

A Deus

Aos meus pais,
Antônio e Vilma

Aos meus irmãos,
Reginéa, Antônio, Reginaldo e Rogério

AGRADECIMENTOS

Ao professor Fernando Amorim de Paula pelos ensinamentos, orientação e incentivos.

Ao professor Gabriel de Oliveira Ribeiro pelo auxílio e sugestões.

Aos demais professores, colegas e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas pelo saudável convívio.

À CAPES e à FAPEMIG pelo financiamento da pesquisa.

RESUMO

O objetivo deste trabalho consiste na análise comparativa de alguns dos procedimentos utilizados para avaliar integrais de domínio utilizando o Método dos Elementos de Contorno. Com este propósito foi elaborado um programa computacional em linguagem FORTRAN 77, considerando-se ações de domínio em análises elásticas lineares de problemas bidimensionais para o estado plano de tensão/deformação. As integrais de domínio analisadas se devem à consideração de força gravitacional e à presença de variações de temperatura em pontos do corpo em estudo. Para a consideração destes efeitos foram utilizados o procedimento de discretização do domínio em células e dois métodos de transformação da integral de domínio em uma integral de contorno equivalente (o Método do Tensor de Galerkin e o Método da Múltipla Reciprocidade). A eficiência da aplicação destes procedimentos é demonstrada através da comparação dos resultados obtidos nos vários exemplos analisados. São também avaliadas as influências de alguns parâmetros nos procedimentos citados, como aquele devido à constante da solução fundamental ou à utilização de dados iniciais de temperatura interpolados ou campos de temperatura que não satisfazem a condição de equilíbrio de fluxo de Gauss. Estas avaliações permitem justificar as diferenças nas soluções obtidas com cada procedimento e indicam, para certas aplicações, o procedimento mais adequado a ser utilizado.

ABSTRACT

The aim of this work is to make a comparative analysis of some procedures to evaluate domain integrals using the Boundary Element Method. With this purpose a FORTRAN 77 computational code has been developed, considering domain effects in linear elastic analysis of 2-D plane stress/strain problems. The considered domain integrals arise from the consideration of the gravitational force and temperature changes. To take into account these effects, a procedure using the division of the domain into cells and two methods to transform the domain integral into an equivalent boundary integral (the Galerkin Tensor Method and the Multiple Reciprocity Method) have been used. The efficiency of the procedures is shown by comparing the results obtained in several analysed examples. The influence of some parameters in the results is also evaluated, such as the parameter due the fundamental solution constant, the use of interpolated temperature initial values or the use of temperature distributions that do not satisfy the Gauss equilibrium condition. These evaluations allow for farther insight into the differences on the results for each procedure and indicate the best approach to be used with some applications.

CONTEÚDO

CAPÍTULO 1	1
INTRODUÇÃO	1
1.1 - Considerações gerais	1
1.2 - Objetivos	8
1.3 - Revisão Bibliográfica	9
1.3.1 - Discretização do domínio em células	10
1.3.2 - Métodos de transformação da integral de domínio para uma integral de contorno	11
Integrais Particulares	11
Método do Tensor de Galerkin	12
Método da Reciprocidade Dual	13
Método da Múltipla Reciprocidade	16
1.4 - Descrição do corpo da dissertação	16
CAPÍTULO 2	18
PROBLEMAS DE ELASTICIDADE LINEAR BIDIMENSIONAL	18
2.1 - Introdução	18
2.2 - Conceitos básicos da elasticidade linear	19
2.2.1 - Estado plano de tensão	20
2.2.2 - Estado plano de deformação	21
2.2.3 - Equações gerais da elasticidade	23
2.2.4 - Formulação com tensões iniciais ou deformações iniciais	29
2.3 - Formulação integral de contorno	32

2.3.1 - Identidade de Somigliana	34
2.3.2 - Soluções fundamentais.....	39
2.3.3 - Equação integral no contorno	42
2.3.4 - Regiões infinitas	45
2.3.5 - Tensões nos pontos internos.....	47
2.3.6 - Tensões nos pontos de contorno.....	49
2.4 - Método dos Elementos de Contorno.....	51
CAPÍTULO 3.....	60
AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO NO MEC	60
3.1 - Considerações gerais	60
3.2 - Procedimentos de cálculo de integrais de domínio	64
3.2.1 - Discretização do domínio em células	64
Considerações para força gravitacional	71
Considerações para carregamento térmico constante	73
Considerações para carregamento térmico linear.....	74
Considerações para carregamento térmico parabólico.....	77
Considerações para carregamento térmico generalizado...	78
3.2.2 - Métodos de transformação da integral de domínio para o contorno	81
3.2.2.1 - Método do Tensor de Galerkin.....	82
Considerações para força gravitacional	83
Considerações para carregamento térmico	84
3.2.2.2 - Método da Múltipla Reciprocidade.....	87
Considerações para força gravitacional	91
Considerações para carregamento térmico	92
a. Carregamento térmico linear	93
b. Carregamento térmico quadrático	94

Cálculo de integrais com singularidade logarítmica utilizando-se transformação de coordenadas do terceiro grau.....	96
CAPÍTULO 4.....	99
IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	99
4.1 - Integração numérica para células triangulares	100
4.2 - Estrutura do programa	105
CAPÍTULO 5.....	109
EXEMPLOS.....	109
5.1 - Introdução	109
5.2 - Exemplo 1-a.....	110
Chapa submetida à tração e ao peso próprio.....	110
5.3 - Exemplo 1-b.....	117
Chapa submetida à tração, ao peso próprio e à variação de temperatura.....	117
5.4 - Exemplo 2-a.....	121
Chapa em L submetida a força gravitacional.....	121
5.5 - Exemplo 2-b.....	126
Chapa em L submetida a temperatura constante	126
5.6 - Exemplo 2-c	130
Chapa em L submetida a uma variação linear de temperatura ao longo do eixo y.....	130
5.7 - Exemplo 2-d.....	134
Chapa em L submetida a uma variação parabólica de temperatura ao longo do eixo y	134
5.8 - Exemplo 3-a.....	139

Viga submetida à variação de temperatura parabólica	139
5.9 - Exemplo 3-b	142
Viga submetida à um campo de temperatura com descontinuidade no contorno	142
CAPÍTULO 6	151
CONCLUSÕES	151
Sugestões	155
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	157

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Corpo genérico no plano xy	20
Figura 2.2 - Chapa fina submetida a carregamentos no seu plano - estado plano de tensão	21
Figura 2.3 - Sólido prismático submetido a carregamentos constantes na direção z- estado plano de deformação	23
Figura 2.4 - Tensões e forças de volume no elemento infinitesimal	25
Figura 2.5 - Forças de superfície	26
Figura 2.6 - Região geral de domínio Ω^* e contorno Γ^* , contendo o corpo de domínio Ω e contorno Γ	35
Figura 2.7 - Ponto singular ξ removido do contorno por um setor de círculo	43
Figura 2.8 - Definição da região infinita com cavidade interna	45
Figura 2.9 - Sistema de referência local ao elemento	50
Figura 2.10 - Elementos de contorno com variação linear	53
Figura 2.11 - Coordenadas cartesianas do elemento n	54
Figura 2.12 - Conceito de nó duplo para elemento linear	55
Figura 3.1 - Divisão do domínio em células	65
Figura 3.2 - Célula triangular e definição de coordenadas homogêneas	66
Figura 3.3 - Sistema de coordenadas cilíndricas baseado no ponto singular ξ	68
Figura 3.4 - Definição das variações de temperatura T_1 e T_2 , e da distância h	75
Figura 3.5 - Definição das variações de temperatura T_1 , T_2 e T_3 e da distância h	77

Figura 3.6 - Transformação da integral de domínio para o contorno através do MMR	89
Figura 4.1 - Diagrama de blocos	108
Figura 5.1 - Exemplo 1 - geometria e condições de contorno.....	111
Figura 5.2 - Exemplo 1 - discretizações - (a) MEC - 10 elementos e 12 células; (b) MEC - 20 elementos e 48 células; (c) MEC - 40 elementos e 192 células; (d) MEF/ANSYS - 96 elementos	112
Figura 5.3 - Exemplo 1-a - deslocamentos u_x	116
Figura 5.4 - Exemplo 1-a - deslocamentos u_y	116
Figura 5.5 - Exemplo 1-b - deslocamentos u_x	120
Figura 5.6 - Exemplo 1-b - deslocamentos u_y	120
Figura 5.7 - Exemplo 2 - (a) geometria e condições de contorno; (b) MEC - 24 elementos e 40 células; (c) MEC - 284 elementos e 10240 células; (d) MEF/ANSYS - 5120 elementos.....	122
Figura 5.8 - Exemplo 2-a - deslocamentos u_y - eixo $x=0,5$	125
Figura 5.9 - Exemplo 2-a - deslocamentos u_y - eixo $y=0,5$	125
Figura 5.10 - Exemplo 2-b - deslocamentos u_x - eixo $x=0,5$	128
Figura 5.11 - Exemplo 2-b - deslocamentos u_x - eixo $y=0,5$	128
Figura 5.12 - Exemplo 2-b - deslocamentos u_y - eixo $x=0,5$	129
Figura 5.13 - Exemplo 2-b - deslocamentos u_y - eixo $y=0,5$	129
Figura 5.14 - Exemplo 2-c - variação linear de temperatura	130
Figura 5.15 - Exemplo 2-c - deslocamentos u_x - eixo $x=0,5$	132
Figura 5.16 - Exemplo 2-c - deslocamentos u_x - eixo $y=0,5$	132
Figura 5.17 - Exemplo 2-c - deslocamentos u_y - eixo $x=0,5$	133
Figura 5.18 - Exemplo 2-c - deslocamentos u_y - eixo $y=0,5$	133
Figura 5.19 - Exemplo 2-d - variação parabólica de temperatura.....	134
Figura 5.20 - Exemplo 2-d - deslocamentos u_x - eixo $x=0,5$	137

Figura 5.21 - Exemplo 2-d - deslocamentos u_x - eixo $y=0,5$	137
Figura 5.22 - Exemplo 2-d - deslocamentos u_y - eixo $x=0,5$	138
Figura 5.23 - Exemplo 2-d - deslocamentos u_y - eixo $y=0,5$	138
Figura 5.24 - Exemplo 3-a - geometria, condições de contorno e discretizações para variação de temperatura parabólica.....	139
Figura 5.25 - Exemplo 3-a - temperatura analítica para p_x	141
Figura 5.26 - Exemplo 3-a - temperatura interpolada para p_x	141
Figura 5.27 - Exemplo 3-b - problema de descontinuidade de temperatura.....	142
Figura 5.28 - Exemplo 3-b - discretização - 58 elementos e 330 células.....	143
Figura 5.29 - Exemplo 3-b - detalhe A.....	143
Figura 5.30 - Exemplo 3-b - discretização - 128 elementos e 400 células.....	144
Figura 5.31 - Exemplo 3-b - detalhe B.....	145
Figura 5.32 - Exemplo 3-b - deslocamento u_y - 58 elementos.....	148
Figura 5.33 - Exemplo 3-b - força de superfície p_x - 58 elementos....	148
Figura 5.34 - Exemplo 3-b - deslocamento u_y - 128 elementos.....	149
Figura 5.35 - Exemplo 3-b - força de superfície p_x - 128 elementos..	149
Figura 5.36 - Exemplo 3-b - deslocamentos u_y	150
Figura 5.37 - Exemplo 3-b - força de superfície p_x	150

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Resultados de integração numérica utilizando 7 pontos de Reddy e Shippy	104
Tabela 4.2 - Resultados de integração numérica através do esquema de Hammer ou Cowper com 7 pontos.....	104
Tabela 4.3 - Resultados da integração de funções singulares através do esquema de Gauss com 10 pontos	104
Tabela 5.1 - Exemplo 1-a - deslocamentos u_x	115
Tabela 5.2 - Exemplo 1-a - deslocamentos u_y	115
Tabela 5.3 - Exemplo 1-b - deslocamentos u_x	119
Tabela 5.4 - Exemplo 1-b - deslocamentos u_y	119
Tabela 5.5 - Exemplo 2-a - deslocamentos u_y	124
Tabela 5.6 - Exemplo 2-b - deslocamentos u_x	127
Tabela 5.7 - Exemplo 2-b - deslocamentos u_y	127
Tabela 5.8 - Exemplo 2-c - deslocamentos u_x	131
Tabela 5.9 - Exemplo 2-c - deslocamentos u_y	131
Tabela 5.10 - Exemplo 2-d - deslocamentos u_x	136
Tabela 5.11 - Exemplo 2-d - deslocamentos u_y	136
Tabela 5.12 - Exemplo 3-a - forças de superfície p_x - temperatura analítica	140
Tabela 5.13 - Exemplo 3-a - forças de superfície p_x - temperatura interpolada	140
Tabela 5.14 - Deslocamentos u_y e forças de superfície p_x ao longo do eixo $x = 1$	147
Tabela 5.15 - Resultados para diferentes discretizações para análise térmica e elástica.....	147

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - Considerações gerais

Os problemas de engenharia podem ser resolvidos por métodos experimentais, analíticos e numéricos. Em certos problemas práticos as soluções analíticas são de difícil obtenção. Os métodos experimentais são de custo elevado e mais utilizados em pesquisas científicas, devendo-se, desta forma, buscar-se um método numérico mais adequado à aplicação em questão.

Os principais métodos numéricos utilizados para a solução de problemas em engenharia são: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF), que são métodos de domínio, e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O MDF é o método mais simples e antecedeu à criação dos outros dois. Este consiste em transformar o sistema de equações diferenciais representativo do problema em um sistema algébrico, através da aplicação de operadores diferenciais que aproximam cada uma das derivadas parciais contínuas, usando expansões locais, geralmente séries de Taylor truncadas, para representar as variáveis em sub-regiões convenientemente definidas.

O MEF faz uso de equações diferenciais em sua formulação, e é o método atualmente mais conhecido e de grande aplicabilidade na engenharia. Este método consiste em dividir o meio contínuo em uma série de elementos, equacionando-os individualmente como sub-regiões contínuas e reunindo-os para a solução do problema como um todo. Para tal, torna-se necessário associarem-se nós a cada elemento e escolherem-se funções de interpolação para representar os valores das variáveis em quaisquer pontos do elemento, a partir dos valores nodais das mesmas.

Tanto o MDF e o MEF requerem uma entrada de dados definindo todo o domínio a ser analisado. Determinados problemas exigem malhas muito refinadas e conseqüentemente um sistema com elevado número de equações. Desta forma podem ser desvantajosas suas aplicações em determinados problemas, como os que possuem contorno infinito ou concentração de tensões, por exemplo.

O MEC utiliza equações integrais em sua formulação básica e consiste em analisar um determinado corpo submetido a solicitações, utilizando-se apenas a discretização do seu contorno, onde são feitas as devidas aproximações.

As principais vantagens da utilização do MEC são:

- as soluções são obtidas através de equações integrais, que são mais precisas que as equações diferenciais;
- as variáveis são de contorno apenas, reduzindo em uma unidade a dimensão do problema original;
- as soluções para problemas de domínios infinitos ou semi-infinitos são mais viáveis, sendo o contorno infinito representado de forma exata;
- para problemas da elasticidade que envolvem concentrações de tensões e problemas com deformações ou tensões iniciais obtêm-se resultados com uma boa precisão.

Assim o uso do MEC pode proporcionar economia computacional, gerando sistemas de equações relativamente menores que o MEF, embora a matriz utilizada no MEC é cheia e não-simétrica, e soluções mais rápidas e apresentando ainda melhores resultados em determinados casos.

Os problemas físicos em geral são representados por equações diferenciais. Através do uso da técnica dos resíduos ponderados ou do teorema de Betti, estas equações podem ser transformadas em equações integrais de contorno, adotando-se como função ponderadora uma solução fundamental do problema. Pode-se então buscar uma solução numérica discretizando-se o contorno em segmentos sobre os quais são aproximados os valores das variáveis, obtendo-se o sistema de equações do MEC, ao se escrever as representações integrais discretizadas nos diversos pontos de

colocação. A solução fundamental é em geral a resposta num meio infinito decorrente da aplicação de uma carga unitária num ponto.

As formulações do MEC podem ser obtidas pelo método indireto ou pelo método direto. Neste último, as incógnitas dos integrandos são as variáveis físicas do problema real (deslocamentos e forças de superfície no contorno, no caso de problemas da elasticidade). Na formulação indireta, a solução do problema é obtida em termos de variáveis fictícias ou funções de tensões, por exemplo, sem significado físico real, associadas às variáveis reais de contorno. A partir da obtenção destas variáveis fictícias determinam-se as variáveis físicas do problema.

Determinados problemas que envolvem propriedades físicas ou geométricas variáveis no domínio, tais como materiais diferentes e variação de espessura, podem ser resolvidos através do MEC com o uso de sub-regiões, desenvolvendo-se as equações integrais para cada região separadamente e depois somando-as com a consideração de equilíbrio e compatibilidade nas interfaces.

Alguns problemas de engenharia apresentam características adequadas à utilização do MEF em combinação com o MEC, visando obter resultados melhores ao se utilizar o método numérico mais conveniente em cada região do corpo em estudo.

Várias pesquisas vêm sendo realizadas com a intenção de se estender a aplicação do MEC para todas as áreas técnicas da engenharia. Na área de Engenharia de Estruturas o MEC tem sido aplicado com sucesso nos estudos de interação solo-estrutura, em

análise de escavações e fundações em geral, em flexão de placas, elastodinâmica, problemas não-lineares, mecânica da fratura, problemas de contato e análises tridimensionais.

A discretização do domínio no MEC pode ser evitada em muitos casos, mas poderá ser necessária para considerarem-se determinadas forças de volume, efeitos dependentes do tempo ou não-lineares. Nestes casos, não são introduzidas incógnitas adicionais na análise, mas aparece uma integral de domínio na formulação do MEC que deve ser apropriadamente analisada para se obter a melhor solução do problema. Um procedimento mais direto e natural para avaliação da integral de domínio é a discretização em células, que pode em certos casos afetar a eficiência numérica do MEC e depreciar sua elegância devido à discretização interna. Entretanto, este processo é uma forma bastante acessível para o tratamento da integral de domínio, pois o valor desta integral pode ser obtido através da integral de cada célula separadamente. Esta integral de célula poderá ser avaliada numericamente, caso não existam singularidades no integrando. A singularidade associada à solução fundamental de Kelvin para casos bidimensionais ocorre quando o ponto de aplicação da carga unitária está situado sobre o contorno da célula e, nestes casos, o valor da integral de domínio pode ser obtido de forma adequada através da utilização de um procedimento semi-analítico.

Para alguns tipos de forças de volume e distribuição de temperatura, a transformação da integral de domínio em uma integral de contorno equivalente é possível e mais atraente. Diversos procedimentos foram criados com este objetivo, tais como o Método do Tensor de Galerkin (MTG), o uso de Integrais Particulares, o Método

da Reciprocidade Dual (MRD) e o Método da Múltipla Reciprocidade (MMR).

O MTG consiste em adotar-se um tensor associado à solução fundamental que possibilita o uso do teorema da divergência para transformar a integral de volume em uma integral de contorno.

A utilização de integrais particulares envolve a solução de equações diferenciais não-homogêneas, isto é, trata-se da solução da equação diferencial pela soma da solução da equação homogênea a uma solução particular. Então o uso desta técnica consiste em encontrar uma solução fundamental particular que transforma a integral de domínio devido às forças de volume em uma integral de contorno. Sua limitação é que a implementação computacional é dispendiosa, pois é necessário resolver-se inicialmente cada tipo de equação integral de domínio semi-analiticamente.

No MRD é proposta uma representação da força de volume dada por uma série de funções linearmente independentes, definidas sobre todo o domínio, multiplicadas por coeficientes a serem determinados. Com a utilização do conceito de soluções particulares e integrando-se por partes o termo de domínio para transformá-lo numa integral de contorno, obtém-se uma expressão semelhante à equação do MEC homogênea, isto é, sem considerar forças de volume. Este método resolve uma grande quantidade de problemas, mas em muitos casos requer um número significativo de pontos internos para aproximar a solução exata. Sua maior limitação é quando se trabalha com problemas que possuem elevado número de graus de liberdade,

pois o método torna-se dispendioso em função da inversão de matriz inerente ao mesmo.

O MMR é um procedimento relativamente novo e consiste em uma aplicação repetida da integração por partes e do teorema de Green, usando-se uma seqüência de soluções fundamentais de alta ordem e de derivadas da função da força de volume. Os resultados obtidos com o seu uso são praticamente exatos, pois não existem aproximações no processo. Resolve-se qualquer tipo de problema, desde que seja possível obter convergência no processo ou que seja obtida uma derivada da função da força de volume identicamente nula.

Uma das forças de volume que usualmente tem de ser incluída em uma análise estrutural corresponde ao peso próprio do corpo. Para consideração desta força gravitacional, considera-se que a gravidade terrestre apresenta-se aproximadamente constante até determinada altura, que geralmente abrange o meio no qual está situado o domínio do problema em análise. A utilização de força gravitacional constante facilita o cálculo da integral de domínio correspondente.

A variação térmica na engenharia tem de ser corretamente avaliada para evitarem-se problemas, tais como deformações excessivas, rupturas e diminuição da vida útil das estruturas. O problema estacionário de distribuição de temperaturas corresponde a um problema de potencial governado por uma equação de Poisson. Uma vez obtida a solução para a distribuição de temperaturas, a consideração do carregamento térmico na análise

elástica pode ser introduzida como deformações ou tensões iniciais, o que resulta em uma integral de volume na equação integral do MEC.

1.2 - Objetivos

O objetivo da dissertação consiste na análise comparativa de alguns dos procedimentos utilizados para a avaliação de integrais de domínio utilizando-se o MEC. Com esta finalidade foi desenvolvido um programa computacional em linguagem FORTRAN, considerando-se a força de volume em problemas elásticos, lineares e bidimensionais, utilizando-se elementos de contorno com variação linear. Além da força gravitacional, foi considerado também o problema correspondente à aplicação de um campo de distribuição de temperaturas, que também resulta no aparecimento de uma integral de domínio. Para avaliarem-se as integrais de domínio foram selecionados três procedimentos entre vários outros citados na literatura. O primeiro procedimento consiste na divisão do domínio em células que, além da simplicidade de aplicação, também apresenta a característica de aplicação geral, podendo avaliar qualquer distribuição de forças de volume (temperaturas ou outros efeitos como deformações plásticas) no domínio do corpo. Os outros dois procedimentos, o MTG e o MMR, utilizam a transformação da integral de domínio em uma integral de contorno baseados em transformações matemáticas equivalentes, e necessitam que os valores das distribuições satisfaçam equações diferenciais do tipo Laplace ou Poisson.

Além do levantamento do estado da arte sobre consideração de forças de volume com os procedimentos citados acima e descrição dos passos necessários para as implementações numéricas, o trabalho apresenta um estudo sobre a eficiência de cada procedimento através da comparação dos resultados obtidos em vários exemplos analisados.

1.3 - Revisão Bibliográfica

A transformação de uma equação diferencial em uma equação integral tem tido várias contribuições dos estudiosos desde 1903, quando foi publicado o trabalho de FREDHOLM¹ *apud* BREBBIA *et alii* (1984), no qual foi demonstrada a existência de solução para equações diferenciais da teoria de potencial, com base em procedimentos de discretização. Desde então, este processo vem sendo estudado por diversos pesquisadores.

BANERJEE e BUTTERFIELD² *apud* BANERJEE (1994) usaram pioneiramente o nome Método dos Elementos de Contorno (MEC) em 1975, em seu trabalho sobre o MEC aplicado à geomecânica.

¹ FREDHOLM, I. *Sur Une Classe Déquations Fonctionelles*. Acta Math, v.27, p.365-390, 1903.

² BANERJEE, P. K.; BUTTERFIELD, R. *Boundary Element Methods in Geomechanics. Finite Elements in Geomechanics*. Cap.16. G. Gudehus. John Wiley and Sons, London, 1976.

O MEC é uma técnica bem estabelecida e os seus conceitos fundamentais, suas características e aplicações vêm sendo aprimorados e divulgados por vários autores nos últimos tempos.

1.3.1 - Discretização do domínio em células

Problemas que incluem forças de volume e variação de temperatura podem ter seus domínios divididos em células de forma a se obter o total da integral de domínio oriunda destes efeitos, conforme apresentam BREBBIA e WALKER (1980), BREBBIA *et alii* (1984), BREBBIA e DOMINGUEZ (1992). TEIXEIRA (1992) estudou a análise bidimensional elastoplástica de túneis pelo MEC considerando as deformações plásticas na forma de “tensões iniciais” e avaliando as integrais de domínio correspondentes com o uso do procedimento de discretização do domínio em células triangulares.

O uso do procedimento de discretização em células conduz ao aumento da quantidade de dados a serem manipulados e em certos casos é necessário um grande refinamento da malha interna. Por esta razão numerosos estudos vêm sendo realizados para se fazer com eficiência a transformação da integral de domínio em uma integral de contorno.

1.3.2 - Métodos de transformação da integral de domínio para uma integral de contorno

A transformação de integral de domínio em integral de contorno equivalente foi proposta por RIZZO e SHIPPY (1977) de forma eficiente, com a aplicação do teorema da divergência (teorema de Green) na integral referente às forças de volume para problemas da termoelasticidade. No trabalho de KARAMI e KUHN (1993) foi utilizado este método, que resulta em uma equação integral de contorno para domínios múltiplos, empregando representações de geometria isoparamétrica quadrática para análise de problemas de fratura submetidos a carregamento de forças de volume. O objetivo foi alcançado com a demonstração da eficiência do MEC em relação aos outros métodos, demandando pouco esforço na preparação dos dados e obtendo-se solução com ótimos níveis de precisão.

Integrais Particulares

O uso de integrais particulares para a transformação da integral de domínio foi discutido, em princípio, por WATSON³, BANERJEE e BUTTERFIELD (1981).

³ WATSON, J. O. Advanced Implementation of the Boundary Element Method for Two and Three Dimensional Elastostatics. Cap.3 in P. K. Banerjee and R. Butterfield (eds.). *Developments in Boundary Element Methods*, v.1, Applied Science Publishers, Barking, U. K., p.31-64, 1979.

No trabalho de PAPE e BANERJEE (1987), foram estudadas formulações direta e indireta de elementos de contorno para elasticidade bidimensional, confirmando a eficiência do MEC mesmo para problemas de regiões múltiplas com geometria complicada. Foram utilizadas integrais particulares para força gravitacional e força centrífuga.

Em muitos trabalhos foi utilizado este procedimento, tais como HENRY e BANERJEE (1988a,b) que desenvolveram uma formulação de elementos de contorno bi e tridimensional para análise termoelástica e elastoplástica, concluindo sobre a real versatilidade e precisão do MEC. Segundo estes autores, o uso de integrais particulares satisfazem a equação diferencial não-homogênea de forma adequada.

Método do Tensor de Galerkin

Quando a equação diferencial correspondente à força de volume é uma equação de Laplace ou de Poisson, a integral de domínio poderá ser transformada em uma integral de contorno utilizando o Método do Tensor de Galerkin (MTG), o qual foi proposto inicialmente por CRUSE⁴ *apud* KARAMI e KUHN (1993) e desenvolvido por DANSON (1981). No trabalho de BREBBIA *et alii* (1984) e de BREBBIA e DOMINGUEZ (1992) foi dado um bom enfoque

⁴ CRUSE, T.A. Boundary Integral Equation Method for Three Dimensional Fracture Mechanics Analysis. AFOSR-TR-75 0813 Report, 1975.

sobre a utilização do método, apresentando-se o MTG para problemas de elasticidade com forças gravitacionais, forças centrífugas e carregamento térmico.

Na mesma linha de pesquisa, SANTIAGO (1987) utilizou o MTG para tratar problemas de elasticidade bidimensional com força gravitacional, força centrífuga e carregamento térmico, dando boa visão sobre a eficiência do método através dos resultados obtidos nas aplicações.

SANTIAGO e TELLES (1994) fizeram a aplicação do MEC na análise termoelástica linear de estruturas para o estado plano, considerando-se o fluxo estacionário e utilizando-se a solução fundamental de Kelvin. Na transformação de integrais de domínio em integrais de contorno foi aplicado o MTG, obtendo-se bons resultados.

Método da Reciprocidade Dual

Outro método eficiente para o tratamento de integrais de domínio cuja aplicação tem-se difundido entre os pesquisadores é o Método da Reciprocidade Dual (MRD) que foi proposto primeiramente por NARDINI e BREBBIA⁵ *apud* BREBBIA e DOMINGUEZ (1992).

⁵ NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements. *Boundary Element Methods in Engineering*, ed. C. A. Brebbia, Springer-Verlag, Berlin, 1982

Na análise estrutural, muitos pesquisadores deixaram sua contribuição para o MRD. Por exemplo, PORTELA e ALIABADI (1992) fizeram com eficiência a implementação numérica bidimensional do MRD para problemas de fratura linear e elástica.

SENSALE *et alii* (1994) apresentaram uma aplicação do MRD a problemas de tensões térmicas em materiais elásticos lineares e isotrópicos submetidos a uma distribuição permanente e arbitrária de temperatura e obtiveram bons resultados.

VENTURINI (1994) fez uma análise crítica das várias possibilidades para o tratamento de integrais de domínio no MEC. Propôs uma família de funções para o uso do MRD em problemas bidimensionais e problemas não-lineares.

Além das aplicações na Engenharia Estrutural, um grande leque de aplicações do MRD pode ser visto em diversos trabalhos realizados por vários autores. PARTRIDGE e WROBEL (1990) estudaram o problema não-linear de condução de calor de ignição espontânea de um sólido reativo, obtendo propriedades já esperadas dentro de limites preestabelecidos.

WROBEL e DEFIGUEIREDO (1991) utilizaram uma formulação de elementos de contorno para problemas uniformes de convecção-difusão com campo de velocidade variável de valor baixo. Neste trabalho foi feito um estudo interessante que mostra quando o uso de MRD é vantajoso ou não, concluindo que quando a velocidade é significativa em comparação com a difusibilidade, deve-se utilizar

discretização do domínio em células para a obtenção de resultados mais exatos.

ZHU *et alii* (1994) apresentaram o MRD aplicado num espaço de Laplace para resolver eficientemente problemas de difusão dependentes do tempo.

LEE *et alii* (1994) apresentaram um modelo com o uso do MRD para radiação acústica em um campo subsônico de fluxo não-uniforme.

CHENG *et alii* (1994) utilizaram várias funções de forma globais para interpolar o termo de forças de volume no MRD, cujos resultados apresentaram ótimos níveis de convergência.

DAVIS *et alii* (1994) fizeram com sucesso um trabalho de aplicação à indústria de plástico, utilizando-se simulação de elementos de contorno com o uso do MRD para transferência de calor durante o processo industrial.

PARTRIDGE (1994) comparou uma função de aproximação global no MRD com funções básicas radiais conhecidas para convecção, difusão e outros problemas nos quais a integral de volume considerada contém derivada primeira e segunda da variável do problema, derivadas de tempo e somatório e produtos de funções, incluindo termos não-lineares. Concluiu que com este procedimento obtêm-se resultados muito precisos.

Método da Múltipla Reciprocidade

Mais recentemente, NOWAK (1988) propôs o Método da Múltipla Reciprocidade (MMR), desenvolvendo-o juntamente com BREBBIA, para solucionar problemas regidos pelas equações de Helmholtz (1989a) e de Poisson (1989b).

A sua aplicação para problemas de elasticidade foi inicialmente apresentada por NEVES e BREBBIA (1991), quando desenvolveram as equações para o MMR a partir das equações da elasticidade, que são relativamente complexas. Apresentaram o MMR para problemas de elasticidade com forças gravitacionais e carregamento térmico.

Conceitos fundamentais e variadas aplicações realizadas com a utilização do MMR foram reunidas por NOWAK e NEVES (1994), onde comparam o MMR com outros métodos de transformação da integral de domínio referente às forças de volume.

1.4 - Descrição do corpo da dissertação

A dissertação será dividida em cinco capítulos, a saber:

O capítulo 1 refere-se à introdução, onde o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e os procedimentos para consideração de forças de

volume são apresentados de uma forma sucinta junto à revisão bibliográfica e à descrição do corpo da dissertação.

O capítulo 2 trata dos fundamentos e da formulação básica do MEC para elasticidade bidimensional linear.

O capítulo 3 trata da consideração de forças de volume utilizando-se os procedimentos de discretização do domínio em células, Método do Tensor de Galerkin e Método da Múltipla Reciprocidade.

O capítulo 4 trata da forma e dos passos necessários para a implementação do programa para consideração de forças gravitacionais e carregamento térmico em problemas de elasticidade bidimensional.

No capítulo 5 são mostradas as aplicações feitas com os procedimentos de cálculo na forma de discretização em células, do Tensor de Galerkin e do Método da Múltipla Reciprocidade, bem como um estudo comparativo entre eles.

No capítulo 6 são apresentadas as conclusões obtidas através das aplicações e sugestões para a continuidade dos estudos sobre o assunto.

CAPÍTULO 2

PROBLEMAS DE ELASTICIDADE LINEAR BIDIMENSIONAL

2.1 - Introdução

Neste capítulo será apresentada a aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para problemas elásticos lineares bidimensionais e isotrópicos, utilizando-se a formulação direta. Para isto, será apresentado o equacionamento básico destes problemas, a partir do qual obtêm-se as equações integrais do MEC.

Para a obtenção das equações integrais do MEC e suas propriedades intrínsecas, são discutidos os seguintes tópicos: a identidade de Somigliana; a solução fundamental de Kelvin; a equação integral para pontos do contorno; representação integral para as tensões nos pontos internos e de contorno; consideração de regiões infinitas; e o Método dos Elementos de Contorno propriamente dito.

2.2 - Conceitos básicos da elasticidade linear

A propriedade da elasticidade segundo TIMOSHENKO e GOODIER (1980) é conferida a quase todos os materiais usados na engenharia de estruturas até um certo nível de tensão. Assim, abaixo deste limite, a consideração desta propriedade facilita significativamente a análise e permite a obtenção de respostas com precisão adequada.

A elasticidade é caracterizada pelo fato do corpo não guardar deformações residuais após um ciclo de carga e descarga. Admite-se, também, que o corpo é isotrópico, isto é, ele tem propriedades elásticas iguais em todas as direções.

Neste trabalho são admitidas relações deformação-deslocamento para o corpo em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações. Assume-se ainda uma relação constitutiva elástica linear, ou seja, o material deve obedecer a lei de Hooke e mudanças da configuração inicial da estrutura são desprezíveis, formulando-se o equilíbrio na posição indeformada.

Os problemas abordados configuram-se como estados planos de tensão ou deformação, que serão apresentados a seguir e genericamente ilustrados pela fig. (2.1).

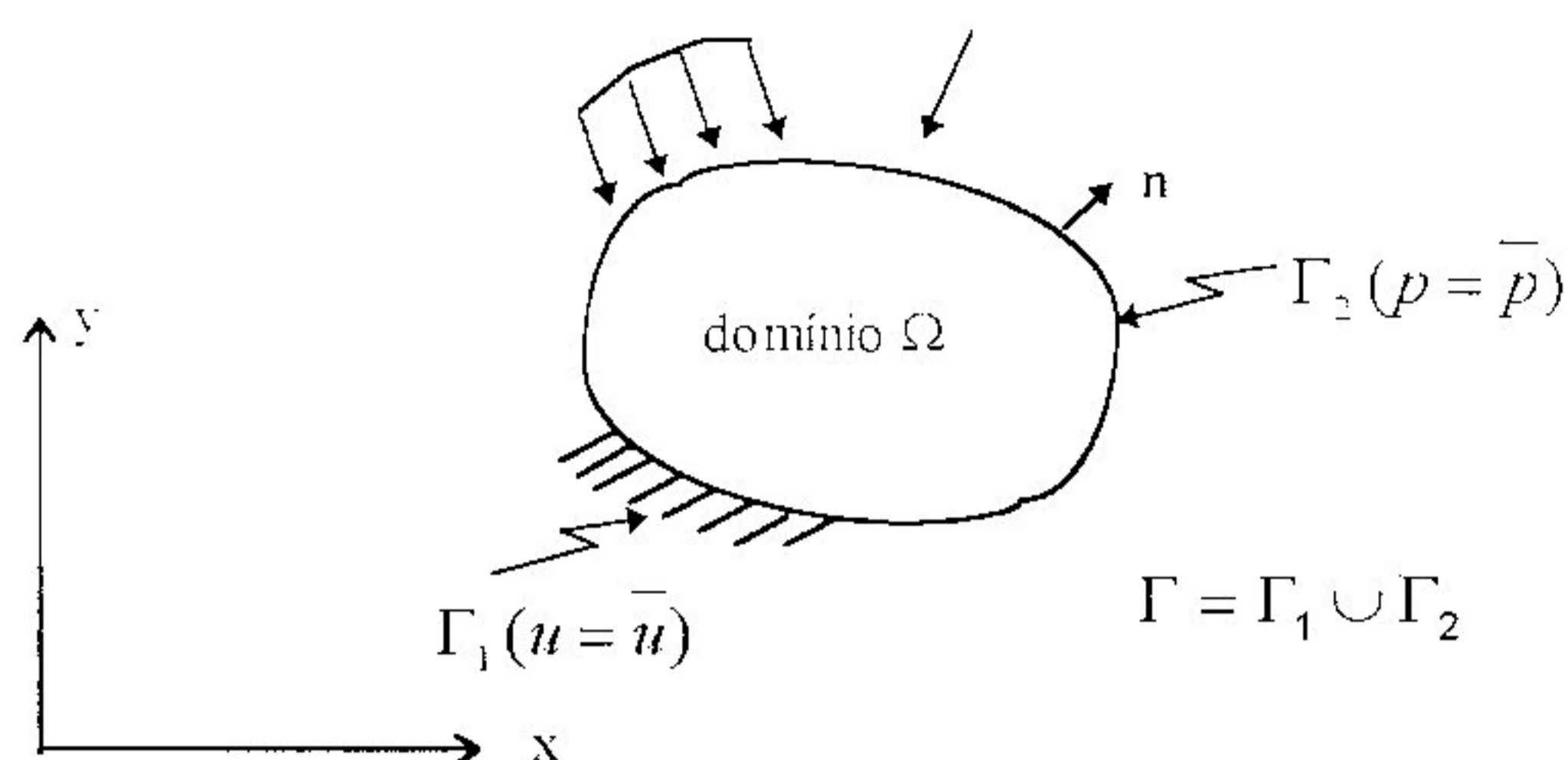


Figura 2.1 - Corpo genérico no plano xy

2.2.1 - Estado plano de tensão

O estado plano de tensão (fig. (2.2)) ocorre quando as componentes de tensão σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} podem ser consideradas nulas nas faces externas e no interior de um corpo. Isto acontece quando o sólido tem uma espessura muito delgada e é submetido às forças aplicadas paralelamente ao plano xy e distribuídas uniformemente ao longo da espessura. Assim o estado de tensão fica completamente especificado pelas componentes σ_x , σ_y e τ_{xy} , independentes de z, as deformações ε_{xz} e ε_{yz} são nulas e a deformação específica ε_z pode ser calculada em função de ε_x e ε_y , da forma seguinte:

$$\varepsilon_z = \frac{\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{\nu - 1} \quad (2.1)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

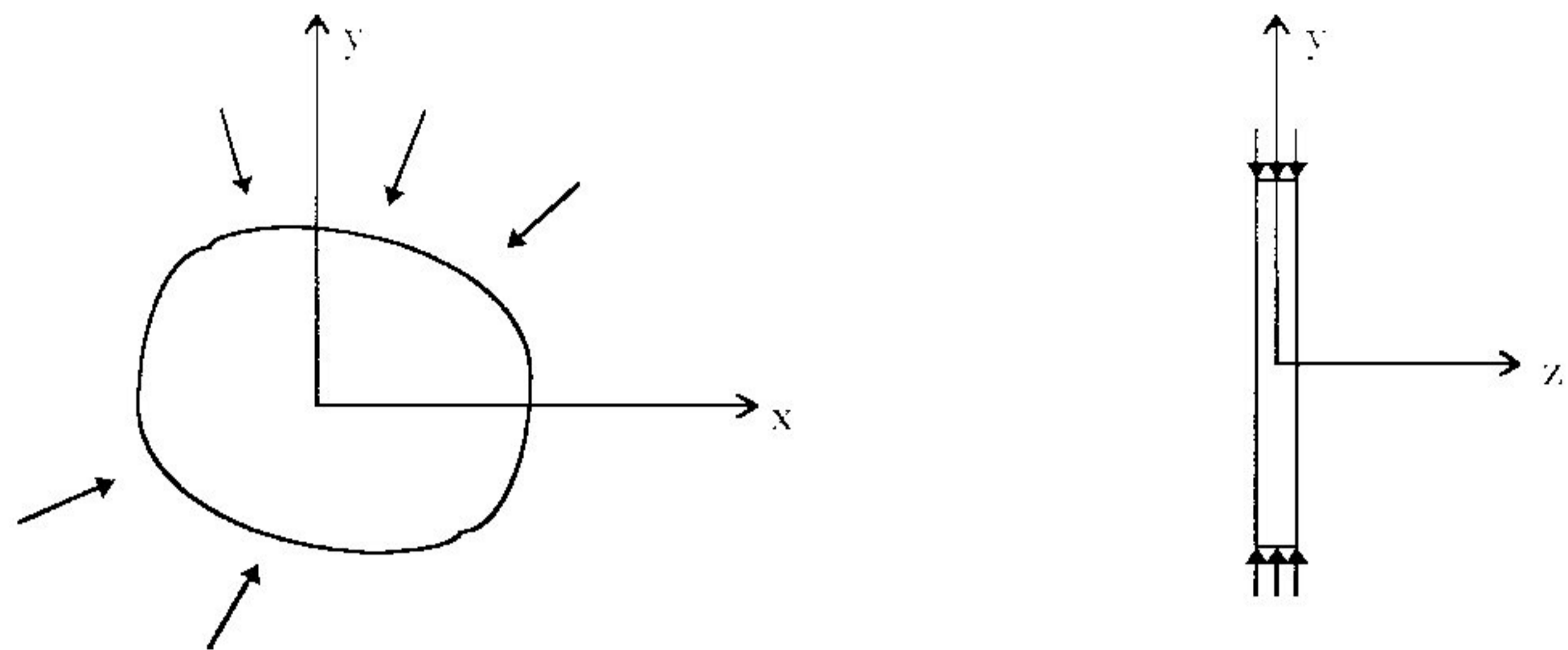


Figura 2.2 - Chapa fina submetida a carregamentos no seu plano - estado plano de tensão

2.2.2 - Estado plano de deformação

Quando a dimensão do sólido na direção z é muito grande em relação às outras, pode ocorrer o estado plano de deformação. Neste caso, o carregamento não deve variar ao longo da dimensão na direção z .

Num corpo longo cilíndrico ou prismático solicitado por forças perpendiculares ao eixo longitudinal z , pode-se admitir que todas as seções transversais estão nas mesmas condições, como mostrado na fig. (2.3). Supõe-se que as seções extremas sejam localizadas entre dois planos indeslocáveis e sem atrito de forma que o deslocamento na direção z seja impedido e também, por simetria, na seção do meio. Isto permite admitir que o mesmo ocorre com as

demais seções transversais. Portanto é suficiente considerar, para efeito de análise, uma fatia de espessura unitária.

Como a componente de deslocamento w , na direção do eixo z , é nula e as componentes u e v (nas direções dos eixos x e y respectivamente) não dependem de z , as componentes de deformação angular ε_{xz} e ε_{yz} e deformação na direção z , ε_z , são também nulas, e tem-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

Consequentemente as componentes de tensão de cisalhamento τ_{xz} e τ_{yz} são nulas, e as componentes de deslocamento u e v são funções de x e y apenas.

A componente de tensão σ_z pode ser encontrada em função de σ_x e σ_y por meio da Lei de Hooke e da hipótese de $\varepsilon_z = 0$, conforme a relação abaixo:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)\tag{2.3}$$

Portanto, tanto o problema de estado plano de deformação, como o estado plano de tensão, se reduzem à determinação de σ_x , σ_y e τ_{xy} , que são funções de x e y apenas.

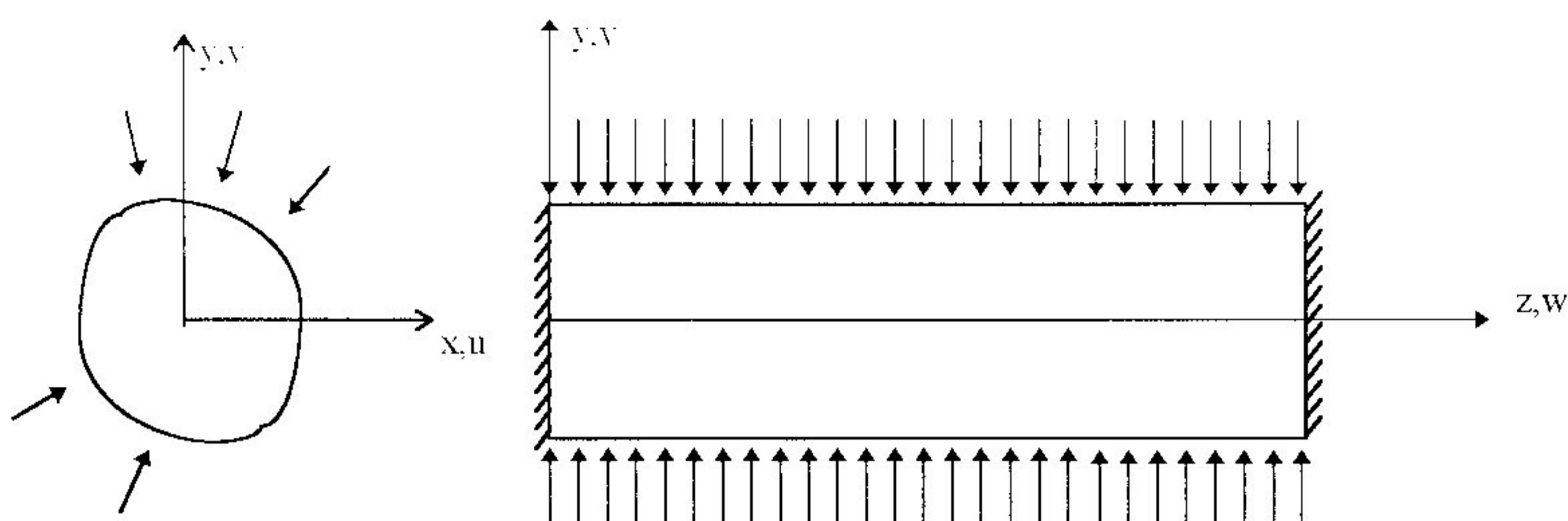


Figura 2.3 - Sólido prismático submetido a carregamentos constantes na direção z - estado plano de deformação

2.2.3 - Equações gerais da elasticidade

A formulação geral da elasticidade será representada através do uso de notação cartesiana indicial juntamente com a notação matricial. Na notação indicial o símbolo de somatório será desnecessário sempre que aparecerem dois índices iguais no mesmo termo, da seguinte forma (considerando problemas bidimensionais):

$$\sigma_i \sigma_i = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

$$e \tag{2.4}$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$

As derivadas no plano serão representadas por vírgulas, precedendo a coordenada em relação à qual é feita a derivação, por exemplo:

$$\frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_j} = \sigma_{jk,j} \quad (2.5)$$

Os vetores e matrizes neste texto serão denotados em negrito.

Em problemas de estado plano de deformação, o estado de tensão em um ponto do domínio é representado, em relação a x_1 e x_2 , pela matriz de tensões seguinte:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

sendo $\begin{cases} \sigma_{12} = \sigma_{21} \\ \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{cases}$

Considera-se o elemento infinitesimal, retirado de um corpo em equilíbrio estático, de arestas dx_1 e dx_2 indicado na fig. (2.4). As forças que atuam no corpo são as forças de volume e as forças de superfície no contorno que devem estar em equilíbrio estático umas com as outras através da variação de tensões no domínio, satisfazendo à seguinte equação:

$$\sigma_{jk,j} + b_k = 0 \quad (2.7)$$

onde os índices k e j variam de 1 a 2, e b_k são as componentes das forças de volume.

