidez de ligações rígidas</i> .....	90
<i>Figura 3.13: Ábaco com valores do parâmetro ‘<math>\alpha</math>’</i> .....	90
<i>Figura 3.14: Dados dos pilares e dos nós a omitir da estrutura</i> .....	91
<i>Figura 3.15: Dados das diagonais de contraventamento</i> .....	92
<i>Figura 3.16: Dados das alvenarias do edifício</i> .....	93
<i>Figura 3.17: Discretização e análise de alvenarias</i> .....	93
<i>Figura 3.18: Planta do pavimento tipo I do edifício</i> .....	94
<i>Figura 3.19: Elevação de um pórtico na direção Y</i> .....	95
<i>Figura 3.20: Elevação de um pórtico na direção X</i> .....	96
<i>Figura 3.21: Cargas aplicadas no diafragma rígido, nós e vigas</i> .....	97
<i>Figura 3.22: Tipos de análise e considerações</i> .....	98
<i>Figura 3.23: Mostra o progresso da análise</i> .....	98
<i>Figura 3.24: Deslocamentos em um rápido “preview”</i> .....	99
<i>Figura 3.25: Relatório completo em arquivo texto</i> .....	100
<i>Figura 3.26: Arquivo de Ajuda do programa</i> .....	101

# **ÍNDICE DE TABELAS**

<i>Tabela 1: Valores de <math>M_{tab}</math> para parafusos ASTM-A325 e <math>d = 3/4''</math> (19 mm).....</i>	<i>31</i>
<i>Tabela 2: Valores de <math>M_{tab}</math> para parafusos ASTM-A325 e <math>d = 7/8''</math> (22,4 mm) .....</i>	<i>31</i>
<i>Tabela 3: Valores do parâmetro de transformação <math>\beta</math>.....</i>	<i>34</i>

# ***AGRADECIMENTOS***

Acima de tudo e todos, a Deus que me protege e me ilumina em todos os momentos.

Ao meu orientador, Prof. Ricardo Hallal Fakury, que orientou este trabalho com muita experiência e competência, pela confiança e credibilidade a mim depositada. Ao Prof. Gustavo de Souza Veríssimo, que sem o qual não teria esta oportunidade.

A meus pais, que mesmo à distância, sempre deram apoio, incentivo e forças sem deixar que nenhum momento se tornasse difícil.

A Cibele pela compreensão, carinho e ajuda que se fizeram presente mesmo à distância.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG pela amizade, atenção e disponibilidade sempre que foi necessário.

Aos amigos do mestrado, pelo agradável convívio, pelas sugestões e colaborações. E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para este trabalho.

À USIMINAS pela concessão do suporte financeiro sem o qual seria impossível o desenvolvimento deste trabalho.

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Considerações Gerais

Com o avanço das construções de edifícios altos com estrutura metálica no Brasil, tornam-se cada vez mais necessárias ferramentas de análise que propiciem economia e segurança, e que possam considerar a participação de todos os componentes estruturais, com seus comportamentos simulados de maneira mais real possível.

Nos edifícios com estrutura de concreto, as contribuições na estabilidade lateral de componentes como alvenarias, escadas e divisórias internas juntamente com a contribuição do pórtico, são mostradas na figura 1.1, conforme Vasconcellos Filho [1]. Verifica-se então que alvenarias, escadas e divisórias elevam consideravelmente a rigidez lateral do edifício especialmente quando o deslocamento lateral é relativamente pequeno.

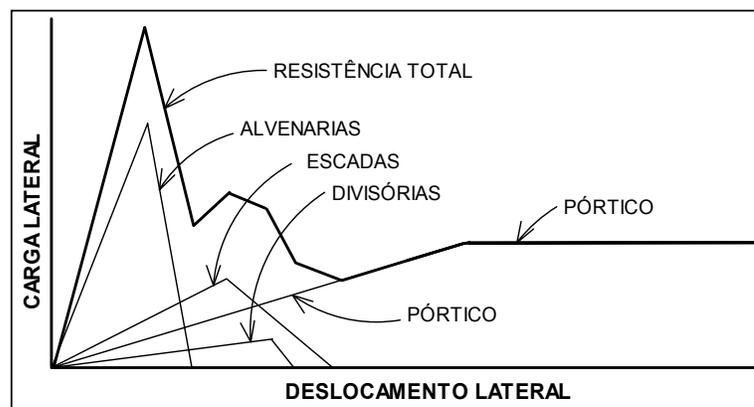
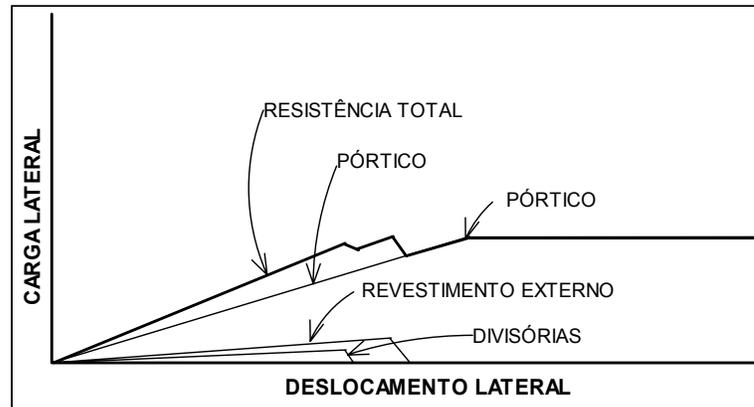


Figura 1.1: Resistência lateral de edifício típico com estruturas de concreto

Nos edifícios com estruturas metálicas, muitas vezes, as alvenarias são substituídas por painéis, as escadas são externas à estrutura e as divisórias são mais leves e menos resistentes. Estes componentes contribuem relativamente pouco para a rigidez lateral da

estrutura, como mostra a figura 1.2, também conforme Vasconcellos Filho [1]. Mas apesar disto, podem ser determinantes para a aceitação de um determinado arranjo estrutural, em certas intensidades de carregamento lateral.



**Figura 1.2: Resistência lateral de edifício típico com estruturas metálicas**

Quando se usam alvenarias tradicionais, que ainda é muito comum no Brasil e mais raro no exterior, estas propiciam um acréscimo significativo de rigidez à estrutura metálica. Constata-se portanto, a importância de sempre se levar em conta as diversas contribuições para obtenção de estruturas que atendam adequadamente aos estados limites últimos e de utilização, e que sejam econômicas e competitivas.

Nos últimos trinta anos foram aprimorados novos sistemas estruturais e novas técnicas para análise estrutural. Entre os novos sistemas destacam-se o painel-parede, o painel-treliçado e o sistema tubular. Mais recentemente, foram desenvolvidas técnicas para se considerar a semi-rigidez das ligações entre viga e pilar e as contribuições das paredes de alvenaria, quando adequadamente projetadas.

## ***1.2 Proposta de Dissertação***

Neste trabalho pretende-se desenvolver um programa computacional para análise elástica de estruturas tridimensionais de edifícios de andares múltiplos com estrutura metálica, usando o método dos deslocamentos. O programa deverá permitir que sejam adotados diversos arranjos estruturais e possuir uma interface com o usuário que torne rápida a entrada de dados e fácil a interpretação dos resultados, e levar em conta:

- ✓ pórticos espaciais formados por vigas, pilares e sistemas de contraventamento formados por barras diagonais, que podem ser tracionadas e comprimidas ou somente tracionadas;
- ✓ o efeito  $P-\Delta$  pelo Método da Carga Lateral Equivalente, previsto na NBR8800 [2] e o efeito  $M-\theta$  conforme Fakury [3];
- ✓ o comportamento da laje como diafragma rígido em seu plano, compatibilizando todos os deslocamentos ao nível dos andares, e completamente flexível na direção perpendicular ao seu plano;
- ✓ o comportamento das paredes de concreto de seção aberta, utilizando a teoria da flexo-torção para barras de paredes delgadas, o que significa que serão tratadas como membros lineares, tomando o empenamento como um grau de liberdade adicional ao elemento de pórtico espacial, para montagem de sua matriz de rigidez;
- ✓ a contribuição da semi-rigidez das ligações;
- ✓ a contribuição das paredes de alvenaria na estabilidade lateral do edifício, através de sua análise e transformação em uma barra de aço de rigidez equivalente, biarticulada com resistência apenas à compressão;
- ✓ a deformação por cisalhamento nas vigas e pilares.

As ações atuantes na estrutura poderão ser forças horizontais aplicadas nas lajes, cargas verticais aplicadas nos nós ou distribuídas nas vigas de pórtico.

O armazenamento da matriz de rigidez será feito utilizando uma técnica que consiste em subdividir a estrutura tridimensional em subestruturas também tridimensionais que possam ser analisadas uma de cada vez.

A entrada de dados deverá ser simples, gerando automaticamente os andares-tipo e a saída dos resultados deverá permitir fácil interpretação.

Para aferição dos resultados do programa, será feita uma análise comparativa dos resultados obtidos com os fornecidos pelo programa SAP2000 [4].

## ***1.3 Trabalhos Anteriores Relevantes***

### ***1.3.1 Estruturas compostas por núcleos de concreto***

Manning Jr [5] desenvolveu fluxogramas para implementar análise de edifícios com núcleos de concreto. Em seus estudos, o modelo analítico é baseado na teoria da flexo-torção para elementos de paredes finas. Na montagem da matriz de rigidez deste elemento inclui-se o empenamento como um grau de liberdade adicional ao elemento de pórtico espacial.

Equações de transformação adequadas asseguram a compatibilidade entre as barras da estrutura e o núcleo de concreto nos pontos de ligação. Estas equações transformam os esforços e deslocamentos aplicados no contorno dos núcleos para seus centros de cisalhamento e os mesmos de seus centros de cisalhamento para as suas extremidades.

O método dos deslocamentos foi utilizado para desenvolvimento do estudo. A estrutura foi considerada como pórtico tridimensional composto por pilares e vigas. O armazenamento da matriz de rigidez foi feito utilizando uma técnica que consiste em subdividir a estrutura tridimensional em subestruturas também tridimensionais que possam ser analisadas uma de cada vez.

Manning Jr. apresentou também um modelo hipotético de vinte andares com núcleo de concreto, verificando sua contribuição sobre toda a estrutura substituindo o núcleo por pórticos rígidos.

Ribeiro [6] apresentou a listagem de um programa desenvolvido em linguagem Fortran para análise de estruturas com associação tridimensional de pórticos com paredes de seção aberta em edifícios. O método utilizado para armazenamento das matrizes de rigidez e os fundamentos teóricos para consideração dos núcleos de concreto foram os mesmos de Manning Jr. As paredes de seção aberta foram tratadas segundo a teoria da flexo-torção e estrutura foi tratada como uma associação de pórticos tridimensionais.

### ***1.3.2 Contribuição dos painéis de alvenaria***

Polyakov [7] observou três estágios no comportamento de pórticos preenchidos com alvenarias e submetidos a carregamento horizontal. O primeiro estágio ocorre em níveis de cargas relativamente baixos onde as interfaces pórtico-vedação estão em pleno contato e, portanto, a contribuição da vedação à rigidez total do sistema é máxima. Esse estágio termina com o aumento da carga e o aparecimento de fissuras na interface pórtico-vedação, exceto nas regiões onde as tensões de compressão são transmitidas do pórtico para a vedação. No segundo estágio, a distribuição de tensões configura-se de forma a identificar uma diagonal comprimida, “diagonal equivalente”, e o conjunto se comporta como um sistema estrutural de pórtico com barras de travamento biarticuladas. O terceiro estágio se caracteriza em níveis de carga elevados onde a alvenaria atinge seus estados limites de tração e compressão ocorrendo plastificação em regiões localizadas, caracterizando assim um dos modos de ruptura. Com base neste comportamento Polyakov sugeriu o conceito da barra diagonal equivalente que significa simular a presença de uma barra diagonal fictícia contraventando o pórtico, fornecendo a rigidez equivalente que a vedação daria à estrutura.

Com base em estudos teóricos e experimentais, Smith [8] desenvolveu um método, denominado “Método da Diagonal Equivalente”, para a avaliação da resistência e da rigidez de painéis utilizando o conceito da barra equivalente proposto por Polyakov.

Posteriormente, Smith e Riddington [9] apresentaram resultados teóricos usando o método dos elementos finitos através de um processo iterativo em três diferentes tipos de estruturas: pórticos quadrados e retangulares de um pavimento, pórticos quadrados de três pavimentos de um só vão e pórticos quadrados de um pavimento com um só vão.

### ***1.3.3 Consideração da semi-rigidez das ligações na estrutura***

Souza [11] apresentou o comportamento das ligações entre viga e pilar que se enquadram entre as mais utilizadas atualmente no Brasil e entre aquelas que apresentam grande potencial para emprego futuro, tendo em vista aspectos como economia, facilidade de montagem e comportamento bem definido.

Dentre as ligações classificadas como flexíveis, foram estudadas as ligações com cantoneira simples, cantoneira dupla, chapa de topo e chapa simples. Dentre as ligações classificadas como rígidas foram estudadas as ligações em que a viga é totalmente soldada à mesa do pilar e a ligação em que a viga é totalmente soldada a uma chapa de extremidade parafusada à mesa do pilar.

De acordo com Tschmmernegg e Humer [12], as ligações podem ser classificadas em três grupos distintos. Se a rotação relativa varia muito pouco, mesmo quando o momento fletor na viga atinge 80% de seu momento de plastificação, a ligação é classificada como rígida. Se a rotação relativa varia consideravelmente para um momento atuante na viga de apenas 20% do momento de plastificação, a ligação é classificada como flexível. As demais ligações com comportamento intermediário são classificadas como semi-rígidas.

Em seu trabalho, Souza apresenta também a formulação necessária para calcular a rigidez das diversas ligações a partir de seus parâmetros. Com a formulação foi desenvolvido um programa de análise de pórticos planos considerando a semi-rigidez das ligações.

Para consideração da semi-rigidez das ligações na análise da estrutura, Weaver & Gere [13] apresentam a matriz de rigidez de barra com conexões elásticas em função da rigidez das ligações nas extremidades. Vasconcellos Filho [14] apresenta os coeficientes de rigidez para vigas com conexões elásticas, quando se aplicam deslocamentos unitários em suas extremidades.

#### ***1.3.4 Barras diagonais de contraventamento***

As barras diagonais de contraventamento são tratadas como barra de treliça espacial que possuem três deslocamentos por nó, que são as translações nas direções  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .

Weaver & Gere [13] apresentam a matriz de rigidez, no sistema local, de barras diagonais entre dois níveis de andares. Apresentam também as matrizes de rotação para transformação das matrizes de rigidez do sistema local para o sistema global da estrutura, já que as barras podem-se encontrar em qualquer direção.

### ***1.3.5 Deformação por cisalhamento***

Para edifícios elevados, a consideração da deformação por cisalhamento é importante para obtenção de resultados mais precisos, principalmente aqueles relacionados ao deslocamento lateral e à rotação do edifício. Segundo Fakury [3], a influência desta deformação é mais pronunciada nos edifícios com estrutura metálica, pelo fato de que os perfis metálicos usuais possuem elevados fatores de forma, enquanto nos edifícios em concreto usam-se seções retangulares, para as quais o fator de forma é 1,2.

Para montagem da matriz de rigidez da estrutura considerando as deformações por cisalhamento, Vasconcellos Filho [14], apresenta tabelas com os coeficientes de rigidez para barras considerando deformação por flexão e por cisalhamento.

### ***1.3.6 Consideração dos efeitos $P-\Delta$ e $M-\theta$***

O efeito  $P-\Delta$  foi considerado por meio do método da carga lateral equivalente, que é um método simplificado recomendado pela NBR8800 [2]. Neste método é assumido um comportamento sempre elástico linear para o material estrutural e as equações de equilíbrio são formuladas considerando a posição deformada da estrutura. O método é iterativo. Após uma análise em teoria de 1ª ordem, obtém-se para o andar  $i$  do edifício, uma força cortante fictícia usando o seu deslocamento relativo e a somatória das forças normais  $P$  no andar, obtidos da análise anterior. A força obtida é adicionada às outras forças laterais presentes no andar  $i$  e a estrutura submetida novamente a uma análise em 1ª ordem. Este procedimento deve ser repetido até a convergência dos resultados com a tolerância desejada.

A rotação no edifício resulta em deslocamentos relativos nos pilares que dependem do ângulo de rotação  $\theta$  do diafragma e da posição do pilar em relação ao centro de rotação do edifício. Este efeito é denominado  $M-\theta$  e foi tratado conforme Fakury [3] de forma análoga ao efeito  $P-\Delta$  para cada pilar individualmente, resultando em forças horizontais em cada pilar, cujas direções são dadas pelas normais ao segmento que liga o centro de rotação do edifício ao pilar. Estas forças adicionais multiplicadas pelos seus braços de alavanca resultam em um momento adicional que é somado ao momento aplicado na estrutura.

Em uma análise em teoria de 2ª ordem mais rigorosa, além dos efeitos  $P-\Delta$  e  $M-\theta$ , deve-se também incluir o efeito da força normal na rigidez transversal das barras. Assim, se a força normal é de compressão, ocorre uma degenerescência da rigidez à flexão e se for de tração, ocorre uma majoração desta rigidez. Segundo Fakury [3], este efeito tem pequena importância na maioria das situações práticas e sua desconsideração raramente ocasiona erro considerável nos resultados da análise estrutural dos edifícios mais altos.

# *CAPÍTULO II*

---

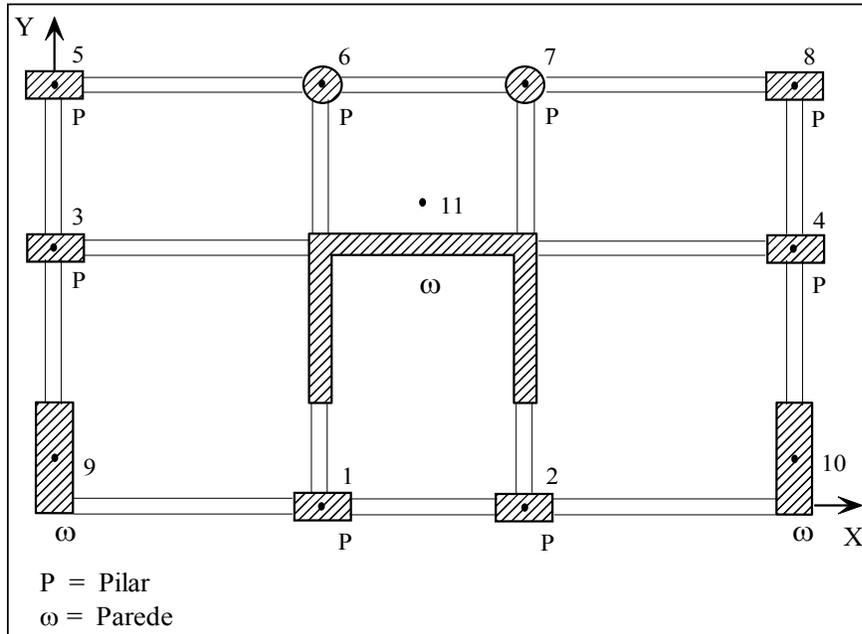
## ***2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS***

Os arranjos estruturais estudados neste trabalho são constituídos de paredes estruturais, pórticos espaciais retangulares e dos demais sistemas de estabilidade lateral do edifício. Na leitura dos dados do andar da estrutura caracterizam-se os nós, que são definidos como os pontos de interseção entre vigas, pilares, diagonal ou um centro de cisalhamento de uma parede estrutural. Todas as coordenadas da estrutura serão definidas pelos nós da mesma.

### ***2.1 Numeração dos Nós do Andar***

O sistema global de coordenadas será caracterizado por um sistema cartesiano de eixos globais  $XYZ$ , perpendiculares entre si, sendo tomados de forma que o plano definido pelos eixos  $XY$  contenha o andar do edifício, em planta, em seu primeiro quadrante ou quadrante definido pelos valores positivos de  $X$  e  $Y$ . O eixo  $Z$  é o eixo normal ao plano definido pelos eixos  $XY$  e definido a partir da base e ao longo da altura do edifício.

A partir do sistema de eixos globais  $XYZ$  definem-se os nós do andar numerados, seqüencialmente, a partir da primeira prumada de pilares e segundo o semi-eixo  $X$ . Em seguida numeram-se os nós referentes à segunda prumada de pilares paralela ao semi-eixo  $X$  e, por fim, após terem-se numerados os nós de todas as prumadas de pilares, numeram-se os nós relativos às paredes estruturais como mostra a figura 2.1.



**Figura 2.1: Numeração de nós de um andar típico**

### 2.1.1 Sistema global de coordenadas-deslocamento

No sistema global de coordenadas-deslocamento são diferenciados os dois tipos de nós do andar pelo número de coordenadas definidas para os mesmos. Os nós característicos dos pilares e paredes estruturais planas têm três coordenadas definidas no sistema global, que são as coordenadas relativas ao giro segundo os eixos globais  $X$  e  $Y$  e a coordenada relativa ao deslocamento axial segundo o eixo  $Z$ . Os nós característicos das paredes estruturais de seção aberta têm quatro coordenadas definidas no sistema global, que são as coordenadas relativas ao giro segundo eixos globais  $X$  e  $Y$ , a coordenada relativa ao deslocamento axial em  $Z$  e a coordenada relativa à derivada do ângulo de rotação em  $Z$ .

Para cada nível de andar são fixadas na origem do sistema global de eixos  $XYZ$  as três coordenadas que definem o movimento de corpo rígido dos diafragmas dos andares, que são as coordenadas relativas aos deslocamentos que definem as translações segundo os eixos globais  $X$  e  $Y$  e a coordenada que define a rotação em torno do eixo  $Z$ .

Na figura 2.2, vê-se que para os nós característicos dos pilares e para as paredes estruturais planas têm-se três coordenadas relacionadas, respectivamente, com a rotação segundo os eixos  $X$  e  $Y$  e a coordenada relativa ao deslocamento axial segundo o eixo  $Z$ . Observando-se ainda a figura 2.2 vê-se que os nós característicos das paredes estruturais de seção aberta, localizados nos seus respectivos centros de cisalhamento, são dotados de quatro coordenadas relacionadas, respectivamente, com o giro segundo os eixos  $X$  e  $Y$ , a coordenada relativa ao deslocamento axial segundo o eixo  $Z$  e a coordenada relativa à derivada do giro em torno do eixo  $Z$ . Tem-se ainda as três coordenadas  $L1$ ,  $L2$  e  $L3$ , fixadas na origem do sistema de eixos, que correspondem aos deslocamentos livres ou de corpo rígido dos diafragmas ao nível dos andares. As coordenadas  $L1$ ,  $L2$  e  $L3$  são numeradas independentemente das outras coordenadas que compõem o sistema de coordenadas globais do andar e recebem a numeração relativa, respectivamente, às coordenadas relacionadas com o deslocamento linear segundo os eixos  $X$  e  $Y$  e o giro que define a rotação em torno do eixo  $Z$ .

Na numeração do sistema global de coordenadas para o andar da figura 2.2, vê-se que para o nó 1 têm-se as coordenadas 1, 2 e 3, para o nó 2 as coordenadas 4, 5 e 6 e assim, seqüencialmente, para todos os nós característicos de pilares e paredes estruturais planas. Assim, para um nó genérico  $j$  característico de pilares ou paredes estruturais planas relativo a um andar, as coordenadas correspondentes são, respectivamente, expressas por  $3j-2$ ,  $3j-1$  e  $3j$ . O número total de coordenadas globais relativas aos nós característicos de pilares será dado por  $3 \times NCNO$ , onde  $NCNO$  é número total de nós relativos aos pilares e paredes estruturais planas.

Para a numeração das coordenadas globais relativas às paredes estruturais de seção aberta, tem-se que a primeira parede, na convenção de leitura do andar, terá quatro coordenadas com numeração posterior às dos nós característicos de pilares e paredes estruturais planas, cujo número de coordenadas é dado por  $3 \times NCNO$ . No andar típico representado na figura 2.2 vê-se que a primeira parede de seção aberta na leitura do andar é lida com o nó de número onze e com coordenadas 31, 32, 33 e 34, assim tem-se que essas coordenadas podem ser escritas na forma  $3 \times 10+1$ ,  $3 \times 10+2$ ,  $3 \times 10+3$  e  $3 \times 10+4$  ou, de forma genérica, sob a forma  $3 \times NCNO+1$ ,  $3 \times NCNO+2$ ,  $3 \times NCNO+3$  e  $3 \times NCNO+4$ . Para uma parede genérica lida com número  $N\omega$ , número de parede, tem-

se que as coordenadas correspondentes são dadas, respectivamente, pelas expressões  $3 \times NCNO + 4 \times N\omega - 3$ ,  $3 \times NCNO + 4 \times N\omega - 2$ ,  $3 \times NCNO + 4 \times N\omega - 1$  e  $3 \times NCNO + 4 \times N\omega$ .

Em resumo pode-se escrever:

Nó  $j$  relativo a pilares ou paredes planas

NÓ  $j$  RELATIVO A PILARES E PAREDES PLANAS

COORDENADA	EXPRESSÃO
giro segundo eixo X	$3 \times j - 2$
giro segundo eixo Y	$3 \times j - 1$
deslocamento axial Z	$3 \times j$

NÓ  $j$  RELATIVO À PAREDE  $N\omega$  DE SEÇÃO ABERTA

COORDENADA	EXPRESSÃO
giro segundo eixo X	$3 \times NCNO + 4 \times N\omega - 3$
giro segundo eixo Y	$3 \times NCNO + 4 \times N\omega - 2$
deslocamento axial Z	$3 \times NCNO + 4 \times N\omega - 1$
empenamento segundo eixo Z	$3 \times NCNO + 4 \times N\omega$

Para as três coordenadas que definem o movimento de corpo rígido dos diafragmas ao nível dos andares  $L1$ ,  $L2$  e  $L3$ , o sistema de numeração é independente do sistema de coordenadas do andar e são definidas sequencialmente para cada andar. A partir do andar do topo tem-se  $L1$ ,  $L2$  e  $L3$  iguais, respectivamente a 1, 2 e 3, para o andar imediatamente inferior tem-se  $L1$ ,  $L2$  e  $L3$  iguais respectivamente a 4, 5 e 6 e assim sucessivamente até o último andar dessa seqüência ou o andar que define o primeiro diafragma acima da base da estrutura do edifício. Para um andar genérico  $K$ , numerado a partir do andar do topo, tem-se as coordenadas  $L1$ ,  $L2$  e  $L3$  definidas, respectivamente, pelas expressões  $3 \times K - 2$ ,  $3 \times K - 1$  e  $3 \times K$ .

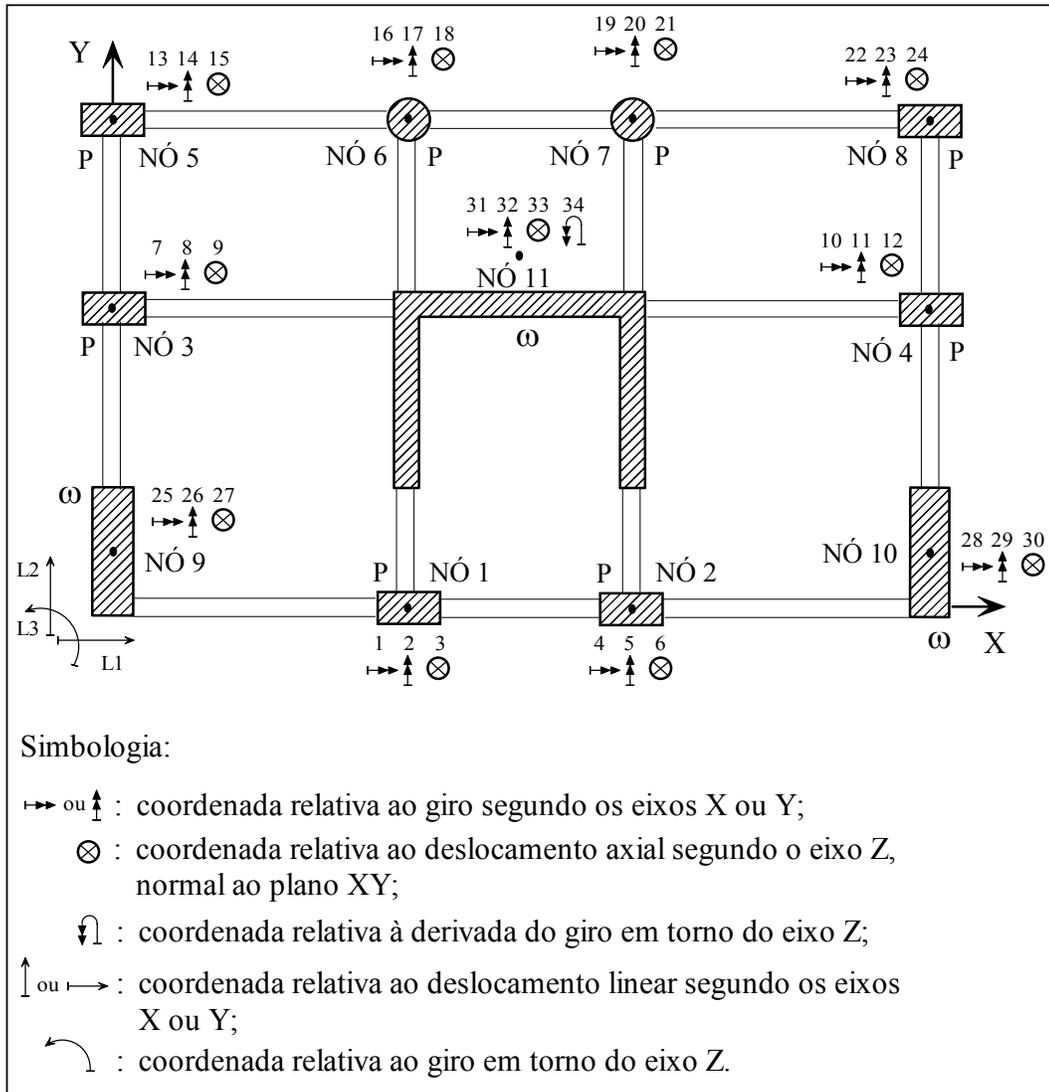


Figura 2.2: Numeração das coordenadas deslocamentos de um andar típico

## 2.2 Matriz de Rigidez da Estrutura

A figura 2.3 mostra os diversos componentes que serão considerados que podem compor uma estrutura de edifício. A contribuição destes componentes na estrutura é feita por meio de suas matrizes de rigidez na matriz de rigidez da estrutura.

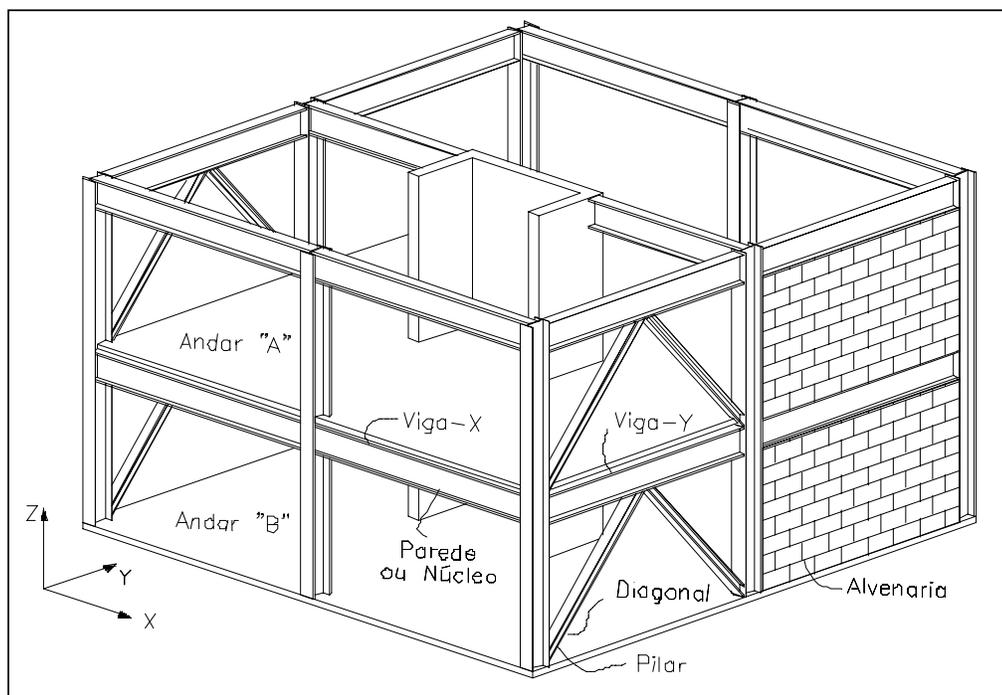


Figura 2.3: Elementos que compõem a estrutura de edifícios

Entre dois níveis *A* e *B* a contribuição para a matriz de rigidez da estrutura será dividida em nove sub-matrizes que são definidas como segue:

$$[R] = \begin{bmatrix} [RAA] & [RAB] & [RAL] \\ [RBA] & [RBB] & [RBL] \\ [RLA] & [RLB] & [RLL] \end{bmatrix}$$

onde:

*A* = subscrito relativo ao nível de andar *A* que corresponde às coordenadas não diretamente associadas com o movimento de corpo rígido dos andares ( $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\delta_z$  e  $\phi_z$ ), tendo-se três coordenadas para pilares e paredes estruturais planas e quatro para paredes estruturais de seção aberta, onde:

$\theta_x$  = rotação em torno do eixo global X;

$\theta_y$  = rotação em torno do eixo global Y;

$\delta_z$  = deslocamento de corpo rígido na direção do eixo global Z;

$\phi_z$  = derivada do ângulo de rotação em torno do eixo global Z.

$B$  = subscrito relativo ao nível de andar  $B$  e que corresponde às coordenadas não diretamente associadas com o movimento de corpo rígido dos andares ( $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\delta_z$  e  $\phi_z$ ), tendo-se três coordenadas para pilares e paredes estruturais planas e quatro para paredes estruturais de seção aberta;

$L$  = subscrito relativo às coordenadas que definem o movimento de corpo rígido dos andares ( $\delta_x$ ,  $\delta_y$  e  $\phi_z$ ), tendo-se três coordenadas por andar, onde:

$\delta_x$  = deslocamento de corpo rígido na direção do eixo global X;

$\delta_y$  = deslocamento de corpo rígido na direção do eixo global Y;

$\phi_z$  = rotação de corpo rígido do diafragmas em torno do eixo global Z.

A contribuição dos componentes para matriz de rigidez da estrutura se faz conforme sua posição e sua rotação na estrutura a partir de transformações adequadas aplicadas nas matrizes de rigidez no sistema de coordenadas local. A seguir são definidas as matrizes e as transformações aplicadas nos elementos.

### ***2.2.1 Matriz de rigidez de pilar***

Considere-se um elemento de pilar seccionado por dois planos, paralelos entre si, que correspondem a dois diafragmas consecutivos ou dois níveis consecutivos de andares, conforme figura 2.4. Para o sistema de coordenadas locais representado na figura, obtém-se, por Weaver & Gere [13], a matriz de rigidez a seguir:



Não é necessário efetuar a rotação da matriz de rigidez do sistema local para o sistema global, pois se considera que os eixos principais dos elementos de pilares coincidem com as direções dos pórticos. No entanto é necessário efetuar a translação do sistema de eixos, pois as posições dos nós  $i$  e  $j$  em relação ao sistema global do andar é definida pelos valores de  $XNO$  e  $YNO$ , respectivamente, em relação aos eixos  $X$  e  $Y$ :

$$[\overline{TCV}_{ii}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -YNO_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & XNO_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e$$

$$[TCV_{ii}] = \begin{bmatrix} [\overline{TCV}_{ii}] & 0 \\ 0 & [\overline{TCV}_{ii}]_j \end{bmatrix}$$

$$[RP_{ii}] = [TCV_{ii}]^t [RP_i] [TCV_{ii}] \quad (2.1)$$

onde  $RP_i$  é a matriz de rigidez dos pilares em um sistema de eixos paralelos aos eixos do sistema global e  $RP_{ii}$  é a matriz de rigidez de pilar no sistema global.

### 2.2.1.1 Contribuição dos pilares na matriz de rigidez da estrutura

A contribuição da matriz de rigidez do elemento de pilar será representada por seus elementos  $RP(i,j)$ , onde  $i=1,12$  e  $j=1,12$ . O elemento de pilar contribui para os dois níveis de andares  $A$  e  $B$  e seus dois extremos são definidos pelo mesmo nó  $i$ . Assim sendo, a contribuição dos pilares na matriz de rigidez da estrutura tem as seguintes simplificações imediatas:

$$[RAA] = [RBB]$$

$$[RAB] = [RBA]$$

$$[RAL] = [RLA]^t$$

$$[RBL] = [RLB]^t$$



		DIAFRAGMA K (ANDAR A)		DIAFRAGMA K+1 (ANDAR B)				
	...	$3K-2$	$3K-1$	$3K$	$3(K+1)-2$	$3(K+1)-1$	$3(K+1)$	...

$[RAL] =$	COORD. NO ANDAR A	1												
		2												
		⋮												
		$3i-2$							$RP_{ii}(1,4)$	$RP_{ii}(1,5)$	$RP_{ii}(1,6)$	$RP_{ii}(1,10)$	$RP_{ii}(1,11)$	$RP_{ii}(1,12)$
		$3i-1$							$RP_{ii}(2,4)$	$RP_{ii}(2,5)$	$RP_{ii}(2,6)$	$RP_{ii}(2,10)$	$RP_{ii}(2,11)$	$RP_{ii}(2,12)$
		$3i$							$RP_{ii}(3,4)$	$RP_{ii}(3,5)$	$RP_{ii}(3,6)$	$RP_{ii}(3,10)$	$RP_{ii}(3,11)$	$RP_{ii}(3,12)$
⋮														
	NCE													

		DIAFRAGMA K (ANDAR A)		DIAFRAGMA K+1 (ANDAR B)				
	...	$3K-2$	$3K-1$	$3K$	$3(K+1)-2$	$3(K+1)-1$	$3(K+1)$	...

