

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

**ANÁLISE VISCOELÁSTICA E
VISCOPLÁSTICA DE SÓLIDOS
BIDIMENSIONAIS PELO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

Filipe Emanuel Souza Anacleto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS.

Orientador: Prof. Gabriel de Oliveira Ribeiro

Co-orientadora: Profa. Tatiana S. Antunes Ribeiro

Belo Horizonte
Dezembro de 2010

Concern for man and his fate must always form the chief interest of all technical endeavors. Never forget this in the midst of your diagrams and equations.

Albert Einstein

Índice

Índice	i
Lista de Figuras	v
Lista de Abreviaturas e Símbolos	vi
Resumo	x
Abstract	xi
Agradecimentos	xii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Plataforma Inicial	2
1.2 Estrutura do Trabalho	3
2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	4
2.1 Modelo Viscoelástico	4
2.1.1 Equação Constitutiva	5
2.2 Modelo Viscoplastico	7
2.2.1 Equação Constitutiva	8
2.2.2 Critérios de Escoamento	10
2.2.3 Regra de Fluxo	12
3 EQUAÇÕES INTEGRAIS	14
3.1 EIC Viscoelástica	15
3.2 EIC Viscoplastica	16
4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	18
4.1 Discretização	18
4.2 Formulação Viscoelástica	21
4.2.1 Discretização da EIC	21
4.2.2 Solução Não-linear	22
4.3 Formulação Viscoplastica	24
4.3.1 Discretização da EIC	24
4.3.2 Cálculo das Tensões	24

4.3.3	Criação de Células	27
4.3.4	Sub-regiões	29
4.3.5	Solução Não-linear	34
4.4	Tratamento das Integrais	36
4.4.1	Regulares	36
4.4.2	Quase Singulares	37
4.4.3	Fracamente Singulares	37
4.4.4	Fortemente Singulares	38
5	RESULTADOS NUMÉRICOS	40
5.1	Tubo Espesso Sujeito a Pressão Interna	40
5.2	Viga em Balanço Sujeita a Esforço Cisalhante	46
5.3	Chapa Perfurada Sujeita a Tração	50
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	58
	Referências Bibliográficas	59

Lista de Figuras

2.1	Modelo unidimensional viscoelástico de Kelvin-Voigt.	5
2.2	Curva característica do modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.	5
2.3	Modelo unidimensional elasto/viscoplástico.	8
2.4	Relações entre os incrementos de tensões $\Delta\sigma$, $\Delta\sigma^e$ e $\Delta\sigma^{vp}$	9
2.5	Superfície de escoamento de von Mises	11
2.6	Superfície de escoamento de Drucker-Prager	11
3.1	Geometria do problema	15
4.1	Discretização do contorno e domínio.	19
4.2	Representação dos elementos de contorno bidimensionais.	20
4.3	Representação das células internas bidimensionais.	21
4.4	Aproximação linear do tempo.	22
4.5	Representação dos eixos locais x'_i em um elemento de contorno	26
4.6	Representação do contorno plastificado.	28
4.7	Representação do pseudocontorno.	28
4.8	Atualização do pseudocontorno.	29
4.9	Evolução do pseudocontorno	30
4.10	Problema parcialmente acoplado	31
4.11	Solução do sistema com os nós da interface restringidos quanto a deslocamentos	32
4.12	Solução do sistema impondo deslocamentos unitários em cada um dos nós da interface	33
5.1	Tubo de parede espessa sujeito a pressão interna - Geometria do problema e malha	41
5.2	Convergência da solução para o deslocamento radial máximo $u_{re\acute{m}ax}$	42
5.3	Convergência da solução para a tensão tangencial máxima $\sigma_{\phi\phi\acute{m}ax}$	42

5.4	Convergência da solução para tensão radial máxima $\sigma_{rr_{máx}}$	43
5.5	Distribuição final para a componente u_x do campo de deslocamentos .	43
5.6	Distribuição final para a componente σ_x do campo dos estados de tensão	44
5.7	Convergência da solução para o deslocamento radial máximo $u_{re_{máx}}$ em função do tempo t	44
5.8	Convergência do erro da solução para o deslocamento radial máximo $u_{r_{máx}}$ em função do valor de Δt , considerando $k\Delta t = 40s$	45
5.9	Viga em balanço - Geometria do problema e malha	46
5.10	Convergência da solução final para a componente u_y do deslocamento no ponto B	48
5.11	Convergência da solução final para a componente σ_x do estado de tensão no ponto B	49
5.12	Convergência da solução final para a componente σ_{xy} do estado de tensão no ponto B	49
5.13	Convergência da solução para a componente u_y do deslocamento no ponto B em função do tempo (t)	50
5.14	Chapa perfurada sujeita a tração - Geometria do problema e malha .	51
5.15	Convergência da solução final máxima para a componente u_x dos deslocamentos	52
5.16	Convergência da solução final máxima para a componente u_y dos des- locamentos	52
5.17	Convergência da solução final máxima para a componente σ_x dos estados de tensão	53
5.18	Convergência da solução final máxima para a componente σ_y dos es- tados de tensão	53
5.19	Distribuições da solução final para a tensão equivalente de von Mises ($\sqrt{3J_2}$)	54
5.20	Evolução da Zona Plástica	54
5.21	Chapa perfurada sujeita a tração com 2 sub-regiões - Geometria do problema e malha	55
5.22	Comparação das distribuição final para a componente u_y do campo de deslocamentos	55
5.23	Convergência das diferenças dos valores máximos para as componen- tes u_x e u_y do deslocamentos obtidas considerando 1 e 2 sub-regiões. .	56

5.24 Convergência das diferenças dos valores máximos para as componentes σ_x e σ_y do estados de tensão obtidas considerando 1 e 2 sub-regiões. 56

Lista de Abreviaturas e Símbolos

C	Parâmetro elástico
η	Parâmetro viscoso
σ	Tensão total uniaxial
σ^e	Parcela elástica da tensão uniaxial
σ^v	Parcela viscoelástica da tensão uniaxial
ε	Deformação total uniaxial
ε^e	Parcela elástica da deformação uniaxial
ε^v	Parcela viscoelástica da deformação uniaxial
$\dot{\varepsilon}^v$	Derivada temporal da parcela viscoelástica da deformação uniaxial
σ_{ij}	Tensor de tensão total
ε_{kl}	Tensor de deformação total
$\dot{\varepsilon}_{kl}$	Derivada temporal do tensor de deformação total
C_{ijkl}	Tensor constitutivo elástico
η_{ijkl}	Tensor constitutivo viscoelástico
λ, μ	Constantes elásticas de Lamé
$\theta_\lambda, \theta_\mu$	Constantes viscoelásticas

δ_{ij}	Delta de Kronecker
E	Módulo de Young
ν	Coefficiente de Poisson
γ	Constante constitutiva viscosa
$Y(h)$	Tensão de escoamento equivalente
h	Parâmetro de endurecimento
Δt	Incremento de tempo
$\Delta \varepsilon$	Incremento de deformação total
$\Delta \varepsilon^e$	Incremento de deformação elástica
$\Delta \varepsilon^{vp}$	Incremento de deformação viscoplástica
$\Delta \sigma$	Incremento de tensão total
$\Delta \sigma^e$	Incremento de tensão elástica
$\Delta \sigma^{vp}$	Incremento de tensão viscoplástica
$\Delta \sigma^o$	Incremento de tensão inicial
$\Delta \sigma_{ij}$	Incremento do tensor de tensão total
$\Delta \varepsilon_{kl}$	Incremento do tensor de deformação total
$\Delta \varepsilon_{kl}^{vp}$	Incremento do tensor de deformação viscoplástica
F	Função de escoamento
F_o	Valor referência da função de escoamento
J_2	Segundo invariante do tensor desviatório

I_1	Primeiro invariante do tensor de tensão
s_{ij}	Tensor desviatório de tensão
α, β	Constantes do critério de Drucker-Prager
c	Coesão
ϕ	Ângulo de atrito interno
Ω	Domínio do problema
Γ	Contorno do problema
p	Ponto de colocação localizado no domínio
q	Ponto de integração localizado no domínio
P	Ponto de colocação localizado no contorno
Q	Ponto de integração localizado no contorno
U_{ij}^*	Solução fundamental de Kelvin para os deslocamentos
T_{ij}^*	Solução fundamental de Kelvin para as forças de superfície
E_{ij}^*	Solução fundamental de Kelvin para as deformações
n_i	Componente da normal unitária na direção i
r_i	Componente do raio na direção i
u_i	Componente do deslocamento na direção i
\dot{u}_i	Componente da derivada temporal do deslocamento na direção i
p_i	Componente da força de superfície na direção i
b_i	Componente da força de corpo na direção i

M^e	Número de elementos de contorno
N^e	Número de nós em um elemento de contorno
M^c	Número de células internas
N^c	Número de nós em uma célula interna
N_α	Funções de forma
N	Número de sub-regiões
w_s, ξ_s	Pesos e as abscissas de Gauss
J	Jacobiano da transformação
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
EIC	Equação Integral de Contorno
VPC	Valor Principal de Cauchy
IST	Identidade de Somigliana para Tensões

Resumo

Neste trabalho duas formulações para análise de problemas bidimensionais quase-estáticos de mecânica dos sólidos são estudadas e implementadas por meio do método dos elementos de contorno (MEC). A primeira é desenvolvida para analisar um meio viscoelástico, no qual o modelo de Kelvin-Voigt é utilizado para simular o comportamento dependente do tempo. A segunda lida com a análise de um meio viscoplástico considerando sub-regiões. Um modelo de material elasto/viscoplástico é utilizado juntamente com a regra de fluxo de Perzyna para representar o comportamento dependente do tempo. Utiliza-se um algoritmo para geração automática de células nas partes do domínio que sofrem escoamento. Para considerar as sub-regiões emprega-se uma técnica conhecida como método da matriz de rigidez. Exemplos utilizando ambas as formulações são analisados e comparados com as soluções analíticas e com resultados provenientes do método dos elementos finitos (MEF).

Palavras-Chave: método dos elementos de contorno, viscoelasticidade, viscoplasticidade, geração automática de células, sub-regiões.

Abstract

In the current work two time-dependent boundary element method (BEM) formulations are shown. The first one is developed to an analysis on a viscoelastic media. The Kelvin-Voigt viscoelastic material model is chosen to simulate the time-dependent behavior. The second one deals with an analysis on a multi-region viscoplastic media. An elasto/viscoplastic material model is chosen alongside Perzyna's flow rule to simulate the time-dependent behavior. A procedure to automatic generate cells in the zones of the domain that yielded is used. To deal with the multiple regions problem, a technique known as stiffness matrix method is used. Examples using both formulations are analyzed and the results are compared with the exact and Finite Element Method (FEM) results.

Keywords: boundary element method, viscoelasticity, viscoplasticity, automatic cell generation, multi-regions.

Agradecimentos

À minha família e amigos, pela compreensão e suporte durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Gabriel de Oliveira Ribeiro e à Tatiana S. Antunes Ribeiro pelo convívio prestimoso e pelo indispensável apoio.

Aos meus professores, colegas e amigos no Departamento de Engenharia de Estruturas, pela ajuda, pelo encorajamento, e por criarem um ambiente agradável para o trabalho. Neste sentido poderia listar inúmeros, como Rodrigo Sernizon, Adimar Maia, Sandra Pietrani, André Amaral, Samuel Penna, Prof. Felício Bruzzi, Prof. Estevam de Las Casas, Prof. Gilson Queiroz, Prof. Roque Pitangueira, e muitos outros mais. Obrigado.

À CAPES e à FAPEMIG pelo auxílio financeiro.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Desde o advento dos processadores no século passado, análises numéricas de variados problemas complexos têm, num ritmo acelerado, se tornado padrão em todos os setores da sociedade. Nas engenharias e em específico, na engenharia de estruturas, a teoria da Mecânica dos Sólidos adquiriu várias novas adições e aplicações. Problemas que antes não eram imaginados, hoje podem ser resolvidos com o auxílio dos processadores. Pode-se dizer que simulações numéricas desempenham um papel fundamental atualmente.

Tendo em mente a complexidade da realidade, pesquisadores de diferentes áreas têm, com o auxílio de processadores, se empenhado para considerar cada vez mais variáveis da realidade em suas análises. Na engenharia de estruturas, uma das áreas na qual se tem realizado esforço de pesquisa, é a de aperfeiçoamento da simulação do comportamento físico dos materiais. Por exemplo, no caso de materiais, como polímeros e solos, por apresentarem um comportamento viscoso que, quando negligenciado pode influenciar os resultados das análises, existe um empenho por parte de pesquisadores em tentar incorporar formulações que descrevam tal comportamento em suas análises numéricas.

Para a realização das simulações, existem hoje vários métodos numéricos bem difundidos, entre os quais se encontra o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Uma característica geral do MEC, que o difere de outros métodos, é a necessidade de se discretizar apenas o contorno da maioria dos problemas, podendo ter portanto,

uma malha com menor quantidade de nós. Isto em si, já o deixa bastante atraente, pois pode significar tanto um menor tempo de pré-processamento, como um menor número de graus de liberdade na etapa de processamento. Em específico na engenharia, o MEC, devido às suas características, também vem alcançando bastante destaque em certos tipos de simulações como, por exemplo, análises de túneis, de propagação de trincas e em acústica.

Este trabalho tem como objetivo a simulação numérica, utilizando o MEC, de dois comportamentos distintos, o viscoelástico e o viscoplástico. Ambos os comportamentos consideram o efeito do tempo, herdando o prefixo visco-. Contudo, cabe ressaltar que as formulações empregadas, não contemplam os efeitos dinâmicos do carregamento, por exemplo impacto, nem do material, por exemplo inércia, ambas portanto, caindo na categoria de análises quase-estáticas. Ambas as formulações consideram o regime de pequenas deformações.

A formulação viscoelástica utilizada se baseia no comportamento de um material do tipo Kelvin-Voigt (Fung, 1965). Este material não apresenta deformação instantânea quando solicitado, contudo ao passar do tempo de acordo com sua propriedade viscosa o estado de deformação tende ao estado de deformação elástico.

A formulação viscoplástica se baseia no modelo constitutivo elasto/viscoplástico juntamente com a regra de fluxo de Perzyna (Cormeau and Zienkiewicz, 1974). Este modelo apresenta uma deformação instantânea quando solicitado, porém, sendo o carregamento aplicado superior à resistência ao escoamento do material, deformações irreversíveis ocorrem ao passar do tempo.

1.1 Plataforma Inicial

Para a implementação das análises viscoelástica e viscoplástica, foi utilizado como plataforma inicial o código computacional desenvolvido por Ribeiro (2006) e Ribeiro et al. (2008). Este código continha as rotinas e classes para a solução de uma análise

elastoplástica pelo método dos elementos de contorno, juntamente com o algoritmo para geração automática de células descrito na sub-seção 4.3.3.

Durante o desenvolvimento do presente trabalho, foram criados e implementados à plataforma inicial os códigos computacionais necessários para a realização das análises viscoelástica e viscoplástica pelo método dos elementos de contorno. A linguagem C++ com o paradigma de Programação Orientada a Objetos (POO) foi utilizada durante as implementações.

1.2 Estrutura do Trabalho

Os modelos constitutivos utilizados para cada formulação são descritos no capítulo 2 juntamente com suas respectivas relações constitutivas. No capítulo 3, as equações integrais de contorno para cada formulação são apresentadas. A aplicação do MEC às equações integrais, assim como especificidades das formulações, são detalhadas no capítulo 4. Alguns dos resultados obtidos por meio dos códigos implementados são expostos e analisados no capítulo 5. No capítulo 6 as conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas.

Capítulo 2

RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

No âmbito a teoria da Mecânica do Contínuo podem-se definir como relações constitutivas o conjunto de equações matemáticas que descreve a interdependência entre as tensões e as deformações de um determinado material. Neste capítulo são expostas as equações utilizadas para representar as relações constitutivas para modelos de comportamento viscoelástico e viscoplástico. Ambos os modelos constitutivos levam em consideração a influência do tempo sobre o comportamento mecânico do material.

Além das relações constitutivas, para a definição de um problema, relações de equilíbrio e de compatibilidade são necessárias na Mecânica do Contínuo. Como pode ser verificado no capítulo 3, as relações de equilíbrio e compatibilidade utilizadas em ambas as formulações, viscoelástica e viscoplástica, não consideram a influência da aceleração, e portanto não levam em conta os efeitos derivados da inércia. Formulações desta natureza, que consideram o tempo, mas não envolvem os efeitos inerciais, são classificadas na literatura como problemas quase-estáticos, conforme Corneau (1975) e Christensen (1982).

2.1 Modelo Viscoelástico

O esquema utilizado para simular o comportamento viscoelástico é conhecido como modelo de Kelvin-Voigt, simbolicamente representado pela associação de uma

mola e um amortecedor em paralelo, conforme ilustrado na figura 2.1.

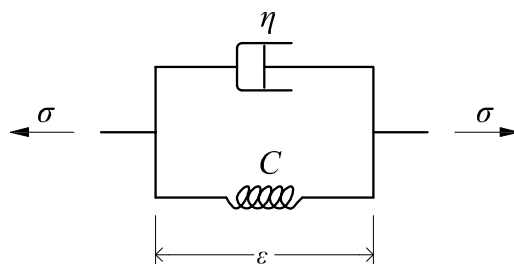


Figura 2.1: Modelo unidimensional viscoelástico de Kelvin-Voigt.

A figura 2.2 mostra a curva característica deste modelo. Conforme pode ser observado, o modelo não apresenta deformação instantânea quando solicitado, porém com o decorrer do tempo a deformação atinge seu valor máximo correspondente à solução elástica. Quando a solicitação é retirada, o modelo também não apresenta recuperação instantânea, contudo retorna ao estado inicial de deformação após um certo intervalo de tempo.

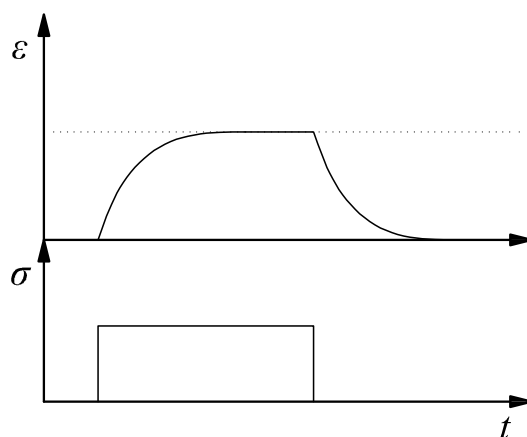


Figura 2.2: Curva característica do modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.

