

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO ENCRUAMENTO DO AÇO E DAS TENSÕES
RESIDUAIS NO COMPORTAMENTO INELÁSTICO DE PÓRTICOS PLANOS
VIA ANÁLISE AVANÇADA**

AUTOR: REINALDO EUSTÁQUIO ARAÚJO

ORIENTADOR: PROF. DR. ARMANDO CESAR CAMPOS LAVALL

2.010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**“ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO ENCRUAMENTO DO AÇO E DAS TENSÕES
RESIDUAIS NO COMPORTAMENTO INELÁSTICO DE PÓRTICOS PLANOS
VIA ANÁLISE AVANÇADA”**

Reinaldo Eustáquio Araújo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Comissão examinadora:

Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall
DEES - UFMG (Orientador)

Profa. Dra. Ana Lydia Reis de Castro e Silva
DEES – UFMG

Belo Horizonte, 21 de maio de 2.010

Dedico este trabalho ao meu pai Moacir Eustáquio
Araújo (in memoriam) que não pôde me conhecer.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall, pela meticulosa orientação, dedicação, sabedoria e amizade.

À minha mãe Maria pelo apoio nas batalhas diárias.

A minha noiva Lizandra pelo enorme incentivo, apoio, carinho e compreensão.

À Andréia Cristina e demais colegas do curso de mestrado pela agradável convivência e apoio.

Aos funcionários e professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da EE/UFMG pela dedicação e amizade. Em especial, a funcionária Maria Inês pelo empenho em nos ajudar.

A todos aqueles fazem ou já fizeram parte da minha vida e que puderam doar do pouco que têm para que minha formação acadêmica não se tornasse inviável.

A USIMINAS, pelo investimento na educação.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	i
LISTA DE TABELAS.....	iii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	iv
RESUMO.....	xi
ABSTRACT	xii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Objetivos.....	4
1.3 Organização do texto.....	4
2. VISÃO GERAL SOBRE A ANÁLISE AVANÇADA	6
2.1 Introdução	6
2.2 Tipos de Análise	7
2.2.1 Análise Elástica de 1ª Ordem.....	7
2.2.2 Análise Elástica de 2ª Ordem.....	8
2.2.3 Análise Inelástica de 1ª Ordem	8
2.2.4 Análise Inelástica de 2ª Ordem	9
2.3 Métodos de Análise Avançada	11
2.4 Atributos para o Modelo de Análise Avançada.....	13
3. FORMULAÇÃO TEÓRICA PARA ANÁLISE INELÁSTICA DE PÓRTICOS PLANOS CONSIDERANDO A PLASTICIDADE DISTRIBUÍDA	16
3.1 Introdução.....	16
3.2 Deformações e Tensões	17
3.3 Relações Constitutivas.....	18
3.4 Sistemas de Coordenadas - Gaus de Liberdade.....	19
3.4.1 Condição de Extremidades: Rígido – Rotulado.....	19
3.4.2 Condição de Extremidades: Rígido – Rígido.....	25
3.5 Teoria Estrutural	27
3.6 Cinemática do Elemento.....	28
3.6.1 Campo de Deformação.....	28
3.6.2 Campo de Deslocamento.....	29

3.7 Equações de Equilíbrio do Elemento.....	32
3.8 Interpolação	35
3.9 Aproximações e Simplificações	36
3.9.1 Aproximações de Segunda Ordem.....	36
3.9.2 Valor Médio de Deformação.....	37
3.10 Expressões Analíticas para a Matriz de Rigidez Tangente.....	38
3.10.1 Condição de Extremidades: Rígido – Rotulado.....	38
3.10.2 Condição de Extremidades: Rotulado – Rígido	46
3.10.3 Condição de Extremidades: Rígido – Rígido.....	48
4. ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	54
4.1 Introdução.....	54
4.2 Método de Newton-Raphson	55
4.3 Critério de Convergência.....	57
4.4 Modelo Constitutivo Multilinear	58
4.4.1 Introdução	58
4.4.2 O problema elastoplástico unidimensional	59
4.4.3 Análise incremental das tensões e deformações no comportamento elasto- plástico	62
4.5 Modelo de Fatias	68
4.6 Considerações Sobre as Tensões Residuais nos Perfis de Aço	70
4.7 Descrição das Sub-Rotinas	74
5. APLICAÇÕES NUMÉRICAS	77
5.1 Introdução.....	77
5.2 Influência das Leis Constitutivas na Análise do Comportamento Não-Linear das Estruturas.....	78
5.3 Efeito das Tensões Residuais e do Encruamento no Comportamento Estrutural..	91
5.3.1 Barras submetidas à flexão normal composta.....	91
5.3.2 Pórtico simples de um andar	99
5.3.3 Pórtico de múltiplos andares	109
6. CONCLUSÕES	115
BIBLIOGRAFIA	119

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2. 1 – Comportamento carga x deslocamento dos vários tipos de análise.....	7
FIGURA 2. 2 – Comprimentos de rótulas plásticas em vigas com diferentes condições de extremidade e carregamento (adaptado de CHEN <i>et al</i> , 1996)	10
FIGURA 3. 1 – Fibra de um material nas configurações de (a) referência e (b) corrigida	17
FIGURA 3. 2 – Módulo de rigidez no comportamento elástico e elastoplástico de uma fibra.....	18
FIGURA 3. 3 – Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rotulada.	20
FIGURA 3. 4 – Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rígido	25
FIGURA 3. 5 – Elemento diferencial de barra reta	28
FIGURA 3. 6 – Campo de deslocamento na flexão normal composta.....	30
FIGURA 3. 7 – Rotação α da seção transversal.	31
FIGURA 4. 1 – Método de Newton-Raphson	56
FIGURA 4. 2 – Diagrama tensão x deformação convencional para o aço (fora de escala)	58
FIGURA 4. 3 – Exemplos de representação multilinear de diagramas tensão x deformação	59
FIGURA 4. 4 – Comportamento elastoplástico do material para o caso uniaxial.....	59
FIGURA 4. 5 – Diagrama tensão-deformação multilinear onde cada par $(\sigma_i, \varepsilon_i)$, $(i = 1,5)$, define os limites de cada um dos trechos.....	62
FIGURA 4. 6 – Transição entre trechos lineares	65
FIGURA 4. 7 – Descarga ou recarga elástica a partir do trecho elastoplástico i.....	67
FIGURA 4. 8 – Modelo de fatias.....	68
FIGURA 4. 9 – Processo de plastificação das fatias ao longo da altura da seção transversal	69
FIGURA 4. 10 – Relação tensão x deformação em corpo de prova e em perfil metálico de aço	71
FIGURA 4. 11 – Fluxograma geral para análise não-linear incremental e iterativa	76

FIGURA 5. 1 – Estrutura hiperestática com 3 barras em regime elastoplástico	78
FIGURA 5. 2 – Comportamento elastoplástico perfeito – lei constitutiva 01	79
FIGURA 5. 3 – Curva carga x deslocamento para a lei constitutiva 01	82
FIGURA 5. 4 – Comportamento elastoplástico – lei constitutiva 02	82
FIGURA 5. 5 – Curvas carga x deslocamento para a estrutura da FIG. 5.1 segundo as leis constitutivas 01 e 02.	84
FIGURA 5. 6 – Comportamento elastoplástico com encruamento do aço – lei const. 03	86
FIGURA 5. 7 – Curvas carga x deslocamento para a estrutura da FIG. 5.1 segundo as leis constitutivas 01, 02 e 03 (strain-hardening).....	89
FIGURA 5. 8 – Curvas carga x deslocamento para a estrutura da FIG. 5.1 durante o processo de carga e descarga segundo a leis constitutiva 03	91
FIGURA 5. 9 – Viga em balanço submetida a flexão normal composta.....	92
FIGURA 5. 10 – Leis constitutivas utilizadas (fora de escala)	92
FIGURA 5. 11 – Curvas de interação para a viga em balanço submetida à flexão normal composta	93
FIGURA 5. 12 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 14,4$ e $P = 0,15P_y$ – viga em balanço	95
FIGURA 5. 13 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 14,4$ e $P = 0,91P_y$ – viga em balanço	96
FIGURA 5. 14 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 80$ e $P = 0,15P_y$ – viga em balanço	98
FIGURA 5. 15 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 80$ e $P = 0,30P_y$ – viga em balanço	99
FIGURA 5. 16 – Pórtico simples de um andar submetido às cargas P e Q	100
FIGURA 5. 17 – Alterações nas dimensões do perfil da viga e no vão do pórtico simples para variação do fator de rigidez relativo do nó B (G_B)	101
FIGURA 5. 19 – Curvas de interação nos pilares do pórtico simples - $L/r = 60$	102
FIGURA 5. 20 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 40$ e $P = 0,15P_y$ – pórtico simples.....	104
FIGURA 5. 21 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 40,0$ e $P = 0,60P_y$ – pórtico simples.....	105
FIGURA 5. 22 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 60$ e $P = 0,15P_y$ – pórtico simples	107
FIGURA 5. 23 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 60$ e $P = 0,40P_y$ – pórtico simples.....	108
FIGURA 5. 24 – Pórtico de andares múltiplos – geometria e carga de serviço	110
FIGURA 5. 25 – Curvas λ x $\Delta C/h$ – pórtico múltiplos andares.....	112
FIGURA 5. 26 – Formação das rótulas plásticas considerando tensões residuais e o strain hardening – colapso do pórtico múltiplos andares.....	114