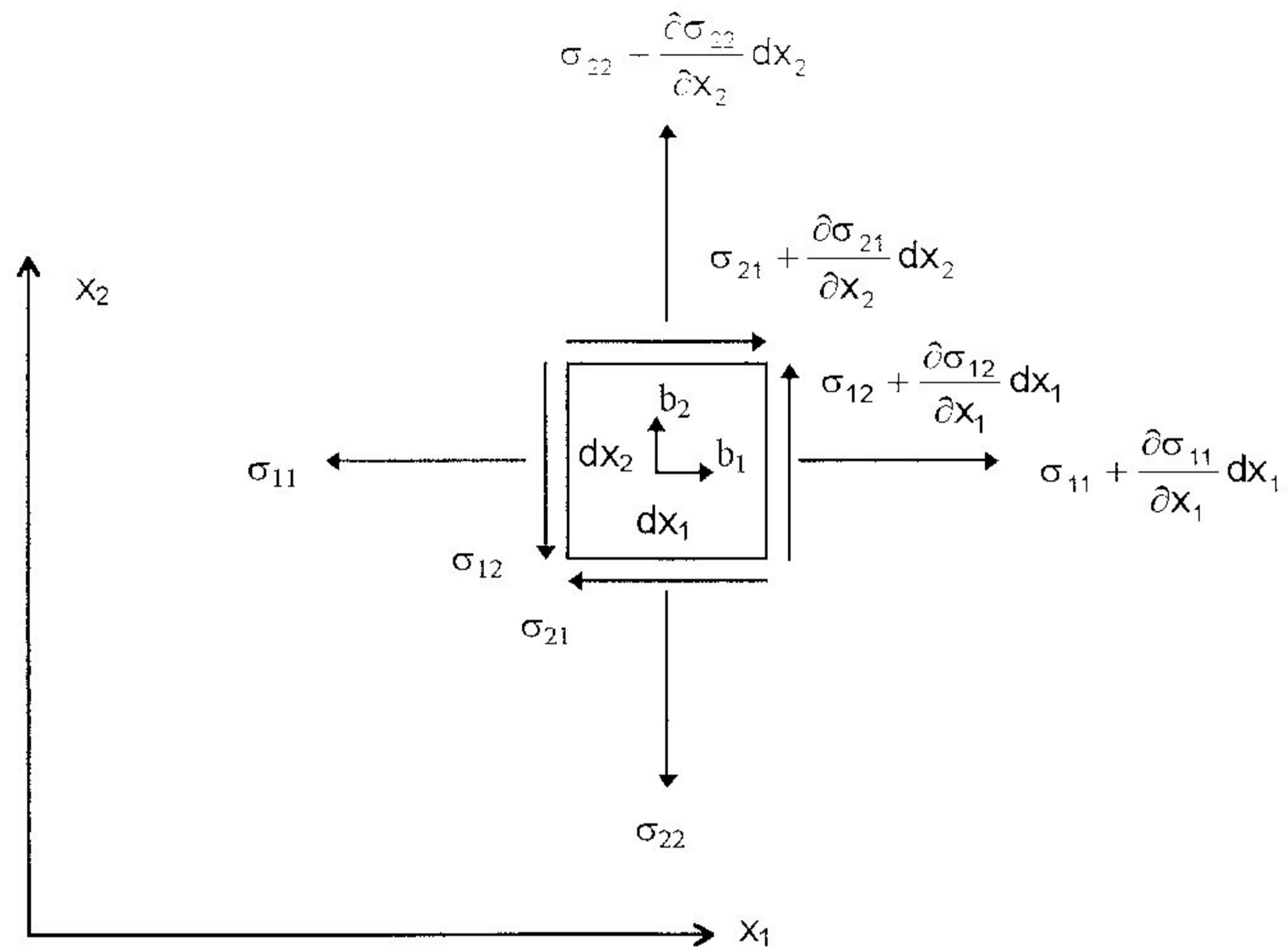


Figura 2.4 - Tensões e forças de volume no elemento infinitesimal

As tensões num plano qualquer são dadas pela fórmula de Cauchy abaixo:

$$p_j = \sigma_{jk} n_k \quad (2.8)$$

onde p_j é a componente do vetor tensão num plano qualquer na direção x_j e n_k representam os cossenos diretores do vetor unitário normal a este plano.

Com a aplicação da eq. (2.8) num plano coincidente com a superfície obtém-se a condição de equilíbrio no contorno do corpo, como:

$$p_j = \sigma_{jk} n_k \quad (2.9)$$

sendo p_j a componente do vetor de forças de superfície (fig. (2.5)) na direção x_j e n_k a normal apontando para fora do domínio.

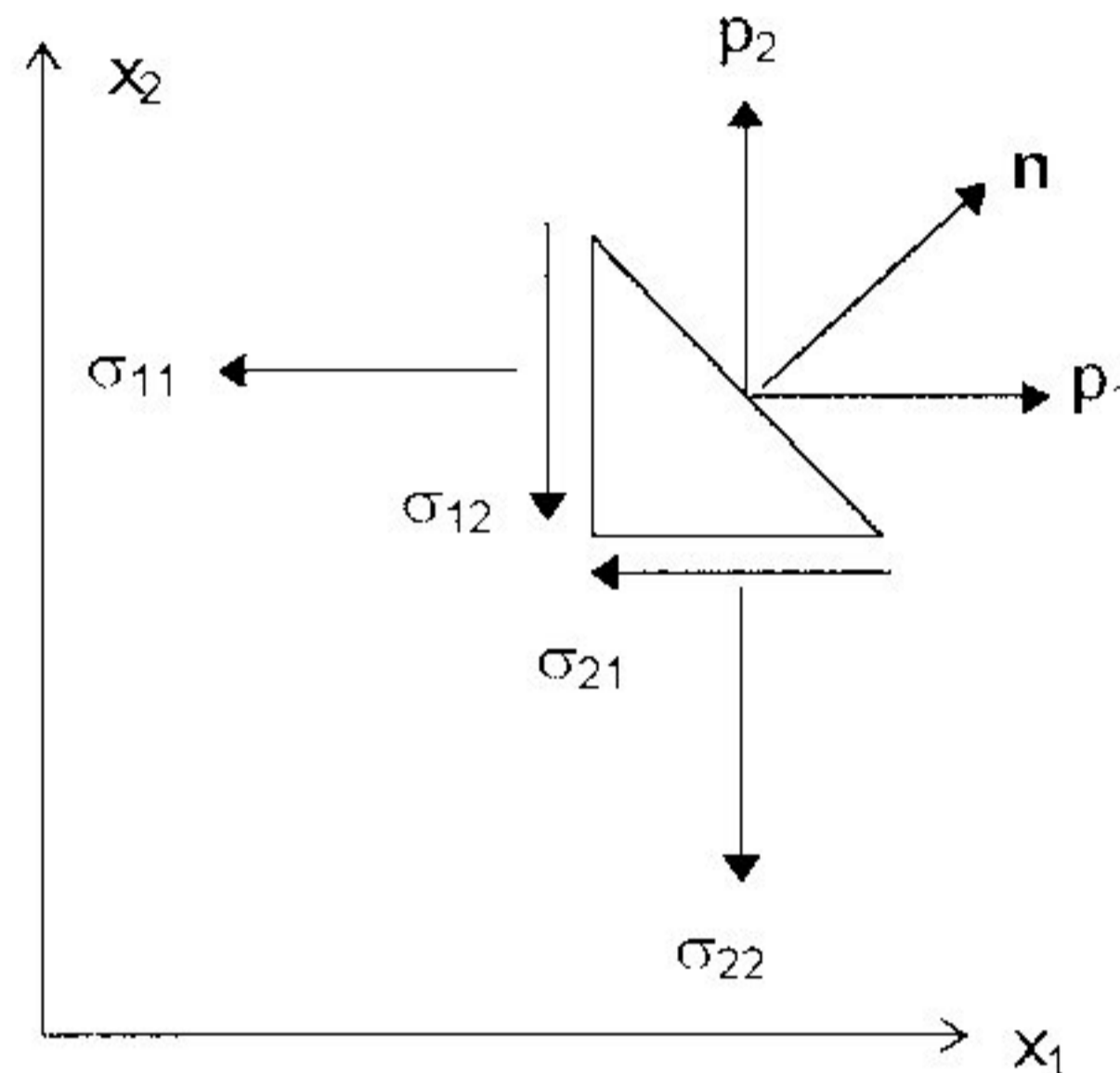


Figura 2.5 - Forças de superfície

O estado de deformação em um ponto, em relação a x_1 e x_2 , é definido por:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

onde: $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$.

Definindo-se u_k como componentes de deslocamento e funções de x_j , contínuas e deriváveis, e considerando-se pequenas deformações, tal que o quadrado e o produto da derivada parcial de u_k são desprezíveis, a deformação pode ser representada pelo tensor de deformação infinitesimal de Cauchy abaixo:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}(u_{j,k} - u_{k,j}) \quad (2.11)$$

A garantia de um campo de deslocamentos contínuo e unívoco é obtida quando as deformações satisfazem à seguinte equação de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{2\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.12)$$

Se o material é homogêneo, isótropo e linearmente elástico, considerando-se o estado inicial neutro e o estado plano de deformação, a relação tensão-deformação é dada pela lei de Hooke generalizada, cuja expressão é:

$$\sigma_{jk} = C_{jkil} \varepsilon_{il} \quad (2.13)$$

onde C_{jkil} é o tensor isótropo de 4^a ordem de constantes elásticas, dado por:

$$C_{jkil} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{jk} \delta_{il} + G(\delta_{ji} \delta_{kl} + \delta_{jl} \delta_{ki}) \quad (2.14)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal, ν o coeficiente de Poisson e δ_{jk} o delta de Kroneker, definido como:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad (2.15)$$

O módulo de elasticidade longitudinal E pode ser obtido em termos de G e ν como segue:

$$E = 2G(1 + \nu) \quad (2.16)$$

Aplicando-se a eq. (2.14) em (2.13), tem-se:

$$\sigma_{jk} = 2G\varepsilon_{jk} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{ii}\delta_{jk} \quad (2.17)$$

ou inversamente:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{jk} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_{ii}\delta_{jk}\right) \quad (2.18)$$

O problema de elasticidade linear para estado plano de deformação é interpretado pelas equações (2.7), (2.11) e (2.17). Este mesmo equacionamento pode ser usado para o caso de estado plano de tensão substituindo-se ν por $\nu/(1+\nu)$.

Substituindo-se a eq. (2.11) na eq. (2.17), obtém-se a expressão das tensões em termos das derivadas dos deslocamentos, e em seguida nas equações de equilíbrio (2.7) gera-se a equação de equilíbrio de Navier:

$$Gu_{k,ii} + \frac{G}{1-2\nu}u_{i,ik} + b_k = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.19)$$

As forças de superfície dadas pela eq. (2.9) podem ser obtidas de forma análoga, tendo-se:

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu}u_{,j}n_j - G(u_{,j,k} - u_{,k,j})n_k = p_j \quad \text{em } \Gamma \quad (2.20)$$

Portanto, os deslocamentos u_k deverão ser obtidos da equação de Navier satisfazendo às condições de contorno. Conhecidas as componentes do deslocamento u_k , as deformações são encontradas através da eq. (2.11) e as tensões resultam da lei de Hooke, expressa pela eq. (2.17).

2.2.4 - Formulação com tensões iniciais ou deformações iniciais

A análise de um corpo submetido à variação de temperatura T , para T independente de z , é feita através da aplicação de um campo de deformações iniciais ou tensões iniciais. Para problemas envolvendo carregamento térmico, a deformação total é representada por:

$$\varepsilon_{jk} = \varepsilon_{jk}^e + \varepsilon_{jk}^T \quad (2.21)$$

onde ε_{jk}^e é a deformação elástica e ε_{jk}^T a deformação térmica, que para estado plano de deformação é dada por:

$$\varepsilon_{jk}^T = \alpha T(1 + \nu)\delta_{jk} \quad (2.22)$$

sendo α o coeficiente de expansão térmica linear e lembrando que para problemas do estado plano de deformação tem-se a deformação $\varepsilon_z = 0$.

As deformações térmicas são consideradas como deformações iniciais. A aplicação da lei de Hooke para a parte elástica do tensor de deformação, expressa como $\varepsilon_{jk}^e = \varepsilon_{jk} - \varepsilon_{jk}^T$, resulta na seguinte expressão:

$$\sigma_{jk} = 2G(\varepsilon_{jk} - \varepsilon_{jk}^T) + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{ii}^T)\delta_{jk} \quad (2.23)$$

A eq. (2.23) pode ser reescrita em termos das tensões iniciais como:

$$\sigma_{jk} = 2G\varepsilon_{jk} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{ii}\delta_{jk} - \sigma_{jk}^T \quad (2.24)$$

sendo σ_{jk}^T a tensão inicial que se refere às deformações térmicas, equivalente a:

$$\sigma_{jk}^T = 2G(\varepsilon_{jk}^T) + \frac{2G\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_{ii}^T)\delta_{jk} \quad (2.25)$$

Considerando-se a eq. (2.22) para estado plano de deformação, a sua substituição devida na eq. (2.25) leva a:

$$\sigma_{jk}^T = 2G\left(\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)\alpha T\delta_{jk} \quad (2.26)$$

As tensões em termos das derivadas dos deslocamentos são obtidas pela substituição das equações (2.11) e (2.26) na eq. (2.24), ou seja:

$$\sigma_{jk} = G(u_{j,k} + u_{k,j}) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{i,i} \delta_{jk} - 2G \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \alpha T \delta_{jk} \quad (2.27)$$

Substituindo-se esta equação nas equações (2.7) e (2.9), obtém-se a expressão de equilíbrio de Navier:

$$G u_{k,ii} + \frac{G}{1-2\nu} u_{i,ik} + b_k - 2G \alpha \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) T_{,k} = 0 \quad (2.28)$$

cujas forças de superfície no contorno devem obedecer à seguinte expressão:

$$G(u_{j,k} + u_{k,j})n_k + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{i,i}n_j = p_j + 2G \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \alpha T n_j \quad (2.29)$$

As expressões mostradas neste capítulo são válidas para o estado plano de deformação. Para o caso de estado plano de tensão, desde que a temperatura não varie ao longo da espessura, estas equações podem ser usadas trocando ν por $\bar{\nu}$, α por $\bar{\alpha}$, a saber:

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \frac{\nu}{1+\nu} \\ \bar{\alpha} &= \frac{\alpha}{1+\bar{\nu}} = \alpha \left(\frac{1+\nu}{1+2\nu} \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

enquanto o valor de G não se altera.

2.3 - Formulação integral de contorno

A formulação integral de contorno é deduzida utilizando-se o Método dos Resíduos Ponderados conforme BREBBIA e DOMINGUES (1992). Admite-se inicialmente que serão minimizados os erros envolvidos apenas nas equações de equilíbrio (2.7), os quais serão ponderados utilizando uma função do tipo deslocamento u_k^* .

Para problemas de elasticidade, as condições de contorno usualmente são definidas como essenciais (deslocamentos prescritos):

$$u_k = \bar{u}_k \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (2.31)$$

e naturais (forças de superfície prescritas):

$$p_k = \bar{p}_k \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (2.32)$$

Para minimizar os erros envolvidos nas aproximações numéricas da eq. (2.7), deve-se multiplicá-la pela função de ponderação u_k^* e fazer a integração no domínio da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k) u_k^* d\Omega = 0 \quad (2.33)$$

Integrando-se por partes o primeiro termo da eq. (2.33) e agrupando-se os termos correspondentes após simplificações, obtém-se:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma \quad (2.34)$$

Levando em consideração o princípio da reciprocidade, devido a simetria dos tensores envolvidos, e integrando-se por partes novamente o primeiro termo da eq. (2.34), encontra-se a adjunta da equação (2.7), que será:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \bar{p}_k u_k d\Gamma \quad (2.35)$$

Considerando-se o contorno dividido em duas partes tal que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, e aplicando-se as condições de contorno, eq. (2.31) e eq. (2.32), na eq. (2.35), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = & -\int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_1} p_k^* \bar{u}_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p_k^* u_k d\Gamma \end{aligned} \quad (2.36)$$

Integrando-se por partes duas vezes o primeiro termo da eq. (2.36) com a finalidade de recuperar a expressão original (2.33), obtém-se uma equação de resíduos ponderados um pouco diferente, em função de terem sido introduzidas as condições de contorno. Nesta equação, podem ser visualizadas as ponderações das equações de equilíbrio e também das condições de contorno naturais e essenciais. Esta expressão generalizada é usualmente utilizada para obter-se a equação integral de contorno.

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma \quad (2.37)$$

2.3.1 - Identidade de Somigliana

O primeiro passo para se chegar à equação integral de contorno é a obtenção da identidade de Somigliana, que pode ser deduzida a partir do princípio de reciprocidade devido à relação tensão/deformação fornecida pelo tensor simétrico e isotrópico de quarta ordem ou através do método dos resíduos ponderados. O primeiro processo se refere ao teorema do trabalho recíproco de BETTI¹ apud CRUSE (1988), e o seu desenvolvimento pode ser encontrado em BREBBIA *et alii* (1984).

Para utilizar os resíduos ponderados, considera-se um corpo definido pelo domínio Ω e contorno Γ (fig. 2.1), que está em equilíbrio estático, conforme eq. (2.7), e sujeito a condições de contorno prescritas. Este estado é representado pelas grandezas σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , p_i e b_i . Assume-se que uma nova região, a qual contém o corpo considerado de domínio Ω^* e contorno Γ^* no infinito, conforme fig. (2.6), também está em equilíbrio estático, com grandezas σ_{ij}^* , ε_{ij}^* , u_i^* , p_i^* e b_i^* .

O erro introduzido, para uma determinada solução, pode ser minimizado pela expressão de resíduos ponderados dada pela eq. (2.37), segundo os autores BREBBIA e WALKER (1980), VENTURINI (1983), BREBBIA *et alii* (1984), BREBBIA e DOMINGUES (1992).

¹ BETTI, E. Teoria Dell Elasticita. *Il Nuovo Cimento*. T. 7-10.

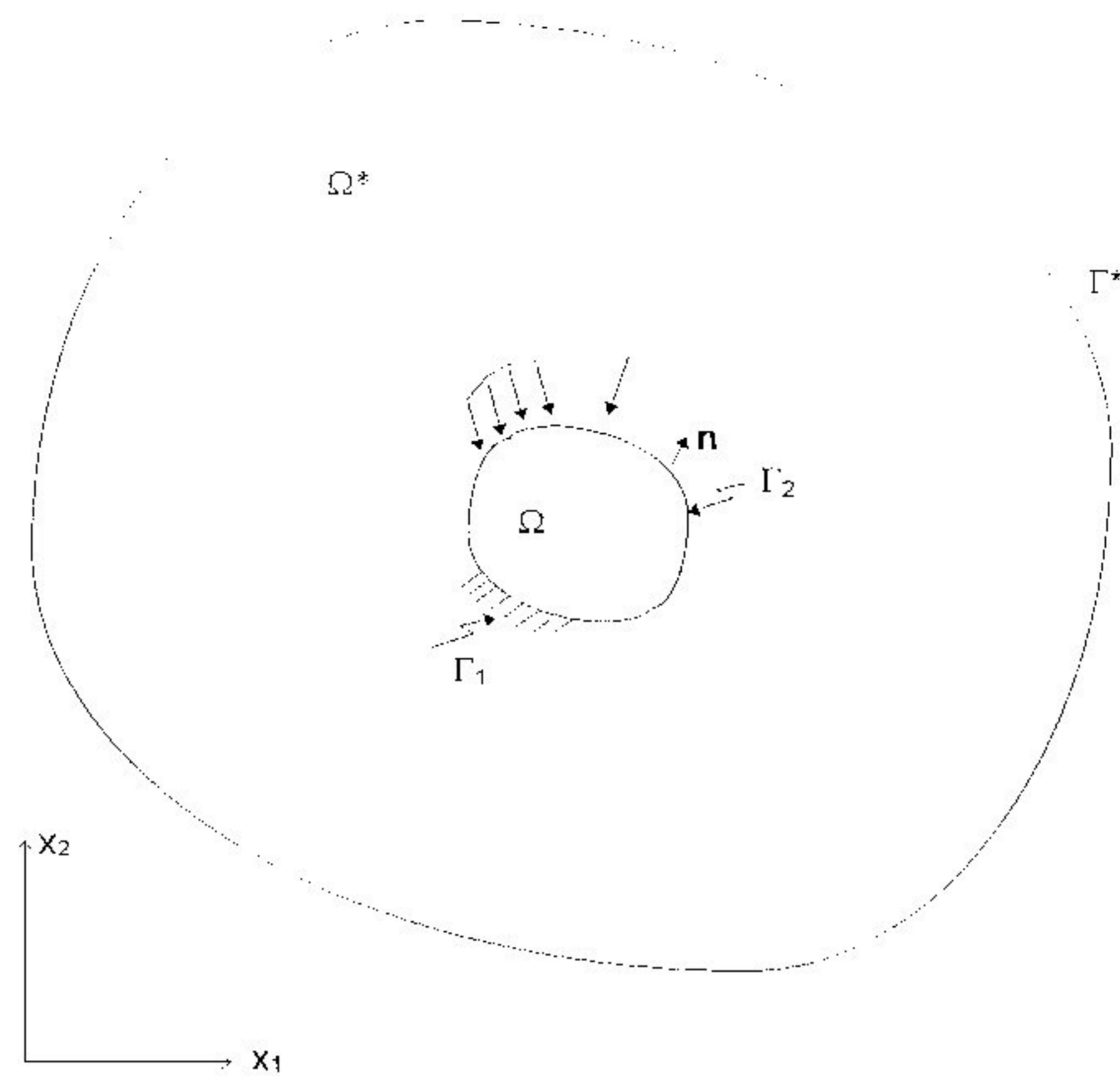


Figura 2.6 - Região geral de domínio Ω^* e contorno Γ^* , contendo o corpo de domínio Ω e contorno Γ

Integrando-se por partes o primeiro termo da eq. (2.37), obtém-se:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma_1} u_k p_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} p_k^* \bar{u}_k d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma \quad (2.38)$$

Sabendo-se que $\sigma_{jk} = \sigma_{jk}^e - \sigma_{jk}^T$, fazendo-se a devida substituição na eq. (2.38) e integrando-se por partes o primeiro termo obtido, tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk}^T \varepsilon_{jk}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma -$$

$$\int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k' d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{u}_k p_k' d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_k p_k' d\Gamma \quad (2.39)$$

onde $\sigma_{jk,j}^* = -b_k^*$.

Admite-se a hipótese que as componentes de força de volume b_k^* correspondem a forças concentradas unitárias positivas aplicadas no ponto $\xi \in \Omega^*$, em cada uma das duas direções ortogonais dadas pelos vetores unitários e_i . Isto pode ser representado na forma:

$$b_j^* = \Delta(\xi, x) e_j \quad (2.40)$$

onde $\Delta(\xi, x)$ corresponde à função Delta de Dirac, sendo ξ chamado de ponto fonte e $x \in \Omega^*$ o ponto campo.

A função Delta de Dirac tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \Delta(\xi, x) &= 0 & \text{se } \xi \neq x \\ \Delta(\xi, x) &\rightarrow \infty & \text{se } \xi = x \\ \int_{\Omega} g(x) \Delta(\xi, x) d\Omega(x) &= g(\xi) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Entretanto, se $\xi \in \Omega$, a primeira integral na eq. (2.39) pode ser representada como:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} b_k^* u_k d\Omega = u_k(\xi) e_k \quad (2.42)$$

Além disto, se cada carga concentrada atua independentemente, os deslocamentos e forças de superfície denotadas com asterisco podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_j^* &= u_{ij}^*(\xi, x)e_i \\ p_j^* &= p_{ij}^*(\xi, x)e_i \end{aligned} \quad (2.43)$$

onde $u_{ij}^*(\xi, x)$ e $p_{ij}^*(\xi, x)$ representam os deslocamentos e as forças de superfície na direção j no ponto x , respectivamente, para carga unitária atuando na direção i (e_i) aplicada no ponto ξ .

Portanto, pode-se representar as componentes de deslocamentos no ponto ξ separadas, reescrevendo-se a eq. (2.39) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_i(\xi) &= \int_{\Gamma} p_j(x)u_{ij}^*(\xi, x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_j(x)p_{ij}^*(\xi, x)d\Gamma(x) + \\ &\int_{\Omega} b_j(x)u_{ij}^*(\xi, x)d\Omega(x) + \int_{\Omega} \sigma_{jk}^T(x)\varepsilon_{jki}^*(\xi, x)d\Omega(x) \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde, para facilitar a notação, foram consideradas somadas as partes do contorno Γ_1 e Γ_2 .

Considerando-se que as forças de volume são funções conhecidas, a terceira integral do lado direito da eq. (2.44) não possui nenhum valor incógnito. O mesmo ocorre com a última integral, que se refere ao carregamento térmico, enquanto as demais integrais apresentam incógnitas apenas no contorno.

A eq. (2.44) é conhecida como identidade de Somigliana para deslocamentos e proporciona a representação integral do deslocamento nos pontos internos em termos dos valores de contorno u_k e p_k , e do carregamento de domínio.

O último termo da eq. (2.44), correspondente ao carregamento térmico, e pode ser ainda modificado. Seja a integral de volume \bar{B}_i dada por:

$$\bar{B}_i = \int_{\Omega} \sigma_{jk}^T(x) \varepsilon_{jki}^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (2.45)$$

Substituindo-se o valor da tensão inicial correspondente à variação de temperatura (eq. (2.26)):

$$\sigma_{jk}^T = 2G \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \alpha T(x) \delta_{jk} \quad (2.46)$$

obtém-se a relação:

$$\bar{B}_i = 2G\alpha \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \int_{\Omega} T(x) \varepsilon_{jki}^*(\xi, x) \delta_{jk} d\Omega(x) = 2G\alpha \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \int_{\Omega} T(x) \varepsilon_{ai}^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (2.47)$$

Introduzindo-se agora a relação do tensor de deformações de Cauchy, tem-se:

$$\bar{B}_i = 2G\alpha \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \int_{\Omega} T(x) u_{ik,k}^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (2.48)$$

A eq. (2.44) pode então ser escrita como:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) + \\ 2G\alpha \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \int_{\Omega} u_{ik,k}^*(\xi, x) T(x) d\Omega(x) \quad (2.49)$$

Outra forma alternativa de apresentar esta equação de deslocamentos pode ser obtida integrando-se por partes a última integral de volume da eq. (2.49) e reagrupando-se os termos, o que fornece:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} \hat{p}_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_j(x) p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) + \\ \int_{\Omega} \hat{b}_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (2.50)$$

onde:

$$\hat{p}_j(x) = p_j(x) + 2G\alpha \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) T(x) n_j \quad (2.51)$$

$$\hat{b}_j(x) = b_j(x) - 2G\alpha \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) T_{,j}(x) \quad (2.52)$$

2.3.2 - Soluções fundamentais

A solução fundamental u_{ij}^* de determinado problema é uma solução singular da equação de Navier, eq. (2.19), satisfazendo a:

$$Gu_{j,kk}^* + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj}^* + \Delta(\xi, x)e_j = 0 \quad (2.53)$$

Neste trabalho, considera-se Ω^* como meio elástico infinito e, conseqüentemente, Γ^* está situado no infinito. Neste caso, a solução fundamental é devida a Kelvin.

Supondo-se que ξ é o ponto fonte, isto é, o ponto onde supõe-se aplicada uma distribuição de forças representada pela função delta de Dirac, com resultante unitária, e x o ponto campo, as expressões das soluções fundamentais são:

a) Deslocamentos

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu)\ln r \delta_{ij} - r_i r_j \right] \quad (2.54)$$

onde os índices i e j variam de 1 a 2.

b) Forças de superfícies

Substituindo-se a expressão dos deslocamentos (2.54) na eq. (2.20), obtém-se:

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \right\} \quad (2.55)$$

c) Deformações específicas

Considerando-se ε_{jki}^* como a deformação ε_{jk}^* em um ponto x , devido a uma carga unitária aplicada no ponto ξ na direção i , a relação deformação-deslocamento fornece:

$$\varepsilon_{jki}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr} \left[(1-2\nu)(r_k \delta_{ij} + r_j \delta_{ik}) - r_j \delta_{jk} + 2r_j r_j r_{j,k} \right] \quad (2.56)$$

d) Tensões

Supondo-se que σ_{jki}^* é a tensão σ_{jk}^* em um ponto x , devido a uma carga unitária aplicada no ponto ξ na direção i , a equação constitutiva, eq. (2.17), fornece:

$$\sigma_{jki}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(r_k \delta_{ij} + r_j \delta_{ki} - r_j \delta_{jk}) + 2r_j r_j r_{j,k} \right] \quad (2.57)$$

Para todas expressões, $r = r(\xi, x)$ representa a distância entre o ponto fonte ξ e o ponto campo x e suas derivadas são tomadas com referência às coordenadas do ponto x , ou seja:

$$r_j = \frac{\partial r}{\partial x_j(x)} = \frac{r_j}{r} \quad (2.58)$$

onde:

$$r = (r_j r_j)^{1/2} \quad \text{e} \quad r_j = x_j(x) - x_j(\xi) \quad (2.59)$$

sendo x_j as coordenadas cartesianas dos pontos.

2.3.3 - Equação integral no contorno

Para que a eq. (2.49) represente deslocamentos no contorno, relacionando apenas variáveis no contorno, pode-se utilizar a seguinte alternativa. O domínio é alterado retirando-se um setor circular, como mostrado na fig. (2.7), com o centro no ponto fonte ξ e raio ε .

A equação de reciprocidade pode ser escrita para o corpo mostrado na fig. (2.7) como:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk} d\Omega - \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk}^T d\Omega \quad (2.60)$$

onde Ω_ε é o domínio alterado com a remoção do setor de círculo.

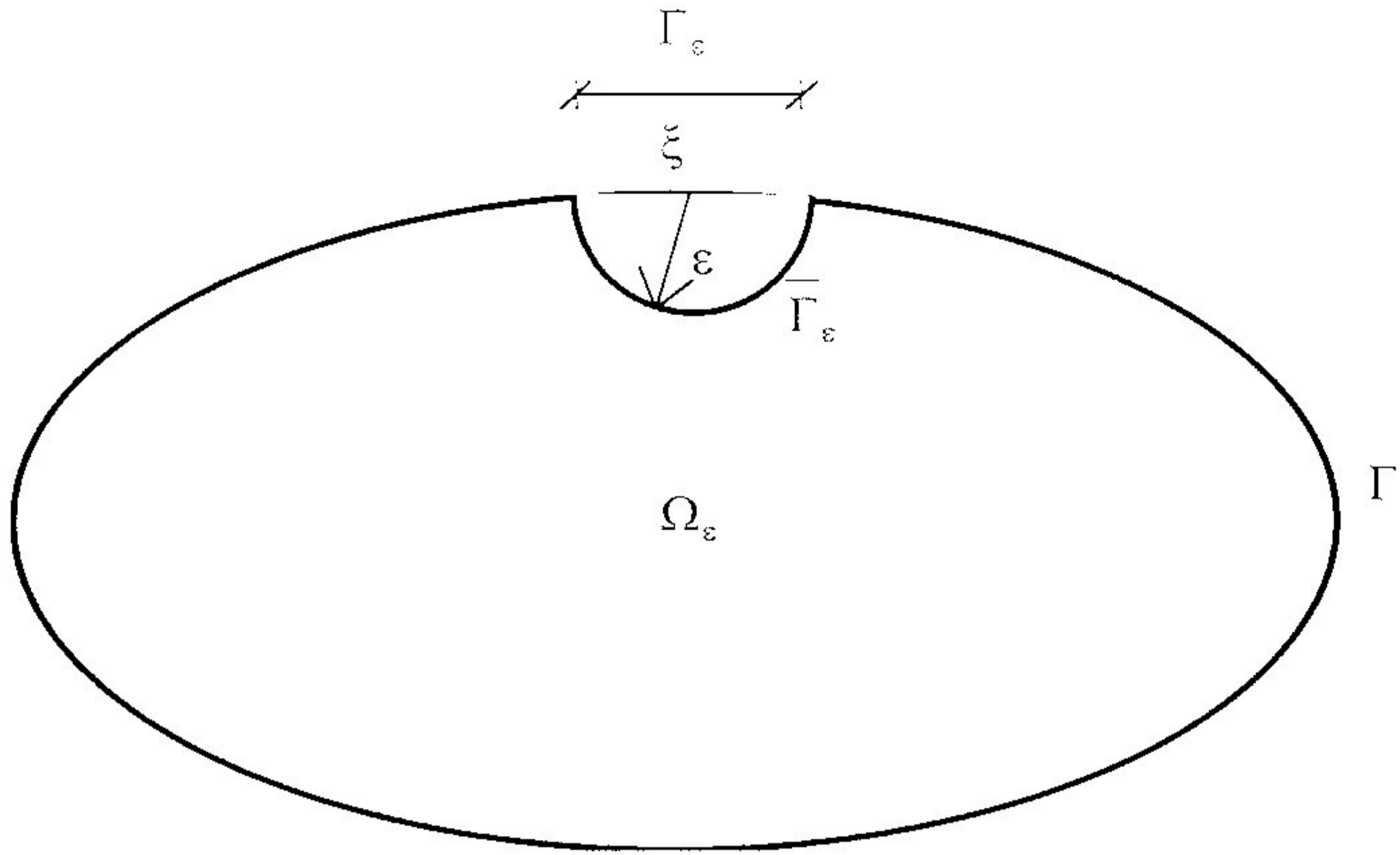


Figura 2.7 - Ponto singular ξ removido do contorno por um setor de círculo

O ponto fonte ξ não pertence ao domínio Ω_ε , portanto os tensores fundamentais não são singulares. Supondo-se que $\varepsilon_{jk}(x)$ e $\sigma_{jk}(x)$ representam, respectivamente, deformações e tensões contínuas no domínio Ω_ε , e integrando-se por partes a eq. (2.60), tendo em vista que $\Delta(\xi, x) = 0$ em todo domínio, obtém-se:

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{jk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon - \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{jk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega_\varepsilon} u_{jk}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) + 2G\alpha \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \int_{\Omega_\varepsilon} u_{jk,k}^*(\xi, x) T(x) d\Omega(x) \quad (2.61)$$

Integrando-se por partes a última integral de volume e reagrupando-se os termos, obtém-se:

$$\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon-\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{jk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon-\bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{jk}^*(\xi, x) \tilde{p}_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\hat{\Omega}_\varepsilon} u_{jk}^*(\xi, x) \tilde{b}_k(x) d\Omega(x) \quad (2.62)$$

onde $\tilde{p}_k(x)$ e $\tilde{b}_k(x)$ são dados pelas eqs. (2.51) e (2.52).

O cálculo dos limites das integrais, quando ε tende a zero, fornece a representação integral dos deslocamentos em pontos do contorno:

$$c_{jk}(\xi) u_k(\xi) + \int_{\Gamma} p_{jk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{jk}^*(\xi, x) \tilde{p}_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{jk}^*(\xi, x) \tilde{b}_k(x) d\Omega(x) \quad (2.63)$$

A integral do lado esquerdo da eq. (2.63) deve ser considerada no sentido do valor principal de Cauchy, cuja existência pode ser demonstrada se $u_j(x)$ satisfaz a condição de Hölder abaixo:

$$|u_k(x) - u_k(\xi)| \leq B r^\alpha \quad (2.64)$$

sendo B e α constantes positivas.

O coeficiente $c_{jk}(\xi)$ é dado pela seguinte expressão:

$$c_{jk}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{jk}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (2.65)$$

sendo demonstrado que $c_{jk}(\xi) = \delta_{jk} / 2$ para contornos suaves, $c_{jk}(\xi) = 1$ para pontos internos e $c_{jk}(\xi) = 0$ para pontos externos.

A eq. (2.63) é a representação integral dos deslocamentos em um ponto em função dos valores das forças de superfície e deslocamentos no contorno, bem como das forças de domínio.

2.3.4 - Regiões infinitas

A extensão da eq. (2.63), para regiões infinitas com uma ou mais cavidades internas, requer uma análise cuidadosa do comportamento das funções envolvidas. Esta análise está relacionada ao comportamento das funções sobre uma superfície de contorno infinitamente distante das cavidades.

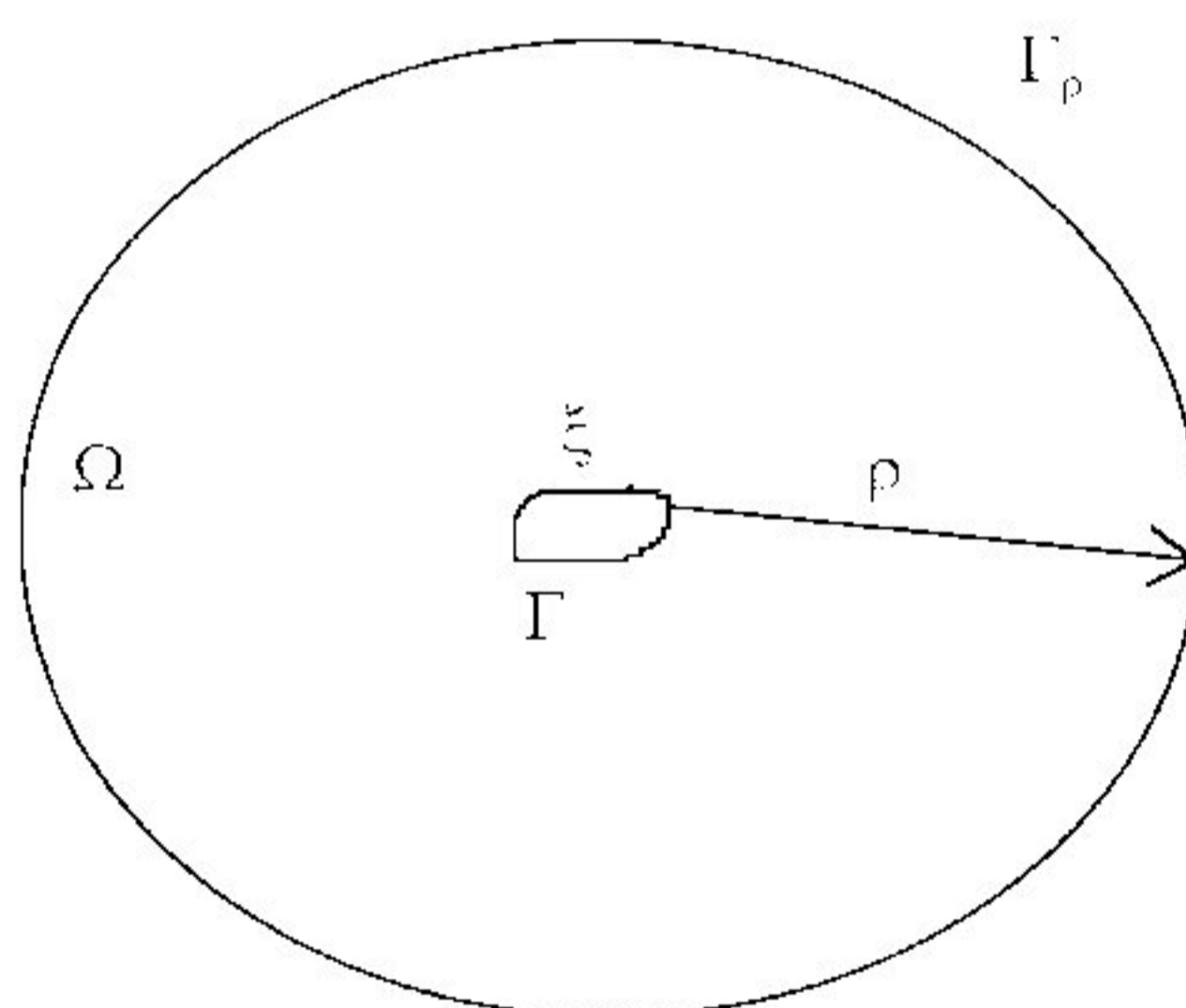


Figura 2.8 - Definição da região infinita com cavidade interna

Seja ρ o raio de uma esfera de superfície Γ_ρ , centrada em ξ , que envolve as cavidades do problema externo representado na fig. (2.8). A eq. (2.63), considerando-se nulas a força de volume e a

variação de temperatura, pode ser escrita para a região situada entre Γ e Γ_ρ como:

$$c_{jk}(\xi)u_k(\xi) + \int_{\Gamma} p_{jk}^*(\xi, x)u_k(x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\rho} p_{jk}^*(\xi, x)u_k(x)d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{jk}^*(\xi, x)p_k(x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\rho} u_{jk}^*(\xi, x)p_k(x)d\Gamma(x) \quad (2.66)$$

onde $\xi \in \Gamma$.

Avaliando-se o limite quando $\rho \rightarrow \infty$, a eq. (2.66) pode ser escrita em termos de integrais em Γ apenas, se for satisfeita a condição de regularidade:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\rho} [p_{jk}^*(\xi, x)u_k(x) - u_{jk}^*(\xi, x)p_k(x)] d\Gamma(x) = 0 \quad (2.67)$$

Para problemas bidimensionais, considerando-se o contorno no infinito, portanto $x \in \Gamma_\rho$, tem-se:

$$d\Gamma(x) = |J|d\phi \quad , \text{ onde } |J| = O(\rho). \quad (2.68)$$

$$u_{jk}^*(\xi, x) = \begin{cases} O(\ln \rho + 1) & , j = k \\ O(1) & , j \neq k \end{cases} \quad (2.69)$$

$$p_{jk}^*(\xi, x) = O(\rho^{-1}) \quad (2.70)$$

Se a carga total aplicada sobre a superfície Γ não for auto-equilibrada, o princípio de Saint-Venant mostra que $u_j(x)$ e $p_j(x)$

terão o mesmo comportamento da solução fundamental correspondente a uma carga concentrada na direção da resultante. Conseqüentemente, $u_k(x) = O(\ln \rho + 1)$ e $p_k(x) = O(\rho^{-1})$ são obtidos, o que não garante, em geral, a anulação de cada termo separadamente. No entanto, pode-se substituir $u_j(x)$ e $p_j(x)$ pelos tensores correspondentes à solução fundamental e então verificar que a eq. (2.67) é satisfeita, cancelando-se os dois termos da integral sobre Γ_ρ , quando $\rho \rightarrow \infty$.

Portanto, pode-se afirmar que a condição de regularidade é sempre satisfeita se $u_k(x)$ e $p_k(x)$ se comportam, na pior das hipóteses, como a solução fundamental no infinito.

Na análise desenvolvida anteriormente não se considerou as forças de volume generalizadas. Para estas, apresentadas mais à frente, nota-se que o peso próprio e a força centrífuga violam as condições de regularidade. Para as cargas térmicas, se a distribuição de temperatura e sua derivada em relação à normal ao contorno se comportarem como a solução fundamental do problema de potencial bidimensional a condição de regularidade sempre será satisfeita.

2.3.5 - Tensões nos pontos internos

Uma vez determinada a expressão para os deslocamentos em pontos internos, pode-se obter as tensões através

das derivadas dos deslocamentos e da utilização da lei de Hooke generalizada.

As derivadas dos deslocamentos (eq. (2.49)) em relação às coordenadas do ponto ξ para as integrais no contorno, podem ser calculadas sem maiores dificuldades, devendo-se apenas observar que a integral de domínio apresenta uma singularidade no ponto ξ . No caso da força de volume, devido à singularidade fraca do tensor $u_{ij}^*(\xi, x)$ na integral de domínio, não é necessário acrescentar nenhum termo adicional quando da integração da derivada deste termo singular (BREBBIA *et alii* (1984)). Para o termo de domínio dependente da temperatura, a avaliação correta da singularidade gera um termo livre que deve ser adicionado à expressão das tensões.

Como a eq. (2.49) é uma representação contínua dos deslocamentos nos pontos internos, pode-se derivá-la em relação às coordenadas do ponto ξ . Substituindo-se suas derivadas na eq. (2.27) e considerando-se que $\partial r / \partial x_j(\xi) = -\partial r / \partial x_j(x)$, obtém-se:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) + 2G\alpha \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \int_{\Omega} \psi_{ij}^*(\xi, x) T(x) d\Omega(x) + g_{ij}^T \quad (2.71)$$

sendo:

$$u_{ijk}^* = -\sigma_{ijk}^* \quad (2.72)$$

$$p_{jk}^r = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} - \nu(\delta_{ik}r_{,j} - \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] - \right. \\ \left. 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk})(1-2\nu) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad (2.73)$$

$$\psi_{ij}^* = \frac{(1-2\nu)}{\pi(1-\nu)r^2} (\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}) \quad (2.74)$$

$$g_{ij}^T = -\frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \sigma_{ij}^T = -\frac{G\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} T(\xi)\delta_{ij} \quad (2.75)$$

onde as derivadas estão todas em termos das coordenadas do ponto x.

2.3.6 - Tensões nos pontos de contorno

Utilizando a matriz de transformação para tensor de 1ª ordem, determinam-se os deslocamentos e as forças de superfície em relação a um sistema de referência local ao elemento considerado, observar fig. (2.9).

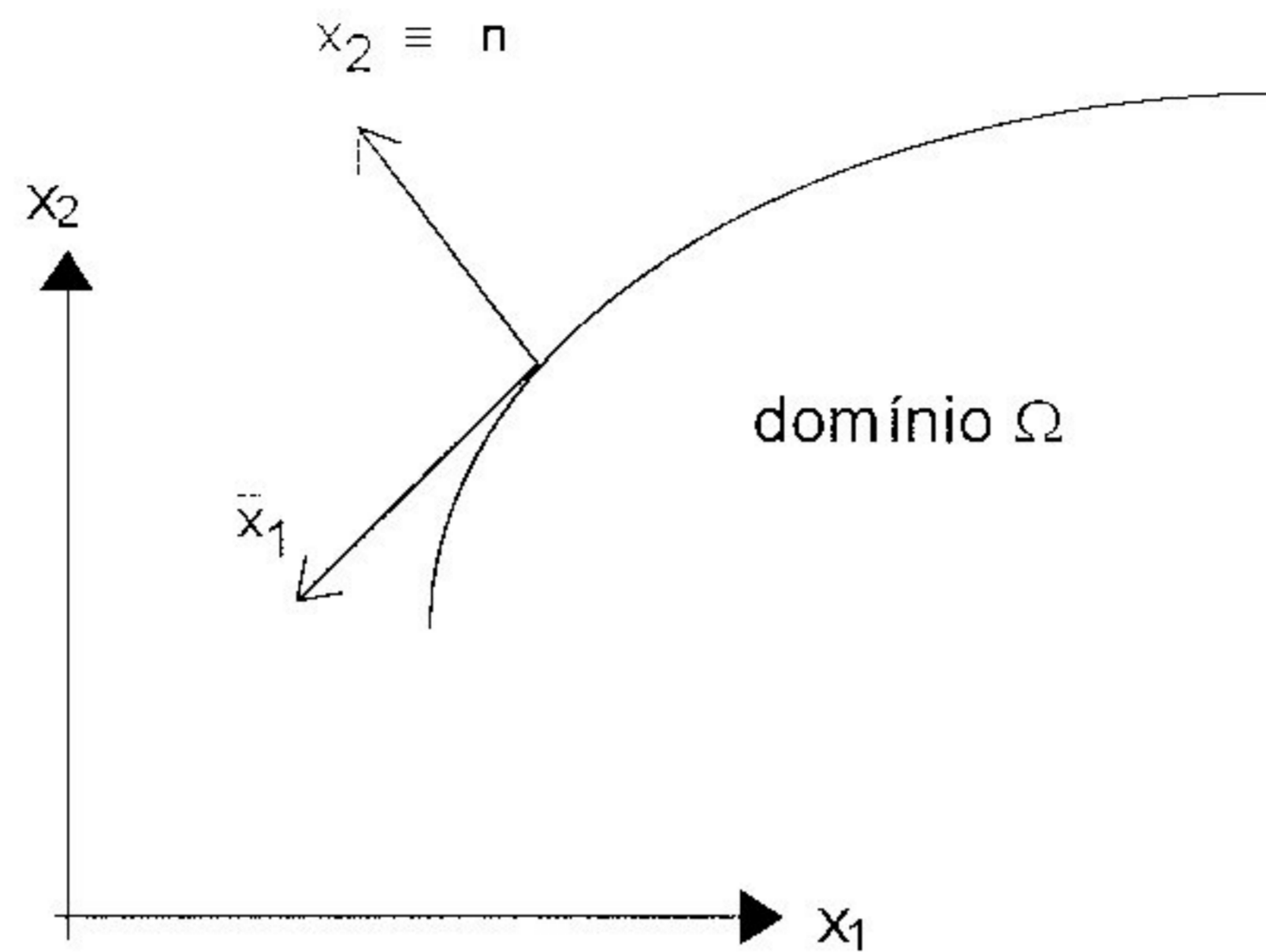


Figura 2.9 - Sistema de referência local ao elemento

A equação de Cauchy (2.8), para o sistema de referência local, fornece:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{p}_1\end{aligned}\quad (2.76)$$

A componente de deformação para este sistema de referência é dada por:

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1}\quad (2.77)$$

onde o deslocamento \bar{u}_1 é interpolado ao longo do elemento em termos dos pontos nodais.

Para o estado plano de deformação, a lei de Hooke generalizada, eq. (2.17), fornece:

$$\bar{\varepsilon}_{22} = \frac{1}{1-\nu} \left[(1-2\nu) \frac{\bar{\sigma}_{22}}{2G} - \nu \bar{\varepsilon}_{11} - (1-\nu)\alpha T \right] \quad (2.78)$$

Substituindo-se a eq. (2.78) na lei de Hooke generalizada, agora para obter $\bar{\sigma}_{11}$, tem-se:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{1-\nu} \left[\nu \bar{\sigma}_{22} + 2G \bar{\varepsilon}_{11} - (1+\nu)2G\alpha T \right] \quad (2.79)$$

Portanto, as eq. (2.76) e eq. (2.79) fornecem as tensões em um ponto qualquer do contorno em relação ao sistema de referência local do elemento. Usando-se, agora, a matriz de transformação para o tensor de 2ª ordem, obtêm-se as tensões em relação ao sistema de referência global.

As expressões mostradas neste capítulo são válidas para o estado plano de deformação. Para o caso de estado plano de tensão, desde que a temperatura não varie ao longo da espessura, estas equações podem ser usadas trocando ν por $\bar{\nu}$, α por $\bar{\alpha}$, dados pela eq. (2.30).