2.1.1 Equação Constitutiva

Na representação unidimensional do modelo de Kelvin-Voigt (Fig. 2.1) assume-se que a mola comporta-se no regime elástico linear, sendo portanto definida apenas por um parâmetro de flexibilidade C , conforme Eq. 2.1, e considera-se que o amortecedor

comporta-se como um fluido Newtoniano, sendo portanto definido apenas por um parâmetro η , de acordo com a Eq. 2.2.

$$\sigma^e = C\varepsilon^e \quad (2.1)$$

$$\sigma^v = \eta\dot{\varepsilon}^v \quad (2.2)$$

onde σ^e , σ^v , ε^e e ε^v são, respectivamente, a tensão elástica, a tensão viscosa, a deformação elástica e a derivada da deformação viscosa em relação ao tempo mostrada pela Eq. 2.3.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.3)$$

Devido à associação em paralelo (Fig. 2.1), a deformação total é equivalente à deformação elástica na mola e à deformação viscosa no amortecedor (Eq. 2.4), e a tensão total é equivalente à soma das tensões na mola e no amortecedor, conforme Eq. 2.5.

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^v \quad (2.4)$$

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \quad (2.5)$$

Substituindo as Eq. 2.1 e Eq. 2.2 na Eq. 2.5, e considerando a Eq. 2.4, a tensão total pode ser reescrita conforme:

$$\sigma = C\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (2.6)$$

Para um modelo tridimensional a Eq. 2.6 pode ser generalizada como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \eta_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} \quad (2.7)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensão, ε_{kl} é o tensor de deformações, $\dot{\varepsilon}_{kl}$ é o tensor de derivadas das deformações, C_{ijkl} é o tensor constitutivo elástico, dado pela Eq. 2.8, e η_{ijkl} é o tensor constitutivo viscoso, dado pela Eq. 2.9.

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) \quad (2.8)$$

$$\eta_{ijkl} = \theta_\lambda\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \theta_\mu\mu(\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}) \quad (2.9)$$

Nas Eq. 2.8 e Eq. 2.9, os termos λ , μ , θ_λ e θ_μ representam parâmetros do material que são determinados experimentalmente, enquanto o termo δ_{ij} representa o delta de Kronecker, dado pela Eq. 2.10.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (2.10)$$

Os termos λ e μ podem ser escritos em função do módulo de Young E e do coeficiente de Poisson ν conforme as Eq. 2.11 e Eq. 2.12.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.11)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.12)$$

Considerando-se os parâmetros viscosos θ_λ e θ_μ equivalentes a constante constitutiva viscosa γ , Eq. 2.13, a relação entre os tensores constitutivos pode ser escrita conforme Eq. 2.14.

$$\theta_\lambda = \theta_\mu = \gamma \quad (2.13)$$

$$\eta_{ijkl} = \gamma C_{ijkl} \quad (2.14)$$

Utilizando-se a Eq. 2.14, pode-se reescrever a Eq. 2.7 como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} + \gamma \dot{\varepsilon}_{kl}) \quad (2.15)$$

A expressão dada pela Eq. 2.15 é a relação constitutiva utilizada para realização da análise viscoelástica.

2.2 Modelo Viscoplastico

O modelo utilizado para simular este comportamento é conhecido como modelo elasto/viscoplastico de Hohenemser-Prager ou Perzyna e é ilustrado na figura 2.3. Este modelo é representado por um deslizador conectado em paralelo com um amortecedor, e este conjunto conectado em série com uma mola. Considera-se a mola

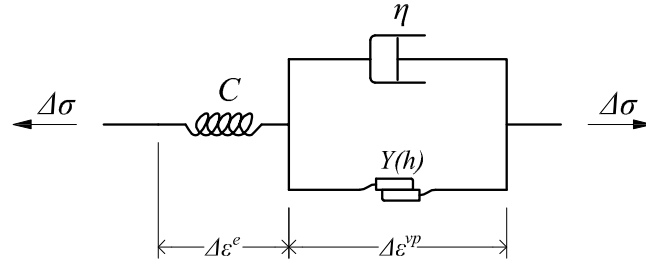


Figura 2.3: Modelo unidimensional elasto/viscoplástico.

elástica linear com constante elástica C , o deslizador como modelo de Saint-Venant com resistência ao escoamento $Y(h)$ e o amortecedor tendo comportamento Newtoniano com parâmetro viscoso η . Devido à consideração da possibilidade de escoamento do material este modelo é válido apenas para um incremento de tempo Δt . Quando solicitado o modelo apresenta uma deformação instantânea representada pelo incremento de deformação elástica $\Delta\varepsilon^e$ na mola devido à conexão em série, e no caso da solicitação σ assumir um valor igual ou superior a $Y(h)$, o conjunto amortecedor/deslizador sofrerá deformações permanentes $\Delta\varepsilon^{vp}$, obedecendo à propriedade viscosa do amortecedor e o parâmetro de endurecimento h do deslizador.

2.2.1 Equação Constitutiva

O incremento de deformação total do modelo unidimensional viscoplástico (Fig. 2.3) é dado pela soma dos incrementos de deformação elástica e viscoplástica (Venturini, 1983), conforme Eq. 2.16.

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^{vp} \quad (2.16)$$

Um diagrama da relação entre os incrementos das parcelas das tensões pode ser observado na figura 2.4. Todos os incrementos são dados em função do parâmetro elástico C . O incremento de tensão viscoplástica $\Delta\sigma^{vp}$ é escrito em função do incremento de deformação viscoplástica (ver Eq. 2.17c) e é considerado como um incremento de tensão inicial ($\Delta\sigma^o$) a ser redistribuída. O incremento de tensão elástica $\Delta\sigma^e$ é dado pelo incremento de deformação total (ver Eq. 2.17b), e o incremento

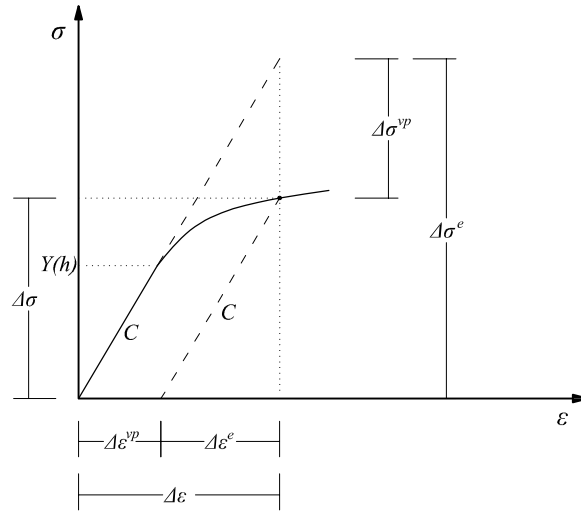


Figura 2.4: Relações entre os incrementos de tensões $\Delta\sigma$, $\Delta\sigma^e$ e $\Delta\sigma^{vp}$.

de tensão total $\Delta\sigma$ é escrito em função do incremento de deformação elástica (ver Eq. 2.17a). Na figura 2.4 o parâmetro elástico C representa a inclinação das retas paralelas tracejadas.

$$\Delta\sigma = C\Delta\varepsilon^e \quad (2.17a)$$

$$\Delta\sigma^e = C\Delta\varepsilon \quad (2.17b)$$

$$\Delta\sigma^{vp} = C\Delta\varepsilon^{vp} \quad (2.17c)$$

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma^e - \Delta\sigma^{vp} \quad (2.18)$$

Inserindo-se as Eq. 2.17b e Eq. 2.17c na Eq. 2.18, o incremento de tensão total pode ser escrito conforme Eq. 2.19.

$$\Delta\sigma = C(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{vp}) \quad (2.19)$$

Para um modelo tridimensional a Eq. 2.19 pode ser generalizada como

$$\Delta\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\Delta\varepsilon_{kl} - \Delta\varepsilon_{kl}^{vp}) \quad (2.20)$$

A expressão dada pela Eq. 2.20 é a relação constitutiva utilizada para realização da análise viscoplástica. Sua estrutura é similar à relação constitutiva elastoplástica. Contudo possui uma diferença fundamental; enquanto a relação elastoplástica é

válida somente para um incremento de carga, a relação viscoplástica é válida somente para um incremento de tempo Δt .

2.2.2 Critérios de Escoamento

Os critérios de escoamento são fundamentais para uma análise onde a possibilidade de plastificação do material é considerada. Os critérios definem em qual estado de tensão o material entra em regime de escoamento e definem também como a resistência do material é afetada pelo escoamento. A seguir o critério de escoamento de von Mises e o de Drucker-Prager são apresentados.

No critério de von Mises considera-se que o escoamento ocorre quando a tensão de cisalhamento octaédrica atinge um valor limite k . Este critério pode ser escrito de forma geral conforme uma função de escoamento F dada por

$$F = \sqrt{3J_2} - Y(h) = 0 \quad (2.21)$$

onde $Y(h)$ é uma função de um parâmetro de endurecimento h e o termo J_2 representa o segundo invariante do tensor desviatórioico (s_{ij}) , dado por

$$J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} \quad (2.22)$$

Conforme pode ser observado pela superfície de escoamento de von Mises apresentada na figura 2.5, este critério não é afetado pela parcela hidrostática do tensor de tensão.

O critério de Drucker-Prager pode ser abordado como sendo uma modificação do critério de von Mises para levar em consideração a influência do tensor hidrostático de tensão na resistência ao cisalhamento do material. Este critério pode ser escrito de forma geral conforme

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - \beta = 0 \quad (2.23)$$

onde I_1 é o primeiro invariante do tensor de tensão, dado por Eq. 2.24, e α e β são constantes do material definidas pela coesão c e pelo ângulo de atrito interno ϕ ,

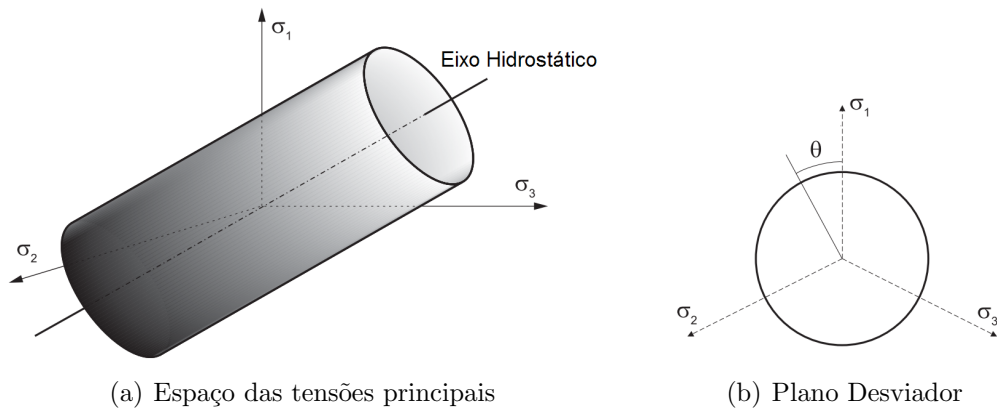


Figura 2.5: Superfície de escoamento de von Mises

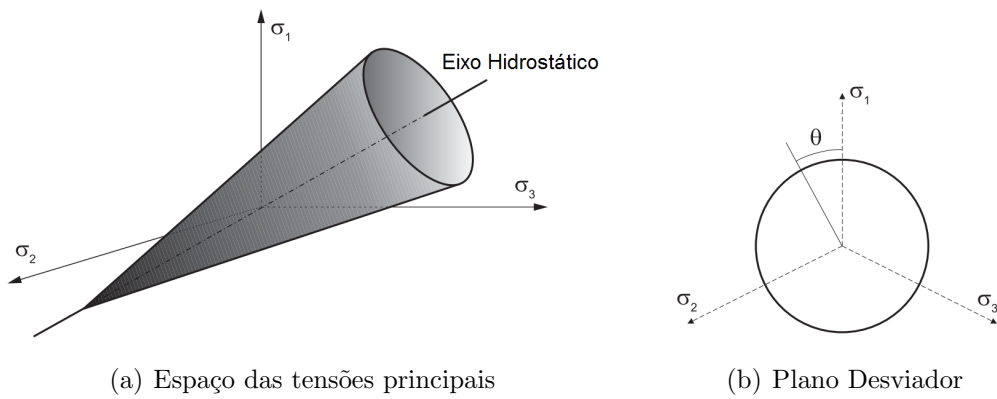


Figura 2.6: Superfície de escoamento de Drucker-Prager

podendo ser consideradas como

$$I_1 = \sigma_{kk} \quad (2.24)$$

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (2.25)$$

$$\beta = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (2.26)$$

O critério de Drucker-Prager descreve um cone circular no espaço das tensões principais com seu eixo central coincidindo com o eixo hidrostático ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$), conforme mostrado na figura 2.6.

2.2.3 Regra de Fluxo

Pode-se definir regra de fluxo como sendo a equação que rege a evolução da parcela irreversível da deformação em função do estado de tensão, e denomina-se associativa se a deformação permanente evolui na direção e sentido da normal à superfície de escoamento. A regra de fluxo associativa referente ao modelo elasto/viscoplástico utilizada pode ser escrita conforme (Cormeau and Zienkiewicz, 1974)

$$\Delta\varepsilon_{kl}^{vp} = \frac{1}{\gamma} \left\langle \frac{F}{F_o} \right\rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \Delta t \quad (2.27)$$

onde γ é um parâmetro do material que descreve o comportamento dependente do tempo, e F é a função de escoamento. O termo F_o representa um valor conveniente de F , para a representação adimensional do incremento. Como nenhuma deformação viscoplástica ocorre abaixo do limite de escoamento, a notação $\langle \rangle$ é utilizada na Eq. 2.27 para indicar que

$$\left\langle \frac{F}{F_o} \right\rangle = \begin{cases} \frac{F}{F_o} & \text{para } F > 0 \\ 0 & \text{para } F \leq 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Uma vez definido o incremento do tensor de deformações viscoplásticas, é possível o cálculo de um incremento do tensor de tensões iniciais pela generalização para um modelo tridimensional da Eq. 2.17c conforme

$$\Delta\sigma_{ij}^o = C_{ijkl} \Delta\varepsilon_{kl}^{vp} \quad (2.29)$$

Diferentemente da análise viscoelástica, o valor do passo de tempo Δt na análise elasto/viscoplástica não pode ser escolhido livremente. Conforme demonstrado por Cormeau (1975), o valor limite para Δt é diferente para cada critério de escoamento utilizado. Para que não ocorram instabilidades numéricas o valor do passo de tempo deve atender ao seguinte limite (Cormeau, 1975)

$$\Delta t \leq \frac{4\gamma(1+\nu)}{3E} F_o \quad (2.30)$$

para o critério de von Mises, e

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{4\gamma(1+\nu)}{\beta E} \sqrt{J_2} \left\langle \frac{F_o}{F} \right\rangle, \frac{4\gamma(1+\nu)}{E} \frac{F_o}{(\beta^2 + 6\alpha^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right))} \right) \quad (2.31)$$

para o critério de Drucker-Prager.

Capítulo 3

EQUAÇÕES INTEGRAIS

Neste capítulo são expostos os principais passos para obtenção das formulações integrais de contorno para análise de sólidos bidimensionais viscoelásticos e viscoplásticos utilizadas neste trabalho.

As deduções de ambas as EIC baseiam-se no teorema do trabalho recíproco de Betti que pode ser escrito conforme

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} \quad (3.1)$$

onde os campos independentes caracterizados por $(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$ e $(\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*)$ atendem às equações de equilíbrio, às relações constitutivas e às equações de compatibilidade. O campo $(\sigma_{ij}^*, \varepsilon_{ij}^*)$, em ambas as formulações, é considerado sendo a solução do problema fundamental de Kelvin. Neste campo considera-se uma carga unitária aplicada em um ponto p de um domínio infinito Ω^* . As soluções fundamentais obtidas a partir equações de equilíbrio de Navier para problemas bidimensionais para os deslocamentos, as deformações e as forças de superfície (considerando o plano no domínio definido pela normal n) podem ser escritas, respectivamente, como

$$U_{ij}^*(p, q) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (3.2)$$

$$E_{ijk}^*(p, q) = \frac{-1}{8\pi\mu(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik}) - r_{,i} \delta_{jk} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}] \quad (3.3)$$

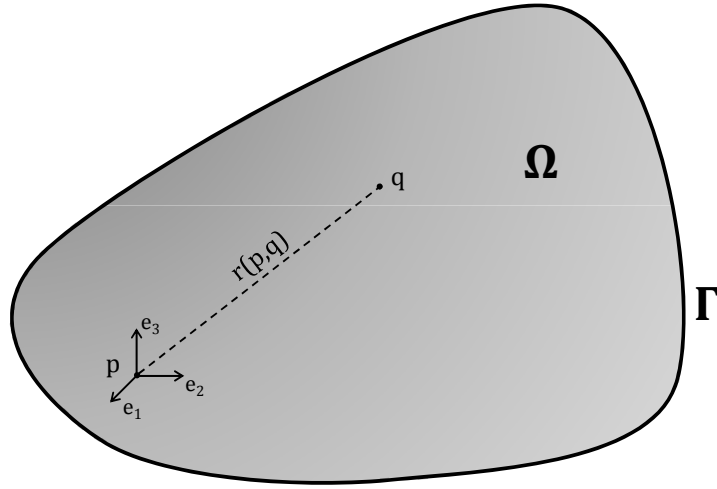


Figura 3.1: Geometria do problema

$$T_{ij}^*(p, q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{dr}{dn} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} \quad (3.4)$$

Estas soluções fundamentais representam, respectivamente, as componentes j dos deslocamentos, jk das deformações e j das forças de superfície num plano definido pela normal n , no ponto q , devido a uma carga unitária aplicada na direção i no ponto p . Pontos identificados com letras maiúsculas (P, Q) pertencem ao contorno Γ , enquanto pontos pertencentes ao domínio Ω são identificados com letras minúsculas (p, q).

O campo $(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$ refere-se ao problema a ser resolvido e, portanto, é distinto para cada formulação; contudo, em ambas as formulações, os termos relativos às forças de corpo b_i não são consideradas (forças de corpo nulas).