LISTA DE TABELAS

TABELA 4. 1 – Tipos de distribuição das tensões residuais.....	73
TABELA 5. 1 – Resultados analíticos considerando a lei constitutiva 01	80
TABELA 5. 2 – Resultados da análise numérica considerando a lei constitutiva 01.....	81
TABELA 5. 3 – Resultados da análise numérica considerando a lei constitutiva 02.....	83
TABELA 5. 4 – Resultados da análise numérica considerando a lei constitutiva 03.....	88
TABELA 5. 5 – Resultados da análise numérica considerando a lei constitutiva 03 com descarga/recarga.....	90
TABELA 5.6 - Valores da flecha e declividade máximas para $L/r = 14,4$ e $P = 0,15P_y$ – viga em balanço.....	93
TABELA 5. 7 – Valores da flecha e declividade máxima para $L/r = 14,4$ e $P = 0,91P_y$ – viga em balanço	96
TABELA 5. 8 – Valores da flecha e declividade máximas para $L/r = 80$ e $P = 0,15P_y$ – viga em balanço	97
TABELA 5. 9 – Valores da flecha e declividade máximas para $L/r = 80$ e $P = 0,30P_y$ – viga em balanço	98
TABELA 5. 10 – Valores dos deslocamentos horizontais do nó B e declividades máximas para o pilar AB com $L/r = 40$ e $P = 0,15P_y$ – pórtico simples	103
TABELA 5. 11 – Valores dos deslocamentos horizontais do nó B e declividades máximas para o pilar AB com $L/r = 40$ e $P = 0,60P_y$ – pórtico simples	105
TABELA 5. 12 – Valores dos deslocamentos horizontais do nó B e declividades máximas para o pilar AB com $L/r = 60$ e $P = 0,15P_y$ – pórtico simples	106
TABELA 5. 13 – Valores dos deslocamentos horizontais do nó B e declividades máximas para o pilar AB com $L/r = 60$ e $P = 0,40P_y$ – pórtico simples	108
TABELA 5. 14 – Redução da carga lateral última - Q – pórtico simples	109
TABELA 5. 15 – Perfis usados nos pilares e vigas – pórtico de andares múltiplos.....	111
TABELA 5. 16 – Valores dos deslocamentos horizontais do nó C (Δ_C) em função do fator de carga (λ) – pórtico de andares múltiplos	111

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas Minúsculas

a, b	–	Nós do elemento nas extremidades da esquerda e direita, respectivamente
b_f	–	Largura da mesa do perfil “I”
b_i	–	Largura da fatia i
d	–	Altura total do perfil “I”
$d\varepsilon$	–	Acréscimo de deformação
$d\varepsilon^e$	–	Acréscimo de deformação elástica
$d\varepsilon^p$	–	Acréscimo de deformação plástica
$d\sigma$	–	Acréscimo de tensão
$dS_c, d\overline{S}_c$	–	Comprimento da fibra situada a uma distância y_r do eixo da barra e de uma fibra situada neste eixo, respectivamente, na configuração corrigida
$dS_r, d\overline{S}_r$	–	Comprimento da fibra situada a uma distância y_r do eixo da barra e de uma fibra situada neste eixo, respectivamente, na configuração de referência
$d\overline{u}_c, d\overline{v}_c$	–	Deslocamentos infinitesimais axial e transversal na configuração deformada
d_w	–	Altura da alma do perfil “I”
dV_r	–	Elemento de volume na configuração de referência
dx_r	–	Distância entre duas seções transversais ortogonais ao eixo longitudinal
f_y	–	Tensão de escoamento do aço
h	–	Altura da seção transversal

k	–	Coeficiente de flambagem para barras comprimidas
\mathbf{k}	–	Matriz de rigidez tangente global do sistema
$\bar{\mathbf{k}}_G$	–	Forma local da matriz de rigidez geométrica no regime elástico em coordenadas cartesianas
$\bar{\mathbf{k}}_G^{ep}$	–	Forma local da matriz de rigidez geométrica no regime elastoplástico em coordenadas cartesianas
$\bar{\mathbf{k}}_M$	–	Forma local da matriz de rigidez constitutiva no regime elástico em coordenadas cartesianas
$\bar{\mathbf{k}}_M^{ep}$	–	Forma local da matriz de rigidez constitutiva no regime elastoplástico em coordenadas cartesianas
\mathbf{k}_t	–	Matriz de rigidez tangente do elemento
$\bar{\mathbf{k}}_t$	–	Forma local da matriz de rigidez tangente no regime elástico
$\bar{\mathbf{k}}_t^{ep}$	–	Forma local da matriz de rigidez tangente no regime elastoplástico
k_{ij}	–	Coeficientes da matriz de rigidez tangente do elemento, onde $i, j = 1, \dots, 6$
l/r	–	Índice de esbeltez
l_r, l_c	–	Comprimento do elemento ou fibra na configuração de referência e corrigida, respectivamente
$\dot{\mathbf{p}}$	–	Varição temporal dos graus de liberdade p_i
\mathbf{p}, \mathbf{p}_i	–	Vetor de deslocamentos nodais do sistema ou do elemento
\mathbf{p}_0	–	Vetor de deslocamentos nodais iniciais
\mathbf{p}_1	–	Vetor resultante do somatório entre os deslocamentos nodais iniciais \mathbf{p}_0 e a correção $\Delta\mathbf{p}_0$
p_i	–	Graus de liberdade cartesianos, onde $i = 1, \dots, 6$
\mathbf{q}_α	–	Vetor que contém os graus de liberdade naturais ou corrotacionais, onde $\alpha = 1, 2, 3$
q_1	–	Grau de liberdade natural que mede a mudança de comprimento da corda de um elemento (alongamento ou encurtamento)
q_2, q_3	–	Graus de liberdade naturais que medem o ângulo α_a da extremidade a do elemento e o ângulo α_b da extremidade b do

elemento, respectivamente, na configuração corrigida, independentes da rotação de corpo rígido

r	–	Raio de giração da seção transversal
\mathbf{r}	–	Vetor dos deslocamentos nodais da estrutura
$\dot{\mathbf{r}}$	–	Derivada da matriz dos deslocamentos nodais da estrutura
r_c	–	Raio de curvatura local
\mathbf{t}	–	Parcela não-nula da matriz de rotação de eixos \mathbf{T}
t_f	–	Espessura da mesa do perfil “I”
t_i	–	Espessura da fatia i
t_w	–	Espessura da alma do perfil “I”
u	–	Deslocamento axial do nó
\bar{u}	–	Deslocamento axial dos pontos situados sobre o eixo da barra
\bar{u}'	–	Derivada do deslocamento axial \bar{u}
u_a, u_b	–	Deslocamento axial dos nós a e b , respectivamente
v	–	Deslocamento transversal do nó
\bar{v}	–	Deslocamento transversal dos pontos situados sobre o eixo da barra
v_a, v_b	–	Deslocamento transversal dos nós a e b , respectivamente
x	–	Coordenada genérica do ponto no eixo das abscissas
x_a, x_b	–	Coordenadas nodais, segundo o eixo das abscissas na configuração de referência
x_c, x_r	–	Eixo paralelo ao elemento no sistema local corrotacional centrado, respectivamente, nos elementos deformado e de referência
y	–	Coordenada genérica do ponto no eixo das ordenadas; linha elástica em relação à posição inicial curva do pilar
y_a, y_b	–	Coordenadas nodais, segundo o eixo das ordenadas na configuração de referência
y_c, y_r	–	Eixo perpendicular ao elemento no sistema local corrotacional centrado, respectivamente, nos elementos deformado e de referência
y_r	–	Distância entre o eixo de um elemento de barra curva e uma fibra paralela a este eixo

z_i – Coordenada no centro da fatia i em relação ao centro de gravidade da seção transversal

Letras Romanas Maiúsculas

A – Área da seção transversal

A_g – Área bruta da seção transversal

A_r, A_c – Área da seção transversal do elemento ou fibra na configuração de referência (inicial) e na configuração corrigida (atual), respectivamente

\mathbf{B} – Matriz de mudança de coordenadas

$\overline{\mathbf{B}}$ – Forma local da matriz \mathbf{B}

\mathbf{B}^T – Transposta da matriz de mudança de coordenadas

C_α – Coeficiente de rigidez, onde $\alpha = 1, 2, 3$

$C_{\alpha m}$ – Coeficientes de rigidez médios, onde $\alpha = 1, 2, 3$

C_m – Coeficiente de equivalência de momentos

\mathbf{D} – Matriz constituinte da parcela constitutiva da matriz de rigidez tangente

$D_{\alpha\beta}$ – Elementos da matriz de rigidez constitutiva do elemento no sistema de coordenadas corrotacionais, onde $\alpha, \beta = 1, 2, 3$

D_m – Família de módulos de rigidez do material de uma fibra

D_m^e – Módulo de rigidez elástico do material

D_m^{ep} – Módulo de rigidez plástico do material

E – Módulo de elasticidade longitudinal

E_t – Módulo tangente

\mathbf{G}_α – Matriz simétrica que representa uma parcela da matriz de rigidez geométrica e vem da derivada segunda $q_{\alpha,ij}$, onde $\alpha = 1, 2, 3$ e $i = 1, \dots, 6$

G_a, G_b – Parâmetros para a determinação do fator k

$\overline{\mathbf{G}}_\alpha$ – Forma local da matriz \mathbf{G}_α

H	–	Matriz constituinte da parcela geométrica da matriz de rigidez tangente
$H_{\alpha\beta}$	–	Elementos da matriz H , onde $\alpha = 1, 2, 3$
H'	–	Parâmetro de encruamento
I	–	Momento de inércia da seção transversal
L	–	Comprimento do elemento
M	–	Momento fletor atuante
M_a, M_b	–	Momento fletor atuante no nós a e b
M_P	–	Momento plástico
M_y	–	Momento elástico máximo resistente
N	–	Força normal atuante
N_a, N_b	–	Força normal atuante nas extremidades a e b
N_m	–	Força normal média
N_r	–	Resultante da força normal devido à tensão residual
0_3	–	Matriz nula (3x3)
P	–	Carregamento vertical aplicado
P	–	Vetor das forças internas no sistema local cartesiano
$\dot{\mathbf{P}}$	–	Derivada do vetor de esforços nodais internos P
P_i	–	Forças nodais internas de um elemento no sistema global de coordenadas cartesianas
P_e	–	Carga crítica de flambagem elástica de Euler
P_p	–	Carga de colapso plástico
P_y	–	Carga de escoamento
Q	–	Coefficiente de redução que leva em conta a flambagem local
Q	–	Vetor dos esforços internos naturais no sistema de coordenadas corrotacionais, onde $\alpha = 1, 2, 3$
Q_α	–	Esforços internos nas coordenadas naturais ou corrotacionais
S	–	Momento estático da seção transversal
T	–	Matriz de rotação de eixos
T^T	–	Transposta da matriz de rotação de eixos
V_r, V_c	–	Volume do elemento ou fibra nas configurações de referência e corrigida