2.4 - Método dos Elementos de Contorno

A eq. (2.63) pode ser resolvida analiticamente apenas para problemas com geometria e condições de contorno muito simples. Para uma abrangência maior dos problemas em geral, torna-se apropriada uma aproximação numérica da equação, transformando-a

numa forma algébrica. Esta aproximação geralmente consiste nos seguintes procedimentos:

- o contorno Γ é discretizado em uma série de elementos (fig. (2.10)) sobre os quais os deslocamentos e forças de superfície são interpolados em função dos valores nos pontos nodais;
- o domínio Ω (para o caso de haver forças no domínio) pode ser discretizado por uma série de células internas;
- a eq. (2.63) é aplicada na forma discretizada para cada ponto nodal, obtendo-se um sistema de equações algébricas lineares;
- as condições de contorno são aplicadas, permitindo a obtenção de uma solução única para o problema correspondente aos valores incógnitos de deslocamentos e forças de superfície nos pontos nodais do contorno.

As coordenadas cartesianas \mathbf{x} dos pontos do elemento Γ_j podem ser representadas por:

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{x}^n \quad (2.80)$$

sendo Ψ uma matriz contendo funções de forma e \mathbf{x}^n um vetor com as coordenadas nodais.

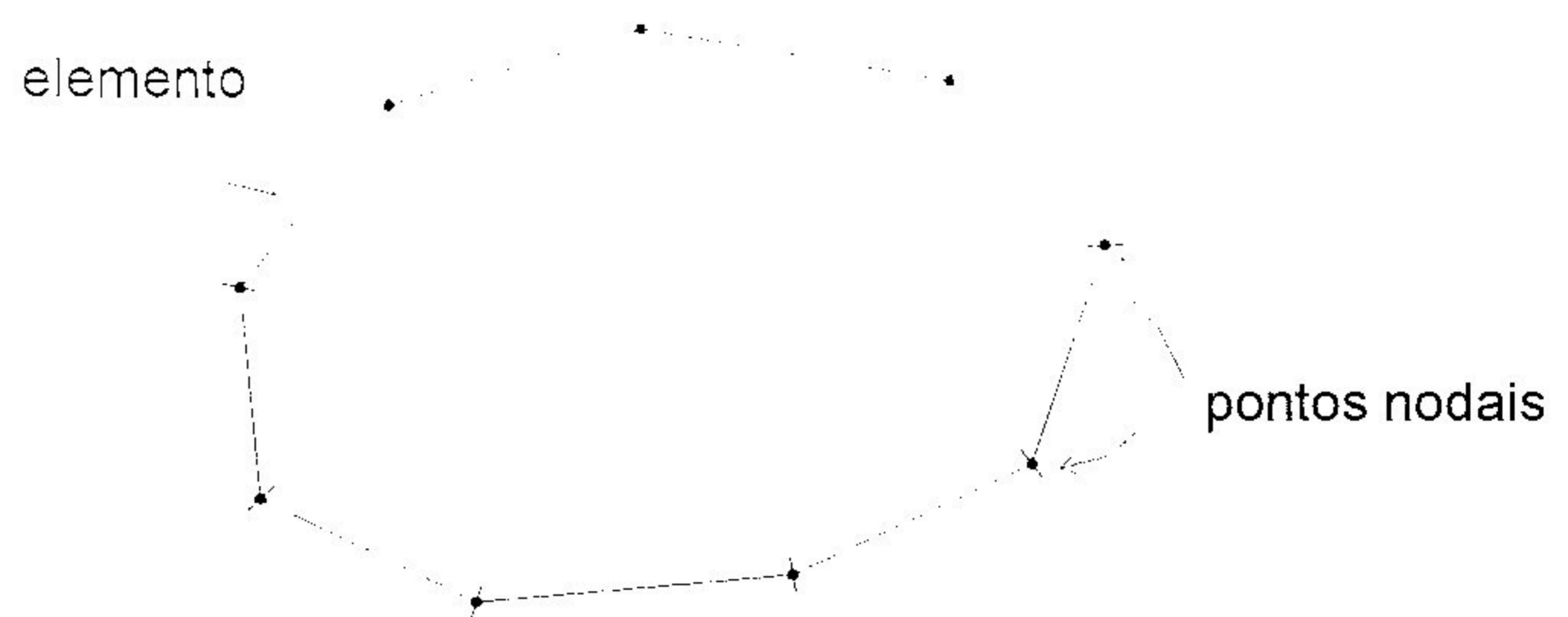


Figura 2.10 - Elementos de contorno com variação linear

A fig. (2.11) ilustra a aproximação adotada quando utiliza-se o elemento linear.

Neste caso, a eq. (2.80) assume a forma a seguir:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi^1 & 0 & \psi^2 & 0 \\ 0 & \psi^1 & 0 & \psi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

sendo:

$$\psi^1 = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad \psi^2 = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (2.82)$$

onde η é a coordenada adimensional que varia de -1 a 1, dada por:

$$\eta = \frac{2\bar{x}_1}{\ell} \quad (2.83)$$

com \bar{x}_1 representando o comprimento do elemento e \bar{x}_2 a coordenada local, ver Fig. 2.11.

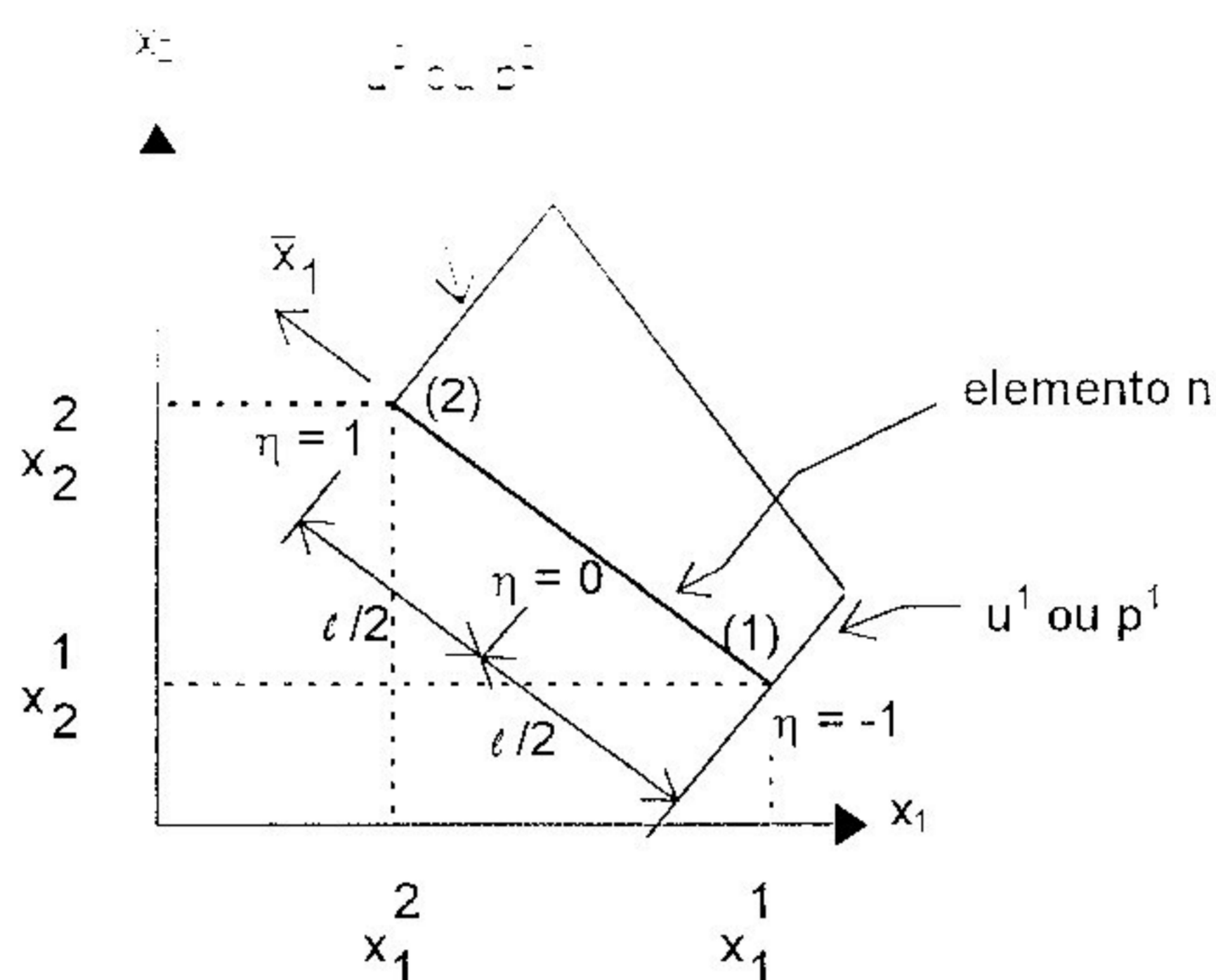


Figura 2.11 - Coordenadas cartesianas do elemento n

Similarmente, os deslocamentos \mathbf{u} e forças de superfície \mathbf{p} são interpolados sobre cada elemento da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \Phi \mathbf{u}^n \\ \mathbf{p} &= \Phi \mathbf{p}^n \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde \mathbf{u}^n e \mathbf{p}^n são os deslocamentos e forças de superfície nodais, respectivamente, conforme fig. (2.11).

Para o elemento linear, as matrizes da eq. (2.84) podem ser escritas na forma:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^1 & 0 & \phi^2 & 0 \\ 0 & \phi^1 & 0 & \phi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^1 & 0 & \phi^2 & 0 \\ 0 & \phi^1 & 0 & \phi^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{bmatrix}$$

sendo as funções de interpolação ϕ^1 e ϕ^2 similares às funções ψ^1 e ψ^2 dadas pelas equações (2.82).

A descontinuidade das forças de superfície ou das condições geométricas de contorno do corpo, será tratada com o conceito de nó duplo. O mesmo consiste na consideração de dois nós na interseção de elementos adjacentes, com as mesmas coordenadas cartesianas, sem haver elemento algum entre eles, conforme fig. (2.12).



Figura 2.12 - Conceito de nó duplo para elemento linear

Para complementar a representação matricial da equação integral de contorno, são definidas as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} & \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} & \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 2G\alpha \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) T \end{bmatrix} \\
\mathbf{u}^* &= \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} & \mathbf{p}^* &= \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} & \mathbf{U}^* &= \begin{bmatrix} u_{11,1}^* + u_{12,2}^* \\ u_{21,1}^* + u_{22,2}^* \end{bmatrix} \quad (2.86)
\end{aligned}$$

Considerando-se a discretização adotada no contorno e no domínio, a eq. (2.63) (considerando-se a força de volume e a temperatura na forma da eq. (2.49)) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
c_{jk} u_k + \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} p_{jk}^* u_k d\Gamma &= \sum_{n=1}^N \int_{\Gamma_n} u_{jk}^* p_k d\Gamma + \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} u_{jk}^* b_k d\Omega + \\
2G\alpha \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} u_{jk,k}^* T d\Omega & \quad (2.87)
\end{aligned}$$

sendo N o número de elementos de contorno e M o número de células. Na notação matricial, já introduzindo as variáveis nos pontos nodais, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} \mathbf{u} + \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^n &= \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^n + \\
\sum_{m=1}^M \left\{ \int_{\Omega_m} \mathbf{u}^* \mathbf{b} d\Omega \right\} + \sum_{m=1}^M \left\{ \int_{\Omega_m} \mathbf{U}^* \mathbf{T} d\Omega \right\} & \quad (2.88)
\end{aligned}$$

Da transformação de coordenadas cartesianas \mathbf{x} para o sistema homogêneo, tem-se:

$$\begin{aligned}
d\Gamma &= |\mathbf{G}| d\eta \\
d\Omega &= |\mathbf{J}| d\eta_1 d\eta_2 \quad (2.89)
\end{aligned}$$

onde o determinante do jacobiano da transformação no contorno é dado por:

$$|\mathbf{G}| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} \quad (2.90)$$

sendo que para elemento linear, $|\mathbf{G}| = \frac{\ell}{2}$ em todo o elemento. O determinante do jacobiano da transformação para o caso de discretização em células triangulares corresponde a $|\mathbf{J}| = 2A$, sendo A a área da célula.

A eq. (2.88) pode então ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \mathbf{u} + \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \mathbf{p}^* \Phi |\mathbf{G}| d\eta \right\} \mathbf{u}^n = \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_n} \mathbf{u}^* \Phi |\mathbf{G}| d\eta \right\} \mathbf{p}^n + \\ \sum_{m=1}^M \left\{ \int_{\Omega_m} \mathbf{u}^* \mathbf{b} |\mathbf{J}| d\eta_1 d\eta_2 \right\} + \sum_{m=1}^M \left\{ \int_{\Omega_m} \mathbf{U}^* \mathbf{T} |\mathbf{J}| d\eta_1 d\eta_2 \right\} \quad (2.91) \end{aligned}$$

Adotando-se um esquema de integração numérica sobre os elementos e as células pode-se reescrever a eq. (2.91), caso não haja singularidade, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \mathbf{u} + \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{N_p} w_k (\mathbf{p}^* \Phi)_k |\mathbf{G}| \right\} \mathbf{u}^n = \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{k=1}^{N_p} w_k (\mathbf{u}^* \Phi)_k |\mathbf{G}| \right\} \mathbf{p}^n + \\ \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{r=1}^{N_c} w_r (\mathbf{u}^* \mathbf{b})_r |\mathbf{J}| \right\} + \sum_{m=1}^M \left\{ \sum_{r=1}^{N_c} w_r (\mathbf{U}^* \mathbf{T})_r |\mathbf{J}| \right\} \quad (2.92) \end{aligned}$$

sendo N_p e N_c o número de pontos de integração para o elemento de contorno e para a célula, respectivamente.

Observando-se a eq. (2.54), constata-se que a solução fundamental u_{ij}^* apresenta singularidade logarítmica quando a integração é efetuada no elemento que contém o ponto fonte. Utiliza-se nestes casos a integração analítica para avaliar adequadamente integrais singulares.

Utilizando-se o índice i para representar o ponto singular, tem-se:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= \int_{\Gamma_j} p^* \Phi \, d\Gamma & G_{ij} &= \int_{\Gamma_j} u^* \Phi \, d\Gamma \\ B_{im} &= \int_{\Omega_m} u^* b \, d\Omega & \bar{B}_{im} &= \int_{\Omega_m} U^* T \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.93)$$

e chamando:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ij} &= \hat{\mathbf{H}}_{ij} & i &\neq j \\ \mathbf{H}_{ij} &= \hat{\mathbf{H}}_{ij} + \mathbf{c} & i &= j \end{aligned} \quad (2.94)$$

a eq. (2.92) pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} u^j = \sum_{j=1}^N G_{ij} p^j + \sum_{m=1}^M B_{im} + \sum_{m=1}^M \bar{B}_{im} \quad (2.95)$$

Escrevendo-se as equações integrais na forma discretizada para pontos de colocação coincidentes com os nós

funcionais do contorno, obtém-se um sistema de equações algébricas que pode ser expresso matricialmente como:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gp} + \mathbf{B} + \bar{\mathbf{B}} \quad (2.96)$$

Aplicando-se as condições de contorno e rearranjando-se \mathbf{H} e \mathbf{G} , de forma que as incógnitas de contorno se concentrem num vetor \mathbf{X} , o sistema de equações fica expresso por:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{F} \quad (2.97)$$

Deve-se notar que os vetores \mathbf{B} e $\bar{\mathbf{B}}$ (que corresponde ao termo devido à temperatura) foram incorporados no vetor \mathbf{F} . Resolvendo-se o sistema de equações determinam-se todos os valores do contorno.

O cálculo da matriz \mathbf{c} da eq. (2.92) pode ser evitado utilizando-se considerações de movimento de corpo rígido (BREBBIA *et alii* (1984)). Assim para regiões finitas tem-se:

$$\mathbf{H}_{ii} = -\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} \quad j \neq i \quad (2.98)$$

e para regiões infinitas:

$$\mathbf{H}_{ii} = \mathbf{I} - \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} \quad j \neq i \quad (2.99)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade.

CAPÍTULO 3

AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO NO MEC

3.1 - Considerações gerais

Algumas aplicações na Engenharia de Estruturas dependem de forças que atuam nos elementos de volume de um corpo, conhecidas como forças de volume. A presença destas forças gera integrais de domínio na representação integral do problema, que devem ser avaliadas quando se analisa o problema através do MEC.

As forças de volume mais conhecidas são as forças gravitacionais, como o peso-próprio de um corpo, e as forças centrífugas, devido à rotação de um corpo em volta de um eixo. Outros efeitos que geram uma integral de domínio no MEC são aqueles devidos à retração, inchamento ou variação de temperatura do corpo. Além destes, no caso de análise não-linear ocorre um termo integral de

domínio decorrente da aplicação de tensões residuais ou deformações residuais. O cálculo das integrais de domínio será feito com o emprego dos procedimentos de discretização do domínio em células, Método do Tensor de Galerkin (MTG) e Método da Múltipla Reciprocidade (MMR) neste trabalho.

Para o peso próprio e o carregamento térmico será feito um tratamento adequado da integral de domínio conforme a precisão que se quer alcançar. A força gravitacional é considerada constante para fins práticos, o que simplifica a análise. O carregamento térmico será considerado em pontos discretos, cujo valor da temperatura em cada ponto pode ser previamente determinado através de uma análise experimental ou de uma análise numérica, a qual é utilizada neste trabalho. Além disto é considerada a possibilidade de ocorrência de variação de temperatura ao longo do domínio segundo uma função constante, linear ou parabólica, numa determinada direção.

Um campo de distribuição de temperatura estacionário dentro de um domínio Ω de um corpo com contorno Γ , pode ser descrito pela equação de Poisson na forma:

$$\nabla^2 T + \frac{1}{\lambda} b_0 = 0 \quad (3.1)$$

onde T é uma função que representa o valor da temperatura, λ é a condutividade térmica e b_0 corresponde à densidade das fontes internas de calor.

A presença de fonte de calor no domínio resulta na seguinte equação integral do problema:

$$\lambda c_i u_i + \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma - \int_{\Omega} u^* b_0 d\Omega \quad (3.2)$$

sendo o fluxo $q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial n}$, u^* e q^* as soluções fundamentais equivalentes, e observando-se que nesta equação o índice i repetido não implica em somatório.

A última integral na eq. (3.2), função da fonte de calor b_0 , é uma integral de domínio que pode ser avaliada com as técnicas que serão utilizadas neste trabalho. Os detalhes referentes à análise do problema de potencial e da equação de Poisson para temperatura via MEC podem ser encontrados em BREBBIA *et alii* (1984), NOWAK e NEVES (1994).

A equação integral dos deslocamentos dos pontos de um corpo elástico solicitado por um carregamento de domínio genérico e por uma variação de temperatura é dada pela eq. (2.49), sendo a influência das forças de volume representada pela integral:

$$B_i = \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (3.3)$$

e a influência da variação de temperatura representada pela integral:

$$\bar{B}_i = \frac{2G\alpha(1+\nu)}{(1-2\nu)} \int_{\Omega} T(x) u_{ik,k}^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (3.4)$$

A solução fundamental u_{ij}^* para o caso bidimensional é dada pela eq. (2.54) transcrita a seguir:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\ln r \delta_{ij} - r_i r_j] \quad (3.5)$$

sendo que a derivada da solução fundamental $u_{ik,k}^*$ é igual a:

$$u_{ik,k}^* = -\frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)G} \frac{r_i}{r} \quad (3.6)$$

A representação integral das componentes de tensão num ponto interno do corpo é dada pela eq. (2.71), na qual a contribuição das forças de volume é representada por:

$$S_{ij} = \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) \quad (3.7)$$

e a contribuição da variação de temperatura é dada por:

$$\bar{S}_{ij} = 2G\alpha \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \int_{\Omega} \psi_{ij}^* T d\Omega + g_{ij}^T \quad (3.8)$$

que pode ser escrita como:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{2G\alpha(1+\nu)}{\pi(1-\nu)} \int_{\Omega} (\delta_{ij} - 2r_i r_j) \frac{T}{r^2} d\Omega - \frac{G\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} T \delta_{ij} \quad (3.9)$$

3.2 - Procedimentos de cálculo de integrais de domínio

As integrais de domínio no MEC podem ser analisadas basicamente de duas formas:

- numericamente no domínio, fazendo uma divisão em células e utilizando uma aproximação numérica para a integral em cada célula;
- utilizando-se processos de transformação da integral de domínio em uma integral de contorno, tais como MTG e MMR, que depois é avaliada numericamente.

Estes procedimentos serão analisados a seguir.

3.2.1 - Discretização do domínio em células

A discretização do domínio é uma técnica bem conhecida na formulação dos métodos numéricos de domínio e pode ser utilizada no MEC para a avaliação das integrais de domínio. Este procedimento consiste em dividir o corpo em uma série de pequenos elementos chamados células, conforme fig. (3.1), sobre as quais é realizada a integração, sendo o resultado total obtido pelo somatório das integrais das células.

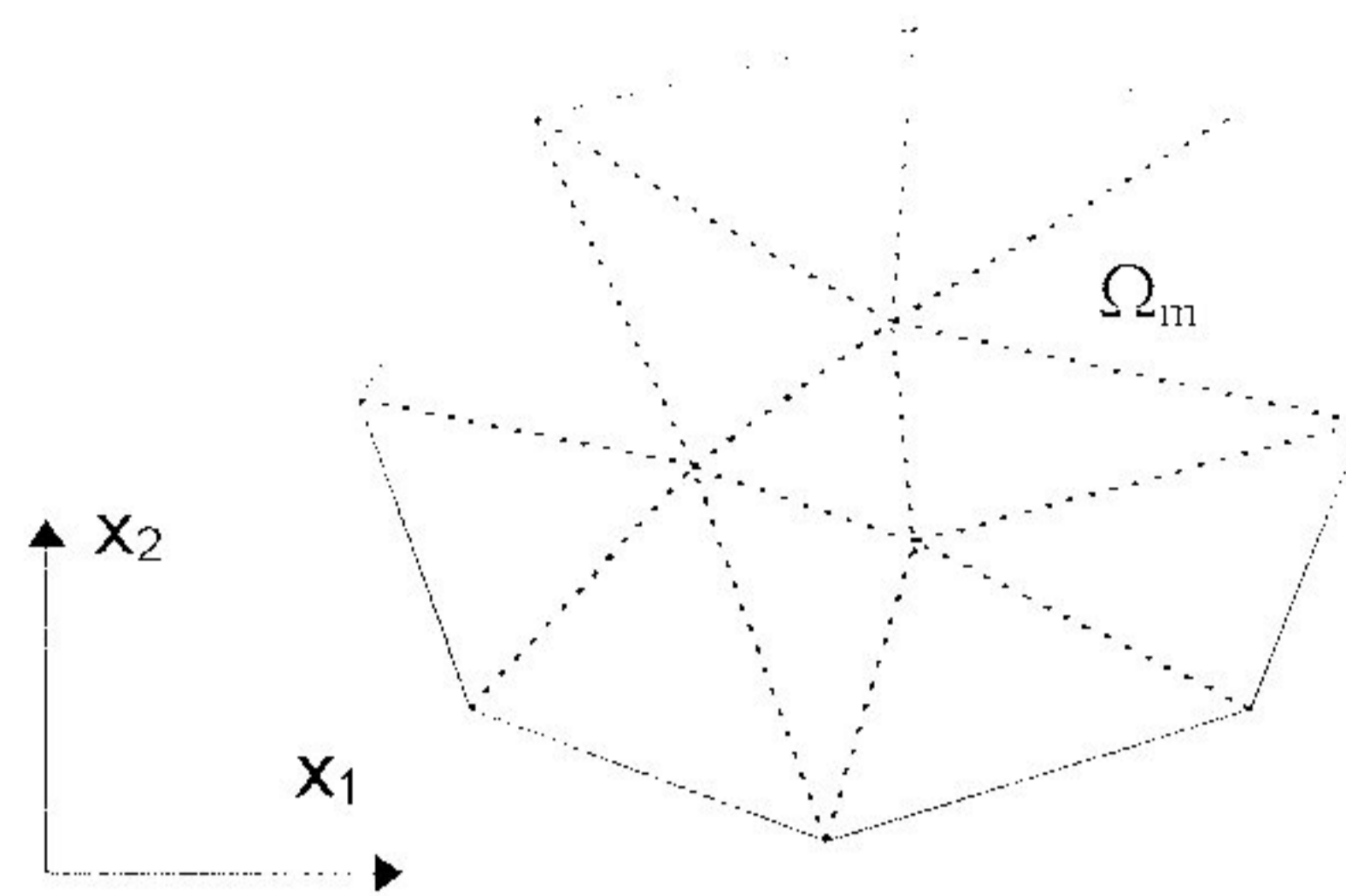


Figura 3.1 - Divisão do domínio em células

A discretização do domínio deve em princípio ser evitada para não diminuir o grande atrativo do MEC, que é a necessidade de se discretizar o problema apenas no contorno. Entretanto o cálculo do termo de domínio por meio de integrais sobre células é um caminho mais direto, e em alguns casos, como na análise não-linear, em geral é a alternativa mais simples e confiável. Para certos tipos de problemas, quando as forças de domínio são definidas apenas em pontos discretos, a divisão em células é o único procedimento viável na prática.

Considerando-se o domínio dividido em células triangulares, a integral de domínio da eq. (3.3) é obtida na forma:

$$B_i = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{\Omega_m} u_{ij}^* b_j d\Omega_m \quad (3.10)$$

sendo N_e o número de células e Ω_m o domínio da célula m .

Devido à necessidade de integração numérica bidimensional para calcular as integrais de domínio sobre as células,

as coordenadas de um ponto qualquer da célula são parametrizadas em função das coordenadas dos vértices, estabelecendo-se sobre a célula um sistema de coordenadas homogêneas, conforme fig. (3.2).

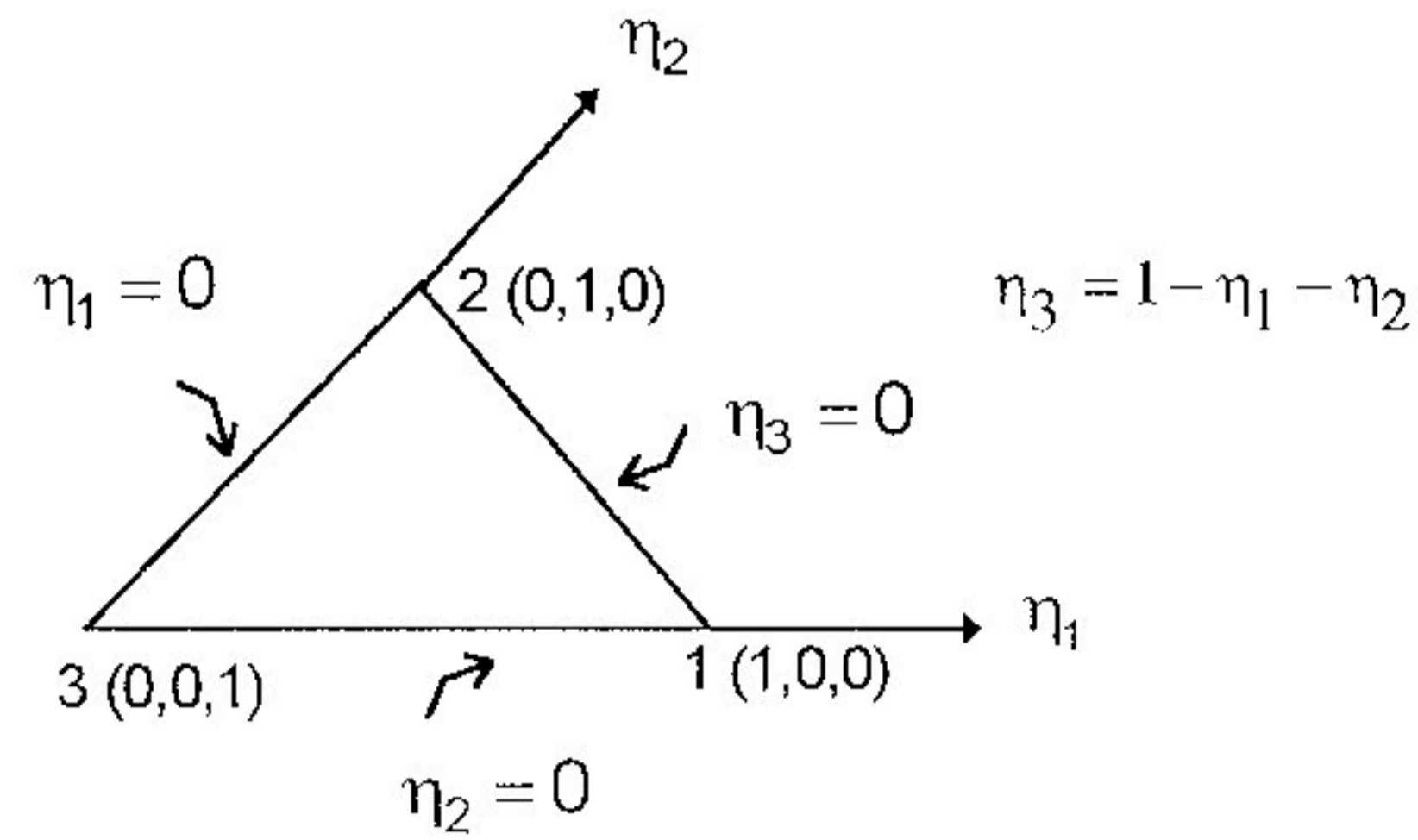


Figura 3.2 - Célula triangular e definição de coordenadas homogêneas

Assim, as coordenadas cartesianas de um ponto do subdomínio Ω_e podem ser expressas por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

sendo as funções de interpolação expressas em função do sistema cartesiano de coordenadas (x_1, x_2) da forma seguinte:

$$\eta_\alpha = \frac{1}{2A} (2A_\alpha^0 + b_\alpha x_1 + a_\alpha x_2) \quad (3.12)$$

onde:

$$a_\alpha = x_1^y - x_1^\beta \quad (3.13)$$

$$b_x = x_2^{\alpha} - x_2^{\beta} \quad (3.14)$$

$$2A_{\alpha}^0 = x_1^{\beta} x_2^{\gamma} - x_1^{\gamma} x_2^{\beta} \quad (3.15)$$

$$A = \frac{1}{2}(b_1 a_2 - b_2 a_1) \quad (3.16)$$

sendo:

$$\alpha = 1,2,3 \quad \beta = 2,3,1 \quad \gamma = 3,1,2$$

Se o ponto fonte não coincide com nenhum dos nós da célula, a integral na eq. (3.10) é regular e pode ser utilizada a integração numérica para domínios triangulares proposta por Hammer *et alii*¹ apud BREBBIA *et alii* (1984).

$$I_i = \int_0^1 \left[\int_0^{1-\eta_2} b_j u_{ij}^* |J| d\eta_1 \right] d\eta_2 \cong \sum_{k=1}^n [b_j u_{ij}^*]_{\eta_1^k, \eta_2^k, \eta_3^k} |J| w_k \quad (3.17)$$

sendo w_k os pesos referentes aos pontos de integração de Hammer e $|J|$ o determinante do jacobiano igual a duas vezes a área da célula triangular.

Assim a representação numérica da eq. (3.10), caso não haja singularidade, em cada uma célula será:

¹ HAMMER, P. C.; MARLOWE, O. J.; STROUD, A. H. Numerical Integration Over Simplexes and Cones. *Math. Tables Other Aids Comput.* v.10, p.130-139, 1956

$$(B_i)_e \equiv \left[\sum_{k=1}^n w_k (u_{ij}^* b_j)_k \right] 2A_e \quad (3.18)$$

onde A_e é a área da célula e .

No caso do ponto fonte coincidir com um dos nós da célula, pode ser utilizado um esquema de integração semi-analítica para remover a singularidade do integrando, proposto por TELLES e BREBBIA² *apud* BREBBIA *et alii* (1984), para o caso bidimensional. Define-se inicialmente um sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ) com origem no ponto singular ξ , no qual o valor máximo de r referente ao ângulo ϕ é obtido na forma:

$$R(\phi) = \frac{-2A_e}{b_\xi \cos \phi + a_\xi \sin \phi} \quad (3.19)$$

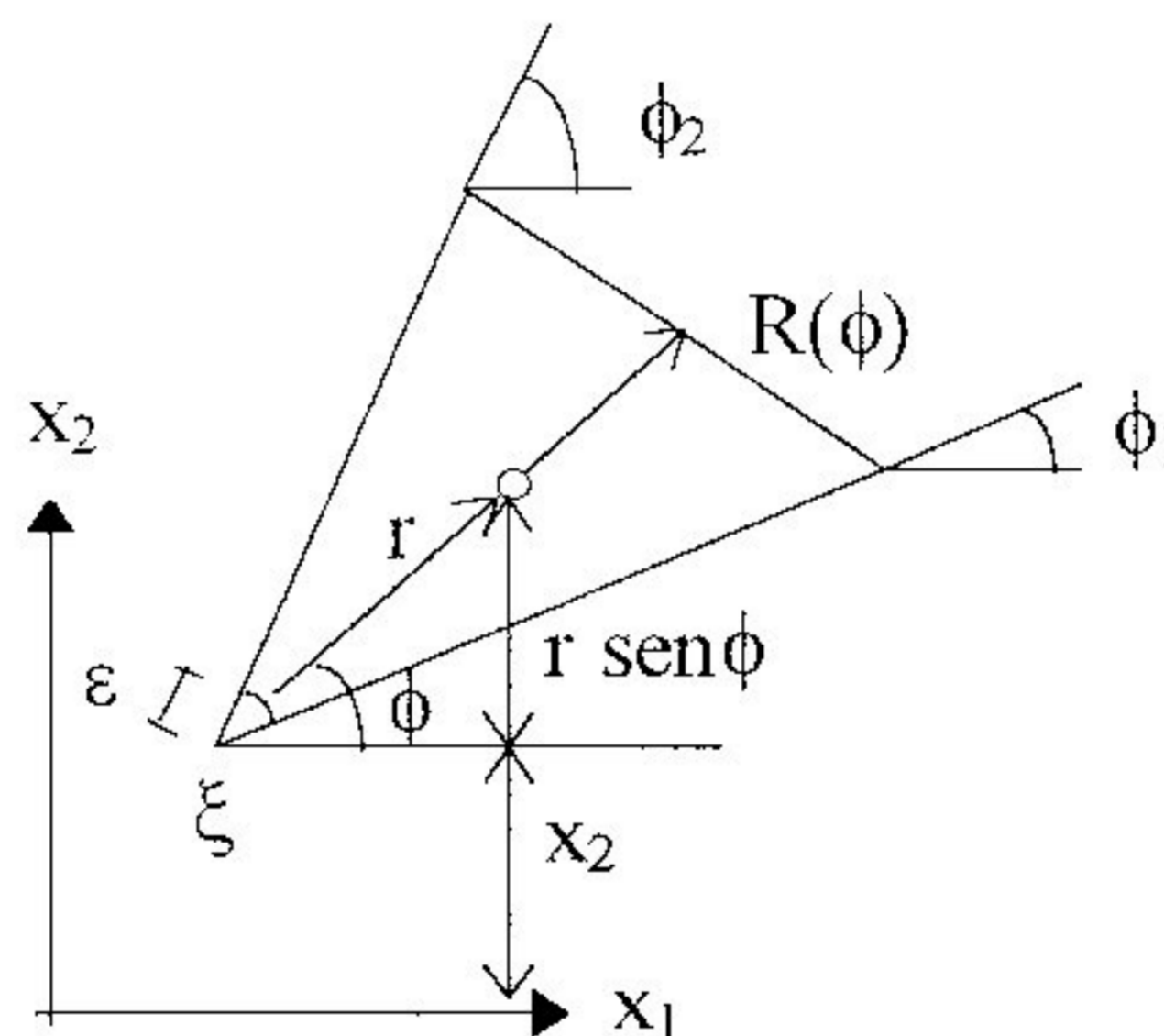


Figura 3.3 - Sistema de coordenadas cilíndricas baseado no ponto singular ξ

² TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. The Boundary Element Method in Plasticity. In *New Developments in Boundary Element Methods*. p.295-317, CML Publications. Southampton, 1980. Appl. Math. Modelling, v.5, p.275-281, 1981.

Observando-se que os termos $r_{,1} = \cos\phi$ e $r_{,2} = \sin\phi$ são independentes de r , e sendo $d\Omega_e = r dr d\phi$, tem-se então:

$$I_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} \frac{-b_j}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\ln r \delta_{ij} - r_{,j}r_{,i}] r dr d\phi \quad (3.20)$$

A integral (3.20) pode ser efetuada facilmente com relação a r , tomando-se o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtendo-se então uma expressão na qual já está considerada a singularidade do tensor u_{ij}^* e depende apenas da variável ϕ .

Esta expressão pode então ser integrada numericamente com relação à variável ϕ , utilizando-se a quadratura de Gauss unidimensional. Neste caso, a variável ϕ será expressa como:

$$\phi = \frac{\eta}{2}(\phi_2 - \phi_1) + \frac{1}{2}(\phi_2 + \phi_1) \quad (3.21)$$

com η definido no intervalo $[-1, 1]$, ficando:

$$d\phi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} d\eta \quad (3.22)$$

A integração numérica referente às tensões em pontos internos faz-se de forma semelhante. A representação numérica da integral em cada célula (sem singularidade) será:

$$\int_{\Omega_e} u_{ijk}^* b_k d\Omega \equiv \sum_{i=1}^n w_i (u_{ijk}^* b_k)_i 2A_e \quad (3.23)$$

Com a presença da singularidade, após a mudança de coordenadas cilíndricas, tem-se a expressão:

$$\int_{\Omega_e} u_{ijk}^* b_k d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} \frac{b_k}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(r_j \delta_{ki} + r_i \delta_{jk} - r_k \delta_{ij}) + 2r_i r_j r_k \right] dr d\phi \quad (3.24)$$

que pode ser resolvida de forma analítica para a variável r e numericamente na variável ϕ .

Para o caso de carregamento térmico a integração numérica nas células é análoga. Assim a influência nos deslocamentos, caso não haja singularidade, é dada por:

$$(\bar{B}_i)_e \equiv \left[\sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{2G\alpha(1+\nu)}{(1-2\nu)} u_{ik,k}^* T \right)_i \right] 2A_e \quad (3.25)$$

e para tensões em pontos internos, tem-se:

$$(\bar{S}_{ij})_e \equiv \left[\sum_{m=1}^n w_m \left(\frac{2G\alpha(1+\nu)}{\pi(1-\nu)} (\delta_{ij} - 2r_i r_j) \frac{T}{r^2} \right)_m \right] 2A_e \quad (3.26)$$

No caso dos deslocamentos, a representação em coordenadas cilíndricas das integrais singulares, após as simplificações, tem a seguinte forma:

$$I_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} -\frac{\alpha(1-\nu)}{2\pi(1-\nu)} r_{,i} T dr d\phi \quad (3.27)$$

e para tensões em pontos internos:

$$I_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} G\alpha \frac{(1+\nu)}{\pi(1-\nu)} (\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j}) \frac{T}{r} dr d\phi \quad (3.28)$$

as quais podem ser avaliadas com o processo semi-analítico já descrito e observando-se que a integral em (3.28) tem de ser interpretada no sentido do Valor Principal de Cauchy.

Considerações para força gravitacional

Seja um corpo de densidade constante ρ submetido ao campo gravitacional constante g_j . A força de volume relacionada define-se como:

$$b_j = \rho g_j \quad (3.29)$$

A formulação integral para os deslocamentos referente a esta força será obtida, simplesmente, pela substituição da eq. (3.29) na eq. (3.10). Substituindo-se a eq. (3.29) na eq. (3.18) para a integração numérica, tem-se então:

$$(B_i)_e \cong \sum_{k=1}^n w_k (u_{ij}^* \rho g_j)_k \quad 2A_e \quad (3.30)$$

Da mesma forma para as tensões em pontos internos, substitui-se a eq. (3.29) na eq. (3.23):

$$(S_{ij})_e \cong \left[\sum_{l=1}^n w_l (u_{ijk}^* \rho g_k)_l \right] 2A_e \quad (3.31)$$

A integral analítica é desenvolvida com relação a r para o peso-próprio constante na eq. (3.20) da seguinte forma:

$$I_i = \frac{-\rho g_j}{8\pi(1-\nu)G} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left\{ (3-4\nu) \left[\ln R(\phi) - \frac{1}{2} \right] \delta_{ij} - r_i r_j \right\} \frac{R^2(\phi)}{2} d\phi \quad (3.32)$$

Sendo assim a integral numérica da eq. (3.32) pode ser escrita como:

$$(I_i)_e \cong \frac{-\rho g_j}{8\pi(1-\nu)G} \left[\sum_{k=1}^m w_k^G \left(\frac{R^2(\phi)}{2} \left\{ (3-4\nu) \left[\ln R(\phi) - \frac{1}{2} \right] \delta_{ij} - r_i r_j \right\} \right)_k \right] \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \quad (3.33)$$

onde os m pontos de integração de Gauss com seus respectivos pesos w_k^G são dados em BREBBIA *et alii* (1984).

Aplicando-se a relação (3.29) na eq. (3.24) e integrando-se em relação a r , obtém-se:

$$l_i = \frac{\rho g_k}{4\pi(1-\nu)} \int_{\phi_1}^{\phi_2} R(\phi) \left[(1-2\nu)(r_j \delta_{ki} - r_i \delta_{jk} - r_k \delta_{ij}) - 2r_i r_j r_k \right] d\phi \quad (3.34)$$

cuja integração numérica em relação a ϕ é dada por:

$$(l_{ij})_e \cong \frac{\rho g_k}{4\pi(1-\nu)} \left[\sum_{l=1}^m w_l^G \left(\left[(1-2\nu)(r_j \delta_{ki} + r_i \delta_{jk} - r_k \delta_{ij}) + 2r_i r_j r_k \right] \right)_l \right] \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \quad (3.35)$$

Considerações para carregamento térmico constante

Para um corpo submetido ao carregamento térmico constante, as integrais numéricas relacionadas ao cálculo dos deslocamentos e das tensões em pontos internos correspondem respectivamente à eq. (3.25) e à eq. (3.26).

Quanto à singularidade inerente a integral semi-analítica para deslocamentos, esta é obtida após o desenvolvimento da eq. (3.27) em relação a r , obtendo-se então:

$$l_i = -\frac{\alpha(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} T \int_{\phi_1}^{\phi_2} r_i R(\phi) d\phi \quad (3.36)$$

e para as tensões em pontos internos:

$$l_{ij} = G\alpha \frac{(1+\nu)}{\pi(1-\nu)} T \int_{\phi_1}^{\phi_2} \ln R(\phi) (\delta_{ij} - 2r_i r_j) d\phi \quad (3.37)$$

As integrais numéricas das eqs. (3.36) e (3.37) são respectivamente:

$$(I_i)_e \cong -\frac{\alpha(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} T \left[\sum_{k=1}^m w_k^G (r_j R(\phi))_k \right] \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \quad (3.38)$$

e

$$(I_{ij})_e \cong G\alpha \frac{(1+\nu)}{\pi(1-\nu)} T \left[\sum_{k=1}^m w_k^G (\ln R(\phi) (\delta_{ij} - 2r_j r_j))_k \right] \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \quad (3.39)$$

Considerações para carregamento térmico linear

Para a variação de temperatura linear ao longo do domínio, será utilizada uma função específica que considera a variação de temperatura apenas na direção do eixo x_2 . Seja a função linear abaixo:

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} + (T_1 - T_2) \frac{x_2}{h} \quad (3.40)$$

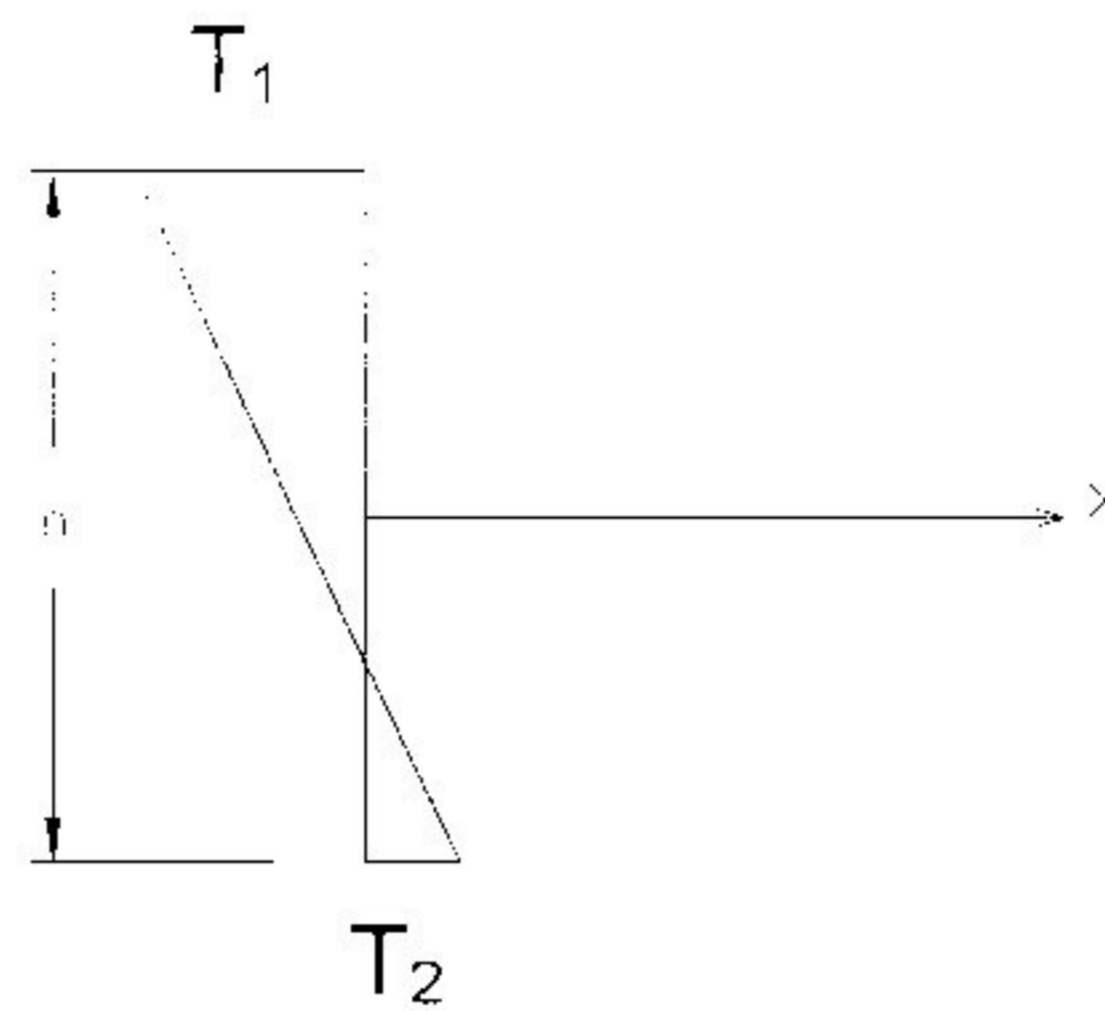


Figura 3.4 - Definição das variações de temperatura T_1 e T_2 , e da distância h

A coordenada x_2 , considerando-se o sistema de coordenadas cilíndricas (r, ϕ) , equivale a:

$$x_2 = r \operatorname{sen} \phi + x_2(\xi) \quad (3.41)$$

conforme fig. (3.3).

As integrais de domínio referentes a este tipo de variação de temperatura serão obtidas pela substituição da eq. (3.40) nas eq. (3.25) e eq. (3.26).

Para avaliar as integrais singulares, observa-se que a eq. (3.40) é dependente de x_2 e portanto de r , como indicado na eq. (3.41). Obtém-se então a integral analítica a partir da eq. (3.27), como se segue:

$$I_i = -\frac{\alpha(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r_i R(\phi) \left\{ \frac{T_1 - T_2}{2} - (T_1 - T_2) \frac{[(R(\phi)\text{sen}\phi)/2 - x_2(\xi)]}{h} \right\} d\phi \quad (3.42)$$

e para tensões em pontos internos (eq. (3.28)):

$$I_{ij} = \frac{G\alpha(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{\phi_1}^{\phi_2} (\delta_{ij} - 2r_i r_j) \left\{ \frac{T_1 + T_2}{2} \ln R(\phi) + \frac{(T_1 - T_2)}{h} \left[\frac{R(\phi)\text{sen}\phi}{2} + x_2(\xi) \ln R(\phi) \right] \right\} d\phi \quad (3.43)$$

As representações numéricas das eqs. (3.42) e (3.43) serão respectivamente:

$$(I_i)_e \cong -\frac{\alpha(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} \left[\sum_{k=1}^m w_k^G \left(r_i R(\phi) \left\{ \frac{T_1 + T_2}{2} + (T_1 - T_2) \frac{[(R(\phi)\text{sen}\phi)/2 + x_2(\xi)]}{h} \right\} \right) \right]_k \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \quad (3.44)$$

e

$$(I_{ij})_e \cong \frac{G\alpha(1+\nu)}{\pi(1-\nu)} \left[\sum_{k=1}^m w_k^G \left((\delta_{ij} - 2r_i r_j) \left\{ \frac{T_1 + T_2}{2} \ln R(\phi) + \frac{(T_1 - T_2)}{h} \left[\frac{R(\phi)\text{sen}\phi}{2} + x_2(\xi) \ln R(\phi) \right] \right\} \right) \right]_k \frac{\phi_2 - \phi_1}{2} \quad (3.45)$$

Considerações para carregamento térmico parabólico

Para a variação de temperatura parabólica ao longo do eixo x_2 , será utilizada também uma função específica, conforme fez-se para o caso linear. Esta função será então substituída nas eqs. (3.25) e (3.26) para a obtenção das integrais de domínio correspondentes.