3.1 EIC Viscoelástica

Considerando o campo $(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$ constituído por um material viscoelástico, utilizando a relação constitutiva apresentada na Eq. 2.15, a EIC viscoelástica pode ser desenvolvida a partir do teorema de Betti (Eq. 3.1). Utilizando-se um processo de integração por partes, e um processo de limites levando o ponto fonte para o

contorno Γ , como detalhado em (Carbone, 2007), obtêm-se a EIC expressa na Eq. 3.5.

$$\begin{aligned} C_{ij}(P)u_j(P) + C_{ij}(P)\gamma\dot{u}_j(P) &= \int_{\Gamma} U_{ij}^*(P, Q)p_j(Q)d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} T_{ij}^*(P, Q)u_j(Q)d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} T_{ij}^*(P, Q)\dot{u}_j(Q)d\Gamma \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde o símbolo \int denota que esta integral deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy (VPC) e os termos u_j , p_j e \dot{u}_j representam, respectivamente, o deslocamento, a força de superfície, e a derivada do deslocamento em relação ao tempo. A Eq. 3.5 relaciona o deslocamento e a taxa do deslocamento em um ponto do contorno Γ com todos os deslocamentos, taxas dos deslocamentos e forças de superfície deste mesmo contorno. O termo C_{ij} tem sua definição conforme:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para pontos pertencentes ao domínio } \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{para pontos em contornos suaves} \\ 0 & \text{para pontos externos ao domínio } \Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

e, para contornos não suaves seu valor pode ser calculado diretamente via integração ou indiretamente levando em consideração conceitos de movimento de corpo rígido.

3.2 EIC Viscopoplástica

Considerando o campo $(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij})$ constituído por um material viscoplástico, utilizando a relação constitutiva dada pela Eq. 2.20, a EIC viscoplástica pode ser desenvolvida a partir do teorema de Betti (Eq. 3.1). Utilizando-se um processo de integração por partes, e um processo de limites levando o ponto fonte para o contorno, obtêm-se a seguinte EIC (Venturini, 1983)

$$\begin{aligned} C_{ij}(P)\Delta u_j(P) &= \int_{\Gamma} U_{ij}^*(P, Q)\Delta p_j(Q)d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} T_{ij}^*(P, Q)\Delta u_j(Q)d\Gamma + \int_{\Omega} E_{ijk}^*(P, q)\Delta\sigma_{jk}^o(q)d\Omega \end{aligned} \quad (3.7)$$

A EIC exposta na Eq. 3.7 relaciona o deslocamento em um ponto do contorno Γ com todos os deslocamentos e forças de superfície deste mesmo contorno, juntamente com as influências de tensões iniciais $\Delta\sigma_{jk}^o$ no domínio Ω . O termo referente ao domínio nesta formulação é fundamental para tratar a possibilidade da ocorrência de deformações irreversíveis e a redistribuição de tensão, conforme exposto na seção 2.2. É importante ressaltar que a EIC (Eq. 3.7) é válida apenas para um incremento de tempo Δt .

Capítulo 4

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Neste capítulo o método utilizado para realizar a implementação numérica da teoria discutida nos capítulos anteriores é apresentado. Devido às dificuldades envolvidas no processo de solução analítica das Eq. 3.5 e Eq. 3.7 uma aproximação numérica é necessária. O método de aproximação utilizado é conhecido como Método dos Elementos de Contorno (MEC). O MEC consiste na discretização da EIC do problema, considerando-se a aproximação geométrica do contorno Γ , bem como das grandezas, deslocamento e força de superfície, sobre o contorno. O contorno e as grandezas envolvidas são escritos em termos de funções de interpolação expressas em coordenadas intrínsecas. Quando a EIC do problema envolve também o domínio do problema, como é o caso da análise viscoplástica, este é discretizado fazendo uso de células e nós internos. A figura 4.1 ilustra este processo de discretização.

Neste trabalho são utilizados elementos isoparamétricos lineares e quadráticos, e para o domínio são utilizadas células isoparamétricas lineares e quadráticas.

4.1 Discretização

O contorno do problema é dividido em M^e elementos, com N^e nós cada um. A geometria aproximada e as grandezas envolvidas no problema são escritas utilizando

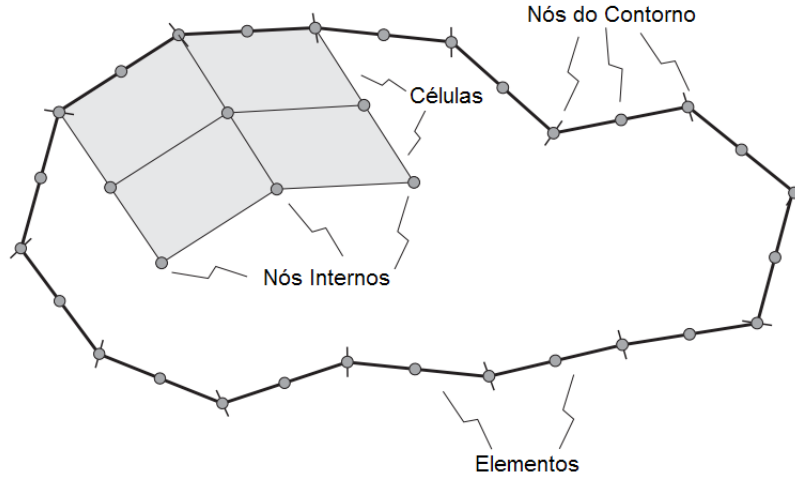


Figura 4.1: Discretização do contorno e domínio.

funções de interpolação $N_\alpha(\xi)$ conforme Eq. 4.1.

$$\begin{aligned}
 x_i(Q) &\approx x_i(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{N^e} N_\alpha(\xi) x_i^\alpha \\
 u_i(Q) &\approx u_i(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{N^e} N_\alpha(\xi) u_i^\alpha \\
 p_i(Q) &\approx p_i(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{N^e} N_\alpha(\xi) p_i^\alpha
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde x_i , u_i e p_i são respectivamente os valores da componente i das coordenadas cartesianas, dos deslocamentos e das forças de superfície. O termo α é referente à posição local do nó no elemento. As funções de interpolação N_α são dadas por

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \quad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \tag{4.2}$$

para elementos lineares (figura 4.2(a)), e

$$N_1(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2} \quad N_2(\xi) = \frac{\xi(\xi+1)}{2} \quad N_3(\xi) = 1-\xi^2 \tag{4.3}$$

para elementos quadráticos (figura 4.2(b)).

A região do domínio a ser discretizada é dividida em M^c células, com N^c nós cada uma. De maneira similar ao contorno, as grandezas envolvidas são aproximadas

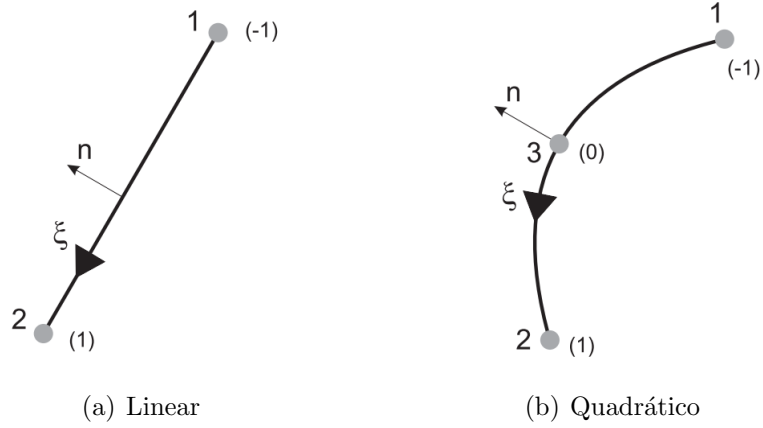


Figura 4.2: Representação dos elementos de contorno bidimensionais.

utilizando funções de forma, conforme Eq. 4.4.

$$\begin{aligned}
 x_i(q) &\approx x_i(\xi, \eta) = \sum_{\alpha=1}^{N^c} N_\alpha(\xi, \eta) x_i^\alpha \\
 \sigma_{ij}^o(q) &\approx \sigma_{ij}^o(\xi, \eta) = \sum_{\alpha=1}^{N^c} N_\alpha(\xi, \eta) \sigma_{ij}^{\alpha o}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

onde

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta) &= \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4} & N_2(\xi, \eta) &= \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4} \\
 N_3(\xi, \eta) &= \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4} & N_4(\xi, \eta) &= \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{4}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

para células lineares (figura 4.3(a)), e

$$\begin{aligned}
 N_\alpha(\xi, \eta) &= \frac{(1 + \xi_\alpha \xi)(1 + \eta_\alpha \eta)(-1 + \xi_\alpha \xi + \eta_\alpha \eta)}{4} & \text{para } \alpha = 1 \text{ até } 4 \\
 N_\alpha(\xi, \eta) &= \frac{(1 + \xi_\alpha \xi + \eta_\alpha \eta)[1 - (\xi_\alpha \eta)^2 - (\eta_\alpha \xi)^2]}{2} & \text{para } \alpha = 5 \text{ até } 8
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

para células quadráticas (figura 4.3(b)).

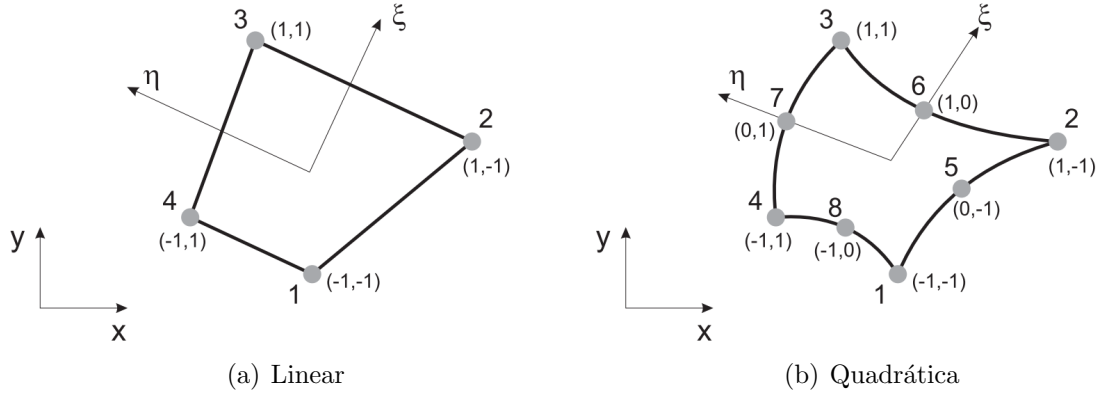


Figura 4.3: Representação das células internas bidimensionais.

4.2 Formulação Viscoelástica

4.2.1 Discretização da EIC

Utilizando as relações expressas na Eq. 4.1, a EIC viscoelástica (Eq.3.5) pode ser escrita conforme

$$\begin{aligned}
 C_{ij}(P)u_j(P) + C_{ij}(P)\gamma\dot{u}_j(P) &= \sum_{m=1}^{M^e} \sum_{\alpha=1}^{N^e} p_j^\alpha(Q(\xi)) \int_{\Gamma_e} N_\alpha(\xi) U_{ij}^*(P, Q(\xi)) d\Gamma_e \\
 &- \sum_{m=1}^{M^e} \sum_{\alpha=1}^{N^e} u_j^\alpha(Q(\xi)) \int_{\Gamma_e} N_\alpha(\xi) T_{ij}^*(P, Q(\xi)) d\Gamma_e \quad (4.7) \\
 &- \gamma \sum_{m=1}^{M^e} \sum_{\alpha=1}^{N^e} \dot{u}_j^\alpha(Q(\xi)) \int_{\Gamma_e} N_\alpha(\xi) T_{ij}^*(P, Q(\xi)) d\Gamma_e
 \end{aligned}$$

Aplicando a Eq. 4.7 em todos os nós do contorno, o seguinte sistema matricial pode ser escrito

$$[T]\{u\} + \gamma[T]\{\dot{u}\} = [U]\{p\} \quad (4.8)$$

onde $[T]$ e $[U]$ são as matrizes que contêm todos os coeficientes da integração do contorno. Os vetores $\{u\}$, $\{\dot{u}\}$ e $\{p\}$ contêm, respectivamente, os deslocamentos, as taxas de deslocamento e forças de superfície. Considerando uma aproximação linear do tempo conforme Eq. 4.9 e figura 4.4, a Eq. 4.8 pode ser reescrita conforme Eq. 4.10.

$$\dot{u}_{s+1} = \frac{u_{s+1} - u_s}{\Delta t} \quad (4.9)$$

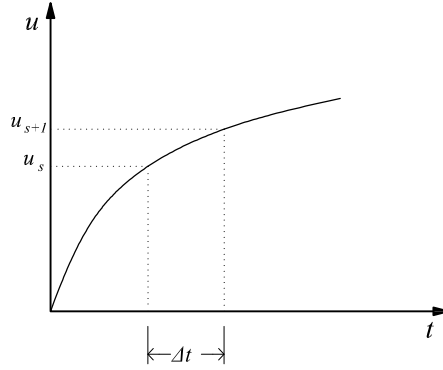


Figura 4.4: Aproximação linear do tempo.

$$[T]\{u_{s+1}\} + \gamma[T] \left\{ \frac{u_{s+1} - u_s}{\Delta t} \right\} = [U]\{p_{s+1}\} \quad (4.10)$$

A Eq. 4.10 pode ser reorganizada conforme Eq. 4.11.

$$\left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right) [T]\{u_{s+1}\} = [U]\{p_{s+1}\} + \{F_s\} \quad (4.11)$$

onde

$$\{F_s\} = \gamma[T] \left\{ \frac{u_s}{\Delta t} \right\} \quad (4.12)$$

4.2.2 Solução Não-linear

A rotina para solução da análise viscoelástica avança em passos de tempo Δt e é, numa sentença, a solução da Eq. 4.11, a cada incremento Δt . Conforme demonstrado no capítulo 5, o valor de Δt influencia nos resultados durante a análise, mas não chega a causar uma instabilidade numérica nem influencia as soluções finais, i.e., quando $t \rightarrow \infty$. O valor de Δt pode ser variável durante a análise, contudo neste trabalho valores constantes de Δt foram utilizados. A rotina para análise viscoelástica pode ser resumida nestas principais etapas:

- a. Primeiramente os valores das matrizes $[T]$ e $[U]$ são calculados, assim como no MEC padrão.
- b. Utilizando-se o valor de Δt adotado e as condições de contorno prescritas, a Eq. 4.11 pode ser reescrita conforme

$$\{x_{s+1}\} = [A]^{-1}(\{B\} + \{F_s\}) \quad (4.13)$$

onde $\{x_{s+1}\}$ é um vetor com as incógnitas de contorno, $[A]$ é uma matriz que contém os coeficientes referentes a estas incógnitas, $\{B\}$ é um vetor que contém valores decorrentes das grandezas de contorno prescritas e seus respectivos coeficientes.

- c. Com este sistema montado e calculado, uma repetição se inicia em incrementos de tempo ($\{\Delta x\}$) onde, a cada incremento as seguintes operações são executadas:
- i. O vetor $\{F_s\}$ é calculado utilizando-se a Eq. 4.12.
 - ii. O vetor das incógnitas do contorno $\{x_{s+1}\}$ é então obtido pela Eq. 4.13.
 - iii. Todas as incógnitas do contorno são atualizadas para os valores calculados no passo de tempo atual.

Esta repetição continua até que o intervalo de tempo total (t) a ser analisado seja alcançado.

É apropriado explicitar que no primeiro incremento de Δt o vetor $\{F_s\}$ é, em geral, nulo. Isto se deve ao fato deste vetor ser função dos deslocamentos ocorridos até o passo de tempo anterior ($\{u_s\}$), e como este é o primeiro incremento de tempo, o vetor $\{u_s\}$ é nulo, com exceção, é claro, caso houver deslocamentos prescritos como condição inicial de contorno.

4.3 Formulação Viscoplastica

4.3.1 Discretização da EIC

O processo de discretização da EIC viscoplastica é semelhante ao utilizado na formulação viscoelastica. As principais diferenças são que o tempo já está discretizado, e a existência de um termo relativo ao domínio que deve ser discretizado. Utilizando as relações expressas pela Eq. 4.1 e pela Eq. 4.4 a EIC Viscoplastica (Eq. 3.7) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
C_{ij}(P)\Delta u_j(P) = & \sum_{m=1}^{M^e} \sum_{\alpha=1}^{N^e} \Delta p_j^\alpha(Q(\xi)) \int_{\Gamma_e} N_\alpha(\xi) U_{ij}^*(P, Q(\xi)) d\Gamma_e \\
& - \sum_{m=1}^{M^e} \sum_{\alpha=1}^{N^e} \Delta u_j^\alpha(Q(\xi)) \int_{\Gamma_e} N_\alpha(\xi) T_{ij}^*(P, Q(\xi)) d\Gamma_e \\
& + \sum_{m=1}^{M^c} \sum_{\alpha=1}^{N^c} \Delta \sigma_{jk}^{\alpha\alpha}(q(\xi, \eta)) \int_{\Omega_c} N_\alpha(\xi, \eta) E_{ijk}^*(P, q(\xi, \eta)) d\Omega_c
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Aplicando a Eq. 4.14 para cada nó do contorno, obtêm-se o seguinte sistema matricial

$$[T]\{\Delta u\} = [U]\{\Delta p\} + [E]\{\Delta \sigma^o\} \tag{4.15}$$

onde $[E]$ representa uma matriz que contém os coeficientes referentes à integração no domínio, e o vetor $\{\Delta \sigma^o\}$ contém os valores nodais das tensões iniciais.

4.3.2 Cálculo das Tensões

Na análise viscoplastica é essencial que os estados de tensão nos nós do problema sejam determinados. Devido à alta singularidade presente na EIC das tensões, duas abordagens para o cálculo das tensões são utilizadas. Para pontos internos, a identidade de Somigliana para tensões (IST) com tensões iniciais é utilizada, e para pontos no contorno a técnica conhecida como ‘método de recuperação da tensão’ é aplicada.