Letras Gregas

α	–	Ângulo de rotação do eixo de um elemento em relação à sua corda após a deformação; rotação da seção
α'	–	Derivada do ângulo entre a corda e a tangente ao eixo da barra
α_a, α_b	–	Ângulo de rotação nas extremidades do elemento, $\alpha_a = q_2$ e $\alpha_b = q_3$
γ	–	Diferença entre o módulo de elasticidade E e o módulo tangente E_t
$\delta\varepsilon$	–	Deformação virtual de uma fibra
$\delta\mathbf{p}_i$	–	Vetor de deslocamentos nodais virtuais do elemento
δw_i	–	Trabalho virtual interno de uma fibra
δw_e	–	Trabalho virtual externo de uma fibra
Δ	–	Medida do alongamento ou encurtamento do elemento
$\Delta\mathbf{p}$	–	Correção genérica entre $\boldsymbol{\psi}$ e \mathbf{k}
$\Delta\mathbf{p}_0$	–	Correção genérica entre $\boldsymbol{\psi}$ e \mathbf{k} iniciais
ε	–	Deformação ou deformação de engenharia; campo de deformação
$\bar{\varepsilon}$	–	Deformação de uma fibra genérica situada no eixo longitudinal
ε_m	–	Representação da família de deformações
$\bar{\varepsilon}_m$	–	Valor médio para a deformação $\bar{\varepsilon}$
$\varepsilon_{,\alpha}$	–	Derivada primeira do campo de deformação ε
$\varepsilon_{,\alpha\beta}$	–	Derivada segunda do campo de deformação ε
$\varepsilon_{1/2}$	–	Deformação de engenharia
θ	–	Rotação do nó
θ_a, θ_b	–	Rotação dos nós a e b medidos a partir da configuração de referência até a corda
θ_c	–	Rotação de corpo rígido
λ	–	Estiramento de uma fibra genérica; esbeltez
$\bar{\lambda}$	–	Estiramento de uma fibra genérica situada no eixo longitudinal
ν	–	Coefficiente de Poisson

σ_e	–	Tensão inicial de escoamento do material
σ	–	Tensão normal ou de engenharia de uma fibra
σ_m	–	Representação da família de tensões conjugada com a deformação ε_m
σ_N	–	Tensão nominal ou de engenharia
σ_p	–	Tensão limite de proporcionalidade
σ_r	–	Tensão residual
σ_{rc}	–	Tensão residual de compressão
σ_{rt}	–	Tensão residual de tração
σ_y	–	Tensão de escoamento
$\sigma_{1/2}$	–	Tensão conjugada com a deformação $\varepsilon_{1/2}$, igual à tensão de engenharia
φ_r, φ_c	–	Ângulos que a corda do elemento faz com o eixo das abscissas nas configurações de referência e deformada
ψ_0	–	Vetor de forças residuais iniciais
ψ_1, ψ_2', ψ_3'	–	Função de interpolação para os deslocamentos $\bar{u}_c(x_r)$ e $\alpha(x_r)$

RESUMO

Neste trabalho desenvolve-se uma formulação geometricamente exata para a análise não-linear física e geométrica de pórticos planos de aço, via Método dos Elementos Finitos (MEF), utilizando-se os conceitos da plasticidade distribuída. Uma visão geral sobre a Análise Avançada é feita com o objetivo de caracterizar os atributos necessários para o desenvolvimento de um modelo de Análise Inelástica Avançada. Apresenta-se o desenvolvimento da teoria geral fundamentada em uma rigorosa formulação Lagrangiana atualizada, utilizando-se a técnica corrotacional para a obtenção da matriz de rigidez tangente do elemento. Para implementação desta formulação adiciona-se à versão original, apresentada por LAVALL (1996) e posteriormente modificada por ALMEIDA (2006), a capacidade de analisar problemas com ligações articuladas entre as barras da estrutura e, principalmente, de simular leis constitutivas variadas para o material, contemplando o processo de carga e descarga, possibilitando um estudo mais amplo sobre os efeitos das propriedades do material no comportamento e na resistência estruturais. O modelo de fatias permite o acompanhamento da plastificação ao longo da altura da seção, além de facilitar a consideração de vários modelos de distribuição das tensões residuais. São apresentados exemplos que comprovam a grande potencialidade da formulação desenvolvida, sobretudo com relação aos novos resultados propiciados pelas mais recentes atribuições do programa computacional. Finalmente, são apresentadas análises de vários modelos estruturais visando o estudo da influência do encruamento do aço e das tensões residuais dos perfis no comportamento inelástico de pórticos planos, cujos resultados mostraram uma boa correlação com aqueles apresentados por vários pesquisadores, comprovando a aplicação da formulação como um Método de Análise Avançada.

Palavras chave: Análise Inelástica Avançada, Plasticidade Distribuída, Leis Constitutivas Multilineares para o Aço, Encruamento do Aço, Tensões Residuais,

ABSTRACT

In this work a geometrically exact formulation to consider material and geometric nonlinearities of steel plane frames, by Finite Element Method (FEM), using the concepts of distributed-plasticity is presented. An overview of the Advanced Analysis with the aim of characterizing the desirable attributes to develop a model for the Advanced Inelastic Analysis is outlined. A general theory based on a rigorous updated Lagrangian formulation is developed using the corotational technique to obtain the tangent stiffness matrix of the element. The abilities for analyzing pin-ended joint members and, especially, to simulate different constitutive laws for the material, covering the process of loading and unloading, allowing a broader study of the effects of material properties on the behavior and structural resistance, were added to the original computational program version presented by LAVALL (1996) and later modified by ALMEIDA (2006). The layers model adopted to build the cross section of the members allows the identification of the plastified region through the cross section as well as facilitates the use of any kind of residual stresses distribution. Examples are presented that demonstrate the potentiality of the proposed formulation. Finally, the analyses of various structural models in order to study the influences of the strain-hardening and residual stresses in the inelastic behavior of plane frames are presented. The results showed a good correlation with those presented by various researchers, confirming the application of the formulation as a Method of Advanced Analysis.

Keywords: Advanced Inelastic Analysis, Distributed-Plasticity, Steel Multilinear Constitutive Laws, Strain-Hardening, Residual Stresses.

1

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

O principal objetivo da análise estrutural é garantir que as estruturas tenham uma segurança adequada em relação aos estados limites últimos, quando sujeitas às cargas máximas de projeto e, ao mesmo tempo, garantir o desempenho da estrutura sob condições normais de utilização, quando submetidas às suas cargas de serviço.

Atualmente, a prática usual de projeto utilizada pelos engenheiros segue um procedimento com duas etapas: primeiramente os esforços solicitantes nas barras e nós das estruturas são determinados por meio de uma análise elástica em teoria de primeira ordem, e em uma segunda etapa são feitos os dimensionamentos desses elementos e das ligações, utilizando-se critérios de normas e especificações técnicas. Apesar de muito usado como base de projeto ainda hoje, esse procedimento tem suas limitações.

A característica principal de uma análise estrutural em teoria de primeira ordem é que o equilíbrio da estrutura é feito considerando-a na sua posição indeslocada. Está implícito nesta definição que os deslocamentos não afetam o equilíbrio da estrutura, ou seja, eles

são pequenos e, necessariamente, vale a hipótese de pequenos deslocamentos. Essa análise não fornece informações sobre a natureza do equilíbrio das estruturas, não sendo permitida em análise de estabilidade.

Assim sendo, este procedimento não considera a interação entre o sistema estrutural e suas barras de uma maneira direta. No caso das estruturas metálicas, essa interação é considerada de forma aproximada pelo uso do conceito do fator do comprimento efetivo K . A determinação deste fator pela teoria elástica, através de ábacos usuais ou fórmulas disponíveis na literatura, é difícil e complicada principalmente para certos tipos de pórticos não regulares, sendo necessário o uso de vários fatores de correção empíricos para ajustá-lo.

Outra limitação desse procedimento é que a análise elástica é usada para determinar os esforços solicitantes atuantes nas barras, enquanto a análise plástica é usada para determinar a resistência de cada barra tratada como um elemento isolado. Não há verificação da compatibilidade entre a barra isolada e a barra como parte do sistema estrutural. Não há nenhuma garantia explícita de que a estrutura irá resistir aos carregamentos de projeto na nova configuração geométrica imposta ao modelo estrutural.

Dessa forma, tem ocorrido uma crescente necessidade de se considerar as análises em teoria de segunda ordem, através das quais pode-se modelar explicitamente o comportamento real de cada barra e então, considerar a compatibilidade entre o sistema estrutural e suas barras.

A análise em teoria de segunda ordem tem como característica principal o equilíbrio da estrutura em sua posição deslocada. Neste caso, está implícito que os deslocamentos afetam o equilíbrio da estrutura. Esta análise pode ser feita tanto em regime de pequenos quanto de grandes deslocamentos. Assim, é importante enfatizar que este tipo de análise permite então o estudo da estabilidade da estrutura que todavia só pode ser feito em teoria de segunda ordem, haja vista aos aspectos conceituais deste tipo de análise.

A principal vantagem da análise inelástica em segunda ordem é a consideração da redistribuição inelástica dos esforços internos depois que a resistência elástica de certas barras foi alcançada, levando a resultados mais confiáveis da rigidez, da resistência e da estabilidade da estrutura. Além disso, métodos modernos de análises inelásticas permitem

uma consideração mais racional do efeito da flexibilidade das ligações e possibilitam prever com maior precisão os possíveis modos de colapso da estrutura.

A partir da década de 1990 vários pesquisadores têm desenvolvido e validado formulações para a análise inelástica em teoria de segunda ordem, especialmente para os pórticos em estruturas de aço. Essas formulações podem ser classificadas em dois grupos: da *plasticidade concentrada*, baseado no conceito de rótula plástica (LIEW *et al.* (1993a); entre outros) e da *plasticidade distribuída*, (CHEN & TOMA (1994)), também chamado Método da Zona Plástica, que considera a distribuição da plasticidade ao longo do comprimento dos elementos estruturais e na área de suas seções transversais. O modelo da plasticidade distribuída exige maior grau de refinamento na formulação do que o modelo da plasticidade concentrada.

Uma análise que considera a distribuição da plasticidade, as tensões residuais, a análise em teoria de segunda ordem (efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$), as imperfeições geométricas iniciais, as ligações semi-rígidas, entre outros efeitos e que, calibrada com as recomendações práticas de Normas Técnicas, elimine a necessidade da verificação posterior de cada elemento estrutural isolado, é, por definição, um método “exato” de *Análise Inelástica Avançada*.

A *Análise Inelástica Avançada* refere-se a qualquer método de análise que, de forma adequada, avalie simultaneamente a resistência e a estabilidade de um sistema estrutural como um todo.

O crescente avanço tecnológico na área da informática, tanto em hardware, quanto em software, tem propiciado o desenvolvimento de eficientes ferramentas computacionais baseadas em formulações teóricas rigorosas e consistentes, segundo a filosofia da *Análise Inelástica Avançada*, permitindo ao engenheiro fazer o dimensionamento mais preciso dos sistemas estruturais em aço.