$[RBL] =$	COORD. NO ANDAR B	1												
		2												
		⋮												
		$3j-2$							$RP_{ii}(7,4)$	$RP_{ii}(7,5)$	$RP_{ii}(7,6)$	$RP_{ii}(7,10)$	$RP_{ii}(7,11)$	$RP_{ii}(7,12)$
		$3j-1$							$RP_{ii}(8,4)$	$RP_{ii}(8,5)$	$RP_{ii}(8,6)$	$RP_{ii}(8,10)$	$RP_{ii}(8,11)$	$RP_{ii}(8,12)$
		$3j$							$RP_{ii}(9,4)$	$RP_{ii}(9,5)$	$RP_{ii}(9,6)$	$RP_{ii}(9,10)$	$RP_{ii}(9,11)$	$RP_{ii}(9,12)$
⋮														
	NCE													

		DIAFRAGMA K (ANDAR A)		DIAFRAGMA K+1 (ANDAR B)				
	...	$3K-2$	$3K-1$	$3K$	$3(K+1)-2$	$3(K+1)-1$	$3(K+1)$	...

$[RLL] =$	DIAFRAGMA K ANDAR A	⋮												
		$3K-2$							$RP_{ii}(4,4)$	$RP_{ii}(4,5)$	$RP_{ii}(4,6)$	$RP_{ii}(4,10)$	$RP_{ii}(4,11)$	$RP_{ii}(4,12)$
		$3K-1$							$RP_{ii}(5,4)$	$RP_{ii}(5,5)$	$RP_{ii}(5,6)$	$RP_{ii}(5,10)$	$RP_{ii}(5,11)$	$RP_{ii}(5,12)$
		$3K$							$RP_{ii}(6,4)$	$RP_{ii}(6,5)$	$RP_{ii}(6,6)$	$RP_{ii}(6,10)$	$RP_{ii}(6,11)$	$RP_{ii}(6,12)$
		$3(K+1)-2$							$RP_{ii}(10,4)$	$RP_{ii}(10,5)$	$RP_{ii}(10,6)$	$RP_{ii}(10,10)$	$RP_{ii}(10,11)$	$RP_{ii}(10,12)$
		$3(K+1)-1$							$RP_{ii}(11,4)$	$RP_{ii}(11,5)$	$RP_{ii}(11,6)$	$RP_{ii}(11,10)$	$RP_{ii}(11,11)$	$RP_{ii}(11,12)$
		$3(K+1)$							$RP_{ii}(12,4)$	$RP_{ii}(12,5)$	$RP_{ii}(12,6)$	$RP_{ii}(12,10)$	$RP_{ii}(12,11)$	$RP_{ii}(12,12)$
⋮														

## 2.2.2 Matriz de rigidez de vigas

### 2.2.2.1 Matriz de rigidez de vigas sem conexões elásticas

As vigas são definidas na concepção de um andar da estrutura pelas duas direções principais do sistema de eixos ortogonais, sendo designadas por *VIGAS-X* e *VIGAS-Y*, vigas na direção do eixo *X* e na direção do eixo *Y*, respectivamente, como mostra a figura 2.5. Assim tem-se um sistema de coordenadas locais definido de acordo com a ordem de numeração do sistema global de coordenadas do andar da estrutura. As matrizes de rigidez das vigas são dadas por:

$$[RV_x] = \begin{bmatrix} \frac{GI_t}{L_x} & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_x}{L_x} & -\frac{6EI_x}{L_x^2} & 0 & \frac{2EI_x}{L_x} & \frac{6EI_x}{L_x^2} \\ 0 & -\frac{6EI_x}{L_x^2} & \frac{12EI_x}{L_x^3} & 0 & -\frac{6EI_x}{L_x^2} & -\frac{12EI_x}{L_x^3} \\ -\frac{GI_t}{L_x} & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_x}{L_x} & -\frac{6EI_x}{L_x^2} & 0 & \frac{4EI_x}{L_x} & \frac{6EI_x}{L_x^2} \\ 0 & \frac{6EI_x}{L_x^2} & -\frac{12EI_x}{L_x^3} & 0 & \frac{6EI_x}{L_x^2} & \frac{12EI_x}{L_x^3} \end{bmatrix}$$

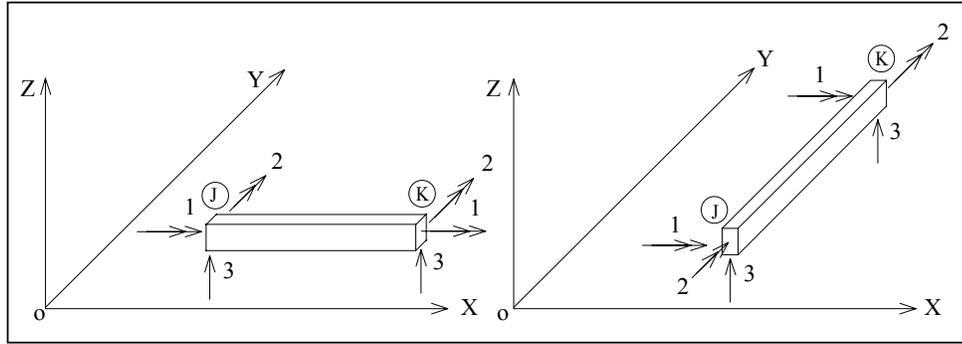
$$[RV_y] = \begin{bmatrix} \frac{4EI_y}{L_y} & 0 & \frac{6EI_y}{L_y^2} & \frac{2EI_y}{L_y} & 0 & -\frac{6EI_y}{L_y^2} \\ 0 & \frac{GI_t}{L_y} & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L_y} & 0 \\ \frac{6EI_y}{L_y^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L_y^3} & \frac{6EI_y}{L_y^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L_y^3} \\ \frac{2EI_y}{L_y} & 0 & \frac{6EI_y}{L_y^2} & \frac{4EI_y}{L_y} & 0 & -\frac{6EI_y}{L_y^2} \\ 0 & -\frac{GI_t}{L_y} & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L_y} & 0 \\ -\frac{6EI_y}{L_y^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L_y^3} & -\frac{6EI_y}{L_y^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L_y^3} \end{bmatrix}$$

onde:  $E, G$  = módulo de elasticidade longitudinal e transversal do material;

$L_x, L_y$  = comprimento do tramo da viga em *X* e *Y*, respectivamente;

$I_x$  e  $I_y$  = momento de inércia à flexão das vigas em *X* e *Y*;

$I_{tx}$  e  $I_{ty}$  = constante de torção das vigas em *X* e *Y*.

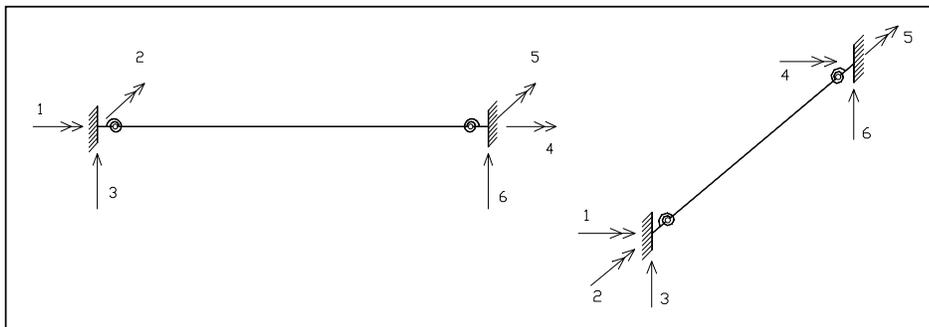


**Figura 2.5: Sistemas de coordenadas para VIGA-X e VIGA-Y**

A análise da compatibilização de forças, deslocamentos e também das matrizes de rigidez das vigas que tem interface com paredes estruturais é feita através de produtos matriciais de acordo com Manning Jr. [5].

#### 2.2.2.2 *Matriz de rigidez de vigas com conexões elásticas*

Sejam as vigas com as direções indicadas na figura 2.6. A consideração na análise estrutural da semi-rigidez das ligações se faz através de modificação das matrizes de rigidez das vigas.



**Figura 2.6: Vigas com conexões elásticas**

Impondo-se deslocamentos unitários para cada grau de liberdade da viga, como indica a figura 2.7, monta-se a matriz de rigidez para *VIGA-X*:

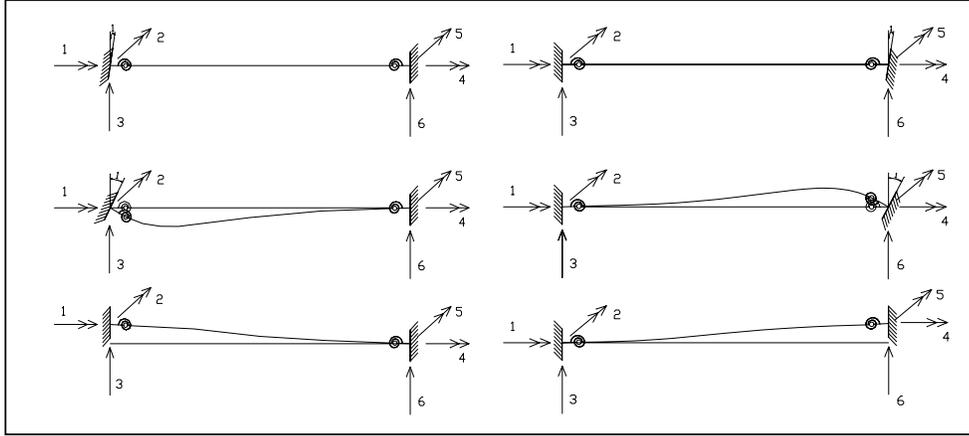


Figura 2.7: Deslocamentos unitários nos graus de liberdade da VIGA-X

$$RVS_x = \begin{bmatrix} \frac{GI_t}{L_x} & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_x}{L_x} \frac{1+3j}{(1+2j)(1+6j)} & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} & 0 & \frac{2EI_x}{L_x} \frac{1}{(1+2j)(1+6j)} & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} \\ 0 & -\frac{6EI_x}{L^2} \frac{1}{(1+6j)} & \frac{12EI_x}{L_x^3} \frac{1}{(1+6j)} & 0 & -\frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} & -\frac{12EI_x}{L_x^3} \frac{1}{(1+6j)} \\ -\frac{GI_t}{L_x} & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_x}{L_x} \frac{1}{(1+2j)(1+6j)} & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} & 0 & \frac{4EI_x}{L_x} \frac{(1+3j)}{(1+2j)(1+6j)} & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} \\ 0 & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{(1+2j)}{(1+6j)} & \frac{12EI_x}{L_x^3} \frac{1}{(1+6j)} & 0 & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} & \frac{12EI_x}{L_x^3} \frac{1}{(1+6j)} \end{bmatrix}$$

Da mesma forma, obtém-se a matriz de rigidez da VIGA-Y:

$$RVS_y = \begin{bmatrix} \frac{4EI_y}{L_y} \frac{1+3j}{(1+2j)(1+6j)} & 0 & -\frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} & \frac{2EI_y}{L_y} \frac{(1+3j)}{(1+2j)(1+6j)} & 0 & \frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} \\ 0 & \frac{GI_t}{L_y} & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L_y} & 0 \\ -\frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} & 0 & \frac{12EI_y}{L_y^3} \frac{1}{(1+6j)} & -\frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} & 0 & -\frac{12EI_y}{L_y^3} \frac{1}{(1+6j)} \\ \frac{2EI_y}{L_y} \frac{1}{(1+2j)(1+6j)} & 0 & \frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} & \frac{4EI_y}{L_y} \frac{(1+3j)}{(1+2j)(1+6j)} & 0 & \frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} \\ 0 & -\frac{GI_t}{L_y} & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L_y} & 0 \\ \frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{(1+2j)}{(1+6j)} & 0 & -\frac{12EI_y}{L_y^3} \frac{1}{(1+6j)} & \frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} & 0 & \frac{12EI_y}{L_y^3} \frac{1}{(1+6j)} \end{bmatrix}$$

onde:  $j = \frac{EI}{LR}$

$R$  = constante de rigidez da conexão elástica;

$L$  = comprimento da viga.

### 2.2.2.3 Contribuição das vigas na matriz de rigidez da estrutura

As vigas com conexões elásticas do nível A só contribuem para a rigidez no nível A e, portanto, só contribuem para sub-matriz  $[RAA]$  da matriz de rigidez da estrutura. A contribuição é feita tendo como referência os nós inicial e final da viga em análise. Sendo  $J$  o nó inicial e  $K$  o nó final da viga e sendo  $NCE$  o número de coordenadas de nós do andar da estrutura, tem-se:

$$[\beta V] = \begin{matrix} & 1 & 2 & \dots & 3J-2 & 3J-1 & 3J & \dots & 3k-2 & 3k-1 & 3k & \dots & NCE \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \left[ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0 & 1 & 0 & \dots 0 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \dots & 1 & 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \dots & 0 & 0 & 1 & \dots 0 \dots & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

onde  $[\beta V]$  é denominada matriz de incidência cinemática relacionada com vigas não vinculadas às paredes de concreto.

Assim tem-se que a contribuição de uma viga  $i$  na matriz de rigidez da estrutura é dada por:

$$[RAA]_v = [\beta V]_i^t [RV]_i [\beta V]_i \tag{2.19}$$

Sendo  $[\beta V]_i^t$  a transposta da matriz  $[\beta V]$ . Para obter as contribuições de todas as vigas do andar A na sub-matriz  $[RAA]$ , aplica-se a somatória do número de vigas  $NV$ , do andar, assim:

$$[RAA]_v = \sum_{i=1}^{NV} [\beta V]_i^t [RV]_i [\beta V]_i$$



## 2.2.3 Rigidez das ligações

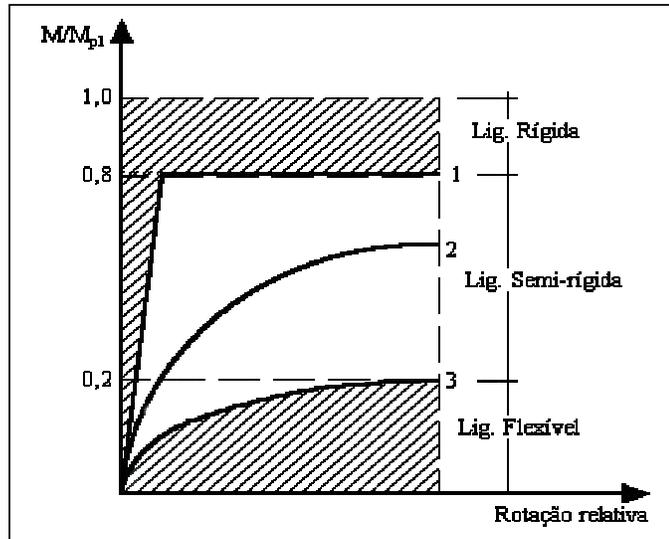
### 2.2.3.1 Generalidades

Qualquer ligação entre viga e pilar pode ser considerada neste trabalho, desde que se entre com o valor de sua constante de rigidez conforme se viu no item 2.2.2.2. Algumas ligações usuais que se enquadram entre as mais utilizadas, tendo em vista aspectos como economia, facilidade de montagem e comportamento bem definido, serão estudadas de maneira especial.

Dentre as ligações classificadas como flexíveis, serão estudadas as ligações com cantoneira simples, cantoneira dupla, chapa de topo e chapa simples indicadas nas figuras 2.10 a, b, c e 2.11. Dentre as ligações classificadas como rígidas serão estudadas as ligações em que a viga é totalmente soldada à mesa do pilar e a ligação em que a viga é totalmente soldada a uma chapa de extremidade parafusada à mesa do pilar indicadas na figura 2.12 a e b. As vigas e pilares devem possuir perfil em forma de I.

De acordo com o conceito clássico de Tschimmernegg e Humer [12], as ligações podem ser classificadas em três grupos distintos como mostra a figura 2.8:

- ↳ Ligação rígida - se a rotação relativa entre viga e pilar varia muito pouco, mesmo quando o momento fletor na viga ( $M$ ) atinge 80% do seu momento de plastificação ( $M_{pl}$ );
- ↳ Ligação flexível - se a rotação relativa varia consideravelmente para um momento atuante na viga de apenas 20% do seu momento de plastificação;
- ↳ Semi-rígidas - são as demais ligações, que apresentam comportamento intermediário.



**Figura 2.8: Classificação das ligações**

Na prática, são quase sempre utilizadas ligações classificadas como rígidas ou flexíveis. No primeiro caso considera-se simplificada, na análise estrutural, que o ângulo original entre viga e pilar mantém-se inalterado para qualquer intensidade de carregamento. No segundo caso, considera-se que a rotação relativa entre os componentes estruturais não possui nenhuma restrição.

No entanto, tem sido crescente a tendência de se tratar todas as ligações como semi-rígidas, ou seja, de levar-se em conta a rigidez real das ligações. A figura 2.9 mostra as curvas momento-rotação das ligações estudadas, segundo Souza [11]. Desta forma a análise pode exprimir com maior fidelidade o comportamento da estrutura, especialmente no que se refere aos valores dos esforços solicitantes, deslocamentos e comprimento de flambagem dos pilares.

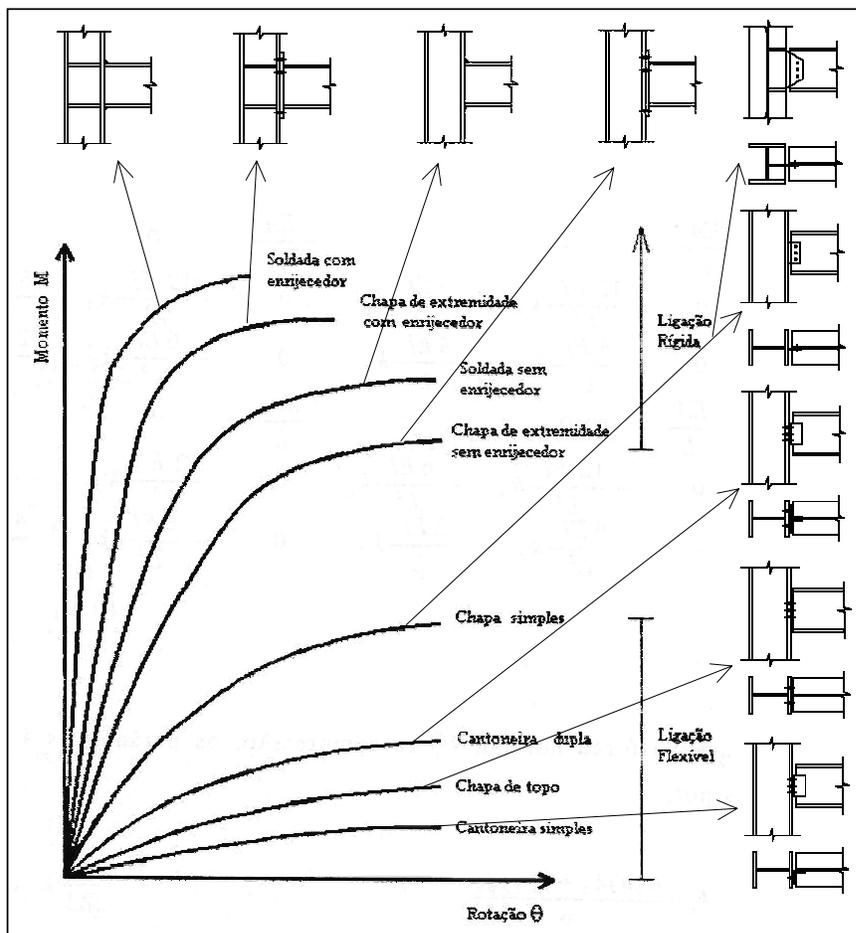


Figura 2.9: Curvas momento-rotação das ligações

### 2.2.3.2 Relação momento-rotação das ligações classificadas como flexíveis

#### 2.2.3.2.1 Ligações com cantoneira simples, cantoneira dupla e chapa de topo

Para as ligações com cantoneira simples, cantoneira dupla e chapa de topo, usualmente classificadas como flexíveis, tem-se de Souza que se baseou em diversos outros autores, um modelo em que as curvas momento rotação são representadas por:

↳ Para ligações com cantoneira simples:

$$\theta = 1,321 \times 10^{-4} KM \left[ 1 + (1,283 \times 10^{-2} KM)^{2,93} \right] \quad (2.2)$$

↳ Para ligações com cantoneira dupla:

$$\theta = 5,241 \times 10^{-3} KM \left[ 1 + (1,317 KM)^{3,94} \right] \quad (2.3)$$

↳ Para ligações com chapa de topo:

$$\theta = 2,796 \times 10^{-5} KM \left[ 1 + (3,972 \times 10^{-3} KM)^{3,32} \right] \quad (2.4)$$

onde:  $K$  é um parâmetro de padronização que depende da geometria dos elementos constituintes da ligação e é dado por:

- Cantoneira simples:

$$K = d_a^{-2,09} t_a^{-1,64} g^{2,06}$$

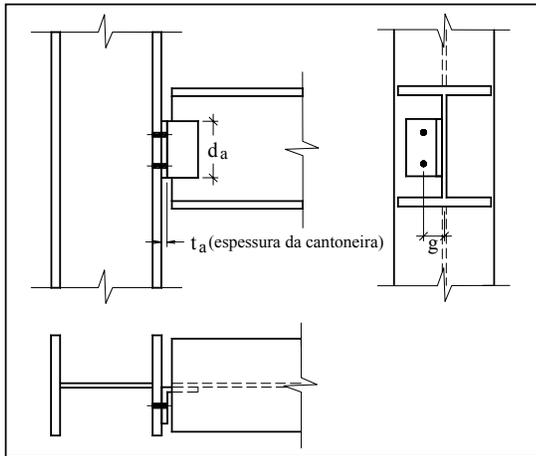
- Cantoneira dupla:

$$K = d_a^{-2,2} t_a^{0,08} g^{-0,28}$$

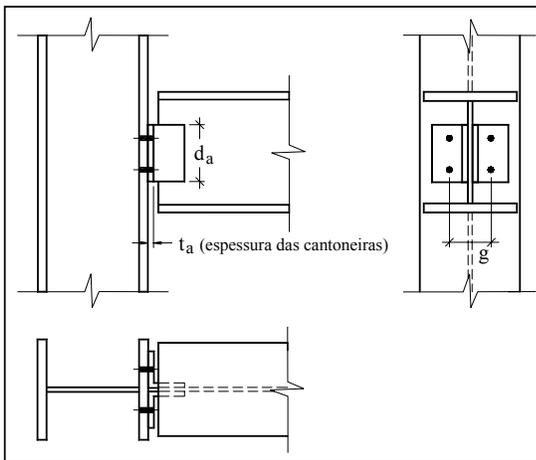
- Chapa de topo:

$$K = d_e^{-2,41} t_e^{-1,54} g^{2,12} t_{wv}^{-0,45}$$

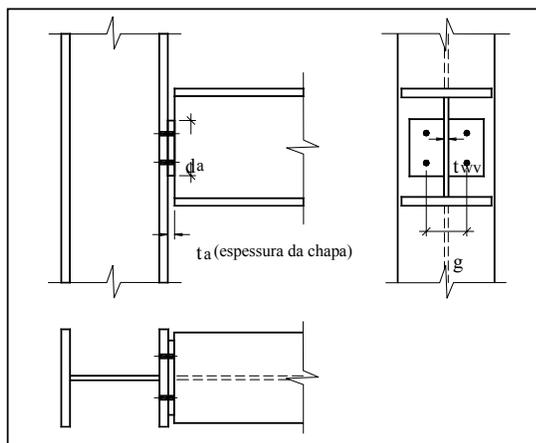
As grandezas geométricas  $d_a$ ,  $t_a$ ,  $t_{wv}$ ,  $d_e$  e  $t_e$  são mostradas nas ligações (a), (b) e (c) da figura 2.10 e devem estar em cm quando utilizadas para determinação do parâmetro de padronização:



**(a) Cantoneira simples**



**(b) Cantoneira dupla**

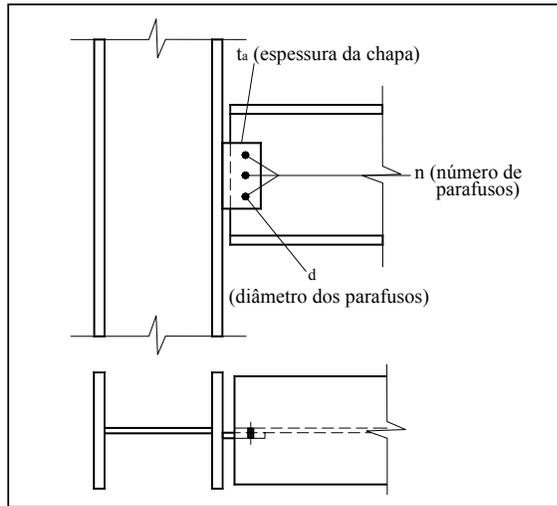


**(c) Chapa de topo**

**Figura 2.10: Parâmetros das ligações de cantoneira simples e dupla e chapa de topo**

### 2.2.3.2.2 Ligação com chapa simples

Para ligação com chapa simples, usualmente classificada como flexível, será adotada a curva momento-rotação proposta por Richard et al. [15] e adaptada por Queiroz et al. [16], dada como segue:



**Figura 2.11: Parâmetros da ligação de chapa simples**

$$M = \frac{285(n-1)\theta}{\left\{ 1 + \left[ \frac{300(n-1)}{1,1} \theta \right]^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}}} M_{ref} \quad (2.5)$$

onde:  $n$  = é o número de parafusos da linha de furos;

$M_{ref}$  = é um momento fletor de referência (grandeza baseada na hipótese de atuar na ligação um momento fletor que isoladamente, na ausência de força cortante, leve todos os parafusos à máxima capacidade de carga), dado por:

$$M_{ref} = M_{tab} \left( \frac{n}{n_{tab}} \right)^{2,1} \left( \frac{d}{d_{tab}} \right) \quad (2.6)$$

onde:

$d$  = diâmetro dos parafusos empregados na ligação;

$M_{tab}$  = momento correspondente a  $M_{ref}$  obtido a partir de ensaios, tendo como parâmetros a espessura da chapa simples, número e diâmetros dos parafusos (respectivamente  $n_{tab}$  e  $d_{tab}$ ).

Alguns valores de  $M_{tab}$  são apresentados nas tabelas a seguir em função de valores específicos de  $n_{tab}$  e  $d_{tab}$ . Retira-se desta tabela o valores de  $M_{tab}$  correspondente a  $n_{tab}$  e  $d_{tab}$  mais próximos dos respectivos valores reais da ligação,  $n$  e  $d$ .

**Tabela 1: Valores de  $M_{tab}$  para parafusos ASTM-A325 e  $d = 3/4''$  (19 mm)**

Parafusos ASTM – A325 $d_{tab} = 3/4''$ (19 mm)				
Espessura da chapa $t_e$ (mm)	Número de parafusos ( $n_{tab}$ )			
	3	5	7	9
6,3	1355	4042	8084	13481
8,0	1648	4934	9879	16462
9,5	2258	6774	13539	22559
12,5	2258	6707	13413	22356

**Tabela 2: Valores de  $M_{tab}$  para parafusos ASTM-A325 e  $d = 7/8''$  (22,4 mm)**

Parafusos ASTM – A325 $d_{tab} = 7/8''$ (22,4 mm)				
Espessura da chapa $t_e$ (mm)	Número de parafusos ( $n_{tab}$ )			
	3	5	7	9
6,3	1558	4742	9439	15728
8,0	1908	5713	11426	19036
9,5	2642	7926	15852	26420
12,5	2631	7881	15773	26285

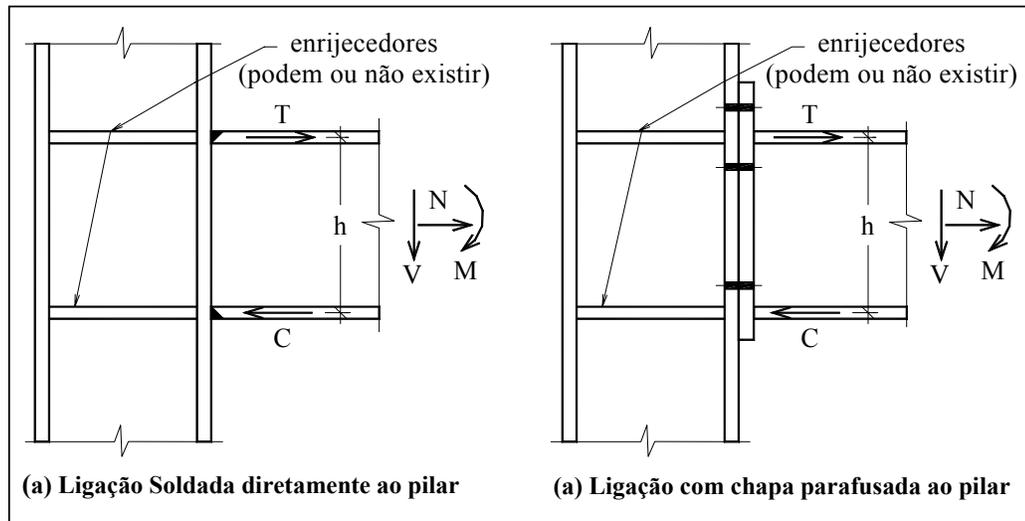
Para que os resultados fornecidos pela equação (2.5) possuam boa precisão, é necessário que a distância entre os centros dos furos esteja entre 70-80 mm.

### 2.2.3.3 Relação momento-rotação das ligações classificadas como rígidas

Como já foi exposto, as ligações rígidas tratadas, são as ligações com viga soldada diretamente à mesa do pilar e com a viga soldada a uma chapa de extremidade, a qual é parafusada à mesa do pilar, como mostra a figura 2.12. Nessas ligações, supõe-se que o momento fletor da extremidade da viga ( $M$ ) e a força normal ( $N$ ) sejam resistidos através de esforços concentrados de tração ( $T$ ) e compressão ( $C$ ) nas linhas de centro das mesas superior e inferior da viga, enquanto a força cortante ( $V$ ) é resistida pela alma da viga. Tem-se então:

$$T = \frac{M}{h} + \frac{N}{2} \text{ e } C = \frac{M}{h} - \frac{N}{2}$$

Nas ligações parafusadas serão sempre usados quatro parafusos simetricamente dispostos em volta da mesa tracionada da viga. Junto a mesa comprimida podem ser usados apenas dois parafusos, conforme a figura, caso não haja inversão de esforços.



**Figura 2.12: Ligações rígidas e transmissão de esforços**

A curva momento-rotação destas ligações em regime elástico, segundo o ENV 1993-1-1 [17], tem a seguinte forma:

$$\frac{M}{\theta} = \frac{Eh^2}{\mu \sum_i \frac{1}{k_i}} \quad (2.7)$$

onde:  $E$  = módulo de elasticidade do aço;

$h$  = braço de alavanca do binário formado pelos esforços concentrados de tração e compressão ( $h$  pode ser considerado como a distância entre as linhas de centro das mesas da viga);

$\mu$  = taxa de rigidez da ligação, determinada de acordo com o momento fletor de cálculo atuante  $M_d$  (na fase elástica, tem-se  $M_d$  menor que o momento fletor correspondente ao início do escoamento e pode-se fazer  $\mu = 1$ );

$k_i$  = coeficientes de rigidez referentes aos seguintes esforços e respectivas deformações:

- $k_1$  referente à força cortante na alma do pilar;
- $k_2$  referente à compressão na alma do pilar;
- $k_3$  referente à tração na mesa do pilar;
- $k_4$  referente à tração na alma do pilar;
- $k_5$  referente à tração na chapa de extremidade;
- $k_6$  referente à tração nos parafusos.

Nos sub-itens a seguir são apresentados os valores dos coeficientes de rigidez para as ligações soldadas e parafusadas, respectivamente. Estes valores são válidos para os perfis laminados europeus I e H e para outros perfis com dimensões similares.

#### 2.2.3.3.1 Coeficientes de rigidez para as ligações soldadas

Os coeficientes de rigidez relacionados às ligações soldadas são os coeficientes  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_4$ , respectivamente referentes à distorção por cisalhamento, deformação por compressão e deformação por tração da alma do pilar.

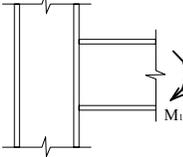
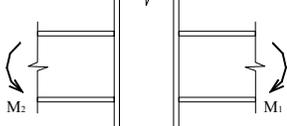
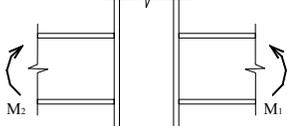
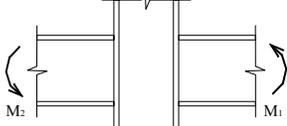
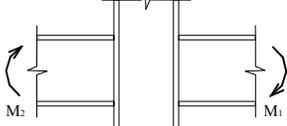
$$k_1 = \frac{0,38A_{wp}}{\beta h} \quad (2.8)$$

onde  $A_{wp}$  é a área efetiva do pilar ao cisalhamento, ou seja, a área da alma do pilar, dada por:

$$A_{wp} = (d_p - 2t_{fp})t_{wp}$$

e  $\beta$  é um parâmetro de transformação, cujos valores aproximados são fornecidos pela tabela 3:

**Tabela 3: Valores do parâmetro de transformação  $\beta$**

Tipo de configuração do nó	Solicitações	$\beta$
	$M_1$	1
	$M_1 = M_2$	0
	$M_1 \neq M_2$	1
	$M_1 = M_2$	2
	$M_1 \neq M_2$	2

Os coeficientes de rigidez  $k_2$  e  $k_4$  têm o mesmo valor e são iguais a:

$$k_2 = k_4 = \frac{0,7b_{efl}t_{wp}}{h_p} + \frac{A_1}{l_1} \quad (2.9)$$

onde  $b_{efl}$  é dado por:

$$b_{efl} = t_{fv} + 2s_v + 5t_{fp} + 5s_p \quad (2.10)$$

Os elementos envolvidos nas equações acima são:

$t_{fv}$  = espessura da mesa da viga;

$s_v$  = cateto do filete da solda entre a mesa da viga e a mesa do pilar (caso a solda seja de penetração, deve-se fazer  $s_v = 0$ );

$t_{fp}$  = espessura da mesa do pilar;

$s_p$  = raio interno de concordância entre a alma e a mesa do pilar, no caso de perfil laminado, ou cateto do filete de solda de composição, no caso de perfil soldado;

$t_{wp}$  = espessura da alma do pilar;

$h_p$  = altura da alma do pilar;

$d_p$  = altura da seção transversal do pilar;

$b_l$  = largura do possível enrijecedor horizontal;

$t_l$  = espessura do possível enrijecedor horizontal;

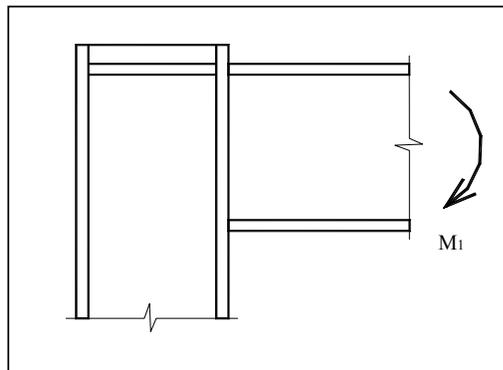
Os termos  $A_l$  e  $l_l$  na equação (2.9) indicam a área e o semi-comprimento dos possíveis enrijecedores horizontais. Quando existirem tais enrijecedores, estes termos podem ser dados por:

$$A_l = 2b_l t_l$$

$$l_l = \frac{(d_p - 2t_{fp})}{2}$$

Esta equação somente tem validade para os casos em que o prolongamento do pilar permite o desenvolvimento do comprimento  $b_{eff}$ . Nas extremidades de pilar, como na figura 2.13, é obrigatória a utilização de enrijecedores horizontais. Neste caso, na equação (2.9), somente a parcela relativa aos enrijecedores deve ser considerada, logo:

$$k_2 = k_4 = \frac{A_l}{l_l}$$



**Figura 2.13: Enrijecedor horizontal nas extremidades dos pilares**

### 2.2.3.3.2 Coeficientes de rigidez para as ligações parafusadas

O coeficiente de rigidez  $k_1$ , referente à distorção por cisalhamento da alma do pilar, apresenta o mesmo valor para ligações soldadas, dado pela equação (2.8). Os coeficientes  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $k_5$  e  $k_6$ , relacionados às deformações por tração da mesa do pilar, da chapa de extremidade e dos parafusos, respectivamente, segundo ENV 1993-1-1 [17], têm os seguintes valores:

$$k_3 = \frac{1,70l_{ef1} t_{fp}^3}{m^3} \quad (2.11)$$

$$k_4 = \frac{1,40l_{ef1} t_{wp}}{h_p} \quad (2.12)$$

$$k_5 = \frac{1,70l_{ef2} t_e^3}{m^3} \quad (2.13)$$

$$k_6 = \frac{3,20A_s}{l_b} \quad (2.14)$$

onde:

$l_{ef1}$  representa o comprimento efetivo que cada uma das duas filas horizontais de parafusos utiliza para reagir ao esforço de tração, e é igual ao menor entre os seguintes valores:

Ligação não enrijecida	Ligação enrijecida
$2\pi m$	$2\pi m$
$\pi m + 2a$	$\alpha m$
$4m + 1,25e$	
$2m + 0,62e + a$	
$\pi m + c$	
$c + 2a$	
$2m + 0,625e + 0,5c$	
$E + 0,5c$	

onde  $\alpha$  é um coeficiente que deve ser obtido por meio do ábaco apresentado na figura 2.14.