Para pontos internos, o cálculo da tensão efetuado com base na IST é mais eficiente que o cálculo numérico por derivação a partir do campo dos deslocamento como exposto por Telles and Brebbia (1982). A IST com tensões iniciais permite a determinação de tensões em pontos internos a partir dos valores do contorno e das tensões iniciais no domínio, e pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{ij}(p) = & \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(p, Q)\Delta p_k(Q)d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(p, Q)\Delta u_k(Q)d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} W_{ijkl}^*(p, q)\Delta\sigma_{kl}^o(q)d\Omega + F_{ijkl}^*\Delta\sigma_{kl}^o(p) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Os termos D_{ijk}^* , S_{ijk}^* e W_{ijkl}^* , juntamente com o termo livre F_{ijkl}^* , são derivados das soluções fundamentais de Kelvin, e para problemas bidimensionais são dados por:

$$D_{ijk}^*(p, Q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} S_{ijk}^*(p, Q) = & \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2} \{2r_{,m}n_m[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) \\ & - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} \\ & + \delta_{ik}n_j + \delta_{jk}n_i) - (1-4\nu)\delta_{ij}n_k\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} W_{ijkl}^*(p, q) = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} [(1-2\nu)(\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{jk}\delta_{li} - \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{ij}r_{,k}r_{,l}) \\ & + 2\nu(\delta_{li}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,l}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,l}r_{,j} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k}) \\ & + 2\delta_{kl}r_{,i}r_{,j} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l}] \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$F_{ijkl}^* = \frac{-1}{8(1-\nu)} [(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + (1-4\nu)\delta_{ij}\delta_{kl}] \quad (4.20)$$

Utilizando-se as aproximações das grandezas físicas, Eq. 4.1 e Eq. 4.4, a IST

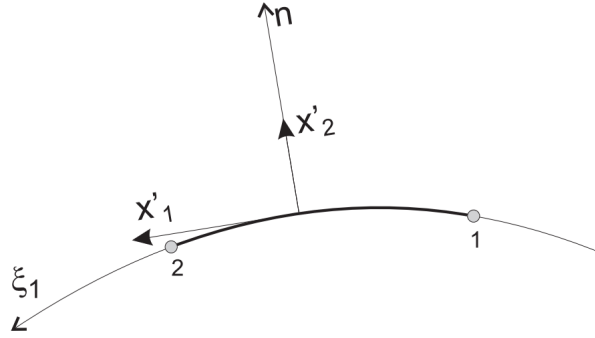


Figura 4.5: Representação dos eixos locais x'_i em um elemento de contorno

com tensões iniciais pode ser discretizada conforme Eq. 4.21.

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{ij}(p) = & \sum_{m=1}^{M^e} \sum_{\alpha=1}^{N^e} \Delta p_k^\alpha(Q(\xi)) \int_{\Gamma_e} N_\alpha(\xi) D_{ijk}^*(p, Q(\xi)) d\Gamma_e \\
& - \sum_{m=1}^{M^e} \sum_{\alpha=1}^{N^e} \Delta u_k^\alpha(Q(\xi)) \int_{\Gamma_e} N_\alpha(\xi) S_{ijk}^*(p, Q(\xi)) d\Gamma_e \\
& + \sum_{m=1}^{M^c} \sum_{\alpha=1}^{N^c} \Delta\sigma_{kl}^{\alpha\alpha}(q(\xi, \eta)) \int_{\Omega_c} N_\alpha(\xi, \eta) W_{ijkl}^*(p, q(\xi, \eta)) d\Omega_c \\
& + F_{ijkl}^* \Delta\sigma_{kl}^o(p)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

A Eq. 4.21 pode ser escrita de forma matricial considerando os nós do contorno e do domínio conforme Eq. 4.22.

$$\{\Delta\sigma\} = [S]\{\Delta u\} + [D]\{\Delta p\} + [W]\{\Delta\sigma^o\} \tag{4.22}$$

Para cálculo das tensões em pontos no contorno o ‘método de recuperação da tensão’ (Aliabadi, 2002; Gao and Davies, 2002) é utilizado. A EIC das tensões não é utilizada com o objetivo de evitar a necessidade de tratar integrais hipersingulares. A técnica faz uso dos valores das forças de superfície e das derivadas tangenciais do campo de deslocamentos no ponto para ‘recuperar’ indiretamente a tensão. Abaixo as principais equações deste método são apresentadas.

Considerando um sistema de eixos locais x'_i , conforme ilustrado na figura 4.5 para um problema bidimensional, pode-se escrever em coordenadas locais os incrementos de deslocamentos ($\Delta u'_i$), de forças de superfície ($\Delta p'_i$) e dos estados de tensão inicial

$(\Delta\sigma_{ij}^o)$, respectivamente, como

$$\begin{aligned}\Delta u_i' &= L_{ij}\Delta u_j \\ \Delta p_i' &= L_{ij}\Delta p_j \\ \Delta\sigma_{ij}^o &= L_{ik}L_{jl}\Delta\sigma_{kl}^o\end{aligned}\tag{4.23}$$

onde L_{ij} são os cossenos diretores do sistema de coordenadas locais em relação ao sistema de coordenadas globais, e os índices i, j, k e l variam de 1 a 2. Considerando as equações de equilíbrio e constitutivas para um incrementos de Δt pode-se escrever um incremento de tensão $\Delta\sigma$ indiretamente como

$$\Delta\sigma = A_{mnj\alpha}\Delta u_j^\alpha + B_{mnj}\Delta p_j + C_{mnkl}\Delta\sigma_{kl}^o\tag{4.24}$$

sendo

$$A_{mnj\alpha} = \frac{2\mu}{1-\nu}L_{1m}L_{1n}L_{1j}\frac{1}{J(\xi)}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\xi}\tag{4.25}$$

$$B_{mnj} = (L_{1m}L_{2n} + L_{2m}L_{1n})L_{1j} + \left(\delta_{mn} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}L_{1m}L_{1n}\right)L_{2j}\tag{4.26}$$

$$C_{mnkl} = -L_{1m}L_{1n}\left(\delta_{kl} - \frac{1}{1-\nu}L_{2k}L_{2l}\right)\tag{4.27}$$

onde $J(\xi)$ representa o Jacobiano da transformação do sistema global para o sistema local e os coeficientes l, m, n, j e k variam de 1 a 2. Quando considerando estado plano de deformação, os coeficientes adicionais (Eq. 4.28) devem ser calculados.

$$\begin{aligned}A_{33j\alpha} &= \frac{2\mu\nu}{1-\nu}L_{1j}\frac{1}{J(\xi)}\frac{\partial N_\alpha}{\partial\xi} \\ B_{33j} &= \frac{\nu}{1-\nu}L_{2j} \\ C_{33kl} &= \frac{\nu}{1-\nu}L_{2k}L_{2l} - \delta_{3k}\delta_{3l}\end{aligned}\tag{4.28}$$

Cabe ressaltar que quando o estado de tensão calculado refere-se a um nó pertencente a mais de um elemento, uma média dos resultados obtidos é realizada.

4.3.3 Criação de Células

Como comentado previamente, quando da utilização do MEC para solução de problemas envolvendo o escoamento do material, a discretização do domínio é a

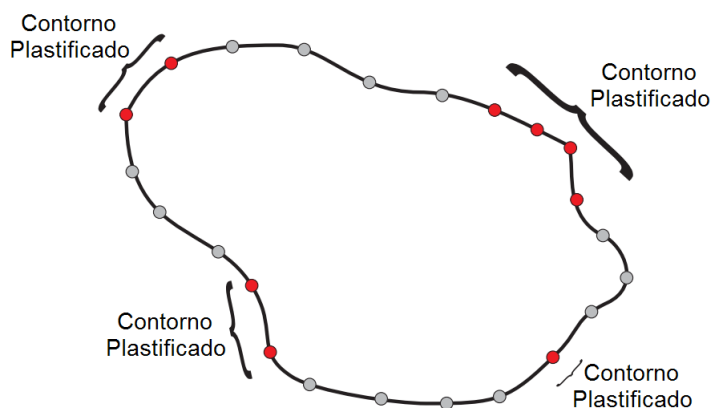


Figura 4.6: Representação do contorno plastificado.

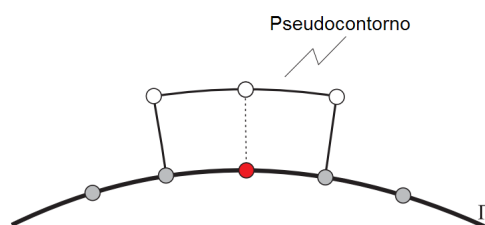


Figura 4.7: Representação do pseudocontorno.

metodologia frequentemente utilizada. Neste trabalho um algoritmo para criação automática de células desenvolvido por Ribeiro (2006) é utilizado para realizar a discretização do domínio. Deste modo a pré-definição de células não é requerida e também não é necessário um conhecimento prévio de quais regiões do corpo são mais propícias a escoar. Existem técnicas onde a região em regime de escoamento é discretizada de forma indireta, sendo esta região limitada por isocurvas utilizando-se uma técnica de visualização proposta por Noronha and Pereira (2003).

A rotina para geração automática de células inicia-se quando o estado de tensão num ponto do contorno viola o critério de escoamento adotado. Todos os nós nos quais o estado de tensão violar a condição de escoamento são adicionados à uma lista. A figura 4.6 mostra uma representação do contorno plastificado. Células deverão ser geradas no domínio até que todos o nós plastificados estejam envolvidos por meio de um pseudocontorno criado conforme ilustrado na figura 4.7.

A cada passo de tempo quando algum outro nó do contorno se plastifica, o

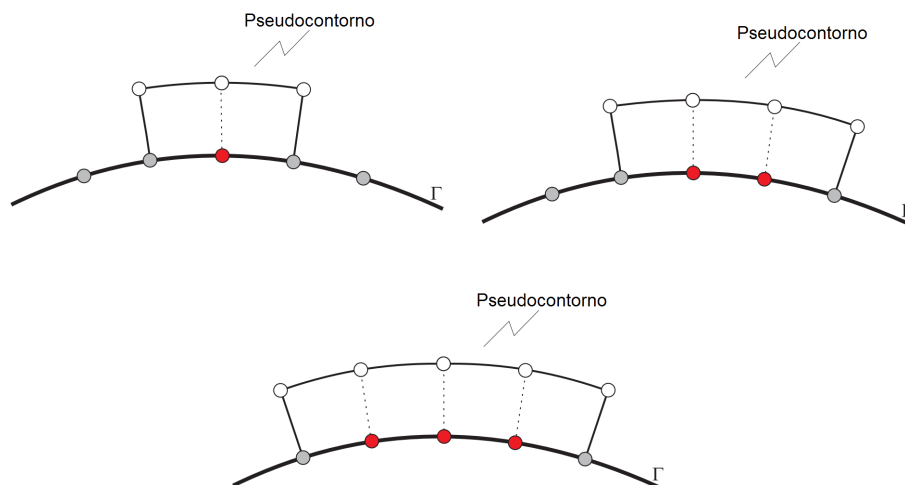


Figura 4.8: Atualização do pseudocontorno.

pseudocontorno é atualizado, criando-se novas células, para que a tensão excedente seja redistribuída. A figura 4.8 representa um atualização do pseudocontorno.

Para gerar as novas células, novos nós são criados. Estes nós são necessariamente nós internos, e o principal objetivo é manter o estado de tensão nestes nós atualizados a cada passo de tempo, pois, caso o estado de tensão em algum destes nós não obedeça o critério de escoamento, novas células internas devem ser geradas para envolver o novo nó plastificado, conforme ilustrado na figura 4.9.

É importante notar que o pseudocontorno não representa o contorno da região plástica, contudo ele é um limite para a zona plástica. Se a zona plástica aumentar até a fronteira do pseudocontorno novas células devem ser criadas e, portanto, o pseudocontorno é atualizado.

4.3.4 Sub-regiões

Até neste ponto as formulações mostradas aplicam-se apenas a problemas onde o domínio é homogêneo, isto é, quando assume-se que as características do material são constantes. Para permitir a análise de problemas nos quais o domínio é composto por regiões homogêneas distintas, pode-se recorrer à técnica de sub-regiões. Nesta técnica as sub-regiões são consideradas como conectadas entre si. A figura 4.10

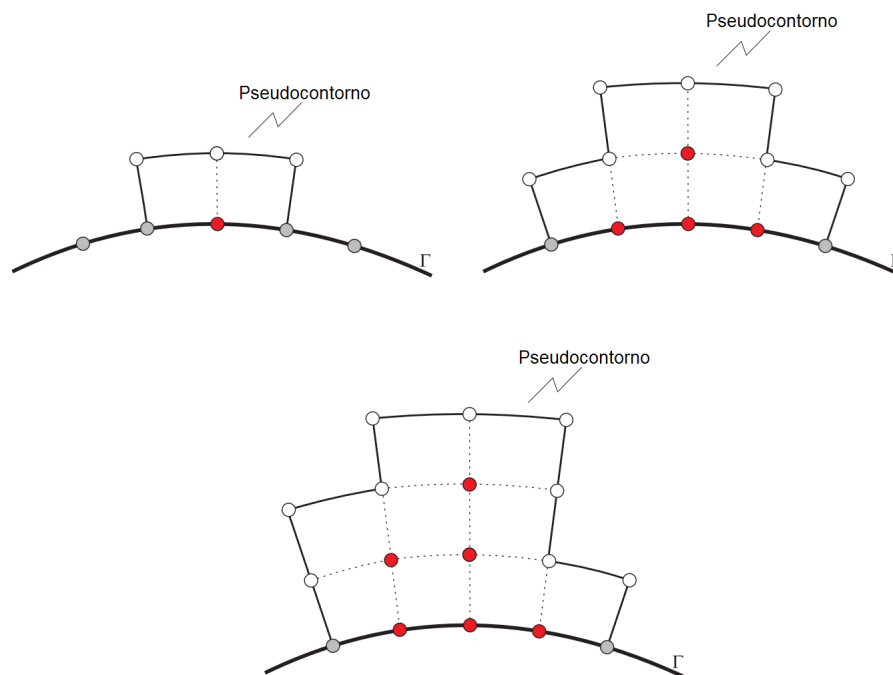


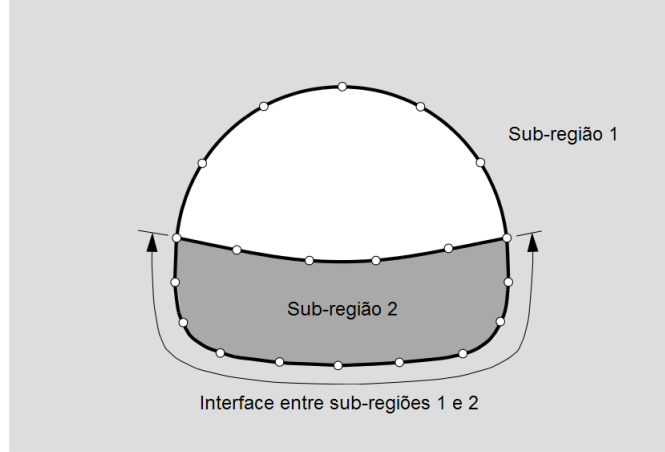
Figura 4.9: Evolução do pseudocontorno

exemplifica um problema com duas sub-regiões. Nas interfaces entre as sub-regiões, tanto as forças de superfície p quanto os deslocamentos u são incógnitos, levando a um aumento das variáveis desconhecidas e demandando equações adicionais. Estas equações são obtidas baseando-se nas condições fundamentais de equilíbrio e compatibilidade nas interfaces das sub-regiões.

Existem várias técnicas propostas para resolver problemas onde sub-regiões são conectadas entre si. Neste trabalho um procedimento às vezes referido como ‘método da matriz de rigidez’ proposto por Beer (2001) foi utilizado.

Neste método, uma matriz de rigidez $[K]$ é construída para cada sub-região. Os coeficientes desta matriz são forças de superfície devidas a deslocamentos unitários. Para a solução do sistema, as matrizes $[K]$ de todas as sub-regiões são organizadas numa matriz $[K]$ global. Este método pode ser dividido em 3 passos principais como se segue:

Passo 1 - Para cada sub-região N o sistema é resolvido separadamente considerando deslocamentos nulos em todos os nós de suas interfaces. Este primeiro



Extraído de: Dünser (2001)

Figura 4.10: Problema parcialmente acoplado

procedimento gera um vetor de forças de superfícies nas interfaces referentes aos nós acoplados $\{\Delta p\}_{a0}^N$ e um vetor de deslocamentos nos nós livres $\{\Delta u\}_{i0}^N$, conforme

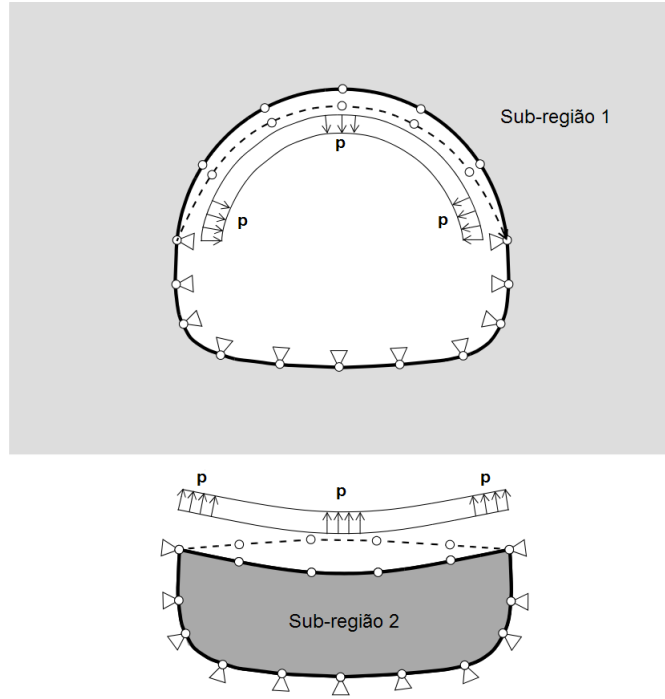
$$\begin{Bmatrix} \{\Delta p\}_{a0}^N \\ \{\Delta u\}_{i0}^N \end{Bmatrix} = [A]^{-1}(\{B\} + [E]\{\Delta \sigma^o\}) \quad (4.29)$$

onde $[A]$ é uma matriz que contém os coeficientes referentes as incógnitas nesta etapa ($\{\Delta p\}_{a0}^N$ e $\{\Delta u\}_{i0}^N$), o vetor $\{B\}$ contém valores referentes as condições prescritas e seus respectivos coeficientes, a matriz $[E]$ contém os coeficientes decorrentes da integração do domínio. Nesta etapa, o carregamento real a ser analisado é todo aplicado. Portanto a influência de possíveis tensões iniciais $\{\Delta \sigma^o\}$ são consideradas, assim como qualquer carregamento na superfície ou restrições ao deslocamento. Contudo, e somente, os nós das interfaces são restringidos quanto ao deslocamento (veja figura 4.11).