Finalmente, a *Análise Inelástica Avançada* é atualmente um tema de grande relevância para o dimensionamento das estruturas de aço e, como afirmam CHEN *et al.* (1996), os métodos de *Análise Inelástica Avançada* representam o estado da arte em projetos para os engenheiros estruturais no século XXI.

1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo do comportamento inelástico de pórticos planos de aço considerando os conceitos da *Análise Inelástica Avançada*. Será apresentado o estudo de uma formulação geometricamente exata para a análise não-linear geométrica e do material de pórticos planos de aço, via Método dos Elementos Finitos, utilizando os conceitos da plasticidade distribuída e o desenvolvimento de um programa computacional baseado no existente em LAVALL (1996), com a implementação da formulação citada.

Como objetivos específicos consideram-se: (i) obtenção e implementação da matriz de rigidez tangente (constitutiva e geométrica), para o caso de elementos com uma extremidade rotulada e outra rígida, através da formulação geometricamente exata; (ii) desenvolvimento do programa computacional para considerações de leis constitutivas multilíneas; (iii) validação da formulação e da implementação computacional através de exemplos práticos, considerando diversas leis constitutivas; (iv) estudo da influência das tensões residuais existentes nos perfis de aço e do encruamento (*strain-hardening*) no comportamento inelástico dos pórticos planos.

1.3 Organização do texto

O trabalho inicia-se com uma visão geral sobre a *Análise Avançada* no Capítulo 2, através da conceituação dos tipos de análise existentes, destacando-se a análise inelástica de segunda ordem considerando a plasticidade distribuída. Para que uma análise seja consistente segundo os preceitos da *Análise Avançada*, são descritos os princípios básicos e os atributos nos quais o modelo deve ser baseado.

No Capítulo 3 apresenta-se a formulação teórica, geometricamente exata, baseada na análise inelástica de pórticos planos, considerando a plasticidade distribuída para as condições de extremidades rígido-rotulado e rígido-rígido. O desenvolvimento teórico é feito dentro de uma rigorosa formulação Lagrangiana, que utiliza a técnica corrotacional para a dedução consistente da matriz de rigidez tangente do elemento de pórtico plano. É feita uma apresentação itemizada dessa teoria, onde se definem as tensões e deformações

conjugadas e objetivas; as relações constitutivas elásticas e elastoplásticas; os sistemas de coordenadas global (Cartesiano) e local (corrotacional); os campos de deformação e deslocamento, segundo a hipótese cinemática de Bernoulli-Euler. São introduzidas as interpolações usuais do cálculo numérico e as aproximações de segunda ordem para a determinação analítica das matrizes de rigidez tangente elástica e elastoplástica.

Como o equilíbrio do elemento deve ser analisado de forma incremental e iterativa, os aspectos da implementação computacional são descritos no Capítulo 4. O procedimento numérico de Newton-Raphson é adotado para a análise não-linear do sistema de equações e, através do critério de convergência para os deslocamentos nodais, determina-se a solução do problema. O modelo constitutivo multilinear e as modificações no programa computacional para sua implementação, como também o modelo de fatias, são apresentados para a análise de problemas elastoplásticos, permitindo o estudo da influência das tensões residuais e o acompanhamento da plastificação gradual na seção transversal e seu espalhamento ao longo dos elementos. É apresentada também uma breve descrição das sub-rotinas do programa, escrito em linguagem *FORTRAN 90*.

No Capítulo 5 é apresentado o estudo do comportamento estrutural de sistemas reticulares planos em aço através de aplicações numéricas para alguns modelos estruturais como treliça, viga em balanço, pórtico retangular de um andar e pórtico de andares múltiplos. Os exemplos visam mostrar a consistência e precisão da formulação desenvolvida, confirmando a validade de sua aplicação como um método de Análise Inelástica Avançada, além de apresentar um estudo sobre a influência do encruamento do aço e das tensões residuais no comportamento inelástico de estruturas reticulares planas. Embora esses efeitos tenham sido investigados por muitos pesquisadores, suas influências sobre o comportamento e resistência dos pórticos não têm sido consideradas detalhadamente.

Finalmente, no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho procurando enfatizar a influência do encruamento do aço e das tensões residuais no comportamento inelástico de pórticos planos, através da *Análise Inelástica Avançada*, bem como sugestões para trabalhos futuros.

2

VISÃO GERAL SOBRE A ANÁLISE AVANÇADA

2.1 Introdução

O estudo da Análise Avançada consiste em apresentar uma teoria que considere as propriedades do material, as tensões residuais, os efeitos de segunda ordem, as imperfeições geométricas, a flexibilidade das ligações e demais parâmetros relevantes no estudo do equilíbrio e da resistência das estruturas.

A *Análise Avançada* “exata” é uma técnica que procura introduzir nos modelos matemáticos que descrevem os comportamentos físico e geométrico dos elementos representativos da estrutura, hipóteses mais próximas da realidade e, unir a isto, procedimentos numéricos e iterativos que acompanham o comportamento não-linear dessas estruturas, de tal forma que o método, por si só, seja suficiente para a verificação da estrutura com respeito aos seus estados limites. Dessa maneira, a análise avançada engloba os efeitos não-lineares, físicos e geométricos, nas análises dos sistemas estruturais e de seus elementos componentes.

Este capítulo apresenta uma visão geral sobre os tipos de análise utilizados para a determinação das resistências últimas de estruturas de aço, bem como as características e atributos desejáveis para o desenvolvimento de um modelo de Análise Inelástica Avançada.

2.2 Tipos de Análise

Inicialmente, uma visão geral dos tipos de análise utilizados no cálculo de pórticos planos é apresentada para uma melhor compreensão de suas características. A FIG. 2.1 mostra, esquematicamente, as curvas carga x deslocamento lateral de um pórtico rígido submetido a carregamentos estáticos, para cada tipo de análise considerada.

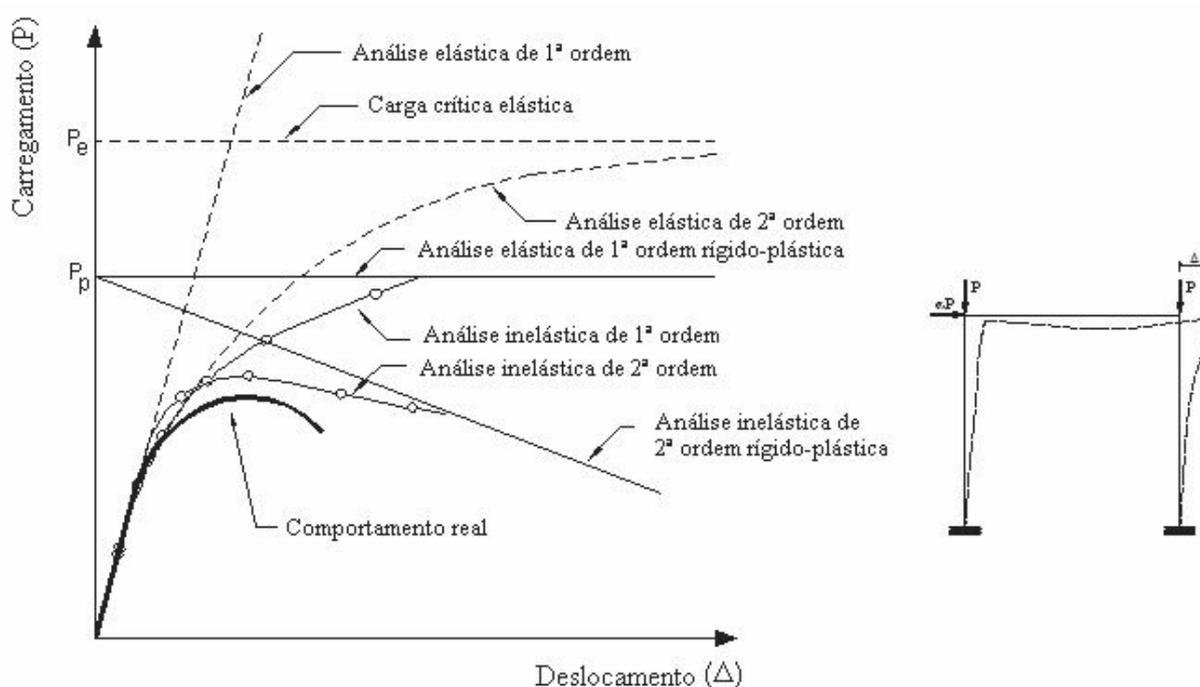


FIGURA 2. 1 – Comportamento carga x deslocamento dos vários tipos de análise

2.2.1 Análise Elástica de 1ª Ordem

Neste tipo de análise o equilíbrio da estrutura é formulado considerando-a na sua posição indeslocada, ou seja, segundo sua geometria original (linearidade geométrica) e o material é modelado como elástico linear (linearidade física). Dessa forma, esta análise considera a hipótese de pequenos deslocamentos e, sendo o material elástico linear, vale o princípio da superposição dos efeitos.

Embora a análise elástica de primeira ordem, ou simplesmente *análise elástica linear*, seja a mais usada nas rotinas de cálculo, ela não fornece informações sobre a influência da plasticidade e da estabilidade no comportamento da estrutura. Essas influências são normalmente consideradas indiretamente ao se verificar isoladamente cada barra através do uso do comprimento efetivo e dos fatores de amplificação dos momentos. A curva carga x deslocamento obtida é linear, como indicada na FIG. 2.1.

2.2.2 Análise Elástica de 2ª Ordem

Nesta análise o equilíbrio é formulado considerando a estrutura na sua posição deslocada (não-linearidade geométrica) e o material ainda é elástico linear (linearidade física). A resposta da curva carga x deslocamento tende assintoticamente para a carga crítica elástica (P_e) da estrutura, conforme indica a FIG. 2.1. Quando obtida rigorosamente, esta análise inclui os efeitos da estabilidade elástica, $P-\delta$ e $P-\Delta$, mas não fornece nenhuma informação direta sobre a resistência inelástica real do pórtico. Trata-se de uma *análise não-linear geométrica*.