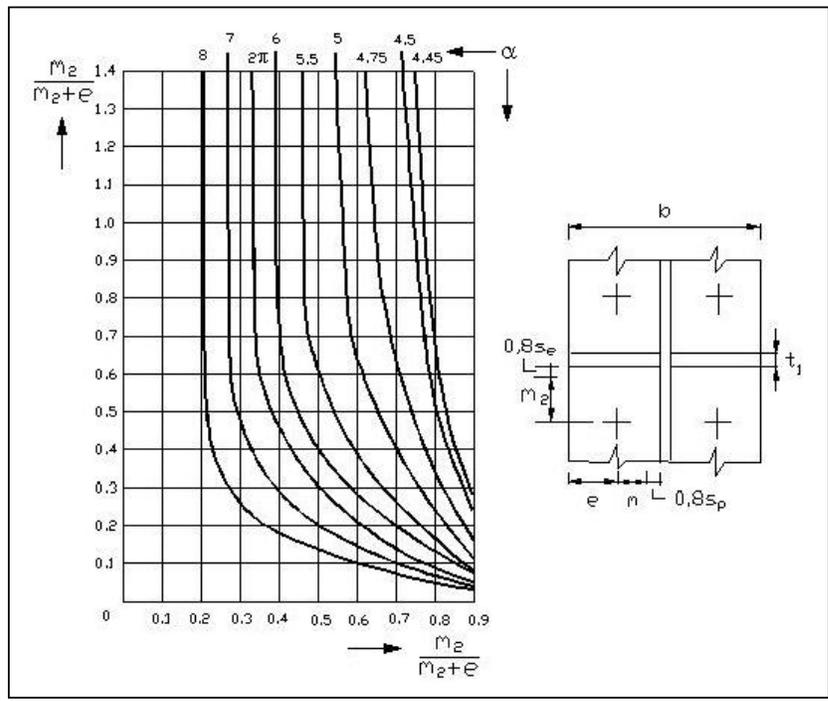
$l_{ef2}$  representa o comprimento efetivo de atuação dos esforços de tração na chapa de extremidade, e é igual ao menor entre os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
 &2\pi m \\
 &\pi m_x + g \\
 &\pi m_x + be - g \\
 &4\pi m_x + 1,25^a \\
 &0,5(b_e - g) + 2m_x + 0,625^a \\
 &0,5b_e \\
 &0,5g + 2m_x + 0,625^a
 \end{aligned}$$

$A_s$  indica a área resistente à tração do parafuso utilizado:

$$\left( A_s = \frac{0,75\pi d^2}{4} \right)$$

onde  $d$  é o seu diâmetro nominal.



**Figura 2.14: Valores do coeficiente  $\alpha$  para ligações parafusadas**

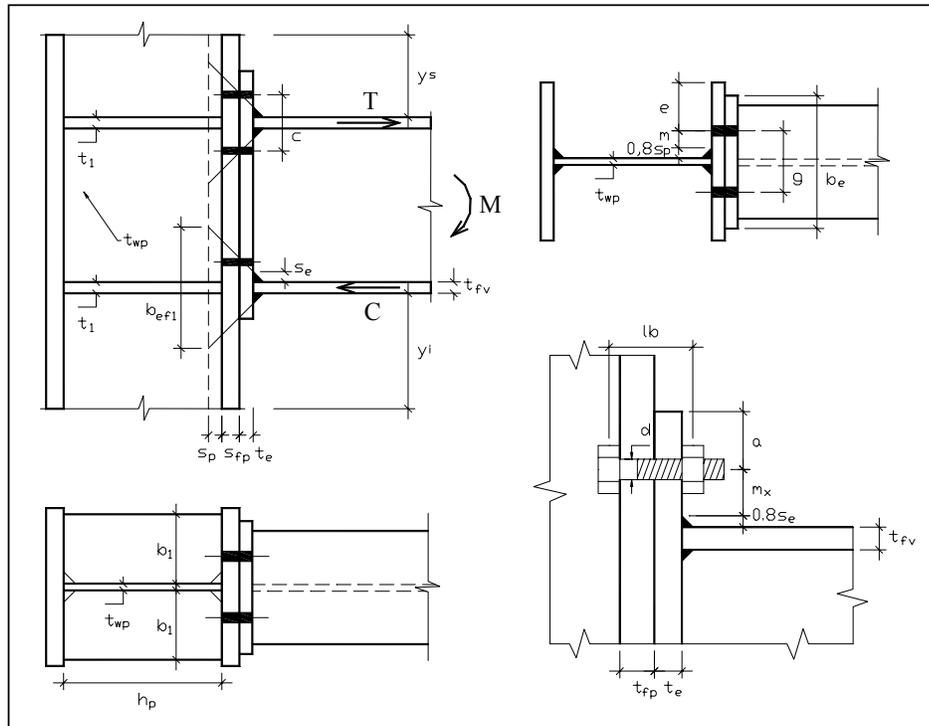
O coeficiente de rigidez relacionado à deformação por compressão da alma do pilar,  $k_2$ , ainda segundo ENV 1993-1-1 [17], tem o valor:

$$k_2 = \frac{0,70b_{ef2} t_{wp} + 4b_1 t_1}{h_p} \tag{2.15}$$

onde  $b_{efl}$  é a altura da região de introdução da força de compressão na alma do pilar, igual a:

$$b_{efl} = t_{fv} + 2s_e + 2t_e + 5t_{fp} + 5s_p \quad (2.16)$$

Quando não houver enrijecedores horizontais comprimidos, deve-se tomar  $b_l$  igual a zero. Ainda, quando o prolongamento do pilar além da mesa comprimida da viga ( $y_s$  da figura 2.15) não for suficiente para a formação do comprimento  $b_{efl}$ , deve ser utilizado enrijecedor horizontal, e deve-se tomar  $b_{efl}$  igual a zero na equação (2.16). As grandezas geométricas que aparecem nas equações acima estão mostradas na figura 2.15.



**Figura 2.15: Parâmetros da ligação parafusada rígida com chapa de topo**

#### 2.2.4 Consideração da rigidez das ligações na análise estrutural

A rigidez real de uma ligação em qualquer ponto de uma curva momento-rotação ( $M-\theta$ ) corresponde à rigidez tangente ( $R_{tan} = \Delta M / \Delta \theta$ ). Entretanto conforme Leon et al. [18], para fins práticos, é usual assumir uma aproximação linear na faixa de carregamento de serviço ( $\theta < \theta_{ser}$ ).

Para ligações classificadas como flexíveis, este procedimento faz com que a estrutura se torne mais rígida do que de fato é. Estudos recentes indicam que a rigidez secante destas ligações se aproxima de sua capacidade de resistência, correspondente a 20% da rigidez inicial,  $R_{in}$ , nas extremidades a sotavento e a 80% da rigidez inicial nas extremidades a barlavento das vigas, quando o pórtico está submetido a cargas gravitacionais e de vento. Desta forma King e Chen [19] consideram razoável usar uma rigidez média para estas ligações, igual a  $0,5R_{in}$ , quando se está determinando os esforços solicitantes de cálculo, o que foi adotado por Souza [11] em seu trabalho e será também adotado aqui.

Nestas ligações têm-se as seguintes equações para a rigidez inicial:

↳ Ligações com cantoneira simples, cantoneira dupla e chapa de topo:

$$R_m = \left[ \frac{dM}{d\theta} \right]_{\theta=0} = \left[ \frac{1}{d\theta/dM} \right]_{M=0}$$

onde a rotação  $\theta$  é expressa pelas equações 2.2, 2.3 e 2.4.

↳ Ligações com chapa simples:

$$R_m = \left[ \frac{dM}{d\theta} \right]_{\theta=0}$$

onde o momento fletor  $M$  é expresso pela equação (2.5).

Nas ligações classificadas como rígidas, como a relação momento-rotação é praticamente constante em regime elástico, a análise estrutural é feita tomando-se sua rigidez inicial, dada por:

$$R_m = \left[ \frac{dM}{d\theta} \right]_{\theta=0}$$

onde o momento fletor  $M$  é expresso pela equação (2.7).

Caso a ligação seja perfeitamente rígida, deve-se tomar um valor grande para rigidez inicial. Se a ligação for perfeitamente rotulada, deve-se tomar um valor nulo para rigidez inicial.

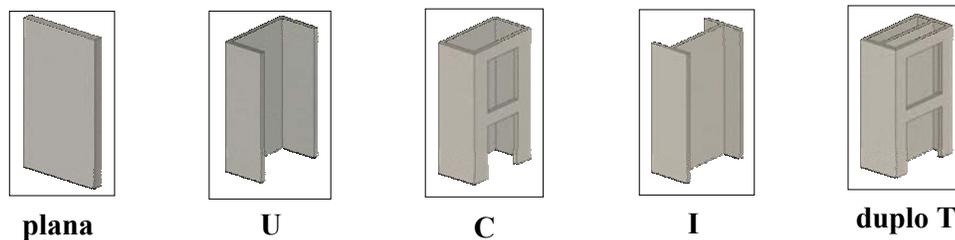
## 2.3 *Sistemas de Estabilidade da Estrutura*

Em edifícios com estruturas metálicas, a estabilidade lateral pode ser assegurada pela associação de pórticos, paredes e núcleos de concreto, sistemas de contraventamento composto por barras diagonais, paredes de alvenaria ou painéis de fechamento.

### 2.3.1 *Sistemas de estabilidade composto por paredes de concreto*

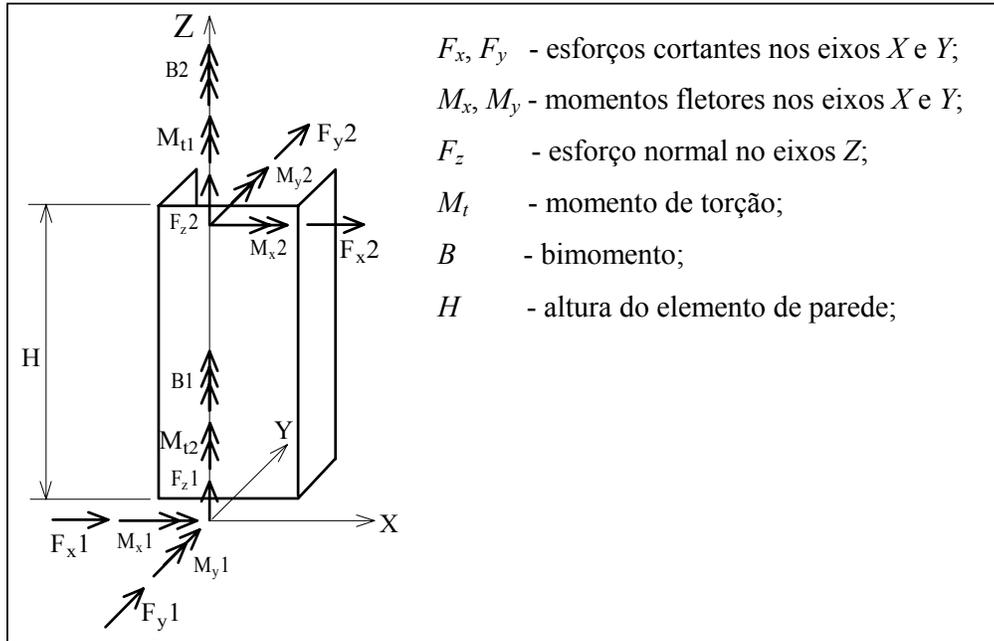
As paredes de concreto de seção aberta compõem normalmente os núcleos de escadas ou poços de elevadores. Estes elementos contribuem para a estabilidade lateral do edifício e são tratados como elementos de barras que contêm sete deslocamentos por nó, os seis deslocamentos de barra de pórtico espacial e o empenamento, deslocamento que ocorre em seções abertas. As paredes de seção aberta são abordadas segundo os fundamentos da teoria da flexo-torção de Vlassov [20].

As paredes de seção aberta, tratadas neste trabalho podem ter as seguintes seções transversais: planas, em forma de *U*, *C*, *I* e *duplo T*, conforme mostra a figura 2.16:



**Figura 2.16: Formas das seções das paredes de concreto**

Considere um elemento de parede compreendido entre dois andares consecutivos representado na figura 2.17.



**Figura 2.17: Sistemas de coordenadas para paredes de concreto**

Para uma extremidade genérica  $i$ , sendo  $i$  o centro de cisalhamento da parede e  $X$  e  $Y$  eixos paralelos aos eixos principais de inércia, têm-se os vetores de forças e deslocamentos abaixo:

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ F_{zi} \\ B_i \\ F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{ti} \end{Bmatrix}, \quad \{D_i\} = \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \delta_{zi} \\ \phi'_{zi} \\ \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \phi_{zi} \end{Bmatrix}$$

### 2.3.1.1 Contribuição dos termos de torção

A contribuição dos termos de torção à matriz de rigidez da parede estrutural de seção aberta podem ser escritos sob a forma da sub-matriz abaixo, conforme Ribeiro[6]:

$$[R\omega_i] = \gamma \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi'_1 & \phi_2 & \phi'_2 \\ K \sinh(KH) & \cosh(KH) - 1 & -K \sinh(KH) & \cosh(KH) - 1 \\ \cosh(KH) - 1 & H \cosh(KH) - \frac{\sinh(KH)}{K} & -(\cosh(KH) - 1) & \frac{\sinh(KH)}{K} - H \\ -K \sinh(KH) & -(\cosh(KH) - 1) & -K \sinh(KH) & -(\cosh(KH) - 1) \\ \cosh(KH) - 1 & \frac{\sinh(KH)}{K} - H & -(\cosh(KH) - 1) & H \cosh(KH) - \frac{\sinh(KH)}{K} \end{bmatrix}$$

onde:

$$K = \sqrt{GJ_t/EJ_\omega};$$

$$\gamma = \frac{GJ_t}{2 - 2 \cosh(KH) + KH \sinh(KH)};$$

$H$  = altura do elemento de parede.

Considere-se agora o caso particular das paredes estruturais que possuem momento de inércia setorial,  $J_\omega$ , nulo. As paredes com essa particularidade serão submetidas à torção sem empenamento da seção transversal, ou seja, para cargas concentradas ao nível do piso, esta torção será uma torção livre e sua contribuição será dada pela sub-matriz abaixo:

$$[R_{\omega_t}] = \frac{GJ_t}{H} \begin{matrix} \phi_1 & \phi_1' & \phi_2 & \phi_2' \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

### 2.3.1.2 Contribuição dos termos de flexão

Na contribuição dos termos de flexão à matriz de rigidez da parede tem-se que a mesma está referenciada ao  $CG$  (centro de gravidade) segundo os eixos principais de inércia. O comprimento do elemento de parede é designado por  $H$  e a área da seção transversal por  $A\omega$ . Os momentos principais de inércia são designados por  $XI\omega$  e  $YI\omega$  com relação aos eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente. O módulo de elasticidade longitudinal é definido por  $E$  e o módulo de elasticidade transversal por  $G$ .

De acordo com Manning Jr. [5],  $g_x$  e  $g_y$  são os fatores de flexibilidade ao cisalhamento na direção  $X$  e  $Y$  respectivamente e são dados por:

$$g_x = \frac{12EYI\omega}{GA_xH^2} \text{ e } g_y = \frac{12EXI\omega}{GA_yH^2}$$

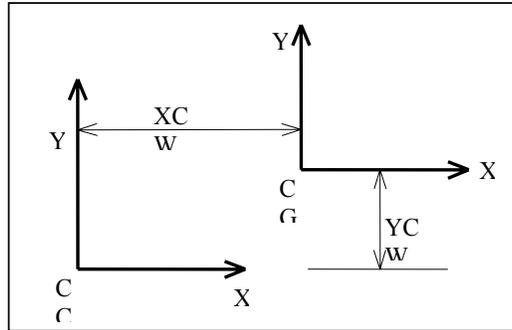
onde  $A_x$  e  $A_y$  são as áreas efetivas ao cisalhamento na direção  $X$  e  $Y$ .

Conforme Manning Jr., a contribuição dos termos de flexão na matriz de rigidez da parede, pode ser dada pela matriz seguinte:





Para se efetuar a transformação de eixos do *CG* (centro de gravidade), para o *CC* (centro de cisalhamento), usa-se o esquema apresentado na figura 2.18.



**Figura 2.18: Transformação de eixos do CG para o CC**

A relação entre os deslocamentos do *CG* com o *CC* é dado por:

$$\{D\}_{CG} = [T_1]\{D\}_{CC} \quad (2.17)$$

onde:

$\{D\}_{C.G.}$  - vetor deslocamentos com eixos no *C.G.*;

$\{D\}_{C.C.}$  - vetor deslocamentos com eixos no *C.C.*;

$[T_1]$  - matriz de transformação dada por:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ YC\omega & -XC\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

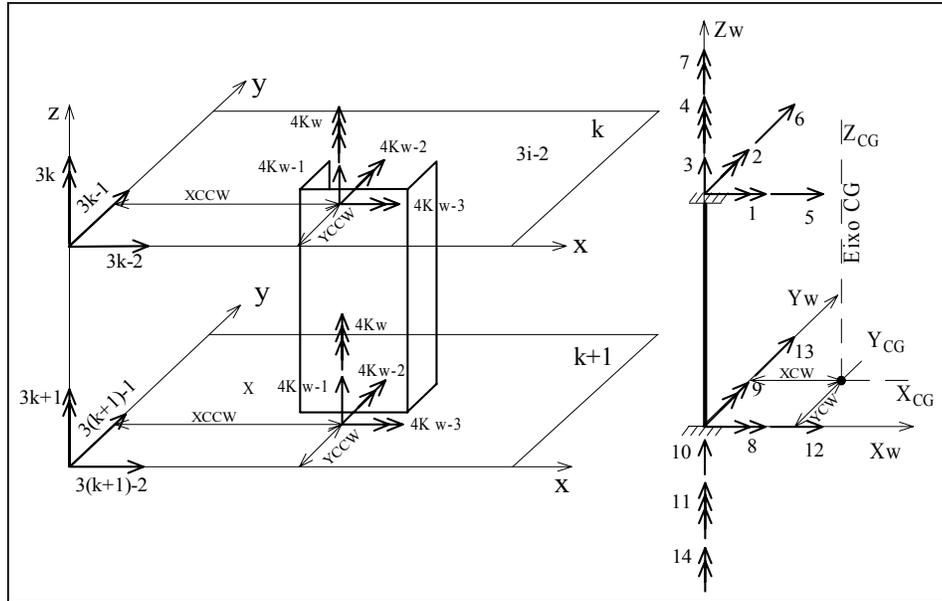
Portanto a sub-matriz de rigidez dos termos de flexão,  $[R\omega_f]$ , será transformada como segue:

$$[R\omega_f]_{CC} = [T_2]^t [R\omega_f]_{CG} [T_2] \quad (2.18)$$

onde:

$$[T_2] = \begin{bmatrix} [T_1] & [0] \\ [0] & [T_1] \end{bmatrix}$$

Para o sistema de coordenadas locais representado na figura 2.19, a matriz de rigidez do elemento de parede é dada por Ribeiro [6].



**Figura 2.19: Sistemas de coordenadas para paredes de concreto**

### 2.3.1.3 Representação da matriz $[R\omega]$ em sub-matrizes $[R\omega_{ij}]$

O particionamento da matriz de rigidez da parede em sub-matrizes apresentado a seguir, visa adequá-la ao particionamento da matriz de rigidez da estrutura:

$$[R\omega] = \begin{bmatrix} [R\omega_{11}] & [R\omega_{13}] & [R\omega_{12}] & [R\omega_{14}] \\ [R\omega_{31}] & [R\omega_{33}] & [R\omega_{32}] & [R\omega_{34}] \\ [R\omega_{21}] & [R\omega_{23}] & [R\omega_{22}] & [R\omega_{24}] \\ [R\omega_{41}] & [R\omega_{43}] & [R\omega_{42}] & [R\omega_{44}] \end{bmatrix}$$

onde os índices numéricos subscritos 1 e 2 indicam deslocamentos não relacionados com o movimento de corpo rígido dos diafragmas, ou seja  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\delta_z$  e  $\phi_z'$ , sendo 1 para extremidade do diafragma  $K$  e 2 para extremidade do diafragma  $K+1$ , e os subscritos 3 e 4 indicam deslocamentos relacionados com o movimento de corpo rígido dos diafragmas, ou seja  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  e  $\phi_z'$ , sendo 3 para extremidade do diafragma  $K$  e 4 para extremidade do diafragma  $K+1$ .

As sub-matrizes são:

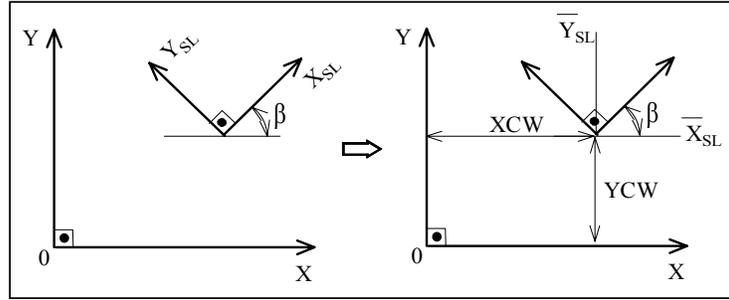
$$[R\omega_{11}] = [R\omega_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{(4+g_y)EXI\omega}{(1+g_y)H} + \frac{EA\omega YC\omega^2}{H} & -\frac{EA\omega YC\omega XI\omega}{H} & \frac{EA\omega YC\omega}{H} & 0 \\ -\frac{EA\omega YC\omega XI\omega}{H} & \frac{(4+g_x)EYI\omega}{(1+g_x)H} + \frac{EA\omega YC\omega^2}{H} & -\frac{EA\omega XC\omega}{H} & 0 \\ \frac{EA\omega YC\omega}{H} & -\frac{EA\omega XC\omega}{H} & -\frac{EA\omega}{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \left( HCH - \frac{SH}{K} \right) \end{bmatrix}$$

$$[R\omega_{12}] = [R\omega_{21}] = \begin{bmatrix} \frac{(2-g_y)EXI\omega}{(1+g_y)H} - \frac{EA\omega YC\omega^2}{H} & \frac{EA\omega YC\omega XI\omega}{H} & -\frac{EA\omega YC\omega}{H} & 0 \\ \frac{EA\omega YC\omega XI\omega}{H} & \frac{(2-g_x)EYI\omega}{(1+g_x)H} - \frac{EA\omega YC\omega^2}{H} & \frac{EA\omega XC\omega}{H} & 0 \\ -\frac{EA\omega YC\omega}{H} & \frac{EA\omega XC\omega}{H} & -\frac{EA\omega}{H} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \left( \frac{SH}{K} - H \right) \end{bmatrix}$$

$$[R\omega_{13}] = [R\omega_{31}]^t = [R\omega_{14}] = [R\omega_{41}]^t = [R\omega_{23}] = [R\omega_{32}]^t = [R\omega_{24}] = [R\omega_{42}]^t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{6EXI\omega}{(1+g_y)H^2} & 0 \\ -\frac{6EYI\omega}{(1+g_y)H^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R\omega_{33}] = [R\omega_{44}] = [R\omega_{34}] = [R\omega_{43}] = \begin{bmatrix} \frac{12EYI\omega}{(1+g_y)H^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EXI\omega}{(1+g_y)H^3} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(KSH) \end{bmatrix}$$

Considera-se agora a transformação da matriz de rigidez para o sistema global da estrutura, onde  $\beta$  é o ângulo entre os eixos local e global ( $X_{SL}$  e  $X$ ). No entanto será considerado apenas o caso de  $\beta = 0$  em concordância com a hipótese de que os eixos principais da parede coincidem com as direções dos pórticos. Portanto não é necessário uma rotação, mais sim uma translação de eixos.



**Figura 2.20: Transformação do sistema de eixos local para global**

A translação da matriz  $[R\omega]$  para o sistema de eixos globais da estrutura é dado pela equação (2.19):

$$[R\omega_{ii}] = [T\omega_{ii}]^t [R\omega] [T\omega_{ii}] \quad (2.19)$$

onde:  $[T\omega_{ii}] = \begin{bmatrix} [T\omega_i] & [0] \\ [0] & [T\omega_i] \end{bmatrix} e,$

$$[T\omega_i] = \begin{matrix} \theta_x & \theta_y & \delta_z & \phi'_z & \delta_x & \delta_y & \phi_z \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -YCC\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & XCC\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

#### 2.3.1.4 Equações de transformação de ações e deslocamentos

Considere um sistema de coordenadas de forças equivalente ao correspondente sistema de coordenadas para deslocamentos. Assim tem-se que  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  são forças nas direções dos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ ,  $M_x$  e  $M_y$  são momentos em relação aos eixos  $X$  e  $Y$  e  $M_t$  e  $B$  são momento de torção e bimomento, respectivamente. Todas as forças são referidas ao centro de cisalhamento.

Para fazer a transformação das forças aplicadas nas extremidades como mostra a figura 2.21, tem-se que:

↪ para carga concentrada  $P$ :

$$F_z = P, \quad M_x = PY_s, \quad M_y = -PX_s \quad e \quad B = P\Delta_s\omega_s$$

↪ para carga distribuída  $q_s$ :

$$F_z = \int_{s_1}^{s_2} q_s ds, \quad M_x = (F_z)Y_s, \quad M_y = -(F_z)X_s, \quad B = \int_{s_1}^{s_2} q_s \omega_s ds$$

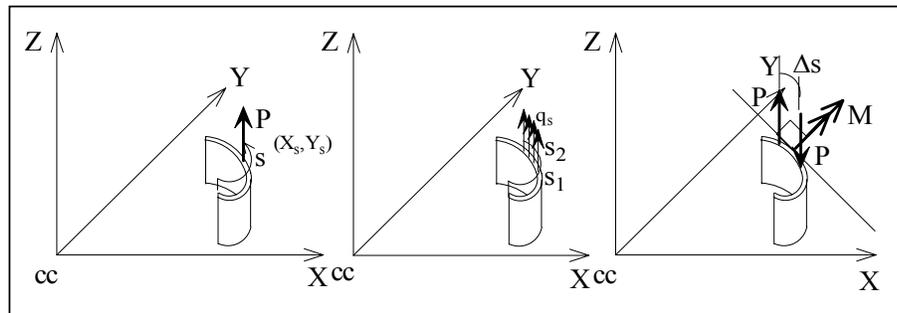
↪ para momento  $M$ :

$$B = \frac{M}{\Delta s} \omega_s - (\omega_s + \Delta\omega_s) \frac{M}{\Delta s} = -\left(\frac{M}{\Delta s}\right) \Delta\omega_s$$

Tomando-se o limite  $\Delta s \rightarrow 0$ , tem-se:

$$B = -\left(\frac{d\omega_s}{ds}\right) \therefore B = -M n$$

onde  $n$  é a distância do centro de cisalhamento à tangente a linha do esqueleto no ponto considerado.



**Figura 2.21: Transformação de ações nas extremidades para o CC**

Somente o momento  $M$  na direção normal ao plano tangente é que contribui para o bimomento. Da figura 2.21, tem-se:

$$u_h = \omega_h \varphi'_z \therefore \frac{du_h}{ds} = \varphi'_z \left( \frac{du_h}{ds} \right)$$

Assim:

$$\left( \frac{du_h}{ds} \right) = \varphi'_z n_h$$

### 2.3.1.5 Compatibilização de viga-parede

Na análise da compatibilização dos deslocamentos na interface entre as vigas e paredes estruturais, vê-se que a extremidade da viga tem que se deslocar com a parede estrutural no ponto de interação. Como resultado, o número de graus de liberdade independentes ao nível dos andares será consideravelmente reduzido.

Os deslocamentos do centro de cisalhamento da parede, considerando um ponto  $P$  de coordenadas  $(x_p, y_p)$ , em relação ao sistema de eixos, e também os deslocamentos  $D_1, D_2$  e  $D_3$  neste ponto como função dos deslocamentos do centro de cisalhamento nas deformações de flexão, podem-se relacionar pela equação (2.20) de acordo com Manning Jr. [5]:

$$\{D\} = [TV\omega] \{D\omega\}$$

ou seja,

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -n \cos \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -n \sin \beta & 0 & 0 & 0 \\ y_p & -x_p & 1 & \omega_{sp} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D\omega_1 \\ D\omega_2 \\ D\omega_3 \\ D\omega_4 \\ D\omega_5 \\ D\omega_6 \\ D\omega_7 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

A matriz  $[TV\omega]$  é uma matriz de transformação geométrica que relaciona deslocamentos do centro de cisalhamento com deslocamentos em qualquer ponto ao longo da parede. De maneira análoga, as forças aplicadas no centro de cisalhamento da parede podem ser relacionados com as forças aplicadas num ponto  $P$  qualquer da parede. As equações de transformação das forças definem a relação entre as forças e o bimomento no centro de cisalhamento, enquanto as forças restantes serão determinadas pela estática. Assim tem-se, expressando em forma matricial:

$$\{F\omega\} = [TV\omega]^t \{F\}$$

ou seja,

$$\begin{Bmatrix} F\omega_1 \\ F\omega_2 \\ F\omega_3 \\ F\omega_4 \\ F\omega_5 \\ F\omega_6 \\ F\omega_7 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y_p \\ 0 & 1 & -x_p \\ 0 & 0 & 1 \\ -n \cos \beta & -n \sin \beta & \omega_{sp} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

A matriz de rigidez de uma viga com extremidade comum à interface de uma parede estrutural pode ser determinada agora considerando-se a equação que relaciona as forças com os deslocamentos para as vigas. Para o equacionamento das vigas tem-se  $\{FV\} = [RV] \{DV\}$  e são possíveis as ocorrências de três casos:

1ª) A extremidade j da viga, ou extremidade inicial, é vinculado à parede ou núcleo estrutural:

$$[RV]_j = [TV\omega]_j^t [RV] [TV\omega]_j \quad (2.22)$$

$$\text{onde: } [TV\omega]_j = \begin{bmatrix} [TV\omega] & [0] \\ [0'] & [I] \end{bmatrix}$$

As matrizes  $[0]$  e  $[0']$  são constituídas de elementos nulos, de ordem 3x3 e 3x7, respectivamente, sendo  $[I]$  uma matriz identidade de ordem 3x3.

2ª) A extremidade k da viga, ou extremidade final, é vinculado à parede ou núcleo estrutural:

$$[RV]_k = [TV\omega]_k^t [RV] [TV\omega]_k \quad (2.23)$$

$$\text{onde: } [TV\omega]_k = \begin{bmatrix} [I] & [0'] \\ [0] & [TV\omega] \end{bmatrix}$$

As matrizes  $[0]$  e  $[0']$  são constituídas de elementos nulos, de ordem 3x3 e 3x7, respectivamente, sendo  $[I]$  uma matriz identidade de ordem 3x3.

3º) Se ambas as extremidades da viga, estão vinculados à mesma parede ou à paredes diferentes:

$$[RV]_{jk} = [TV\omega]_{jk}^t [RV][TV\omega]_{jk} \quad (2.24)$$

onde:  $[TV\omega]_{jk} = \begin{bmatrix} [TV\omega] & [0] \\ [0] & [TV\omega] \end{bmatrix}$

A matriz  $[0]$  é constituída de elementos nulos, de ordem  $3 \times 7$ .

### 2.3.1.6 Contribuição das paredes de concreto na matriz de rigidez da estrutura

Para se obter a contribuição de um elemento de parede na matriz de rigidez da estrutura procede-se de maneira análoga à contribuição de pilares. Da figura 2.19 observam-se as seguintes simplificações imediatas:

$$[RAA] = [RBB]$$

$$[RAB] = [RBA]$$

$$[RAL] = [RLA]^t$$

$$[RBL] = [RLB]^t$$

Para a sub-matriz  $[RAA]$  da matriz de rigidez da estrutura, a contribuição de um elemento é feita diretamente da sub-matriz  $[R\omega_{11}]$ , definida no particionamento da matriz  $[R\omega]$ .

Assim:

$$\begin{array}{c}
 \text{COORD. NO ANDAR A} \\
 1 \quad \dots \quad 3NCNO \quad \dots \quad 4N\omega - 3 \quad 4N\omega - 2 \quad 4N\omega - 1 \quad 4N\omega \quad \dots \quad NCE
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \vdots \\
 3NCNO \\
 \vdots \\
 4N\omega - 3 \\
 4N\omega - 2 \\
 4N\omega - 1 \\
 4N\omega \\
 \vdots \\
 NCE
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c|c|c}
 & & \\
 \hline
 & [R\omega_{11}] & \\
 \hline
 & & 
 \end{array} \right]$$

onde  $NCNO$  é o número cumulativo de nós relativos a pilares e  $N\omega$  é o número de parede.

Para a sub-matriz  $[RAB]$ , a contribuição de um elemento de parede é dada diretamente pela sub-matriz  $[R\omega_{12}]$ , definida no particionamento da matriz  $[R\omega]$ . Assim tem-se:

$$\begin{array}{c}
 \text{COORD. NO ANDAR A} \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \vdots \\
 3NCNO \\
 \vdots \\
 4N\omega - 3 \\
 4N\omega - 2 \\
 4N\omega - 1 \\
 4N\omega \\
 \vdots \\
 NCE
 \end{array}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c}
 \text{COORD. NO ANDAR B} \\
 1 \quad \dots \quad 3NCNO \quad \dots \quad 4N\omega - 3 \quad 4N\omega - 2 \quad 4N\omega - 1 \quad 4N\omega \quad \dots \quad NCE
 \end{array} \right]$$

$$[RAB] = \left[ \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 [R\omega_{12}] \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array} \right]$$

A transformação matricial dada pela equação (2.19) fornece a mudança da matriz de rigidez  $[R\omega]$ , dada no sistema local da figura 2.20, para o sistema global do andar da mesma figura. Obtém-se assim a contribuição de  $[R\omega]$  nas sub-matrizes  $[RAL]$ ,  $[RBL]$  e  $[RLL]$ .

Para a sub-matriz  $[RAL]$ , a contribuição de um elemento de parede é dada como segue:

$$\begin{array}{c}
 \text{COORD. NO ANDAR B} \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 \vdots \\
 3NCNO \\
 \vdots \\
 4N\omega - 3 \\
 4N\omega - 2 \\
 4N\omega - 1 \\
 4N\omega \\
 \vdots \\
 NCE
 \end{array}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c}
 \text{DIAFRAGMA K (ANDAR A)} \quad \text{DIAFRAGMA K+1 (ANDAR B)} \\
 \dots \quad 3K-2 \quad 3K-1 \quad 3K \quad 3(K+1)-2 \quad 3(K+1)-1 \quad 3(K+1) \quad \dots
 \end{array} \right]$$

$$[RAL] = \left[ \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 [R\omega_{13}]^* \quad [R\omega_{14}]^* \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots
 \end{array} \right]$$

onde as sub-matrizes  $[R\omega_{13}]^*$  e  $[R\omega_{14}]^*$  são obtidas da transformação matricial definida pela equação (2.19).

Para a sub-matriz  $[RBL]$ , a contribuição de um elemento de parede é dada como segue:

$$\begin{array}{c}
\text{DIAFRAGMA K (ANDAR A)} \quad \text{DIAFRAGMA K+1 (ANDAR B)} \\
\cdots \quad 3K-2 \quad 3K-1 \quad 3K \quad 3(K+1)-2 \quad 3(K+1)-1 \quad 3(K+1) \quad \cdots \\
\begin{array}{c}
1 \\
\vdots \\
3NCNO \\
\vdots \\
4N\omega-3 \\
4N\omega-2 \\
4N\omega-1 \\
4N\omega \\
\vdots \\
NCE
\end{array}
\end{array}
\left[ \begin{array}{c|c|c}
& & \\
\hline
& [R\omega_{23}]^* & [R\omega_{24}]^* \\
\hline
& & 
\end{array} \right]$$

Para a sub-matriz  $[RLL]$ , a contribuição de um elemento de parede é dada como segue:

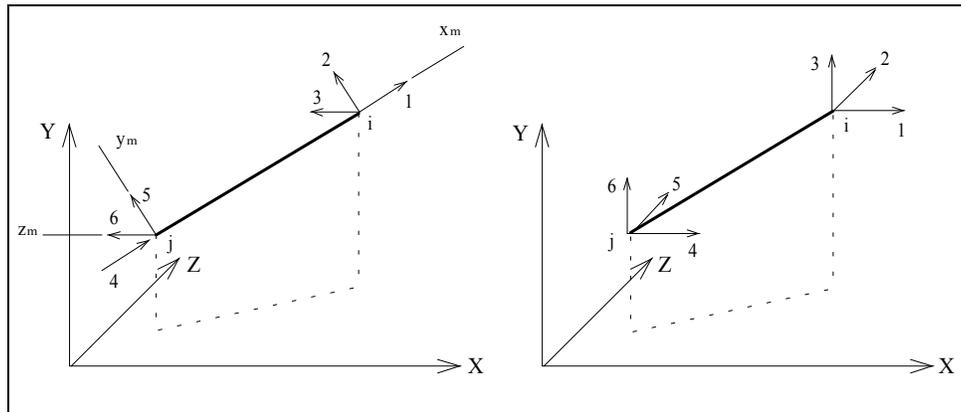
$$\begin{array}{c}
\text{DIAFRAGMA K (ANDAR A)} \quad \text{DIAFRAGMA K+1 (ANDAR B)} \\
\cdots \quad 3K-2 \quad 3K-1 \quad 3K \quad 3(K+1)-2 \quad 3(K+1)-1 \quad 3(K+1) \quad \cdots \\
\begin{array}{c}
\vdots \\
3K-2 \\
3K-1 \\
3K \\
3(K+1)-2 \\
3(K+1)-1 \\
3(K+1) \\
\vdots
\end{array}
\end{array}
\left[ \begin{array}{c|c|c}
& & \\
\hline
& [R\omega_{33}]^* & [R\omega_{34}]^* \\
\hline
& [R\omega_{43}]^* & [R\omega_{44}]^* \\
\hline
& & 
\end{array} \right]$$

onde as sub-matrizes  $[R\omega_{33}]^*$ ,  $[R\omega_{34}]^*$ ,  $[R\omega_{43}]^*$  e  $[R\omega_{44}]^*$ , são obtidas da transformação matricial definida pela equação (2.19).