Seja, então, a função parabólica abaixo:

$$T = 2(T_1 + T_2 - 2T_3) \frac{x_2^2}{h^2} + (T_1 - T_2) \frac{x_2}{h} + T_3 \quad (3.46)$$

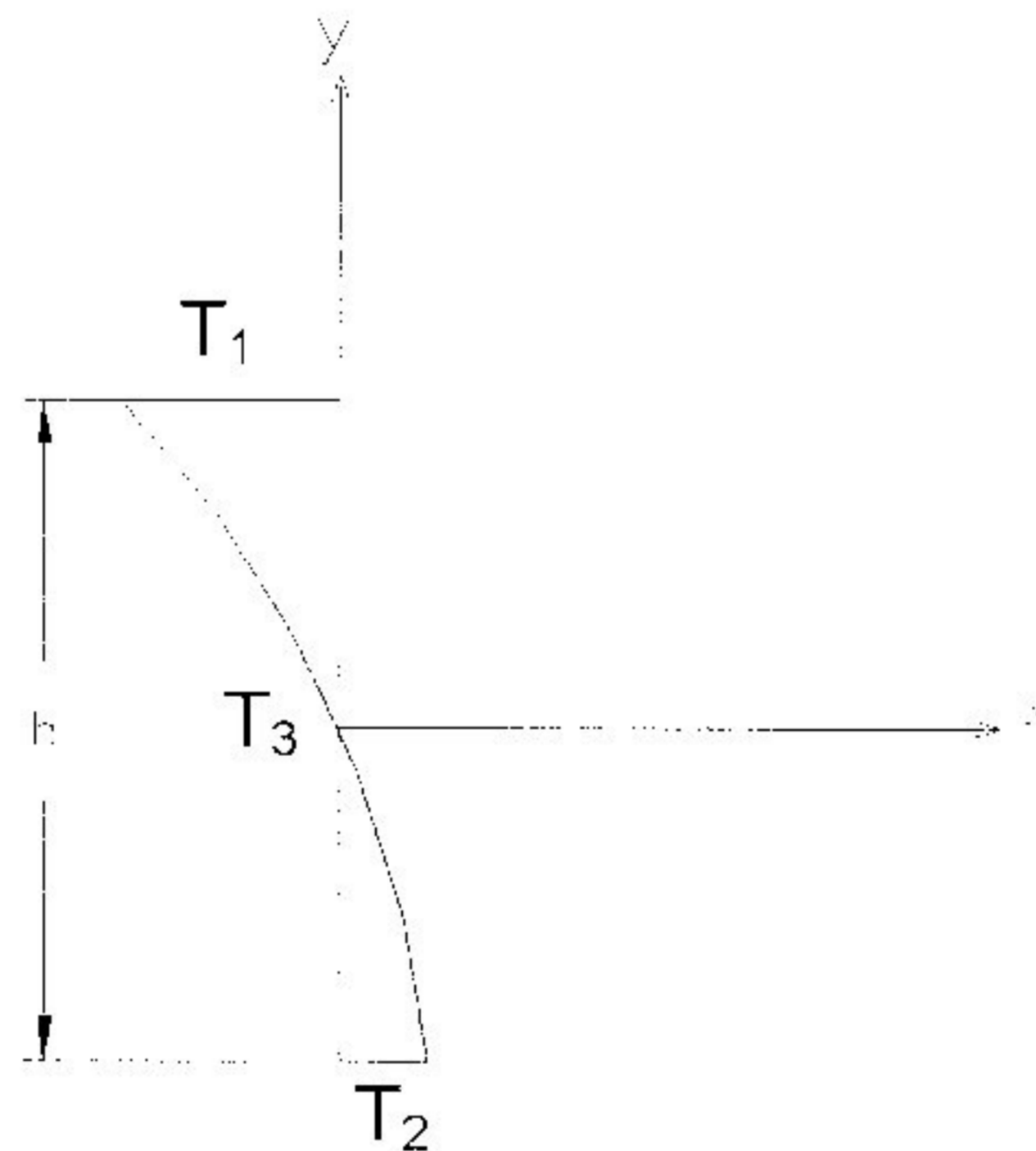


Figura 3.5 - Definição das variações de temperatura T_1, T_2 e T_3 , e da distância h

Substituindo-se esta expressão na eq. (3.27) e integrando-se com relação a r , obtém-se:

$$= -\frac{\alpha(1-\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r_i R(\phi) \left[\frac{2}{h^2} (T_1 + T_2 - 2T_3) \left[\frac{R^2(\phi) \sin^2 \phi}{3} - R(\phi) \sin \phi x_2(\xi) + x_2^2(\xi) \right] + \frac{(T_1 - T_2)}{h} \left(\frac{R(\phi) \sin \phi}{2} + x_2(\xi) \right) + T_3 \right] d\phi \quad (3.47)$$

e para tensões em pontos internos (eq. (3.28)):

$$l_{ij} = \frac{G\alpha(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{\phi_1}^{\phi_2} (\delta_{ij} - 2r_i r_j) \left[T_3 \ln R(\phi) + \frac{2}{h^2} (T_1 + T_2 - 2T_3) \left[\frac{R^2(\phi) \sin^2 \phi}{2} + 2R(\phi) \sin \phi x_2(\xi) + x_2^2(\xi) \ln R(\phi) \right] + \frac{(T_1 - T_2)}{h} (R(\phi) \sin \phi + x_2(\xi) \ln R(\phi)) \right] d\phi \quad (3.48)$$

Considerações para carregamento térmico generalizado

Com o propósito de averiguar o efeito sobre um corpo submetido à uma variação qualquer de temperatura na análise elástica, as temperaturas e suas derivadas serão determinadas através de uma análise térmica. Obtidos os resultados para cada nó das células, será feita uma interpolação em função dos valores nodais, utilizando-se as coordenadas homogêneas triangulares definidas nas expressões (3.12) a (3.16), da seguinte forma:

$$T = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Este valor interpolado da temperatura será substituído nas eqs. (3.25) e (3.26), para deslocamentos e tensões em pontos internos respectivamente, para as integrais regulares.

Para as integrais singulares utiliza-se o procedimento semi-analítico já descrito, observando-se apenas que neste caso devem ser consideradas também as funções de interpolação, que dependem da variável r .

Fazendo-se então a mudança para o sistema de coordenadas cilíndricas, obtém-se a seguinte expressão para a integral de domínio (correspondente à equação de deslocamentos):

$$l_i = -\frac{\alpha(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{r_j}{r} T d\Omega = -\frac{\alpha(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} r_j [\bar{\eta}_1 \quad \bar{\eta}_2 \quad \bar{\eta}_3] dr d\phi \begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

onde, sendo γ o nó singular, tem-se as funções de interpolação $\bar{\eta}_\alpha$ ($\alpha=1,2$ ou 3) dadas por:

$$\bar{\eta}_\alpha = {}^\gamma \eta_\alpha + \frac{r}{2A_e} (b_\alpha \cos \phi + a_\alpha \sin \phi) \quad (3.51)$$

com ${}^\gamma \eta_\alpha = 0$ para $\alpha \neq \gamma$ e ${}^\gamma \eta_\alpha = 1$ para $\alpha = \gamma$. Integrando-se então em relação à variável r e tomando-se o limite para $\varepsilon \rightarrow 0$, a expressão abaixo é obtida no caso do nó singular γ coincidir com o nó 1 da célula:

$$I_i = -\frac{\alpha(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} A_e \int_{\phi_1}^{\phi_2} r_j \begin{bmatrix} \frac{-(b_\gamma \cos \phi - a_\gamma \sin \phi)}{(b_\gamma \cos \phi + a_\gamma \sin \phi)^2} \\ \frac{(b_2 \cos \phi + a_2 \sin \phi)}{(b_\gamma \cos \phi + a_\gamma \sin \phi)^2} \\ \frac{(b_3 \cos \phi + a_3 \sin \phi)}{(b_\gamma \cos \phi + a_\gamma \sin \phi)^2} \end{bmatrix} d\phi \begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Se o nó singular γ coincidir com o nó 2 ou o nó 3 da célula, basta permutar nesta expressão o sinal dos coeficientes e os índices das variáveis a_γ e b_γ de forma adequada. A eq. (3.52) pode então ser integrada numericamente com relação à variável ϕ .

A integral de domínio singular correspondente à equação de tensões também é analisada com este procedimento. Neste caso tem-se:

$$I_{ij} = \frac{G\alpha(1+\nu)}{\pi(1-\nu)} \int_{\Omega_e} \frac{(\delta_{ij} - 2r_j r_j)}{r^2} T d\Omega =$$

$$\frac{G\alpha(1+\nu)}{\pi(1-\nu)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\varepsilon}^{R(\phi)} \frac{(\delta_{ij} - 2r_j r_j)}{r} [\bar{\eta}_1 \quad \bar{\eta}_2 \quad \bar{\eta}_3] dr d\phi \begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

que apresenta como resultado, no caso do nó singular γ coincidir com o nó 1 da célula:

$$I_{ij} = \frac{G\alpha(1+\nu)}{\pi(1-\nu)} \int_{\phi_1}^{\phi_2} (\delta_{ij} - 2r_i r_j) \ln(R(\phi)) \left[\begin{array}{c} \frac{-(b_2 \cos \phi + a_2 \sin \phi)}{(b_\gamma \cos \phi + a_\gamma \sin \phi)^2} \\ \frac{-(b_3 \cos \phi + a_3 \sin \phi)}{(b_\gamma \cos \phi + a_\gamma \sin \phi)^2} \end{array} \right] d\phi \quad \begin{array}{c} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{array} \quad (3.54)$$

Se o nó singular γ coincidir com o nó 2 ou o nó 3 da célula, permutam-se os coeficientes e os índices das variáveis a_γ e b_γ de forma adequada.

3.2.2 - Métodos de transformação da integral de domínio para o contorno

A integral de domínio também pode ser corretamente avaliada utilizando-se métodos de transformação para se obter uma integral apenas no contorno, preservando-se assim a vantagem do MEC de se trabalhar apenas com o contorno.

Os Métodos de transformação da integral de domínio para o contorno tratados neste trabalho são o Método do Tensor de Galerkin (MTG) e o Método da Múltipla Reciprocidade (MMR).

3.2.2.1 - Método do Tensor de Galerkin

Seja G_{ij}^* o tensor de Galerkin relacionado à solução fundamental de Kelvin u_{ij}^* , eq. (3.5), pela seguinte expressão:

$$u_{ij}^* = G_{ij,kk}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,kj}^* \quad (3.55)$$

sendo que, para problemas bidimensionais, este tensor é dado por:

$$G_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} \quad (3.56)$$

Derivando-se devidamente a eq. (3.56) e substituindo-a na eq. (3.55), obtém-se:

$$u_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_i r_j + \left(\frac{7-8\nu}{2} \right) \delta_{ij} \right] \quad (3.57)$$

que difere da eq. (3.5) apenas por uma constante.

Esta constante é específica para o uso do MTG, mas também pode ser utilizada para o MMR e discretização do domínio em células. DE PAULA (1991) observou que a presença da constante na solução fundamental sempre melhora o equilíbrio da solução numérica (este equilíbrio não é automaticamente satisfeito em uma solução

padrão com elementos de contorno), e que esta condição de equilíbrio melhorará se o valor da constante for aumentado.

Considerações para força gravitacional

Considerando-se a força gravitacional na forma definida na eq. (3.29) e substituindo-se a solução fundamental em função do tensor de Galerkin na integral de domínio [eq. (3.3)], tem-se:

$$B_i = \int_{\Omega} \left(G_{ij,kk}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,kj}^* \right) \rho g_j d\Omega(x) \quad (3.58)$$

então, a transformação desta integral para o contorno é obtida através da utilização do teorema da divergência, fornecendo a seguinte equação:

$$B_i = \rho g_j \int_{\Gamma} \left(G_{ij,k}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{ik,j}^* \right) n_k d\Gamma \quad (3.59)$$

Substituindo-se a derivada da eq. (3.56) na eq. (3.59), obtém-se:

$$B_i = \int_{\Gamma} \frac{\rho r}{8\pi G} \left\{ \left[2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) - 1 \right] \left(g_i n_k r_{,k} - \frac{1}{2(1-\nu)} g_k r_{,k} n_i \right) \right\} d\Gamma \quad (3.60)$$

A integral correspondente para as tensões em pontos internos é obtida derivando-se a eq. (3.60) e aplicando-se a lei de Hooke, que fornece:

$$S_{ij} = \int_{\Gamma} \frac{\rho}{8\pi} \left[2n_{m,r,m} (g_{i,r,j} + g_{j,r,i}) + \frac{1}{1-\nu} \left\{ \nu \delta_{ij} \left[2n_{m,r,m} g_{s,r,s} + \left(1 - 2 \ln \frac{1}{r} \right) g_{m,n,m} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. g_{m,r,m} (n_i r_j + n_j r_i) + \frac{1-2\nu}{2} \left(1 - 2 \ln \frac{1}{r} \right) (g_i n_j + g_j n_i) \right\} \right] d\Gamma \quad (3.61)$$

Considerações para carregamento térmico

A substituição da eq. (3.55) na eq. (3.4) gera a seguinte equação:

$$\bar{B}_i = \frac{G\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} \int_{\Omega} G_{ik,kj}^* T d\Omega \quad (3.62)$$

que pode ser transformada pela integração por partes em:

$$\bar{B}_i = \frac{G\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} \left[\int_{\Gamma} G_{ik,kj}^* T n_j d\Gamma - \int_{\Omega} G_{ik,kj}^* T_{,j} d\Omega \right] \quad (3.63)$$

Utilizando-se a integração por partes novamente na segunda integral do lado direito, obtém-se:

$$\bar{B}_i = \frac{G\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} \left[\int_{\Gamma} G_{ik,kj}^* T n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} G_{ik,k}^* T_j n_j d\Gamma - \int_{\Omega} G_{ik,k}^* T_{,jj} d\Omega \right] \quad (3.64)$$

Levando-se em consideração a eq. (3.1) para um campo de distribuição de temperatura estacionário:

$$T_{,ij} = -\frac{1}{\lambda} b_0 \quad (3.65)$$

e efetuando-se outra integração por partes na terceira integral da eq. (3.64), com a primeira derivada de b_0 contínua, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{B}_i = \frac{G\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} & \left[\int_{\Gamma} G_{ik,kj}^* T n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} G_{ik,k}^* T_j n_j d\Gamma - \right. \\ & \left. \int_{\Gamma} G_{ik}^* \frac{b_0}{\lambda} n_k d\Gamma + \int_{\Omega} G_{ik}^* \frac{b_{0,k}}{\lambda} d\Omega \right] \quad (3.66) \end{aligned}$$

Contanto que as derivadas de ordens mais altas de b_0 existam, pode-se calcular a primitiva de G_{ij}^* e o processo pode ser repetido até encontrar-se uma derivada homogênea de b_0 . Neste caso, o valor final de \bar{B}_i é obtido através da soma de uma série de integrais de contorno somente. Se as derivadas de b_0 constituem uma série infinita, o processo de convergência deve ser estudado.

Para o caso bidimensional, considerando-se $b_{0,k} = 0$ (intensidade das fontes internas de calor constante) e fazendo-se as derivadas devidas do tensor G_{ij}^* , a eq. (3.66) é dada por:

$$\bar{B}_i = \int_{\Gamma} \frac{(1+\nu)\alpha}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \left[\left(\ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right) n_i - r_j r_{,k} n_k \right] T - \left[r r_j \left(\ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2} \right) \right] T_{,k} n_k - \left(\frac{r^2}{2} \ln \frac{1}{r} n_i \right) T_{,kk} \right\} d\Gamma \quad (3.67)$$

Diferenciando-se a eq. (3.67) e aplicando-se a lei constitutiva do material, obtém-se a influência para as tensões em pontos internos da forma seguinte:

$$\bar{S}_{ij} = \int_{\Gamma} \frac{\alpha G(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} \left\{ \left[n_m r_{,m} \left(\frac{\delta_{ij}}{(1-2\nu)} - 2r_j r_{,j} \right) + n_i r_{,j} + n_j r_{,i} \right] \frac{T}{r} - \left[r_j r_{,j} + \frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} \left(\frac{(1+2\nu)}{2} - \ln \frac{1}{r} \right) \right] T_{,k} n_k - \left[\frac{r}{4} \left(2 \ln \frac{1}{r} - 1 \right) \left(\frac{2\nu}{(1-2\nu)} n_m r_{,m} \delta_{ij} + n_i r_{,j} + n_j r_{,i} \right) \right] T_{,kk} \right\} d\Gamma \quad (3.68)$$

No caso de considerações para carregamento térmico linear tem-se $T_{,jj} = 0$, então utilizam-se as equações acima anulando-se os termos devido à $T_{,jj}$. De forma semelhante faz-se para carregamento térmico constante, sendo neste caso $T_j = 0$.

3.2.2.2 - Método da Múltipla Reciprocidade

O MMR é uma técnica capaz de transformar integrais de domínio em integrais de contorno equivalentes, cujo conceito está relacionado a uma aplicação repetida do teorema da reciprocidade, utilizando-se uma seqüência de soluções fundamentais de alta ordem, em contrapartida com a diminuição da ordem da função da força de domínio, até obter convergência no processo.

O aumento da ordem da solução fundamental e redução da ordem da força de domínio são representados conforme as expressões de recorrência abaixo:

$$\nabla^2 u_{ij}^{*(L+1)} = u_{ij}^{*(L)} \quad (3.69)$$

para solução fundamental e

$$b_j^{(L+1)} = \nabla^2 b_j^{(L)} \quad (3.70)$$

para força de domínio, sendo (L) a ordem destas equações.

No caso de problemas da elasticidade bidimensional a integral de domínio referente às forças de volume será:

$$B_i^{(0)} = \int_{\Omega} u_{ij}^{*(0)} b_j^{(0)} d\Omega \quad (3.71)$$

para deslocamentos e

$$S_{ij}^{(0)} = \int_{\Omega} u_{ijk}^{*(0)} b_k^{(0)} d\Omega \quad (3.72)$$

para tensões nos pontos internos, sendo que o índice (0) corresponde à ordem inicial destas equações.

A solução fundamental de ordem inicial $u_{ij}^{*(0)}$ equivale à eq. (3.5) e $u_{ijk}^{*(0)}$ corresponde à eq. (2.72), as quais serão necessárias para o desenvolvimento do MMR, para se obter a partir delas as soluções fundamentais de ordem mais alta.

Com o uso da primitiva da solução fundamental definida na eq. (3.69) e a derivada da componente da força de volume conforme eq. (3.70), pode-se obter uma lei de recorrência para o processo, a qual explica devidamente como funciona o MMR para determinado problema em análise, conforme fig. (3.4).

Desde que a força de volume $b_j^{(0)}$ e a solução fundamental $u_{ij}^{*(0)}$ sejam conhecidas, a integral de domínio $B_i^{(0)}$ pode ser transformada em uma série de integrais de contorno equivalentes, da forma seguinte:

$$B_i^{(0)} = \sum_{L=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_{ij}^{*(L+1)}}{\partial n} b_j^{(L)} - u_{ij}^{*(L+1)} \frac{\partial b_j^{(L)}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.73)$$

Portanto o MMR pode ser utilizado para função de domínio de qualquer ordem, desde que a convergência seja possível.

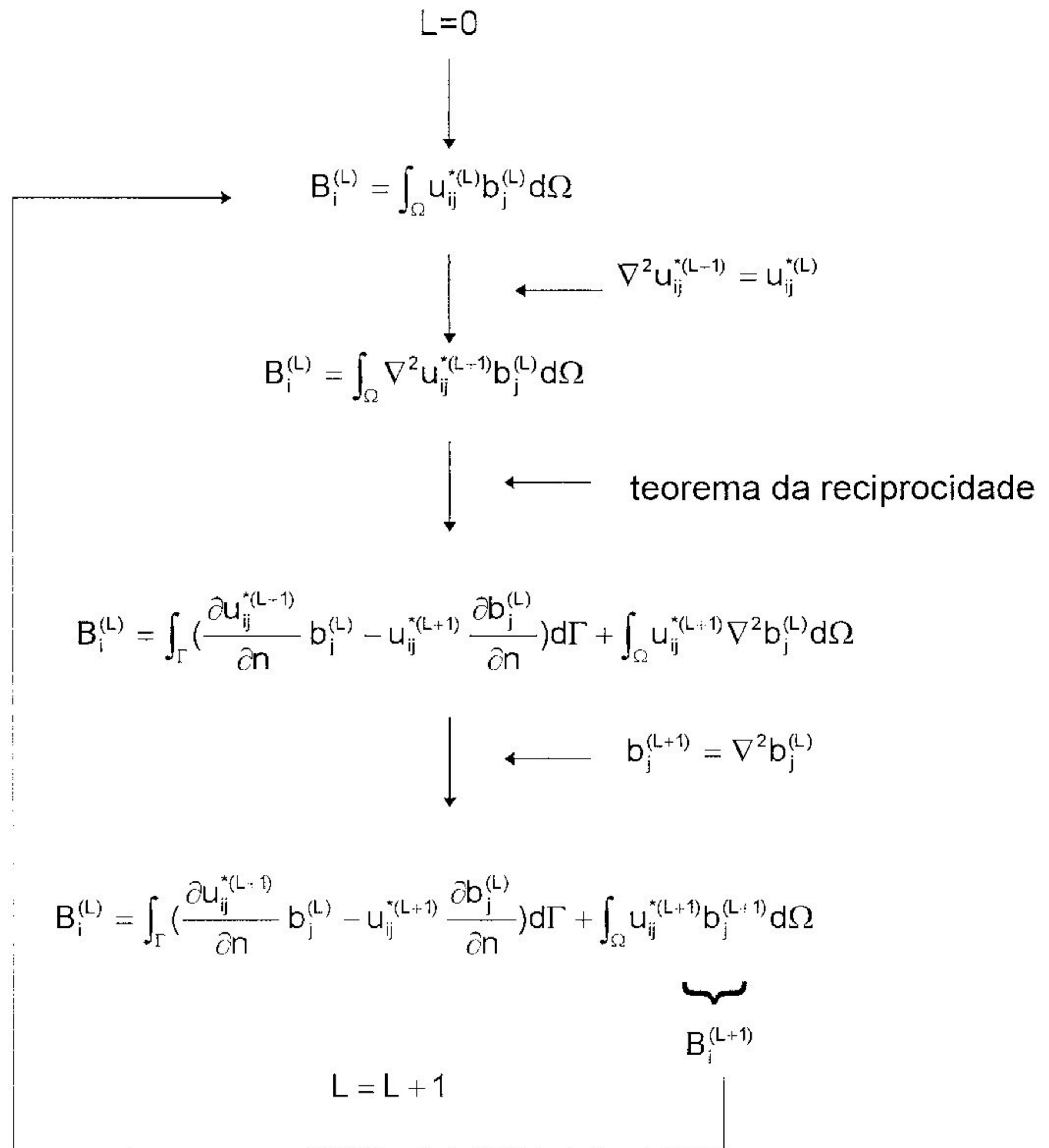


Figura 3.6 - Transformação da integral de domínio para o contorno através do MMR

Para tensões em pontos internos o processo iterativo é semelhante, obtendo-se:

$$S_{ij}^{(0)} = \sum_{L=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_{ijk}^{*(L+1)}}{\partial n} b_k^{(L)} - u_{ijk}^{*(L+1)} \frac{\partial b_k^{(L)}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.74)$$

A primeira primitiva $u_{ij}^{*(1)}$ será:

$$u_{ij}^{*(1)} = \frac{r^2}{32\pi(1-\nu)G} \left\{ \left[(3-4\nu) \left(\ln \frac{1}{r} + 1 \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{r} \right] \delta_{ij} + \left(1 - \ln \frac{1}{r} \right) r_i r_j \right\} \quad (3.75)$$

A diferenciação da eq. (3.75) em relação à normal fornece:

$$\frac{\partial u_{ij}^{*(1)}}{\partial n} = \frac{r n_k}{32\pi(1-\nu)G} \left\{ \left[(3-4\nu) \left(2 \ln \frac{1}{r} + 1 \right) - \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{r} \right] \delta_{ij} r_{,k} + (r_j \delta_{ik} + r_i \delta_{jk}) \left(1 - \ln \frac{1}{r} \right) + r_i r_j r_{,k} \right\} \quad (3.76)$$

A primitiva $u_{ijk}^{*(1)}$ é dada por:

$$u_{ijk}^{*(1)} = \frac{r}{16\pi(1-\nu)} \left\{ 2(1-2\nu) (r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ki} + r_k \delta_{ij}) \ln(r) + (r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ki} + r_k \delta_{ij}) \ln(r) - r_i r_j r_{,k} \right\} \quad (3.77)$$

Com a diferenciação da eq. (3.77) em relação à normal, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ijk}^{*(1)}}{\partial n} = \frac{n_l}{16\pi(1-\nu)} \left\{ 2(1-2\nu) \left[(\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{jl} \delta_{ki} - \delta_{kl} \delta_{ij}) \ln(r) + (r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ki} - r_k \delta_{ij}) r_{,l} \right] + \right. \\ \left[(\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{jl} \delta_{ki} + \delta_{kl} \delta_{ij}) \ln(r) + (r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ki} + r_k \delta_{ij}) r_{,l} \right] - \\ \left. \left[(r_i r_{,k} \delta_{il} + r_j r_{,k} \delta_{jl} + r_j r_{,j} \delta_{kl}) - 2 r_i r_j r_{,k} \right] \right\} \quad (3.78) \end{aligned}$$

Considerações para força gravitacional

A componente inicial da força de volume para força gravitacional é dada pela eq. (3.29). Considerando-se a atração gravitacional constante, então:

$$\frac{\partial b_j^{(0)}}{\partial n} = 0 \quad (3.79)$$

e conseqüentemente:

$$b_j^{(1)} = 0 \quad (3.80)$$

Neste caso, a integral de domínio da eq. (3.73) é reduzida para:

$$B_i^{(0)} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^{*(1)}}{\partial n} b_j^{(0)} d\Gamma \quad (3.81)$$

Para tensões em pontos internos, fazendo-se as mesmas substituições na eq. (3.74), a integral correspondente será:

$$S_{ij}^{(0)} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ijk}^{*(1)}}{\partial n} b_j^{(0)} d\Gamma \quad (3.82)$$

Considerações para carregamento térmico

No caso de carregamento térmico, a integral de domínio inicial será dada pela eq. (3.4) e utiliza-se a lei de recorrência referente à solução fundamental, eq. (3.69), e:

$$T^{(L+1)} = \nabla^2 T^{(L)} \quad (3.83)$$

referente à temperatura.

Com a aplicação do MMR, a integral de domínio da expressão (3.4) é transformada em uma série de integrais de contorno a saber:

$$\bar{B}_i^{(0)} = \frac{2G\alpha(1+\nu)}{(1-2\nu)} \sum_{L=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_{ij}^{*(L+1)}}{\partial n} T^{(L)} - u_{ij}^{*(L+1)} \frac{\partial T^{(L)}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.84)$$

A solução fundamental de ordem mais alta pode ser obtida resolvendo-se a eq. (3.69), cujas soluções podem ser encontradas nos trabalhos de NOWAK e NEVES (1994). As duas primeiras primitivas e suas respectivas derivadas normais são apresentadas abaixo:

$$u_{ij}^{*(1)} = \frac{2\nu-1}{8\pi(1-\nu)G} r_j r \ln r \quad (3.85)$$

$$u_{ij}^{*(2)} = \frac{2\nu-1}{64\pi(1-\nu)G} r_j r^3 \left(\ln r - \frac{3}{4} \right) \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial u_{ij}^{*(1)}}{\partial n} = \frac{2\nu-1}{8\pi(1-\nu)G} (\delta_{ik} \ln r + r_j r_{,k}) n_k \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial u_{ij}^{*(2)}}{\partial n} = \frac{2\nu-1}{64\pi(1-\nu)G} \left[(\delta_{ik} + 2r_j r_{,k}) \left(\ln r - \frac{3}{4} \right) + r_j r_{,k} \right] n_k r^2 \quad (3.88)$$

A componente de tensão para pontos internos correspondente à integral de domínio devido à variação térmica será:

$$\bar{S}_{ij}^{(0)} = - \sum_{L=0}^{\infty} \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^{*(L)} + 2G \varepsilon_{ij}^{*(L)} \right) \quad (3.89)$$

onde

$$\varepsilon_{ij}^{*(L)} = \frac{1}{2} (\bar{B}_{ij}^{(L)} + \bar{B}_{ji}^{(L)}) \quad (3.90)$$

a. Carregamento térmico linear

No caso de carregamento térmico linear, tem-se por exemplo:

$$T^{(0)} = f(x_k) \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} = T_{,k}^{(0)} n_k \quad (3.92)$$

$$T^{(1)} = 0 \quad (3.93)$$

A equação (3.84) torna-se portanto em:

$$\bar{B}_i^{(0)} = \frac{2G\alpha(1+\nu)}{(1-2\nu)} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_{ij}^{*(1)}}{\partial n} T^{(0)} - u_{ij}^{*(1)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (3.94)$$

onde $u_{ij}^{*(1)}$ e $\partial u_{ij}^{*(1)} / \partial n$ são dados respectivamente pelas eq. (3.85) e eq. (3.87).

Para tensões em pontos internos, obtém-se:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ij}^{(0)} = \frac{G\alpha(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} \left\{ \left[n_k r_k \left(\frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} - 2r_j r_j \right) + n_i r_j + n_j r_i \right] \frac{T^{(0)}}{r} - \right. \\ \left. \left[\frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} (\ln r + \nu) + r_j r_j \right] T_{,k}^{(0)} n_k \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.95)$$

b. Carregamento térmico quadrático

No caso de variação quadrática de temperatura, seja:

$$T^{(0)} = f(x_k^2) \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} = f_1(x_k) n_k \quad (3.97)$$

$$T^{(1)} = \nabla^2 T^{(0)} = c^{te} \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} = 0 \quad (3.99)$$

Então a equação (3.84) se reduz a:

$$\bar{B}_i^{(0)} = \frac{2G\alpha(1+\nu)}{(1-2\nu)} \left[\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_{ijj}^{*(1)}}{\partial n} T^{(0)} - u_{ijj}^{*(1)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ijj}^{*(2)}}{\partial n} T^{(1)} d\Gamma \right] \quad (3.100)$$

onde $u_{ijj}^{*(1)}$, $\partial u_{ijj}^{*(1)} / \partial n$ e $\partial u_{ijj}^{*(2)} / \partial n$ são dados pela eq. (3.85), eq. (3.87) e eq. (3.88), respectivamente.

A influência sobre as tensões em pontos internos devida às integrais de domínio é dada pelo somatório de $S_{ij}^{(0)}$ na eq. (3.95) mais os termos referentes à $S_{ij}^{(1)}$, que são obtidos pela diferenciação do segundo termo da eq. (3.84) e substituídos na eq. (3.89) e eq. (3.90), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{ij}^{(0)} = & \frac{G\alpha(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} \left\{ \left[n_k r_k \left(\frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} - 2r_i r_j \right) + n_i r_j + n_j r_i \right] \frac{T^{(0)}}{r} - \right. \\ & \left. \left[\frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} (\ln r + \nu) + r_i r_j \right] T_{,k}^{(0)} n_k \right\} d\Gamma + \frac{G\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_{\Gamma} \left[\frac{4\nu\delta_{ij}}{1-2\nu} r_k n_k \ln r + \right. \\ & \left. (n_i r_j + n_j r_i + \delta_{ij} n_k r_k) (\ln r - 1/4) + r_i r_j r_k n_k \right] r T^{(1)} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.101)$$

As expressões mostradas para os procedimentos de cálculo da integral de domínio são válidas para o estado plano de deformação. Para o caso de estado plano de tensão, desde que a temperatura não varie ao longo da espessura, estas equações podem ser usadas, trocando-se ν por $\bar{\nu}$, α por $\bar{\alpha}$, conforme eq. (2.30).

As representações numéricas das equações apresentadas para o uso do MTG e MMR são efetuadas pela substituição das integrais por somatórios variando conforme o número adotado de pontos de integração de Gauss, de forma semelhante ao procedimento de discretização do domínio em células. Entretanto, o jacobiano da transformação é a metade do comprimento do elemento de contorno considerado durante a análise.

A singularidade das integrais do MTG e MMR será tratada pelo método de transformação do terceiro grau proposto por TELLES (1987) que será descrito a seguir.

Cálculo de integrais com singularidade logarítmica utilizando-se transformação de coordenadas do terceiro grau

As integrais com singularidades logarítmicas podem ser resolvidas utilizando-se integração numérica pela quadratura de Gauss, porém, fazendo-se, antes de integrar, uma transformação de coordenadas. Esta transformação origina um jacobiano que tem valor zero no ponto onde ocorre a singularidade, anulando-a.

Sendo $f(\eta)$ a função a ser integrada no intervalo $[-1,1]$, contendo o ponto singular $\bar{\eta}$, tem-se então:

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (3.102)$$

A mudança de variável, neste caso, é da forma:

$$\eta(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad (3.103)$$

$$\frac{d\eta(\gamma)}{d\gamma} = 3a\gamma^2 + 2b\gamma + c$$

atendendo às seguintes condições:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \Big|_{\bar{\eta}} &= 0 \\ \frac{d\eta}{d\gamma} \Big|_{\bar{\eta}} &= 0 \\ \eta(1) &= 1 \\ \eta(-1) &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (3.104)$$

Para este caso, obtém-se a solução:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{Q} \\ b &= -\frac{3\bar{\gamma}}{Q} \\ c &= \frac{3\bar{\gamma}^2}{Q} \\ d &= -b \\ Q &= 1 + 3\bar{\gamma}^2 \end{aligned} \quad (3.105)$$

sendo $\bar{\gamma}$ o valor de γ para o qual $\eta(\bar{\gamma}) = \bar{\eta}$, calculado por:

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{(\bar{\eta}\eta^* + |\eta^*|)} + \sqrt[3]{(\bar{\eta}\eta^* - |\eta^*|)} + \bar{\eta} \quad (3.106)$$

onde:

$$\eta^* = \bar{\eta}^2 - 1 \quad (3.107)$$

A integral (3.102), após a mudança de coordenadas, tem a seguinte expressão:

$$I = \int_{-1}^1 f(a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d)(3a\gamma^2 + 2b\gamma + c) d\gamma \quad (3.108)$$

a qual, substituindo-se os valores acima encontrados, pode ser escrita na forma:

$$I = \int_{-1}^1 f \left\{ \frac{1}{1+3\bar{\gamma}^2} \left[(\gamma - \bar{\gamma})^3 + \bar{\gamma}(\bar{\gamma}^2 + 3) \right] \right\} \frac{3(\gamma - \bar{\gamma})^2}{1+3\bar{\gamma}^2} d\gamma \quad (3.109)$$

CAPÍTULO 4

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

O programa objeto desta dissertação foi implementado em linguagem Fortran para resolver problemas que envolvem considerações de forças no domínio.

Adotou-se como plataforma de trabalho um programa para análise de problemas de elasticidade bidimensional apresentado por BREBBIA *et alii* (1984) e sobre o qual foram feitas várias implementações para a avaliação de integrais de domínio.

A seguir são apresentados os fundamentos da integração numérica para células triangulares, que é uma das alternativas estudadas para o cálculo das integrais de domínio.

4.1 - Integração numérica para células triangulares

O cálculo analítico de determinadas integrais nem sempre é possível, dependendo da complexidade do problema envolvido, sendo em geral mais conveniente a utilização de métodos numéricos para a sua avaliação.

Com a utilização do procedimento de discretização do domínio em células para considerações de forças de domínio foi desenvolvido um estudo para a escolha de um esquema de integração numérica em domínios triangulares, dentre os disponíveis na literatura. Este estudo comparativo avaliou os esquemas de integração propostos por Hammer *et alii*¹ *apud* BREBBIA *et alii* (1984), COWPER (1972) e REDDY e SHIPPY (1981). Também foi avaliado um esquema de integração semi-analítico, visando a solução de integrais com pontos singulares nos vértices da célula sob integração.

Os resultados obtidos com o esquema de integração proposto por Hammer são exatamente os mesmos obtidos com o esquema proposto por Cowper.

Para a avaliação da eficiência dos esquemas de integração citados, foram calculadas numericamente as seguintes integrais, cujos respectivos resultados analíticos também são apresentados a seguir:

¹ HAMMER, P. C.; MARLOWE, O. J.; STROUD, A. H. Numerical Integration Over Simplexes and Cones. *Math. Tables Other Aids Comput.* v.10, p.130-139, 1956

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (x+y)^{-1/2} dx dy = 0.6666666667 \\
I_2 &= \int_0^1 \int_0^{1-y} (x+y)^{1/2} dx dy = 0.4000000000 \\
I_3 &= \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)^{-1/2} dx dy = 0.881373587 \\
I_4 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^y \text{sen}(x+y) dx dy = 1.0000000000 \\
I_5 &= \int_0^1 \int_0^y \exp |x+y-1| dx dy = 0.71828183
\end{aligned} \tag{4.1}$$

A aproximação numérica destas integrais é feita da seguinte forma:

$$I = \int_{\Omega} F(x,y) d\Omega = \int_0^1 \int_0^{1-\eta_2} f(\eta_1, \eta_2, \eta_3) |J| d\eta_1 d\eta_2 \cong \sum_{k=1}^n f(\eta_1, \eta_2, \eta_3)_k |J| w_k \tag{4.2}$$

sendo $|J|$ o determinante do jacobiano da transformação de coordenadas do sistema cartesiano (x,y) para o sistema de coordenadas de área (η_1, η_2, η_3) , igual a duas vezes a área do triângulo, e w_k o peso.

As coordenadas adimensionais de área, η_i , definidas sobre o domínio triangular estão relacionadas ao sistema cartesiano (x,y) pelas seguintes relações:

$$\begin{aligned}
x &= \eta_1 x^1 + \eta_2 x^2 + \eta_3 x^3 \\
y &= \eta_1 y^1 + \eta_2 y^2 + \eta_3 y^3 \\
\eta_3 &= 1 - \eta_1 - \eta_2
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde (x^1, y^1) , (x^2, y^2) e (x^3, y^3) são as coordenadas dos vértices da célula triangular.

Os resultados obtidos utilizando-se os esquemas de integração numérica em questão são apresentados nas tabelas (4.1) a (4.3).

Deve-se notar que as integrais I_1 e I_3 são singulares. Isto significa que o resultado de uma integração numérica que não leve em consideração a singularidade não deve apresentar bons resultados, mas os obtidos com a utilização do esquema de Reddy e Shippy são melhores que os obtidos pelos outros esquemas testados. A utilização de um esquema de integração semi-analítico nas células com pontos de singularidade sobre os vértices proporciona resultados mais precisos.

Assim, para as integrais singulares I_1 e I_3 resolvidas por integração semi-analítica, isto é, efetuando-se uma mudança para coordenadas cilíndricas (r, θ) e integrando-se analiticamente em r e numericamente em θ , são obtidos resultados melhores, como indicado abaixo. Retirada a singularidade através do uso do limite quando o raio r tende a zero, as integrais I_1 e I_3 tornam-se em:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3(1 + \sin 2\theta)} d\theta \\ I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \end{aligned} \tag{4.4}$$

função apenas da variável θ .

A resolução numérica da integral I_1 , por exemplo, pode então ser feita da seguinte forma:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\theta) d\theta = \int_{-1}^1 f(\eta) |J| d\eta = \sum_{k=1}^n f(\eta_k) |J| w_k \quad (4.5)$$

onde a coordenada adimensional η está relacionada com o ângulo θ na forma:

$$\theta = \frac{\pi}{4}(\eta+1) \quad (4.6)$$

e o determinante do jacobiano $|J|$ da transformação de coordenadas é dado por:

$$|J| = \frac{\pi}{4} \quad (4.7)$$

Como os níveis de precisão para integrais regulares são praticamente os mesmos com os dois métodos analisados, optou-se neste trabalho pela utilização dos pontos de integração de Hammer. Para as integrais singulares, utilizou-se na integração semi-analítica os pontos de integração de Gauss.

Tabela 4.1 - Resultados de integração numérica utilizando 7 pontos de Reddy e Shippy

x_1	x_2	x_3	w	Integrais	Solução numérica
0,070558	0,295669	0,633773	0,112329		
0,889074	0,055463	0,055463	0,020987	l_1	0,664717
0,055463	0,055463	0,889074	0,020987	l_2	0,400018
0,333333	0,333333	0,333333	0,100053	l_3	0,876723
0,295669	0,633773	0,070558	0,112329	l_4	0,999997
0,055463	0,889074	0,055463	0,020987	l_5	0,713137
0,633773	0,070558	0,295669	0,112329		

Tabela 4.2 - Resultados da integração numérica através dos esquemas de Hammer ou Cowper com 7 pontos

x_1	x_2	x_3	w	Integrais	Solução numérica
0,333333	0,333333	0,333333	0,225000		
0,797427	0,102870	0,102870	0,125939	l_1	0,660686
0,102870	0,797427	0,102870	0,125939	l_2	0,400150
0,102870	0,102870	0,797427	0,125939	l_3	0,831568
0,059716	0,470142	0,470142	0,132394	l_4	1,000140
0,470142	0,059716	0,470142	0,132394	l_5	0,693879
0,470142	0,470142	0,059716	0,132394		

Tabela 4.3 - Resultados da integração de funções singulares através do esquema de Gauss com 10 pontos

$\pm x_i$	w_i	Integrais	Solução numérica
0.148874	0.295524		
0.433395	0.269267	l_1	0.666667
0.679410	0.219086		
0.865063	0.149451	l_3	0.881374
0.973907	0.066671		

4.2 - Estrutura do programa

O programa tem capacidade para resolver problemas de estado plano de deformação, ou de tensão, prevendo-se material isotrópico, calcular forças de superfície, deslocamentos e tensões. A descontinuidade das forças de superfície é considerada, utilizando-se o conceito de nó duplo. O programa também resolve problemas submetidos à força gravitacional constante e carregamento térmico generalizado, constante, linear e parabólico.

O programa principal denominado MEC chama as seguintes subrotinas:

1. INPUT, para leitura dos dados gerais;
2. INPUTB, para entrada dos dados que dizem respeito às forças de volume;
3. INTPOINT, que armazena as tabelas de integração de Gauss e Hammer, que são utilizados na integração numérica;
4. CONST, para cálculo das constantes de uso geral;
5. BFORCES, para introduzir considerações sobre forças no domínio;
6. MATRX, para cálculo da matriz \mathbf{A} e do vetor \mathbf{F} , eq. (2.90), chamando a subrotina FUNC, que calcula as integrais numéricas requeridas para o sistema de equações;
7. SLNPD, que resolve o sistema de equações utilizando o método de eliminação de Gauss/Jordan;
8. OUTPT, para impressão dos resultados obtidos, incluindo também cálculo das tensões no contorno, dos deslocamentos e tensões em pontos internos.

A subrotina BFORCES chama as seguintes subrotinas:

1. CELL, para possibilitar a utilização de discretização do domínio em células;
2. GTENSOR, para possibilitar a utilização do Método do Tensor de Galerkin (MTG);
3. MRM, para possibilitar a utilização do Método da Múltipla Reciprocidade (MMR).

Em seqüência, a subrotina CELL chama as seguintes subrotinas:

1. SEMICELL, para ser utilizada quando se tratar do ponto de singularidade da célula;
2. NUMCELL, para ser utilizada quando o ponto fonte não coincide com o nó da célula.

A subrotina GTENSOR chama as seguintes subrotinas:

1. GRAV, para ser utilizada quando se fizer considerações de força gravitacional pelo MTG;
2. TGRAV, para ser utilizada quando for considerar as tensões devido à força gravitacional pelo MTG;
3. TEMP, para ser utilizada quando se fizer considerações de carregamento térmico pelo MTG.
4. TTEMP, para ser utilizada quando for considerar as tensões devido ao carregamento térmico pelo MTG.

A subrotina MRM chama as seguintes subrotinas:

1. GRAVM; para ser utilizada quando se fizer considerações de força gravitacional pelo MMR;

2. TEMPM; para ser utilizada quando se fizer considerações de carregamento térmico pelo MMR;

Uma subrotina chamada pelas subrotinas ligadas ao GTENSOR e MMR é a subrotina POLI3, para fazer a mudança de coordenadas, utilizando-se a transformação do terceiro grau proposta por TELLES (1987), apenas quando houver singularidade nas considerações da força no domínio pelo MTG e MMR.

A subrotina OUTPT chama as seguintes subrotinas:

1. FENC, que calcula as expressões para tensões nodais do contorno;
2. FUNC;
3. CELL;
4. GTENSOR;
5. MMR.

As quatro últimas subrotinas são chamadas para o cálculo dos deslocamentos e tensões em pontos internos.

Um diagrama de blocos esquematizando o sistema de chamadas do programa é apresentado na fig. (4.1).

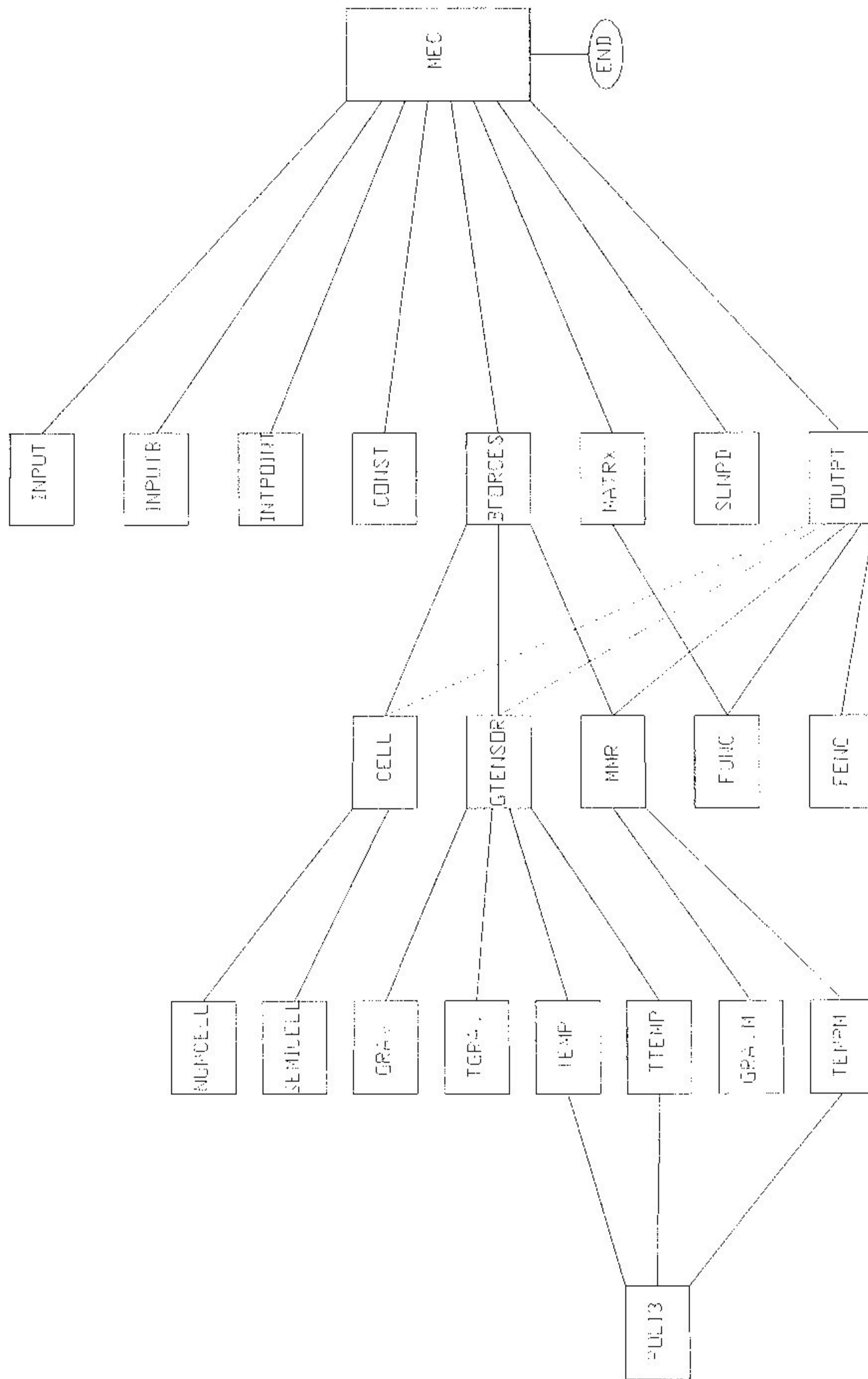


Figura 4.1 - diagrama de blocos

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS

5.1 - Introdução

São apresentados a seguir exemplos de problemas estáticos de elasticidade linear bidimensional analisados através do Método dos Elementos de Contorno (MEC), tratando-se de estado plano de tensão ou de deformação, através do programa que foi implementado para utilização em microcomputadores.

Os exemplos foram analisados avaliando-se as integrais de domínio através da discretização do domínio em células, do Método do Tensor de Galerkin (MTG) e do Método da Múltipla Reciprocidade (MMR). Através dos resultados obtidos com tais procedimentos são feitas comparações visando obter informações sobre a eficiência de cada um.