2.2.3 Análise Inelástica de 1ª Ordem

Na análise inelástica de primeira ordem o equilíbrio é verificado considerando a geometria indesejada da estrutura (linearidade geométrica) e considera-se a não-linearidade física do material. Este tipo de análise inclui os efeitos de plastificação das barras, que podem ser representados desde os modelos simples de rótulas plásticas até modelos mais detalhados que consideram a propagação da plastificação no interior das mesmas. Quando o material é elastoplástico perfeito, a resposta da curva carga x deslocamento de uma análise inelástica de primeira ordem aproxima assintoticamente da carga limite plástica (P_P), conforme ilustra a FIG. 2.1, calculada por análise de mecanismo plástico. Trata-se de uma *análise não-linear física*.

2.2.4 Análise Inelástica de 2ª Ordem

Nesta análise o equilíbrio é formulado considerando a estrutura na sua posição deslocada (não-linearidade geométrica) e considera-se a não-linearidade física do material. A carga limite obtida pela análise inelástica de segunda ordem é a que mais se aproxima da resistência real, sendo esta a análise a que melhor representa o verdadeiro comportamento estrutural. Trata-se de uma *análise não-linear física e geométrica*.

A análise inelástica, tanto em 1ª quanto em 2ª ordem, se refere a qualquer método de análise que considere os efeitos do escoamento do material, podendo ser classificada em dois tipos principais: (1) formulação por zona plástica ou plasticidade distribuída e (2) formulação baseada na formação de rótulas plásticas. Esta generalização é baseada no grau de refinamento na representação dos efeitos do escoamento. O método da rótula plástica é a mais simples formulação, enquanto o modelo de zona plástica exige um maior refinamento.

Análise Inelástica por Zona Plástica

A análise por zona plástica ou plasticidade distribuída que inclua a distribuição da plasticidade, as tensões residuais, as imperfeições geométricas iniciais e quaisquer outros efeitos de segunda ordem significativos, certamente eliminará a necessidade da verificação da resistência de cada barra da estrutura isoladamente. Portanto, este tipo de método é geralmente classificado como *Análise Inelástica Avançada*. De fato, as equações de interação das barras de pórtico, adotadas nas principais normas técnicas em todo o mundo, foram desenvolvidas, em parte, pelo ajuste de curvas de ensaios de laboratório aos resultados obtidos deste tipo de análise.

Análise Inelástica por Rótula Plástica

O mais simples e direto tipo de análise inelástica é aquele que adota a formulação com formação de rótulas elastoplásticas. Essa análise geralmente envolve o uso de um elemento de viga-pilar para cada barra do pórtico, assumindo que os mesmos permaneçam

elásticos exceto nas suas extremidades, onde as rótulas plásticas de comprimento zero se formam. Na realidade, o escoamento espalha-se sobre um certo comprimento do elemento, geralmente chamado de comprimento da rótula (ΔL), variando segundo o tipo de carregamento, condições de contorno e geometria da seção transversal.

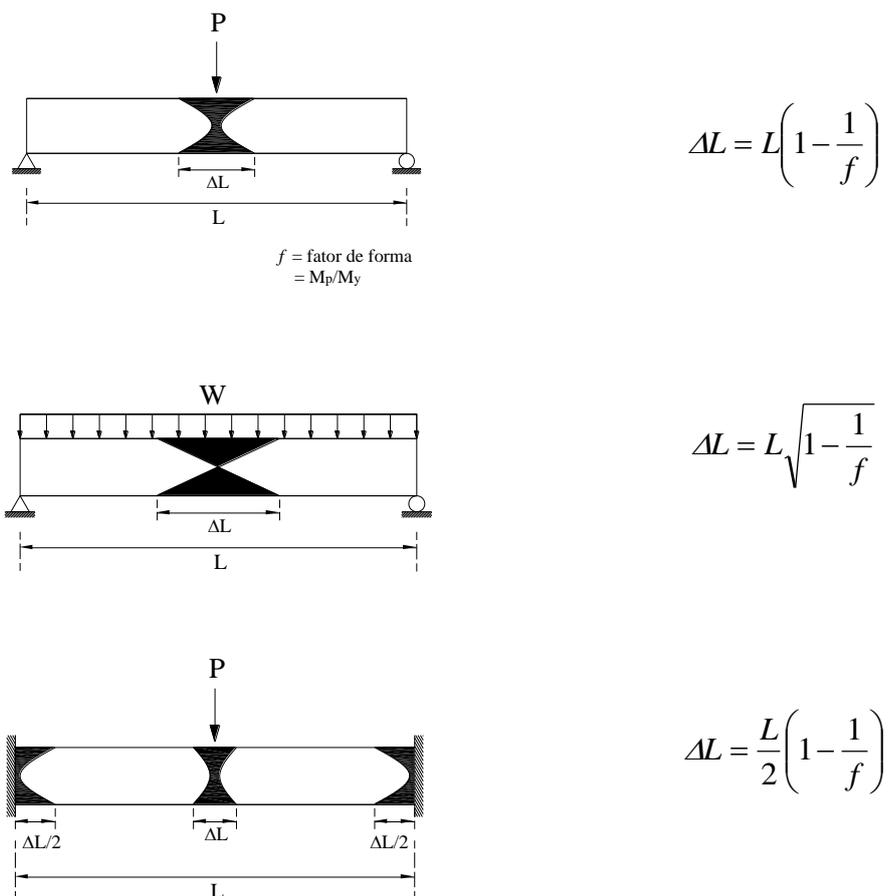


FIGURA 2. 2 – Comprimentos de rótulas plásticas em vigas com diferentes condições de extremidade e carregamento (adaptado de CHEN *et al*, 1996)

A Fig. 2.2 ilustra vários comprimentos de rótula plástica (ΔL) desenvolvidos em vigas com diferentes condições de extremidade e carregamento.

As rótulas plásticas, em geral, formam-se primeiramente nas seções submetidas à curvatura máxima, como pontos de cargas concentradas, na interseção de barras envolvendo mudança de geometria e em pontos de cortante nulo para barras sujeitas a carregamento uniformemente distribuído.

Em termos práticos, a análise inelástica por rótula plástica utiliza dois métodos de análise: (1) método rígido-plástico e (2) método elastoplástico. O método rígido-plástico é

estudado a partir da formação do mecanismo de colapso final da estrutura, ou seja, quando a mesma desenvolve um número suficiente de rótulas plásticas levando ao seu colapso, não permitindo mais a redistribuição do momento.

O método elastoplástico é um método de análise plástica alternativo que, além de determinar a carga de colapso da estrutura, fornece informações adicionais sobre o processo de redistribuição de forças, antes que o mecanismo de colapso seja alcançado. Assim, o método determina a seqüência de formação das rótulas plásticas, o fator de carga associado a cada rótula e a variação do momento fletor nas barras entre cada rótula formada.

Apesar da análise inelástica por rótulas plásticas ser eficiente em alguns casos, principalmente para estruturas nas quais a força axial nas barras é pequena e predomina o efeito dos momentos fletores, tem sido mostrado que é somente um método aproximado. Quando usado para analisar um simples elemento de viga-pilar submetido aos esforços combinados de força normal e momento fletor, este método freqüentemente superestima a resistência e a rigidez do elemento quando o mesmo é carregado até a região inelástica. Dessa forma, esse método não pode ser classificado como método de Análise Avançada para uso no projeto de estruturas, devendo ser modificado ou refinado para permitir a degeneração da rigidez devido aos efeitos da plasticidade distribuída, sendo denominado *Método da rótula plástica refinada*.

2.3 Métodos de Análise Avançada

Conforme KIM e CHEN (1996a), desde meados dos anos de 1970, pesquisas têm sido realizadas sobre o desenvolvimento e validação de vários métodos de Análise Avançada. Diferentes tipos de Análise Avançada podem ser classificados em duas categorias: (1) método da zona plástica e (2) método da rótula plástica refinada.

Método da Zona Plástica

No Método da Zona Plástica, as barras dos pórticos são discretizadas em vários elementos finitos e a seção transversal é subdividida em fatias. O equilíbrio de cada elemento deve ser formulado considerando sua posição deslocada, ou seja, em teoria de 2ª ordem, e deve incluir os efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$, garantindo a influência das barras no estudo da estabilidade da estrutura.

A tensão residual em cada fatia é admitida ser constante, desde que as fatias tenham pequena espessura. O estado de tensão em cada fatia pode ser calculado, permitindo que a distribuição gradual da plastificação devido ao escoamento possa ser captada. Dessa forma, a análise por zona plástica elimina a necessidade da verificação da resistência de cada barra isoladamente, uma vez que pode, explicitamente, levar em conta os efeitos de segunda ordem, a plasticidade distribuída e as tensões residuais, sendo, portanto sua solução conhecida como solução “*exata*”.

Método da Rótula Elastoplástica Refinada

Uma alternativa simples e eficiente é utilizar a análise por rótula elastoplástica, que usa o conceito da plasticidade concentrada, conhecido como rótula plástica de comprimento zero, para avaliar o comportamento inelástico dos pórticos. Esse método considera o efeito da inelasticidade, mas não leva em conta o espalhamento do escoamento ou plasticidade nas seções, nem o efeito das tensões residuais entre duas rótulas plásticas. Sendo assim, consideráveis refinamentos devem ser feitos na formulação para que o método possa ser usado para análise prática de estruturas.

Nos trabalhos de LIEW(1992) *apud* KIM e CHEN (1996a), entre outros, o método da rótula plástica refinada tem sido proposto para a análise de pórticos planos, o qual é baseado em modificações do método da rótula elastoplástica. Duas modificações são feitas para levar em conta a degeneração gradual da rigidez da seção, nos locais de rótula plástica, bem como a degradação gradual da rigidez da barra entre duas rótulas plásticas. O conceito do módulo tangente é utilizado para capturar os efeitos das tensões residuais ao longo da barra. Conseqüentemente, o método da rótula plástica refinada preserva a

eficiência e a simplicidade do método da rótula plástica, mas sem superestimar a resistência e a rigidez da barra.

2.4 Atributos para o Modelo de Análise Avançada

A seguir apresenta-se um resumo, segundo CHEN *et al* (1996), dos fenômenos comportamentais e atributos físicos que podem ser considerados na análise avançada das estruturas, tanto de forma explícita quanto implícita.