### 2.3.2 Sistema de estabilidade composto por barras diagonais

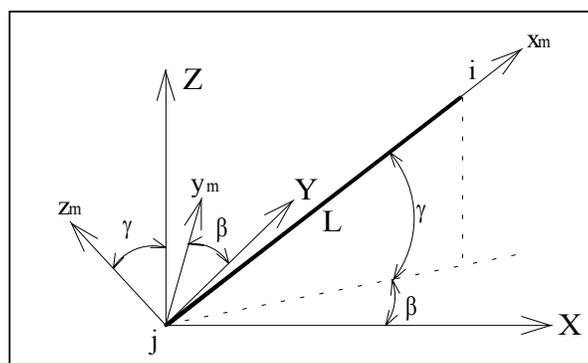
Considerando-se uma barra inclinada de contraventamento entre dois níveis de andares, para o sistema de coordenadas locais representadas na figura 2.22, obtém-se, por Weaver & Gere [13], a seguinte matriz de rigidez para uma barra de contraventamento:

$$[RCV] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



**Figura 2.22: Sistema de coordenadas local**

A rotação do sistema local para o sistema global da estrutura, se faz com a matriz de transformação  $[TCV_i]$ . Para sua obtenção toma-se a transformação da matriz de rigidez do sistema local para o sistema global da estrutura conforme a figura 2.23. A matriz de rigidez local da barra de contraventamento deve ser mudada para um sistema paralelo ao sistema global, por meio da matriz de transformação  $[R]$ . As possíveis posições para a barra de contraventamento são:  $\beta = 0^\circ$  (contraventamento na direção  $X$ ) ou  $\beta = 90^\circ$  (contraventamento na direção  $Y$ ) e  $\gamma$  variando de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ . Assim, sendo:



**Figura 2.23: Posições possíveis para barra de contraventamento**

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \text{ e } R_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo  $\cos \gamma = C_{xy}$ ,  $\sin \gamma = C_z$ ,  $\cos \beta = \frac{C_x}{C_{xy}}$  e  $\sin \beta = \frac{C_y}{C_{xy}}$  então:

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} C_{xy} & 0 & C_z \\ 0 & 1 & 0 \\ -C_y & 0 & C_{xy} \end{bmatrix} \text{ e } R_\beta = \begin{bmatrix} \frac{C_x}{C_{xy}} & \frac{C_y}{C_{xy}} & 0 \\ -\frac{C_y}{C_{xy}} & \frac{C_x}{C_{xy}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto  $TCV_i = R_\gamma R_\beta$ , e

$$[TCV_i] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ -\frac{C_x C_y}{C_{xz}} & C_{xz} & -\frac{C_y C_z}{C_{xz}} \\ \frac{C_{xz}}{C_{xz}} & 0 & \frac{C_x}{C_{xz}} \\ -\frac{C_z}{C_{xz}} & 0 & \frac{C_x}{C_{xz}} \\ \frac{C_{xz}}{C_{xz}} & 0 & \frac{C_x}{C_{xz}} \end{bmatrix}$$

Logo a matriz de transformação relativa a rotação dos eixos é:

$$[TCV_i] = \begin{bmatrix} [TCV_i] & 0 \\ 0 & [TCV_i] \end{bmatrix}$$

Como  $[RCV_i] = [TCV_i]^T [RCV_l] [TCV_i]$ , onde  $RCV_l$  é a matriz de rigidez das barras de contraventamento no sistema local e  $RCV_i$  em um sistema de eixos paralelos aos eixos globais, vem:

$$[TCV_i] = \begin{bmatrix} [TCV_i] \\ 0 \\ [TCV_i] \end{bmatrix} \text{ e } [TCV_i] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ -\frac{C_x C_y}{C_{xz}} & C_{xz} & -\frac{C_y C_z}{C_{xz}} \\ \frac{-C_z}{C_{xz}} & 0 & \frac{C_x}{C_{xz}} \end{bmatrix}$$

onde:  $C_{xz} = \cos \gamma$ ,  $C_y = \sin \gamma$ ,  $\frac{C_x}{C_{xz}} = \cos \beta$  e  $\frac{C_z}{C_{xz}} = \sin \beta$

Logo a matriz de rigidez da barra em um sistema de eixos paralelo ao sistema global é dada pela equação (2.25):

$$[RCV_i] = [TCV_i]^t [RCV] [TCV_i] \quad (2.25)$$

ou seja:

$$[RCV_i] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z & -C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z \\ C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z & -C_x C_y & -C_y^2 & -C_y C_z \\ C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 & -C_x C_z & -C_y C_z & -C_z^2 \\ -C_x^2 & -C_x C_y & -C_x C_z & C_x^2 & C_x C_y & C_x C_z \\ -C_x C_y & -C_y^2 & -C_y C_z & C_x C_y & C_y^2 & C_y C_z \\ -C_x C_z & -C_y C_z & -C_z^2 & C_x C_z & C_y C_z & C_z^2 \end{bmatrix}$$

Para contribuição na matriz de rigidez da estrutura, além da rotação dada pela equação (2.25), é necessário proceder a translação do sistema de eixos, o que se faz levando em consideração as posições dos nós  $i$  e  $j$  em relação a origem do sistema do andar, definida pelos valores  $XNO$  e  $YNO$ , em relação aos eixos  $X$  e  $Y$ , respectivamente, o que é feito a seguir.

### 2.3.2.1 Contribuição das barras de contraventamento na matriz de rigidez da estrutura

O elemento de contraventamento tem os dois extremos nos níveis de andares  $A$  e  $B$  definidos pelos nós  $i$  e  $j$  como mostra a figura 2.24. A matriz de rigidez das barras  $[RCV]$  será representada por seus elementos  $RVC(i,j)$ , onde  $i=1,6$  e  $j=1,6$ .



$$\begin{array}{c}
 \text{COORD. NO ANDAR B} \\
 1 \quad 2 \quad \dots \quad 3j-2 \quad 3j-1 \quad 3j \quad \dots \quad NCE \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \text{COORD. NO ANDAR B} \\
 1 \\
 2 \\
 \vdots \\
 3j-2 \\
 3j-1 \\
 3j \\
 \vdots \\
 NCE
 \end{array}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c|c|c}
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 \hline
 & RCV_i(6,6) & \\
 \hline
 & & \\
 & & \\
 & & 
 \end{array} \right]$$

Para a sub-matriz  $[RAB]$ , tem-se que a contribuição de um elemento de pilar faz-se de maneira análoga:

$$\begin{array}{c}
 \text{COORDENADAS NO ANDAR B} \\
 1 \quad 2 \quad \dots \quad 3i-2 \quad 3i-1 \quad 3i \quad \dots \quad NCE \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \text{COORD. NO ANDAR A} \\
 1 \\
 2 \\
 \vdots \\
 3i-2 \\
 3i-1 \\
 3i \\
 \vdots \\
 NCE
 \end{array}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c|c|c}
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 \hline
 & RCV_i(3,6) & \\
 \hline
 & & \\
 & & 
 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{c}
 \text{COORD. NO ANDAR A} \\
 1 \quad 2 \quad \dots \quad 3i-2 \quad 3i-1 \quad 3i \quad \dots \quad NCE \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \text{COORD. NO ANDAR B} \\
 1 \\
 2 \\
 \vdots \\
 3j-2 \\
 3j-1 \\
 3j \\
 \vdots \\
 NCE
 \end{array}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{c|c|c}
 & & \\
 & & \\
 & & \\
 \hline
 & RCV_i(6,3) & \\
 \hline
 & & \\
 & & 
 \end{array} \right]$$



$$\begin{array}{c}
\text{DIAFRAGMA K (ANDAR A)} \qquad \text{DIAFRAGMA K+1 (ANDAR B)} \\
\cdots \quad 3K-2 \quad 3K-1 \quad 3K \quad 3(K+1)-2 \quad 3(K+1)-1 \quad 3(K+1) \quad \cdots \\
\begin{array}{c}
\text{DIAFRAGMA K} \\
\text{DIAFRAGMA K+1} \\
\text{ANDAR A} \\
\text{ANDAR B}
\end{array}
\end{array}
\begin{array}{c}
\vdots \\
3K-2 \\
3K-1 \\
3K \\
3(K+1)-2 \\
3(K+1)-1 \\
3(K+1) \\
\vdots
\end{array}
\left[ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
RCV_i(1,1) & RCV_i(1,2) & AUX5 & RCV_i(1,4) & RCV_i(1,5) & AUX8 \\
RCV_i(2,1) & RCV_i(2,2) & AUX6 & RCV_i(2,4) & RCV_i(2,5) & AUX9 \\
AUX5 & AUX6 & AUX7 & AUX8 & AUX9 & AUX10 \\
RCV_i(4,1) & RCV_i(4,2) & AUX8 & RCV_i(4,4) & RCV_i(4,5) & AUX11 \\
RCV_i(5,1) & RCV_i(5,2) & AUX9 & RCV_i(5,4) & RCV_i(5,5) & AUX12 \\
AUX8 & AUX9 & AUX10 & AUX11 & AUX12 & AUX13 \\
\hline
\end{array} \right]$$

$$AUX5 = -RCV_i(1,1) * YNO_i$$

$$AUX6 = RCV_i(2,2) * XNO_i$$

$$AUX7 = -RCV_i(1,1) * YNO_i + RCV_i(2,2) * XNO_i$$

$$AUX8 = -RCV_i(1,1) * YNO_i * YNO_j$$

$$AUX9 = RCV_i(2,2) * XNO_i * XNO_j$$

$$AUX10 = -RCV_i(1,1) * YNO_i * YNO_j + RCV_i(2,2) * XNO_i * XNO_j$$

$$AUX11 = -RCV_i(4,4) * YNO_j^2$$

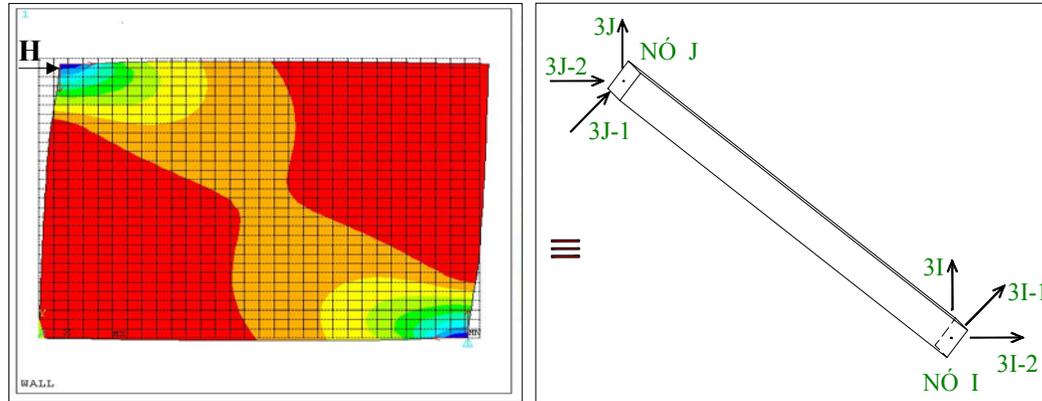
$$AUX12 = RCV_i(5,5) * XNO_j^2$$

$$AUX13 = -RCV_i(4,4) * YNO_j^2 + RCV_i(2,2) * XNO_j^2$$

### 2.3.3 Sistema de estabilidade composto por painéis de fechamento

Nas regiões da estrutura onde existem barras diagonais de contraventamento, a alvenaria deve ser construída de forma a moldar-se aos contornos deixados pelas barras diagonais, vigas e pilares. Este procedimento torna o método construtivo mais lento, podendo ocorrer descolamentos das alvenarias junto às barras inclinadas se não houver um tratamento adequado nesses locais.

Segundo Braguim [10], dos métodos utilizados para o enrijecimento de estruturas metálicas submetidas à esforços horizontais, o menos convencional é aquele que substitui as barras de contraventamento pelos painéis de fechamento, funcionando como elemento de estabilidade da estrutura. Neste método, o painel de fechamento pode ser considerado como uma barra diagonal fictícia de aço, biarticulada proporcionando a mesma rigidez que o painel daria à estrutura, como mostra a figura 2.25.



**Figura 2.25: Transformação de painel de alvenaria em barra equivalente**

### 2.3.3.1 Considerações sobre o contraventamento da estrutura

Para a determinação da barra equivalente é necessário determinar a rigidez relativa do painel para análise da estrutura. Smith [9] apresenta uma formulação que permite entender a essência dos fenômenos físicos que ocorrem com os elementos da estrutura, propondo um método de análise através do seguinte procedimento:

- a) Determinação da rigidez relativa do pórtico expressa pela equação (2.26):

$$\lambda l = l^4 \sqrt{\frac{E_p t \sin 2\theta}{4EI'}} \quad (2.26)$$

onde:  $l$  e  $l'$  = comprimento da viga entre eixos de coluna e comprimento do painel  
(para painéis retangulares,  $l$  deve ser substituído pela altura  $h$  do pórtico);

$E_p$  = módulo de deformação do painel;

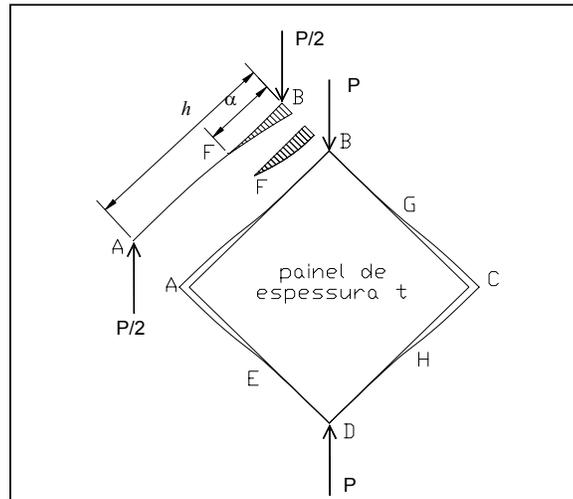
$t$  = espessura do painel;

$EI$  = produto de inércia à flexão;

$\theta$  = inclinação da diagonal.

- b) O comprimento de contato mostrado na figura 2.26 pode ser expresso pela curva dada pela equação:

$$\frac{\alpha}{l} = \frac{\pi}{2\lambda l} \quad (2.27)$$



**Figura 2.26: Esquema de interação entre pórtico e painel**

- c) Utilizando um programa de elementos finitos, encontram-se os deslocamentos nodais nas extremidades da diagonal comprimida do painel. A largura da diagonal equivalente pode ser calculada como a largura de uma barra, de mesma espessura e material do painel, axialmente comprimida de mesmo comprimento da diagonal que, submetida ao mesmo carregamento do painel, resulte em uma variação de comprimento igual à variação da diagonal do painel e pode ser dado pela equação:

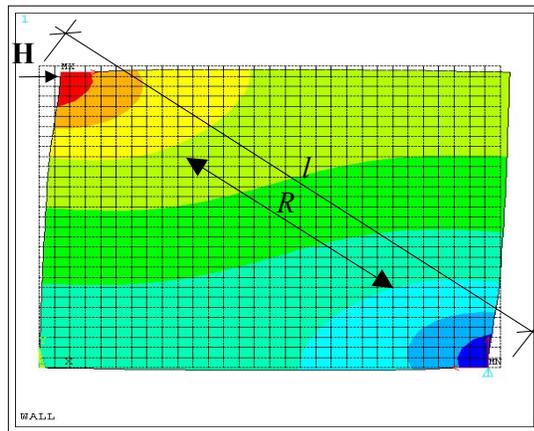
$$w = \frac{Rl}{tE_p \Delta d} \quad (2.28)$$

onde:  $w$  = largura equivalente a ser calculada;

$\Delta d$  = variação do comprimento da diagonal;

$R$  = força resultante na direção da diagonal;

$l$  = comprimento da diagonal comprimida.



**Figura 2.27: Parâmetros para transformação da alvenaria em barra de aço**

- d) Depois de obtida a largura da diagonal equivalente, obtém-se a barra de mesmo material do painel que pode ser transformada em uma barra equivalente em aço cuja área é dada pela equação:

$$A_{aço} = \frac{A_{painel} E_{painel}}{E_{aço}} \quad (2.29)$$

A partir daí, estas barras são tratadas de maneira análoga às barras diagonais de contraventamento resistentes somente à esforços de compressão.

Na análise da alvenaria e sua transformação em uma diagonal equivalente é necessário a determinação dos deslocamentos dos nós da alvenaria. Nesta análise utilizou-se o elemento isoparamétrico quadrangular de quatro nós.

Outra forma de se obter a rigidez de pórticos metálicos preenchidos por alvenaria é através de ensaios experimentais em escala real. A figura 2.28 mostra fotos de ensaios realizados em pórticos metálicos preenchidos com alvenaria realizados no Laboratório de Análise de Estruturas do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG (LAEES). Estes ensaios fazem parte dos trabalhos de Vieira [21].



**Figura 2.28: Ensaio em pórticos metálicos preenchidos com alvenarias realizados no LAEES**

## ***2.4 Deformação por Cortante***

### ***2.4.1 Considerações gerais***

O efeito da deformação por cortante pode ser incluído na análise através de modificações apropriadas na matriz de rigidez das barras, e sua consideração pode ser importante para a obtenção de resultados mais precisos.

Vasconcellos Filho [14] apresenta os coeficientes de rigidez para deslocamentos unitários aplicados nas extremidades de uma barra prismática, levando em consideração as deformações por momento fletor e força cortante e se aplicam a barras que apresentam  $EI$ ,  $EA$  e  $GA$  constantes. A figura 2.31 mostra a numeração dos deslocamentos das vigas na direção  $X$  e  $Y$  e a figura 2.32 mostra a aplicação de deslocamentos unitários nas direções dos graus de liberdade e em seguida, os coeficientes de rigidez para montagem da matriz de rigidez das vigas.

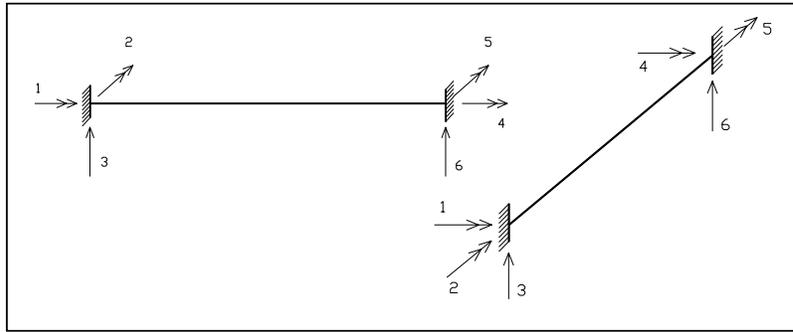


Figura 2.29: Vigas com numeração dos deslocamentos

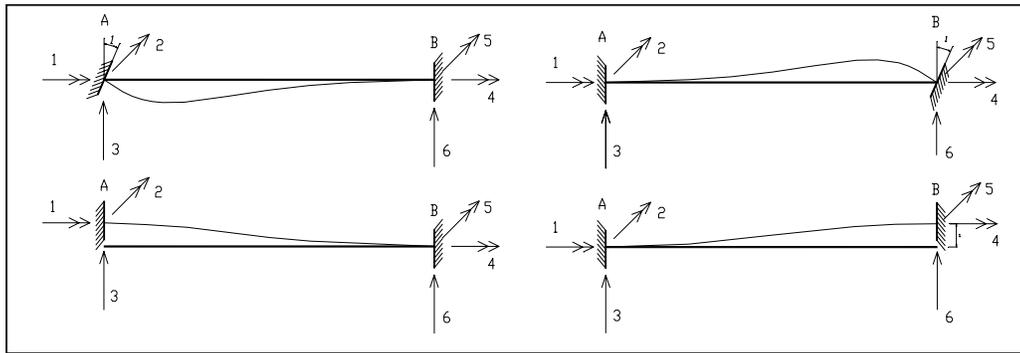


Figura 2.30: Deslocamentos unitários nos graus de liberdade da VIGA-X

Para rotações unitárias nas direções 2 e 5 obtêm-se as reações de apoio abaixo:

$$M_A = \frac{4EI}{L} \frac{2+g}{2(1+2g)} \quad (2.30)$$

$$M_B = \frac{2EI}{L} \frac{1-g}{1+2g} \quad (2.31)$$

$$R_A = -R_B = \frac{M_A + M_B}{L} = \frac{6EI}{L^2} \frac{1}{1+2g} \quad (2.32)$$

Para deslocamentos unitários nas direções 3 e 6 obtêm-se as reações de apoio abaixo:

$$M_A = M_B = \frac{6EI}{L^2} \frac{1}{1+2g} \quad (2.33)$$

$$R_A = -R_B = \frac{2M_A}{L} = \frac{12EI}{L^3} \frac{1}{1+2g} \quad (2.34)$$

onde:

$$g = \frac{6fEI}{GAL^2}$$

$f$  = fator de correção para o cisalhamento;

$E$  = módulo de elasticidade longitudinal do material;

$G$  = módulo de elasticidade transversal do material;

$A$  = área da seção transversal da barra;

$I$  = momento de inércia da barra.

O fator de correção para o cisalhamento ou fator de forma, pode ser obtido de forma aproximada para perfis I ou H, os mais usados em estruturas de aço, pela relação:

$$f = \frac{A_{total}}{A_w}$$

onde  $A_w$  é a área da alma do perfil e  $A_{total}$  é área bruta da seção.

As matrizes de rigidez de *VIGA-X* e *VIGA-Y*, incluindo a deformação por flexão e por força cortante e a semi-rigidez das ligações, são dadas respectivamente por:

$$RVS_X = \begin{bmatrix} \frac{GI}{L_x} & 0 & 0 & \frac{GI}{L_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_x}{L_x} \frac{1+3j}{(1+2j)(1+6j)} \frac{2+g}{2(1+2g)} & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & 0 & \frac{2EI_x}{L_x} \frac{1}{(1+2j)(1+6j)} & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} \\ 0 & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & \frac{12EI_x}{L_x^3} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & 0 & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & \frac{12EI_x}{L_x^3} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} \\ \frac{GI}{L_x} & 0 & 0 & \frac{GI}{L_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_x}{L_x} \frac{1}{(1+2j)(1+6j)} \frac{1-g}{(1+2g)} & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & 0 & \frac{4EI_x}{L_x} \frac{(1+3j)}{(1+2j)(1+6j)} & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} \\ 0 & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{(1+2j)}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & \frac{12EI_x}{L_x^3} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & 0 & \frac{6EI_x}{L_x^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & \frac{12EI_x}{L_x^3} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} \end{bmatrix}$$

$$RV\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_y}{L_y} \frac{1+3j}{(1+2j)(1+6j)} \frac{2+g}{2(1+2g)} & 0 & \frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & \frac{2EI_y}{L_y} \frac{(1+3j)}{(1+2j)(1+6j)} \frac{1-g}{(1+2g)} & 0 & \frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} \\ 0 & \frac{GI_y}{L_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_y}{L_y} & 0 \\ \frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & \frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & 0 & \frac{12EI_y}{L_y^3} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} \\ \frac{2EI_y}{L_y} \frac{1}{(1+2j)(1+6j)} \frac{1-g}{(1+2g)} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & \frac{4EI_y}{L_y} \frac{(1+3j)}{(1+2j)(1+6j)} \frac{2+g}{2(1+2g)} & 0 & \frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} \\ 0 & \frac{GI_y}{L_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_y}{L_y} & 0 \\ \frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{(1+2j)}{(1+2j)(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & 0 & \frac{12EI_y}{L_y^3} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & \frac{6EI_y}{L_y^2} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} & 0 & \frac{12EI_y}{L_y^3} \frac{1}{(1+6j)} \frac{1}{(1+2g)} \end{bmatrix}$$



## ***2.5 Análise Elástica Linear Considerando os Efeitos P-Δ e M-θ***

### ***2.5.1 Considerações gerais***

Em uma análise estrutural, quando as equações de equilíbrio são escritas em relação à geometria deformada da estrutura, a análise é classificada com análise em teoria de 2ª ordem. Este tipo de análise é sempre necessário para consideração da estabilidade das estruturas. Uma análise em teoria de 2ª ordem requer um procedimento iterativo por não se conhecer a geometria deformada da estrutura durante a formulação das equações de equilíbrio. A geometria deformada da estrutura obtida do cálculo anterior é usada com base para a formulação das equações de equilíbrio do cálculo atual.

### ***2.5.2 Efeito P-Δ***

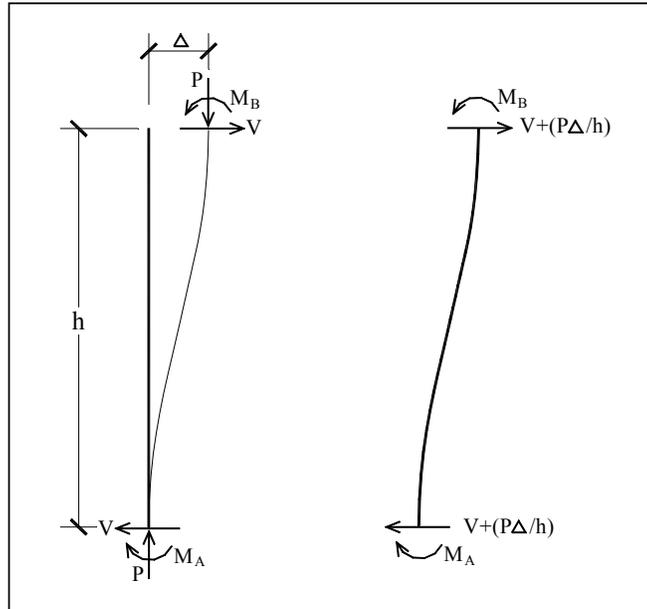
O efeito *P-Δ* se relaciona à atuação da força axial *P* nas barras, considerando o eixo deformado dessas barras para estabelecimento das equações de equilíbrio, ou seja, considerando o deslocamento transversal relativo ( $\Delta$ ) entre as extremidades, conforme Fakury [3]. O efeito da alteração da rigidez em função da força normal será desprezado devido à sua pequena influência na análise da maior parte das estruturas.

#### ***2.5.2.1 Processo simplificado***

A NBR 8800 [2], em seu Anexo L, recomenda a utilização de um processo simplificado para análise das estruturas em teoria de 2ª ordem. O processo leva em conta apenas o efeito *P-Δ*, desprezando o efeito da modificação de rigidez das barras causada pela força axial, e é conhecido com “Método da carga lateral equivalente”. Na barra da figura 2.31, para que seu equilíbrio seja satisfeito tem-se:

$$\begin{aligned}M_A &= -M_B + Vh + P\Delta \\M &= M_A + M_B = Vh + P\Delta \\M &= Vh + P\Delta \\M &= Vh + \left(\frac{P\Delta}{h}\right)h = \left(V + \bar{V}\right)h\end{aligned}\tag{2.35}$$

onde  $\bar{V} = \frac{P\Delta}{h}$  é força cortante fictícia ou equivalente. Sujeitando as barras às forças cortantes reais  $V$  junto com as forças cortantes fictícias  $\bar{V}$ , os momentos corretos nas extremidades da barra podem ser obtidos.

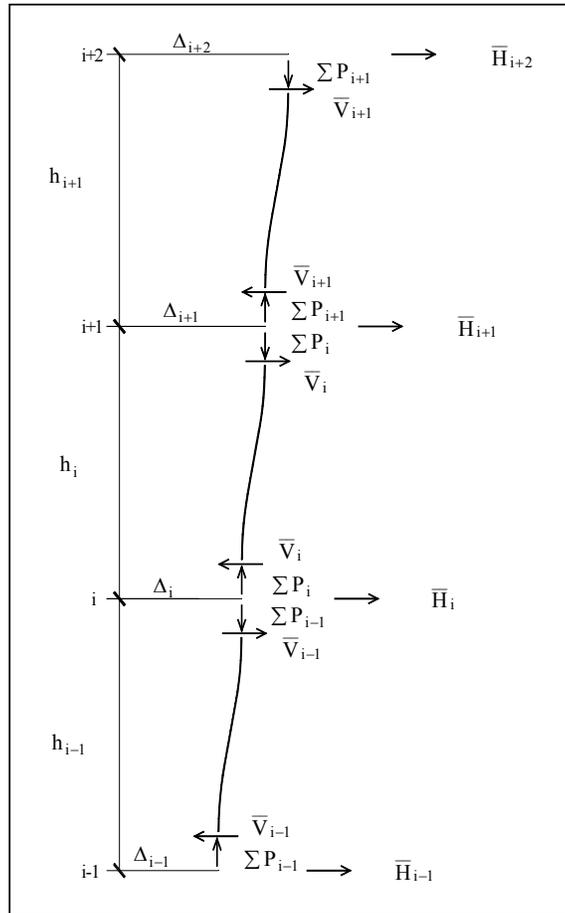


**Figura 2.31: Consideração do efeito  $P-\Delta$**

Os conceitos descritos podem ser estendidos a um edifício de vários andares como mostra a figura 2.32. Para isso a cortante fictícia do andar  $i$  é dada pela equação:

$$\bar{V} = \frac{\sum P_i}{h_i} (\Delta_{i+1} - \Delta_i) \quad (2.36)$$

onde  $\sum P_i$  é o somatório das forças normais nos pilares do andar  $i$ ,  $h_i$  é a altura do andar  $i$ ,  $\Delta_{i+1}$  e  $\Delta_i$  são deslocamentos horizontais dos andar  $i+1$  e  $i$ , respectivamente.



**Figura 2.32: Efeito  $P-\Delta$  para edifícios**

Para o caso onde são aplicadas somente cargas verticais, a NBR 8800 recomenda usar como deslocamentos horizontais iniciais aplicados ao nível de cada andar os valores das tolerâncias de montagem da estrutura. É necessário que os carregamentos de cálculo aplicados à estrutura em uma análise de 2ª ordem estejam em valores de cálculo, uma vez que não pode ser aplicado o princípio da superposição dos efeitos, e deve ser válida a teoria de pequenos deslocamentos.

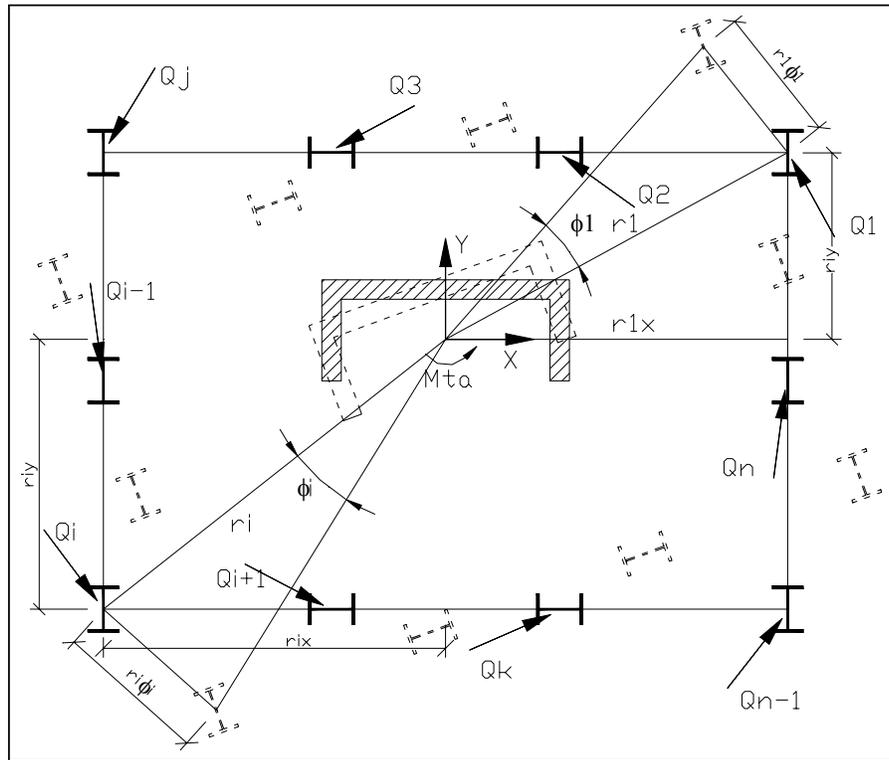
### 2.5.3 Efeito $M-\theta$

Para consideração do efeito  $M-\theta$ , Fakury [3] determinou a equação de equilíbrio ao momento de torção da estrutura deformada. Para isto, supôs que atua na estrutura inicialmente um momento de torção, simbolizado por  $M_t$ . A ação das forças normais nos

pilares, considerando a posição deformada da estrutura, ocasiona o aparecimento de um momento de torção adicional, representado por  $M_{ta}$ . O momento de torção total é dado por:

$$M_{tl} = M_{tl} + M_{ta} \quad (2.37)$$

A figura 2.33 mostra uma estrutura genérica, com a rotação  $\phi$  provocada pela solicitação de torção e as forças cortantes  $Q_i (i=1, 2, \dots, n)$  nos pilares  $P_i$  causadas pela atuação das forças normais sobre eles.



**Figura 2.33: Forças cortantes decorrentes das forças normais nos pilares**

Estas forças cortantes têm direções normais aos segmentos  $r_i$  que unem o centro de torção da estrutura aos pilares, e seus sentidos são apresentados na figura. Seus valores são:

$$Q_i = \frac{P_i}{h_i} (\phi_k - \phi_{k-1}) r_i \quad i = 1, 2, \dots, NCNO \quad k = 1, 2, \dots, NA \quad (2.38)$$

onde:

$NCNO$  = número cumulativo de nós no andar;

$NA$  = número de andares;

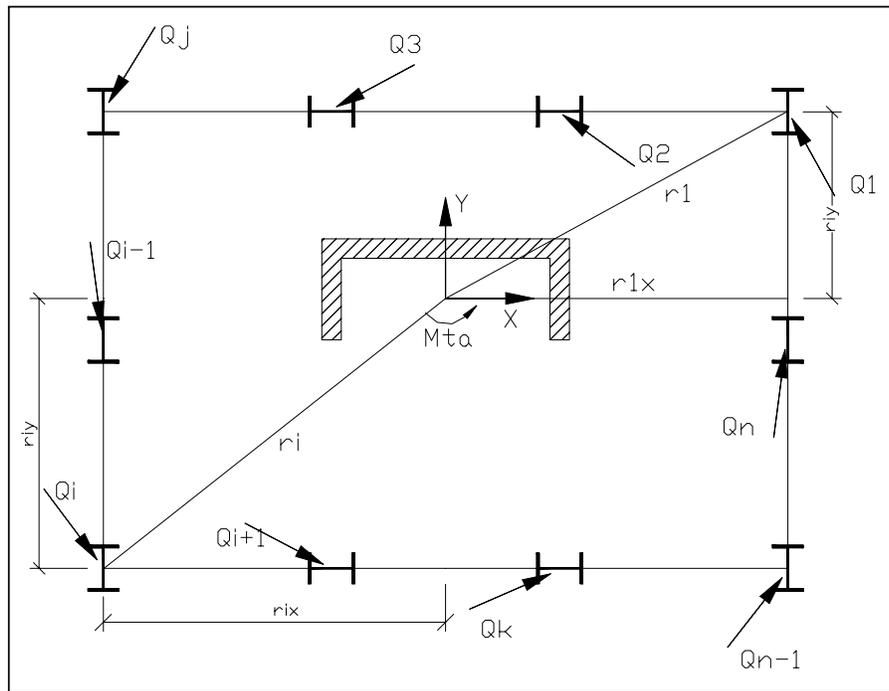
$$r_i = \sqrt{r_{xi}^2 + r_{yi}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

Portanto o momento de torção adicional causado pelas forças cortantes  $Q_i$ , na estrutura indicada na figura 2.34, é dado por:

$$M_{ta} = \left[ \sum_{i=1}^n Q_i r_i \right] \quad (2.39)$$

O momento de torção total é dado por:

$$M_t = M_{tl} + M_{ta} \quad (2.40)$$



**Figura 2.34: Momento de torção adicional na estrutura**

Pode ser complicada a determinação exata da posição do centro de cisalhamento. Uma maneira prática e eficaz de se chegar ao mesmo é a aplicação de ações horizontais nas direções X e Y, alterando-se as posições dessas ações até que não ocorra rotação do diafragma rígido. O ponto de interseção das direções finais de X e Y é o centro de cisalhamento.

## 3 PROGRAMA DE ANÁLISE

### 3.1 Considerações Iniciais

O programa foi desenvolvido e compilado em linguagem Delphi, versão 4, para sistema Windows, a partir de uma rotina em linguagem Fortran para análise de edifícios altos, feita por Ribeiro [6], onde se admitem arranjos estruturais formados por associação tridimensional de pórticos espaciais retangulares e paredes estruturais.

Deu-se o nome ESTED 1.0 ao programa, que se tornou mais dedicado ao tratamento de estruturas de edifícios altos com estruturas metálicas, devido a algumas particularidades. Foi criada uma interface amigável que facilita a entrada de dados e torna fácil a visualização de erros.

A entrada de dados só é necessária para andares que possuem projeção em planta diferente. Para facilitar a visualização de possíveis erros na entrada de dados, o programa apresenta desenhos das plantas dos diversos pavimentos diferentes e de todas as elevações. A saída de dados consiste dos deslocamentos de corpo rígido dos diafragmas e opcionalmente, dos esforços solicitantes de cada tipo dos diversos elementos componentes da estrutura.

Além de pórticos espaciais retangulares e paredes estruturais, o programa contém rotinas para consideração de barras diagonais de contraventamento como sistema de estabilidade lateral da estrutura. Estas barras são consideradas como barras de treliça espacial resistindo somente a esforços axiais, como descrito no capítulo anterior. O programa oferece as opções de se considerar a barra tracionada e comprimida ou somente a barra tracionada, como é usual na prática em contraventamento em  $X$ .