Foram utilizados elementos lineares para a discretização do contorno e células triangulares, com variação linear do efeito a ser considerado sobre a mesma, para a discretização do domínio. A consideração de descontinuidade das forças de superfície quando fornecidas como condições de contorno, bem como no caso de pontos angulosos, foi realizada com a utilização de nós duplos.

Além da comparação entre os procedimentos adotados para a análise via MEC, as soluções encontradas foram comparadas com resultados obtidos através do Método dos Elementos Finitos (MEF) através da utilização do programa ANSYS, e/ou com soluções analíticas quando disponíveis. Utiliza-se no MEF uma malha uniforme de elementos do tipo quadrilátero, chamado PLANE42, específico para análise de problemas de estado plano de tensão, com nós de contorno coincidentes com a discretização usada na análise pelo MEC.

5.2 - Exemplo 1-a

Chapa submetida à tração e ao peso próprio

Considera-se uma chapa retangular apoiada no bordo superior, submetida a um carregamento uniformemente distribuído de valor 12 kN/m^2 na borda inferior e ao peso próprio.

A análise foi feita para o estado plano de tensão. As propriedades físicas do material são as seguintes:

- módulo de elasticidade $E = 10^5 \text{ kN/m}^2$;

- coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$;
 - massa específica $\rho = 10,0 \text{ kg/m}^3$;
- com:
- aceleração da gravidade $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

A geometria e as condições de contorno estão definidas na fig. (5.1). As discretizações utilizadas no MEC e no MEF/ANSYS estão ilustradas na fig. (5.2).

Para observar a convergência dos deslocamentos, foram feitas três discretizações utilizando 10, 20 e 40 elementos de contorno, com 12, 48 e 192 células internas, respectivamente, conforme fig. (5.2).

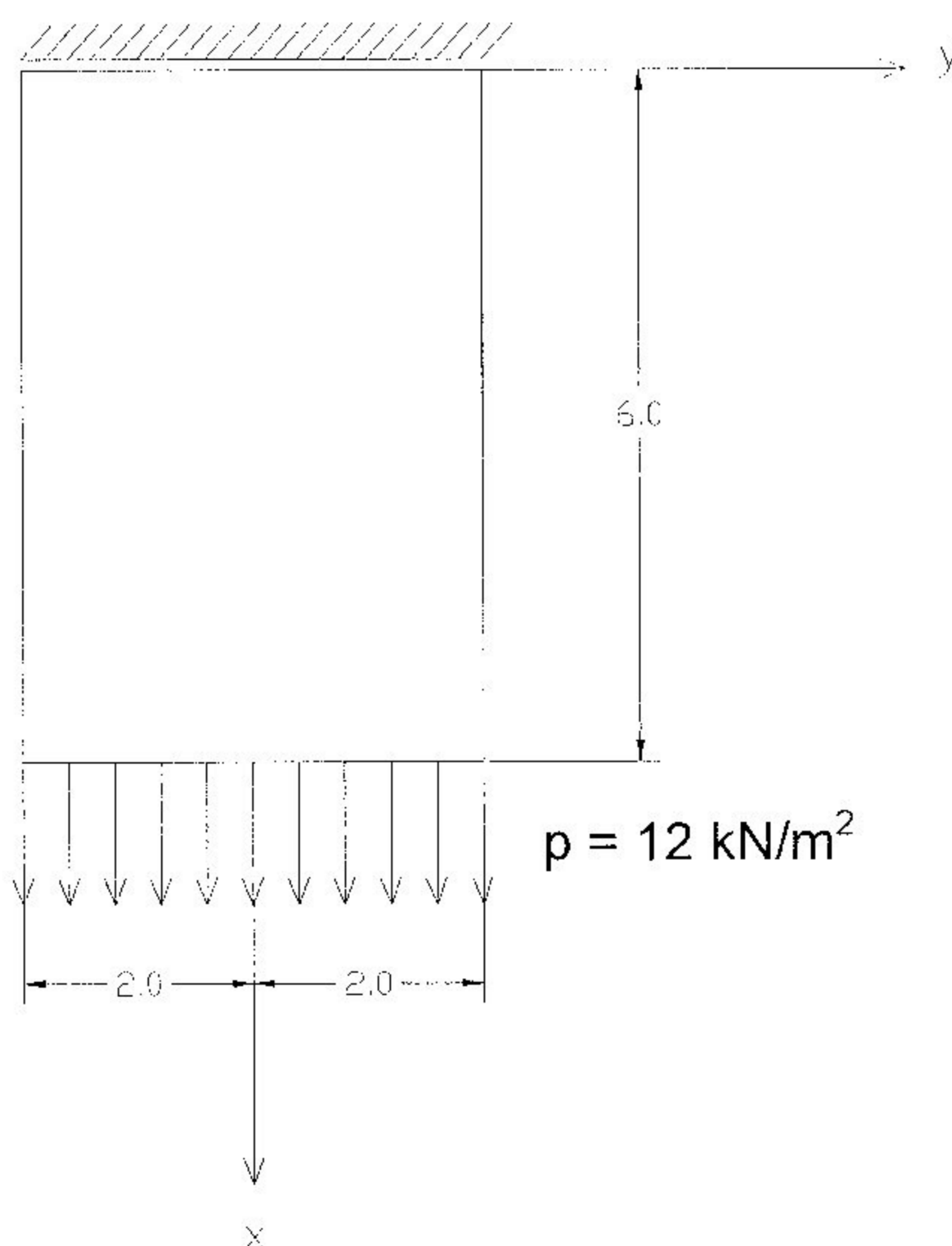
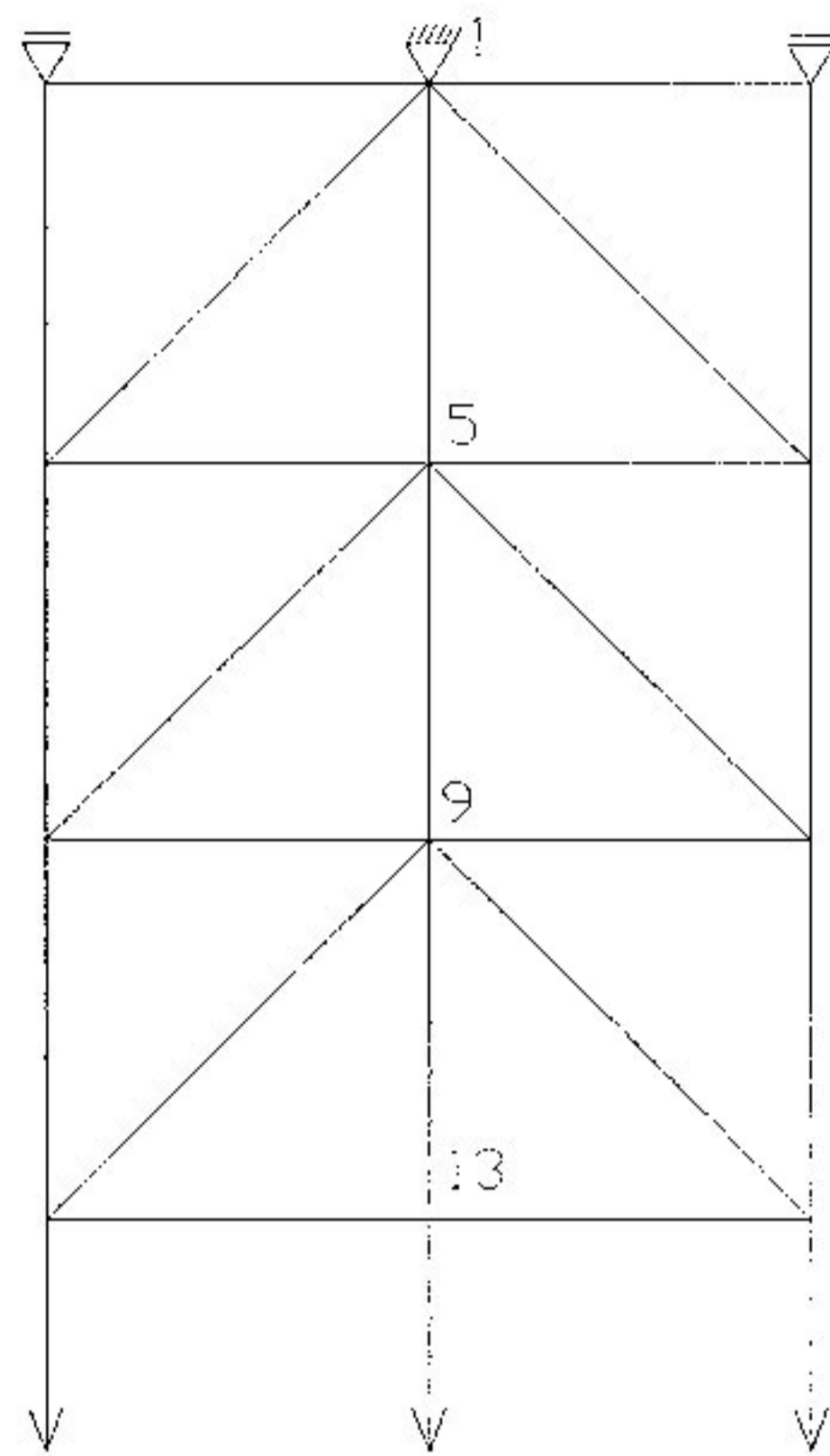
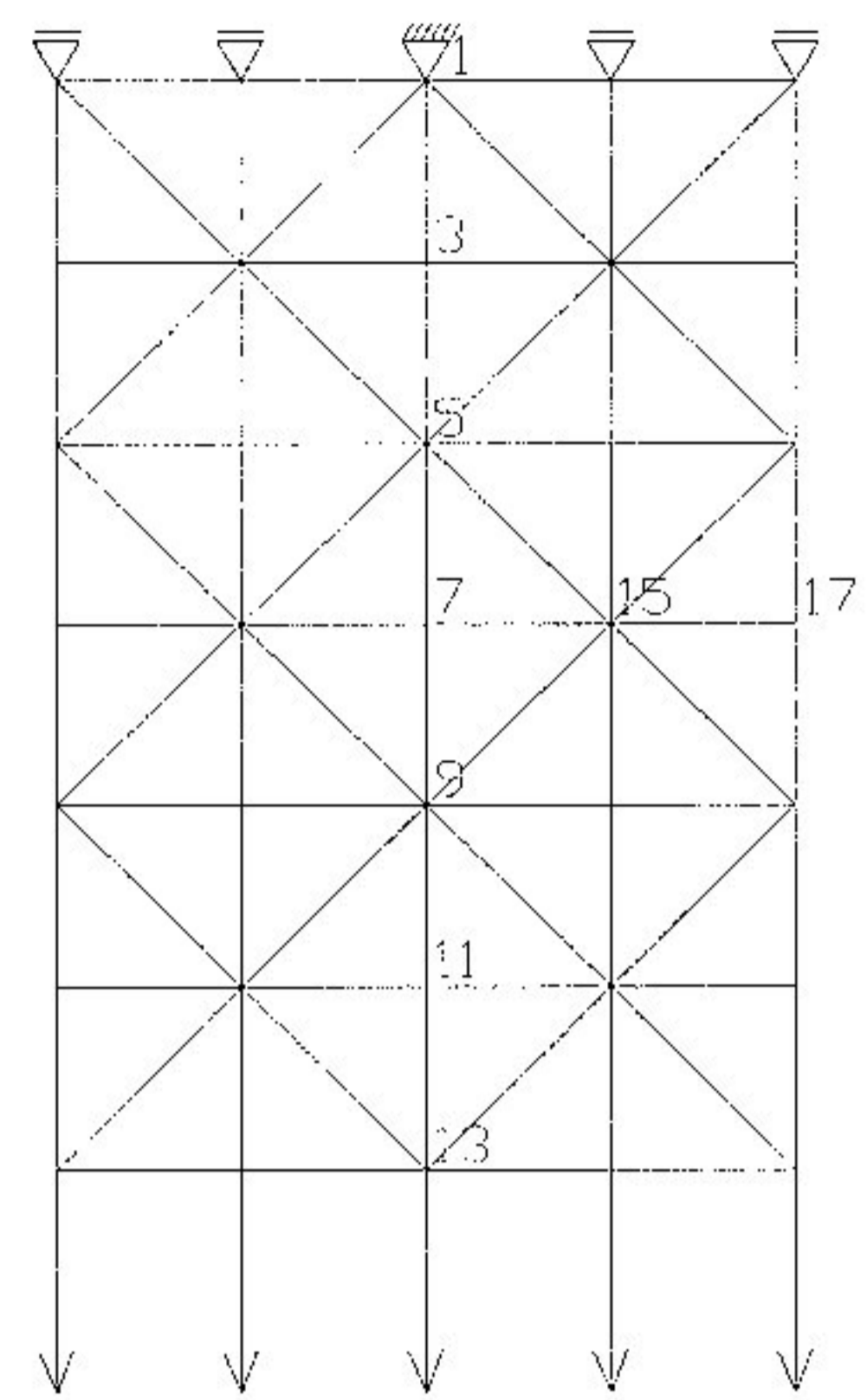


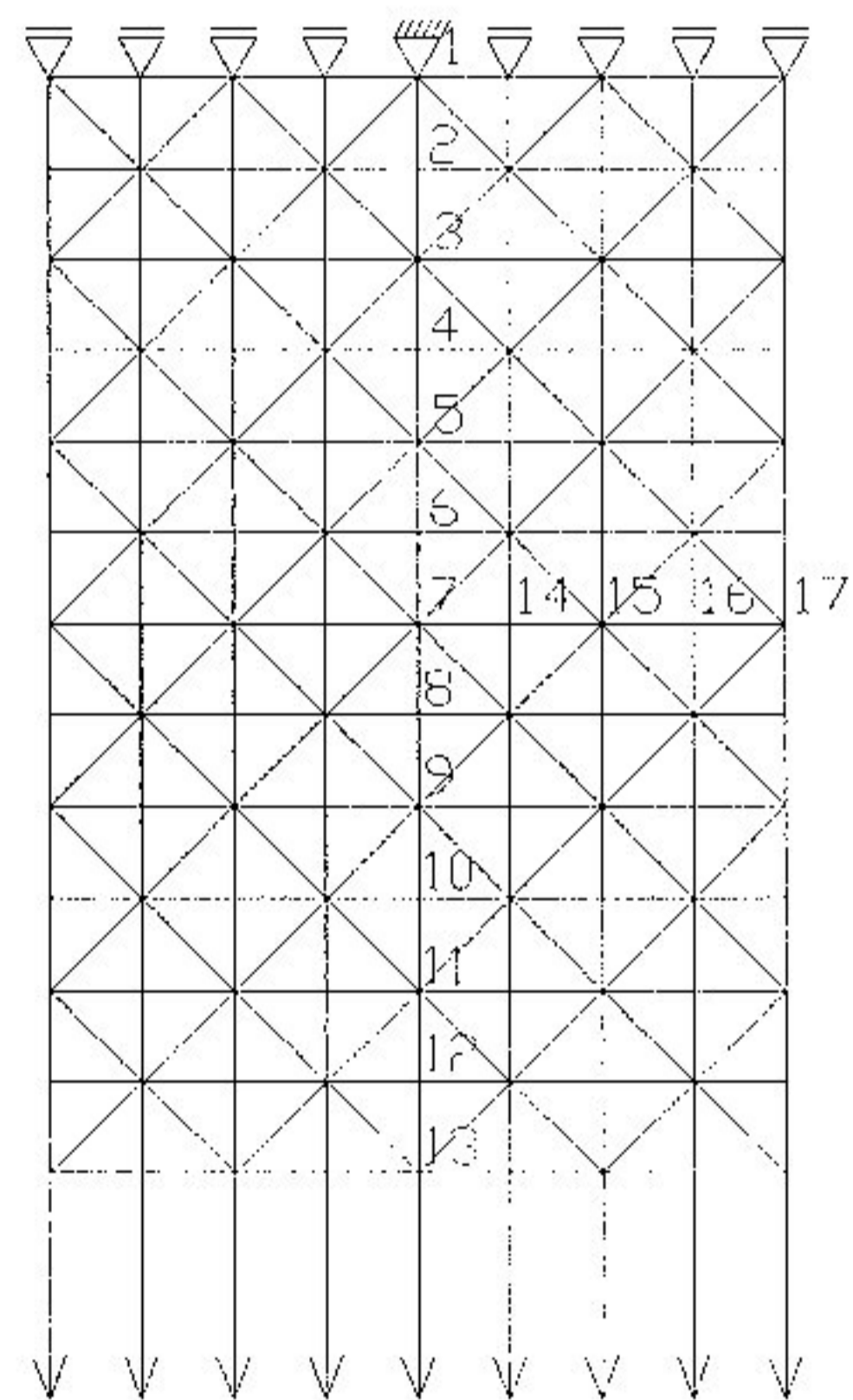
Figura 5.1 - Exemplo 1 - geometria e condições de contorno



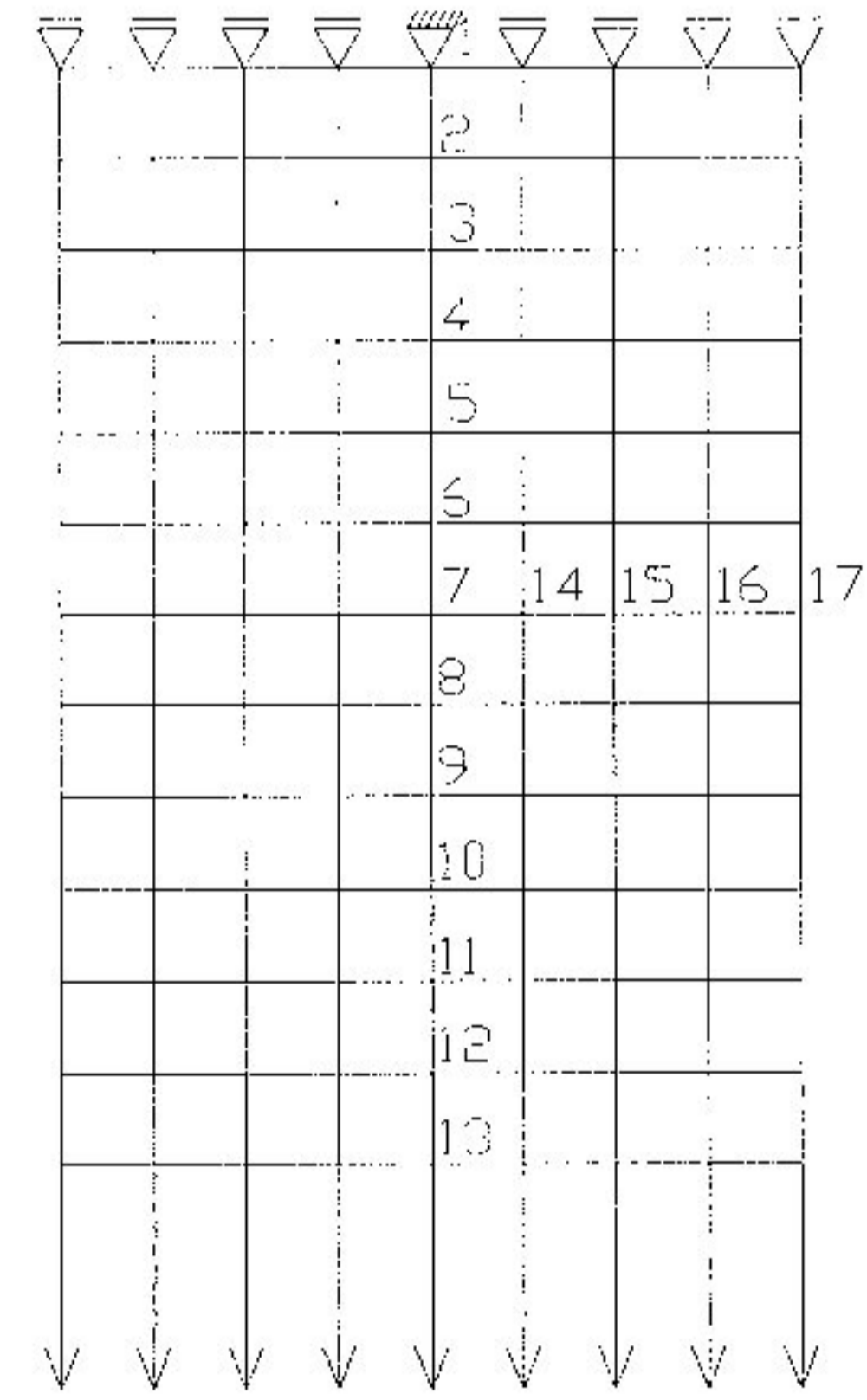
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 5.2 - Exemplo 1 - discretizações - (a) MEC - 10 elementos e 12 células; (b) MEC - 20 elementos e 48 células; (c) MEC - 40 elementos e 192 células; (d) MEF/ANSYS - 96 elementos

Os deslocamentos u_x ao longo do eixo x ($y=0$) são mostrados na tab. (5.1) e os deslocamentos u_y ao longo do eixo $x=3,0$ (paralelo ao eixo y) estão apresentados na tab. (5.2). As expressões analíticas (UGURAL e FENSTER¹ *apud* SANTIAGO (1987)) correspondentes são mostradas a seguir:

$$u_x = \frac{\rho g}{2E} (2x\ell - x^2 - \nu y^2) + \frac{\rho x}{E} \quad (5.1)$$

$$u_y = -\frac{\rho g \nu}{E} (\ell - x)y - \frac{\rho \nu}{E} y \quad (5.2)$$

Os resultados obtidos através da discretização do domínio em células, MTG e MMR apresentaram valores iguais para considerações de força gravitacional, com a mesma discretização, e próximos aos obtidos através do ANSYS.

Os erros percentuais médios dos resultados obtidos para deslocamentos u_x em relação à solução analítica foram:

- ANSYS - 96 elementos: 1,34 %;
- MEC - 10 elementos: 1,50 %;
- MEC - 20 elementos: 1,39 %;
- MEC - 40 elementos: 1,34 %;

e a diferença média dos resultados obtidos com o MEC em relação aos resultados obtidos com o ANSYS foi de 0,002 %.

Para deslocamentos u_y , os erros percentuais médios encontrados em relação à solução analítica foram:

¹ UGURAL, A. C.; FENSTER, S. K. *Strength and Applied Elasticity*. American Elsevier Publishing Company, New York, 1975.

- ANSYS - 96 elementos: 1,07 %;
- MEC - 20 elementos: 1,54 %;
- MEC - 40 elementos: 1,12 %;

e a diferença média dos resultados obtidos com o MEC em relação aos resultados obtidos com o ANSYS foi de 0,04 %.

Os resultados deste exemplo são ilustrados pelas fig. (5.3), para deslocamentos u_x e fig. (5.4), para deslocamentos u_y .

Tabela 5.1 - Exemplo 1-a - deslocamentos u_x

u_x pontos	$y = 0$ x	Analítica	MEF/ANSYS 96 elem.	MTG / MMR / Células		
				10 elem./12 cél.	20 elem./48 cél.	40 elem./192 cél.
1	0,0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	0,5	0,002878	0,002918			0,002919
3	1,0	0,005510	0,005597		0,005600	0,005597
4	1,5	0,007898	0,008025			0,008024
5	2,0	0,010040	0,010198	0,010207		0,010196
6	2,5	0,011938	0,012115			0,012113
7	3,0	0,013590	0,013779		0,013784	0,013777
8	3,5	0,014998	0,015193			0,015192
9	4,0	0,016160	0,016358	0,016384		0,016358
10	4,5	0,017078	0,017276			0,017277
11	5,0	0,017750	0,017948		0,017960	0,017951
12	5,5	0,018178	0,018376			0,018379
13	6,0	0,018360	0,018559	0,018626		0,018565

Tabela 5.2 - Exemplo 1-a - deslocamentos u_y

u_y pontos	$x = 3$		Analítica	MEF/ANSYS 96 elem.	MTG / MMR / Células	
	x	y			20 elem./48 cél.	40 elem./192 cél.
7	0,0	0,0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
14	0,5	0,5	-0,000459	-0,000468		-0,000469
15	1,0	1,0	-0,000918	-0,000933	-0,000936	-0,000935
16	1,5	1,5	-0,001377	-0,001395		-0,001396
17	2,0	2,0	-0,001836	-0,001853	-0,001857	-0,001854

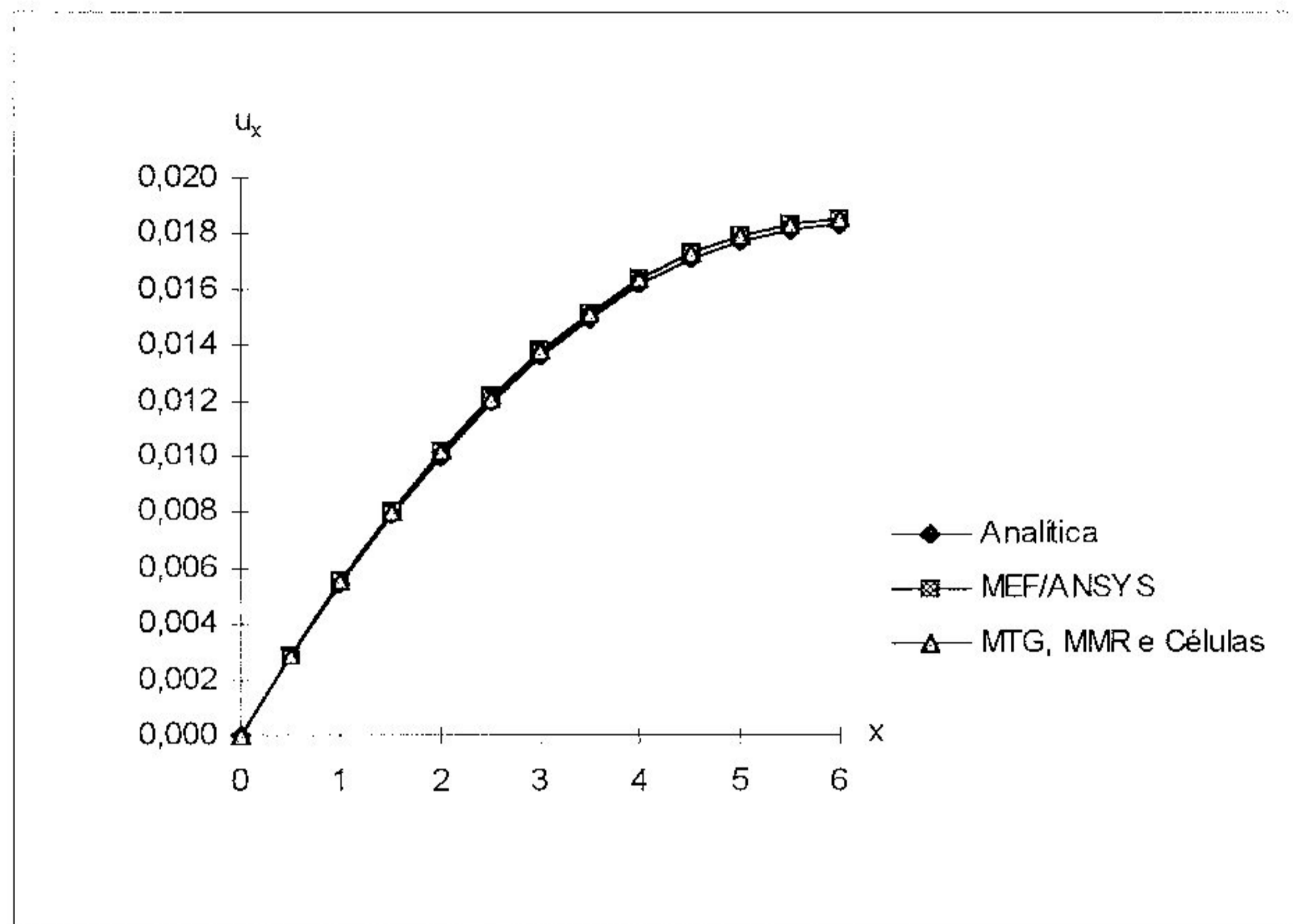


Figura 5.3 - Exemplo 1-a - deslocamentos u_x

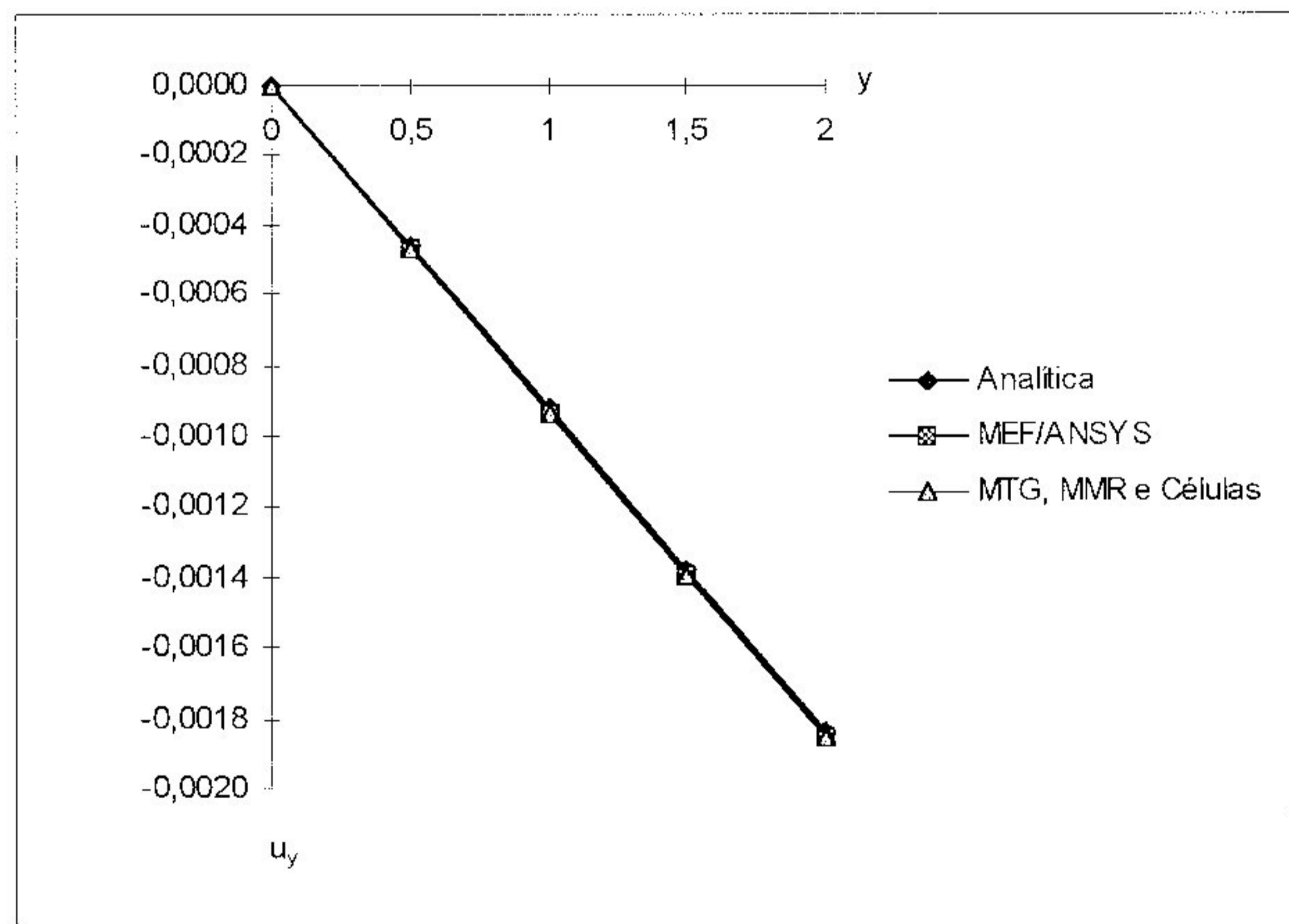


Figura 5.4 - Exemplo 1-a - deslocamentos u_y

5.3 - Exemplo 1-b

Chapa submetida à tração, ao peso próprio e à variação de temperatura

Neste exemplo, a chapa do exemplo 1-a é analisada considerando-se além dos carregamentos de borda e peso próprio, uma redução uniforme de temperatura no domínio igual a 50°C. O coeficiente de dilatação térmica linear é $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$.

Os resultados obtidos são apresentados nas tabs. (5.3) e (5.4). As expressões analíticas são apresentadas a seguir:

$$u_x = \frac{\rho g}{2E} (2x\ell - x^2 - vy^2) + \frac{\rho x}{E} + \alpha \Delta T x \quad (5.3)$$

$$u_y = -\frac{\rho g v}{E} (\ell - x)y - \frac{\rho v}{E} y - \alpha \Delta T y \quad (5.4)$$

Os erros percentuais médios dos resultados obtidos para deslocamentos u_x em relação à solução analítica foram:

- ANSYS - 96 elementos: 1,51 %;
- MEC - 10 elementos: 1,48 %;
- MEC - 20 elementos: 1,57 %;
- MEC - 40 elementos: 1,51 %;

e a diferença média dos resultados obtidos com o MEC em relação aos resultados obtidos com o ANSYS foi de 0,002 %.

Para deslocamentos u_y , os erros percentuais médios encontrados em relação à solução analítica foram:

- ANSYS - 96 elementos: 0,99 %;
- MEC - 20 elementos: 1,13 %;
- MEC - 40 elementos: 1,02 %

e a diferença média dos resultados obtidos com o MEC em relação aos resultados obtidos com o ANSYS foi de 0,03 %.

Os resultados deste exemplo são ilustrados pela fig. (5.5) (deslocamentos u_x) e fig. (5.6) (deslocamentos u_y).

Vê-se através destes valores que a precisão dos resultados obtidos na análise via MEC é muito boa.

O fato dos resultados da análise pelo MEC, através dos três processos utilizados, serem os mesmos para cada discretização, tanto para o exemplo 1-a como para o exemplo 1-b, já era esperado, pois a avaliação da integral de domínio é teoricamente exata pelos três processos. O termo constante na integral de domínio, que representa força gravitacional ou temperatura, é representado de forma exata em cada caso. As pequenas diferenças numéricas observadas nos últimos algarismos significativos se devem aos diferentes procedimentos de integração numérica adotados para as células internas e elementos de contorno. Em comparação com a solução obtida pelo MEF/ANSYS, também observa-se uma concordância praticamente exata em todos os resultados.

Tabela 5.3 - Exemplo 1-b - deslocamentos u_x

u_x pontos	$y = 0$ x	Analítica	MEF/ANSYS 96 elem.	MTG / MMR / Células		
				10 elem./12 cél.	20 elem./48 cél.	40 elem./192 cél.
1	0,0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	0,5	0,002628	0,002668			0,002669
3	1,0	0,005010	0,005097		0,005100	0,005097
4	1,5	0,007148	0,007275			0,007274
5	2,0	0,009040	0,009198	0,009207	0,009200	0,009196
6	2,5	0,010688	0,010865			0,010863
7	3,0	0,012090	0,012279		0,012284	0,012277
8	3,5	0,013248	0,013443			0,013442
9	4,0	0,014160	0,014358	0,014384	0,014366	0,014358
10	4,5	0,014828	0,015026			0,015027
11	5,0	0,015250	0,015448		0,015460	0,015451
12	5,5	0,015428	0,015626			0,015629
13	6,0	0,015360	0,015559	0,015626	0,015583	0,015565

Tabela 5.4 - Exemplo 1-b - deslocamentos u_y

u_y pontos	$x = 3$ y	Analítica	MEF/ANSYS 96 elem.	MTG / MMR / Células	
				20 elem./48 cél.	192 elem./cél.
7	0,0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
14	0,5	-0,000709	-0,000718		-0,000719
15	1,0	-0,001418	-0,001433	-0,001436	-0,001435
16	1,5	-0,002127	-0,002145		-0,002146
17	2,0	-0,002836	-0,002853	-0,002857	-0,002854

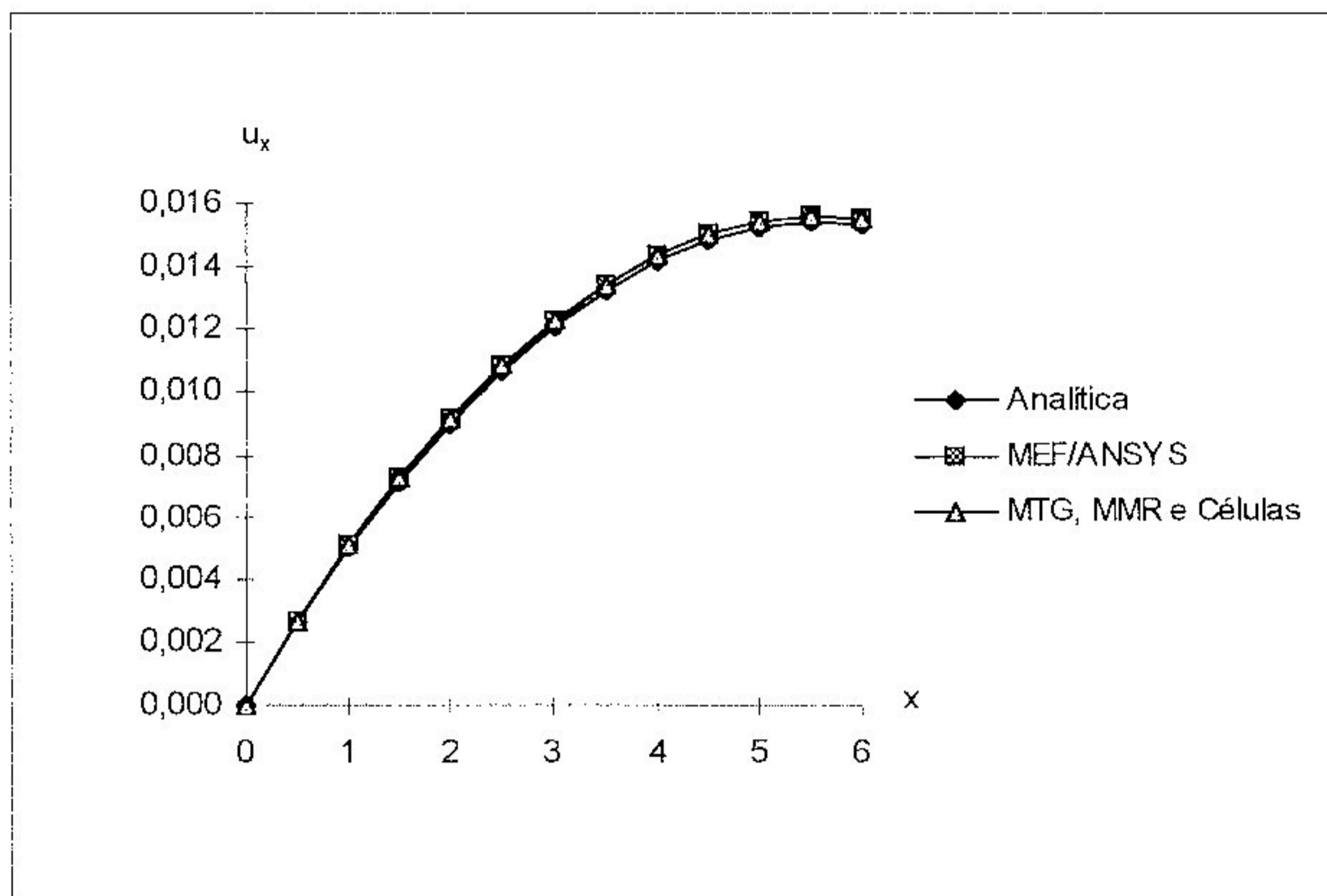


Figura 5.5 - Exemplo 1-b - deslocamentos u_x

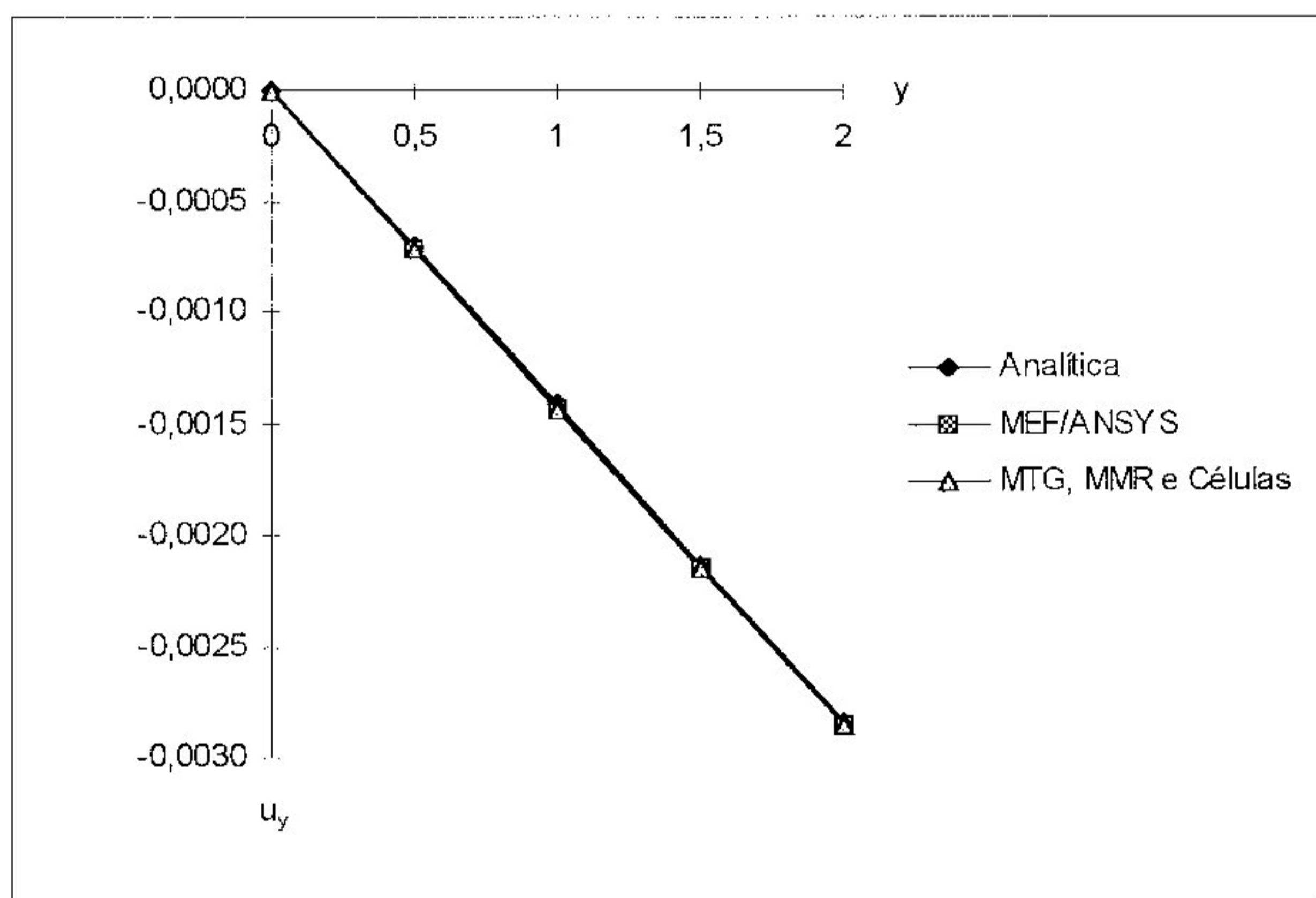


Figura 5.6 - Exemplo 1-b - deslocamentos u_y

5.4 - Exemplo 2-a

Chapa em L submetida a força gravitacional

Considera-se uma chapa na forma de um L apoiada em duas bordas, conforme fig. (5.7), submetida a força gravitacional, considerada constante no domínio.

É considerado estado plano de tensão. As propriedades físicas do material do corpo são as seguintes:

- módulo de elasticidade $E = 10^5 \text{ kN/m}^2$;
- coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$;
- massa específica $\rho = 0,10 \text{ kg/m}^3$;

com:

- aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.

A geometria, condições de contorno e discretizações são mostradas na fig. (5.7).

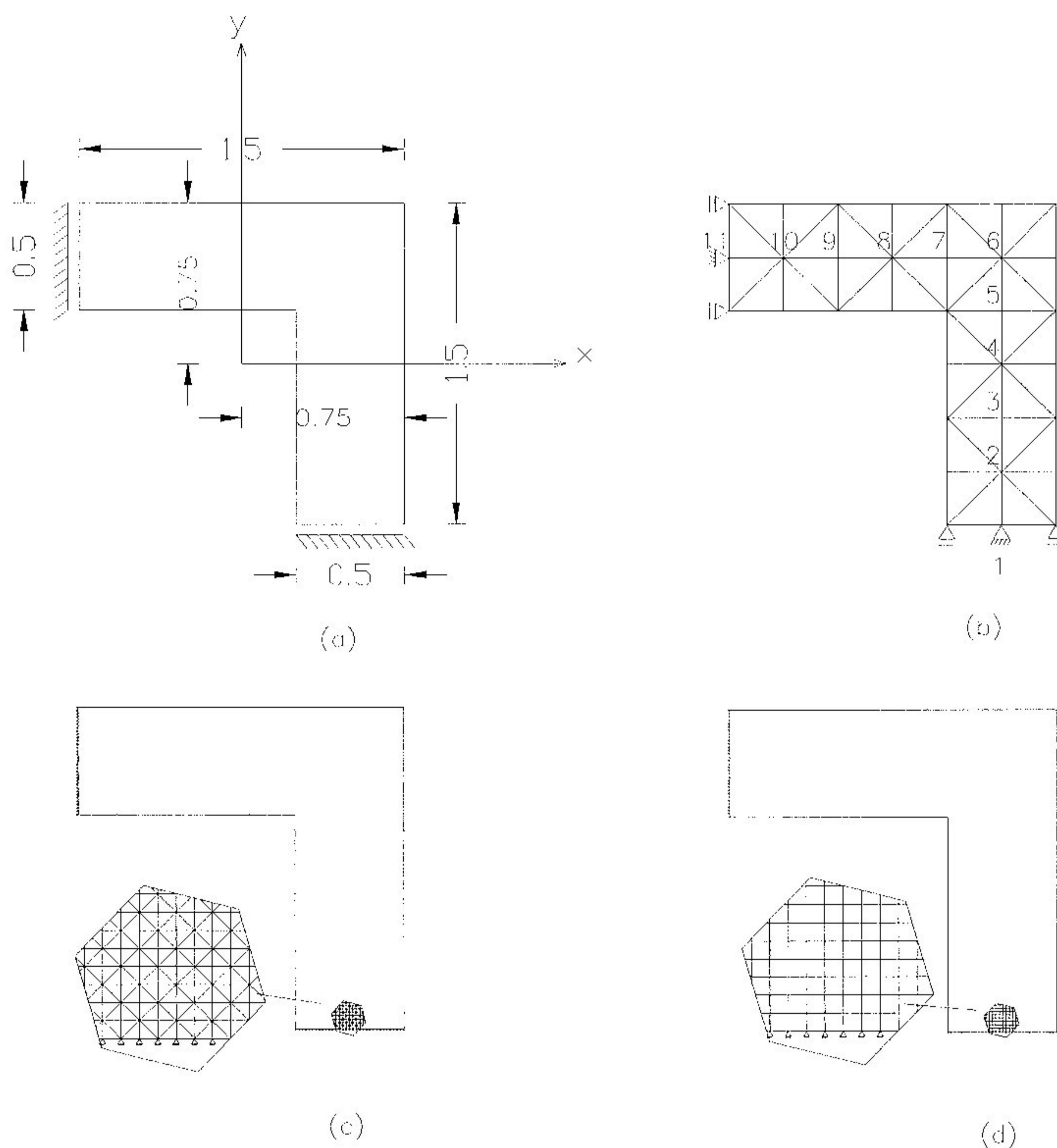


Figura 5.7 - Exemplo 2 - (a) geometria e condições de contorno; (b) MEC-24 elementos e 40 células; (c) MEC-384 elementos e 10240 células; (d) MEF/ANSYS-5120 elementos

Neste exemplo pode-se observar a influência da constante da solução fundamental nos resultados da análise. Com esta finalidade, para a geração dos coeficientes das matrizes envolvidas no sistema de equações $AX=F$ com os procedimentos de discretização do domínio em células e MMR, utilizou-se a solução fundamental do MEC,

fornecida pela eq. (2.54). Para a utilização do MTG, a solução fundamental correspondente tem que ser a fornecida pela eq. (3.57), que difere da eq. (2.54) por uma constante.

Na tab. (5.5) são apresentados os resultados obtidos para os deslocamentos u_y , utilizando-se os três procedimentos citados para avaliação da integral de domínio via MEC e o MEF/ANSYS, para as devidas comparações. A variação dos resultados entre o MEF/ANSYS e o MEC pode ser visualizada através da fig. (5.8) e fig. (5.9).

A análise deste exemplo através dos três processos, considerando-se a solução fundamental dada pela eq. (3.57), tal como na análise anterior pelo MTG, apresenta resultados coincidentes.

Esta influência da constante da solução fundamental está intimamente relacionada ao equilíbrio das forças de superfície e das cargas aplicadas ao corpo, segundo DE PAULA (1991). Os exemplos 1-a e 1-b, quando testados para a mesma variação de constantes, não apresentaram variações nos resultados, uma vez que todas as condições de equilíbrio já estavam automaticamente satisfeitas em função da simetria do problema.

A diferença média percentual dos resultados obtidos do MEC em relação ao MEF/ANSYS é 0,31 %, eixo $x=0,5$, e 2,90 %, eixo $y=0,5$, para deslocamentos u_y .