Dentre os atributos descritos a seguir, aqueles destacados em itálico foram adotados na formulação e programa desenvolvidos:

A) Atributos físicos

- *Topologia de pórticos: vãos das barras considerados como a distância entre os eixos das mesmas* ou como os comprimentos livres das barras com nós finitos;
- *Estruturas bi ou tridimensionais com elementos ortogonais ou inclinados;*
- *Imperfeições iniciais devido à curvatura inicial das barras, pórticos e colunas fora de prumo, desalinhamento das barras, distorção da seção transversal;*
- *Tensões residuais devido a processos de fabricação e montagem;*
- Restrições de extremidades devido a contraventamentos, apoios, fundações, etc.;
- *Tipos de ligações: flexível, rígida, semi-rígida;*
- Tipos de seções transversais: simétrica, não simétrica, perfil aberto ou fechado;
- *Barras de perfis prismáticos ou não-prismáticos;*
- Seqüência de construção/montagem;
- Interação com a fundação.

B) Resposta a fenômenos não lineares

Não-Linearidade Geométrica:

- *Momento $P-\Delta$: momentos de segunda ordem devido a forças axiais agindo nos deslocamentos associados com rotação de corda do eixo longitudinal;*

- *Momento $P-\delta$: momentos de segunda ordem devido a forças axiais agindo nos deslocamentos associados com a curvatura de barras fletidas;*
- *Deformação axial devido ao “efeito bowing”;*
- Deformação por cisalhamento das barras;
- Flambagem local e distorções;
- Interação entre flambagem local e global;
- Deformações de painéis;

Não-linearidade física dos materiais:

- *Formação de rótulas plásticas;*
- *Distribuição da plastificação ao longo das barras e das seções transversais;*
- *Strain hardening (encruamento do material);*
- Descarregamento devido a deformações plásticas;
- *Interação inelástica da força axial, momentos fletores, momentos de torção e força cortante;*
- Efeitos de plasticidade cíclica.

C) Efeitos de carregamentos:

- *Carregamentos proporcionais e não proporcionais;*
- *Carregamentos conservativos e não conservativos;*
- Carregamentos fora do centro de cisalhamento;
- Carregamentos variáveis e repetitivos;
- Carregamentos dinâmicos;
- Carregamentos devido aos estágios de construção (escoramentos, equipamentos, etc.).

D) Incertezas

- Variabilidade dos carregamentos;
- Variabilidade das resistências das ligações, das barras e das estruturas;
- Variabilidade da resistência dos materiais.

Contudo, a literatura técnica tem considerado que, pelo menos, a distribuição da plasticidade, as tensões residuais, o estudo em teoria de segunda ordem (efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$) e as imperfeições geométricas iniciais devem ser levadas em conta na análise para que a mesma seja considerada análise avançada.

A falta de alguns atributos caracteriza uma limitação da análise, e essa limitação deve ser levada em conta no projeto final, conforme os critérios estabelecidos pelas normas técnicas.

3

FORMULAÇÃO TEÓRICA PARA ANÁLISE INELÁSTICA DE PÓRTICOS PLANOS CONSIDERANDO A PLASTICIDADE DISTRIBUÍDA

3.1 Introdução

A seguir apresenta-se uma formulação para uma análise inelástica em teoria de segunda ordem consistente para estruturas de aço, utilizando uma formulação geometricamente exata para análise não-linear de pórticos planos, pelo método dos elementos finitos. Portanto, são considerados ambos os comportamentos não-lineares: geométrico (NLG) e do material (NLM) das estruturas. A teoria prevê que os nós sofram grandes deslocamentos e rotações e os elementos da estrutura, grandes alongamentos e curvaturas.

Dentro de uma rigorosa formulação Lagrangiana atualizada, utilizando a técnica corrotacional para a obtenção da matriz de rigidez tangente do elemento estrutural, a teoria desenvolvida por PIMENTA (1986) e LAVALL (1996), adaptada por FERREIRA (1999), limitou-se à condição de extremidades rígido-rígido. Adicionando-se ao desenvolvimento teórico, a formulação do presente trabalho prevê o estudo de elementos rotulado-rígido ou rígido-rotulado, respectivamente.

3.2 Deformações e Tensões

Examinando-se uma fibra de material em sua configuração inicial, aqui tomada como referência, onde V_r , A_r , l_r são seu volume, área da seção transversal e comprimento, respectivamente, e examinando-se a mesma fibra em sua configuração deformada ou corrigida, na qual atua uma força normal N , onde V_c , A_c , l_c têm as mesmas definições anteriores na configuração corrigida, conforme a FIG. 3.1, são válidas as seguintes equações:

$$\begin{cases} V_r = A_r l_r \\ V_c = A_c l_c \end{cases} \quad (3.1)$$

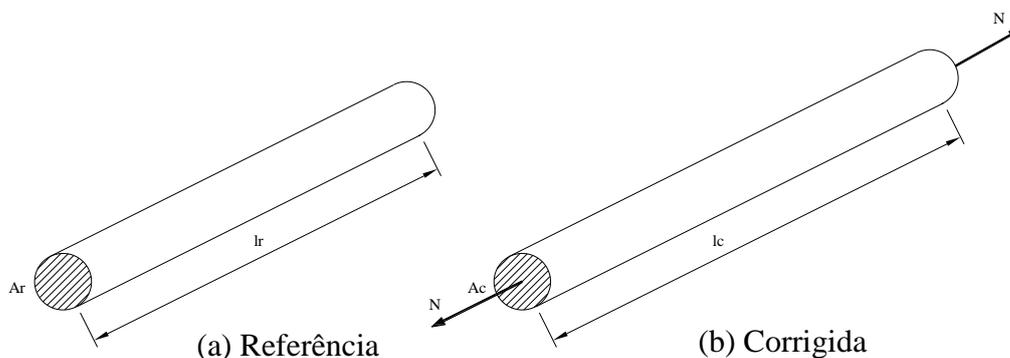


FIGURA 3. 1 – Fibra de um material nas configurações de (a) referência e (b) corrigida

Qualquer grandeza que compare os comprimentos da fibra nas configurações de referência e corrigida pode ser definida como medida de deformação. Assim, o estiramento da fibra considerada é uma medida básica de deformação e é dado por:

$$\lambda = \frac{l_c}{l_r} \quad (3.2)$$

Desta forma, adota-se neste trabalho a deformação de engenharia, definida por:

$$\varepsilon = \lambda - 1 \quad (3.3)$$

A tensão denotada por σ_N , chamada de tensão nominal ou de engenharia é definida por:

$$\sigma_N = \frac{N}{A_r} \quad (3.4)$$

que forma com a deformação de engenharia, um par conjugado.

Na mecânica dos sólidos, em uma análise teórica consistente, as medidas de tensões e deformações devem ser conjugadas e objetivas (invariantes sob movimento de corpo rígido). Ao se utilizar o sistema corrotacional de coordenadas pode-se garantir que a tensão nominal e a deformação linear, além de serem conjugadas, são também objetivas.

3.3 Relações Constitutivas

Em um estudo mais geral, o módulo de rigidez do material de uma fibra é introduzido por meio de:

$$D_m = \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon_m} \quad (3.5)$$

sendo D_m , por definição, o coeficiente angular da curva $\sigma_m \times \varepsilon_m$, descrito na FIG. 3.2.

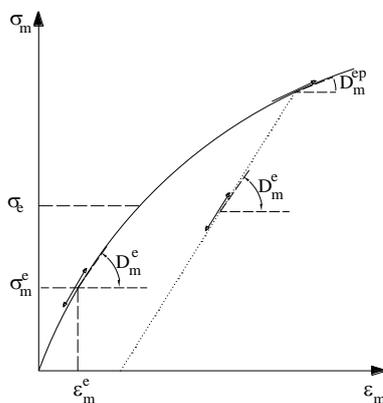


FIGURA 3. 2 – Módulo de rigidez no comportamento elástico e elastoplástico de uma fibra.

A fibra considerada estará sendo solicitada em regime elástico se D_m for único tanto em carga quanto em descarga. Se a fibra estiver em regime elastoplástico, D_m poderá adotar dois valores distintos: D_m^e para o descarregamento elástico ou D_m^{ep} para o carregamento plástico.

No regime elastoplástico deve ser feita a verificação da situação na qual a fibra se encontra, comparando-se a tensão atuante σ_m com a tensão inicial de escoamento do material σ_e :

- Se $(\sigma_m - \sigma_e) < 0$, a fibra está em regime elástico e $D_m = D_m^e = D = d\sigma_m/d\varepsilon_m$, tanto em carga quanto em descarga.

- Se $(\sigma_m - \sigma_e) > 0$, a fibra está em regime plástico e $D_m = D_m^e = D = d\sigma_m/d\varepsilon_m$, para descarga ou $D_m = D_m^{ep} = D^{ep}$ para carga.

3.4 Sistemas de Coordenadas - Graus de Liberdade

3.4.1 Condição de Extremidades: Rígido – Rotulado

Para o estudo de pórticos planos serão utilizados dois sistemas de referência: o sistema de coordenadas Lagrangiano ou Cartesiano, como referência global e o sistema corrotacional, ligado ao elemento, como referência local, no qual os deslocamentos são medidos em relação a uma configuração deformada. No sistema corrotacional são medidos os graus de liberdade naturais e uma transformação de coordenadas para o sistema Lagrangiano atualizado, considerando os deslocamentos de corpo rígido.

Seja um pórtico plano formado por barras retas em sua configuração inicial. Esta estrutura é colocada no plano descrito pelas coordenadas x e y . Os nós do pórtico que podem estar localizados também ao longo das barras, possuem três graus de liberdade: os deslocamentos vertical e horizontal u e v , respectivamente, e a rotação θ , medida no sentido anti-horário, conforme indicado na FIG. 3.3.

Examina-se agora um elemento qualquer ab pertencente ao pórtico, cujo comprimento inicial é l_r , a extremidade a é perfeitamente rígida e a extremidade b é perfeitamente

rotulada. O ângulo que este elemento faz com o eixo x é φ_r , conforme mostrado na FIG. 3.3. Nesta configuração será introduzido um sistema de coordenadas local corrotacional x_r e y_r , centrado no elemento.