Introduziram-se rotinas para considerar a contribuição das alvenarias na estabilidade da estrutura, desenvolvidas conforme a formulação do capítulo anterior. No programa existe um módulo que faz a análise da alvenaria via método dos elementos finitos, encontrando a

largura da diagonal contribuinte de mesmo material da alvenaria e em seguida transformando-a em uma barra de aço equivalente. Esta barra é considerada como a barra diagonal de contraventamento, vista anteriormente, com a diferença de só resistir esforços axiais de compressão, conforme mostrado no capítulo anterior.

Acrescentaram-se rotinas para calcular e considerar a rigidez de ligações usuais no comportamento da estrutura. Esta rotina foi desenvolvida segundo a formulação apresentada no capítulo anterior. Escolhido um tipo de ligação para a extremidade da viga, é calculada sua rigidez que será utilizada para montagem da matriz de rigidez de vigas com conexões elásticas, como mostrado no capítulo anterior. O programa admite também a consideração das ligações como sendo perfeitamente rígidas, perfeitamente flexível ou entrar com o valor da rigidez da ligação determinada previamente.

Acrescentaram-se ainda rotinas que permitem fazer análise simplificada de 2<sup>a</sup> ordem, considerando os efeitos  $P-\Delta$  e  $M-\theta$  conforme mostrado anteriormente. A degenerescência da rigidez devida a força normal foi desprezada devida a sua pequena influência na análise, na maioria das situações práticas.

Os carregamentos na estrutura admitidos pelo programa são: forças aplicadas no centro de rotação da estrutura nas direções horizontais X e Y, e momento em torno do eixo vertical, cargas verticais aplicadas nos nós da estrutura e cargas uniformemente distribuídas nas vigas na direção vertical.

### ***3.2 Numeração dos Nós do Andar***

Na entrada de dados do andar da estrutura caracterizam-se o nós, que são definidos como os pontos de interseção entre vigas e pilares ou um centro de cisalhamento de uma parede estrutural. Todas as coordenadas da estrutura serão definidas pelos nós da mesma.

O sistema global de coordenadas será caracterizado por um sistema cartesiano de eixos globais XYZ, perpendiculares entre si, sendo tomados de forma que o plano XY contenha o andar do edifício, em planta, em seu primeiro quadrante ou quadrante definido pelos

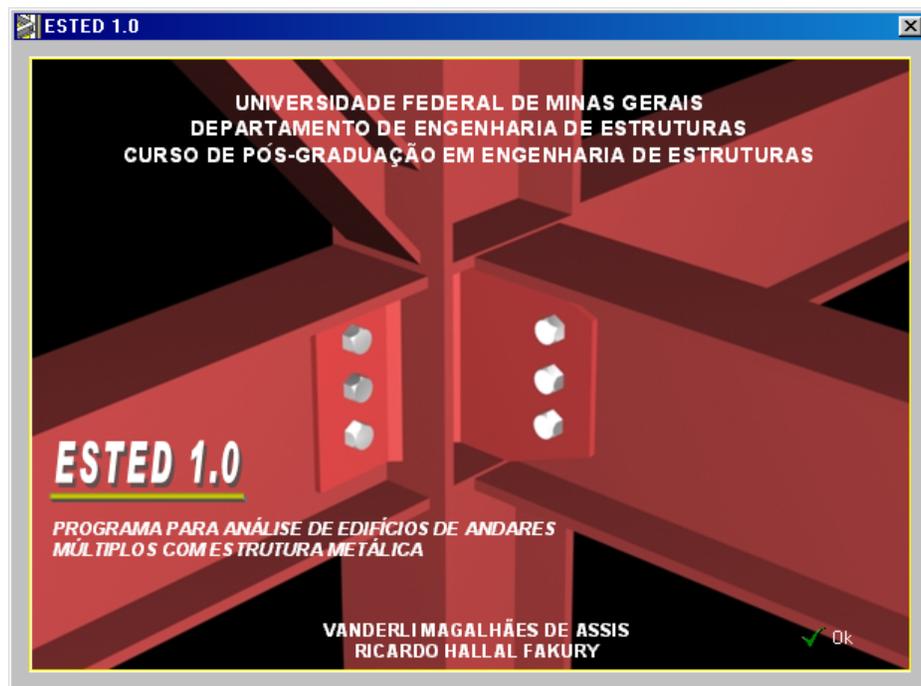
valores positivos de  $X$  e  $Y$ , o eixo  $Z$  seja normal ao plano definido pelos eixos  $XY$  e definido a partir da base e ao longo da altura do edifício.

A partir do sistema de eixos globais  $XYZ$  definem-se os nós do andar numerados, seqüencialmente, a partir da primeira prumada de pilares e segundo o semi-eixo  $X$ , para em seguida numerarem-se os nós referentes à segunda prumada de pilares paralela ao semi-eixo  $X$  e por fim, após ter-se numerado os nós de todas as prumadas de pilares, numeram-se os nós relativos às paredes estruturais, como mostra a figura 2.1.

### ***3.3 Apresentação da Interface do Programa***

#### ***3.3.1 Tela inicial***

A figura 3.1 mostra a tela de abertura do programa, que contém sua identificação.



**Figura 3.1: Tela inicial do programa**

### 3.3.2 Tela principal

A figura 3.2 mostra a tela principal do programa onde se apresenta o “menu” e as barras de ferramentas.

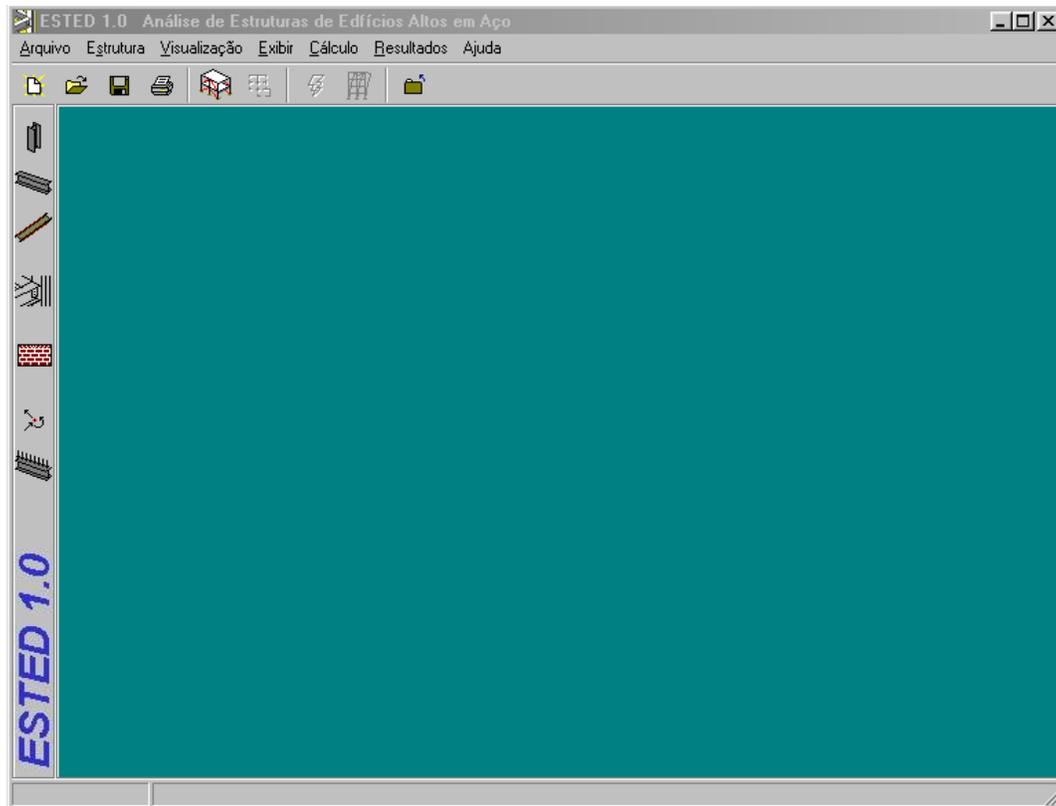


Figura 3.2: Tela principal do programa

As opções do menu são:



No menu arquivo encontram-se as opções:

- *Nova Estrutura*: o programa inicia a entrada de dados com os campos limpos;
- *Abrir Estrutura*: o programa abre um arquivo de entrada de dados em formato de documento de texto (.txt), que deve ter sido gerado anteriormente;

- *Salvar*: se o arquivo ainda não foi salvo, esta opção abre a caixa de diálogo “*Salvar Como*” padrão do Windows, caso contrário, esta opção atualiza o arquivo. O programa salva arquivos em forma de texto com extensão *txt*, que pode ser editado por qualquer processador de texto;
- *Salvar Como*: esta opção chama uma caixa de diálogo “*Salvar Como*”, padrão do Windows, como se vê na figura 3.3, onde o usuário escolhe o diretório e o nome para salvar o arquivo;
- *Imprimir Relatório*: apresenta uma caixa de diálogo imprimir padrão do Windows, para imprimir o relatório completo apresentado pelo programa;
- *Fechar*: Fecha o programa.

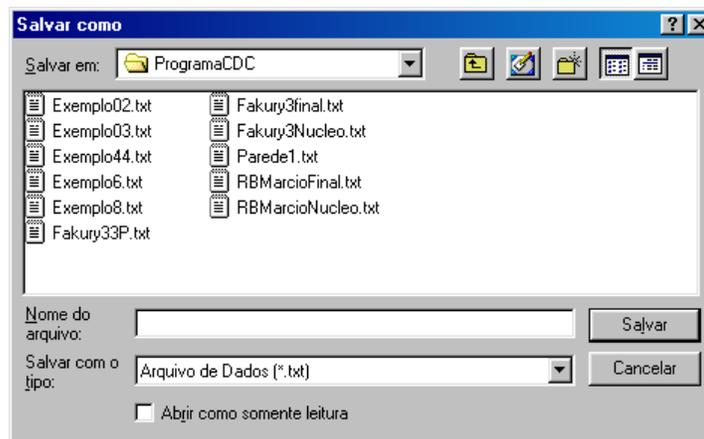
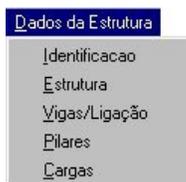


Figura 3.3: Quadro de diálogo “Salvar como” padrão do Windows



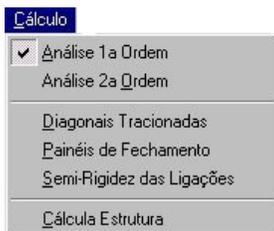
O menu Dados da Estrutura permite acessar os módulos de dados dos diversos elementos da estrutura e suas opções são:

- *Identificação*: mostra o módulo da identificação da estrutura (neste momento o usuário entra com a identificação, data, informações da geometria, propriedades dos materiais e opções de saída de dados);
- *Estrutura*: mostra o módulo de definição dos comprimentos dos vãos do edifício e ainda de altura e dos tipos dos andares;

- *Vigas/Ligação*: mostra o módulo para entrada das propriedades geométricas das vigas e escolha do tipo de ligação em suas extremidades. Para edifícios que possuem vários andares com plantas diferentes, haverá tantos deste módulo quantos forem o número de andares diferentes;
- *Pilares*: mostra o módulo para entrada das coordenadas dos nós que serão omitidas da estrutura básica, formada pelos eixos nas direções  $X$  e  $Y$ . Os nós que não forem omitidos ou de coordenadas de paredes serão tomados como sendo nós típicos de pilares e suas propriedades geométricas serão exigidas neste módulo. Da mesma forma que a opção anterior, haverá tantos deste módulo quantos forem o número de andares diferentes;
- *Ações*: está opção mostra o módulo para entrada de dados das ações horizontais atuantes nos diafragmas de todos os andares e para entrada de forças verticais aplicadas nos nós e uniformemente distribuídas nas vigas de direções  $X$  e  $Y$ .



O menu *Visualização* permite visualizar a planta dos vários níveis diferentes da estrutura, a partir daí pode-se ter a elevação de todos os pórticos nas direções  $X$  e  $Y$ .

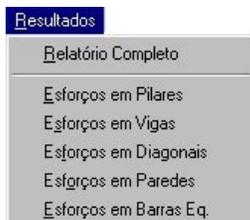


O menu *Cálculo* oferece as varias opções e considerações a serem levadas em conta na análise, tais como:

- *Análise em 1ª Ordem*: faz análise de 1ª ordem. Neste bloco as opções são exclusivas, ou seja, só permite a seleção de uma das opções;
- *Análise em 2ª Ordem*: faz análise em 2ª ordem através da consideração dos efeitos  $P-\Delta$  e  $M-\theta$ ,
- *Diagonais Tractionadas*: se esta opção estiver selecionada, as barras diagonais de contraventamento estarão submetidas somente à tração, caso contrário, estarão

submetidas à tração e compressão. Neste bloco as opções não são exclusivas, ou seja, permite a seleção de quaisquer opções;

- *Painéis de Fechamento*: esta opção permite levar em conta a contribuição dos painéis de fechamento na análise;
- *Semi-Rigidez das Ligações*: esta opção permite levar em conta a contribuição da semi-rigidez das ligações na análise.



O menu *Resultados* oferece várias opções de saída de relatório:

- *Relatório completo*: emite um relatório que contém todos os dados de deslocamentos de corpo rígido dos diafragmas e esforços solicitantes em todos os elementos existentes na estrutura;
- *Esforços em Pilares, Vigas, Diagonais, Paredes e nas Barras Equivalentes às Alvenarias*: caso alguma opção deste segundo bloco seja selecionada, o programa irá gerar um relatório que contém, além dos deslocamentos dos diafragmas, os esforços solicitantes apenas nos elementos selecionados.



O menu *SobreESTED* exhibe as opções de ajuda e apresentação da tela inicial do programa

Através das barras de ferramentas, que se encontram na lateral da tela principal, também se pode acessar os módulos para entrada de dados, visualização da estrutura e saída de dados. Estas barras estão personalizadas com desenhos que representam suas funções.

### ***3.4 Formulários de Entrada de Dados***

#### ***3.4.1 Dados de identificação***

O módulo de identificação mostrado na figura 3.4 permite ao usuário identificar a estrutura a ser analisada com título, número e data, que serão incluídos no relatório de saída.

Em seguida, deve-se entrar com o número de vãos nas direções  $X$  e  $Y$ , número de andares, número de paredes de concreto que compõem os núcleos de escadas e poços de elevadores, número de pórticos contraventados com barras diagonais. Para a análise não é necessário entrar com unidades, bastando apenas usar os dados coerentemente, isto é, se os comprimentos dos vãos e altura dos andares, estão sendo fornecidos em metro, então as propriedades geométricas devem ser dadas com o metro como unidade de comprimento e as cargas distribuídas em unidade de força por metro, conseqüentemente, os resultados de deslocamento serão dados em metro, os esforços solicitantes na unidade força utilizada e metro. Os desenhos serão cotados na unidade de comprimento usada.

As propriedades geométricas das vigas e pilares devem ser fornecidas obrigatoriamente e as propriedades do material da parede de concreto se ativam quando se fornecer o número de parede diferente de zero. Caso existam painéis de fechamento, as propriedades do seu material serão solicitadas posteriormente.

As opções de saída de dados devem ser ativadas para que os resultados dos esforços nos elementos ativos sejam escritos no relatório.

**Dados iniciais do edifício**

**Dados do Projeto**

Título:

Número:

Data:

**Dados do Edifício**

Número de vãos na direção X

Número de vãos na direção Y

Número de andares

Número de paredes de concreto

Número de pórticos contraventados

Unidades para desenho:  m  cm  mm

**Propriedades do Material de Pilares e Vigas**

$E_a$   Módulo de elasticidade longitudinal

$G_a$   Módulo de elasticidade transversal

**Propriedades do Material de Paredes**

$E_d$   Módulo de elasticidade longitudinal

$G_d$   Módulo de elasticidade transversal

**Saída de Dados**

Escreve saída de dados das vigas

Escreve saída de dados dos pilares

Escreve saída de dados das paredes

Escreve saída de dados das barras diagonais

**Figura 3.4: Identificação da estrutura**

### 3.4.2 *Dados da geometria*

Os dados da geometria são os comprimentos dos vãos na direção  $X$  e  $Y$ , a altura e o tipo dos andares indicados na figura 3.5. As unidades devem ser as mesmas indicadas anteriormente e o programa admite no máximo seis pavimentos com plantas diferentes.

**Dados do edifício**

Comprimento dos Vãos na Direção X

Vãos	Comprimento
1	10
2	5
3	5
4	10

Comprimento dos Vãos na Direção Y

Vãos	Comprimento
1	10
2	2
3	2
4	6

Altura dos Andares

Andar	Altura	Tipo
20	3.3	1
19	3.3	1
18	3.3	1
17	3.3	1
16	3.3	1
15	3.3	1
14	3.3	1
13	3.3	1
12	3.3	1
11	3.3	1
10	3.3	2
9	3.3	2

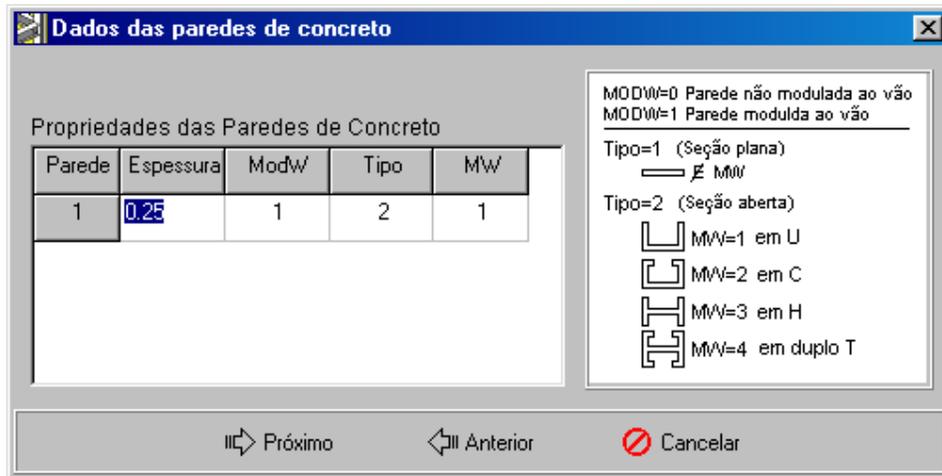
OBS: Aditem-se no máximo 6 pavimentos diferentes

Próximo Anterior Cancelar

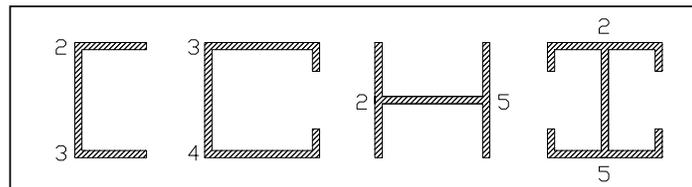
**Figura 3.5: Dados da geometria da estrutura**

### 3.4.3 *Dados das paredes de concreto*

As paredes de concreto tratadas neste trabalho são as mostradas no capítulo anterior e na figura 3.6. Os dados referentes às parede são as espessuras, se ela é modulada ao vão ou não, o tipo de seção, se é plana ou tem seção aberta e se aberta, qual a forma da seção (*U*, *C*, *H* ou duplo *T*), conforme a figura 3.7.



**Figura 3.6: Dados das paredes de concreto**



**Figura 3.7: Nós de vértices no sentido anti-horário**

Após estas indicações, o próximo formulário indicado na figura 3.8 vai indicar os campos em que se devem colocar os índices de coordenadas da parede. Para cada tipo de parede, os nós de referência são diferentes.

**Dados das paredes de concreto**

Coordenadas de Paredes

Parede	I1	J1	I2	J2	I3	J3	I4	J4	I5	J5	W
1		.	3	3	2	3	.	.	.	.	.

Propriedades de Paredes em 'C'

Parede	CW	IL	JL	LINTX(I,L,JL)	LINTY(I,L,JL)

Dados de Paredes não Moduladas

Parede	BW	HW	XCCW	YCCW	DHW	DBW

Dados de Paredes 'H', Moduladas

Parede	ZW	M1	N1	M2	N2	LINTX(M1,N1)	LINTX(M2,N2)	LINTY(M1,N1)	LINTY(M2,N2)

Próximo Anterior Cancelar

**Figura 3.8: Dados das paredes de concreto**

### 3.4.4 *Dados das vigas*

Os dados referentes às vigas são código de incidência e propriedades geométricas, como indica a figura 3.9. A incidência é dada para cada nó de índice  $(i,j)$ , devendo-se colocar a incidência  $0$  ou  $1$  na direção  $X$  e  $Y$ . A incidência  $0$  indica que não existe viga nesta direção e  $1$ , que existe viga. A medida que a incidência das vigas vai sendo colocada, o registro de propriedades das vigas vai sendo atualizado.

Em seguida entra-se com os momentos de inércia à flexão e à constante de torção. Na terceira coluna deve-se indicar o tipo de ligação. Para isto basta clicar em qualquer célula desta coluna e serão mostradas todas as opções de ligações existentes no programa. As propriedades e tipos de ligações são dados separadamente para vigas na direção  $X$  e direção  $Y$ . Os dados acima serão pedidos quantas vezes forem o número de andares diferentes, em módulos subseqüentes.

**Propriedades das vigas do andar Tipo 2**

Incidência de Vigas nas Direções X e Y			Inércia das Vigas na Direção X						Inércia das Vigas na Direção Y					
Nó	Inc. X	Inc. Y	Nó	Iflexão	Itorção	Área	Ffx	Lig.	Nó	Iflexão	Itorção	Área	Ffx	Lig.
(1,1)	1	1	(1,1)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9	(1,1)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9
(1,2)	0	1	(1,5)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9	(1,2)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9
(1,3)	0	1	(2,1)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9	(1,3)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9
(1,4)	0	1	(2,4)	0	0	0	0	9	(1,4)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9
(1,5)	1	0	(2,5)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9	(2,2)	0	0	0	0	9
(2,1)	1	0	(3,1)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9	(2,3)	0	0	0	0	9
(2,2)	0	1	(3,4)	0	0	0	0	9	(4,2)	0	0	0	0	9
(2,3)	0	1	(3,5)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9	(4,3)	0	0	0	0	9
			(4,1)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9	(5,1)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9
			(4,5)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9	(5,2)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9
									(5,3)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9
									(5,4)	0.001023	3.72E-6	0.0202	2	9

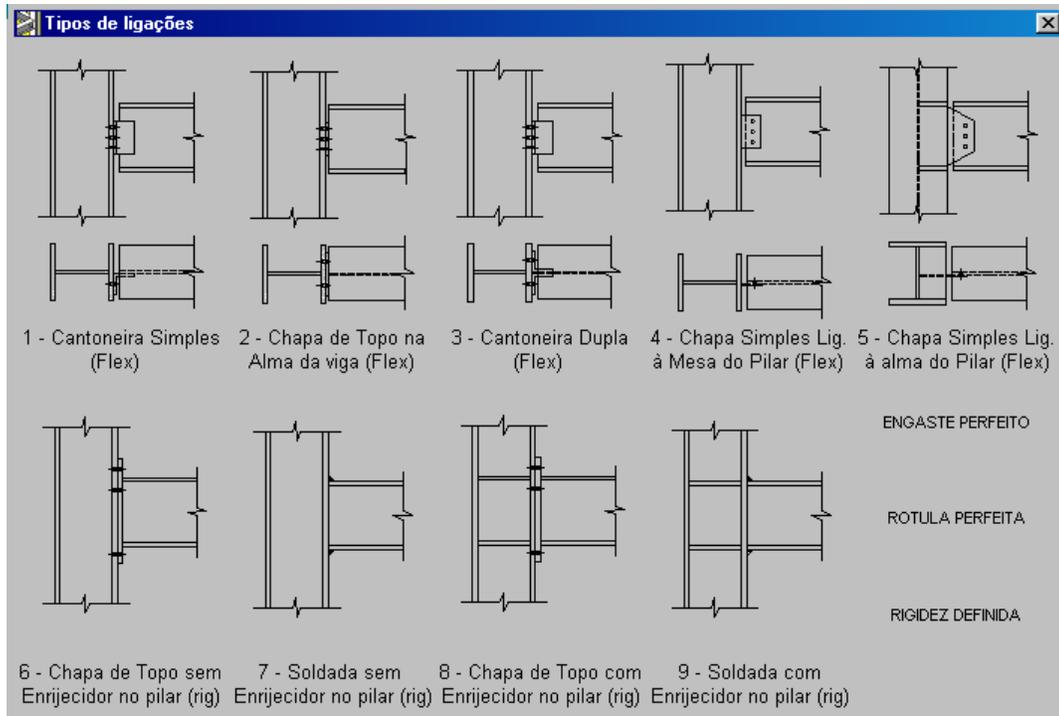
Incidência em X e Y			
P(1,2)	In.Y=0	In.X=1	P(2,2)
P(1,1)	In.X=1	In.Y=1	P(2,1)
			In.X=0
			In.Y=1

Próximo Anterior Cancelar

**Figura 3.9: Dados das vigas da estrutura**

### 3.4.5 Tipos de ligações viga-pilar

Os tipos de ligações existentes no programa, mostrados na figura 3.10, são os mais usuais, oferecendo ainda opções de se colocar engaste perfeito (rigidez infinita), rótula perfeita (rigidez nula), e ainda uma outra ligação, cuja rigidez deve ser previamente conhecida. Para seleccionar qualquer destas ligações basta clicar sobre o botão indicativo da ligação.



**Figura 3.10: Tipos de ligações nas extremidades das vigas**

### 3.4.6 *Semi-rigidez de ligações flexíveis*

Nas opções de ligação mostradas na figura 3.10, se for escolhida uma das ligações flexíveis, deverá ser fornecido, no módulo indicado na figura 3.11, os parâmetros necessários para o cálculo da sua rigidez. Para cada tipo de ligação são exigidos parâmetros diferentes. Ao ser calculada, a rigidez será mostrada na tela e para aceitá-la, basta clicar 'OK'. Se for escolhida a ligação e não for calculada sua rigidez, não será possível levar em consideração a semi-rigidez das ligações na análise, mas caso seja calculada, a semi-rigidez pode ou não ser levada em consideração. Se não for, o programa tomará as ligações flexíveis como rótulas perfeitas e as rígidas como engastes perfeitos. Todos os dados relacionados à rigidez das ligações deverão ser dados em centímetro, independente da unidade de comprimento utilizada anteriormente. A opção de considerar ou não a semi-rigidez na análise se encontra nas opções de cálculo.

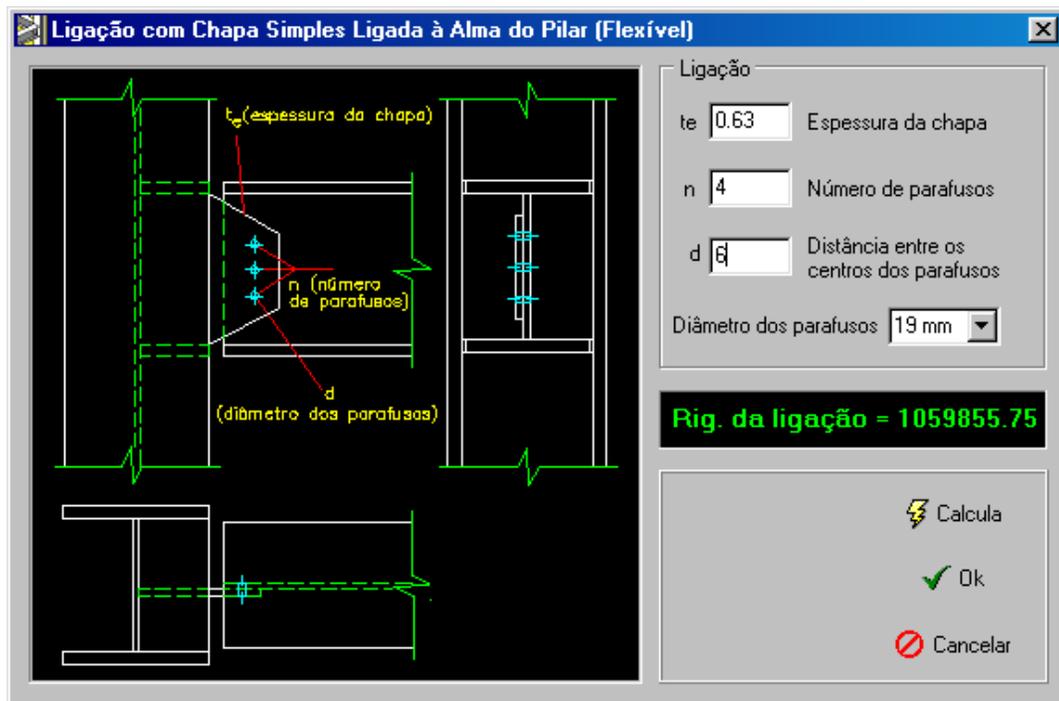


Figura 3.11: Parâmetros para cálculo da rigidez de ligações flexíveis

### 3.4.7 *Semi-rigidez de ligações rígidas*

Da mesma forma que as ligações flexíveis, ao escolher quaisquer das ligações rígidas, será mostrada a tela da figura 3.12 para entrada dos parâmetros.

Para ligações com chapa de topo, será necessário o parâmetro ‘ $a$ ’ que é obtido, segundo o ENV 1993 [17] através de ábaco. Para isto basta clicar no campo referente a ‘ $a$ ’, no segundo bloco e será mostrado o ábaco da figura 3.13. Para vigas de extremidades, deve-se utilizar a primeira configuração de nó. Para cálculo e aceitação dos resultados, procede-se da mesma forma descrita para as ligações flexíveis.

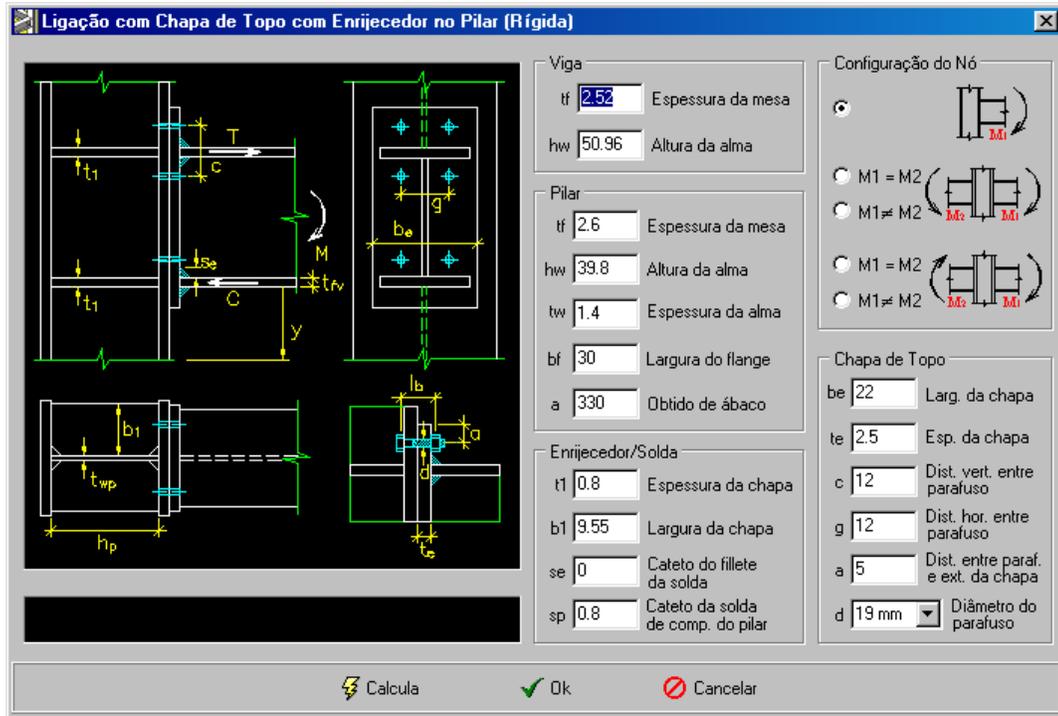


Figura 3.12: Parâmetros para cálculo da rigidez de ligações rígidas

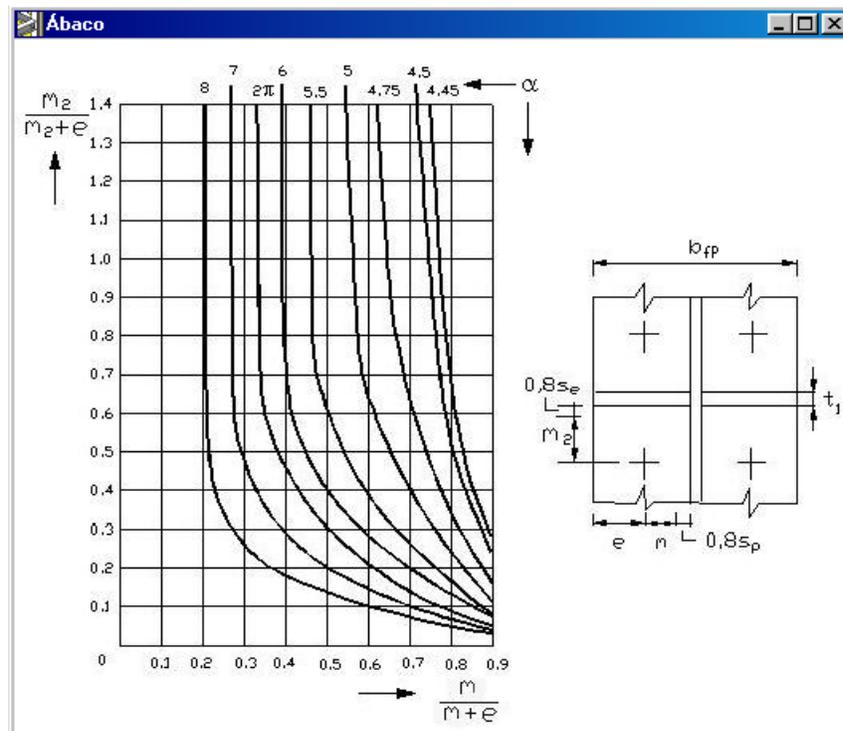


Figura 3.13: Ábaco com valores do parâmetro 'α'

### 3.4.8 Dados dos pilares

Os dados referentes a pilares são os nós a omitir e propriedades geométricas. O nós a omitir são os índices dos nós que fazem parte do retângulo básico formados pelos vãos em  $X$  e  $Y$ , que não integram a estrutura. As propriedades geométricas são dadas sempre referentes aos eixos da estrutura, conforme mostra a figura 3.14.

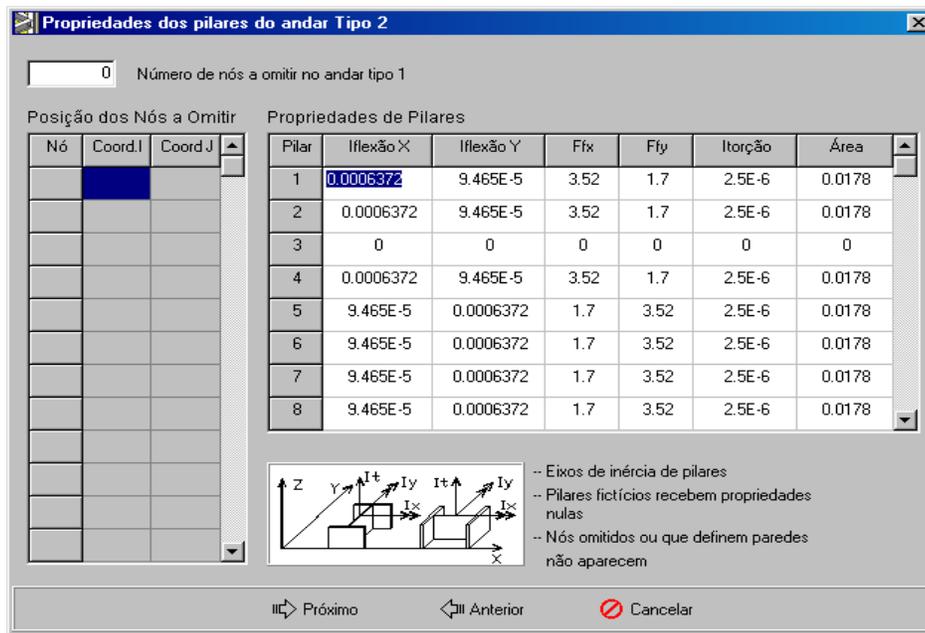


Figura 3.14: Dados dos pilares e dos nós a omitir da estrutura

### 3.4.9 Dados das barras diagonais

Para definir os dados referentes a barras diagonais indicados no módulo da figura 3.15, é necessário o número de barras diagonais existentes em cada pavimento diferente. A partir do número de barras, deverão ser colocadas na primeira linha, referente à barra, a coordenada ( $X$  e  $Y$ ) do nó inicial, ou seja o nó inferior da barra, e na terceira célula a área da barra na unidade corrente. Na segunda linha referente à mesma barra, deve ser colocada a coordenada ( $X$  e  $Y$ ) do nó final da barra, ou seja o nó superior. Ao selecionar a opção “Atualizar” as barras serão acrescentadas à estrutura e poderão ser visualizadas nas representações em planta e nas elevações.





### 3.4.11 Visualização

A planta da estrutura, como se vê na figura 3.18, será mostrada assim que forem fornecidos todos os dados referentes à geometria e aos elementos. A barra de ferramentas deste formulário permite acessar os formulários e apagar o registro das barras diagonais e das alvenarias.

Para visualizar as elevações dos pórticos, deve-se clicar com o botão direito sobre a planta e escolher um dos pórticos numerados. A numeração dos pórticos é feita de forma que os pórticos paralelos ao eixo  $X$  recebam o nome  $PX$  mais o número da linha horizontal que representa a posição do pórtico na estrutura em planta. Da mesma forma, os pórticos paralelos ao eixo  $Y$  recebem o nome  $PY$  mais a posição da coluna na estrutura em planta. Para estruturas que possuem mais que um pavimento diferente, o programa mostra a numeração dos andares como  $Tipo1, \dots, TipoN$ . O desenho em planta de qualquer destes andares pode ser visto clicando sobre seu botão. O andar cuja planta está representada fica com a fonte na cor vermelha.