Passo 2 - Cria-se uma matriz de coeficientes relativos a deslocamentos unitários aplicados em cada nó das interfaces para cada sub-região. Para criação desta matriz o seguinte sistema de equações deve ser resolvido N_{gl} vezes

$$\begin{Bmatrix} \{\Delta p\}_{an}^N \\ \{\Delta u\}_{in}^N \end{Bmatrix} = [A]^{-1}\{B\} \quad n = 1, 2, \dots, N_{gl} \quad (4.30)$$

onde N_{gl} representa o número de graus de liberdade nas interfaces das sub-regiões. Devido à operação de inversão de matrizes, cabe notar que a matriz $[A]$ contém os



Extraído de: Dünser (2001)

Figura 4.11: Solução do sistema com os nós da interface restringidos quanto a deslocamentos

mesmos coeficientes nas Eq. 4.29 e 4.30, portanto os dois procedimentos (passos 1 e 2) podem ser resolvidos com a mesma inversão. Porém o vetor $\{B\}$ deve ser calculado novamente, desta vez desconsiderando qualquer carregamento e considerando apenas um deslocamento unitário em um dos graus de liberdade dos nós das interfaces, conforme ilustrado na figura 4.12.

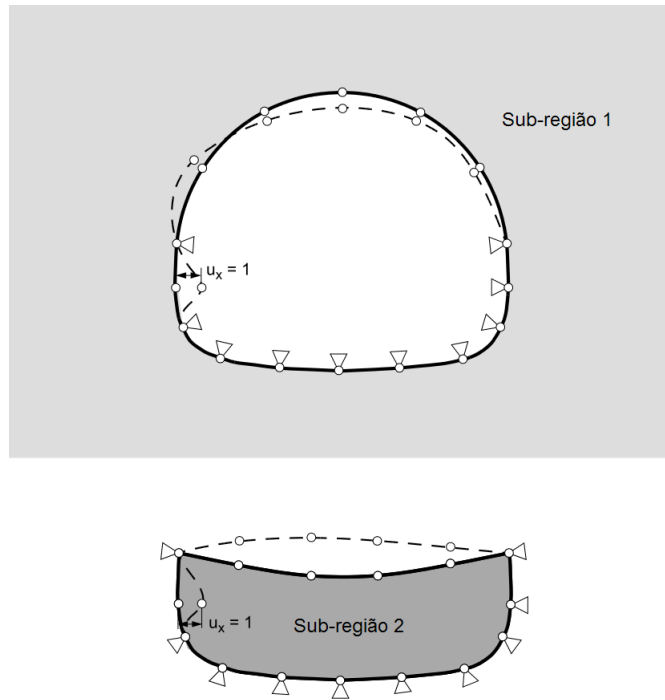
Com esta matriz de coeficientes é possível calcular os valores reais de deslocamentos e forças de superfície em todos os nós da sub-região N em função dos deslocamentos reais nas suas interfaces $\{\Delta u\}_a^N$ utilizando a seguinte relação

$$\begin{Bmatrix} \{\Delta p\}_a^N \\ \{\Delta u\}_l^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\Delta p\}_{a0}^N \\ \{\Delta u\}_{l0}^N \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Delta p\}_{a1}^N, \{\Delta p\}_{a2}^N, \dots, \{\Delta p\}_{aN_{gl}}^N \\ \{\Delta u\}_{l1}^N, \{\Delta u\}_{l2}^N, \dots, \{\Delta u\}_{lN_{gl}}^N \end{bmatrix} \{\Delta u\}_a^N \quad (4.31)$$

Passo 3 - Utilizando as condições de equilíbrio e compatibilidade nas interfaces, i.e.,

$$\begin{aligned} \{\Delta p\}_a^I + \{\Delta p\}_a^{II} &= 0 \\ \{\Delta u\}_a^I &= \{\Delta u\}_a^{II} \end{aligned} \quad (4.32)$$

juntamente com a relação apresentada na Eq. 4.30 a seguinte equação para



Extraído de: Dünser (2001)

Figura 4.12: Solução do sistema impondo deslocamentos unitários em cada um dos nós da interface

cálculo dos deslocamentos reais nas interfaces pode ser escrita

$$\{\Delta p\}_{a0} + [\{\Delta p\}_{a1}, \{\Delta p\}_{a2}, \dots, \{\Delta p\}_{aN_{gl}}] \{\Delta u\}_a = 0 \quad (4.33)$$

A equação 4.33 é válida para o sistema global, e não somente para uma ou outra sub-região N . Os coeficientes referentes aos nós da interface de ambas as regiões são reunidos. Após os valores reais dos deslocamentos nos nós das interfaces $\{\Delta u\}_a$ serem determinados, as outras incógnitas de contorno de cada sub-região são calculadas independentemente utilizando a Eq. 4.31.

A análise viscoplástica, como será discutido em mais detalhes na próxima seção, avança em passos de tempo. Em cada passo de tempo é necessário resolver todo o sistema, portanto as relações de equilíbrio e compatibilidade entre as regiões precisam ser efetuadas em cada passo de tempo. Pode-se perceber que a geração dos coeficientes devido aos deslocamentos unitários Eq. 4.30 e sua inversão para solução da Eq. 4.33 podem ser realizadas apenas uma vez durante toda a análise. Esta constatação é importante para otimizar o custo computacional.

4.3.5 Solução Não-linear

A rotina para solução da análise viscoplástica tem algumas similaridades com uma rotina para a solução de uma análise elastoplástica. As equações principais das duas análises são idênticas (ver Eq. 4.15). Outra semelhança é que, assim como na análise elastoplástica, os estados de tensão nos nós precisam ser controlados e, quando necessário, redistribuídos para outras partes do corpo. Contudo existem diferenças incisivas entre as duas análises. Uma primeira diferença é que a análise viscoplástica procede em passos de tempo, e uma segunda, é que o carregamento é totalmente aplicado no início da análise. Devido a este carregamento algumas regiões do corpo apresentam estados de tensões superiores ao que realmente suporta e desde o primeiro incremento de tempo as tensões vão sendo redistribuídas, até que o corpo esteja em equilíbrio e obedecendo as relações constitutivas (Beer et al., 2008). A rotina para análise viscoplástica com sub-regiões pode ser resumida nestas principais etapas:

- a. Utilizando-se todas as condições de contorno prescritas, e a técnica de sub-regiões exposta na seção 4.3.4, o sistema é resolvido elasticamente e um vetor com os incrementos da solução das incógnitas do contorno $\{\Delta x\}$ é obtido. Nesta etapa não há contribuições de estados de tensão inicial $\{\sigma^o\}$.
- b. Considerando este incremento dos valores de contorno $\{\Delta x\}$, é calculado um vetor com os incrementos dos estados de tensão de todos os nós de todas as sub-regiões do problema $\{\Delta\sigma\}$, utilizando a Eq. 4.22 para nós internos e a Eq. 4.24 para nós no contorno. Nesta etapa também não há contribuições de estados de tensão inicial $\{\sigma^o\}$.
- c. O vetor solução final das incógnitas do contorno $\{x\}$ assim como o vetor solução final dos estados de tensão $\{\sigma\}$ são atualizados, i.e., $\{x\} = \{\Delta x\}$ e $\{\sigma\} = \{\Delta\sigma\}$. Nesta etapa, os vetores $\{x\}$ e $\{\sigma\}$ representam a solução elástica do problema.

- d. Então uma estrutura de repetição se inicia em incrementos de tempo (Δt) onde, a cada incremento as seguintes operações são executadas:
- i. O critério de escoamento é verificado em todos os nós do problema, utilizando o vetor solução final dos estados de tensão $\{\sigma\}$. Ocorrendo a violação do critério em algum nó, células são criadas até que o mesmo esteja totalmente envolto.
 - ii. A matriz $[E]$ referente a cada nova célula criada é calculada.
 - iii. Um vetor de estados de tensão inicial $\{\Delta\sigma^o\}$ é calculado para todos os nós plastificados de todas as sub-regiões utilizando as Eq. 2.27 e 2.29.
 - iv. Utilizando a técnica de sub-regiões exposta na seção 4.3.4, o sistema é resolvido elasticamente considerando desta vez como carregamento apenas os estados de tensão inicial $\{\sigma^o\}$ e um vetor com os incrementos da solução das incógnitas do contorno $\{\Delta x\}$ é obtido.
 - v. Considerando este incremento dos valores de contorno $\{\Delta x\}$ e dos estados de tensão inicial $\{\Delta\sigma^o\}$, um vetor de incrementos de tensões $\{\Delta\sigma\}$ é calculado para cada nó, utilizando a Eq. 4.22 para nós internos e a Eq. 4.24 para nós no contorno.
 - vi. O vetor solução final das incógnitas do contorno $\{x\}$ assim como o vetor solução final dos estados de tensão $\{\sigma\}$ são atualizados utilizando os incrementos calculados no passo de tempo atual, i.e., $\{x\} = \{x\} + \{\Delta x\}$ e $\{\sigma\} = \{\sigma\} + \{\Delta\sigma\}$.

Esta repetição continua até que o intervalo de tempo total (t) a ser analisado seja alcançado ou, até que o corpo esteja em equilíbrio e obedecendo as relações constitutivas.

4.4 Tratamento das Integrais

Quando utilizando o método dos elementos de contorno uma importante tarefa é a avaliação eficiente e precisa das integrais envolvidas na formulação. A dificuldade principal ocorre quando o ponto de colocação e o ponto de integração coincidem, pois neste caso as integrais se tornam singulares, i.e., os integrandos tendem a infinito. Cinco tipos diferentes de integrais podem ser identificados no método dos elementos de contorno, de acordo com o núcleo do integrando e a posição do ponto de colocação em relação ao elemento ou célula a ser integrado. As integrais podem ser regulares, quase singulares, fracamente singulares, fortemente singulares ou hipersingulares. Neste trabalho a avaliação de integrais hipersingulares foi evitada utilizando a técnica de cálculo do estado tensão exposta na seção 4.3.2.

4.4.1 Regulares

Todas as integrais envolvidas nas formulações discretizadas são consideradas integrais regulares quando o ponto de colocação está a uma distância razoável da célula ou do elemento a ser integrado.

As integrais regulares são avaliadas aplicando a quadratura de Gauss-Legendre quando da integração de elementos, Eq. 4.34, e quando da integração de células aplicando-se a quadratura uma segunda vez, Eq. 4.35.

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{s=1}^S w_s f(\xi_s) \quad (4.34)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{s_\xi=1}^{S_\xi} \sum_{s_\eta=1}^{S_\eta} w_{s_\xi} w_{s_\eta} f(\xi_{s_\xi}, \eta_{s_\eta}) \quad (4.35)$$

Na Eq. 4.34 os termos w_s e ξ_s representam respectivamente os pesos e as abscissas de Gauss, e o índice subscrito s representa o número de pontos de integração. Na Eq. 4.35 os termos w_{s_ξ} e ξ_{s_ξ} representam respectivamente os pesos e as abscissas de Gauss na direção ξ e os termos w_{s_η} e η_{s_η} representam respectivamente os pesos e as abscissas de Gauss na direção η .

Para realização da avaliação numérica das integrais conforme Eq. 4.34 e Eq. 4.35 uma transformação das coordenadas é necessária. O Jacobiano desta transformação é dado por

$$J(\xi) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (4.36)$$

para elementos bidimensionais, e

$$J(\xi, \eta) = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \quad (4.37)$$

para células bidimensionais.

Para determinação da ordem da quadratura o critério desenvolvido por (Eberwien et al., 2005) é utilizado. Neste critério a definição do número de pontos de Gauss depende da distância do ponto de integração, da singularidade do núcleo da integral, das funções de forma e do Jacobiano.

4.4.2 Quase Singulares

Todas integrais envolvidas nas formulações discretizadas também podem ser consideradas integrais quase singulares quando o ponto de colocação está relativamente próximo da célula ou elemento a ser integrado. Devido ao integrando variar bastante, o emprego direto da quadratura não é aconselhável.

Neste trabalho, para lidar com esta quase singularidade, uma técnica de subdivisão dos elementos juntamente com uma técnica adaptativa da quadratura de Gauss é utilizada.

4.4.3 Fracamente Singulares

Estas integrais surgem quando o ponto de colocação e o ponto de integração se coincidem, seja em uma célula ou em um elemento, e a ordem de singularidade do núcleo da integral é $\ln(r)$ caso estiver sendo integrado um elemento 2D e $O(1/r)$ para o caso estiver integrando uma célula 2D.

Em elementos, a integral a ser avaliada (Eq. 4.38) é reescrita em duas parcelas utilizando a abordagem apresentada por Huang (1993). Uma parcela regular, que é tratada utilizando o procedimento exposto na seção 4.4.1, e uma parcela singular que pode ser tratada utilizando a quadratura logarítmica de Gauss Eq. 4.39.

$$\int_{\Gamma_e} N_\alpha(\xi) U_{ij}^*(P, Q(\xi)) d\Gamma_e = \int_{-1}^1 N_\alpha(\xi) U_{ij}^*(P, Q(\xi)) J(\xi) d\xi \quad (4.38)$$

$$\int_0^1 f(\eta) \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) d\eta = \sum_{s=1}^S w_s f(\eta_s) \quad (4.39)$$

onde os termos w_s e η_s representam respectivamente os pesos e as abscissas da quadratura logarítmica de Gauss, e s a ordem da quadratura utilizada.

Em células a singularidade é removida utilizando uma transformação de variáveis desenvolvida por Lachat and Watson (1976). Neste procedimento as células quadrilaterais são divididas em subcélulas triangulares. Deste modo a integral da célula pode ser representada como o somatório das integrais das subcélulas, conforme Eq. 4.40.

$$\int_{\Omega_c} N_\alpha(\xi, \eta) E_{ijk}^*(P, q(\xi, \eta)) d\Omega_c = \sum_{s=1}^{N_{sc}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_\alpha(\bar{\xi}, \bar{\eta}) E_{ijk}^*(P, q(\bar{\xi}, \bar{\eta})) J_s(\bar{\xi}, \bar{\eta}) J(\xi, \eta) d\bar{\xi} d\bar{\eta} \quad (4.40)$$

onde N_{sc} representa o número de subcélulas. A divisão é realizada de maneira que o ponto de colocação coincida com um vértice comum das subcélulas triangulares. Os eixos de coordenadas locais de cada triângulo são definidos para que o Jacobiano da transformação cancele a singularidade. Depois de realizadas estas transformações o procedimento exposto na seção 4.4.1 é utilizado para avaliação numérica da integral referente a cada subcélula.

4.4.4 Fortemente Singulares

Estas integrais surgem quando o ponto de colocação e o ponto de integração se coincidem e a ordem de singularidade do núcleo da integral é $O(1/r)$ caso estiver

sendo integrado um elemento e $O(1/r^2)$ para o caso estiver integrando uma célula.

Em elementos a integral a ser avaliada (Eq. 4.41) é calculada diretamente utilizando a técnica desenvolvida por Guiggiani and Casalini (1987).

$$\int_{\Gamma_e} N_\alpha(\xi) T_{ij}^*(P, Q(\xi)) d\Gamma_e \quad (4.41)$$

No caso de células a integral com núcleo fortemente singular (Eq. 4.42) é avaliada utilizando a técnica apresentada por Gao and Davies (2002). A integral é reescrita em duas parcelas. A primeira parcela contém núcleo fracamente singular e é calculada utilizando o procedimento exposto na seção 4.4.3, a segunda parcela contém o núcleo fortemente singular e é calculada semi analiticamente.

$$\int_{\Omega_c} N_\alpha(\xi, \eta) W_{ijkl}^*(p, q(\xi, \eta)) d\Omega_c \quad (4.42)$$

Capítulo 5

RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, resultados obtidos utilizando os algoritmos implementados são apresentados. Os primeiros dois exemplos são relativos à análise viscoelástica, e o último relativo à análise viscoplástica. Os resultados obtidos para os exemplos envolvendo a análise viscoelástica são comparados com suas respectivas soluções analíticas. Os resultados obtidos pela análise viscoplástica são comparados utilizando a solução numérica do método dos elementos finitos.

5.1 Tubo Espesso Sujeito a Pressão Interna

O tubo de parede espessa mostrado na figura 5.1(a) está sujeito a uma pressão interna constante $\sigma = 1MPa$. As seguintes propriedades são consideradas para o material: módulo de Young $E = 200GPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e parâmetro viscoso $\gamma = 5s$. Devido a dupla simetria do problema, apenas um quarto do problema é analisado. Estado plano de deformação é considerado. O contorno do domínio é inicialmente discretizado em doze elementos lineares, ou em seis elementos quadráticos, ambos utilizando doze nós, como mostrado na figura 5.1(b), onde apenas os nós estão apresentados. Uma análise de convergência é realizada onde, nos refinamentos de malha seguintes, cada elemento de contorno da malha anterior é subdividido em dois elementos de tamanhos iguais.