Tabela 5.5 - Exemplo 2-a - deslocamentos u_y

u_y pontos	$x = 0,5$ y	MEF ($\times 10^{-3}$) 5120 elem.	MTG ($\times 10^{-3}$)		MMR / Células ($\times 10^{-3}$)		Dif. MEC/MEF %		
			24 elem.	384 elem.	24 elem.	384 elem.	MTG(384)	MMR(384)	
1	-0,75	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,28	0,27	
2	-0,50	-0,004264	-0,0041310	-0,004252	-0,0041225	-0,004252	0,30	0,30	
3	-0,25	-0,007886	-0,0076127	-0,007862	-0,0075952	-0,007862	0,34	0,33	
4	0,00	-0,010863	-0,0104190	-0,010826	-0,0103940	-0,010827	0,34	0,33	
5	0,25	-0,013072	-0,0125010	-0,013028	-0,0124690	-0,013029	0,32	0,32	
6	0,50	-0,014499	-0,0138550	-0,014453	-0,0138170	-0,014453	0,32	0,31	
$y = 0,5$									
x									
7	0,25	-0,017168	-0,0148770	-0,016994	-0,0148450	-0,016995	1,01	1,01	
8	0,00	-0,019124	-0,0148090	-0,018767	-0,0147800	-0,018768	1,87	1,86	
9	-0,25	-0,017454	-0,0118420	-0,016910	-0,0118180	-0,016911	3,12	3,11	
10	-0,50	-0,012411	-0,0064385	-0,011716	-0,0064232	-0,011716	5,60	5,60	
11	-0,75	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000	2,90	2,90	

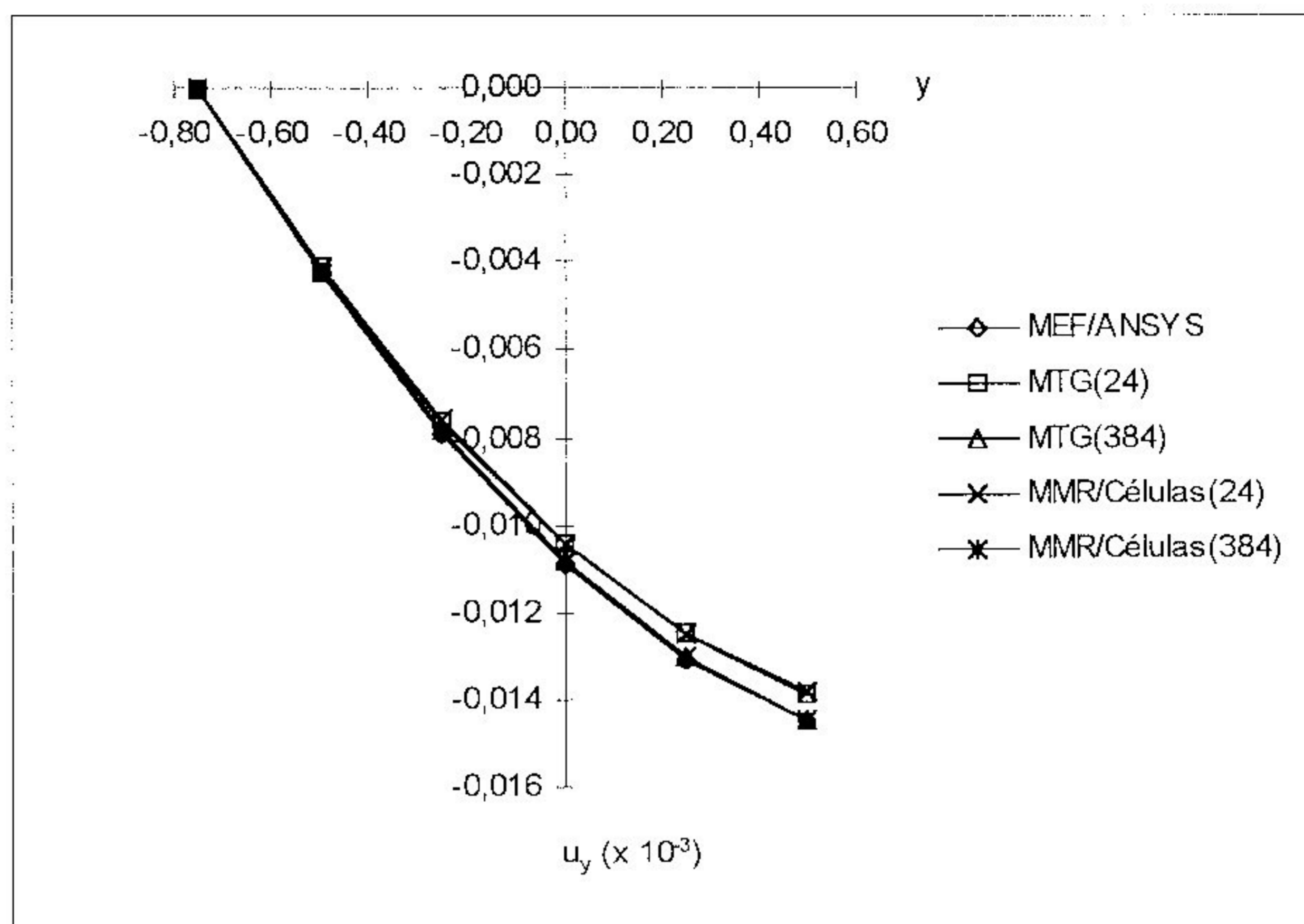


Figura 5.8 - Exemplo 2-a - deslocamentos u_y - eixo $x=0,5$

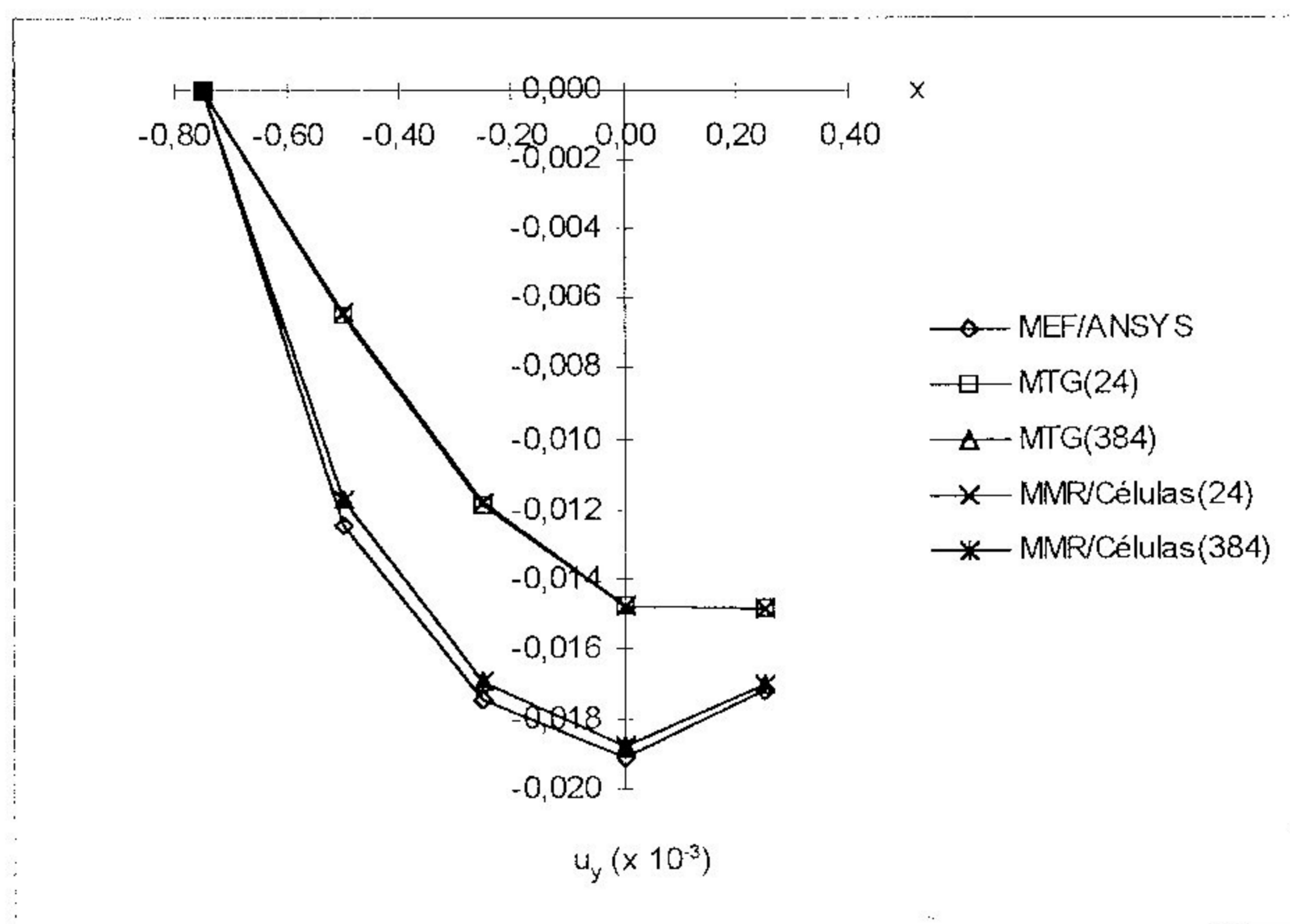


Figura 5.9 - Exemplo 2-a - deslocamentos u_y - eixo $y=0,5$

5.5 - Exemplo 2-b

Chapa em L submetida a temperatura constante

Neste exemplo, a chapa do exemplo 2-a é analisada considerando-se uma redução uniforme de temperatura no domínio igual a 50°C . O coeficiente de dilatação térmica linear é $\alpha = 10^{-5} /^{\circ}\text{C}$.

Na tab. (5.6) e tab. (5.7) são apresentados os resultados obtidos para deslocamentos u_x e u_y , respectivamente, utilizando-se os procedimentos citados.

A variação dos resultados entre o MEF/ANSYS e o MEC pode ser visualizada através das fig. (5.10) e fig. (5.11).

Tomando-se as mesmas considerações estabelecidas para o Exemplo 2-a sobre a solução fundamental usada, verifica-se que para o caso de problemas de temperatura, utiliza-se a derivada da solução fundamental na integral de domínio. Portanto, a constante adicionada à eq. (2.54), desaparece na derivação, e conseqüentemente pode-se utilizar a solução fundamental conforme eq. (2.54) nas integrais do sistema de equações também para o MTG.

A diferença média percentual dos resultados obtidos do MEC (384) em relação ao MEF/ANSYS é 1,13 %, eixo $x=0,5$, e 0,15 %, eixo $y=0,5$, para deslocamentos u_x , 0,14 %, eixo $x=0,5$, e 1,39 %, eixo $y=0,5$, para deslocamentos u_y .

Tabela 5.6 - Exemplo 2-b - deslocamentos u_x

u_x pontos	x = 0,5 y	MEF ($\times 10^{-3}$) 5120 elem.	MTG/MMR/Células ($\times 10^{-3}$)		Dif. MEC/MEF %	
			24 elem.	384 elem.	(24)	(384)
1	-0.75	0.000000	0.000000	0.000000		
2	-0.50	-0.143180	-0.107130	-0.137850	25.18	3.72
3	-0.25	-0.287910	-0.263250	-0.284240	8.57	1.27
4	0.00	-0.444360	-0.429430	-0.442440	3.36	0.43
5	0.25	-0.560220	-0.545750	-0.559540	2.58	0.12
6	0.50	-0.574910	-0.561330	-0.574340	2.36	0.10
y = 0,5 x					8.41	1.13
7	0.25	-0.447920	-0.435110	-0.447330	2.86	0.13
8	0.00	-0.330260	-0.317840	-0.329740	3.76	0.16
9	-0.25	-0.220540	-0.211860	-0.220190	3.94	0.16
10	-0.50	-0.110380	-0.106140	-0.110200	3.84	0.16
11	-0.75	0.000000	0.000000	0.000000		
					3.60	0.15

Tabela 5.7 - Exemplo 2-b - deslocamentos u_y

u_y pontos	x = 0,5 y	MEF ($\times 10^{-3}$) 5120 elem.	MTG/MMR/Células ($\times 10^{-3}$)		Dif. MEC/MEF %	
			24 elem.	384 elem.	(24)	(384)
1	-0,75	0,000000	0,000000	0,000000		
2	-0,50	-0,110380	-0,106140	-0,110200	3,84	0,16
3	-0,25	-0,220540	-0,211860	-0,220190	3,94	0,16
4	0,00	-0,330260	-0,317840	-0,329740	3,76	0,16
5	0,25	-0,447920	-0,435110	-0,447330	2,86	0,13
6	0,50	-0,574910	-0,561330	-0,574340	2,36	0,10
y = 0,5 x					3,35	0,14
7	0,25	-0,560220	-0,545750	-0,559540	2,58	0,12
8	0,00	-0,444360	-0,429430	-0,442440	3,36	0,43
9	-0,25	-0,287910	-0,263250	-0,284240	8,57	1,27
10	-0,50	-0,143180	-0,107130	-0,137850	25,18	3,72
11	-0,75	0,000000	0,000000	0,000000		
					9,92	1,39

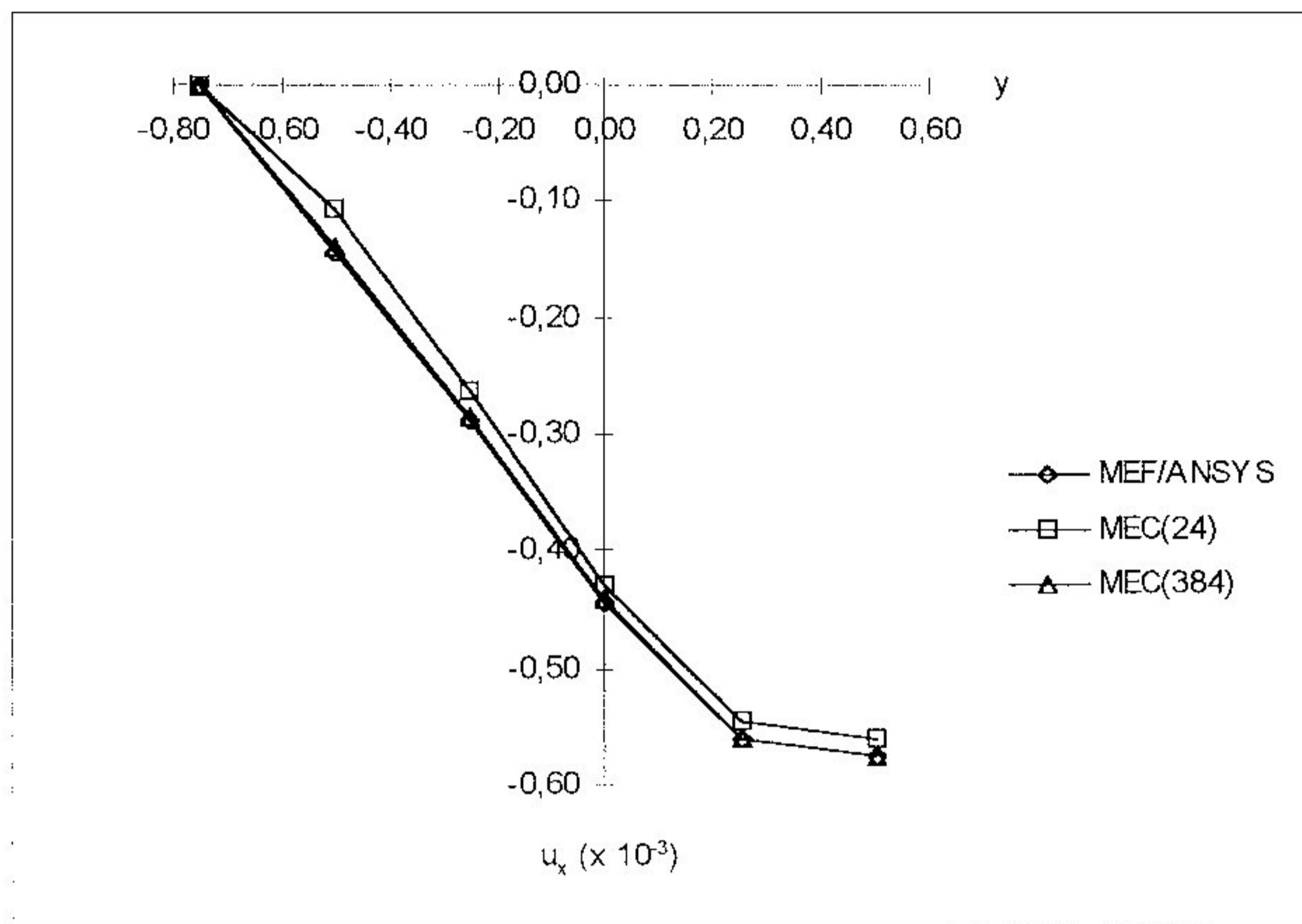


Figura 5.10 - Exemplo 2-b - deslocamentos u_x - eixo $x=0,5$

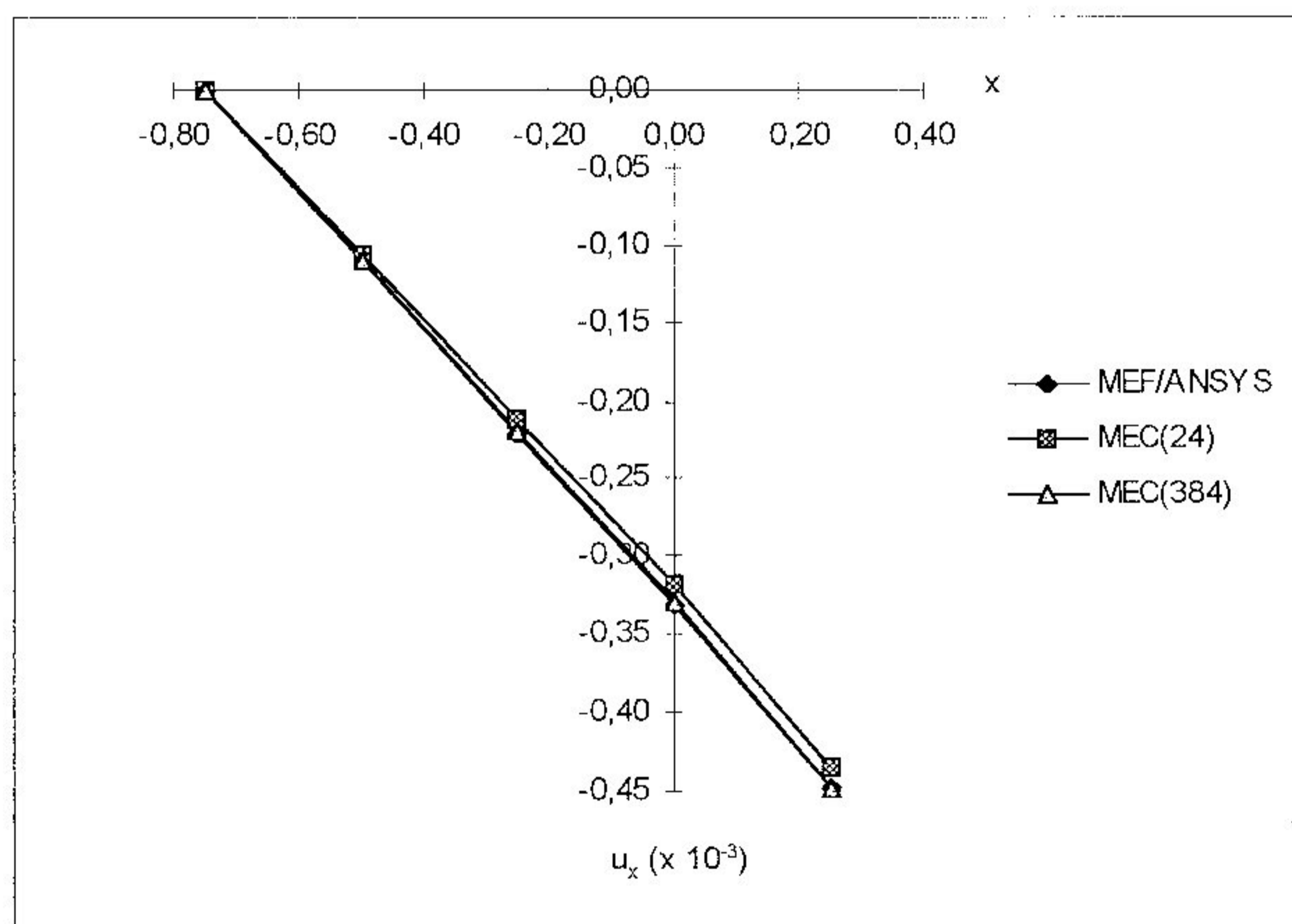


Figura 5.11 - Exemplo 2-b - deslocamentos u_x - eixo $y=0,5$

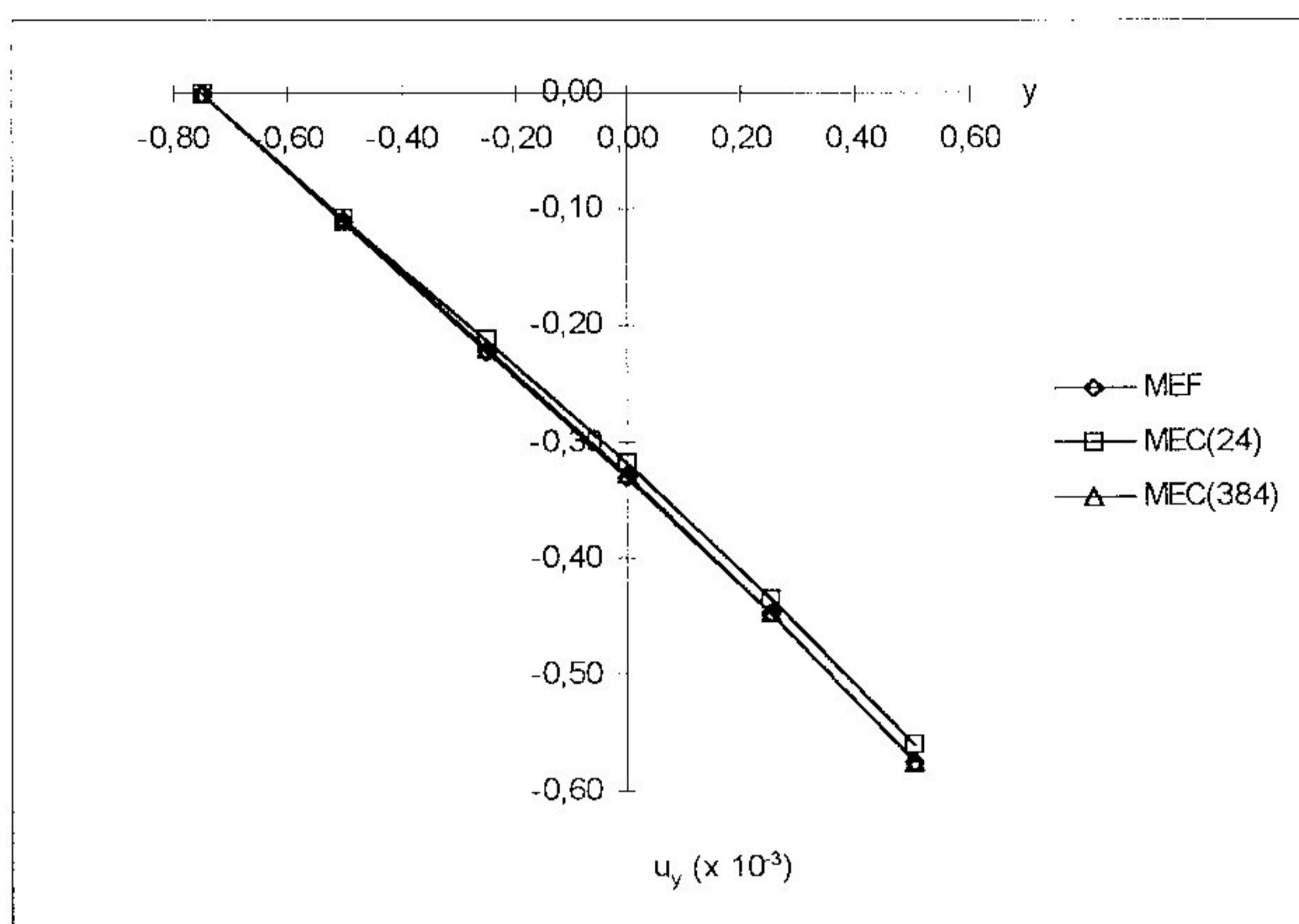


Figura 5.12 - Exemplo 2-b - deslocamentos u_y - eixo $x=0,5$

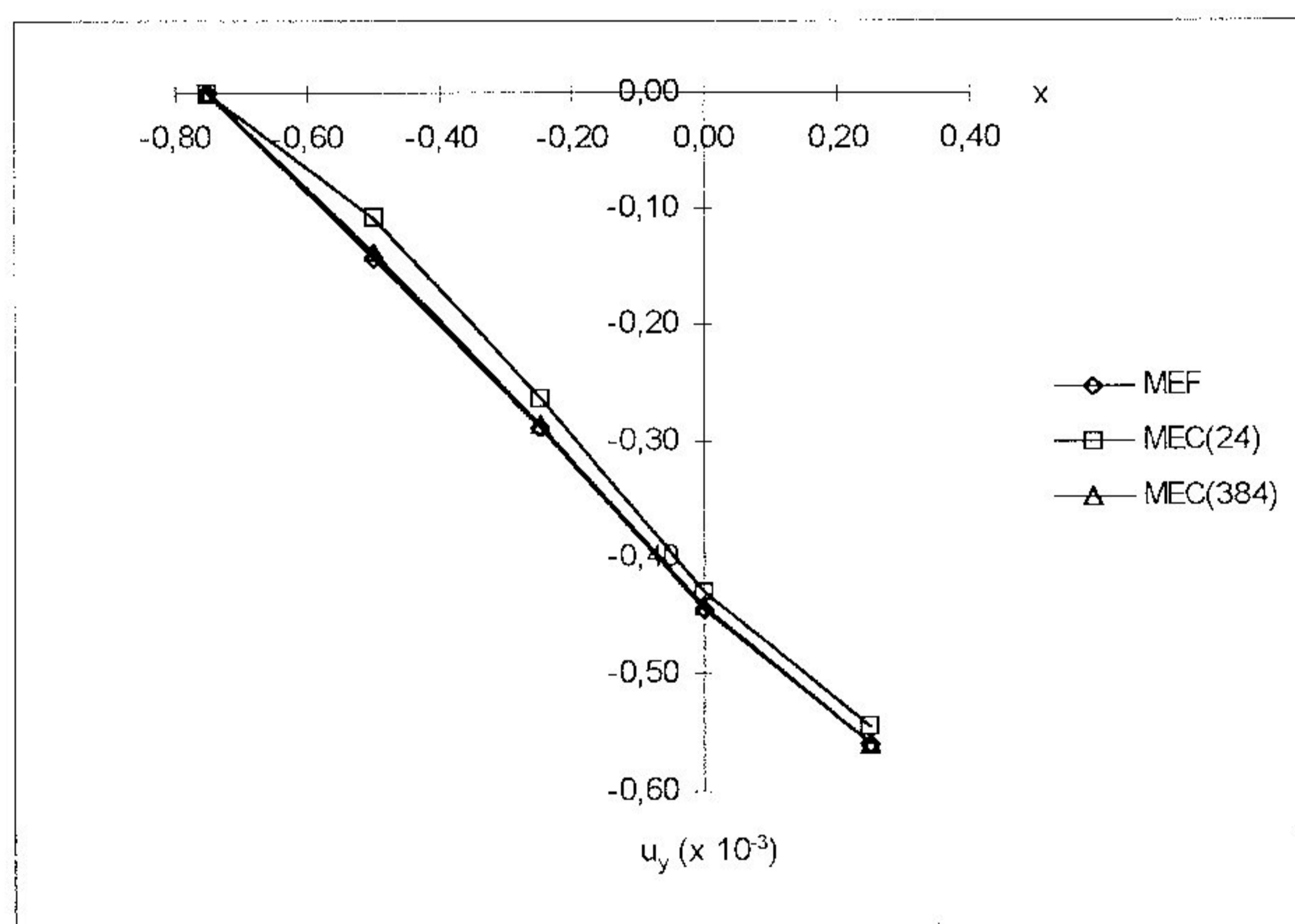


Figura 5.13 - Exemplo 2-b - deslocamentos u_y - eixo $y=0,5$

5.6 - Exemplo 2-c

Chapa em L submetida a uma variação linear de temperatura ao longo do eixo y

Neste exemplo, a chapa do exemplo 2-a é analisada considerando-se uma variação linear de temperatura no domínio, conforme fig. (5.14). Esta variação se dá apenas na direção do eixo y, sendo portanto constante para $y = \text{constante}$.

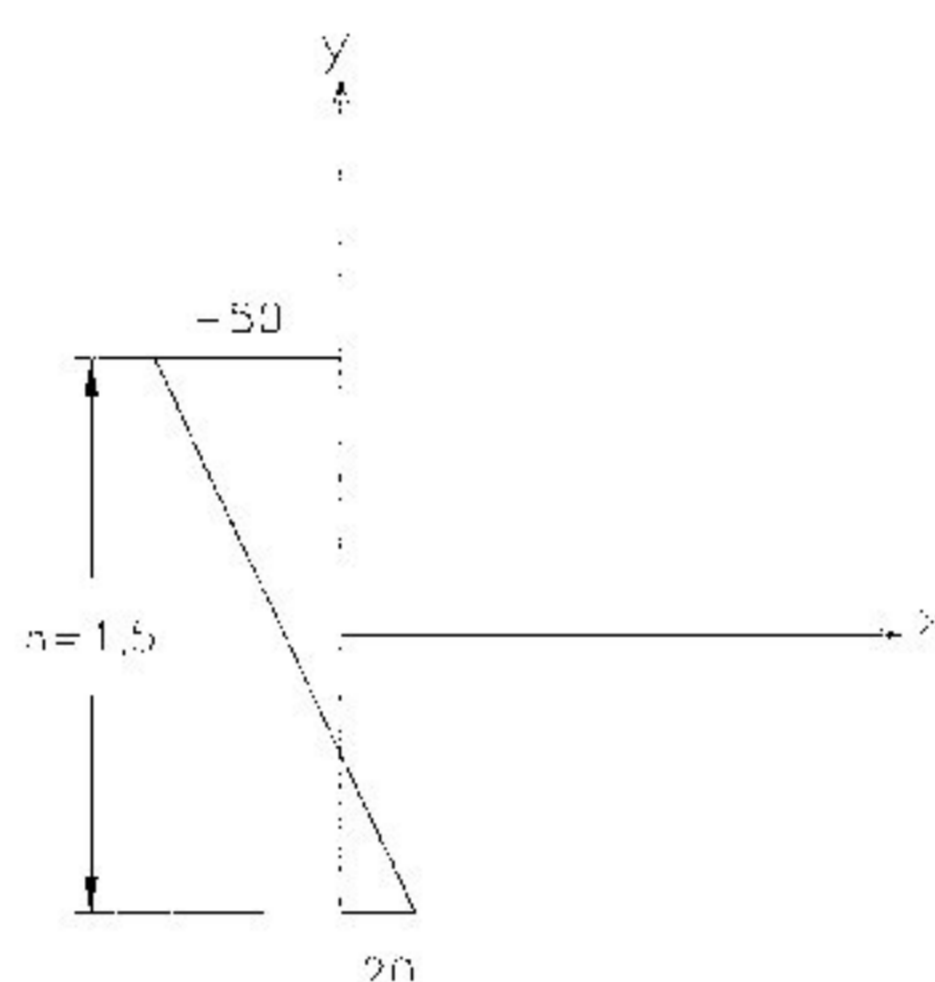


Figura 5.14 - Exemplo 2-c - variação linear de temperatura

Os dados geométricos da chapa e as condições de contorno e as discretizações são mostradas na fig. (5.7).

Nas tab. (5.8) e tab. (5.9) são apresentados os resultados obtidos para deslocamentos u_x e u_y , respectivamente, utilizando-se os procedimentos adotados.

A variação dos resultados obtidos entre o MEF/ANSYS e o MEC pode ser visualizada nas figuras (5.15) a (5.18).

A diferença média percentual dos resultados obtidos do MEC em relação ao MEF/ANSYS é 0,96 %, eixo $x=0,5$, e 0,08 %, eixo $y=0,5$, para deslocamentos u_x , 0,69 %, eixo $x=0,5$, e 1,69 %, eixo $y=0,5$, para deslocamentos u_y .

Tabela 5.8 - Exemplo 2-c - deslocamentos u_x

u_x pontos	$x = 0,5$ y	MEF ($\times 10^{-3}$) 5120 elem.	MTG/MMR/Células ($\times 10^{-3}$)		Dif. MEC/MEF %	
			24 elem.	384 elem.	(24)	(384)
1	-0.75	0.000000	0.000000	0.000000		
2	-0.50	-0.071923	-0.05716	-0.069533	20.52	3.32
3	-0.25	-0.159750	-0.15123	-0.158110	5.33	1.03
4	0.00	-0.268060	-0.26456	-0.267200	1.31	0.32
5	0.25	-0.374440	-0.37117	-0.374150	0.87	0.08
6	0.50	-0.454250	-0.44843	-0.454000	1.28	0.06
$y = 0,5$ x					5.86	0.96
7	0.25	-0.359150	-0.35344	-0.358890	1.59	0.07
8	0.00	-0.267540	-0.26244	-0.267310	1.91	0.09
9	-0.25	-0.178470	-0.17502	-0.178310	1.93	0.09
10	-0.50	-0.089268	-0.08757	-0.089191	1.90	0.09
11	-0.75	0.000000	0.000000	0.000000		
					1.83	0.08

Tabela 5.9 - Exemplo 2-c - deslocamentos u_y

u_y pontos	$x = 0,5$ y	MEF ($\times 10^{-3}$) 5120 elem.	MTG/MMR/Células ($\times 10^{-3}$)		Dif. MEC/MEF %	
			24 elem.	384 elem.	(24)	(384)
1	-0.75	0.000000	0.000000	0.000000		
2	-0.50	0.038178	0.038350	0.038264	0.45	0.23
3	-0.25	0.050097	0.051071	0.050257	1.94	0.32
4	0.00	0.033927	0.036255	0.034161	6.86	0.69
5	0.25	-0.013898	-0.011042	-0.013630	20.55	1.93
6	0.50	-0.094375	-0.090582	-0.094113	4.02	0.28
$y = 0,5$ x					6.77	0.69
7	0.25	-0.144550	-0.137190	-0.144220	5.09	0.23
8	0.00	-0.139030	-0.128570	-0.138120	7.52	0.65
9	-0.25	-0.102610	-0.088211	-0.100910	14.03	1.66
10	-0.50	-0.057798	-0.040306	-0.055370	30.26	4.20
11	-0.75	0.000000	0.000000	0.000000		
					14.23	1.69

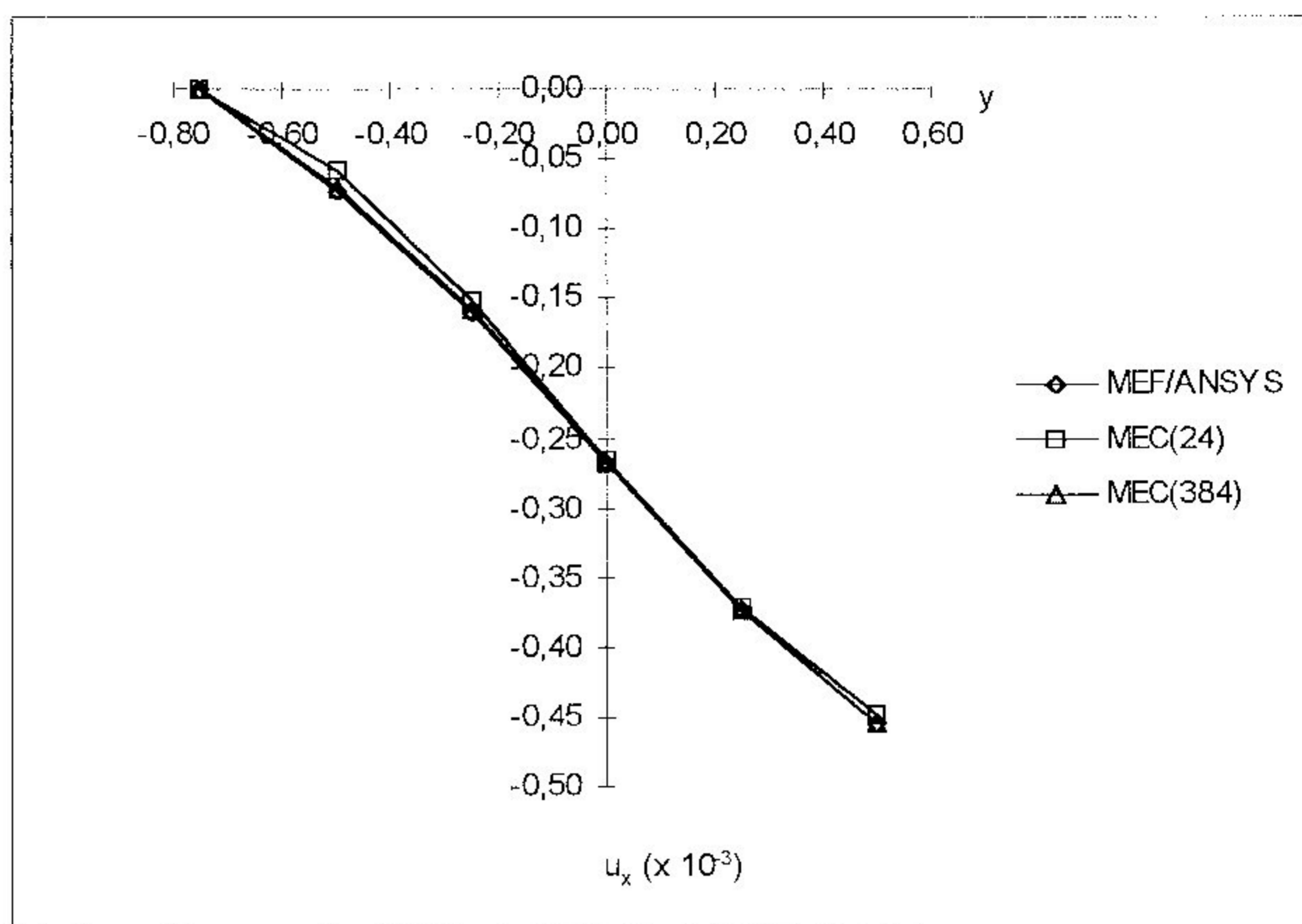


Figura 5.15 - Exemplo 2-c - deslocamentos u_x - eixo $x=0,5$

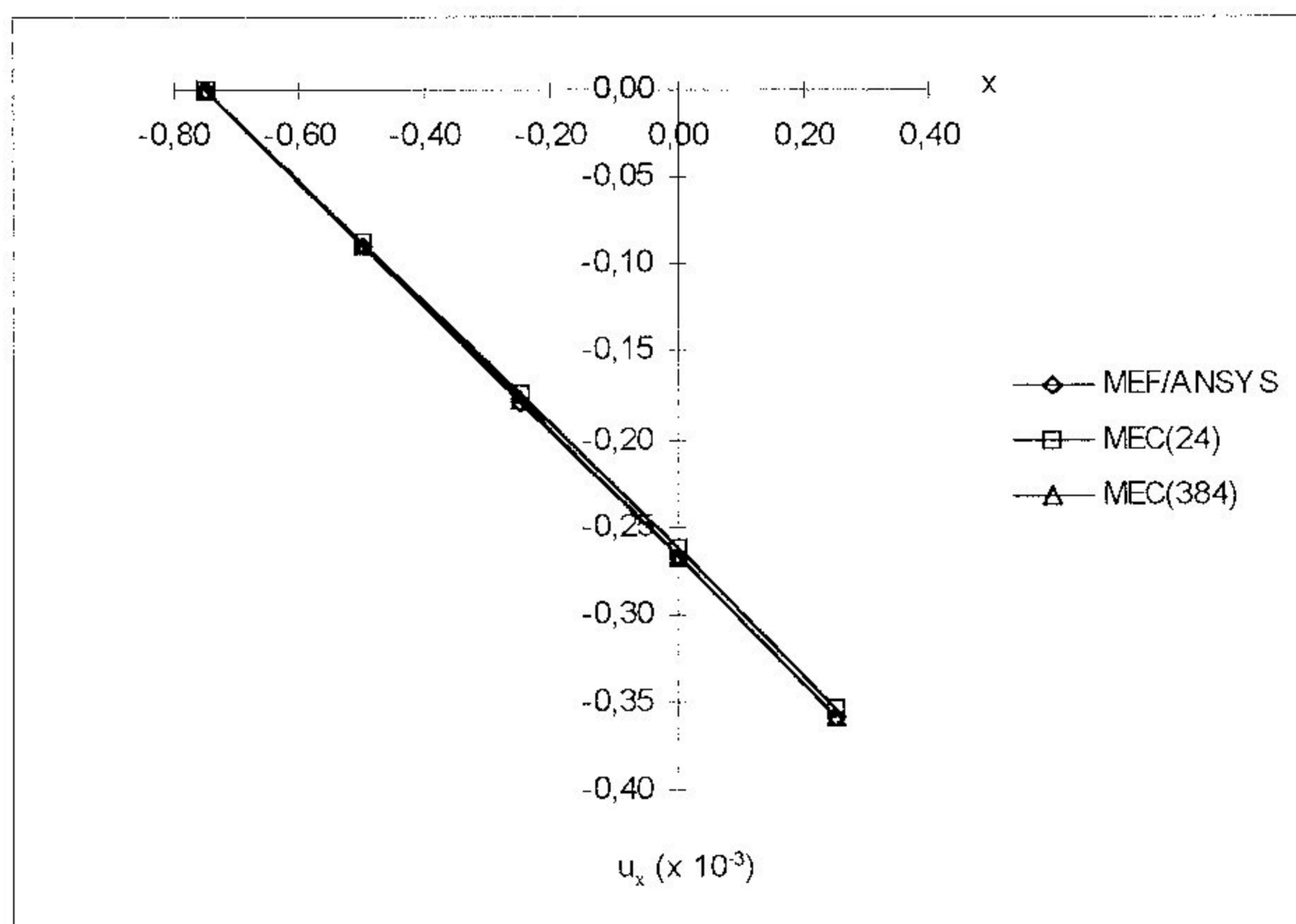


Figura 5.16 - Exemplo 2-c - deslocamentos u_x - eixo $y=0,5$

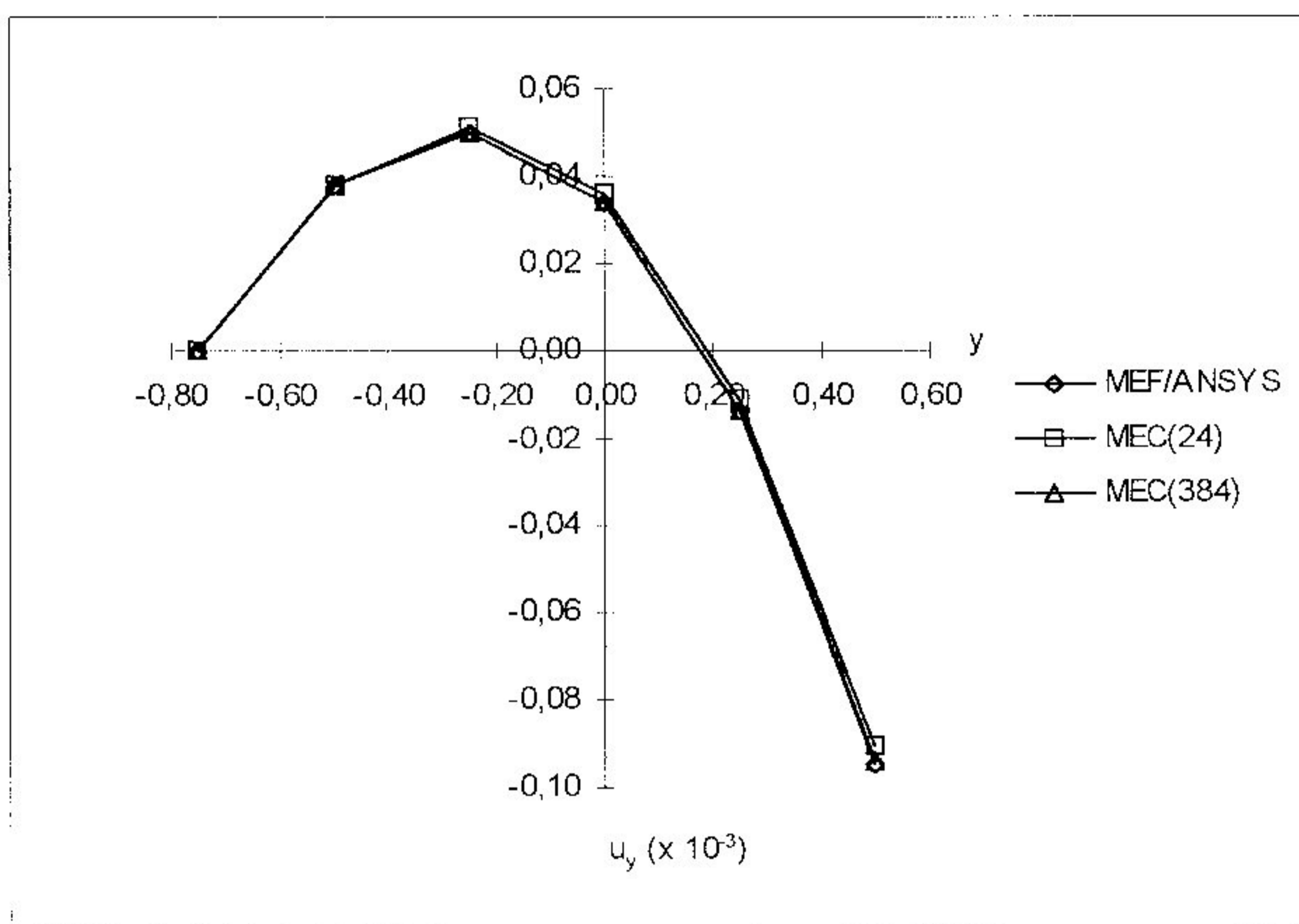


Figura 5.17 - Exemplo 2-c - deslocamentos u_y - eixo $x=0,5$

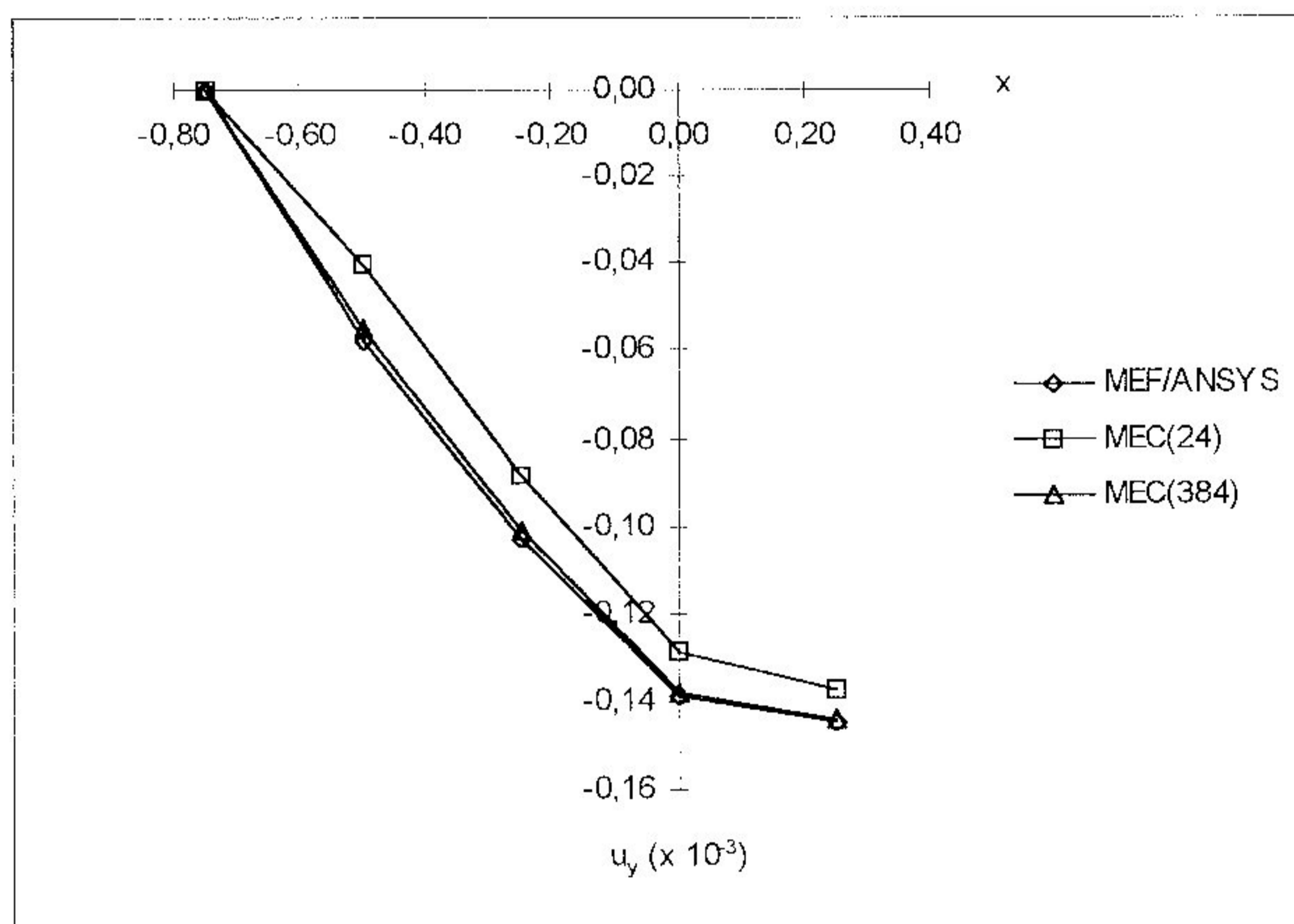


Figura 5.18 - Exemplo 2-c - deslocamentos u_y - eixo $y=0,5$

5.7 - Exemplo 2-d

Chapa em L submetida a uma variação parabólica de temperatura ao longo do eixo y

Neste caso, a chapa do exemplo 2-a é analisada considerando-se uma variação parabólica de temperatura no domínio, ao longo do eixo y, conforme fig. (5.19). As características geométricas, condições de contorno e discretizações adotadas são mostradas na fig. (5.7).