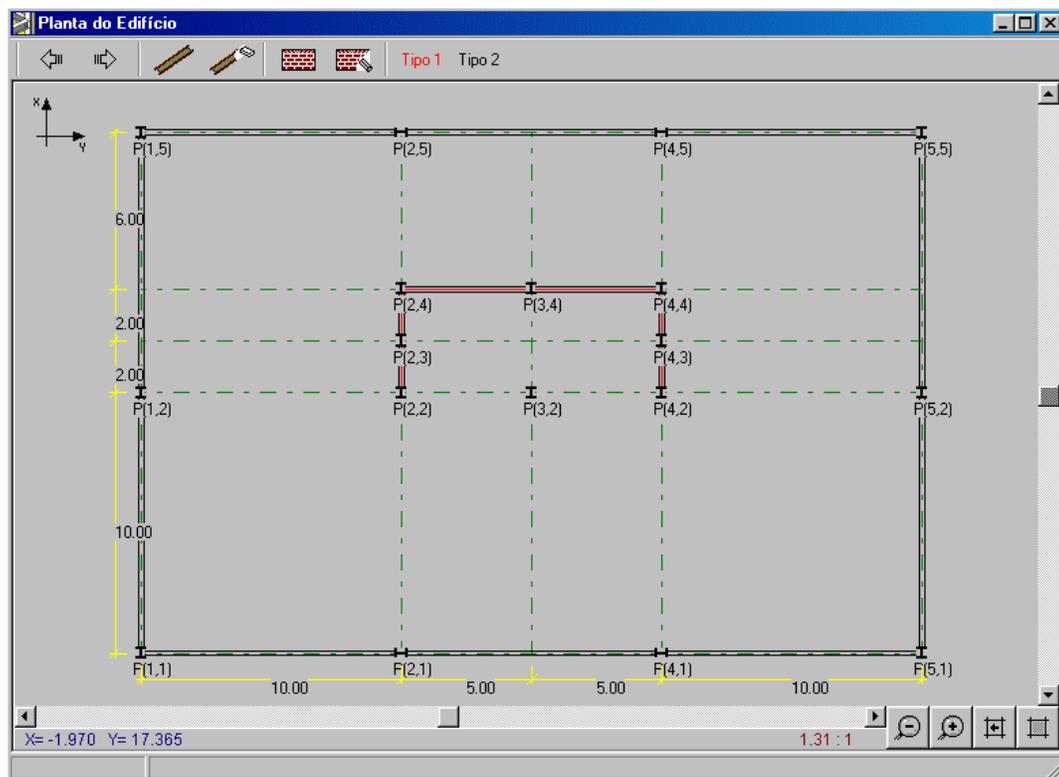
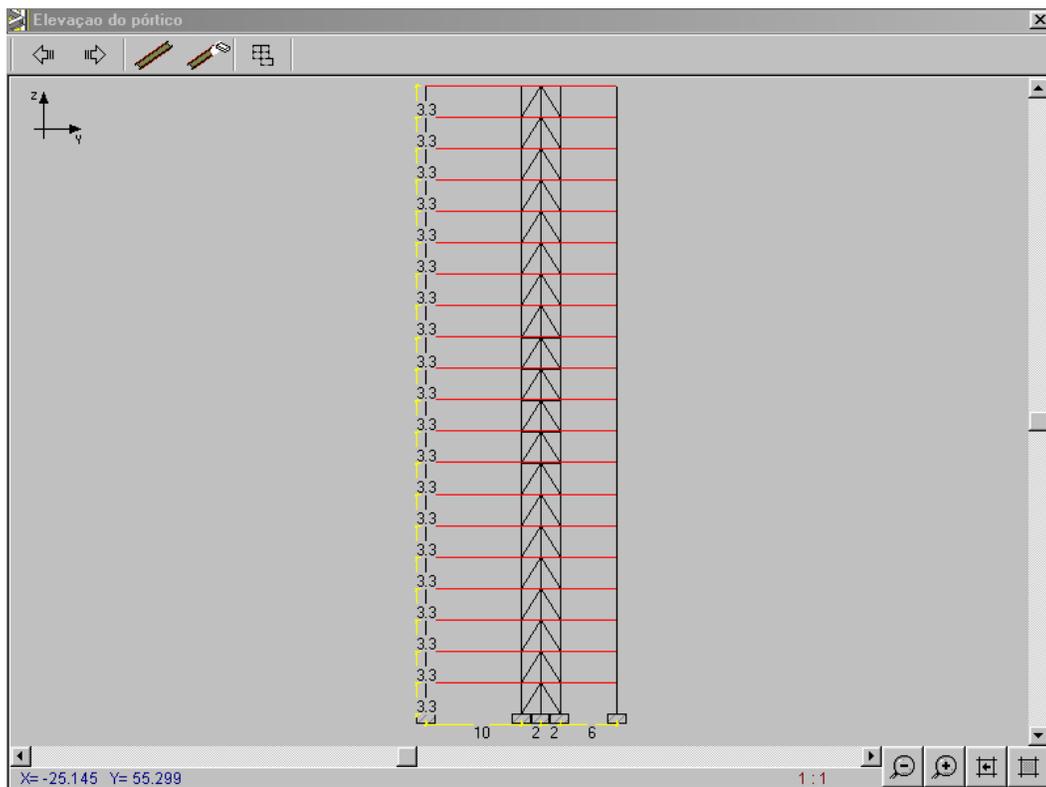


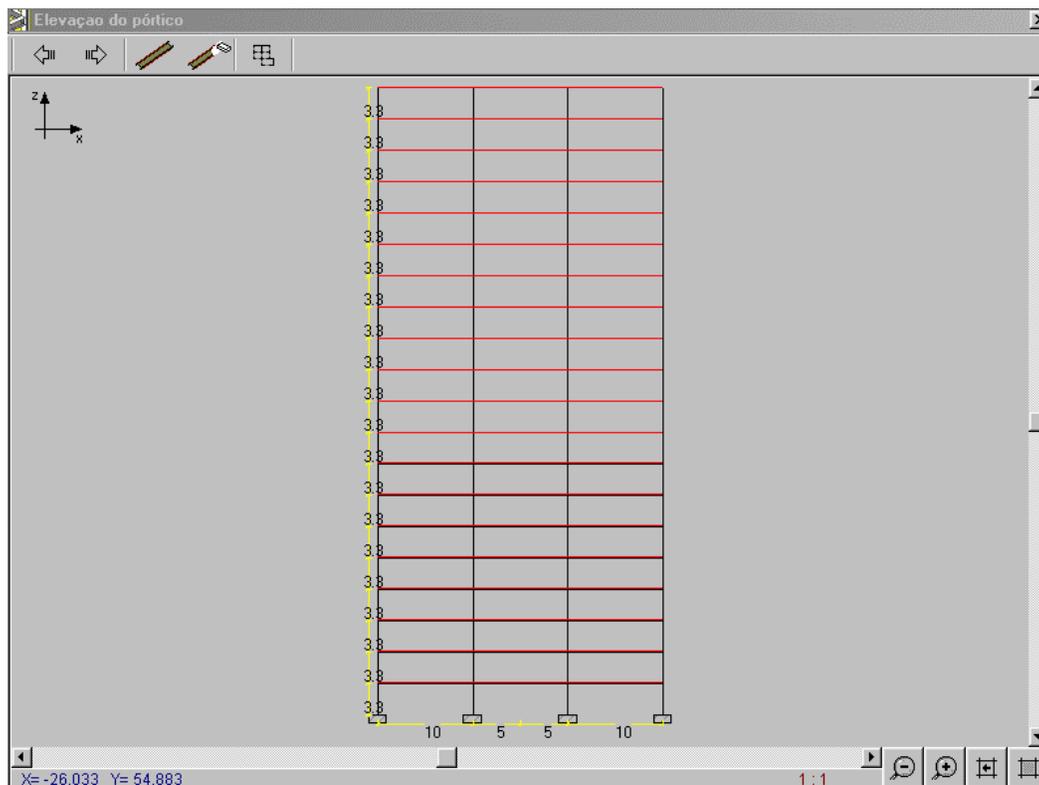
Figura 3.18: Planta do pavimento tipo 1 do edifício

Os desenhos representados dispõem de um amplo recurso de "zoom", permitindo visualizar detalhes que sejam de interesse do usuário.

A linha verde tracejada no desenho representa as linhas de eixo da estrutura, a preta representa as vigas e os pilares, a vermelha representa as barras diagonais, os retângulos cianos hachurados representam as alvenarias e os retângulos azuis representam as paredes de concreto. Nas elevações como mostra a figura 3.19, a cor vermelha representa as lajes.



**Figura 3.19: Elevação de um pórtico na direção Y**



**Figura 3.20: Elevação de um pórtico na direção X**

### **3.4.12 Dados das ações**

As ações laterais aplicadas ao diafragma podem ser forças nas direções dos eixos  $X$  e  $Y$  e momento em relação ao eixo  $Z$ . Estas ações são aplicadas no centro de gravidade dos diafragmas. Devem ser fornecidos ainda, para cada andar diferente, o número de nós carregados e o número de vigas carregadas nas direções  $X$  e  $Y$ .

Os esforços que podem ser aplicadas nos nós são: momento em relação aos eixos horizontais e força em relação ao eixo vertical. Para cada nó carregado deve-se fornecer seus índices de coordenadas e as ações atuantes.

Para as vigas, só podem atuar ações verticais uniformemente distribuídas ao longo de toda barra. A viga é definida pelos índices de coordenadas, e o nó define a viga que está acima ou a sua direita, conforme estabelecido na incidência das vigas.

Caso existam forças concentradas nas vigas, pode-se transformá-las em cargas nodais utilizando o artifício de gerar pilares de propriedades geométricas nulas nestes nós.

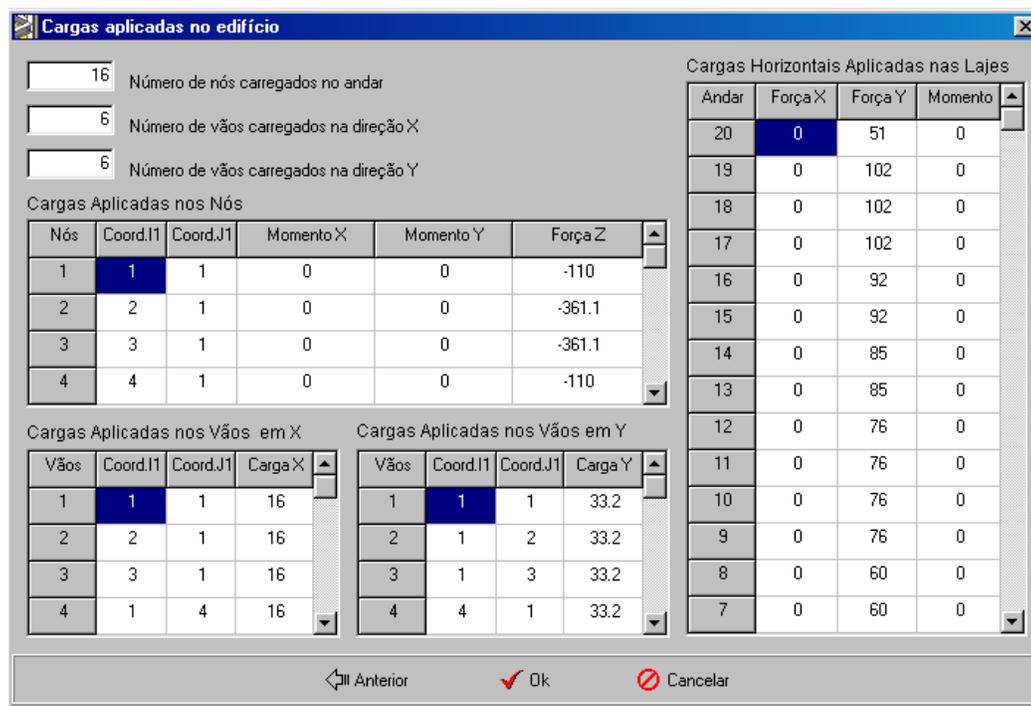


Figura 3.21: Cargas aplicadas no diafragma rígido, nós e vigas

### 3.4.13 Opções de análise

A análise pode ser feita em teoria de primeira ou de segunda ordem, para isso, basta ativar o tipo de análise desejada, mostrado na figura 2.22. As considerações da contribuição das alvenarias e da semi-rigidez das ligações na estabilidade da estrutura pode ser feita ativando estas opções e ainda, pode-se considerar as barras diagonais como sendo resistentes somente à tração, ativando esta opção, e a deformação por cisalhamento.

Depois da análise feita, o programa gera um relatório com os deslocamentos dos diafragmas, referentes ao seu centro de gravidade, e os esforços solicitantes nos elementos escolhidos anteriormente.

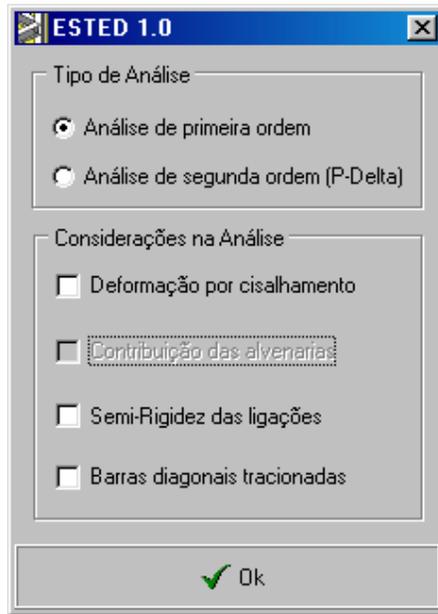


Figura 3.22: Tipos de análise e considerações

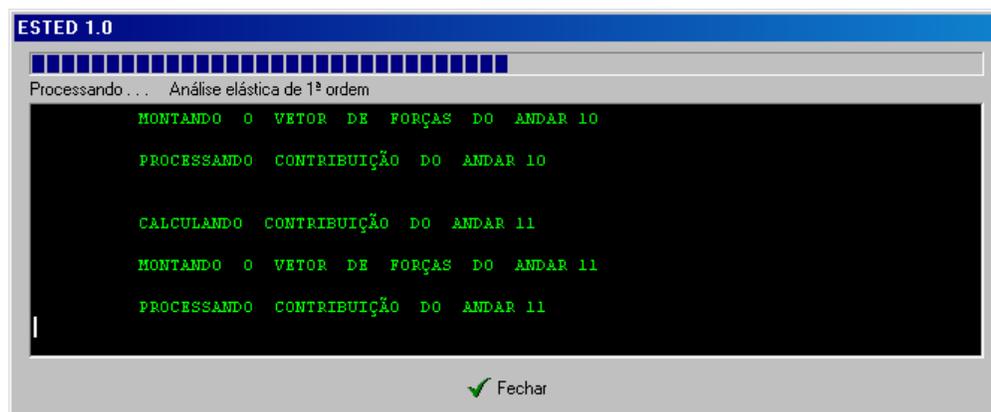


Figura 3.23: Mostra o progresso da análise

### 3.4.14 Relatórios de saída

Os deslocamentos de corpo rígido dos diafragmas podem ser visualizados e impressos separadamente pelo programa como mostra a figura 2.24. Os elementos em que se desejam obter os esforços solicitantes devem ser ativados na identificação da estrutura. Depois de processada a estrutura, um relatório completo é feito em arquivo texto, salvo no diretório em que o programa estiver rodando. Este arquivo pode ser carregado pelo próprio programa ou por qualquer processador de texto, como mostra a figura 2.25.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
 DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS  
 CURSO DE POS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**ESTED 1.0**  
*Programa para análise de edifícios altos com estruturas metálicas*  
 Vanderli Magalhães de Assis  
 Ricardo Hallal Fakury

---

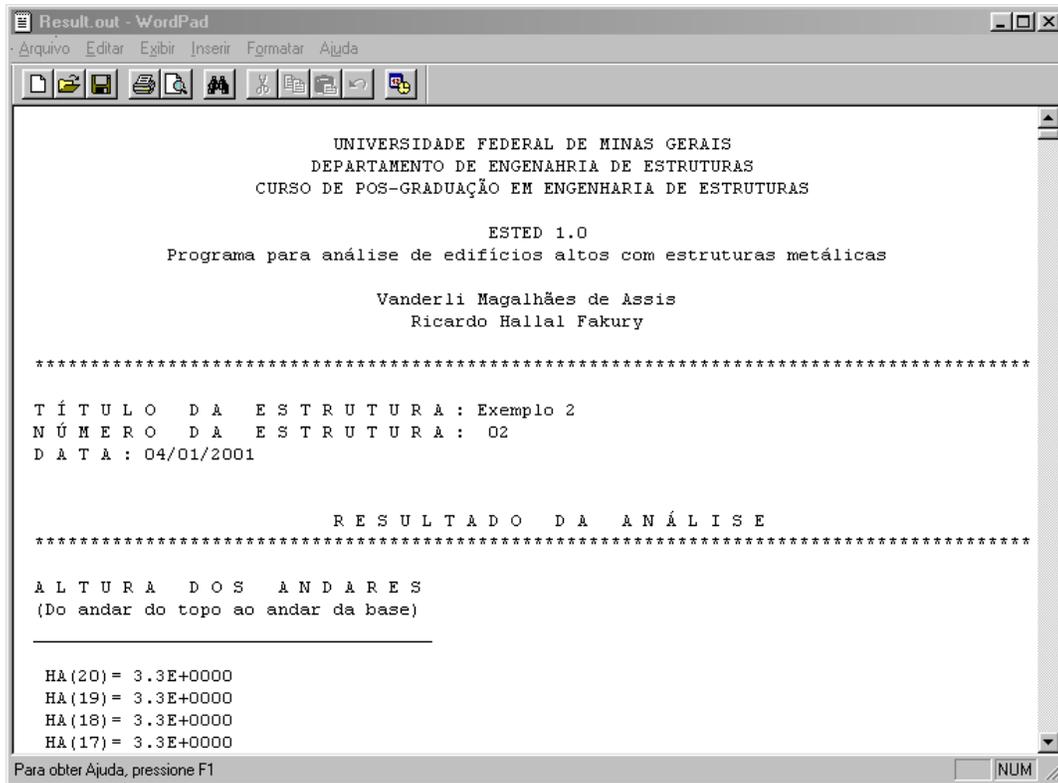
TÍTULO DA ESTRUTURA: Exemplo 2  
 NÚMERO DA ESTRUTURA: 02  
 DATA: 04/01/2001

DESLOCAMENTOS DOS DIAFRAGMAS RELATIVOS AOS C.G.

Andar	Translação X	Translação Y	Rotação Z
20	0.00000	0.10645	0.00000
19	0.00000	0.10275	0.00000
18	0.00000	0.09874	0.00000
17	0.00000	0.09436	0.00000
16	0.00000	0.08954	0.00000
15	0.00000	0.08426	0.00000
14	0.00000	0.07851	0.00000
13	0.00000	0.07232	0.00000
12	0.00000	0.06572	0.00000
11	0.00000	0.05878	0.00000
10	0.00000	0.05158	0.00000
9	0.00000	0.04429	0.00000
8	0.00000	0.03701	0.00000
7	0.00000	0.02990	0.00000

0% Page 1 of 1

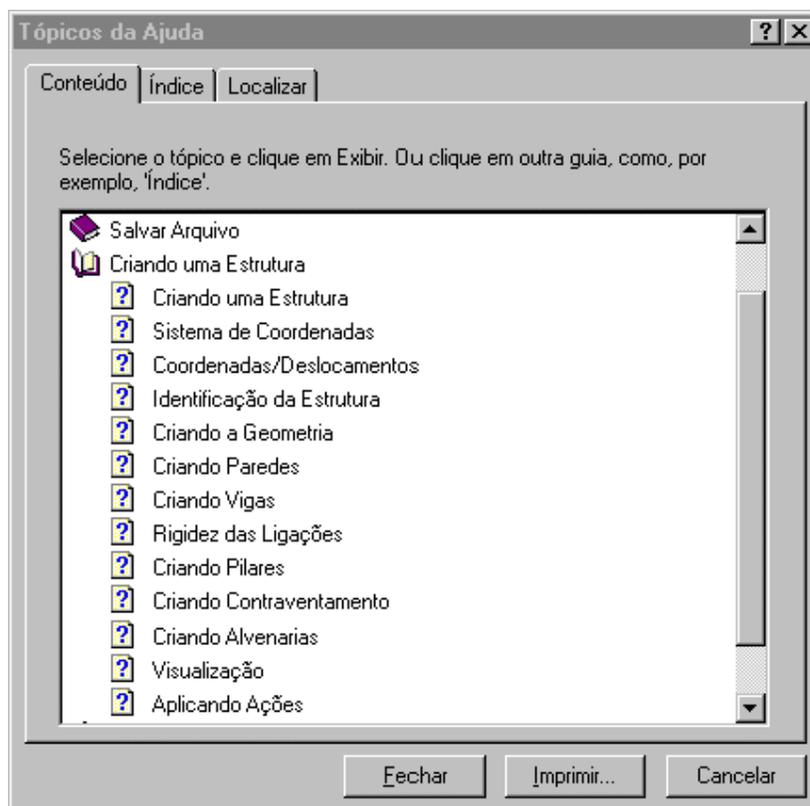
Figura 3.24: Deslocamentos em um rápido “preview”



**Figura 3.25: Relatório completo em arquivo texto**

### **3.4.15 Ajuda**

O programa conta com arquivo de *Ajuda*, como mostra a figura 3.26 que indica os passos para criar e processar uma estrutura, apresentando todos os seus módulos e como utilizá-los. Este arquivo pode ser acessado através da tecla *F1* ou através do menu *Ajuda*.



**Figura 3.26: Arquivo de Ajuda do programa**

# CAPÍTULO IV

---

## 4 EXEMPLOS COMPARATIVOS

### 4.1 Exemplo 1

Trata-se de um edifício com estrutura metálica, com vinte andares, pé-direito de 3,6 m, com painéis-pórtico no contorno e um núcleo formado por painéis treliçados, cuja planta e elevações dos painéis estão mostradas nas figuras a seguir. As barras da estrutura possuem perfis laminados padrão europeu, com as seguintes dimensões e propriedades geométricas:

Pilares:

Perfil HE450B (andar 1-10)

$d = 0,45$  m  
 $bf = 0,30$  m  
 $tf = 0,026$  m  
 $tw = 0,014$  m  
 $I_x = 0,0007989$  m<sup>4</sup>  
 $I_y = 0,0001172$  m<sup>4</sup>  
 $I_t = 0,0000045$  m<sup>4</sup>  
 $A = 0,0218$  m<sup>2</sup>

Perfil HE450A (andar 11-20)

$d = 0,45$  m  
 $bf = 0,30$  m  
 $tf = 0,021$  m  
 $tw = 0,011$  m  
 $I_x = 0,0006372$  m<sup>4</sup>  
 $I_y = 0,0000946$  m<sup>4</sup>  
 $I_t = 0,0000025$  m<sup>4</sup>  
 $A = 0,0178$  m<sup>2</sup>

Vigas:

Perfil IPE550V (andar 1-20)

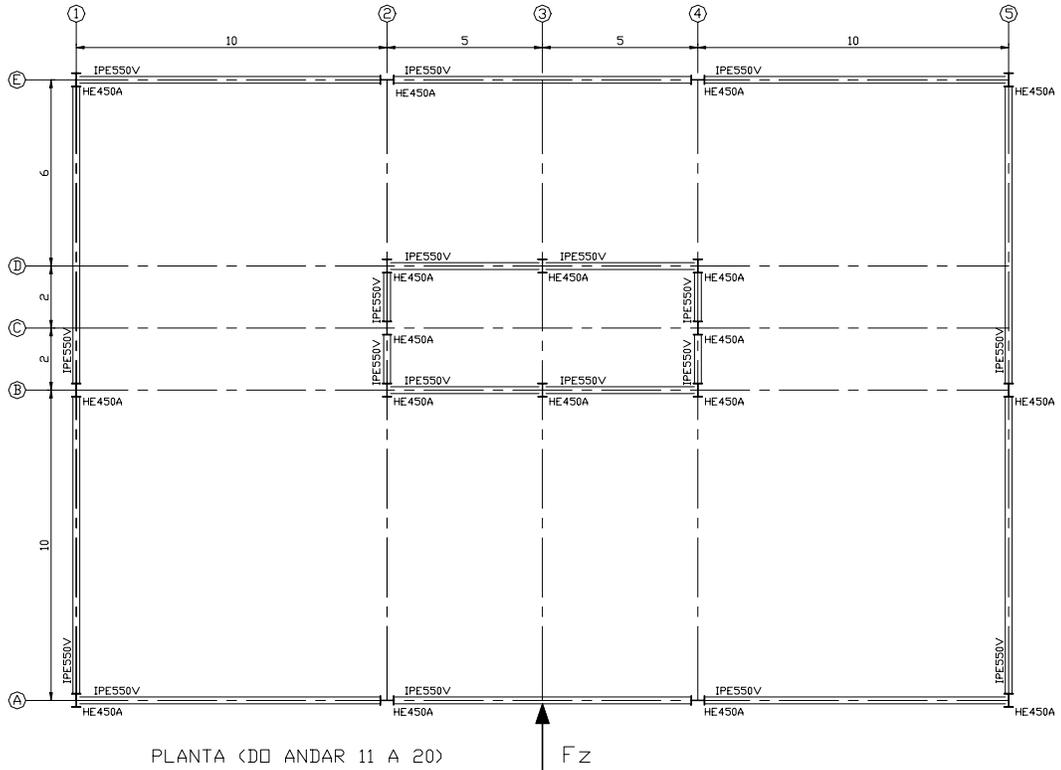
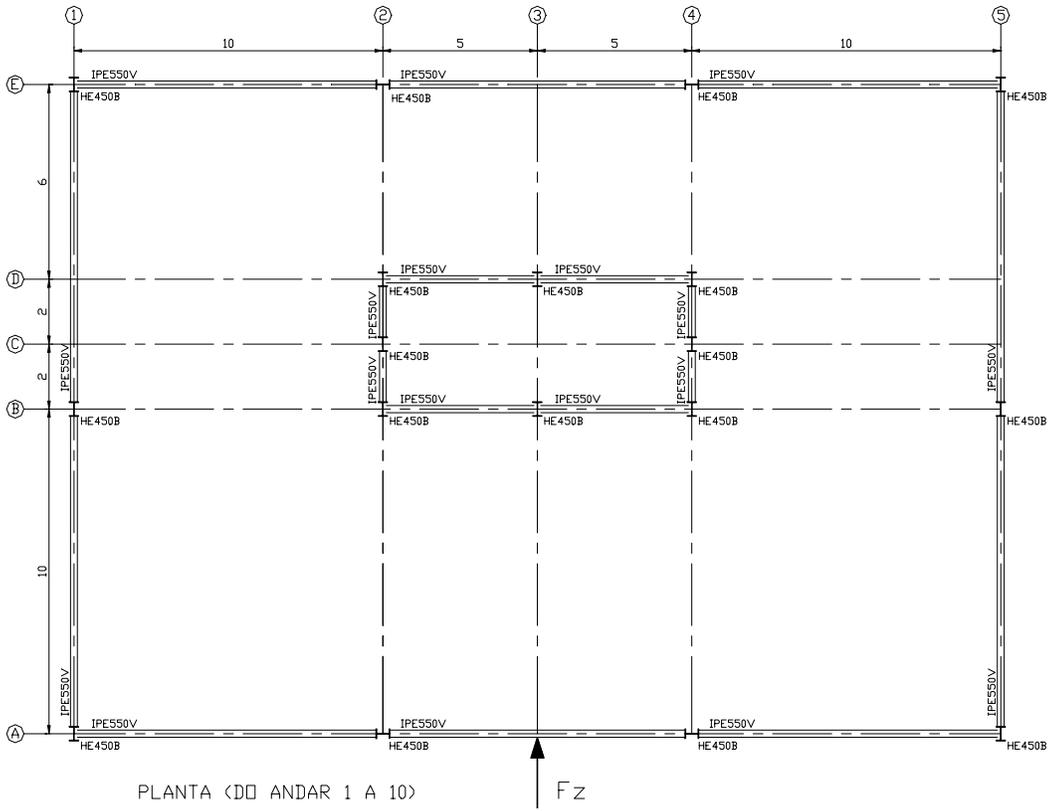
$d = 0,56$  m  
 $bf = 0,22$  m  
 $tf = 0,025$  m  
 $tw = 0,017$  m  
 $I_x = 0,001023$  m<sup>4</sup>  
 $I_t = 0,00000372$  m<sup>4</sup>

Diagonais

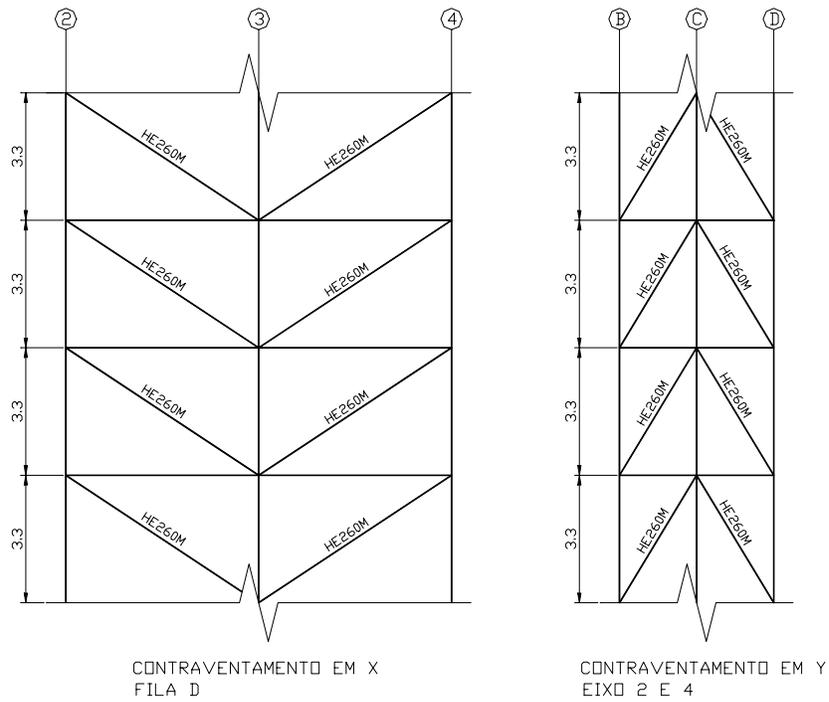
Perfil HE450B (andar 1-20)

$d = 0,20$  m  
 $bf = 0,20$  m  
 $tf = 0,015$  m  
 $tw = 0,009$  m  
 $A = 0,022$  m<sup>2</sup>

Para comparação dos resultados, foi usado o programa SAP2000 [4].

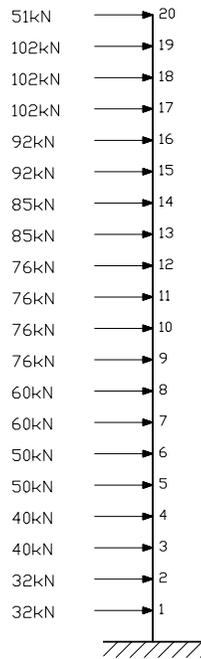


**Plantas dos dois andares diferentes do edifício**

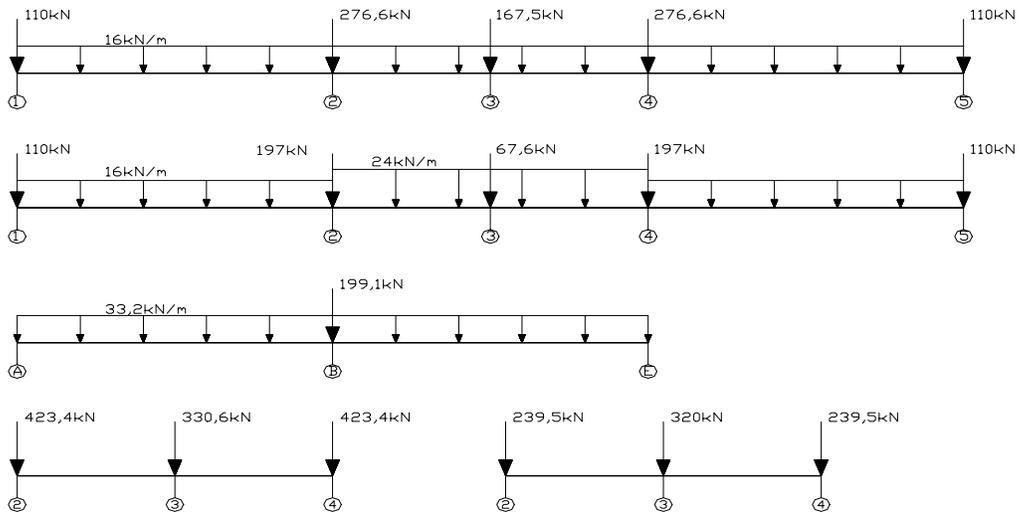


### Painéis treliçados do edifício

O carregamento é constituído de forças verticais uniformemente distribuídas atuando nas vigas e forças verticais concentradas atuando nos nós. As forças horizontais devidas ao vento são aplicadas nos centros de rotação da estrutura nos diafragmas. Os carregamentos são indicados nas figuras a seguir.

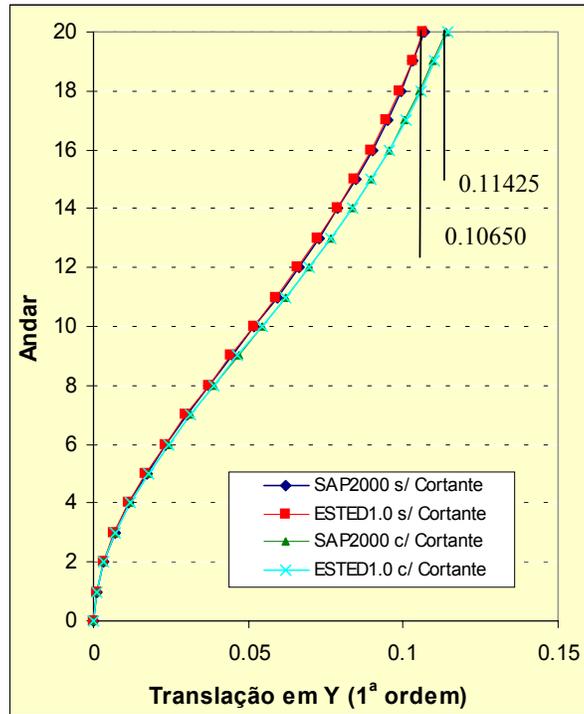


**Carregamento lateral aplicado na estrutura**

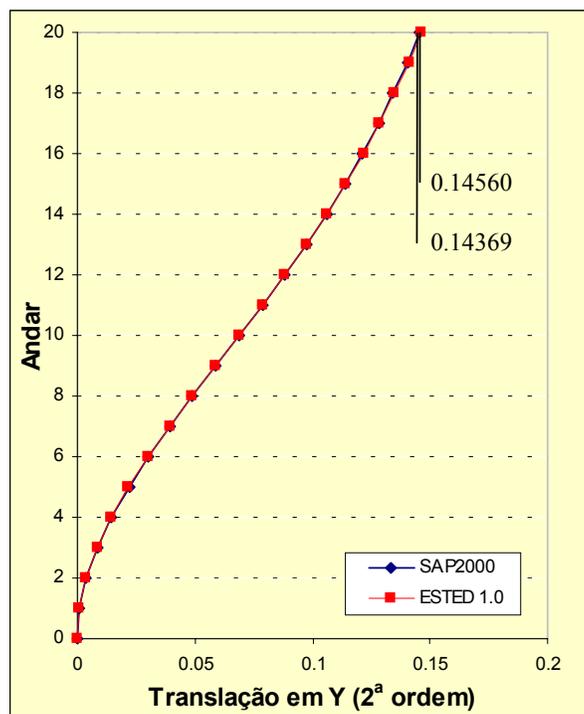


**Carregamento vertical nodal e distribuído nas vigas da estrutura**

Este exemplo mostra a aplicação do programa a estruturas tridimensionais com painéis treliçados. A seguir, apresentam-se as tabelas e gráficos dos resultados obtidos das várias análises feitas com o programa ESTED 1.0 e com o programa SAP2000 para comparação dos resultados, onde for possível.