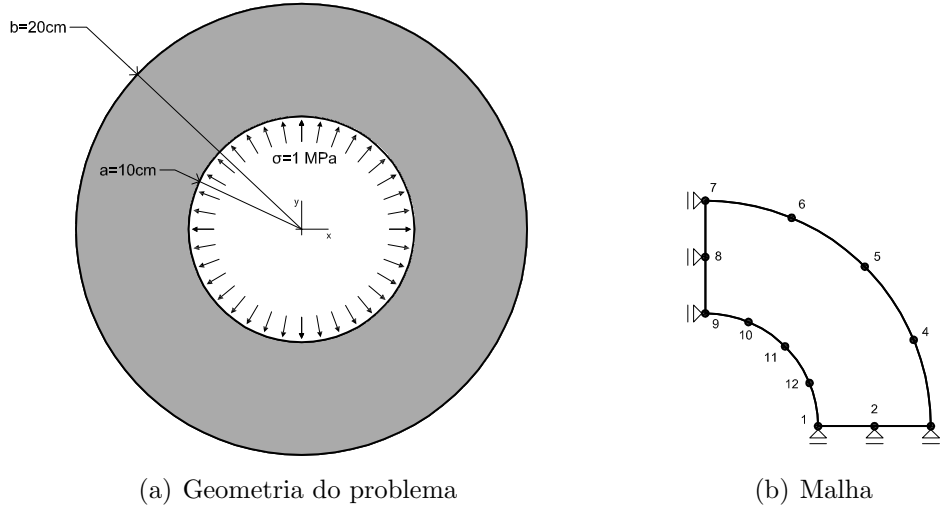


Figura 5.1: Tubo de parede espessa sujeito a pressão interna - Geometria do problema e malha

Inicialmente para verificar a precisão do algoritmo implementado as soluções finais, i.e., quando $t \rightarrow \infty$, são comparadas com a solução analítica deste problema. Cabe ressaltar que se o interesse está apenas na solução final do problema, o valor do passo de tempo Δt pode ser escolhido livremente pois a solução final ($t \rightarrow \infty$) obtida é a mesma. Esta solução final deve ser a solução elástica do problema definida pela teoria da elasticidade convencional. Este comportamento provém de uma propriedade elementar do material de Kelvin-Voigt e pode ser notada pelo diagrama unidimensional do modelo (figura 2.1). Quando $t \rightarrow \infty$ a resistência do amortecedor em paralelo se esmorece completamente (ao passar do tempo e em função do parâmetro viscoso) e apenas a resistência da mola permanece. Considerando um sistema de coordenadas cilíndricas com centro em $(x = 0, y = 0)$, as soluções elásticas analíticas para o deslocamento radial u_{re} , para a tensão tangencial $\sigma_{\phi\phi}$, e para a tensão radial σ_{rr} , podem ser escritas como (Mal and Singh, 1991)

$$u_{re}(r) = \frac{a^2 p r}{2(\lambda + \mu)(b^2 - a^2)} + \frac{a^2 b^2 p}{2\mu(b^2 - a^2)r} \quad (5.1)$$

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{p a^2}{b^2 - a^2} - \frac{p a^2 b^2}{(b^2 - a^2)r^2} \quad (5.2)$$

$$\sigma_{\phi\phi}(r) = \frac{p a^2}{b^2 - a^2} + \frac{p a^2 b^2}{(b^2 - a^2)r^2} \quad (5.3)$$

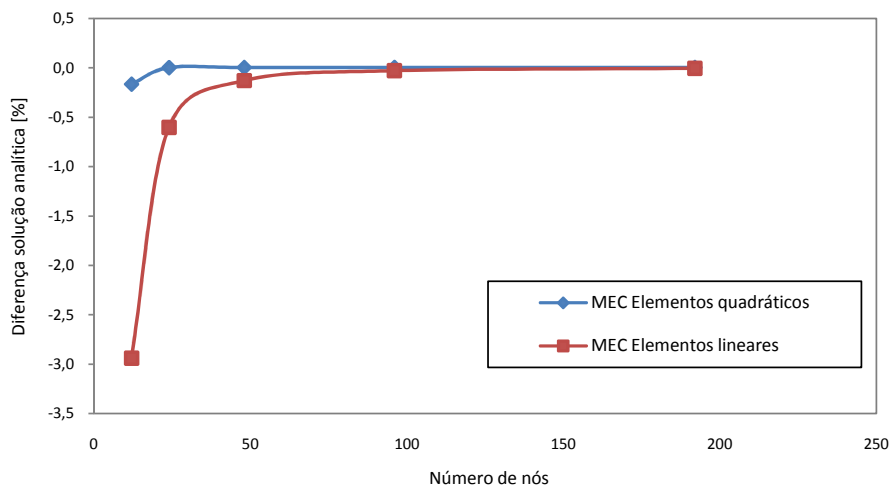


Figura 5.2: Convergência da solução para o deslocamento radial máximo $u_{re_{máx}}$

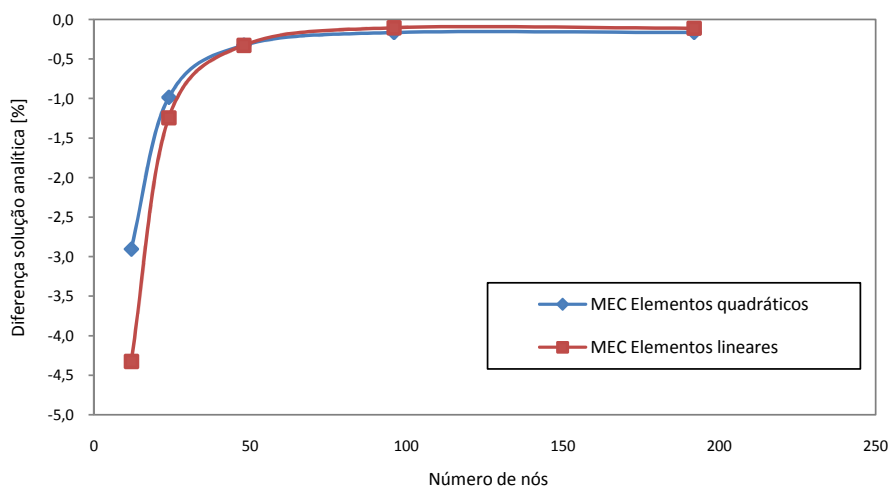


Figura 5.3: Convergência da solução para a tensão tangencial máxima $\sigma_{\phi\phi_{máx}}$

Os resultados finais máximos obtidos pelo algoritmo são comparados com as soluções analíticas. As diferenças percentuais obtidas para os vários refinamentos de malha, utilizando elementos lineares e quadráticos, são mostradas nas figuras 5.2, 5.3 e 5.4. Pode-se ver que mesmo malhas com relativamente poucos elementos de contorno apresentam bons resultados, e utilizando malhas mais refinadas as diferenças percentuais entre as soluções numéricas obtidas e as soluções analíticas diminuem.

Nas figuras 5.5 e 5.6 as distribuições finais da componente x dos deslocamentos (u_x) e dos estados de tensão (σ_x) são apresentadas. As malhas contêm 48 nós cada

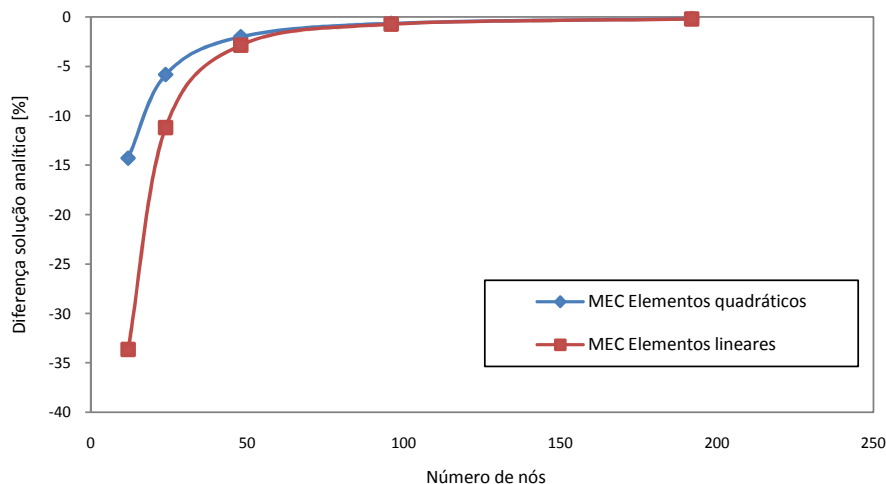
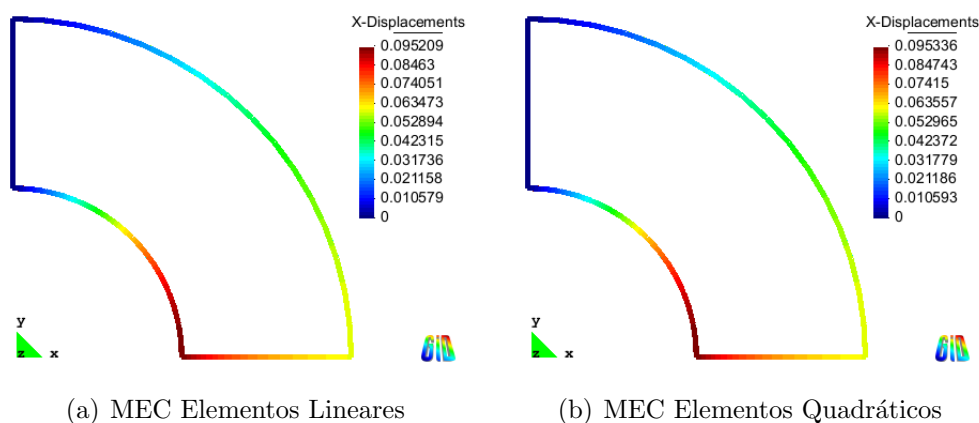


Figura 5.4: Convergência da solução para tensão radial máxima $\sigma_{rr_{máx}}$



(a) MEC Elementos Lineares

(b) MEC Elementos Quadráticos

Figura 5.5: Distribuição final para a componente u_x do campo de deslocamentos

uma. Não obstante o valor do passo de tempo Δt ser indiferente para a solução final, como comentado previamente, o valor de Δt é determinante na precisão da análise do comportamento viscoelástico durante a passagem do tempo. Para verificar a convergência da análise viscoelástica, os resultados obtidos utilizando diferentes valores para o passo de tempo, para uma malha de 12 elementos quadráticos e 24 nós, são sobrepostos no gráfico mostrado na figura 5.7. A influência determinante do valor de Δt para a precisão da análise pode ser facilmente notada na figura 5.7.

Para verificar a precisão da simulação do comportamento viscoelástico, a solução viscoelástica analítica do comportamento do material de Kelvin-Voigt é utilizada,

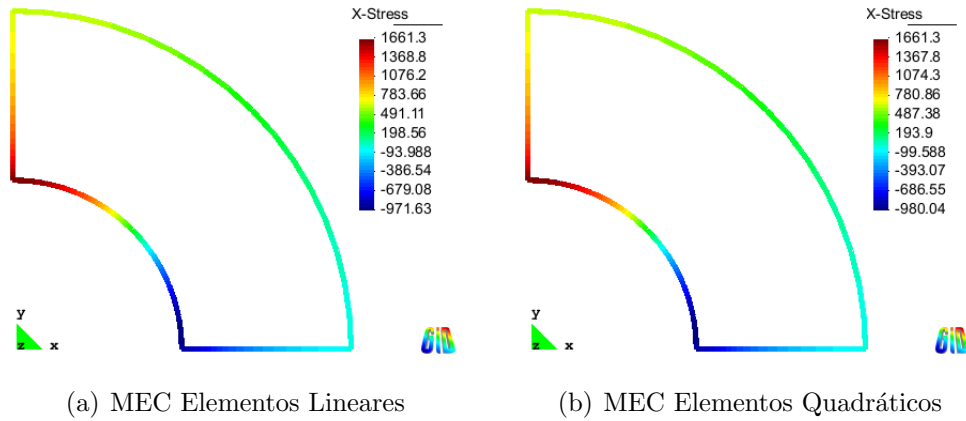


Figura 5.6: Distribuição final para a componente σ_x do campo dos estados de tensão

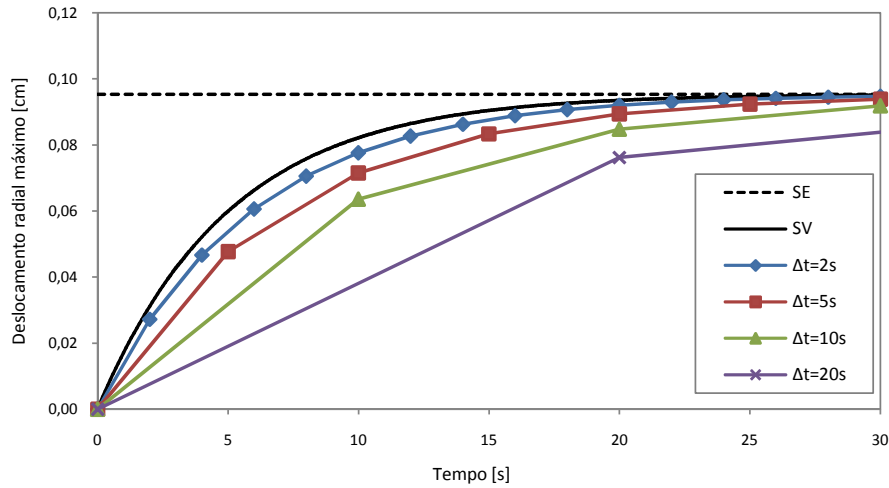


Figura 5.7: Convergência da solução para o deslocamento radial máximo $u_{re_{máx}}$ em função do tempo t

podendo ser escrita como (Fung, 1965)

$$u_r(r, t) = (1 - e^{-(1/\gamma)t})u_{re}(r) \quad (5.4)$$

onde $u_{re}(r)$ é o valor do deslocamento radial referente à solução elástica do problema dado pela Eq. 5.1. Na figura 5.7 também podem ser observadas as curvas representantes da solução viscoelástica analítica (SV) e da solução analítica puramente elástica (SE). Pode-se notar que a curva gerada pela solução utilizando o MEC é mais próxima à curva da solução analítica (SV) quanto menor é o valor de Δt . Para verificar a relação dos erros obtidos em função do passo de tempo escolhido, uma técnica de comparação de áreas foi utilizada. A técnica se resume na comparação

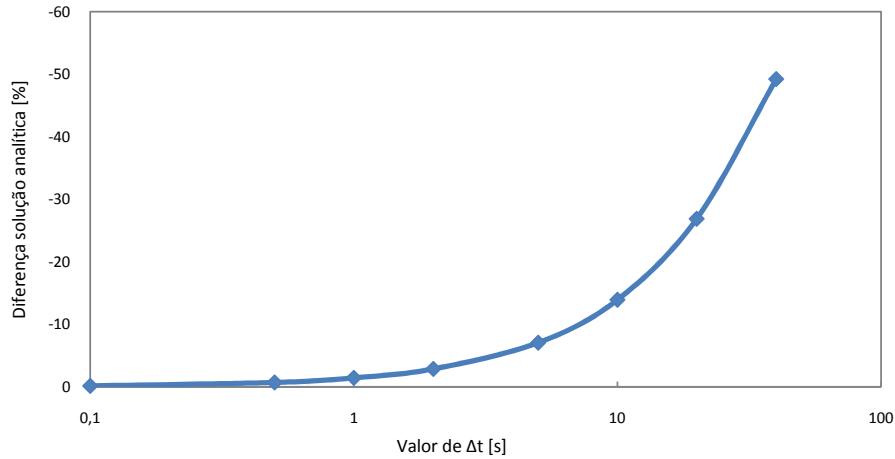


Figura 5.8: Convergência do erro da solução para o deslocamento radial máximo $u_{r_{máx}}$ em função do valor de Δt , considerando $k\Delta t = 40s$

entre a área abaixo da função que descreve o comportamento analítico, que é tomada como referência, e a área abaixo da função obtida pelo MEC para determinado Δt , conforme

$$Erro = \frac{\sum_{i=1}^k u_{r_{máx}}^{MEC}(i\Delta t)\Delta t}{\int_0^{k\Delta t} u_{r_{máx}}^A(t)dt} 100 \quad (5.5)$$

onde $u_{r_{máx}}^{MEC}(t)$ é a solução pelo MEC para o deslocamento radial máximo obtido no tempo t , k é o número de passos de tempo, $u_{r_{máx}}^A(t)$ é a solução analítica para o deslocamento radial máximo obtido no tempo t , e $k\Delta t$ representa o tempo total analisado.

Os erros obtidos considerando variados valores de Δt e tempo total igual a 40 segundos, para uma malha de 12 elementos quadráticos e 24 nós, podem ser observados na figura 5.8. Cabe salientar, que na figura 5.8 foi empregada escala logarítmica na projeção dos valores de Δt para facilitar a compreensão dos dados. Pode-se perceber que quando o valor do passo de tempo tende para zero, a diferença entre a solução numérica e a solução analítica também tende para zero.

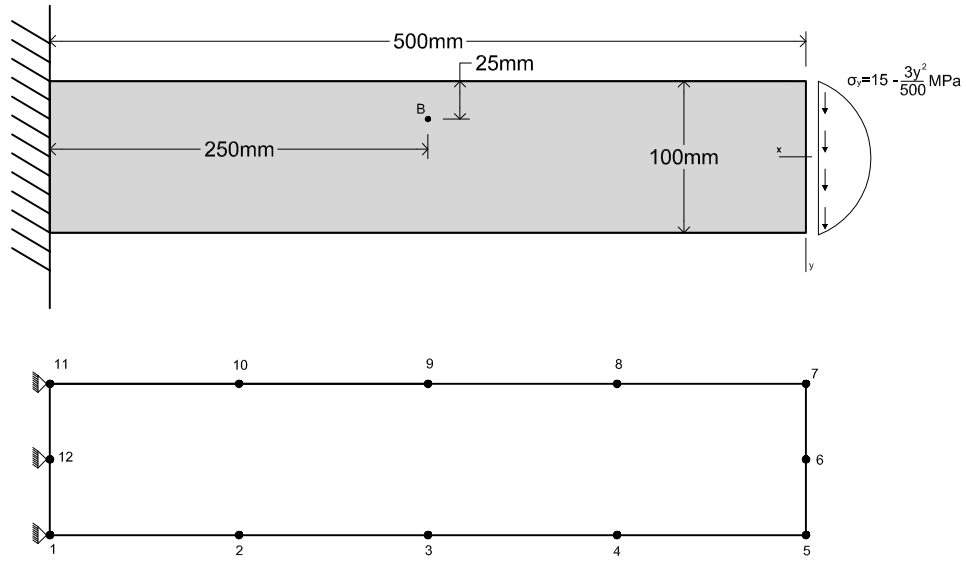


Figura 5.9: Viga em balanço - Geometria do problema e malha

5.2 Viga em Balanço Sujeita a Esforço Cisalhante

A viga mostrada na figura 5.9 está sujeita a um esforço cisalhante variável de resultante equivalente a $F = 1000N$. As seguintes propriedades são consideradas para o material: módulo de Young $E = 205010MPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e parâmetro viscoso $\gamma = 4s$. Estado plano de tensões é considerado. O contorno do domínio é inicialmente discretizado em doze elementos lineares, ou em seis elementos quadráticos, ambos utilizando doze nós, como mostrado na figura 5.9, onde apenas os nós estão apresentados. Uma análise de convergência é realizada onde, nos refinamentos de malha seguintes, cada elemento de contorno da malha anterior é subdividido em dois elementos de tamanhos iguais. Para verificar a precisão da solução utilizando o MEC, primeiramente foi considerado quando $t \rightarrow \infty$, e os resultados foram comparados com as soluções analíticas que podem ser escritas como (Mal and Singh, 1991)

$$u_y(x) = \frac{F(x^3 - 3\ell^2x + 2\ell^3)}{6EI_z} \quad (5.6)$$

$$\sigma_x(x, y) = \frac{-Fxy}{I_z} \quad (5.7)$$

$$\sigma_{xy}(y) = \frac{-F(H^2 - 4y^2)}{8I_z} \quad (5.8)$$

onde os termos ℓ , H e I_z representam da viga, respectivamente, o comprimento, a altura, e o momento de inércia em relação ao eixo z .