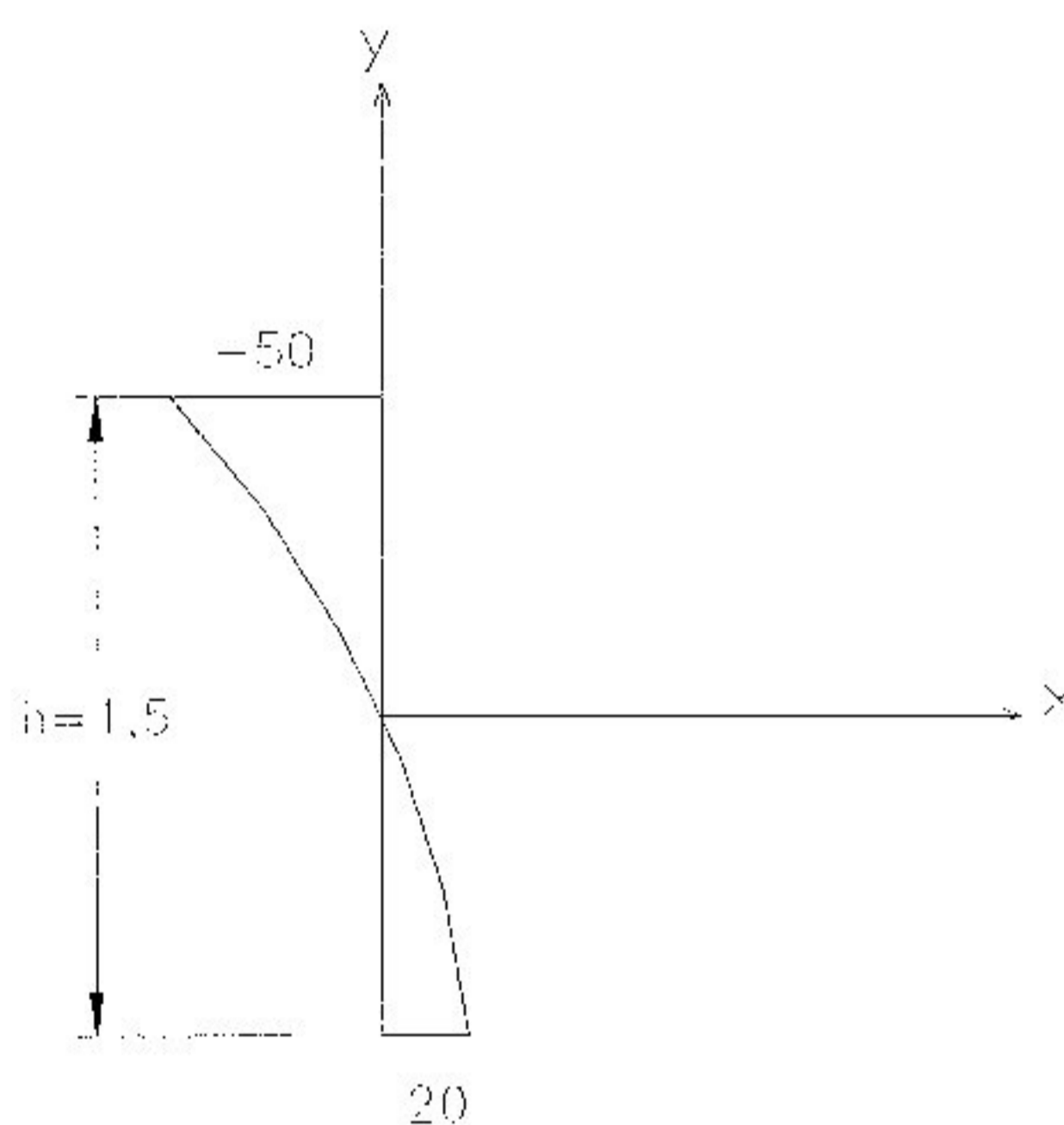


Figura 5.19 - Exemplo 2-d - variação parabólica de temperatura

Nas tab. (5.10) e tab. (5.11) são apresentados os resultados obtidos para deslocamentos u_x e u_y , respectivamente, utilizando-se os procedimentos citados.

A variação dos resultados obtidos pode entre o MEF/ANSYS e o MEC (24 elementos de contorno) ser visualizada nas figuras (5.20) a (5.23).

A diferença média percentual dos resultados obtidos do MEC em relação ao MEF/ANSYS é 0,74 %, eixo $x=0,5$, e 0,05 %, eixo $y=0,5$, para deslocamentos u_x ; 0,20 %, eixo $x=0,5$, e 2,42 %, eixo $y=0,5$, para deslocamentos u_y . Portanto, os resultados tem nível razoável de precisão. Os resultados sofrem maior variação para os pontos do eixo $x=0,5$.

Tabela 5.10 - Exemplo 2-d - deslocamentos u_x

u_x pontos	x = 0,5 y	MEF ($\times 10^{-3}$) 5120 elem.	MTG/MMR/Células ($\times 10^{-3}$)		Dif. MEC/MEF %	
			24 elem.	384 elem.	(24)	(384)
1	-0.75	0.000000	0.000000	0.000000		
2	-0.50	-0.039644	-0.034351	-0.038564	13.35	2.72
3	-0.25	-0.098729	-0.097651	-0.098018	1.09	0.72
4	0.00	-0.179390	-0.181370	-0.179050	1.10	0.19
5	0.25	-0.271970	-0.273860	-0.271880	0.69	0.03
6	0.50	-0.368280	-0.365800	-0.368140	0.67	0.04
y = 0,5 x					3.38	0.74
7	0.25	-0.293690	-0.291030	-0.293540	0.91	0.05
8	0.00	-0.219910	-0.217880	-0.219790	0.92	0.05
9	-0.25	-0.146630	-0.145380	-0.146550	0.85	0.05
10	-0.50	-0.073322	-0.072693	-0.073281	0.86	0.06
11	-0.75	0.000000	0.000000	0.000000		
					0.88	0.05

Tabela 5.11 - Exemplo 2-d - deslocamentos u_y

u_y pontos	x = 0,5 y	MEF ($\times 10^{-3}$) 5120 elem.	MTG/MMR/Células ($\times 10^{-3}$)		Dif. MEC/MEF %	
			24 elem.	384 elem.	(24)	(384)
1	-0.75	0.000000	0.000000	0.000000		
2	-0.50	0.048834	0.048524	0.048881	0.63	0.10
3	-0.25	0.085580	0.085308	0.085673	0.32	0.11
4	0.00	0.101600	0.101630	0.101740	0.03	0.14
5	0.25	0.087952	0.088378	0.088121	0.48	0.19
6	0.50	0.036110	0.037504	0.036285	3.86	0.48
y = 0,5 x					1.07	0.20
7	0.25	-0.028593	-0.022411	-0.028287	21.62	1.07
8	0.00	-0.052621	-0.042323	-0.051916	19.57	1.34
9	-0.25	-0.049675	-0.037529	-0.048487	24.45	2.39
10	-0.50	-0.033122	-0.020899	-0.031503	36.90	4.89
11	-0.75	0.000000	0.000000	0.000000		
					25.64	2.42

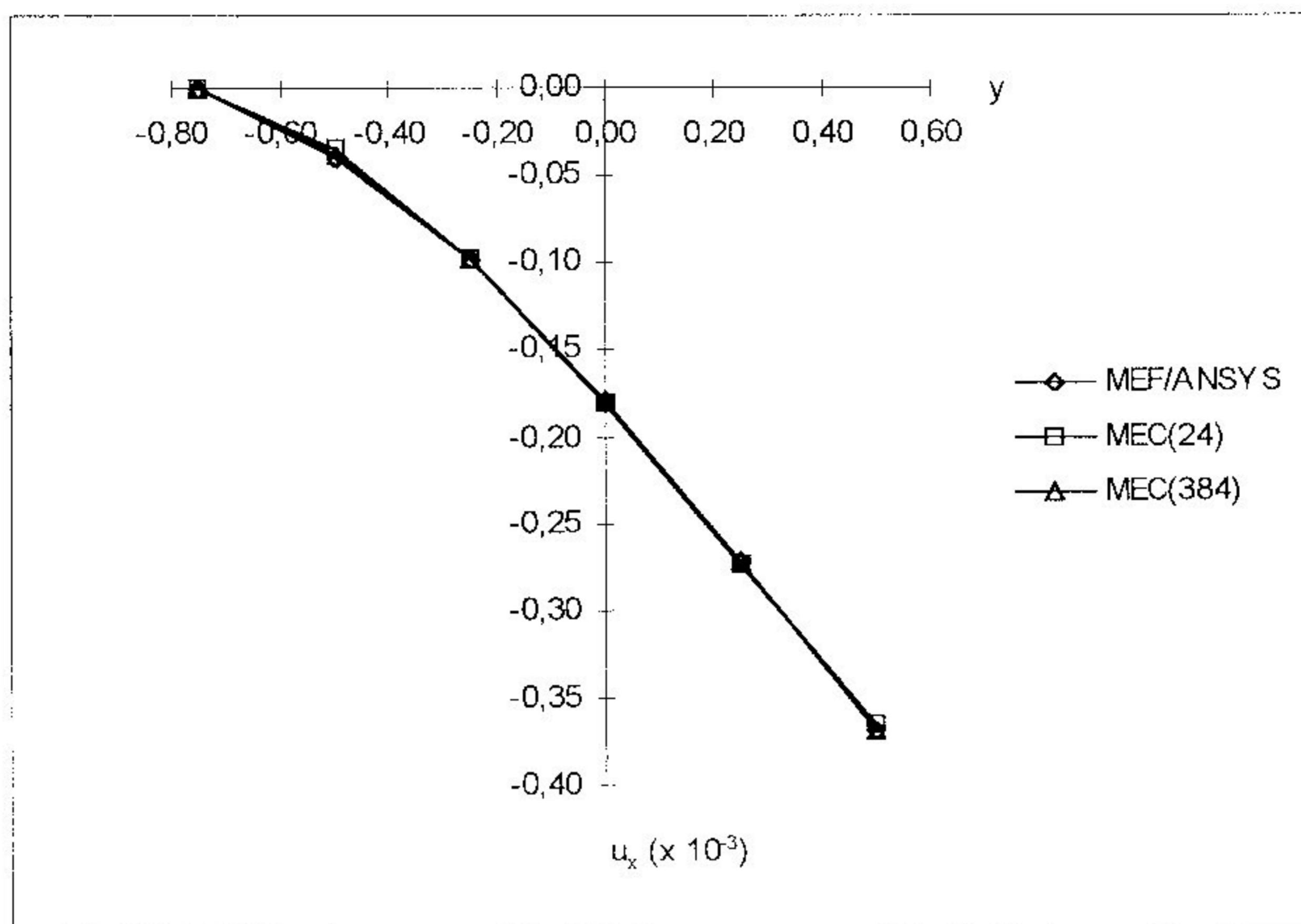


Figura 5.20 - Exemplo 2-d - deslocamentos u_x - eixo $x=0,5$

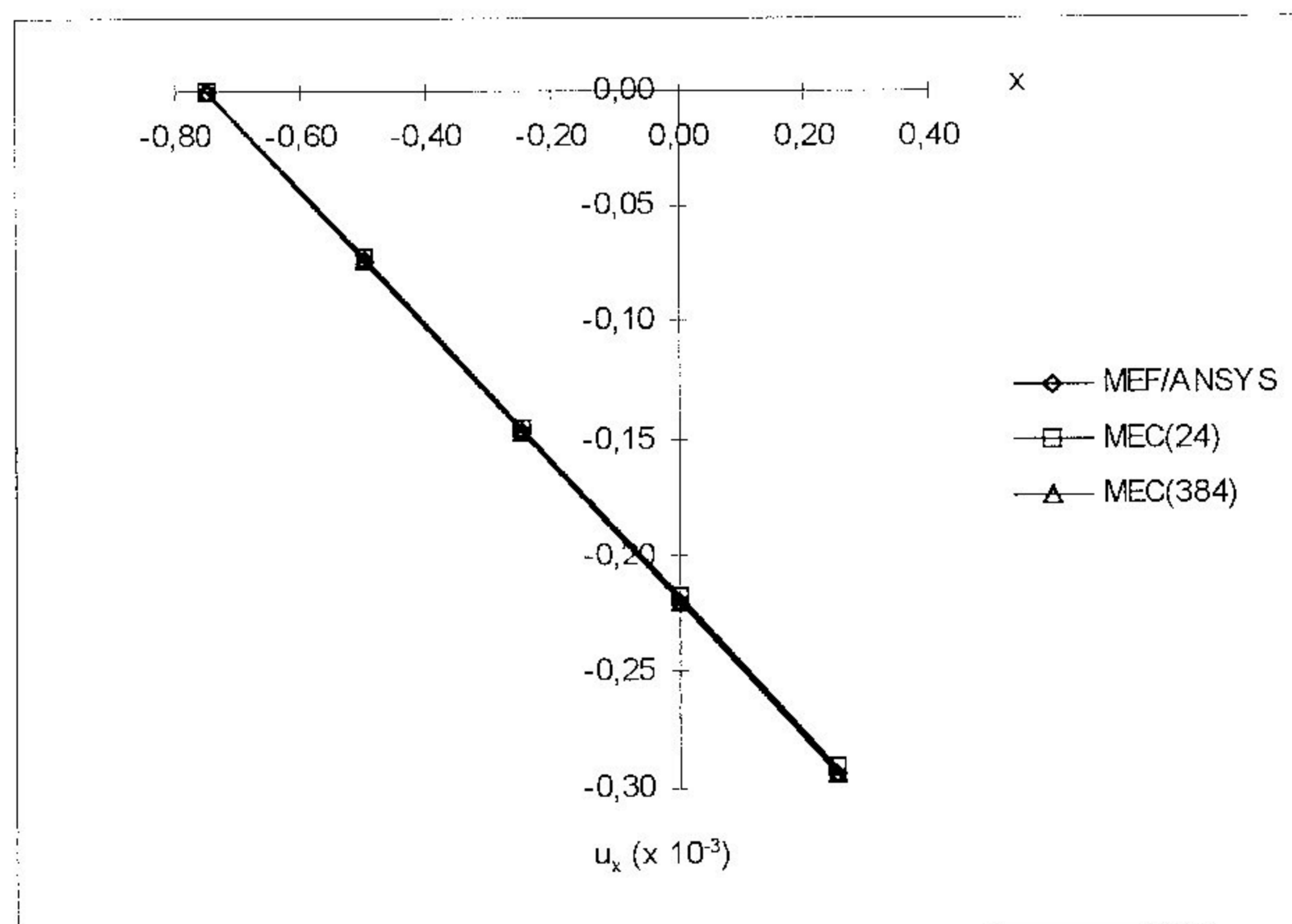


Figura 5.21 - Exemplo 2-d - deslocamentos u_x - eixo $y=0,5$

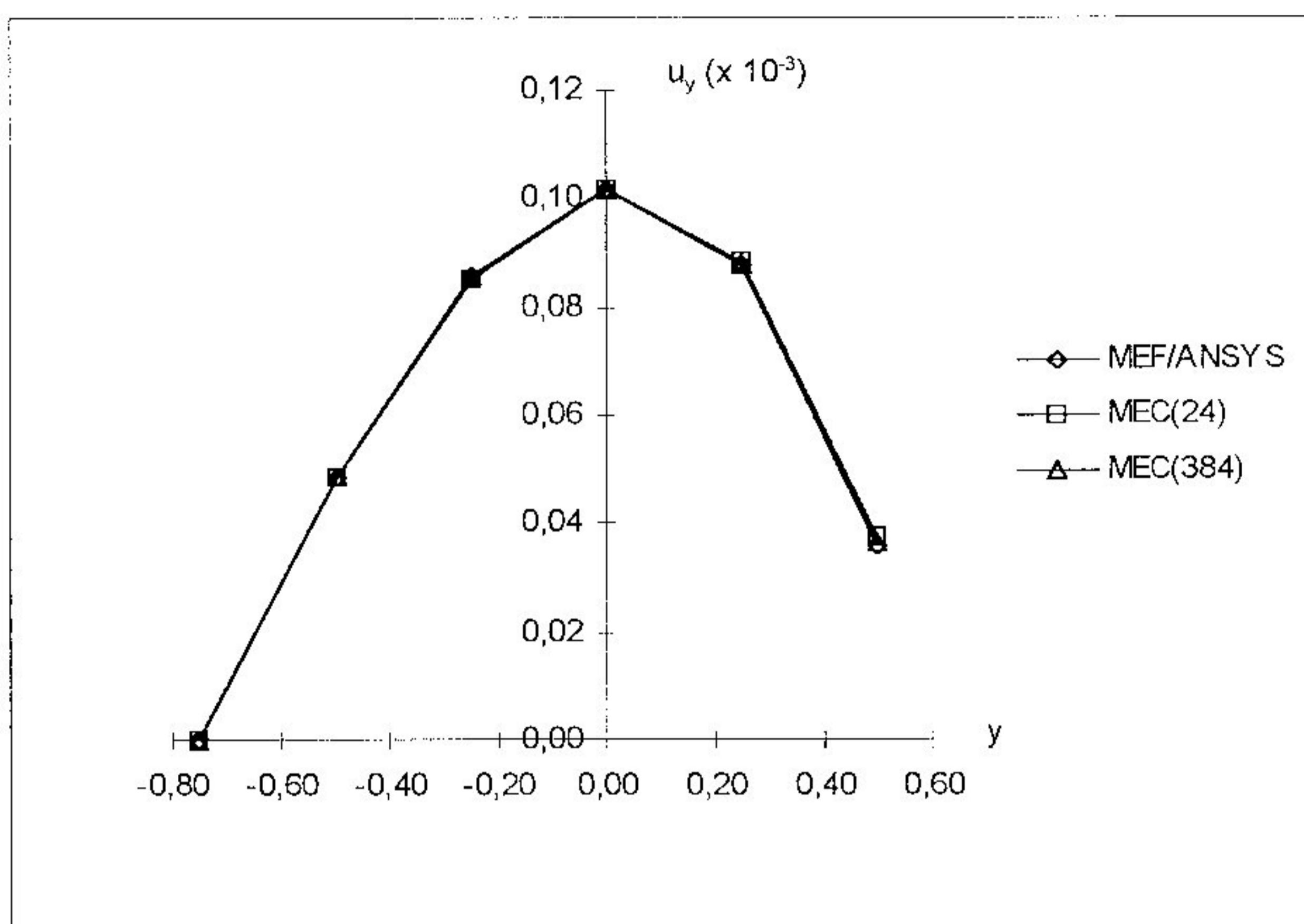


Figura 5.22 - Exemplo 2-d - deslocamentos u_y - eixo $x=0,5$

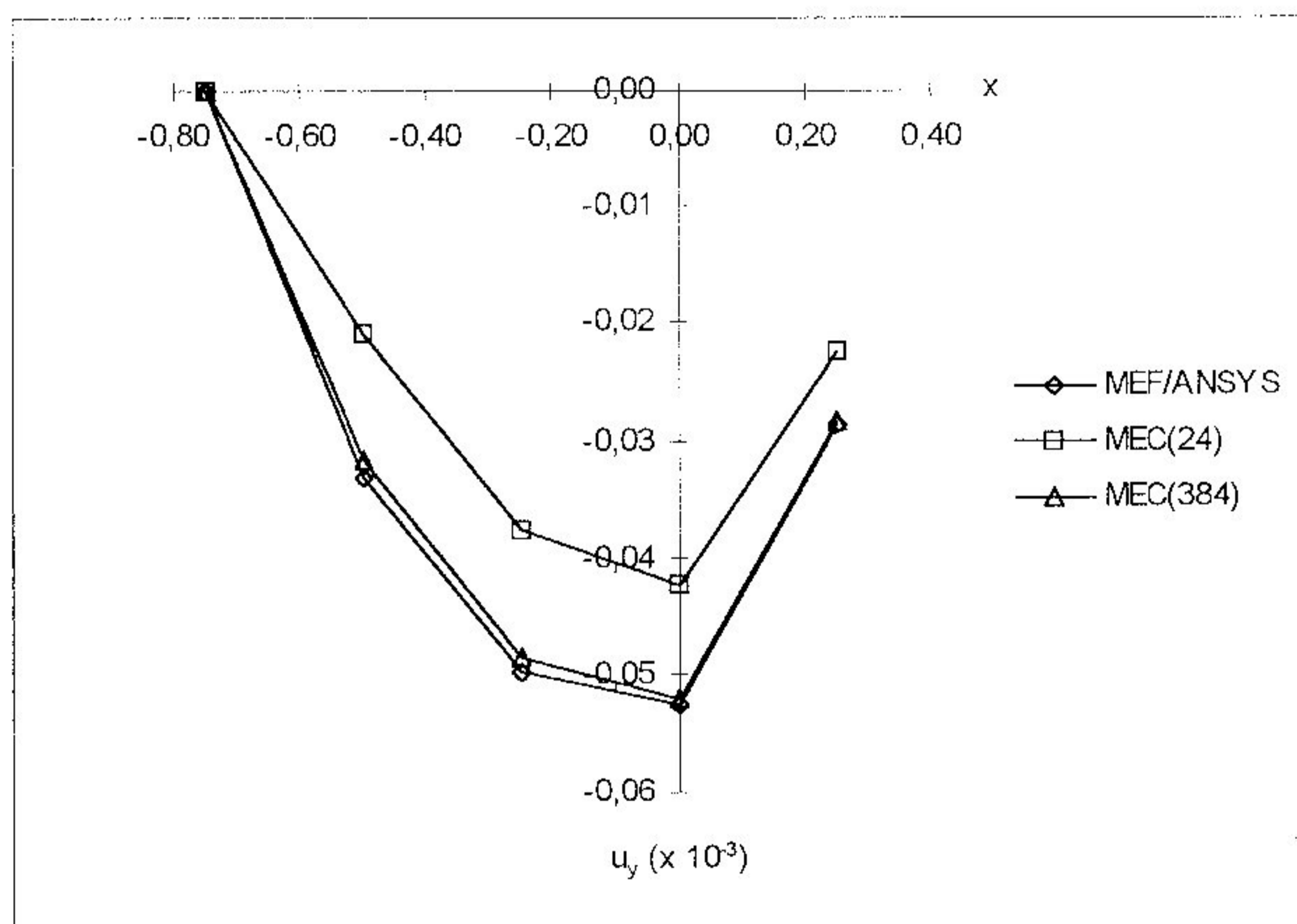


Figura 5.23 - Exemplo 2-d - deslocamentos u_y - eixo $y=0,5$

5.8 - Exemplo 3-a

Viga submetida à variação de temperatura parabólica

Seja uma viga submetida à variação parabólica de temperatura, ao longo do eixo y , no domínio. A fig. (5.24) ilustra a geometria da viga e as condições de contorno para análise térmica e análise elástica. O contorno foi dividido em 48 elementos de mesmo comprimento e o domínio foi dividido em 256 células triangulares.

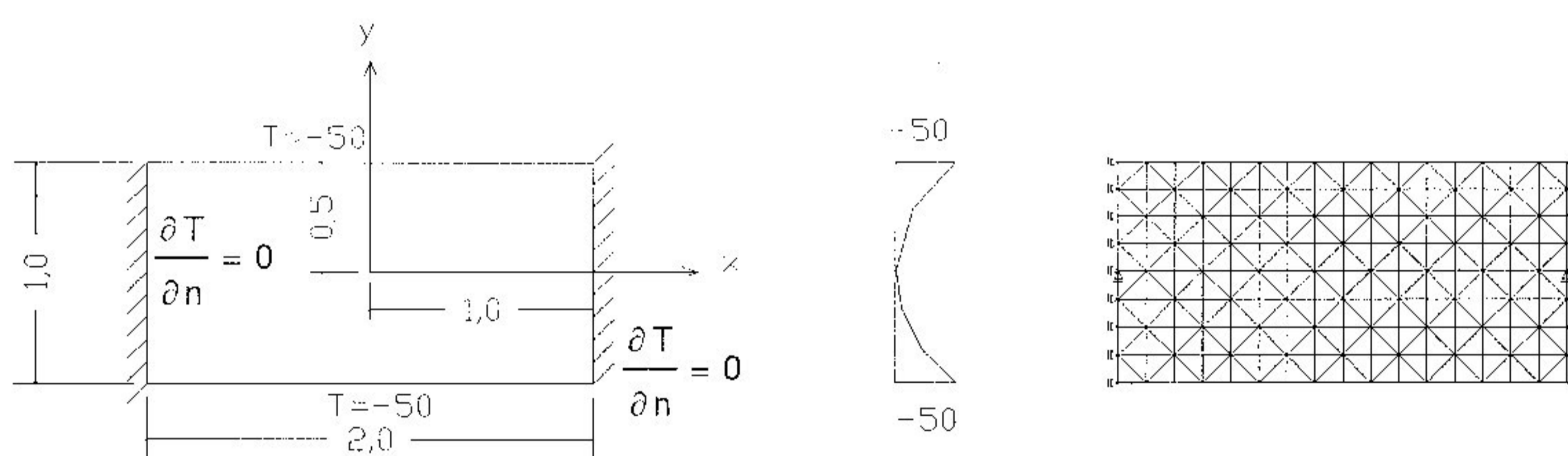


Figura 5.24 - Exemplo 3-a - geometria, condições de contorno e discretizações para variação de temperatura parabólica

É considerado estado plano de tensão. As propriedades físicas do material são as seguintes:

- módulo de elasticidade $E = 10^4 \text{ kN/m}^2$;
- coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$;
- coeficiente de dilatação térmica linear $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$.

Inicialmente as temperaturas em cada ponto foram determinadas através da solução analítica, dada por $T = -200y^2$

(eq. (3.46)), utilizando-se portanto a solução exata da temperatura em cada ponto de integração. Os resultados obtidos para forças de superfície ao longo da borda $x=1$ são apresentados na tab. (5.12), e são também ilustrados pela fig. (5.25).

Em seguida, o problema foi reanalisado elasticamente via MEC com os três procedimentos estudados, sendo as temperaturas nos pontos de integração obtidas por interpolação dos valores nodais de temperatura nos elementos de contorno e células internas. Os resultados obtidos para forças de superfície neste caso são apresentados na tab. (5.13), e são também ilustrados pela fig. (5.26).

Tabela 5.12 - Exemplo 3-a - forças de superfície p_x - temperatura analítica

$x = 1$ y	Analítica p_x	MTG / MMR / Células p_x	Erro %
0.000	0.0000	-0.0363	
0.125	0.3125	0.2772	11.30
0.250	1.2500	1.2087	3.30
0.375	2.8125	2.8077	0.17
0.500	5.0000	4.7816	4.37

Tabela 5.13 - Exemplo 3-a - forças de superfície p_x - temperatura interpolada

$x = 1$ y	Analítica p_x	MTG / MMR p_x	Erro %	Células p_x	Erro %
0.000	0.0000	-0.0061		0.0149	
0.125	0.3125	0.3069	1.79	0.3284	5.09
0.250	1.2500	1.2403	0.78	1.2600	0.80
0.375	2.8125	2.8281	0.55	2.8581	1.62
0.500	5.0000	4.8814	2.37	4.8350	3.30

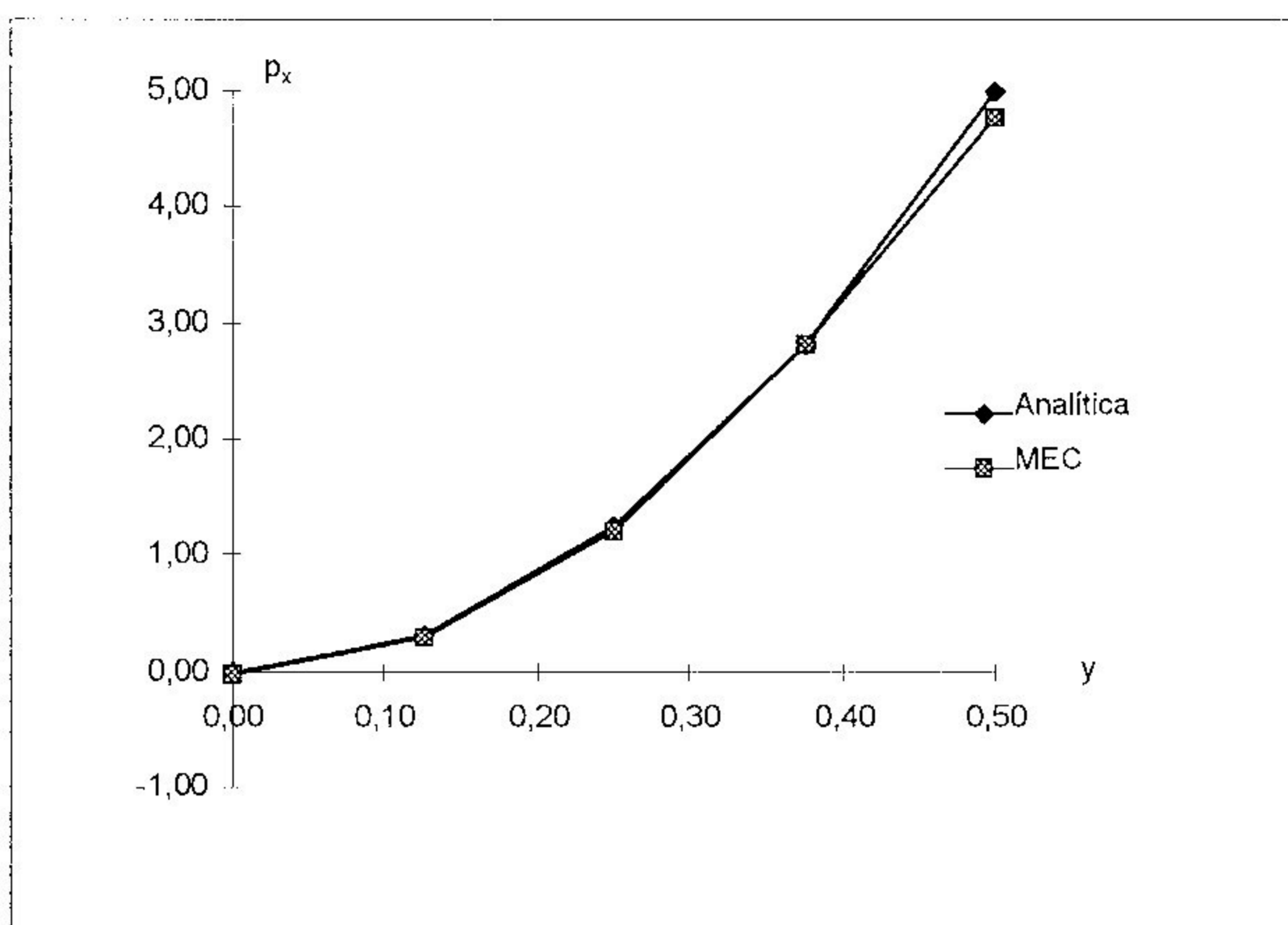


Figura 5.25 - Exemplo 3-a - temperatura analítica para p_x

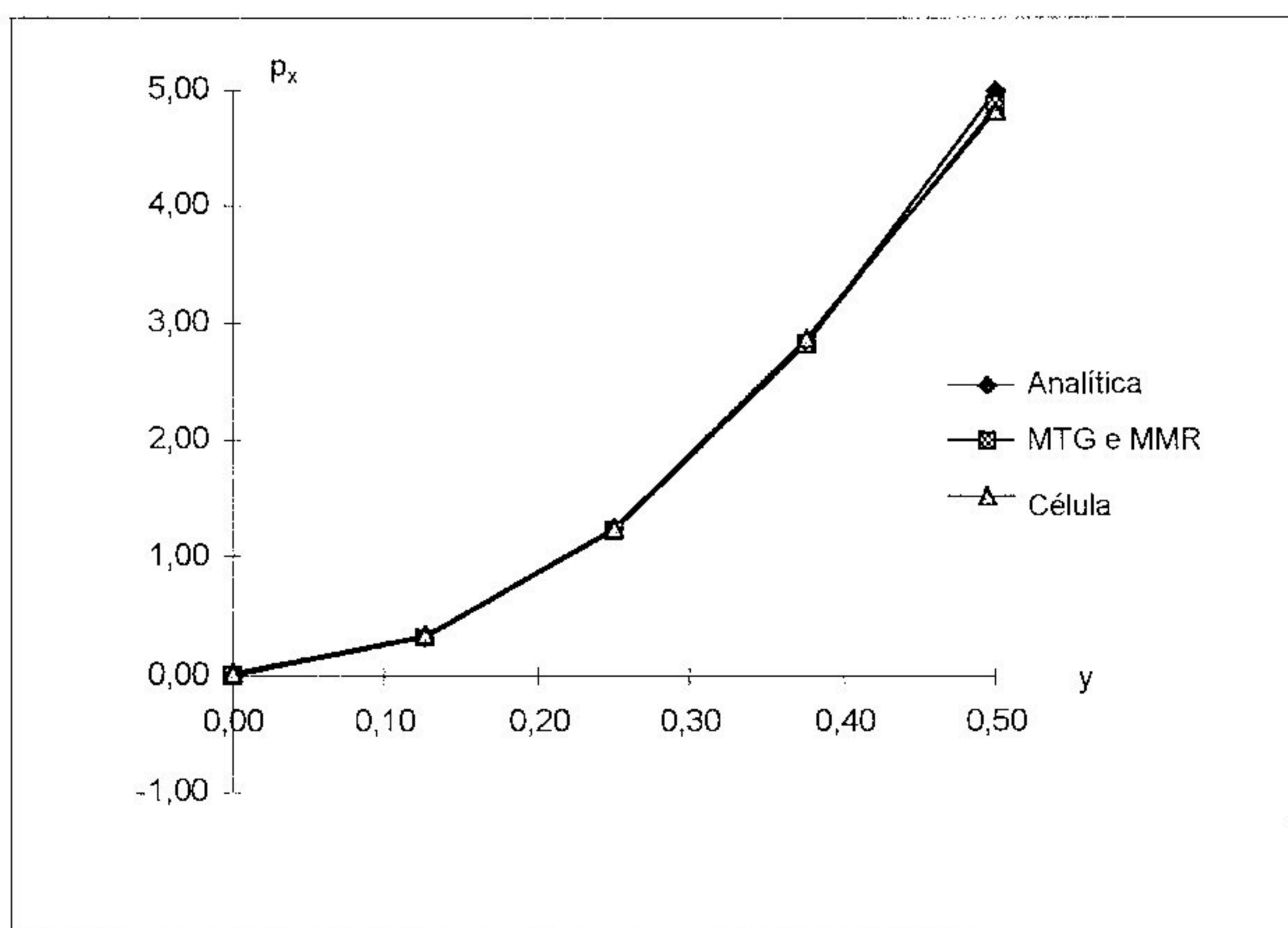


Figura 5.26 - Exemplo 3-a - temperatura interpolada para p_x

Observa-se na utilização dos valores interpolados que o resultado obtido com a divisão em células apresenta diferenças maiores com relação aos outros procedimentos. Isto se deve ao fato das funções de interpolação lineares não representarem exatamente a variação de temperatura parabólica nos elementos de contorno e nas células internas.

5.9 - Exemplo 3-b

Viga submetida à um campo de temperatura com descontinuidade no contorno

Este exemplo usa a mesma viga do exemplo 3.a, com as mesmas condições de contorno para o problema de elasticidade e com condições de contorno mostradas na fig. (5.27) para a análise térmica.

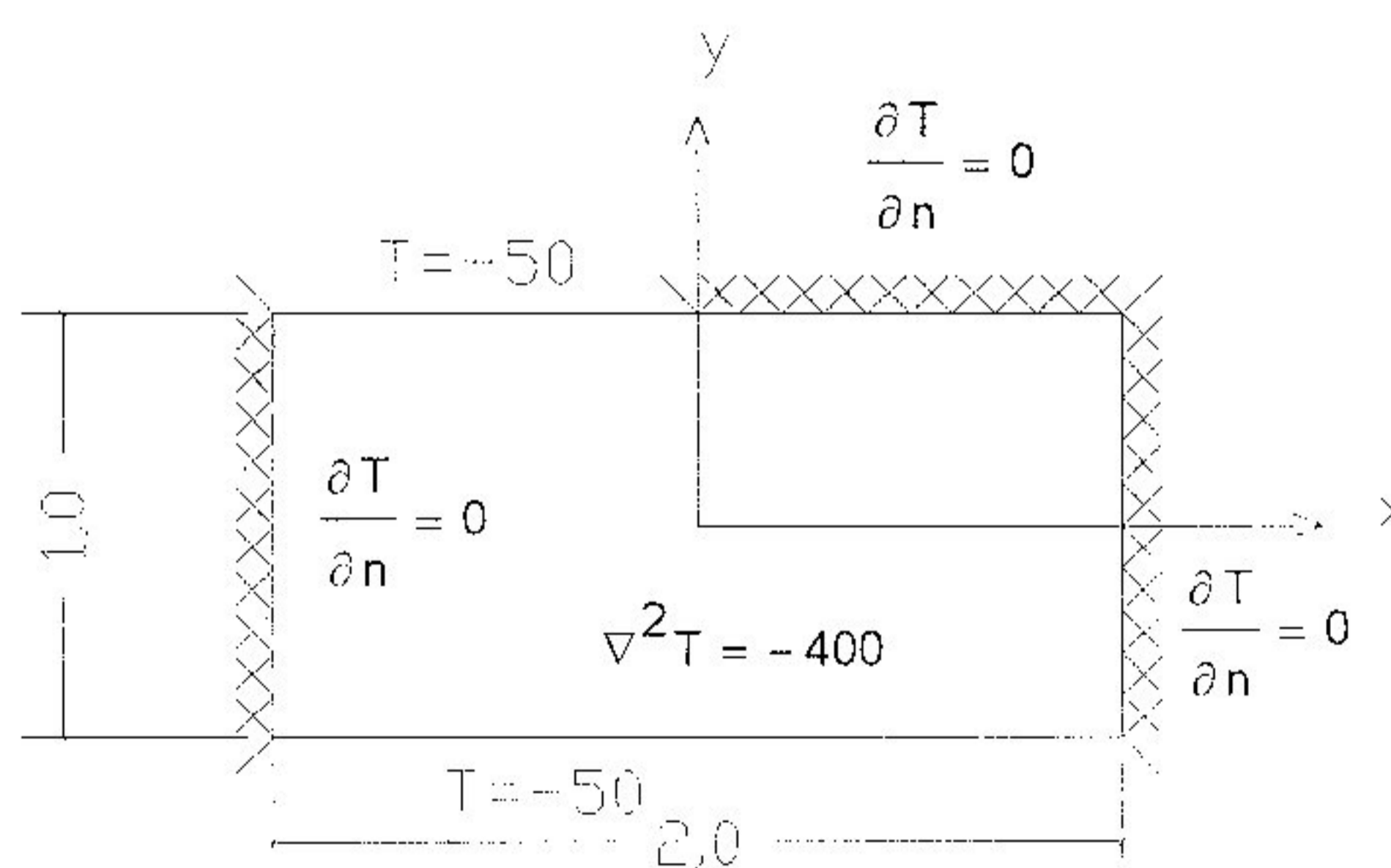


Figura 5.27 - Exemplo 3-b - Problema de descontinuidade de temperatura

A análise do problema foi efetuada adotando-se uma malha mais refinada para a discretização, levando-se em consideração o ponto onde ocorre a singularidade da derivada da temperatura, utilizando-se 58 elementos de contorno e 330 células triangulares internas (fig. (5.28) e (5.29)). Para comparações, uma malha com 128 elementos de contorno e 400 células internas (fig. (5.30) e (5.31)) também é utilizada.

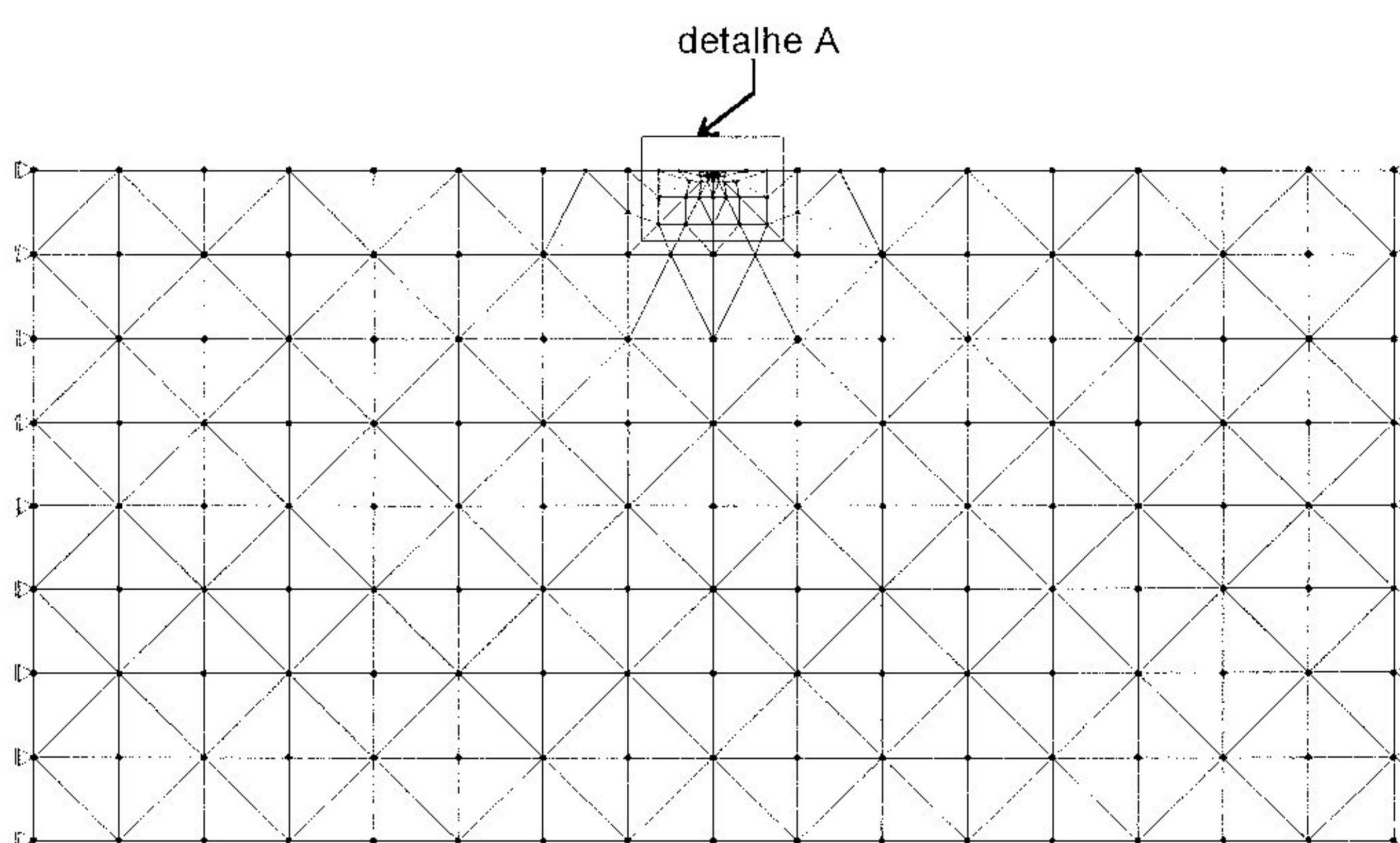


Figura 5.28 - Exemplo 3-b - discretização - 58 elementos e 330 células

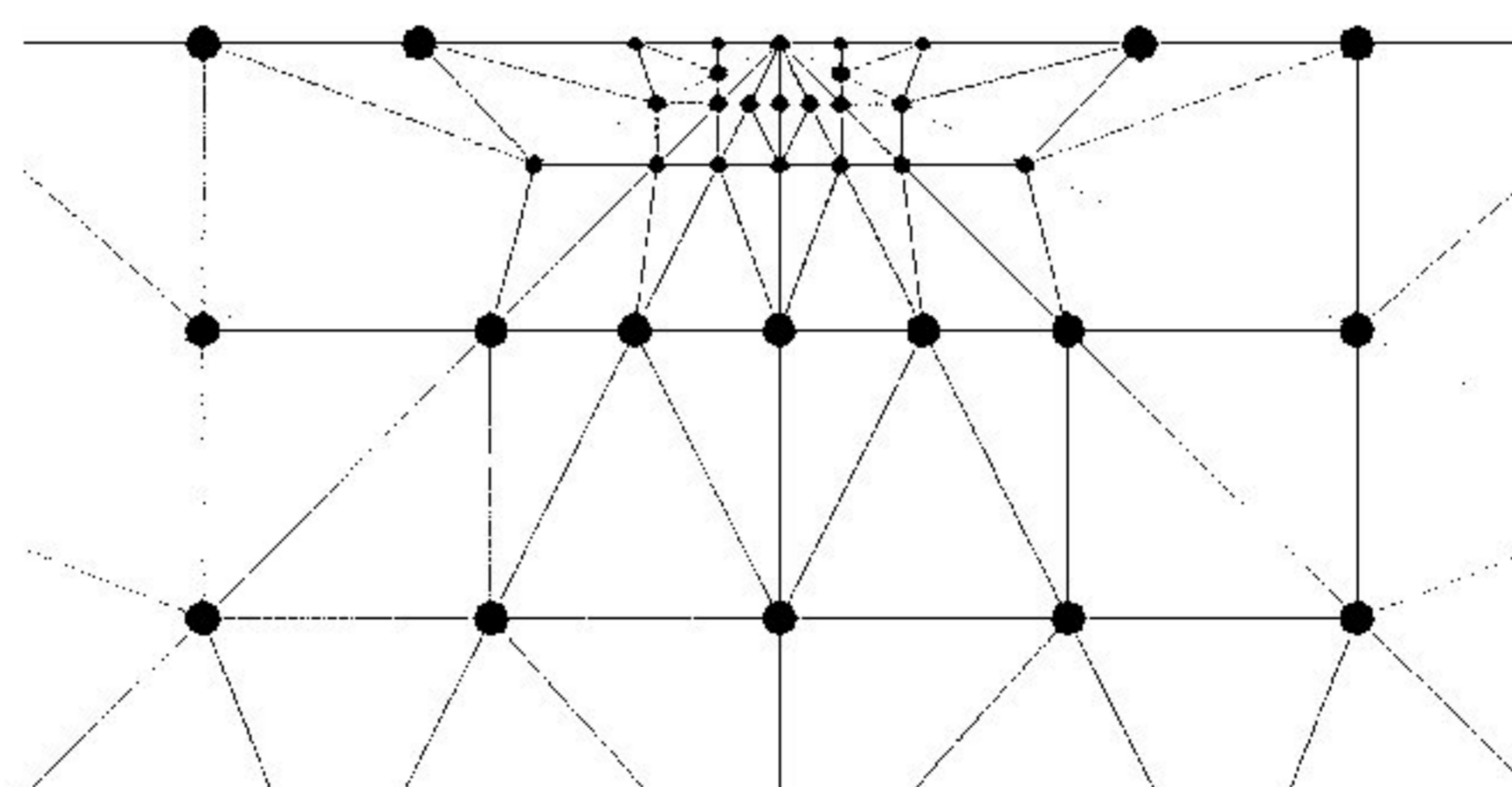


Figura 5.29 - Exemplo 3-b - detalhe A

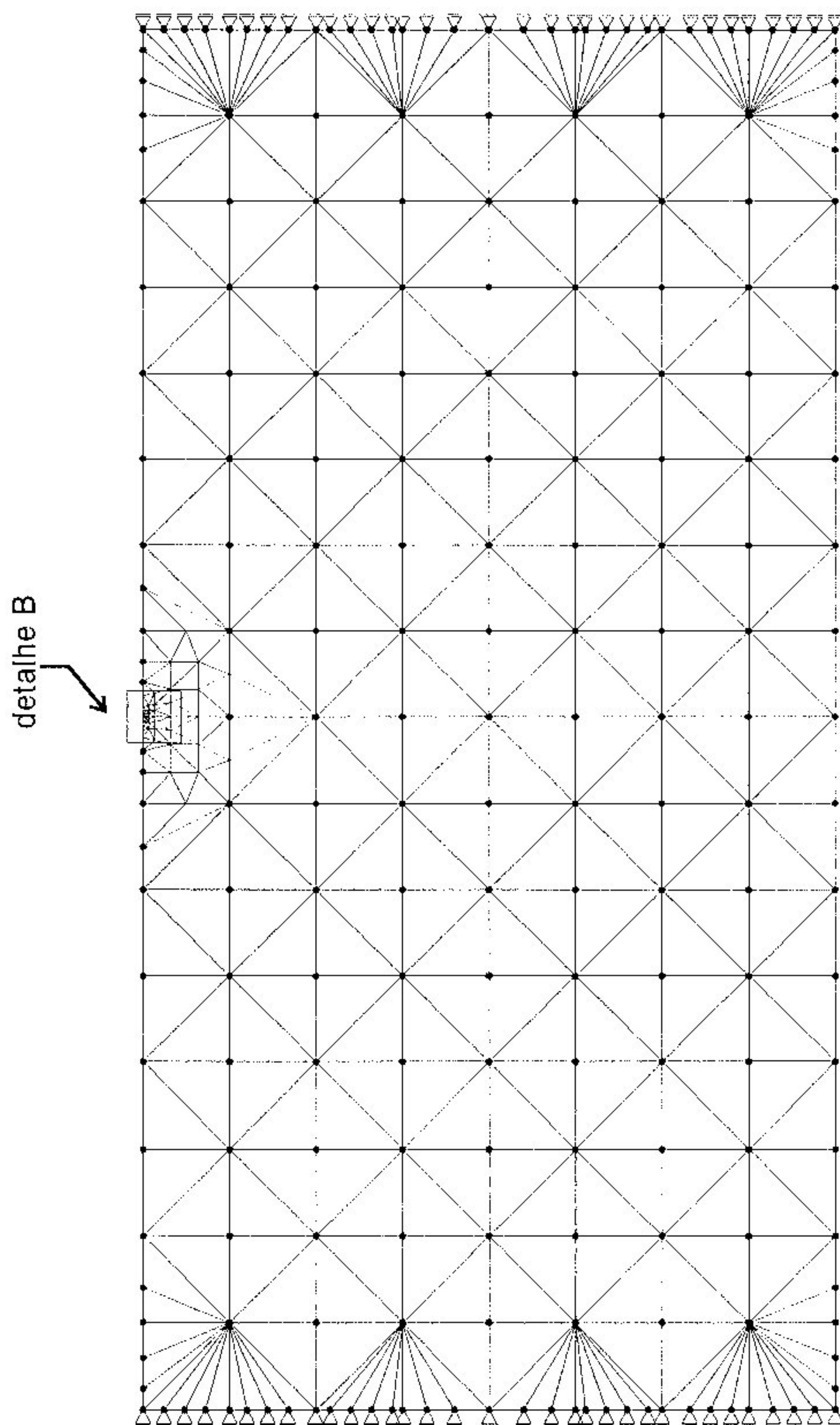


Figura 5.30 - Exemplo 3-b - discretização - 128 elementos e 400 células

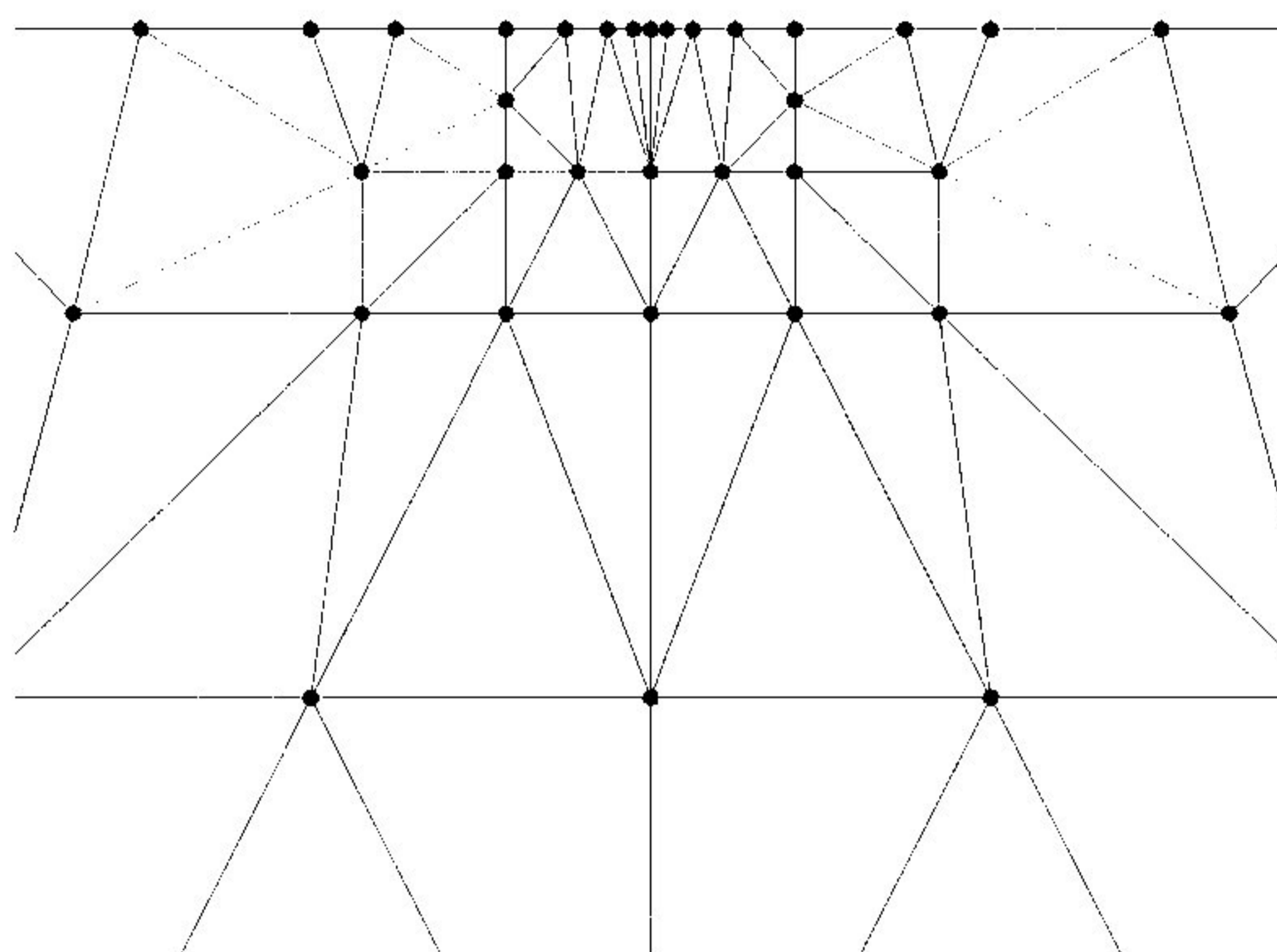


Figura 5.31 - Exemplo 3-b - detalhe B

Como não se dispõe de uma solução analítica para o problema térmico neste caso, uma solução numérica foi obtida utilizando-se o MEC e adotando-se uma função do tipo tensor de Galerkin para transformar a integral de domínio devido à fonte de calor interna em uma integral de contorno equivalente (BREBBIA *et alii* (1984)).