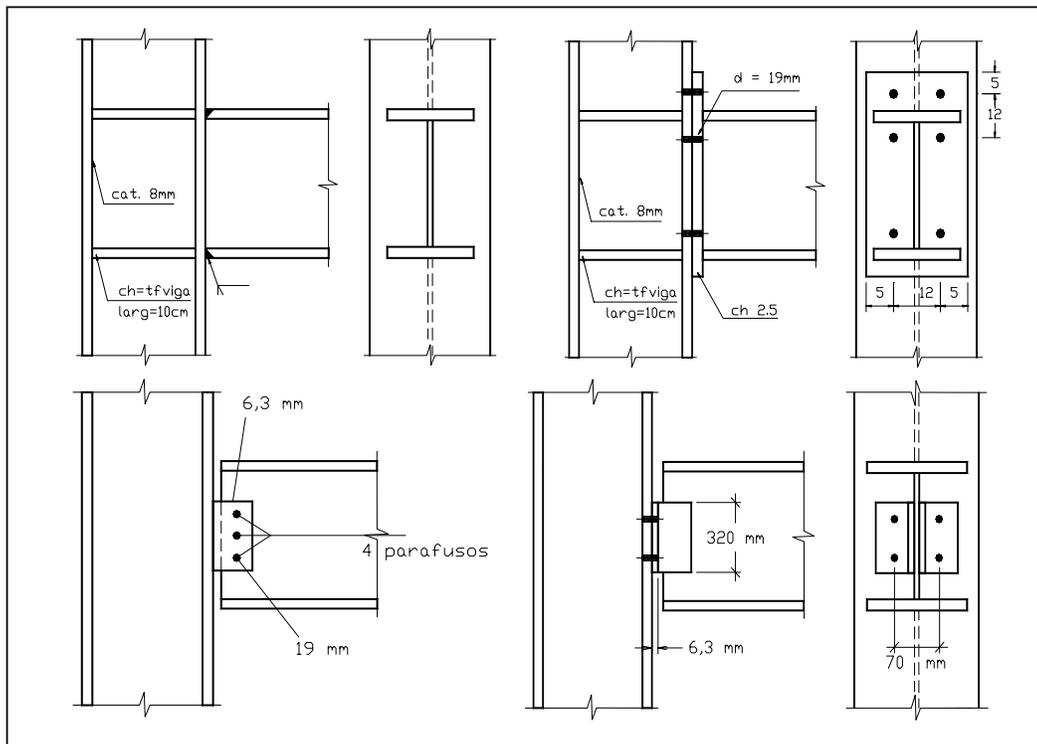


Translações dos diafragmas para análise em 1ª ordem

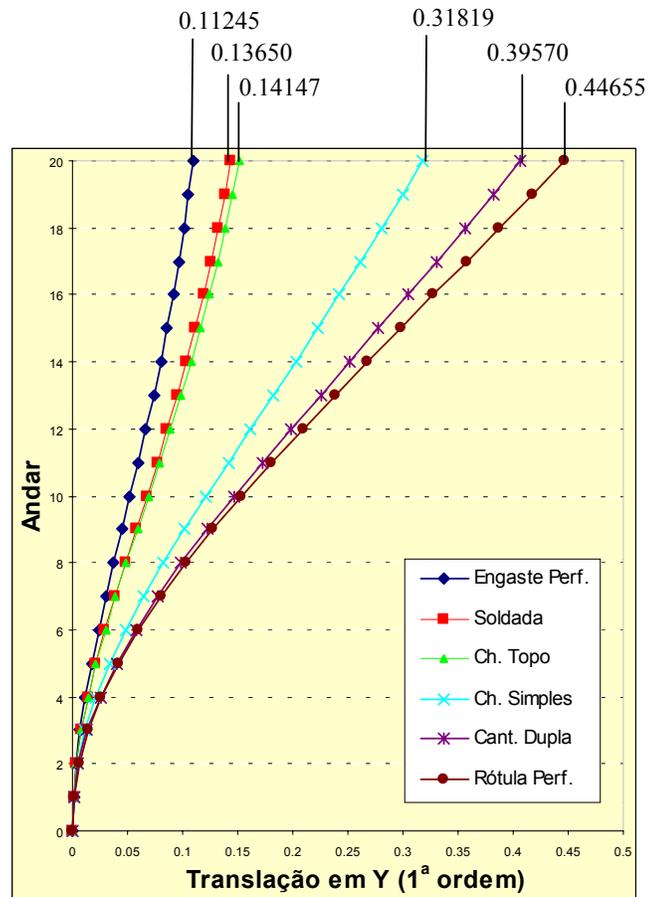


Translações dos diafragmas para análise em 2ª ordem com deformação por cortante

Para a mesma estrutura anterior, fez-se uma análise considerando a semi-rigidez das ligações. A seguir são apresentados os parâmetros das ligações utilizadas nas análises e mais adiante os resultados comparativos entre as ligações, em tabelas e gráficos.

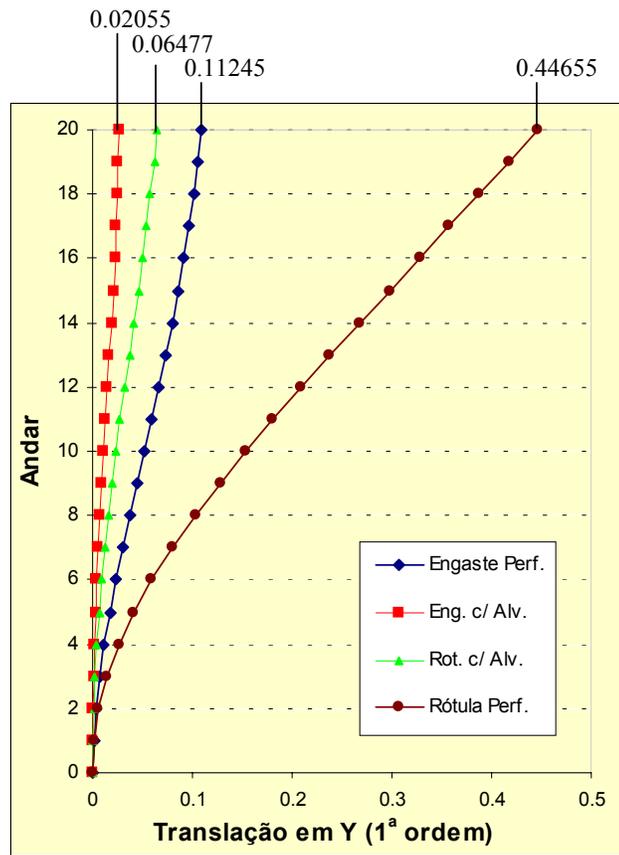
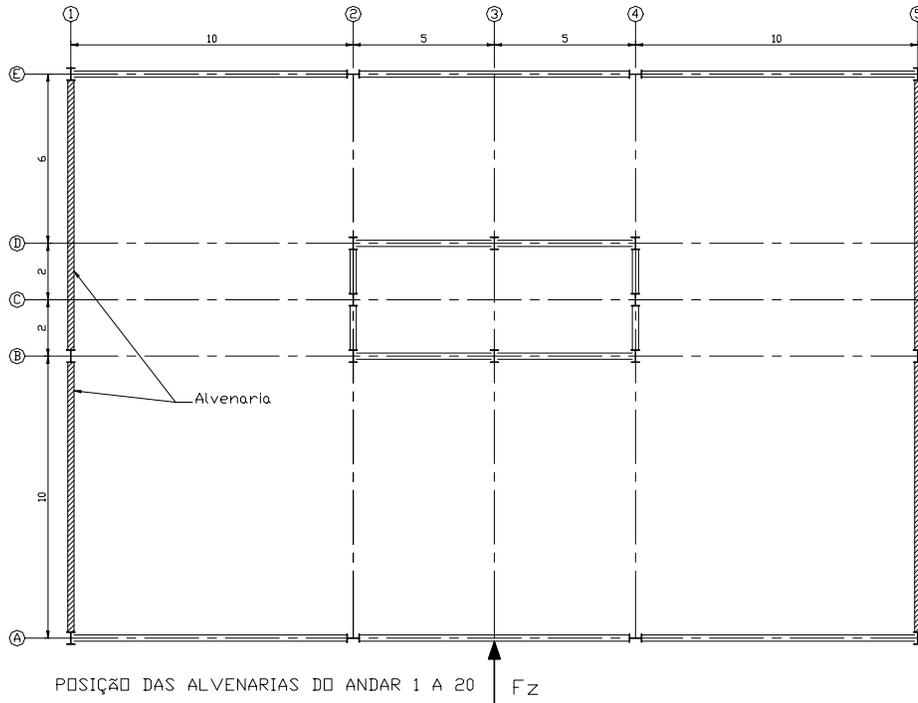


**Parâmetros das ligações utilizadas nas análises**



### Translações dos diafragmas para análise com semi-rigidez das ligações

Para a estrutura anterior, considerando as ligações como engaste perfeito e rótula perfeita, fez-se análises considerando a contribuição de alvenarias, cujas posições são mostradas na planta do edifício a seguir. São posteriormente apresentados em gráficos os resultados comparativos dos deslocamentos laterais dos diafragmas com e sem alvenaria.



Translações dos diafragmas rígidos para análise com contribuição das alvenarias

A seguir são apresentadas tabelas mostrando comparações entre esforços solicitantes obtidos pelo ESTED 1.0 e pelo SAP2000. Foram tomados esforços solicitantes em um pilar de canto para análise em 1ª ordem sem deformação por força cortante e em 2ª ordem com deformação por força cortante. Em seguida, para análise em 2ª ordem com deformação por força cortante e ligações consideradas como engaste perfeito, foram comparados os resultados para pilares, vigas e diagonais.

**Esforços solicitantes no pilar P(1A) para análise em 1ª ordem sem deformação por cortante**

<b>Análise em 1ª ordem sem deformação por cortante</b>						
<b>P(1A)</b>	<b>Força Normal</b>		<b>Momento Fletor</b>		<b>Força Cortante</b>	
	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>
1	-7136.98	-7137.80	98.65	102.42	-30.60	-33.24
2	-6802.85	-6802.85	128.03	126.45	-71.08	-69.88
3	-6465.33	-6465.80	108.32	109.25	-54.55	-55.45
4	-6128.66	-6128.80	99.31	100.10	-51.63	-52.09
5	-5791.61	-5791.50	90.25	91.17	-47.58	-48.12
6	-5453.59	-5453.10	84.55	85.39	-45.85	-46.30
7	-5113.82	-5113.10	81.05	81.78	-45.31	-45.70
8	-4771.60	-4770.60	80.88	81.49	-46.52	-46.84
9	-4426.39	-4425.20	79.88	80.43	-47.63	-47.92
10	-4077.40	-4076.10	91.94	92.35	-54.31	-54.52
11	-3726.14	-3724.70	87.19	87.60	-52.18	-52.40
12	-3371.92	-3370.30	97.87	98.21	-61.01	-61.19
13	-3012.47	-3010.80	105.37	105.71	-65.61	-65.78
14	-2648.15	-2646.40	114.47	114.72	-71.61	-71.70
15	-2278.97	-2277.10	123.53	123.70	-77.35	-77.36
16	-1905.14	-1903.30	133.19	133.17	-83.28	-83.17
17	-1526.96	-1525.30	140.93	140.72	-88.21	-87.96
18	-1144.69	-1143.20	155.77	155.20	-95.78	-95.30
19	-759.70	-758.62	134.22	133.53	-88.29	-87.64
20	-368.09	-367.60	278.00	275.31	-146.99	-145.52

**Esforços solicitantes no pilar 1A para análise em 2ª ordem com deformação por cortante**

<b>Análise em 2ª ordem com deformação por cortante</b>						
<b>P(1A)</b>	<b>Força Normal (kN)</b>		<b>Momento Fletor (kNcm)</b>		<b>Força Cortante (kN)</b>	
	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>
1	-6970.15	-6970.09	109.42	110.44	12.05	12.27
2	-6638.33	-6638.60	119.98	120.84	25.17	25.72
3	-6305.47	-6305.20	99.93	101.38	28.18	28.87
4	-5974.74	-5974.00	85.27	86.53	31.90	32.63
5	-5645.04	-5643.70	72.41	73.43	35.30	36.06
6	-5315.48	-5313.70	63.12	63.83	38.47	39.25
7	-4985.05	-4982.90	56.91	57.33	41.40	42.19
8	-4652.82	-4650.30	54.32	54.44	44.11	44.90
9	-4318.00	-4315.20	52.65	52.60	46.48	47.26
10	-3979.65	-3976.70	62.27	61.90	49.89	50.65
11	-3638.83	-3635.70	59.89	59.59	44.02	44.89
12	-3294.72	-3291.40	69.53	69.00	47.01	47.84
13	-2945.20	-2941.80	77.82	77.23	48.69	49.48
14	-2590.48	-2587.00	87.50	86.77	50.25	50.97
15	-2230.54	-2227.10	97.50	96.62	51.59	52.24
16	-1865.57	-1862.30	107.84	106.76	52.73	53.30
17	-1495.89	-1493.00	117.36	116.07	53.69	54.17
18	-1121.88	-1119.50	129.34	127.71	54.47	54.86
19	-744.57	-742.83	120.73	119.00	54.61	54.91
20	-361.60	-360.85	237.92	233.70	62.19	62.40

**Esforços solicitantes no pilar 2A para análise em 2ª ordem com deformação por cortante**

<b>Análise em 2ª ordem com deformação por cortante</b>						
<b>Pilar (2A)</b>	<b>Força Normal (kN)</b>		<b>Momento Fletor (kNcm)</b>		<b>Força Cortante (kN)</b>	
	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>
1	-10272.12	-10266.00	62.63	63.79	-26.50	-26.57
2	-9739.79	-9734.40	86.48	86.93	-52.60	-52.83
3	-9212.12	-9207.00	92.61	93.24	-54.94	-55.26
4	-8687.25	-8682.50	100.33	100.95	-59.87	-60.18
5	-8165.17	-8160.70	107.27	107.89	-64.11	-64.44
6	-7645.66	-7641.60	113.73	114.35	-68.10	-68.43
7	-7128.55	-7124.80	119.68	120.29	-71.77	-72.10
8	-6613.65	-6610.30	125.27	125.86	-75.19	-75.52
9	-6100.74	-6097.80	129.30	129.88	-77.91	-78.23
10	-5589.87	-5587.20	141.58	142.18	-83.71	-84.10
11	-5078.81	-5076.50	127.22	127.95	-75.12	-75.50
12	-4567.39	-4565.50	133.34	133.95	-80.46	-80.81
13	-4057.65	-4056.10	136.69	137.27	-82.37	-82.70
14	-3549.21	-3548.00	139.84	140.37	-84.36	-84.67
15	-3041.93	-3041.00	142.51	142.97	-86.04	-86.30
16	-2535.62	-2535.00	144.77	145.16	-87.46	-87.69
17	-2030.13	-2029.70	146.45	146.78	-88.56	-88.76
18	-1525.31	-1525.10	148.90	149.16	-89.87	-90.02
19	-1020.90	-1020.80	141.83	142.01	-87.45	-87.56
20	-518.21	-518.17	210.14	210.30	-113.91	-113.98

**Esforços solicitantes na viga 1A para análise em 2ª ordem com deformação por cortante**

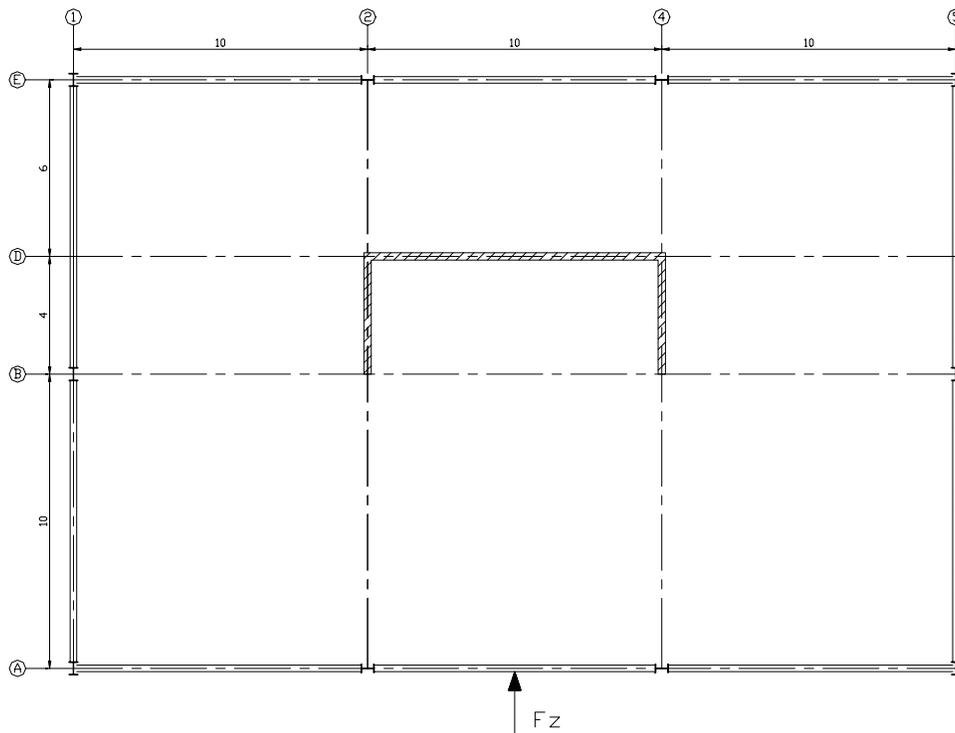
<b>Análise em 2ª ordem com deformação por cortante</b>								
<b>VigaY (1A)</b>	<b>Momento No i (kNcm)</b>		<b>Momento No j (kNcm)</b>		<b>Cortante No i (kN)</b>		<b>Cortante No j (kN)</b>	
	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>
1	-194.75	-195.15	-326.63	-326.51	-152.81	-152.86	179.19	179.14
2	-176.01	-175.90	-344.35	-344.56	-149.17	-149.00	182.83	182.87
3	-148.40	-148.30	-366.32	-366.59	-144.21	-144.17	187.79	187.83
4	-127.07	-126.82	-383.45	-383.85	-140.36	-140.30	191.64	191.70
5	-111.61	-111.21	-395.30	-395.85	-137.63	-137.54	194.37	194.46
6	-102.47	-101.89	-401.56	-402.27	-136.09	-135.96	195.91	196.04
7	-99.32	-98.51	-402.53	-403.44	-135.68	-135.51	196.32	196.49
8	-101.40	-100.33	-398.75	-399.90	-136.27	-136.04	195.73	195.96
9	-108.76	-107.35	-391.08	-392.50	-137.77	-137.49	194.23	194.51
10	-119.18	-117.52	-374.90	-376.61	-140.43	-140.09	191.57	191.91
11	-134.37	-132.36	-353.39	-355.46	-144.1	-143.69	187.9	188.31
12	-153.46	150.89	-335.24	-337.77	-147.82	-147.31	184.18	184.69
13	-173.28	-170.11	-315.81	-318.86	-151.75	-151.12	180.25	180.88
14	-194.05	-190.19	-295.81	-299.47	-155.82	-155.07	176.18	176.93
15	-214.88	-210.24	-275.95	-280.28	-159.89	-159.00	172.11	173.00
16	-234.97	-229.43	-256.91	-262.03	-163.81	-172.74	168.19	169.26
17	-253.87	-247.28	-239.25	-245.29	-167.46	-166.20	164.54	165.80
18	-268.53	-260.79	-224.65	-231.74	-170.39	-168.91	161.61	163.09
19	-292.10	-282.52	-208.93	-217.64	-174.32	-172.49	157.68	-159.51
20	-238.08	-230.72	-213.24	-219.44	-168.48	-167.13	163.52	-164.87

**Esforços solicitantes nas barras diagonais 2B e 2D para análise em 2ª ordem com deformação por cortante**

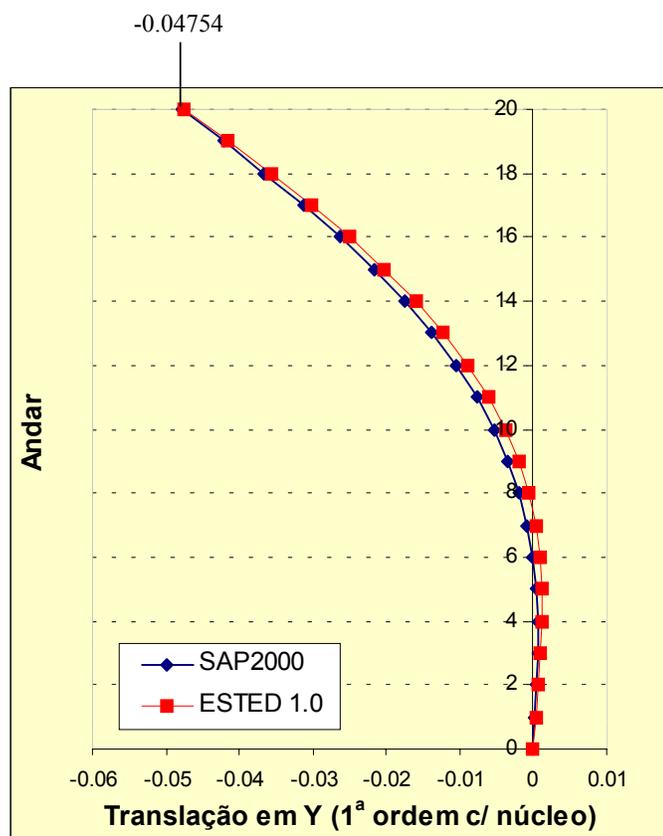
<b>Análise em 2ª ordem com deformação por cortante</b>				
<b>barras diagonais 2B e 2D (kN)</b>				
<b>Andar</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>
1	-567.12	-564.90	-1831.59	-1828.30
2	26.05	26.17	-1203.72	-1201.00
3	177.00	175.08	-961.34	-960.23
4	209.77	207.10	-834.00	-833.25
5	206.74	204.00	-743.77	-743.07
6	189.92	187.19	-665.04	-664.24
7	171.42	168.89	-593.25	-592.31
8	153.28	151.00	-520.76	-519.69
9	147.38	145.22	-442.64	-441.60
10	172.16	169.66	-316.56	-316.13
11	5.08	4.40	-459.39	-455.61
12	37.93	36.93	-341.47	-338.19
13	41.94	41.00	-268.75	-265.22
14	36.98	36.08	-203.71	-199.62
15	32.51	31.57	-142.81	-137.99
16	27.54	26.42	-81.48	-75.79
17	24.72	23.18	-20.30	-13.68
18	22.29	19.70	47.41	54.76
19	34.24	28.94	127.32	133.51
20	81.88	61.76	292.24	292.74

## 4.2 Exemplo 2

Para a mesma estrutura do exemplo 1, trocou-se o sistema de estabilidade treliçado por um núcleo de concreto com seção U como mostra a planta a seguir. As ligações foram consideradas como engaste perfeito. O carregamento aplicado na estrutura é o mesmo aplicado na estrutura anterior. Em seguida apresentam-se os resultados da análise usando o ESTED 1.0 e os resultados usando o SAP2000, para comparação.



**Posição do núcleo de concreto no edifício do 1º ao 20º andar**



Translações dos diafragmas rígidos para análise em 1ª ordem

### 4.3 Exemplo 3

Trata-se de um edifício tubular com estrutura metálica, com cinquenta e seis andares, pé-direito de 330 cm, cuja quarta parte da planta da estrutura duplamente simétrica é mostrada na figura a seguir. As barras da estrutura exceto os pilares de canto, que têm seção tubular, possuem perfis laminados padrão europeu, sendo que suas dimensões e propriedades geométricas são apresentadas a seguir:

Dados dos perfis dos andares de 1 ao 14

P. Canto Tubo 800x70	P. Intermediários HE650M	Vigas IPE600V
D = 800 mm	d = 668 mm	d = 618 mm
t = 70 mm	bf = 305 mm	bf = 228 mm
Ix = 1832105,3 cm <sup>4</sup>	tf = 40 mm	tf = 28 mm
Iy = 1832105,3 cm <sup>4</sup>	tw = 21 mm	tw = 18 mm
It = 2723119 cm <sup>4</sup>	Ix = 281700 cm <sup>4</sup>	Ix = 141600 cm <sup>4</sup>
A = 2044 cm <sup>2</sup>	Iy = 18980 cm <sup>4</sup>	Iy = 5570 cm <sup>4</sup>
	It = 1584 cm <sup>4</sup>	It = 506 cm <sup>4</sup>
	A = 374 cm <sup>2</sup>	A = 234 cm <sup>2</sup>

Dados dos perfis dos andares de 15 ao 28

P. Canto Tubo 800x50	P. Intermediários HE600M	Vigas IPE600 O
D = 800 mm	d = 620 mm	d = 610 mm
t = 50 mm	bf = 305 mm	bf = 224 mm
Ix = 1412500 cm <sup>4</sup>	tf = 40 mm	tf = 24 mm
Iy = 1412500 cm <sup>4</sup>	tw = 21 mm	tw = 15 mm
It = 2109375 cm <sup>4</sup>	Ix = 237400 cm <sup>4</sup>	Ix = 118300 cm <sup>4</sup>
A = 1500 cm <sup>2</sup>	Iy = 18980 cm <sup>4</sup>	Iy = 4521 cm <sup>4</sup>
	It = 1570 cm <sup>4</sup>	It = 316 cm <sup>4</sup>
	A = 364 cm <sup>2</sup>	A = 197 cm <sup>2</sup>

Dados dos perfis dos andares de 29 ao 42

P. Canto Tubo 700x50	P. Intermediários HE550M	Vigas IPE600R
D = 700 mm	d = 572 mm	d = 608 mm
t = 50 mm	bf = 306 mm	bf = 218 mm
Ix = 920833 cm <sup>4</sup>	tf = 40 mm	tf = 23 mm
Iy = 920833 cm <sup>4</sup>	tw = 21 mm	tw = 14 mm
It = 1373125 cm <sup>4</sup>	Ix = 198000 cm <sup>4</sup>	Ix = 110300 cm <sup>4</sup>
A = 1300 cm <sup>2</sup>	Iy = 19160 cm <sup>4</sup>	Iy = 3993 cm <sup>4</sup>
	It = 1558 cm <sup>4</sup>	It = 271 cm <sup>4</sup>
	A = 354 cm <sup>2</sup>	A = 184 cm <sup>2</sup>

Dados dos perfis dos andares de 43 ao 56

P. Canto Tubo 600x50

D = 60 cm  
 t = 5 cm  
 $I_x = 559166,7 \text{ cm}^4$   
 $I_y = 559166,7 \text{ cm}^4$   
 $I_t = 831875 \text{ cm}^4$   
 A =  $1100 \text{ cm}^2$

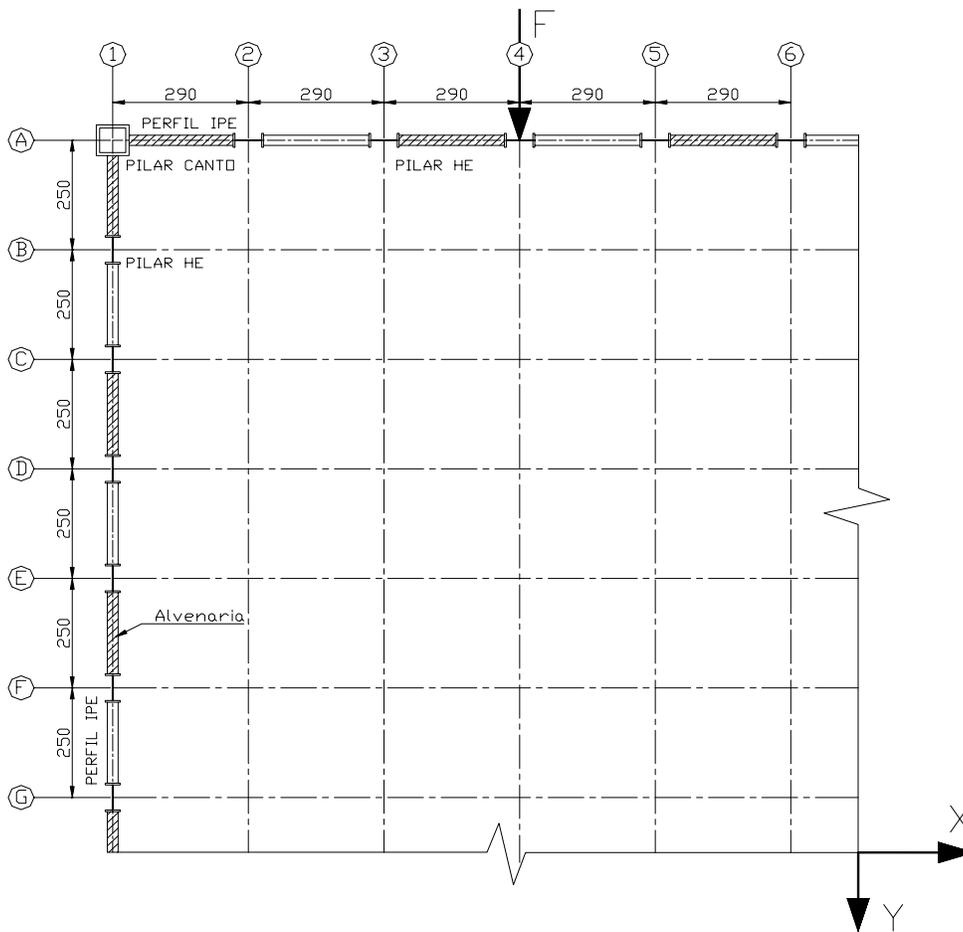
P. Intermediários HE500M

d = 52,4 cm  
 bf = 30,6 cm  
 tf = 4 cm  
 tw = 2,1 cm  
 $I_x = 161900 \text{ cm}^4$   
 $I_y = 19150 \text{ cm}^4$   
 $I_t = 1544 \text{ cm}^4$   
 A =  $344 \text{ cm}^2$

Vigas IPE600

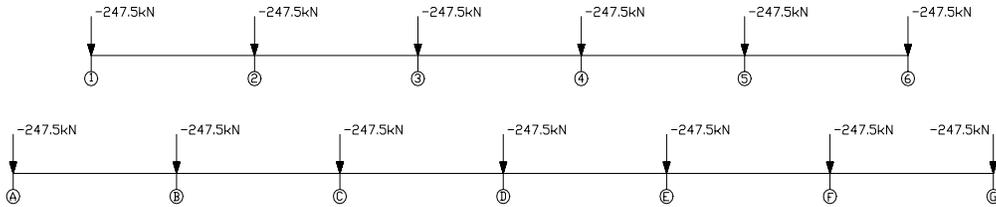
d = 60 cm  
 bf = 22 cm  
 tf = 1,9 cm  
 tw = 1,2 cm  
 $I_x = 92080 \text{ cm}^4$   
 $I_y = 3387 \text{ cm}^4$   
 $I_t = 165 \text{ cm}^4$   
 A =  $156 \text{ cm}^2$

Foi usado o programa SAP2000, para comparação dos resultados.

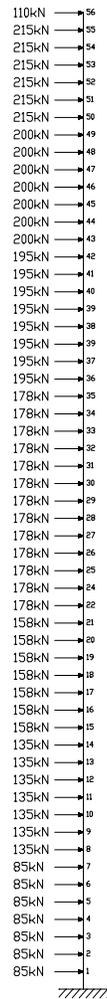


**Planta da quarta parte da estrutura duplamente simétrica**

O carregamento é constituído de forças verticais aplicadas nos nós da estrutura e forças horizontais aplicadas no centro geométrico dos diafragmas, como mostrado nas figuras seguintes:



**Carregamento vertical aplicado nos nós da estrutura**

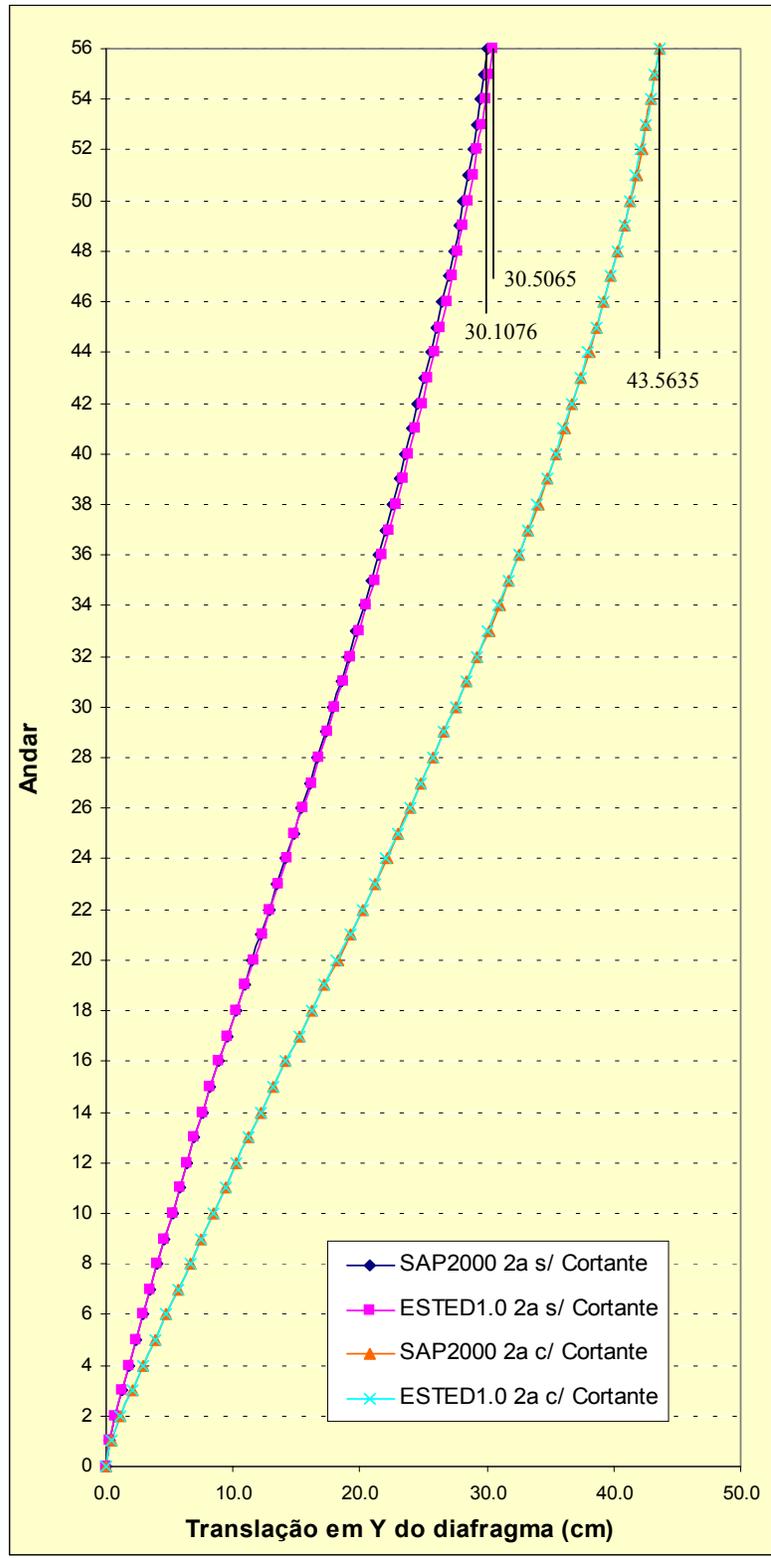


**Carregamento lateral nos centros geométricos dos diafragmas**

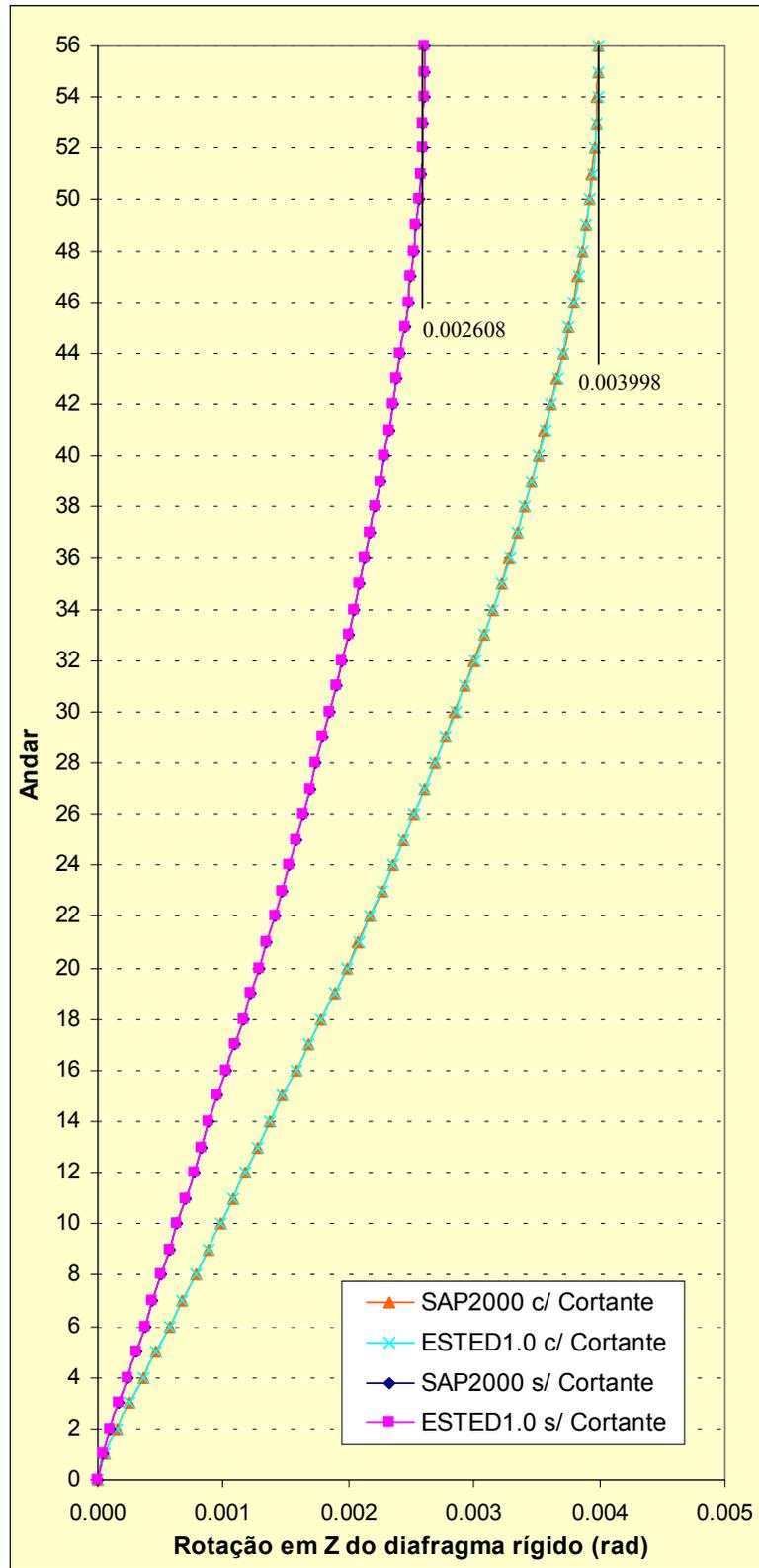
Neste exemplo é mostrada a aplicação do programa a estruturas tridimensionais de edifícios altos com estrutura metálica e também a influência na análise do edifício tubular da semi-rigidez das ligações e de um núcleo de concreto. A seguir apresentam-se tabelas e gráficos dos resultados das análises em diversas situações.