Tabela 5.1: Comparação dos resultados finais obtidos no ponto B utilizando elementos lineares

Número de Nós	u_y	σ_x	σ_{xy}
12	0,187865 (-75,35%)	-16,4141 (-78,11%)	-2,55608 (-77,28%)
24	0,464768 (-39,02%)	-43,2239 (-42,37%)	-6,74699 (-40,03%)
48	0,664495 (-12,81%)	-64,9159 (-13,45%)	-9,81134 (-12,79%)
96	0,733059 (-3,82%)	-72,5254 (-3,30%)	-10,8976 (-3,13%)
192	0,74946 (-1,67%)	-74,4718 (-0,70%)	-11,1771 (-0,65%)
384	0,752709 (-1,24%)	-74,9122 (-0,12%)	-11,2377 (-0,11%)
768	0,753191 (-1,18%)	-74,9995 (0,00%)	-11,2491 (-0,01%)
1536	0,753186 (-1,18%)	-75,0115 (0,02%)	-11,2506 (0,01%)

Tabela 5.2: Comparação dos resultados finais obtidos no ponto B utilizando elementos quadráticos

Número de Nós	u_y	σ_x	σ_{xy}
12	0,66113 (-13,26%)	-66,4284 (-11,43%)	-16,6977 (48,42%)
24	0,769919 (1,02%)	-75,5102 (0,68%)	-12,817 (13,93%)
48	0,76634 (0,55%)	-75,9336 (1,24%)	-11,6164 (3,26%)
96	0,758314 (-0,50%)	-75,5483 (0,73%)	-11,35 (0,89%)
192	0,755136 (-0,92%)	-75,2024 (0,27%)	-11,2761 (0,23%)
384	0,753412 (-1,15%)	-75,0447 (0,06%)	-11,2508 (0,01%)
768	0,753357 (-1,15%)	-75,0428 (0,06%)	-11,2516 (0,01%)
1536	0,753254 (-1,17%)	-75,0308 (0,04%)	-11,2512 (0,01%)

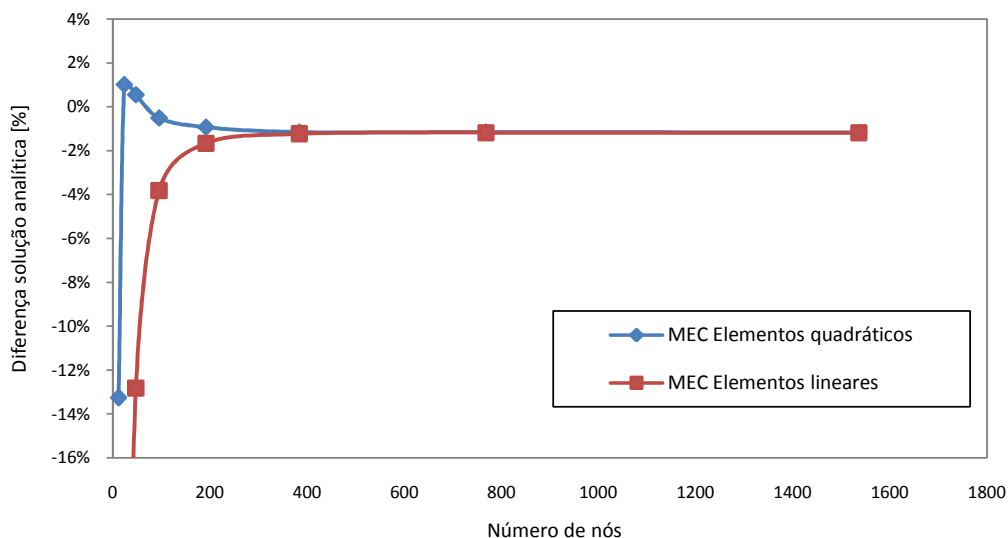


Figura 5.10: Convergência da solução final para a componente u_y do deslocamento no ponto B

Os resultados obtidos pelo MEC para o ponto B utilizando diversas malhas são mostrados nas tabelas 5.1 e 5.2. As diferenças em relação as soluções analíticas são mostradas entre parênteses. Utilizando elementos quadráticos, malhas com 48 nós ou mais apresentam boa concordância. Para elementos lineares, são necessárias malhas com 192 nós ou mais para apresentar concordância parecida. Pelas tabelas 5.1 e 5.2, é possível notar que as componentes σ_x e σ_{xy} do estado de tensão apresentaram ótimos resultados.

Nas figuras 5.10, 5.11 e 5.12 estão plotados os percentuais das diferenças entre a solução analítica e as soluções numéricas, utilizando variadas malhas, para o ponto B. É possível perceber uma convergência nos resultados indiferentemente da interpolação utilizada, quadrática ou linear.

Para exemplificar o comportamento em relação ao tempo, a malha de 96 nós com interpolação quadrática foi utilizada. Os resultados obtidos para a componente u_y do deslocamento no ponto B em relação ao tempo para variados valores de Δt , assim como os resultados analíticos viscoelástico (SV) e elástico (SE), são mostrados na figura 5.13. Como pode ser observado, quanto menor o passo de tempo Δt , mais similar à curva analítica é a curva numérica obtida pelo MEC.

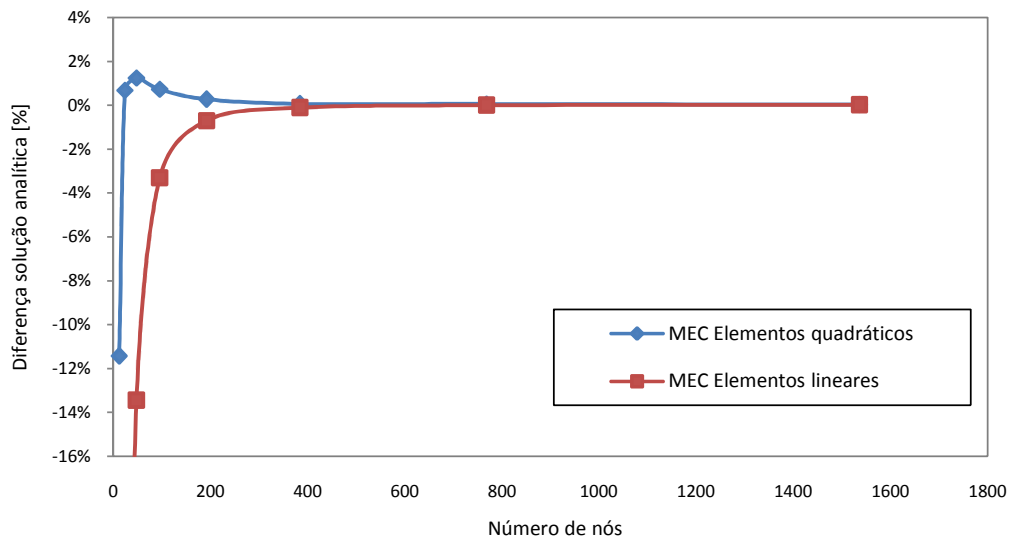


Figura 5.11: Convergência da solução final para a componente σ_x do estado de tensão no ponto B

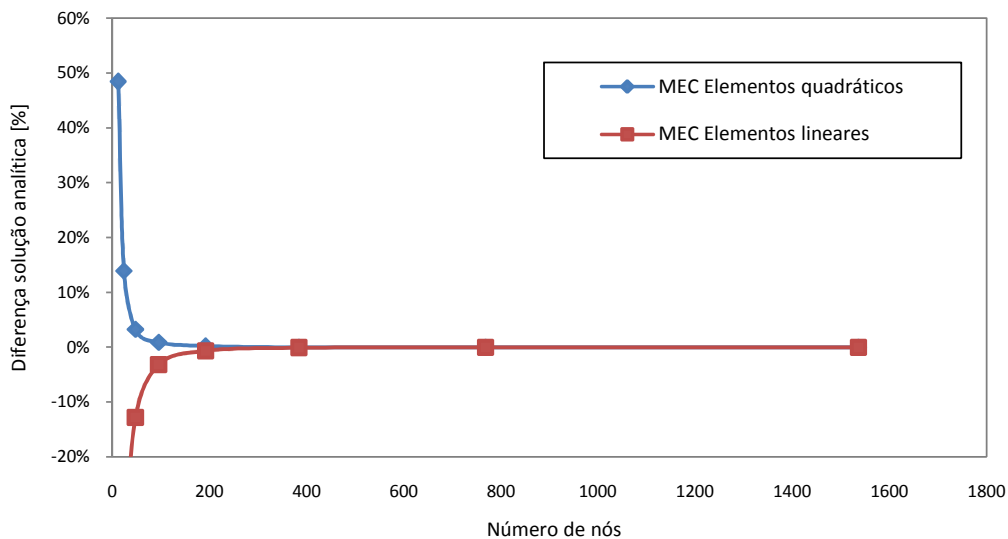


Figura 5.12: Convergência da solução final para a componente σ_{xy} do estado de tensão no ponto B

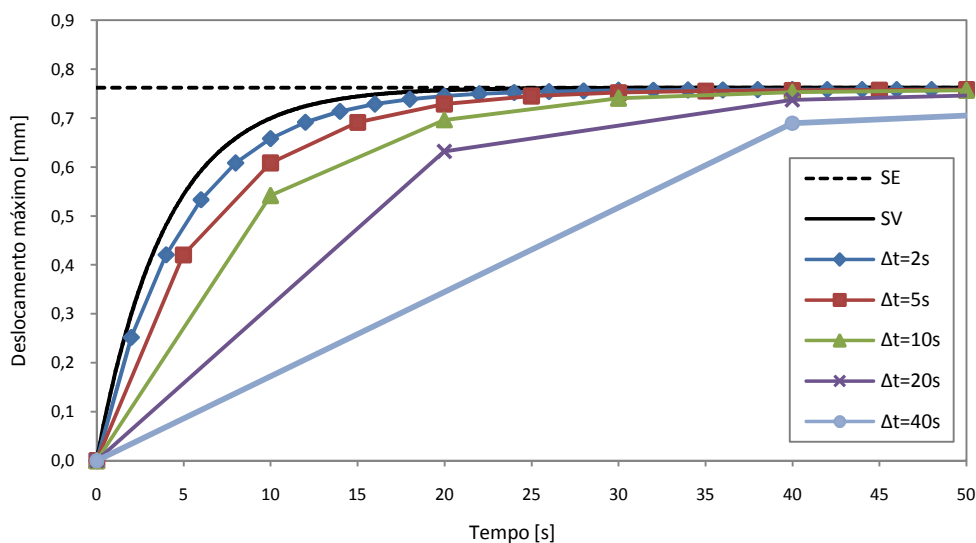


Figura 5.13: Convergência da solução para a componente u_y do deslocamento no ponto B em função do tempo (t)

5.3 Chapa Perfurada Sujeita a Tração

A chapa perfurada mostrada na figura 5.14(a) está sujeita a tração constante $\sigma = 114,21MPa$. As seguintes propriedades são consideradas para o material: módulo de Young $E = 7000MPa$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, parâmetro viscoso $\gamma = 5dias$ e $Y = 243MPa$, considerando o critério de escoamento de von Mises e estado plano de deformação. É considerado material perfeitamente viscoplástico, i.e., não é considerado o fenômeno de endurecimento. Devido à simetria, apenas metade do problema é analisado. O contorno do domínio é inicialmente discretizado em dezesseis elementos lineares, ou em oito elementos quadráticos, ambos utilizando dezesseis nós, como mostrado na figura 5.14(b) (onde apenas os nós estão apresentados). Uma análise de convergência é realizada onde, nos refinamentos de malha seguintes, cada elemento de contorno da malha anterior é subdividido em dois elementos de tamanhos iguais.

Conforme discutido por Corneau and Zienkiewicz (1974), a solução da análise viscoplástica tende à solução da análise elastoplástica quando $t \rightarrow \infty$. Desse modo, para verificar a precisão do algoritmo viscoplástico implementado, a análise viscoplástica é levada até que o equilíbrio final seja atingido, e os resultados obtidos são

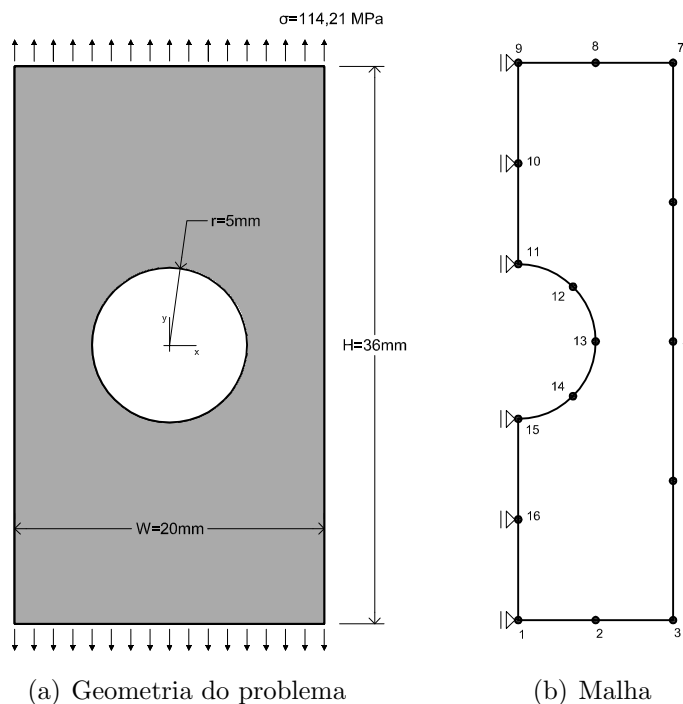


Figura 5.14: Chapa perfurada sujeita a tração - Geometria do problema e malha

comparados com a solução elastoplástica obtida através do Método dos Elementos Finitos (MEF). A malha de elementos finitos utilizada possui 13831 nós e 4500 elementos. Os resultados utilizados como referência estão listados na tabela 5.3, onde os valores em parênteses são as coordenadas cartesianas dos pontos referentes aos valores máximos encontrados. Nas figuras 5.15, 5.16, 5.17 e 5.18, são apresentados os erros relativos à solução de referência para variadas malhas. Pode-se perceber uma convergência nos resultados.

Tabela 5.3: Resultados de referência obtidos pelo Método dos Elementos Finitos

$u_{x_{máx}}$	$u_{y_{máx}}$	$\sigma_{x_{máx}}$	$\sigma_{y_{máx}}$
$(x = 10; y = 0)$	$(x = 0; y = 18)$	$(x = 0; y = 5)$	$(x = 6, 4; y = 0)$
-0,230428	0,459017	-213,705	325,549

As distribuições da zona plástica para duas malhas, uma utilizando elementos

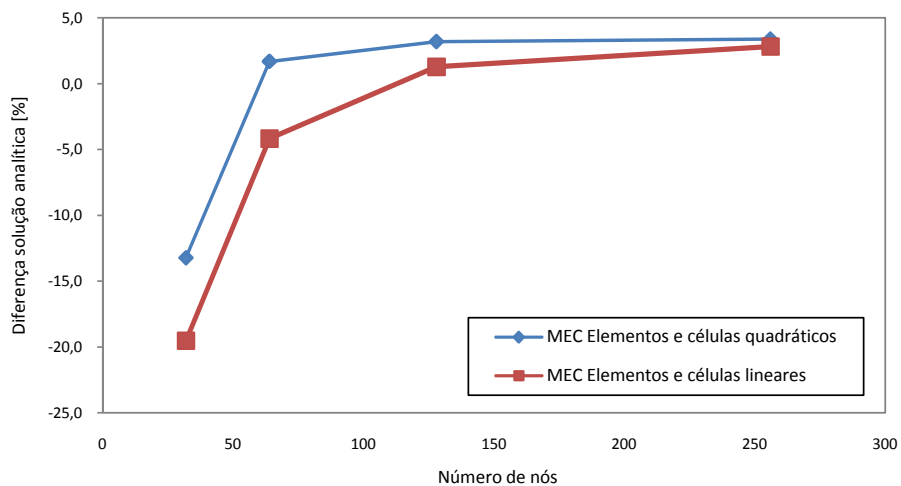


Figura 5.15: Convergência da solução final máxima para a componente u_x dos deslocamentos

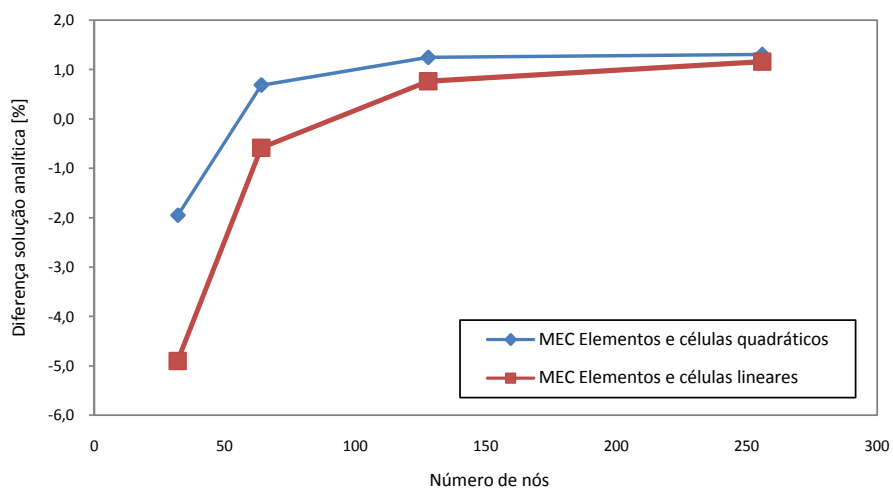


Figura 5.16: Convergência da solução final máxima para a componente u_y dos deslocamentos