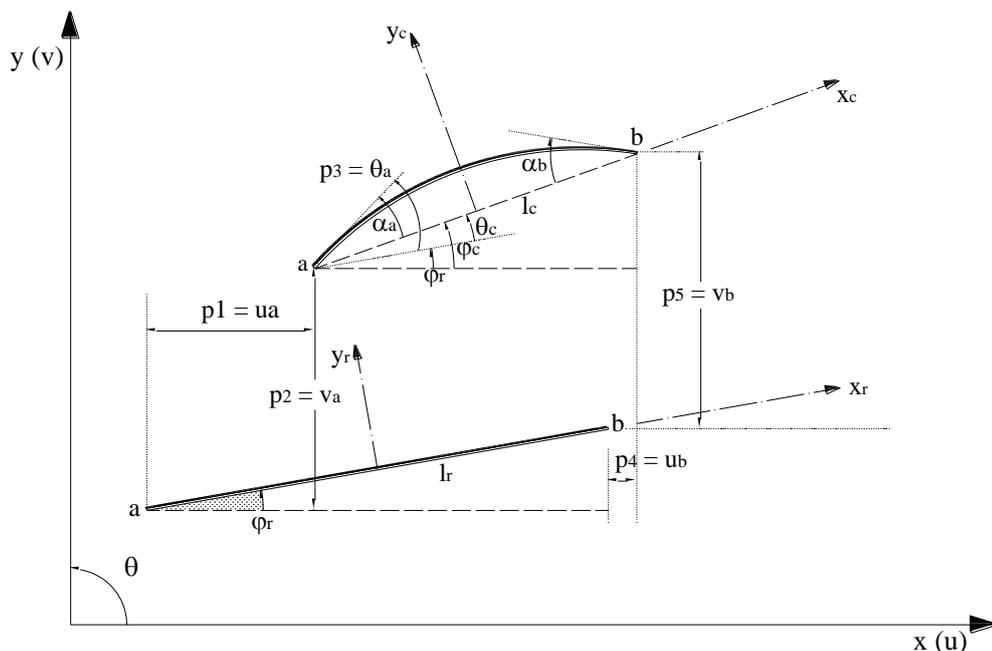


FIGURA 3.3 – Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rotulada.

Após um determinado nível de carregamento, o elemento, já deformado, desloca-se para uma nova posição atualizada ou corrigida. Nesta configuração introduz-se o sistema local de coordenadas x_c e y_c , centrado na corda que une as extremidades a e b do elemento. Esta corda tem comprimento l_c e faz ângulo φ_c com o eixo x .

Na configuração deformada a barra encontra-se fletida. O ângulo entre a corda e a tangente ao eixo da barra é denotado por α e tem nos extremos os valores α_a e α_b . O estiramento da corda assim como sua deformação são dados, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \lambda = l_c/l_r \\ \varepsilon = \lambda - 1 \end{cases} \quad (3.6)$$

Adotam-se então três graus de liberdade naturais ou corrotacionais, que são quantidades objetivas (independem do movimento de corpo rígido) e que por sua vez são suficientes para medir as deformações do elemento referindo-se ao sistema local corrotacional, e, que ainda podem ser agrupados em um vetor \mathbf{q}_α (3x1), onde $\alpha = 1,2,3$, sendo definidos por:

$$\begin{cases} q_1 = \Delta = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a \\ q_3 = \alpha_b \end{cases} \quad (3.7)$$

onde q_1 mede a mudança de comprimento da corda (alongamento ou encurtamento), q_2 mede o ângulo α_a na extremidade a do elemento e q_3 mede o ângulo α_b na extremidade b do elemento. Estes dois últimos independentes da rotação de corpo rígido θ_c , sendo:

$$\theta_c = \varphi_c - \varphi_r \quad (3.8)$$

Os graus de liberdade cartesianos p_i ($i=1,\dots,6$) são definidos por $p_1=u_a$; $p_2=v_a$; $p_3=\theta_a$; $p_4=u_b$; $p_5=v_b$; $p_6=\theta_b$, e podem ser reunidos no vetor \mathbf{p}_i (6x1), denominado vetor de deslocamentos nodais do elemento, da seguinte forma:

$$\mathbf{p}_i^T = (u_a \quad v_a \quad \theta_a \quad u_b \quad v_b \quad \theta_b) \quad (3.9)$$

Associando-se a relação $q_3 = -q_2/2$, oriunda da condição de extremidades a rígida e b rotulada, pode-se estabelecer uma relação entre os graus de liberdade cartesianos \mathbf{p}_i , referidos ao sistema global, e os graus de liberdade corrotacionais \mathbf{q}_α , conforme as expressões a seguir.

$$\begin{cases} q_1 = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a = \theta_a - \theta_c = p_3 - \varphi_c + \varphi_r \\ q_3 = \alpha_b = -\frac{1}{2}q_2 = -\frac{1}{2}(p_3 - \varphi_c + \varphi_r) \end{cases} \quad (3.10)$$

As relações diferenciais entre as coordenadas locais corrotacionais e as coordenadas globais cartesianas podem ser escritas numa matriz $\mathbf{B}_{3 \times 6}$ ao se derivar \mathbf{q}_α em relação a \mathbf{p}_i , isto é, $\partial q_\alpha / \partial p_i$, ou $q_{\alpha,i}$.

$$q_{\alpha,i} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c & \text{sen} \varphi_c & 0 \\ -\frac{\text{sen} \varphi_c}{l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 1 & \frac{\text{sen} \varphi_c}{l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 0 \\ \frac{\text{sen} \varphi_c}{2l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{2l_c} & -\frac{1}{2} & -\frac{\text{sen} \varphi_c}{2l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{2l_c} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

ou

$$\{dq_\alpha\} = [\mathbf{B}]\{dp_i\} \quad (3.12)$$

onde \mathbf{B} é uma matriz de mudança de coordenadas que relaciona as taxas de deslocamentos nas coordenadas locais corrotacionais com as taxas de deslocamentos nas coordenadas globais cartesianas. Por também depender de l_c e φ_c , a matriz \mathbf{B} é altamente não linear, e pode ser escrita como um produto:

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{T} \quad (3.13)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 1 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2l_c} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2l_c} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{T}_{(6 \times 6)} = \begin{pmatrix} t & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & t \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$t_{(3 \times 3)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_c & \text{sen} \varphi_c & 0 \\ -\text{sen} \varphi_c & \cos \varphi_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

- $\bar{\mathbf{B}}$ é a forma local de \mathbf{B} e relaciona os graus de liberdade naturais do sistema corrotacional com os graus de liberdade do sistema cartesiano global (mudança de coordenadas).

- \mathbf{T} é a matriz de rotação de eixos, que muda as coordenadas locais no sistema cartesiano para as coordenadas globais no referido sistema.

- $\mathbf{0}_3$ é a matriz nula (3x3).

A determinação das derivadas de segunda ordem, \mathbf{q}_α em relação a \mathbf{p}_i , isto é $\partial^2 q_\alpha / \partial p_i \partial p_j$, serão também necessárias e podem ser colocadas em três matrizes simétricas \mathbf{G}_α (6x6), com $\alpha = 1, 2, 3$ e $i = j = 1, \dots, 6$, dadas por:

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{pmatrix} \text{sen}^2 \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -\text{sen}^2 \varphi_c & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & \cos^2 \varphi_c & 0 & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -\cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sen}^2 \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & \cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{1}{l_c^2} \begin{pmatrix} -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & & & & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{G}_3 = \frac{1}{l_c^2} \begin{pmatrix} \text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & -\frac{(\cos^2\varphi_c - \text{sen}^2\varphi_c)}{2} & 0 & -\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & \frac{(\cos^2\varphi_c - \text{sen}^2\varphi_c)}{2} & 0 \\ & -\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & 0 & \frac{(\cos^2\varphi_c - \text{sen}^2\varphi_c)}{2} & \text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & -\frac{(\cos^2\varphi_c - \text{sen}^2\varphi_c)}{2} & 0 \\ & & & & -\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Nota-se que a derivada segunda $q_{\alpha,ij}$ é uma relação que envolve somente geometria e representará uma parcela da matriz de rigidez geométrica da estrutura oriunda do equilíbrio da estrutura na posição deslocada (teoria de segunda ordem).

A matriz geométrica \mathbf{G}_α pode ser escrita como um produto de três matrizes:

$$\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{T}^T \overline{\mathbf{G}}_\alpha \mathbf{T} \quad (3.20)$$

onde $\overline{\mathbf{G}}_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$, é a forma local de \mathbf{G}_α e \mathbf{T} é a matriz de rotação de eixos, dada pela Eq.(3.19). Logo,

$$\overline{\mathbf{G}}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\overline{\mathbf{G}}_2 = \frac{1}{l_c^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_3 = \frac{1}{2l_c^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

3.4.2 Condição de Extremidades: Rígido – Rígido

A formulação do elemento, descrita a seguir, foi retirada de LAVALL (1996) e FERREIRA (1999), considerando rígidos os nós da estrutura.

Analogamente ao caso anterior, com auxílio da FIG 3.4 e das Eqs. (3.7), (3.8) e (3.9), pode-se estabelecer a relação entre os graus de liberdade cartesianos \mathbf{p}_i , e os graus de liberdade corrotacionais \mathbf{q}_α , considerando-se as condições das extremidades a e b perfeitamente rígidas.

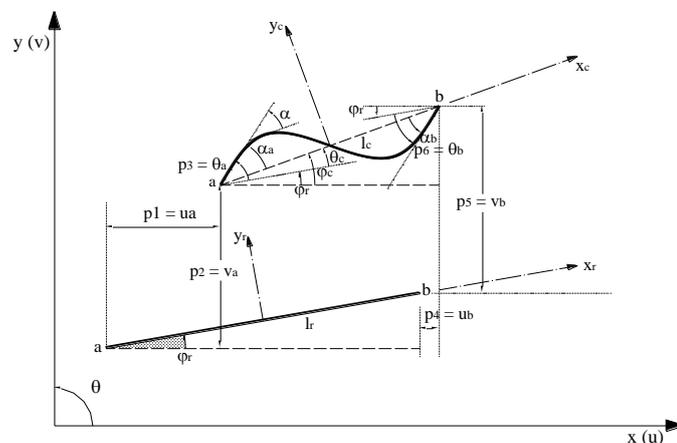


FIGURA 3.4 – Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rígido. Assim, a matriz \mathbf{B} , obtida derivando-se \mathbf{q}_α em relação a \mathbf{p}_i , é dada por:

$$q_{\alpha,i} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_c & -\operatorname{sen} \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c & \operatorname{sen} \varphi_c & 0 \\ -\frac{\operatorname{sen} \varphi_c}{l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 1 & \frac{\operatorname{sen} \varphi_c}{l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 0 \\ -\frac{\operatorname{sen} \varphi_c}{l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 0 & \frac{\operatorname{sen} \varphi_c}{l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Pensando na forma local de \mathbf{B} , originada pelo produto $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{T}$, tem-se:

$$\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 1 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

onde a matriz de rotação de eixos \mathbf{T} é dada pela Eq. (3.15).