A mesma discretização de contorno foi utilizada nas análises térmicas e elásticas. Os resultados obtidos são mostrados na tab. (5.14), e apresentam comportamento estável. É interessante observar-se, entretanto, que os resultados utilizando o MTG e o MMR são diferentes neste exemplo. Isto pode ser justificado através da análise da expansão da integral de domínio em integrais de contorno equivalentes (eq. (3.66) e eq. (3.84)). Em ambos os métodos a expansão é dada por três integrais que, apesar de suas singularidades, possuem constantes diferentes em suas expressões. Caso exista

equilíbrio de fluxo no contorno (ou seja, a condição de equilíbrio de fluxo de Gauss seja satisfeita) estas diferenças nas constantes não alteram o resultado final da integral de domínio (obtida através de três integrais de contorno equivalentes). A presença do ponto com singularidade na derivada da temperatura deste exemplo perturba esta condição de equilíbrio e resulta em valores diferentes para a integral de domínio em cada método.

Uma tentativa para melhorar os resultados elásticos usando 58 elementos de contorno foi feita através do uso dos valores nodais da temperatura e suas derivadas (análise térmica) obtidas da discretização mais refinada (128 elementos de contorno). Como mostrado na tab. (5.15), os resultados com divisão em células ficam mais precisos quando comparados com os resultados obtidos no passo anterior. O mesmo não é verdade em relação ao MTG e MMR, desde que os valores térmicos na malha de 58 elementos obtidos por uma discretização diferente não satisfazem a condição de equilíbrio de Gauss.

Os resultados obtidos estão melhores ilustrados nas figuras (5.32) a (5.37).

Tabela 5.14 - Deslocamentos u_y e forças de superfície p_x ao longo do eixo $x = 1$

$x = 1$ y	58 elementos de contorno						128 elementos de contorno					
	MTG		MMR		Células		MTG		MMR		Células	
	$u_y (x 10^{-3})$	p_x	$u_y (x 10^{-3})$	p_x	$u_y (x 10^{-3})$	p_x	$u_y (x 10^{-3})$	p_x	$u_y (x 10^{-3})$	p_x	$u_y (x 10^{-3})$	p_x
-0.500	-0.0039	7.5067	-0.0006	7.3653	-0.0016	7.1662	0.0111	7.3353	0.0093	7.3147	0.0112	7.4033
-0.250	-0.0684	0.9336	-0.0707	0.8793	-0.0703	0.8615	-0.0571	0.8292	-0.0582	0.8162	-0.0571	0.8345
0.000	0.0000	-2.8202	0.0000	-2.8656	0.0000	-2.8721	0.0000	-2.9098	0.0000	-2.9183	0.0000	-2.8618
0.250	0.2602	-4.0593	0.2612	-4.1076	0.2607	-4.1225	0.2802	-4.1134	0.2797	-4.1201	0.2784	-4.1360
0.500	0.5251	-2.8345	0.5278	-2.9861	0.5270	-3.1785	0.5491	-3.0021	0.5488	-3.0581	0.5464	-3.1666

Tabela 5.15 - Resultados para diferentes discretizações entre análise térmica e elástica

$x = 1$ y	MTG			MMR			Células		
	$u_y (x 10^{-3})$	p_x		$u_y (x 10^{-3})$	p_x		$u_y (x 10^{-3})$	p_x	
-0,500	-0,2766	5,4915		-0,1027	6,1992		-0,0015	7,1913	
-0,250	-0,2414	-0,6970		-0,1252	0,3057		-0,0714	0,8467	
0,000	0,0000	-3,5004		0,0000	-3,0280		0,0000	-2,9095	
0,250	0,1629	-3,9098		0,2448	-3,8461		0,2633	-4,1755	
0,500	0,4090	-5,7812		0,5081	-3,4610		0,5327	-3,2278	

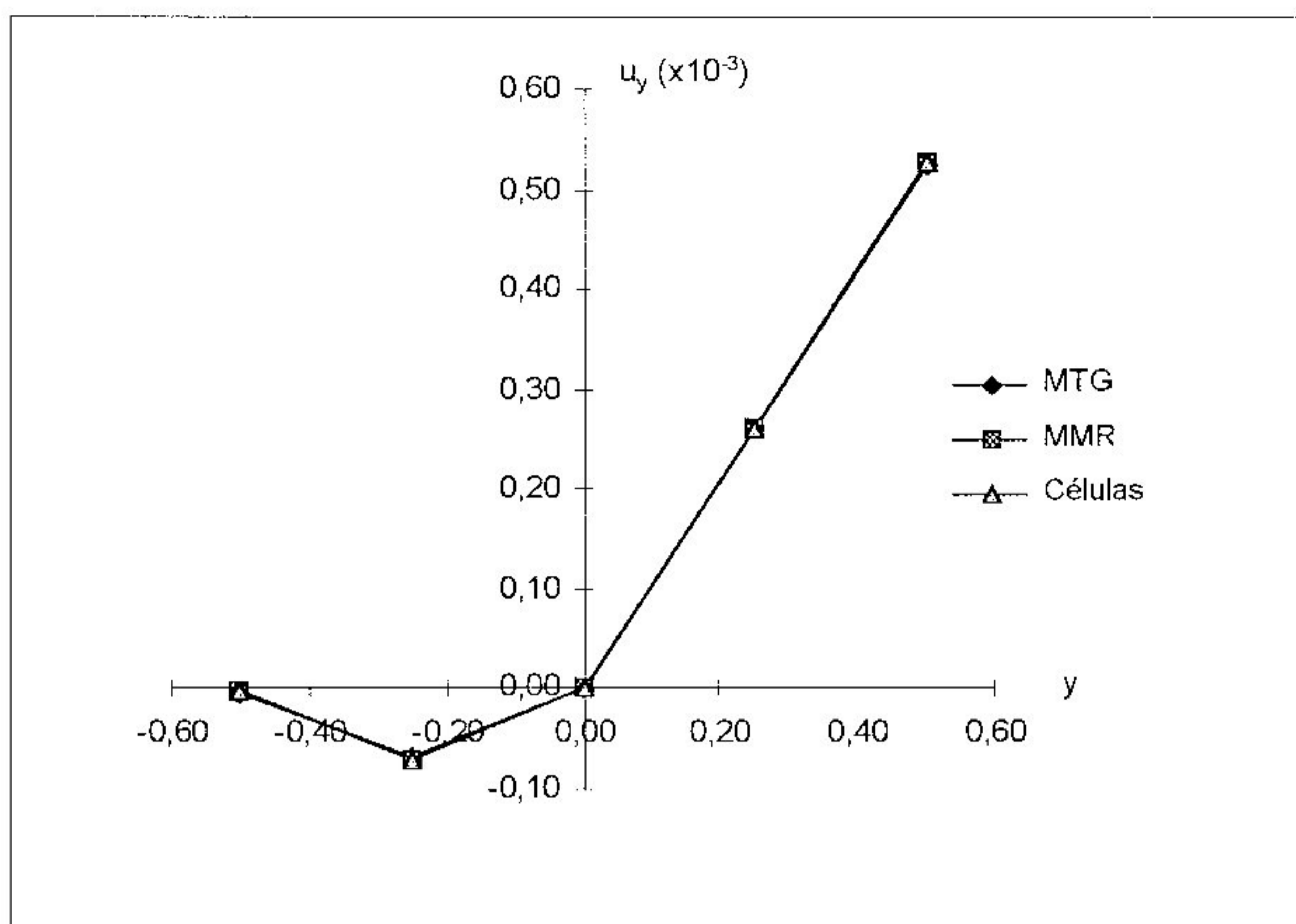


Figura 5.32 - Exemplo 3-b - deslocamento u_y - 58 elementos

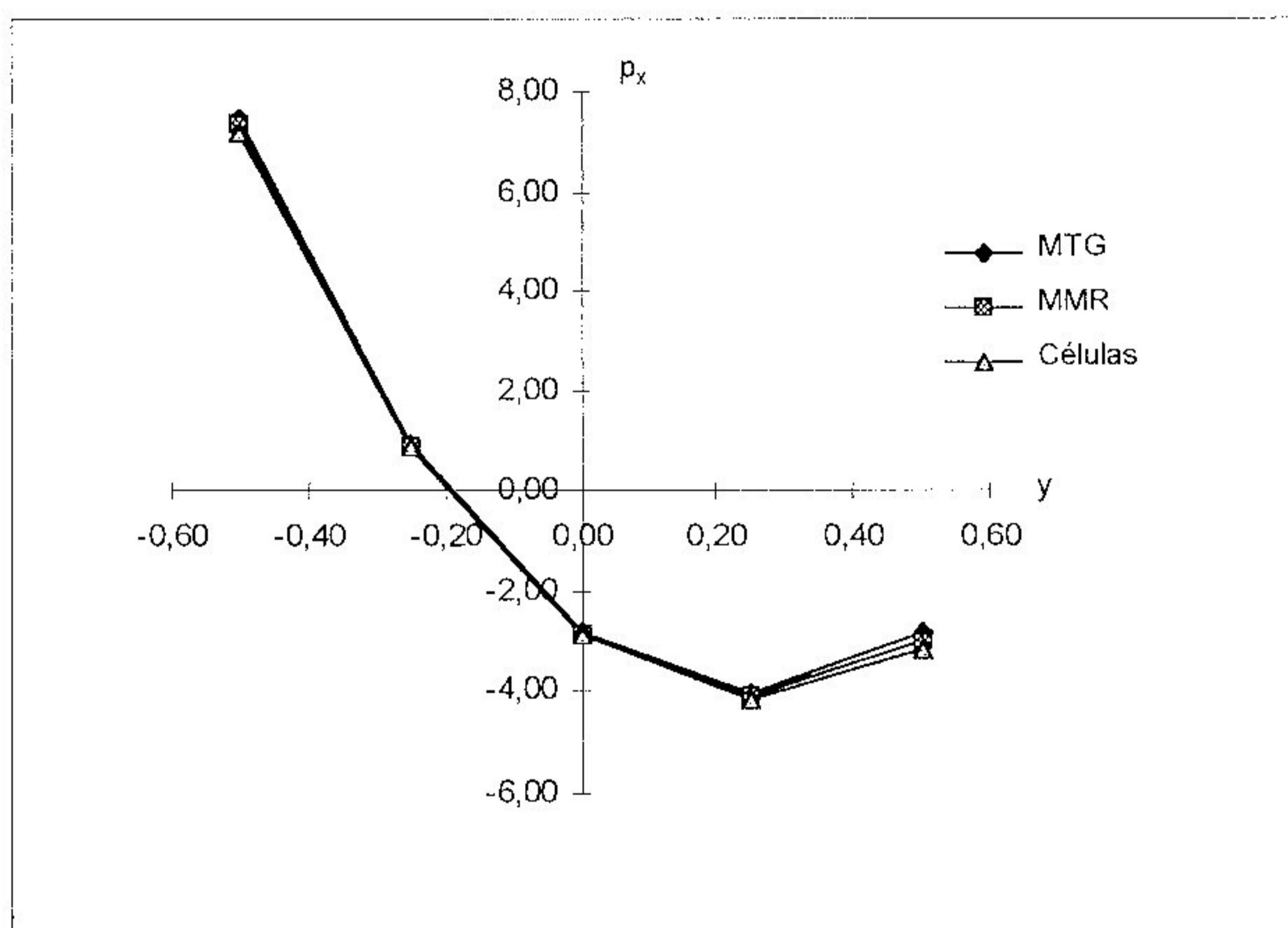


Figura 5.33 - Exemplo 3-b - força de superfície p_x - 58 elementos

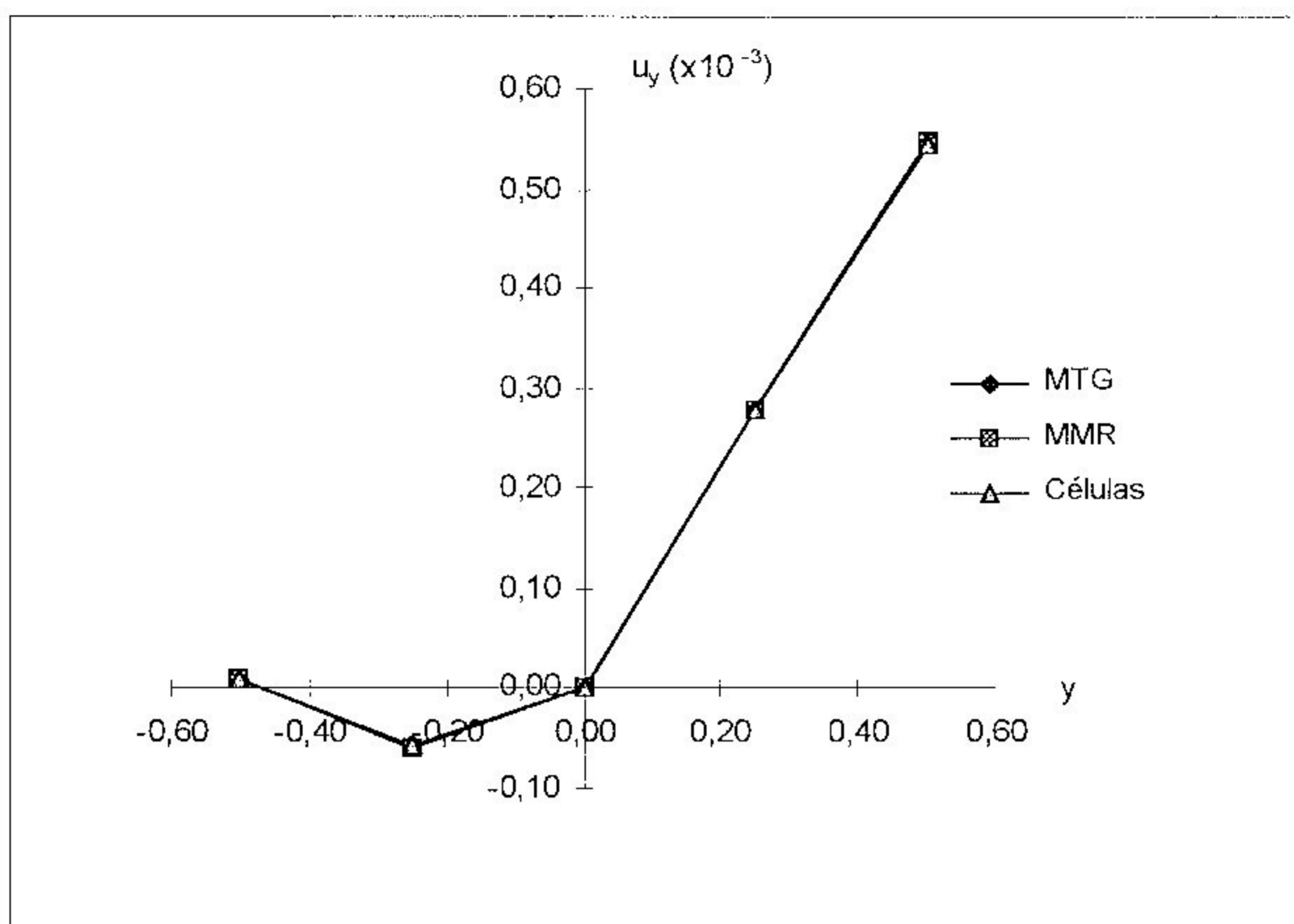


Figura 5.34 - Exemplo 3-b - deslocamento u_y - 128 elementos

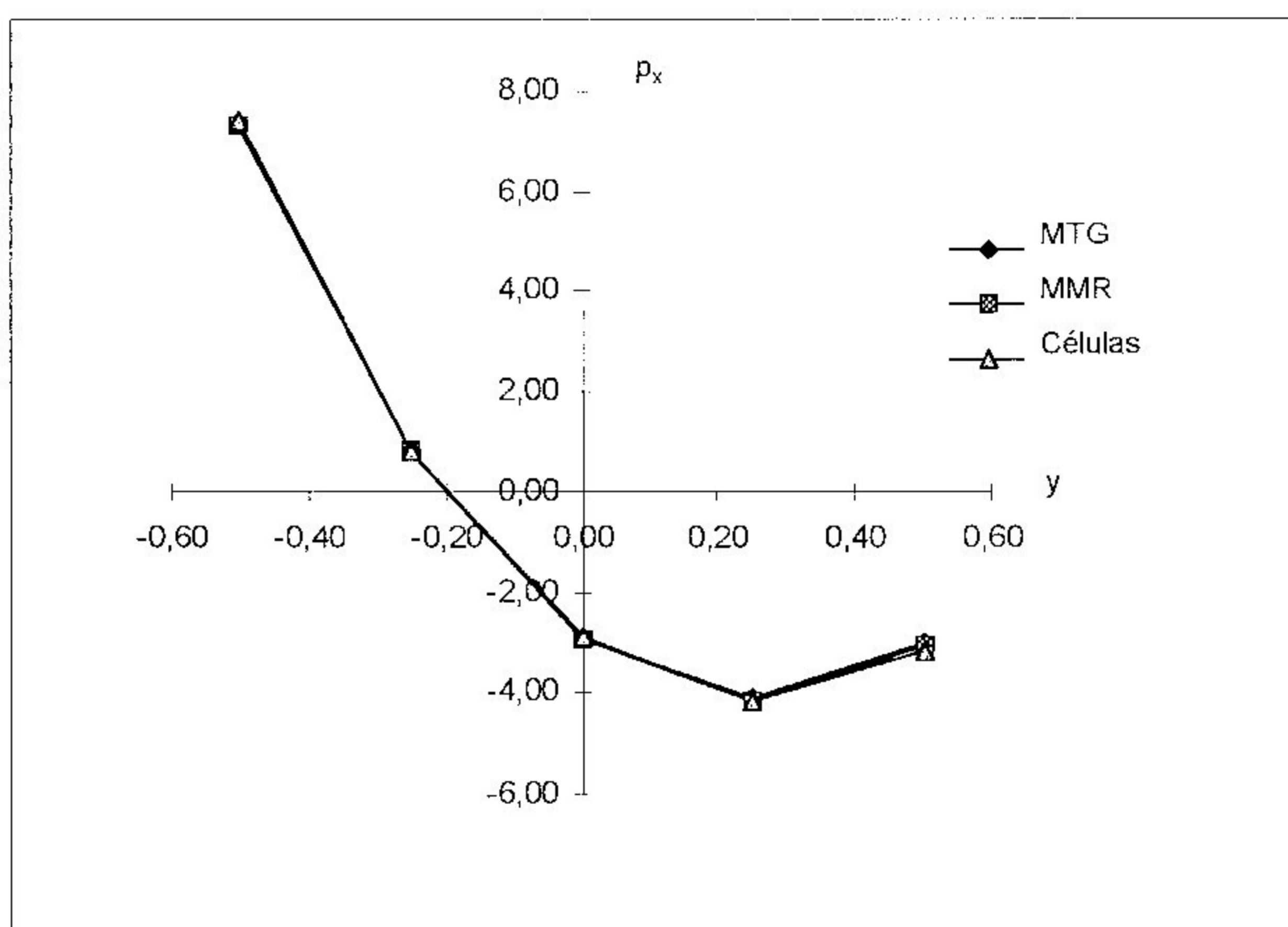


Figura 5.35 - Exemplo 3-b - força de superfície p_x - 128 elementos

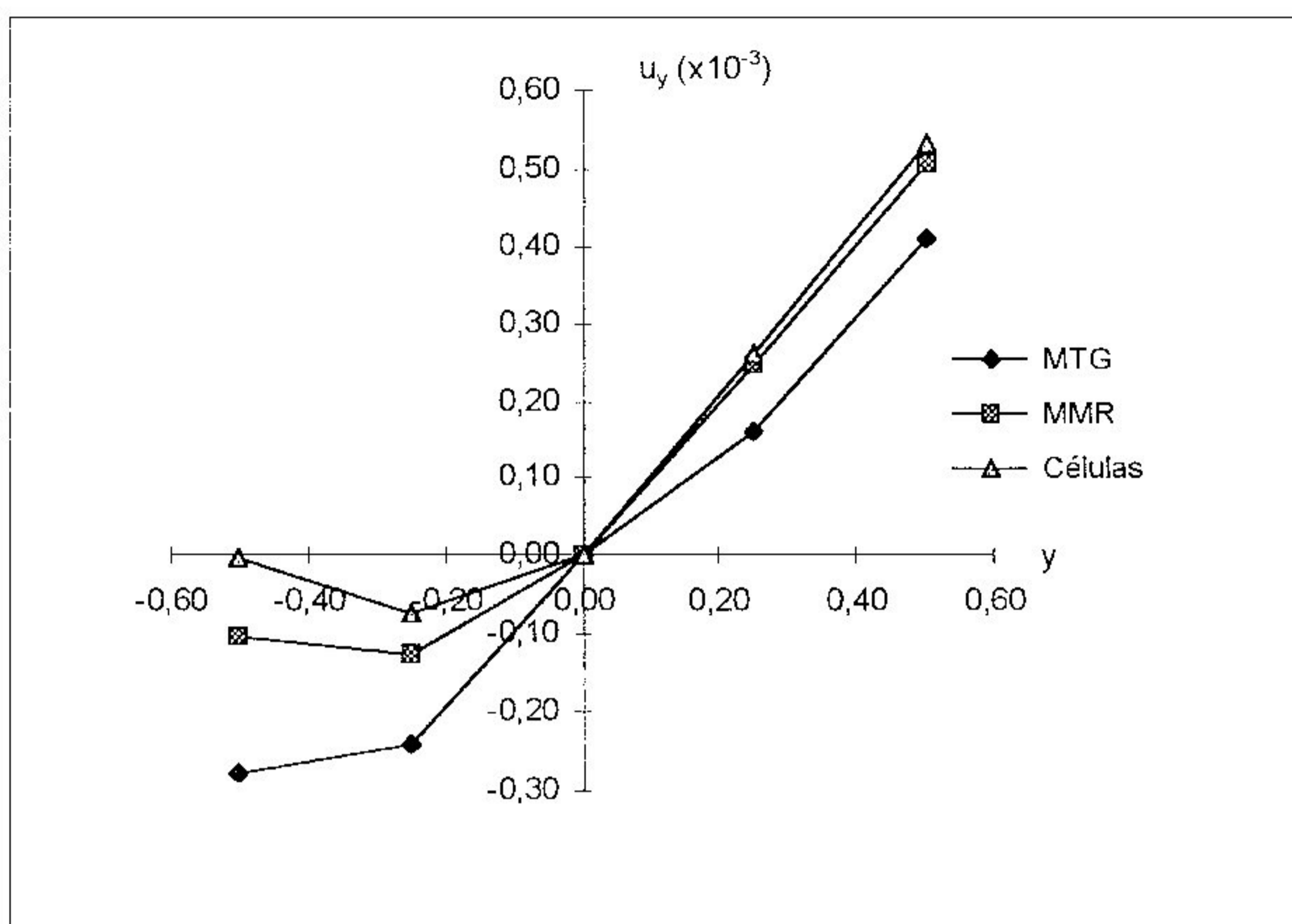


Figura 5.36 - Exemplo 3-b - deslocamento u_y

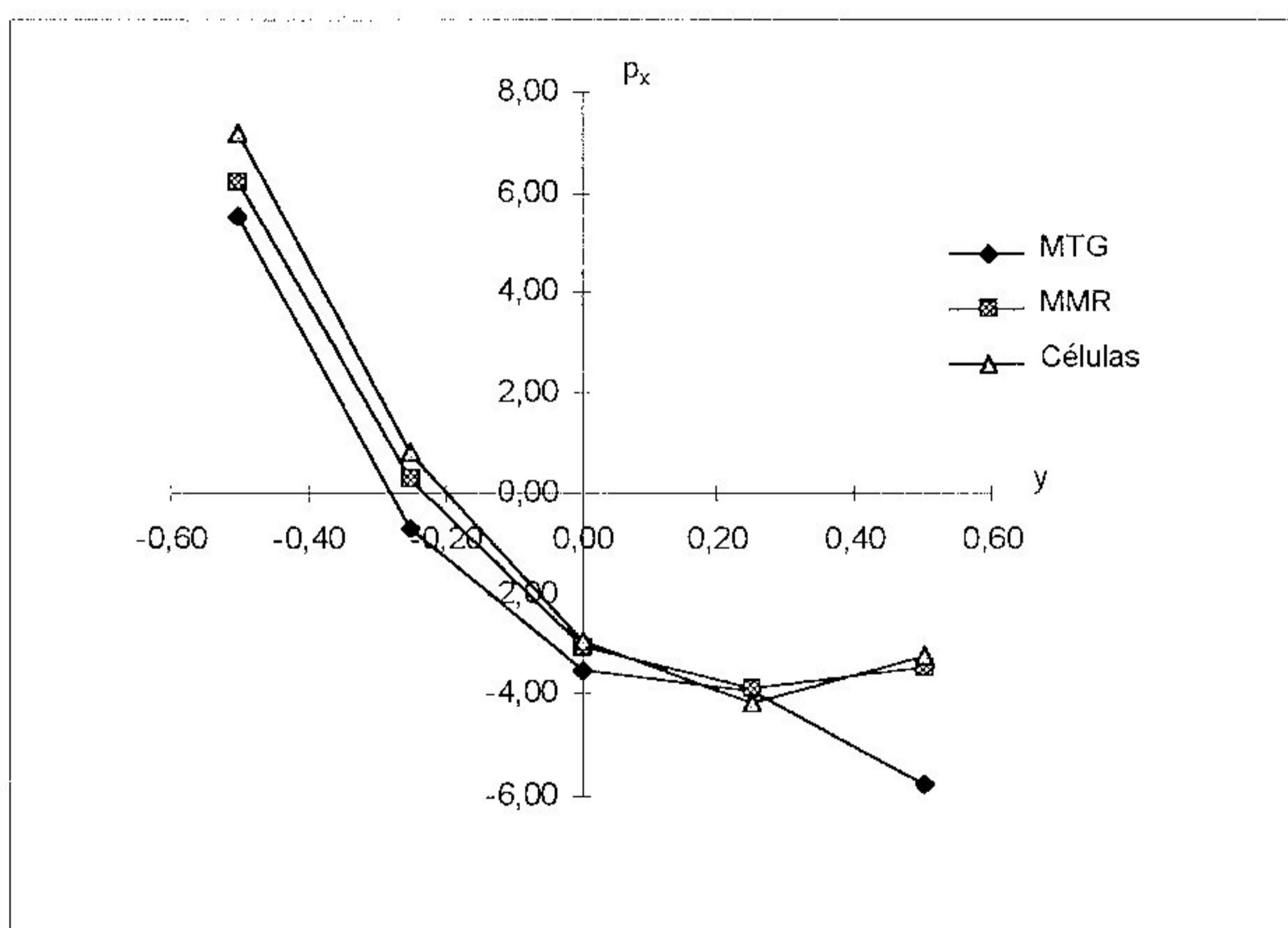


Figura 5.37 - Exemplo 3-b - força de superfície p_x

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

As integrais de domínio devidas à consideração de forças gravitacionais e variação de temperatura na formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi avaliada pelos seguintes procedimentos: discretização do domínio em células, Método do Tensor de Galerkin (MTG) e Método da Múltipla Reciprocidade (MMR).

A comparação dos resultados obtidos através de implementações efetuadas através do MEC com os resultados correspondentes às análises processadas através do MEF/ANSYS mostra um excelente nível de precisão, quando adotam-se malhas refinadas em ambos os métodos (exemplos 2-a, 2-b, 2-c e 2-d). A comparação dos resultados obtidos através do MEC com soluções analíticas também apresentou níveis de precisão muito adequados como no caso dos exemplos 1-a, 1-b e 3-a.

Comparando-se os resultados obtidos com os procedimentos apresentados para o MEC, conclui-se que os mesmos são semelhantes apesar de serem utilizadas formulações diferentes. Para o MTG e o MMR, os resultados são idênticos, com exceção dos problemas que não apresentam equilíbrio de fluxo no contorno. Isto confirma a validade da formulação de cada procedimento de cálculo da integral de domínio.

A convergência dos resultados foi observada com o refinamento da malha em todos os exemplos utilizados.

Verificou-se que qualquer constante adicionada à solução fundamental (eq. (2.54) e eq. (3.57)) gera resultados ligeiramente alterados, dependendo do estado de equilíbrio da solução. Deve-se observar que no caso de problemas de temperatura, utiliza-se a derivada da solução fundamental na integral de domínio e na derivação esta constante desaparece. Se mesmo assim for adicionada uma constante na solução fundamental do sistema de equações, os resultados serão modificados se não houver um estado material de equilíbrio de forças, o qual ocorre por exemplo quando tem-se simetria da estrutura e do carregamento. Onde os resultados são equilibrados a constante não tem influência na solução final.

Para consideração de força gravitacional devem ser feitas as seguintes considerações:

- para haver coerência da formulação no MTG, uma vez que a solução fundamental está relacionada com o tensor de Galerkin, tem-se obrigatoriamente que utilizar a constante dada pela eq. (3.57);

- para a divisão em células utiliza-se diretamente a solução fundamental para as integrais de domínio e para se obterem as matrizes de influência H e G . Logo, pode-se considerar qualquer valor para a constante mas, se os resultados não estiverem equilibrados, os mesmos serão alterados em função do valor da constante, ficando tão mais equilibrados quanto maior for a constante;
- para o MMR, onde utiliza-se uma solução fundamental de ordem superior, a adição de uma constante modifica a primitiva a ser utilizada, e os resultados também sofrerão alteração se não estiverem equilibrados.

Os exemplos apresentados ilustraram bem este comportamento. O primeiro exemplo que tem simetria de forma e carregamento, apresentou os mesmos resultados para deslocamentos com os três métodos, apesar de ter sido utilizada uma constante nula para a divisão em células e MMR. No segundo exemplo, que não satisfaz automaticamente as condições de equilíbrio por não ter simetria, os resultados foram os mesmos para o MMR e divisão em células (com constante nula), mas diferentes dos obtidos com o tensor de Galerkin. Utilizando-se a mesma constante para os três métodos obtêm-se resultados iguais também para o segundo exemplo.

No caso de carregamento térmico foi feita uma comparação dos resultados obtidos com diferentes formas de se tratarem os dados, para uma variação parabólica de temperatura com solução analítica conhecida. Inicialmente os valores da temperatura nos pontos de integração foram obtidos analiticamente e os resultados obtidos com os três métodos foram idênticos. Depois, com os valores

exatos nos pontos nodais das células internas e elementos de contorno, obteve-se a temperatura nos pontos de integração utilizando-se a interpolação linear dos valores nodais. Neste caso, como as funções de interpolação lineares não representaram exatamente a variação de temperatura adotada, obtiveram-se resultados distintos para os métodos que utilizam a interpolação apenas no contorno (MTG e MMR) e no domínio (divisão em células). Apesar dos valores distintos, os resultados finais foram equivalentes em termos de precisão.

Com a finalidade de enfatizar as diferenças entre os procedimentos foi utilizado um problema com descontinuidade de temperatura. A solução para o campo de temperaturas foi obtida numericamente utilizando-se um tensor do tipo Galerkin para avaliar a integral de domínio devido à fonte de calor interna. A mesma discretização foi usada para a análise térmica e a análise elástica. Os resultados obtidos pelos três procedimentos foram distintos, sendo que as diferenças entre o MTG e o MMR se devem ao fato do equilíbrio de fluxos no contorno não ser satisfeito.

Utilizando-se duas discretizações diferentes do contorno para cada tipo de análise, térmica e elástica, observou-se que os resultados obtidos são diferentes pelos três procedimentos, e que para a divisão em células os mesmos são mais próximos dos valores reais. Estes resultados demonstram que a divisão em células é o melhor procedimento a ser utilizado quando os valores de temperatura são conhecidos apenas em alguns pontos, como ocorre em medições experimentais, e se os mesmos não estão vinculados a uma equação diferencial que garanta o equilíbrio de fluxos no contorno. Nestes

casos, quando utiliza-se o MTG ou o MMR, deve-se tomar um cuidado especial, desde que resultados distorcidos são obtidos na análise elástica se o campo de temperaturas não satisfaz a condição de equilíbrio de Gauss.

Trabalhando-se apenas com o contorno na consideração de forças de domínio através do MTG e do MMR, verifica-se a facilidade de se lidar com os dados e o menor dispêndio computacional, sendo os resultados semelhantes aos obtidos pela divisão em células. Pode-se resolver qualquer problema de força de domínio com estes procedimentos, desenvolvendo-se as séries inerentes ao MTG e ao MMR até atingirem-se as condições determinadas para cada procedimento para a devida convergência da formulação.

Sugestões

Com os potentes recursos computacionais hoje disponíveis, é importante acoplar a este procedimento numérico um processador de dados em uma interface gráfica, onde o usuário teria maior facilidade de definir a estrutura a ser analisada, avaliar todos os resultados obtidos e efetuar as modificações necessárias para obter um projeto final mais eficiente.

As considerações de simetria devem ainda ser trabalhadas, o que irá ocasionar uma redução significativa da entrada

de dados, além de reduzir as dimensões das matrizes envolvidas. Desta forma poderão ser utilizadas discretizações mais refinadas em pontos com concentração de tensões, por exemplo.

Todo o desenvolvimento da formulação para divisão em células pode ser utilizado para o desenvolvimento de um programa computacional para análise plástica ou elastoplástica, utilizando-se o processo de tensões iniciais ou deformações iniciais distribuídas no domínio plastificado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BANERJEE, P. K. *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill, London, 1994.
- BANERJEE, P. K.; BUTTERFIELD, R. Boundary Element Methods in Geomechanics. *Finite Elements in Geomechanics*. Cap.16. G. Gudehus, John Wiley and Sons, London, 1976.
- BANERJEE, P. K.; BUTTERFIELD, R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*. McGraw-Hill, London, 1981.
- BETTI, E. Teoria dell Elasticita. *Il nuovo ciemento*. T. 7-10.
- BREBBIA, C. A. (redator). *Boundary Element Techniques in Computer-aided Engineering*. Nato Scientific Affairs Division, 1984.

- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Element an Introductory Course*. Computacional Mechanics Publications e McGraw-Hill Book Company, 1992.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F. ;WROBEL, L. C. *Boundary Element Techniques - Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag Berlin and New York, 1984.
- BREBBIA, C. A.; WALKER, S. *Boundary Element Techniques in Engineering*. Butterworth e Co. (Publishers) Ltd., 1980.
- CHENG, A. H.-D.; LAPE, O.; GRILLI, S. Dual Reciprocity BEM Based on Global Interpolation Functions. *Engineering Analysis with boundary Elements*, v.13, p.303-311, 1994.
- CISTERNAS, Miguel Angel Castro. *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Problemas de Potencial que Envolvem Geometria Axissimétrica Sujeitos a Condições de Contorno Arbitrárias*. Rio de Janeiro. 132p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1986.
- COWPER, G. R. Gaussian Quadrature Formulas for Triangles. *International Research Council of Canada, Ottawa, Ontario, Canada*, 1972.
- CRUSE, T.A. Boundary Integral Equation Method for Three Dimensional Fracture Mechanics Analysis. AFOSR-TR-75 0813 Report, 1975.

- CRUSE, T. A. *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1988.
- DANSON, D. J. A Boundary Element Formulation of Problems in Linear Isotropic Elasticity with Body Forces. In *Boundary Element Methods* (C. A. Brebbia, Ed.), p.105-122. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- DAVIS, B. A.; GRAMANN, P. J.; MÄTZIG, J. C.; OSWALD, T. A. The Dual Reciprocity Method for Heat Transfer in Polymer Processing. *Engineering Analysis with boundary Elements*, v.13, p.249-261, 1994.
- DE PAULA, Fernando Amorim. *Obtenção de Matriz de Rigidez Utilizando o Método dos Elementos de Contorno*. Rio de Janeiro. 134p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1986.
- DE PAULA, Fernando Amorim. *Elementos de Contorno com Equilíbrio - Uma Formulação Consistente Para Problemas de Potencial e Elasticidade*. Rio de Janeiro. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1991.
- FREDHOLM, I. *Sur une Classe de Équations Fonctionnelles*. *Acta Math*, v.27, p.365-390, 1903.
- HARTMANN, F. *Introduction to Boundary Elements - Theory and Applications*. Springer-Verlag, 1989.

- HENRY Jr, D. P.; BANERJEE, P. K. A New Boundary Element Formulation for Two and Three-Dimensional Thermoelasticity Using Particular Integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.26, p.2061-2077, 1988a.
- HENRY Jr, D. P.; BANERJEE, P. K. A New BEM Formulation for Two and Three-Dimensional Elastoplasticity Using Particular Integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.26, p.2079-2096, 1988b.
- KARAMI, G.; KUHN, G. Body-force Linear Elastic Stress Intensity Factor Calculation Using Boundary Element Method. *Computers & Structures*, v.49, n.1, p.107-115, 1993.
- KYTHE, P. K. *An Introduction to Boundary Element Methods*. CRC Press, USA, 1995.
- LEE, L.; WU, T. W.; ZHANG, P. A Dual Reciprocity Method for Acoustic Radiation in a Subsonic Non-Uniform Flow. *Engineering Analysis with boundary Elements*, v.13, p.365-370, 1994.
- NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements. *Boundary Element Methods in Engineering*, ed. C. A. Brebbia, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- NEVES, A. C.; BREBBIA, C. A. The Multiple Reciprocity Boundary Element Method in Elasticity: A New Approach for Transforming

BEM Domains Integrals to the Boundary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.19, p.709-715, 1991.

NEVES, A. C.; BREBBIA, C. A. The Multiple Reciprocity Method Applied to Thermal Stress Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.35, p.443-445, 1992.

NOWAK, A. J. Temperature Fields in Domains with Heat Sources Using Boundary - Only Formulation. In C. A. Brebbia (redator), *Boundary Elements Methods X - Heat Transfer, Fluid Flow and Electrical Applications*, v.2, p.233-247. Comp. Mech. Publications and Spreinger-Verlag, 1988.

NOWAK, A. J.; BREBBIA, C. A. Solving Helmholtz Equation by Boundary Elements Using the Multiple Reciprocity Method. In: *Computers and Experiments in Fluid Flow*, (Eds G.Carlomagno and C.A.Brebbia) Computational Mechacics Publications, Southampton and Boston Springer-Verlag, Berlin, 1989a.

NOWAK, A. J.; BREBBIA, C. A. The Multiple Reciprocity Method - A New Approach for Transforming BEM Domains Integrals to the Boundary. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.6, n.3, p.164-167, 1989b.

NOWAK, A. J.; NEVES, A. C. (redatores). *The Multiple Reciprocity Boundary Element Method*. Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, 1994.

- PAPE, D. A.; BANERJEE, P. K. Treatment of Body Forces in 2D Elastostatic BEM Using Particular Integrals. *Journal of Applied Mechanics*, v.54, p.866-871, 1987.
- PARTRIDGE, P. W. Dual Reciprocity BEM: Comparison of Local and Global Approximation Functions for Convection, Diffusion and Other Problems. In: CONGRESSO ÍBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 15., Belo Horizonte, 1994. *Anais*. p.747-56. Belo Horizonte, EEUFGM, 1994.
- PARTRIDGE, P. W.; WROBEL, L. C. The Dual Reciprocity Boundary Element Method for Spontaneous Ignition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.30, p.953-963, 1990.
- PORTELA, A.; ALIABADI, M. H. The Dual Boundary Element Method: Effective Implementation for Crack Problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.33, p.1269-1287, 1992.
- REDDY, C. T.; SHIPPY, D. J. Short Communications Alternative Integration Formulae for Triangular Finite Element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.17, p.133-139, 1981.
- RIBEIRO, Gabriel de Oliveira. *Sobre a Formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Flexão de Placas Usando as Hipóteses de Reissner*. São Carlos. 266p. Tese (Doutorado) -

Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1992.

RIZZO, F. J.; SHIPPY, D. J. An Advanced Boundary Integral Equation Method for Three-Dimensional Thermoelasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v.11, p.1753-1768, 1977.

SANTIAGO, José Antônio Fontes. *Implementação do Método dos Elementos de Contorno para Elasticidade Bi-Dimensional com o Uso de Microcomputadores*. Rio de Janeiro. 171p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1987.

SANTIAGO, J. A. F.; TELLES, J. C. F. Análise Termoelástica Bidimensional Utilizando o Método dos Elementos de Contorno. In: CONGRESSO ÍBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 15., Belo Horizonte, 1994. *Anais*. p.709-18. Belo Horizonte, EEUFMG, 1994.

SENSALE, B.; CREUS, G. J.; PARTRIDGE, P. W. Aplicación del Metodo de Reciprocidad Dual a Problemas Termoelasticos Mediante Elementos de Contorno. In: CONGRESSO ÍBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 15., Belo Horizonte, 1994. *Anais*. P.729-46. Belo Horizonte, EEUFMG, 1994.

SOMIGLIANA, C. Sopra l'Equilibrio di us Corpo Elastico Isotropo. // *nuovo ciemento*. Tome 17-19.

- SOUTHWELL, R. V. *Relaxation Methods in Theoretical Physics*. Oxford University Press, London, 1946.
- TEIXEIRA, Marcello Cláudio. *Análise Elastoplástica de Túneis pelo Método dos Elementos de Contorno*. Belo Horizonte. 170p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, 1992.
- TELLES, J. C. F. A Self-Adaptive Coordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of Boundary Element Integrals. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, v.24, p.959-973, 1987.
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Teoria da Elasticidade*. Trad. de Sérgio Fernandes Villaça. 3.ed. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 1980.
- UGURAL, A. C.; FENSTER, S. K. *Strength and Applied Elasticity*. American Elsevier Publishing Company, New York, 1975.
- VENTURINI, W. S. *Boundary Element Method in Geomechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- VENTURINI, W. S. Reciprocidade Dual Para Análise Não-Linear Através do MEC. In: CONGRESSO ÍBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 15., Belo Horizonte, 1994. *Anais*. Belo Horizonte, EEUFMG, p.576-90, 1994.

- WATSON, J. O. Advanced Implementation of the Boundary Element Method for Two and Three Dimensional Elastostatics. Cap.3 in P. K. Banerjee and R. Butterfield (eds.). *Delopments in Boundary Element Methods*, v.1, Applied Science Publishers, Barking, U. K., p.31-64, 1979.
- WROBEL, L. C.; DEFIGUEIREDO, D. B. A Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Convection-Diffusion Problems with Variable Velocity Fields. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.8, n.6, p.312-318, 1991.
- ZHU, S.; SATRAVAHA, P.; LU, X. Solving Linear Diffusion Equations With the Dual Reciprocity Method in Laplace Space. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.13, p.1-10, 1994.