Translações dos diafragmas na direção Y para análise em 1ª ordem sem e com deformação por cortante

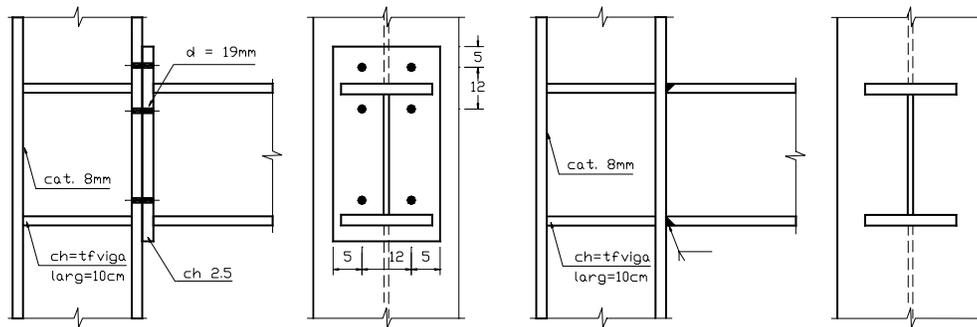


Translações dos diafragmas para análises em 2ª ordem sem e com deformação por cortante



Rotações dos diafragmas para análises em 2ª ordem sem e com deformação por cortante

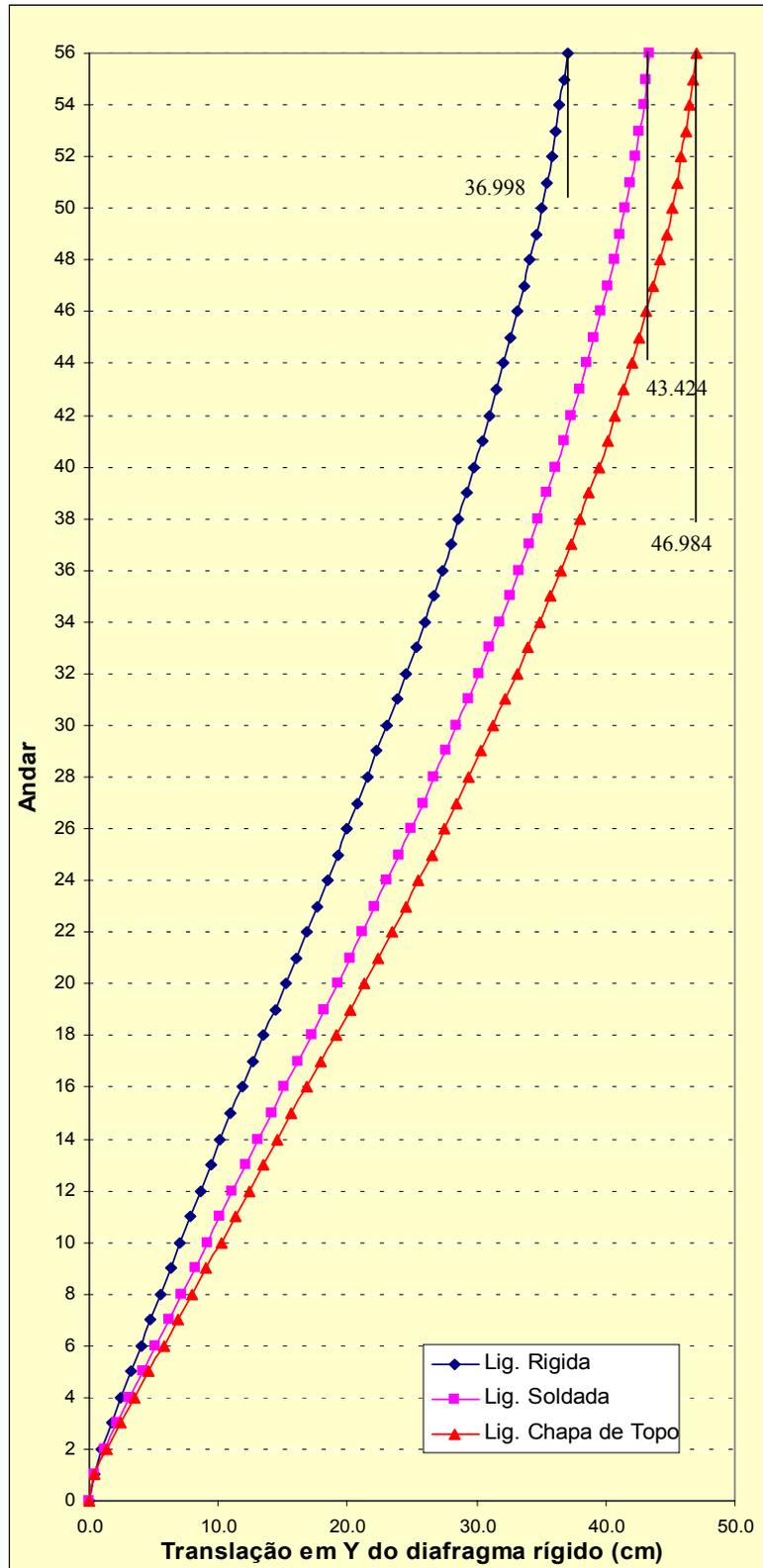
Para avaliação do comportamento dos edifícios com ligações semi-rígidas, foram processados, em análise de 1ª ordem com deformação por força cortante, os casos de ligações totalmente rígidas (já mostrados nos gráficos anteriores) e das ligações projetadas (ligações soldadas com enrijecedores e ligações parafusadas com chapa de topo), mostradas na seqüência.



**Parâmetros das ligações entre vigas e pilares utilizadas nas análises**

Os resultados das translações dos diafragmas na direção Y são mostrados no gráfico a seguir.

Em seguida para mesma estrutura, mesmo carregamento e com ligações consideradas como infinitamente rígida obteve-se os esforços no ESTED1.0 e no SAP2000. Posteriormente apresentam-se as tabelas com comparação dos esforços solicitantes



Translações dos diafragmas em Y para análise em 2ª ordem considerando a semi-rigidez das ligações

**Esforços solicitantes no pilar de canto para análise em 2ª ordem com deformação por cortante**

<b>Esforços solicitantes no Pilar (1,1) – Análise em 2ª ordem com deformação por cortante</b>				
<b>Andar</b>	<b>Força Normal (kN)</b>		<b>Momento Fletor (kN.cm)</b>	
	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>
1	-41846.00	-41815.00	272536.03	272890.00
2	-41680.00	-41651.00	96908.86	97750.00
3	-41531.00	-41504.00	48852.90	49500.00
4	-41315.00	-41290.00	31262.51	31473.00
5	-41017.00	-40994.00	23390.92	23506.00
6	-40637.00	-40616.00	18718.18	18751.00
7	-40181.00	-40162.00	15051.19	15065.00
8	-39653.00	-39634.00	11676.65	11675.00
9	-39061.76	-39053.00	7889.50	7883.30
10	-38388.83	-38381.00	4615.08	4605.50
11	-37642.62	-37636.00	1438.17	1430.10
12	-36819.51	-36814.00	-1746.40	-1752.30
13	-35914.29	-35910.00	-4403.35	-4390.30
14	-34918.15	-34915.00	-7837.42	-7733.80
15	-33856.34	-33854.00	11145.45	11029.00
16	-32964.34	-32962.00	4319.07	4225.70
17	-32119.91	-32118.00	-1399.81	-1421.30
18	-31299.55	-31298.00	-2365.43	-2408.90
19	-30493.43	-30492.00	-2718.92	-2766.90
20	-29695.22	-29693.00	-2943.96	-2994.10
21	-28900.28	-28899.00	-3252.30	-3302.70
22	-28104.76	-28103.00	-3716.33	-3766.60
23	-27304.95	-27303.00	-4501.51	-4550.80
24	-26497.37	-26496.00	-5222.19	-5271.10
25	-25678.93	-25677.00	-5997.53	-6044.10
26	-24846.51	-24844.00	-6845.56	-6890.90
27	-23997.14	-23995.00	-7513.79	-7548.90
28	-23126.27	-23124.00	-8915.78	-8923.00
29	-22250.57	-22248.00	1001.09	1007.10
30	-21435.71	-21433.00	-4912.32	-4868.90
31	-20635.17	-20633.00	-5651.86	-5661.70
32	-19842.25	-19841.00	-6033.04	-6054.80
33	-19053.21	-19052.00	-6274.28	-6298.90
34	-18265.50	-18264.00	-6556.38	-6581.80
35	-17477.07	-17476.00	-6902.38	-6927.40
36	-16686.03	-16685.00	-7336.42	-7361.00
37	-15890.32	-15890.00	-7985.00	-8008.50
38	-15087.88	-15088.00	-8575.76	-8598.20
39	-14276.94	-14277.00	-9198.97	-9219.40
40	-13455.59	-13456.00	-9887.94	-9906.30
41	-12622.13	-12623.00	-10419.12	-10434.00
42	-11772.87	-11773.00	-11748.21	-11750.00
43	-10926.54	-10927.00	-4561.20	-4583.40
44	-10152.88	-10154.00	-7113.42	-7136.00
45	-9387.43	-9387.90	-8171.70	-8190.40
46	-8623.76	-8624.20	-8545.84	-8565.80
47	-7859.73	-7860.10	-8867.82	-8886.00
48	-7093.91	-7094.20	-9202.81	-9219.20
49	-6325.11	-6325.30	-9571.71	-9586.30
50	-5552.28	-5552.40	-9987.97	-10001.00
51	-4774.12	-4774.20	-10547.58	-10559.00
52	-3989.36	-3989.40	-11061.03	-11071.00
53	-3197.07	-3197.10	-11572.27	-11580.00
54	-2396.07	-2396.10	-12197.54	-12204.00
55	-1586.90	-1586.90	-12290.19	-12295.00
56	-758.62	-758.63	-15073.18	-15076.00

**Esforços solicitantes no pilar de extremidade para análise em 2ª ordem com deformação por cortante**

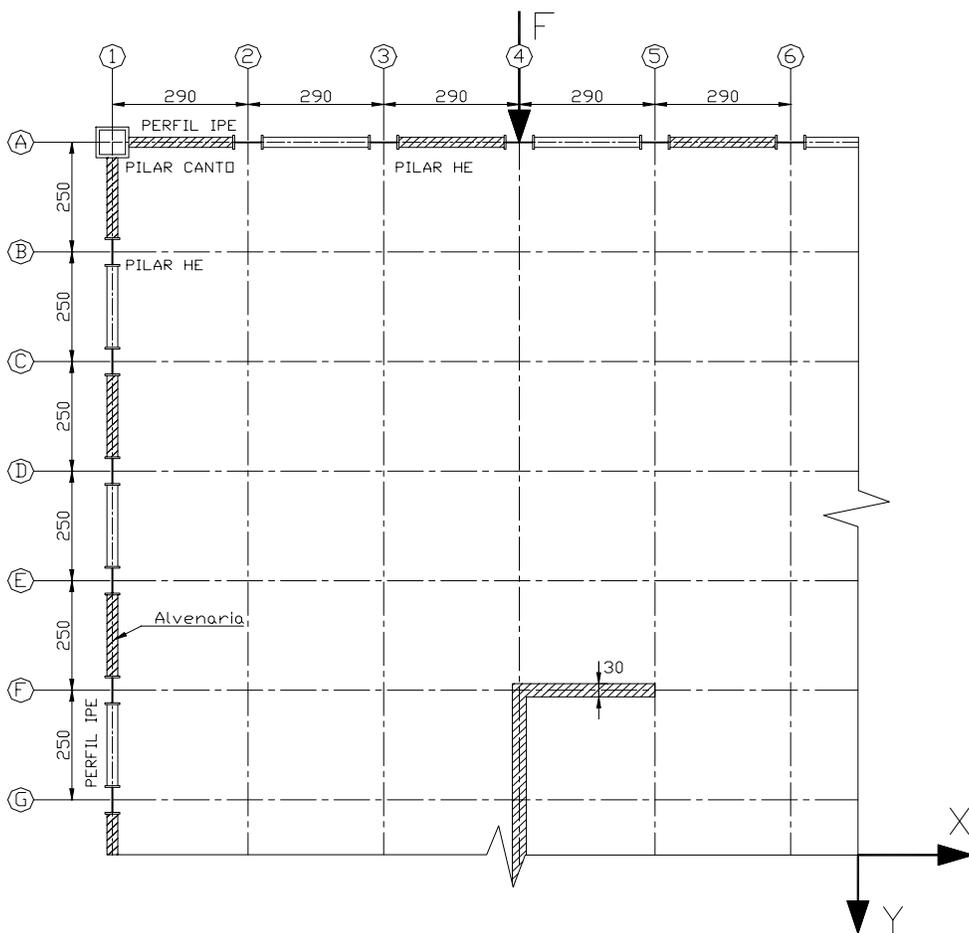
<b>Esforços Solicitantes no Pilar (7,1) – Análise em 2ª ordem com deformação por cortante</b>				
<b>Andar</b>	<b>Força Normal (kN)</b>		<b>Momento Fletor (kN.cm)</b>	
	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1,0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1,0</b>
1	-11447.81	-11444.00	14911.17	15061.00
2	-11204.25	-11201.00	15924.73	16153.00
3	-10964.63	-10961.00	15915.63	16157.00
4	-10728.9	-10726.00	16075.86	16390.00
5	-10496.99	-10494.00	16220.48	16468.00
6	-10268.84	-10266.00	16361.88	16603.00
7	-10044.36	-10042.00	16489.79	16724.00
8	-9823.43	-9821.10	16589.55	16816.00
9	-9605.94	-9603.90	16623.58	16842.00
10	-9391.74	-9390.10	16645.15	16856.00
11	-9180.68	-9179.40	16658.82	16862.00
12	-8972.62	-8971.80	16676.68	16875.00
13	-8767.38	-8766.90	16716.68	16915.00
14	-8564.93	-8565.00	17078.10	17298.00
15	-8363.24	-8363.70	16739.00	17003.00
16	-8158.06	-8158.60	16010.93	16186.00
17	-7954.55	-7955.00	15912.52	16083.00
18	-7752.78	-7753.30	15747.30	15905.00
19	-7552.62	-7553.10	15583.47	15730.00
20	-7353.92	-7354.40	15409.51	15545.00
21	-7156.56	-7157.00	15224.71	15349.00
22	-6960.41	-6960.90	15023.75	15138.00
23	-6765.35	-6765.80	14791.62	15896.00
24	-6571.26	-6571.70	14551.46	14647.00
25	-6378.03	-6378.40	14305.14	14392.00
26	-6185.56	-6185.90	14058.47	14138.00
27	-5993.71	-5994.00	13811.62	13884.00
28	-5802.59	-5802.80	13738.21	13805.00
29	-5610.09	-5610.30	12912.18	12974.00
30	-5414.21	-5414.40	12608.85	12669.00
31	-5218.61	-5218.80	12306.46	12360.00
32	-5023.24	5023.50	12011.66	12059.00
33	-4828.05	-4828.30	11715.07	11757.00
34	-4632.97	-4633.20	11416.31	11697.00
35	-4437.97	-4438.20	11114.45	11147.00
36	-4243.01	-4243.20	10805.45	10834.00
37	-4048.04	-4048.20	10475.28	10500.00
38	-3853.04	-3856.20	10144.74	10166.00
39	-3657.98	-3658.20	9814.80	9833.10
40	-3462.84	-3463.00	9489.16	9504.70
41	-3267.57	-3267.70	9165.25	9178.70
42	-3072.39	-3072.50	8988.08	8999.10
43	-2874.93	-2875.00	8170.38	8180.70
44	-2671.26	-2671.40	7518.95	7528.40
45	-2467.28	-2467.40	7192.91	7200.50
46	-2263.19	-2263.30	6852.88	6859.10
47	-2058.99	-2059.10	6521.50	6526.50
48	-1854.67	-1854.80	6192.85	6196.90
49	-1650.25	-1650.40	5866.54	5869.80
50	-1445.73	-1445.80	5538.85	5541.50
51	-1241.12	-1241.20	5196.12	5198.30
52	-1036.44	-1036.50	4857.72	4859.50
53	-831.68	-831.75	4523.36	4524.90
54	-626.89	-626.94	4199.18	4200.50
55	-421.92	-421.96	3844.40	3845.70
56	-218.38	-218.40	3972.09	3972.40

**Esforços solicitantes na viga para análise em 2ª ordem com deformação por cortante**

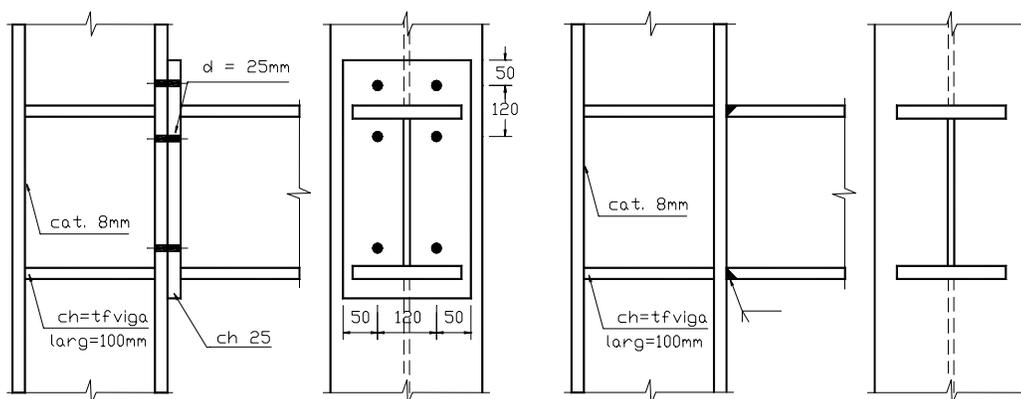
<b>Esforços solicitantes na viga (1,1) – Análise em 2ª ordem com deformação por cortante</b>				
<b>Andar</b>	<b>Momento Fletor (kN.cm)</b>		<b>Força Cortante (kN)</b>	
	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>	<b>SAP2000</b>	<b>ESTED1.0</b>
1	6092.39	6224.11	35.19	36.01
2	1961.51	2137.30	9.25	10.30
3	-4273.67	-4111.30	-30.11	-29.12
4	-10611.13	-10486.00	-69.90	-69.14
5	-16572.98	-16492.00	-107.21	-106.73
6	-22129.89	-22094.00	-141.92	-141.72
7	-27375.05	-27385.00	-174.66	-174.74
8	-32451.32	-32510.00	-206.34	-206.73
9	-37480.39	-37591.00	-237.79	-238.50
10	-42560.43	-42730.00	-269.67	-270.76
11	-47825.32	-48063.00	-302.87	-304.39
12	-53384.43	-53701.00	-338.17	-340.20
13	-59568.06	-59973.00	-377.83	-380.43
14	-64647.09	-65084.00	-408.51	-411.32
15	-50521.35	-50176.00	-321.78	-319.65
16	-47974.79	-47610.00	-304.30	-302.04
17	-46423.98	-46087.00	-293.76	-291.68
18	-45343.60	-45039.00	-286.33	-284.46
19	-44602.46	-44329.00	-281.18	-279.71
20	-44123.56	-43878.00	-277.79	-276.29
21	-43866.48	-43645.00	-275.89	-274.54
22	-43817.28	-43616.00	-275.37	-274.15
23	-43963.57	-43781.00	-276.14	-275.04
24	-44291.86	-44125.00	-278.13	-277.12
25	-44810.00	-44656.00	-281.38	-280.45
26	-45509.66	-45367.00	-285.85	-285.00
27	-46543.15	-46408.00	-292.62	-291.81
28	-46693.38	-46571.00	-292.27	-291.57
29	-41313.18	-41250.00	-258.73	-258.38
30	-40108.93	-40050.00	-250.65	-250.33
31	-39172.11	-39116.00	-244.49	-244.19
32	-38446.14	-38394.00	-239.71	-239.42
33	-37873.05	-37825.00	-235.93	-235.67
34	-37431.30	-37387.00	-233.03	-232.79
35	-37109.00	-37068.00	-230.91	-230.69
36	-36910.46	-36873.00	-229.59	-229.39
37	-36834.74	-36800.00	-229.07	-228.89
38	-36874.30	-36842.00	-229.31	-229.14
39	-37041.08	-37011.00	-230.39	-230.23
40	-37316.28	-37289.00	-232.20	-232.00
41	-37890.83	-37864.00	-235.99	-235.85
42	-37384.24	-37362.00	-231.55	-231.44
43	-30198.54	-30197.00	-189.10	-189.11
44	-29339.68	-29337.00	-183.18	-183.18
45	-28742.62	-28739.00	-179.25	-179.24
46	-28267.92	-28263.00	-176.09	-176.08
47	-27887.53	-27882.00	-173.56	-173.54
48	-27588.98	-27583.00	-171.55	-171.53
49	-27366.92	-27360.00	-170.04	-170.01
50	-27227.80	-27221.00	-169.06	-169.03
51	-27171.25	-27164.00	-168.60	-168.56
52	-27183.77	-27176.00	-168.59	-168.55
53	-27289.94	-27281.00	-169.16	-169.11
54	-27354.39	-27346.00	-169.46	-169.41
55	-28209.53	-28200.00	-175.62	-175.56
56	-24028.28	-24012.00	-137.55	-137.46

#### 4.4 Exemplo 4

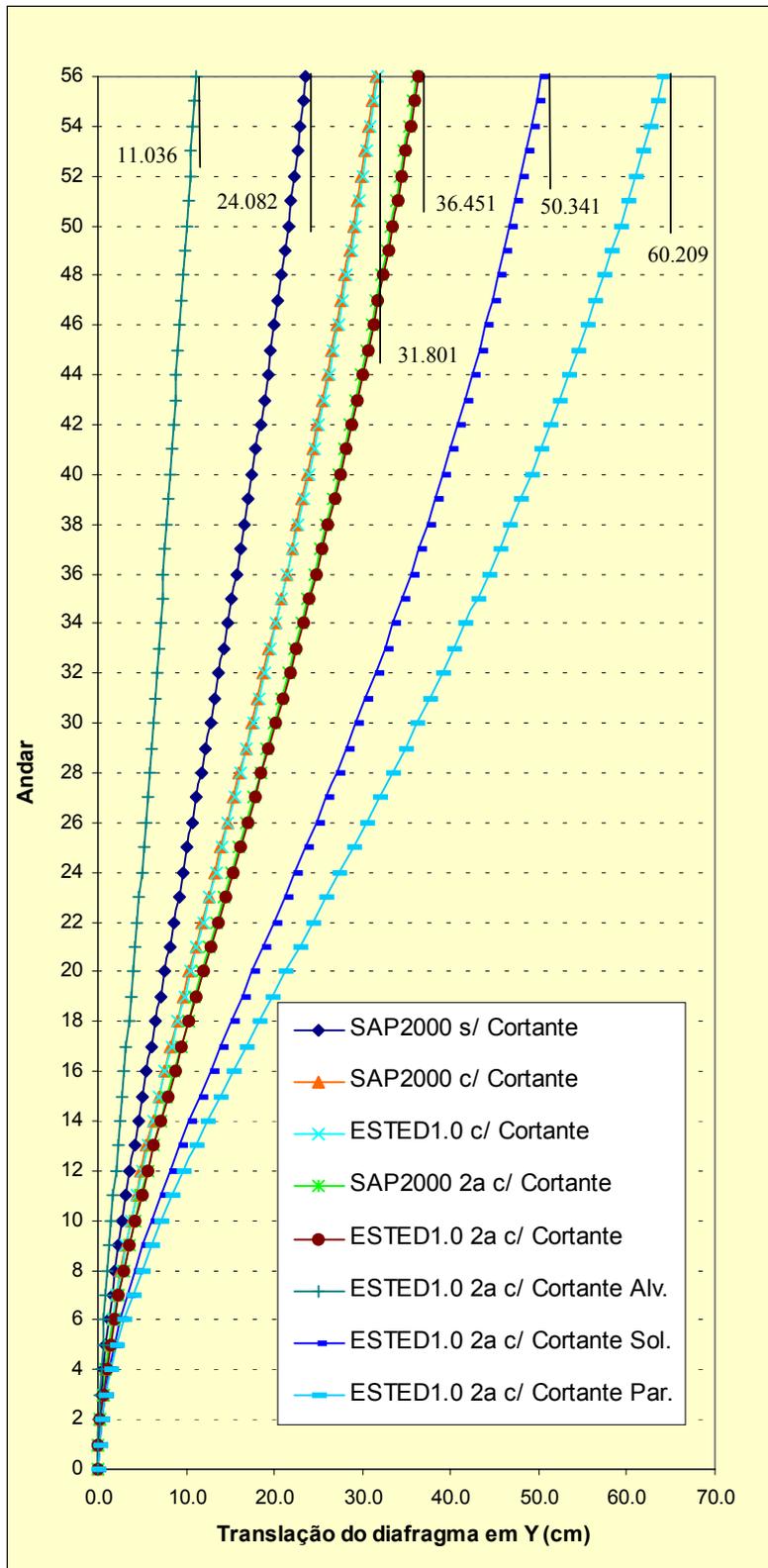
Para o mesmo edifício do exemplo 3 e o mesmo carregamento, acrescentando-se paredes de concreto delimitando os poços de elevadores, como se vê na planta, obtêm-se os resultados mostrados a seguir.



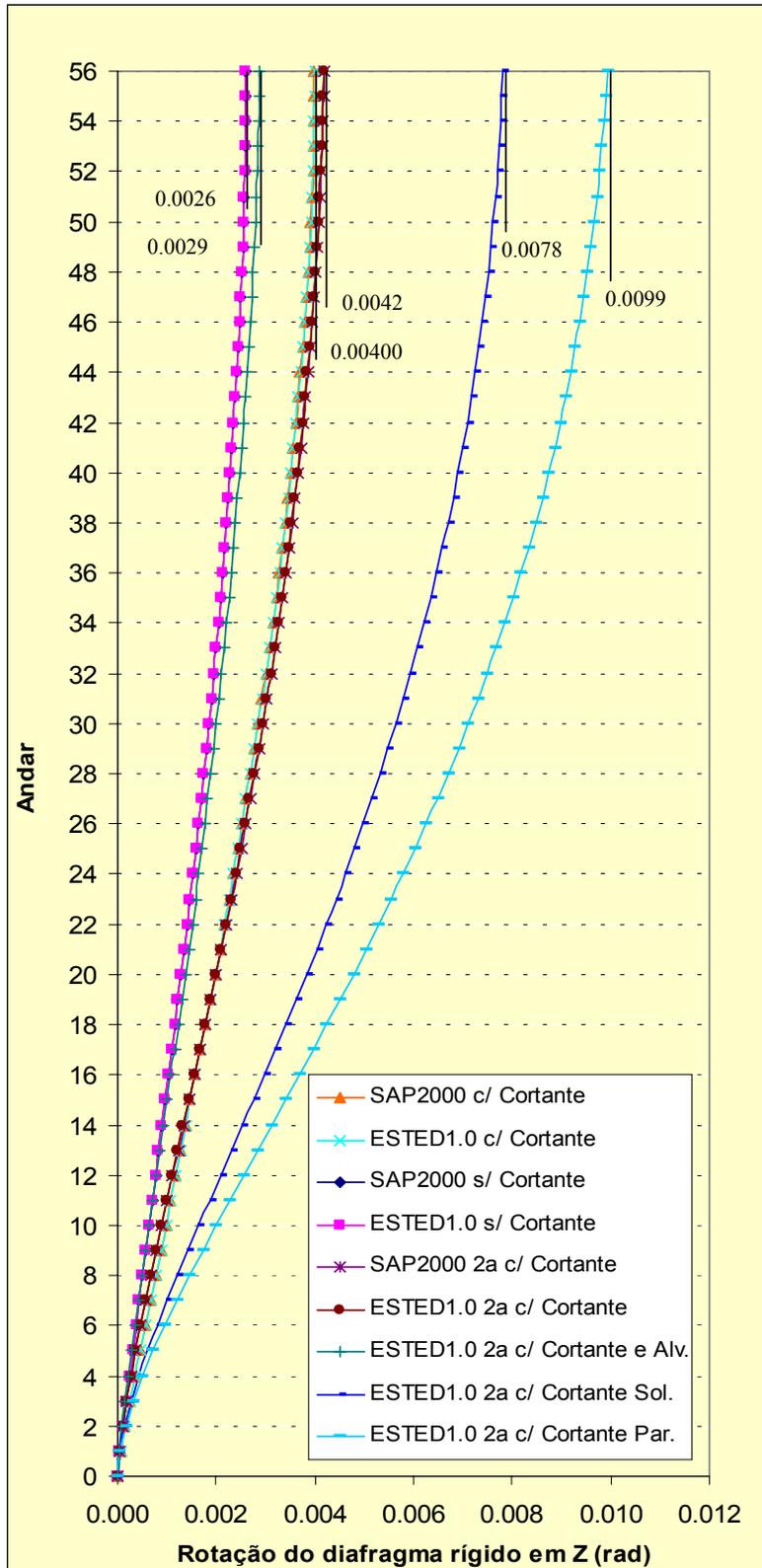
**Planta da quarta parte da estrutura com parede de concreto**



**Parâmetros das ligações entre vigas e pilares utilizados nas análises**



Translações dos diafragmas em Y para análise em 2ª ordem com núcleo



**Rotações dos diafragmas para análise em 2ª ordem com núcleo**

## 5 CONCLUSÕES

Com a utilização de novos sistemas estruturais e novas técnicas de análise é necessário o desenvolvimento de ferramentas adequadas para suas considerações. Para edifícios com estruturas metálicas, para os quais se utilizam materiais cada vez mais flexíveis, o que torna a estrutura menos rígida, é ainda mais importante a consideração de todos os componentes existentes na análise. Além do mais, como os componentes estudados já existem naturalmente na estrutura, nada mais lógico do que a consideração de suas contribuições à estabilidade da estrutura, o que pode ser decisivo para aceitação de um sistema estrutural.

A teoria mostrada no capítulo 2 teve por objetivo analisar estruturas tridimensionais de edifícios altos cuja estabilidade lateral pode ser assegurada por barras diagonais, núcleos de concreto e paredes de alvenaria. Além disso, pode-se considerar a semi-rigidez das ligações entre vigas e pilares. A análise pode ser feita em teoria de 2ª ordem de forma simplificada através da consideração dos efeitos  $P-\Delta$  e  $M-\theta$ .

Observando-se os resultados dos exemplos mostrados, foi possível chegar a várias conclusões a respeito da precisão dos resultados e das contribuições dos diversos elementos existentes na estrutura. Estas conclusões, acompanhadas de sugestões para continuação do presente trabalho, são apresentados a seguir.

Comparando-se os resultados do programa desenvolvido com os do programa SAP2000 [4], observa-se que os dois estão bastante próximos. As diferenças máximas detectadas nos deslocamentos e nos esforços solicitantes estão relacionadas às análises considerando os efeitos  $P-\Delta$  e  $M-\theta$  e foram da ordem de 1,3%. Estas diferenças podem ser explicadas por si considerar estes efeitos simplificadamente no programa desenvolvido, enquanto que no SAP2000 eles são considerados de maneira mais precisa, diretamente na matriz de rigidez das barras. Para os testes realizados com estrutura composta por paredes de concreto de seção aberta nos exemplos 2 e 4, os resultados do programa ESTED 1.0, que utiliza a

teoria da flexo-torção e do SAP2000 que utiliza elementos de chapa, ficaram muito próximos.

A consideração dos efeitos  $P-\Delta$  e  $M-\theta$ , pode ser feita sempre que se deseje, uma vez que não leva a grandes esforços computacionais adicionais e conduz a resultados mais precisos. No entanto não conduz a diferenças significativas quando se trata de estruturas indeslocáveis como no edifício do exemplo 1. Também é importante salientar que na análise não são considerados problemas de instabilidade da estrutura.

A consideração da deformação por força cortante influiu significativamente nos deslocamentos, pelo fato dos perfis metálicos com seção em forma de I e H possuírem valores relativamente altos de fator de forma. Esta influência ficou evidenciada no edifício tubular do exemplo 3.

A consideração da alvenaria aumentou bastante a rigidez lateral, reduzindo significativamente os deslocamentos e sendo os painéis de fechamento elementos indispensáveis na construção de edifícios, poderiam ser utilizadas como parte integrante da estrutura do edifício.

A consideração mais precisa da rigidez das ligações fez com que: As ligações usualmente tratadas como rígidas tivessem sua rigidez reduzida aumentando consideravelmente os deslocamentos e as ligações usualmente tratadas como flexíveis tivessem sua rigidez aumentada reduzindo em muito os deslocamentos, sendo um procedimento mais condizente com a realidade. A não consideração da semi-rigidez pode fazer com que a estrutura se torne insegura quando se usa ligações rígidas ou anti-econômicas quando se usa ligações flexíveis.

As hipóteses simplificadoras que impõem a nulidade de todos os deslocamentos na base da estrutura, todos os nós de andar serem considerados como pertencentes ao diafragma rígido e os pórticos e paredes serem necessariamente ortogonais são algumas das limitações do programa.

A possibilidade de aplicar deslocamentos nas bases, o dimensionamento automatizado de todos os componentes estruturais e a verificação dos mesmos em situação de incêndio, a

possibilidade de automatizar a entrada e a combinação de carregamentos, a consideração de ligações mistas semi-contínuas e a consideração da não linearidade física na análise são contribuições futuras ao presente trabalho.

O programa desenvolvido possui como principais vantagens em relação a outros programas conhecidos, inclusive comerciais, o fato de ser dedicado à análise de edifícios de andares múltiplos com estrutura de aço, permitindo com facilidade a consideração da semi-rigidez das ligações, da contribuição de painéis de fechamento ou paredes de alvenaria na rigidez lateral e ainda gerar automaticamente os andares que se repetem.

Finalmente, embora o programa tenha sido desenvolvido especialmente para as estruturas de aço, com partes dedicadas a estas estruturas, pode também ser utilizado para estruturas de concreto.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. VASCONCELLOS FILHO, A. – **Edifícios de Andares Múltiplos**. DEES – Escola de Engenharia da UFMG, 1981.
2. NBR8800/86, **Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios**. (Rio de Janeiro: (ABNT), 1986.
3. FAKURY, R.H. – **A Aplicação da Técnica do Meio Contínuo à Análise e ao Estudo do Comportamento dos Sistemas Estruturais Tubulares de Edifícios Altos**. Dissertação de Doutorado – Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1992.
4. SAP2000 – NonLinear Version 7.12 – **Structural Analysis Program** – Computers and Structures, Inc. 1995 University Ave. Berkeley, CA 94704
5. MANNING Jr., T.A. – **The Analysis of Tier Buildings With Shear Walls**. Departament of Civil Engineering, Stanford University, 1970.
6. RIBEIRO, S. R. S. – **Associação Tridimensional de Pórticos e Paredes de Seção Aberta em Estruturas de Edifícios Altos**. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1987.
7. POLYAKOV; **Masonry in Framed Building**. Gosudarstvennoe izdatel'stvo Literatury po stroitel'stvu i arkhitecture. Moscw, 1956.
8. SMITH, B. S.; **Lateral Stifness of Infilled Frames**. Journal of Structural Division - ASCE - ST6, pg. 473-478. Dezembro, 1961.
9. SMITH, B. S.; RIDDINGTON, J. R. – **Analysis of Infilled Frames Subject to Racking with Design Recommendations**. The Structural Engineer, v. 55, n.6, p. 263-268. June, 1977.
10. BRAGUIM, J.R. – **Contribuições ao Estudo do Enrijecimento de Estruturas de Aço em Edifícios de Múltiplos Pavimentos**. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos–USP, 1989.
11. SOUZA M. L. – **Análise de Estruturas de Aço com Ligações Semi-Rígidas em Teoria de 2ª Ordem**. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia da UFMG, 1999.

12. TSCHMMERNEGG, F. and HUMER, C. – **The Design of Structural Steel Frames Under Consideration of Nonlinear Behavior of Joints**. Journal of Constructional Steel Research, Volume 11, pp. 73-103, 1988.
13. WEAVER, W. Jr & GERE, J.M. – **Matrix Analysis of Framed Structures**. Third Edition, New York, Van Nostrand, 1990.
14. VASCONCELLOS FILHO, A. – **Teoria das Estruturas: Método dos Deslocamentos, Processo de Cross e Tabelas**. Escola de Engenharia da UFMG – BH, 1986.
15. RICHARD, R. M., GILLET, P. E., KRIEGH, J. D. and LEWIS, B. A. – **The Analysis and Design of Single Plate Framing Connections**. Aisc, Engineering Journal, 2 nd Quarter, pp. 38-52, 1980.
16. QUEIROZ, G., PIMENTA, R. J., FAKURY, R. H. – **Estudo do Comportamento de Ligações Flexíveis em Estruturas de Aço**. Relatório de Pesquisa RPEES 001/93, Escola de Engenharia – UFMG, 1993.
17. ENV 1993-1-1: Eurocode 3 – **Design of Steel Structures – General Rules and Rules for Buildings**. Annex J: Joints in Building Frames, CEN, Brussels, 1994.
18. LEON, R. T., HOFFMAN, J. J., STAEGER, T. – **Partially Restrained Composite Connections**. AISC, Steel Design Guide Series, N<sup>o</sup> 8 Chicago, 1996.
19. KING, W. S. and CHEN, W. F. – **LRFD Analysis for Semi-Rigid Frame Design**. AISC, Engineering Journal, 4 th Quarter, pp. 130-140, 1993.
20. VLASSOV, B. Z. – **Pieces Longues en Voiles Minces**. Paris, Eyrolles, 1962.
21. VIEIRA, L. F. C. - **Contribuição ao Estudo das Vedações no Enrijecimento de Estruturas de Aço Constituídas por Perfis Formados a Frio** - Dissertação de mestrado em andamento - Escola de Engenharia – UFMG.