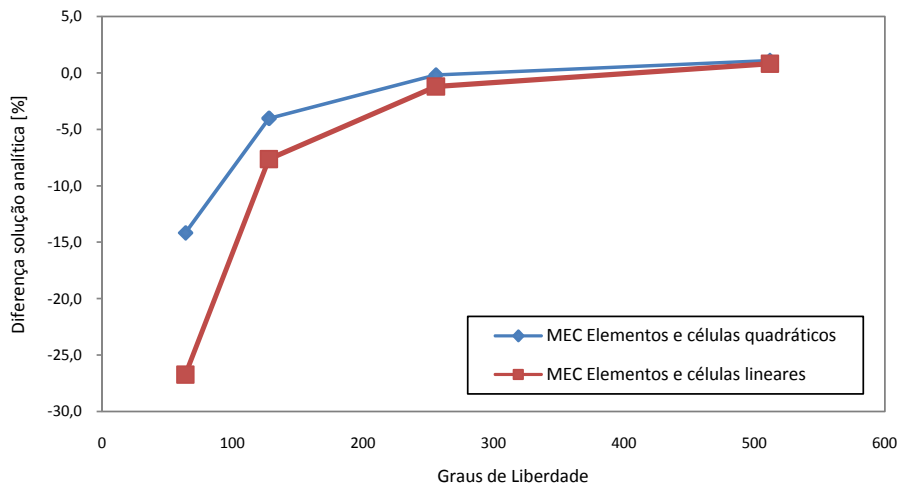


Figura 5.17: Convergência da solução final máxima para a componente σ_x dos estados de tensão

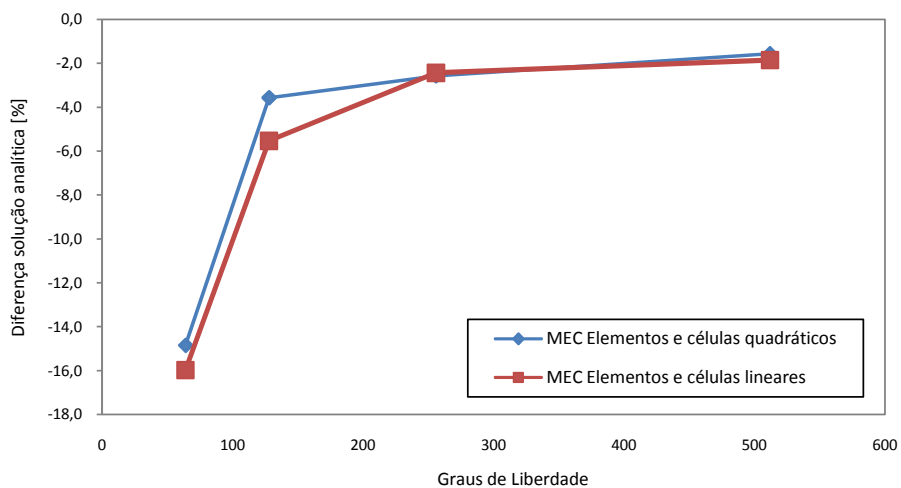


Figura 5.18: Convergência da solução final máxima para a componente σ_y dos estados de tensão

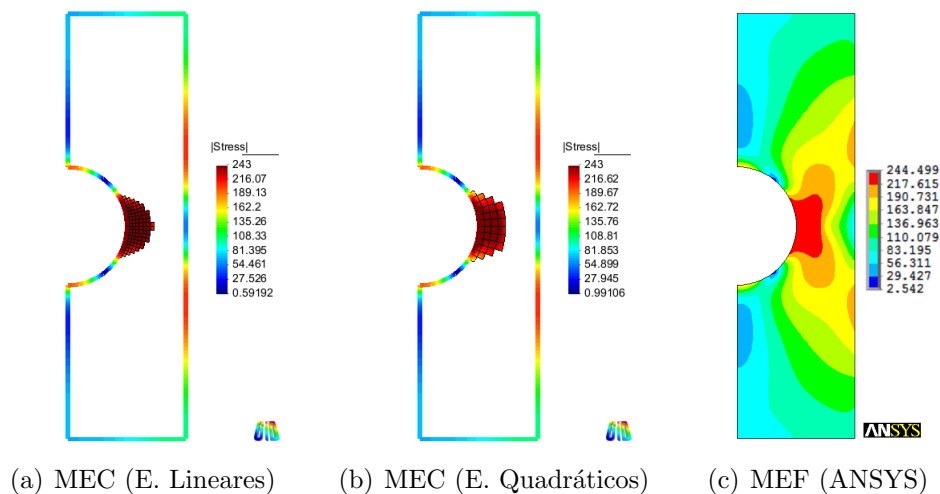


Figura 5.19: Distribuições da solução final para a tensão equivalente de von Mises ($\sqrt{3J_2}$)

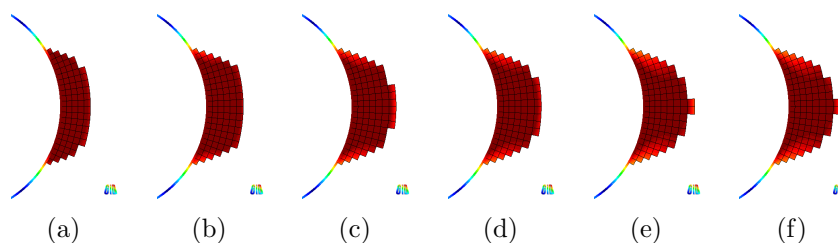


Figura 5.20: Evolução da Zona Plástica

lineares e outra quadráticos, ambas com 256 nós, juntamente com a solução utilizando o MEF, são mostradas na Figura 5.19. Pode-se perceber boa convergência da distribuição dos estados de tensão. Na figura 5.20 são exibidas algumas etapas da evolução da zona plástica em relação ao tempo e o processo de criação de células da malha exposta na figura 5.19(a).

Para verificar a implementação do processo de sub-regiões, a chapa perfurada sujeita a tração deste exemplo foi dividida em duas sub-regiões, ambas com as mesmas propriedades, conectadas entre si, conforme ilustrado na figura 5.21(a). Este novo problema foi resolvido utilizando várias malhas, seguindo o processo de refinamento utilizado anteriormente onde, a cada refinamento os elementos de contorno da malha anterior são subdivididos em dois elementos de tamanhos iguais. Na figura 5.22 está mostrada a comparação das distribuições finais obtidas para a componente u_y dos deslocamentos considerando uma região (figura 5.22(a)) e considerando duas

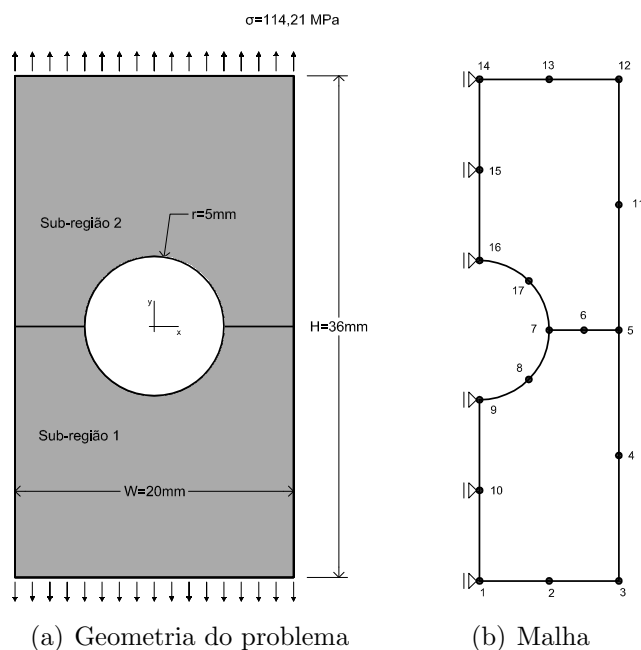


Figura 5.21: Chapa perfurada sujeita a tração com 2 sub-regiões - Geometria do problema e malha

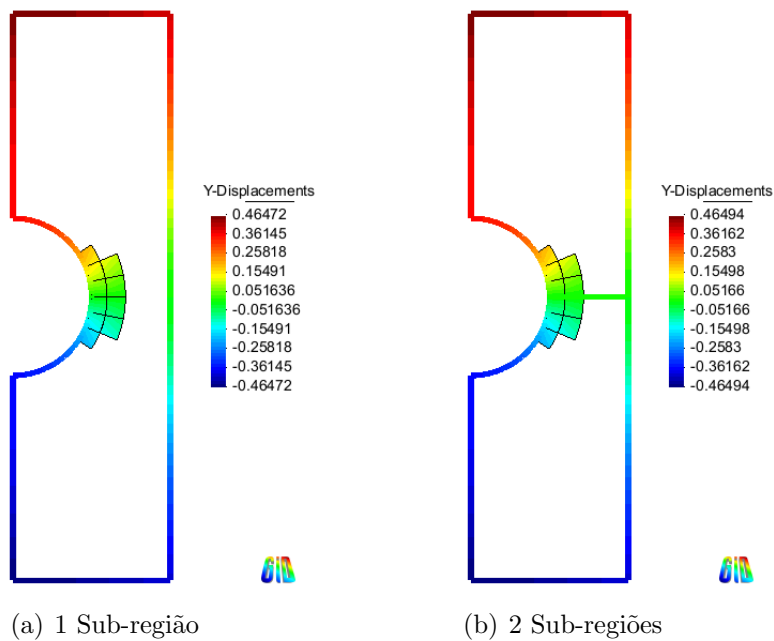


Figura 5.22: Comparação das distribuições final para a componente u_y do campo de deslocamentos

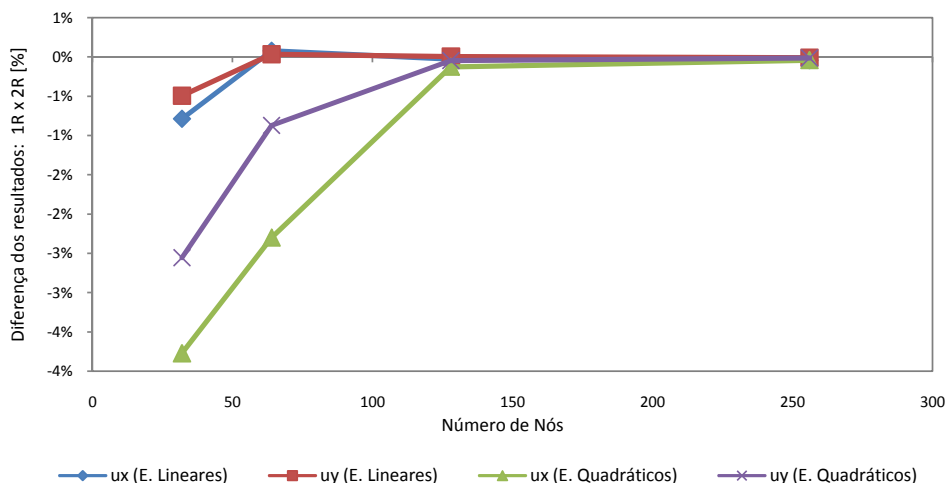


Figura 5.23: Convergência das diferenças dos valores máximos para as componentes u_x e u_y do deslocamentos obtidas considerando 1 e 2 sub-regiões.

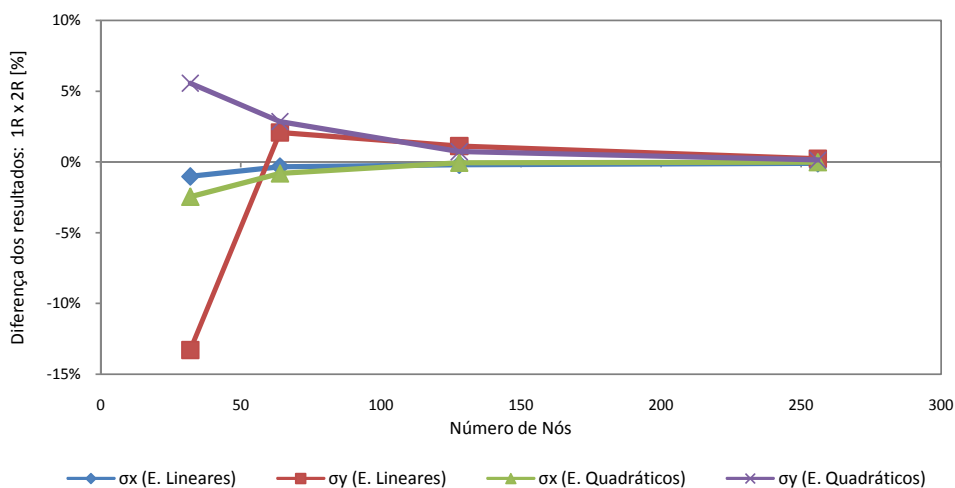


Figura 5.24: Convergência das diferenças dos valores máximos para as componentes σ_x e σ_y do estados de tensão obtidas considerando 1 e 2 sub-regiões.

sub-regiões (figura 5.22(b)). Como pode ser observado, resultados muito bons foram obtidos com o algoritmo de sub-regiões.

As diferenças dos resultados finais máximos obtidos, considerando uma região e duas regiões, para as malhas dos refinamentos subsequentes, são mostradas na figuras 5.23 e 5.24. Pode-se perceber que quanto mais refinada é a malha, e logo a interface entre as regiões, menor é a diferença entre os resultados obtidos com uma região ou duas sub-regiões.

Capítulo 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Duas formulações para o método dos elementos de contorno (MEC) foram estudadas neste trabalho, uma viscoelástica e outra viscoplástica. Em ambas as formulações considera-se o efeito do tempo no comportamento do material; entretanto não são considerados os efeitos dinâmicos, nem do carregamento nem da geometria, e com isto são utilizadas formulações quase-estáticas.

Na formulação viscoelástica adota-se o modelo constitutivo de Kelvin-Voigt para descrever o comportamento do material e o tempo foi discretizado por meio de uma aproximação linear, sendo a análise efetuada em passos de tempo Δt . Pela comparação com os resultados analíticos, pode-se perceber que os resultados obtidos pela análise viscoelástica utilizando o MEC apresenta precisão muito boa, sendo que, de fato, a principal fonte de erro é o valor do passo de tempo escolhido para a realização da análise. Não obstante o valor do passo de tempo não causar instabilidade numérica, nem alterar o resultado final da análise (quando $t \rightarrow \infty$), este valor pode causar distorções bastante significativas na simulação do comportamento viscoso do material. O comportamento viscoelástico do material pode ser melhor simulado com o refinamento da discretização do passo de tempo.

A análise viscoplástica é baseada no modelo constitutivo elasto/viscoplástico juntamente com a regra de fluxo de Perzyna. A análise viscoplástica é realizada em passos de tempo Δt , contudo o valor de passo de tempo não pode ser escolhido aleatoriamente, pois a escolha inadequada pode causar instabilidade numérica, conforme

pesquisas desenvolvidas por Cormeau (1975). Na formulação viscoplástica utilizada simula-se o escoamento do material em relação ao tempo e, quando $t \rightarrow \infty$, a sua solução se mostra equivalente à resposta elastoplástica, conforme discutido por Cormeau and Zienkiewicz (1974). Para o tratamento da região plastificada, adotou-se um algoritmo de criação automática de células. A possibilidade de análise de problemas definidos em domínios compostos de materiais distintos foi considerada por meio do conceito de sub-regiões, que são incorporadas à análise através da técnica conhecida como ‘método de matriz de rigidez’. Como pode-se observar, os resultados obtidos utilizando a formulação viscoplástica do MEC convergem com o refinamento da malha e estão em boa concordância com os resultados correspondentes utilizando a análise elastoplástica do MEF. A técnica de sub-regiões empregada também se mostrou adequada.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Este trabalho utilizou um plataforma inicial para a implementação das formulações estudadas. O autor sugere, como trabalhos futuros, algumas áreas de aperfeiçoamento e aprimoramento da plataforma como: o estudo e implementação da análise de sub-regiões considerando a formulação viscoelástica; o estudo e implementação de outras formulações viscoelásticas, como por exemplo, o modelo do material de Maxwell, juntamente com o estudo e aperfeiçoamento do algoritmo de geração de células.

Referências Bibliográficas

- Aliabadi, M. H. (2002), *The boundary element method: Applications in solids and structures*, John Wiley & Sons.
- Beer, G. (2001), *Programming the boundary element method*, John Wiley & Sons.
- Beer, G., Smith, I. and Duenser, C. (2008), *The boundary element method with programming for engineers and scientists*, Springer-Wien-NewYork.
- Carbone, N. (2007), Desenvolvimento de um novo algoritmo para análise viscoplástica com o método dos elementos de contorno, Master's thesis, Universidade de São Paulo, Brasil.
- Christensen, R. M. (1982), *Theory of Viscoelasticity: Second Edition*, Academic Press, New York.
- Cormeau, I. (1975), 'Numerical stability in quasi-static elasto-viscoplasticity', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **9**, 109–127.
- Cormeau, I. and Zienkiewicz, O. (1974), 'Visco-plasticity, plasticity and creep in elastic solids - a unified numerical approach', *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **8**, 821–845.
- Eberwien, U., Duenser, C. and Moser, W. (2005), 'Efficient calculation of internal results in 2d elasticity bem', *Engineering Analysis with Boundary Elements* **29**, 447–453.
- Fung, Y. C. (1965), *Foundations of solid mechanics*, Prentice Hall.
- Gao, X. W. and Davies, T. G. (2002), *Boundary element programming in mechanics*, Cambridge University Press.

- Guiggiani, M. and Casalini, P. (1987), ‘Direct computation of cauchy principal value integrals in advanced boundary elements’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **24**, 1711–1720.
- Huang, Q. (1993), Boundary element method: An introduction, Technical report, Vanderbilt University.
- Lachat, J. C. and Watson, J. C. (1976), ‘Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three dimensional elastostatics’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **10**, 991–1005.
- Mal, A. K. and Singh, S. J. (1991), *Deformation of Elastic Solids*, Prentice-Hall.
- Mesquita, A. D., Coda, H. B. and Venturini, W. S. (2001), ‘Alternative time marching process for bem and fem viscoelastic analysis’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **51**, 1157–1173.
- Noronha, M. A. M. and Pereira, A. M. B. (2003), ‘A new algorithm for visualization of domain results in analysis with the boundary element method’, *Boundary Element Technology XV* pp. 125–134.
- Ribeiro, T. S. A. (2006), Elastoplastic boundary element method with adaptive cell generation, PhD thesis, Technische Universität Graz.
- Ribeiro, T. S. A., Beer, G. and Duenser, C. (2008), ‘Efficient elastoplastic analysis with the boundary element method’, *Computational Mechanics* **41**, 715–732.
- Telles, J. C. F. and Brebbia, C. A. (1982), Viscoplastic analysis, in ‘Fourth International Seminar on Boundary Element Method in Engineering’, Southampton, England.
- Venturini, W. S. (1983), *Boundary element method in geomechanics*, Springer-Verlag.