As derivadas de segunda ordem, q_{α} em relação a p_i , podem ser colocadas nas três matrizes simétricas \mathbf{G}_{α} (6x6), dadas por:

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 \varphi_c & -\operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -\operatorname{sen}^2 \varphi_c & \operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & \cos^2 \varphi_c & 0 & \operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -\cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \operatorname{sen}^2 \varphi_c & -\operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & \cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_3 = \frac{1}{l_c^2} \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \operatorname{sen}^2 \varphi_c) & 0 & 2\operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -(\cos^2 \varphi_c - \operatorname{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & 2\operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -(\cos^2 \varphi_c - \operatorname{sen}^2 \varphi_c) & -2\operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2\operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \operatorname{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & & & & 2\operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Pensando no produto de três matrizes $\mathbf{G}_a = \mathbf{T}^T \overline{\mathbf{G}}_a \mathbf{T}$, tem-se:

$$\overline{\mathbf{G}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$\overline{\mathbf{G}}_2 = \overline{\mathbf{G}}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

3.5 Teoria Estrutural

A teoria estrutural adotada é desenvolvida a partir da hipótese cinemática atribuída a Bernoulli-Euler:

“As seções transversais planas e ortogonais ao eixo da barra permanecem planas, indeformáveis e ortogonais ao eixo, após deformação”.

Por essa hipótese, despreza-se o empenamento das seções transversais ao se afirmar que as seções permanecem planas após a deformação. Desprezam-se também as deformações transversais ou de Poisson ($\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \nu = 0$) ao se admitir que as seções ficam indeformáveis. Como as seções permanecem ortogonais ao eixo da barra, as distorções no plano da barra, γ_{xy} , e os efeitos da tensão de cisalhamento, τ_{xy} , são também nulos. Assim, a única deformação relevante é a deformação longitudinal.

3.6 Cinemática do Elemento

3.6.1 Campo de Deformação

Para que possa ser definido um campo de deformação consistente com a teoria estrutural apresentada, considere-se um elemento diferencial de uma barra reta de pórtico plano na configuração inicial, como mostrado na FIG. 3.5a. Este elemento é limitado por duas seções transversais ortogonais a um eixo longitudinal, arbitrariamente definido, e distantes dx_r uma da outra.

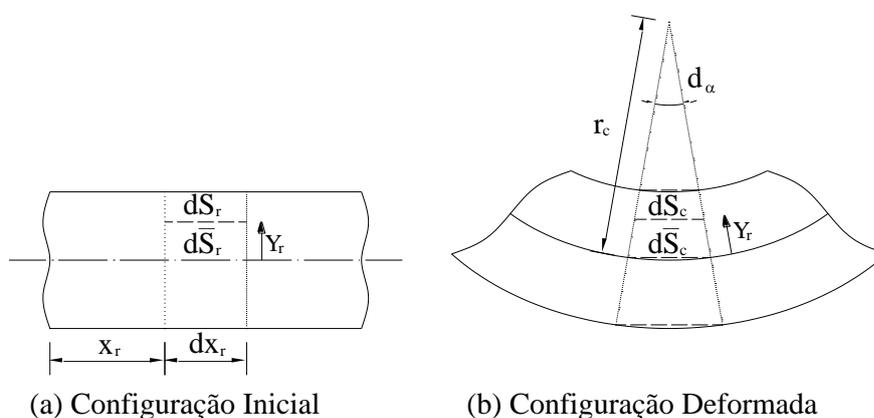


FIGURA 3. 5 – Elemento diferencial de barra reta

Designando-se fibra como um conjunto de pontos materiais sobre uma reta paralela ao eixo longitudinal, verifica-se que uma fibra a uma distância y_r do eixo e uma fibra pertencente a esse eixo tem os comprimentos dS_r e $d\bar{S}_r$ respectivamente, dados por:

$$dS_r = d\bar{S}_r = dx_r \quad (3.31)$$

Seja o mesmo elemento na configuração deformada, conforme FIG. 3.5b e adotando-se a hipótese cinemática de Bernoulli-Euler, obtém-se:

$$\begin{cases} dS_c = (r_c - y_r)d\alpha \\ d\bar{S}_c = r_c.d\alpha \end{cases} \quad (3.32)$$

onde r_c é o raio de curvatura local e $d\alpha$ é o ângulo interno do setor definido pelas seções transversais, formado após a deformação. Da Eq. (3.32) tem-se que:

$$dS_c = d\bar{S}_c - y_r d\alpha \quad (3.33)$$

O estiramento de uma fibra a uma distância y_r do eixo da barra, λ , e o estiramento de uma fibra do eixo, $\bar{\lambda}$, são definidos por:

$$\begin{cases} \lambda = dS_c / dS_r \\ \bar{\lambda} = d\bar{S}_c / d\bar{S}_r \end{cases} \quad (3.34)$$

Levando-se a Eq. (3.33) na Eq.(3.34), com o auxílio da Eq. (3.31) e, em seguida, subtraindo-se a unidade em ambos os membros, tem-se a expressão analítica do campo de deformação consistente com a teoria estrutural adotada, dada por:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} - y_r \alpha' \quad (3.35)$$

onde $\alpha' = d\alpha/dx_r$,

3.6.2 Campo de Deslocamento

De acordo com a hipótese de Bernoulli-Euler o campo de deslocamento dos pontos pertencentes à barra fica caracterizado se os deslocamentos axiais (\bar{u}) e transversais (\bar{v}) dos pontos situados sobre o eixo são conhecidos, bem como a rotação (α) das seções transversais, conforme FIG. 3.6.

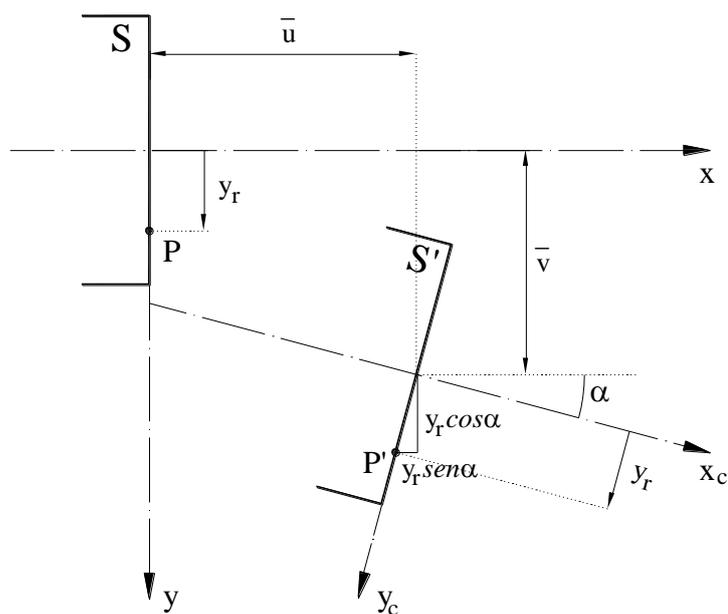


FIGURA 3. 6 – Campo de deslocamento na flexão normal composta

No sistema corrotacional (x_c, y_c) os deslocamentos u_c e v_c representam os campos de deslocamento do ponto P pertencente à seção S , caracterizado pela coordenada y_r relativa ao eixo da barra, dados por:

$$\begin{cases} u_c(x, y) = \bar{u}_c(x) - y_r \operatorname{sen} \alpha \\ v_c(x, y) = \bar{v}_c(x) - y_r (1 - \cos \alpha) \end{cases} \quad (3.36)$$

onde \bar{u}_c e \bar{v}_c são os deslocamentos do eixo da barra no sistema corrotacional.

Observa-se que o ângulo α decorre dos deslocamentos \bar{u}_c e \bar{v}_c dos pontos situados sobre o eixo, como indicada a FIG. 3.7, ou seja:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{d\bar{v}_c}{dx_r + d\bar{u}_c} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{d\bar{v}_c/dx_r}{1 + d\bar{u}_c/dx_r} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\bar{v}_c'}{1 + \bar{u}_c'} \right) \quad (3.37)$$

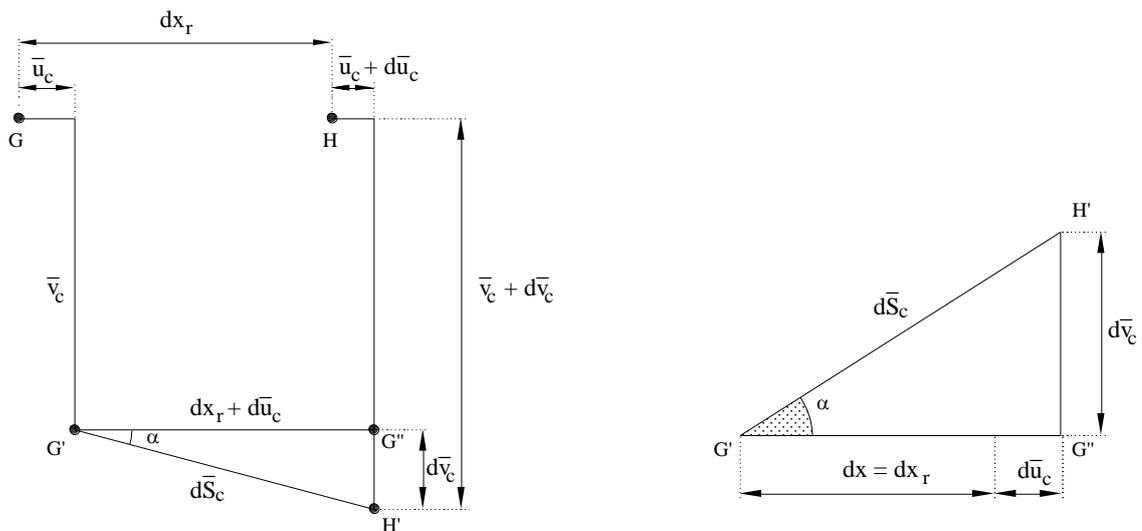


FIGURA 3. 7 – Rotação α da seção transversal.

Do triângulo formado por $G'G''H'$ da FIG. 3.7 tem-se que após a deformação, a fibra do eixo da barra tem o comprimento infinitesimal $d\bar{S}_c$, dado por:

$$d\bar{S}_c = \left[(dx + d\bar{u}_c)^2 + (d\bar{v}_c)^2 \right]^{1/2} \quad (3.38)$$

O estiramento de uma fibra do eixo é obtido dividindo-se a Eq. (3.38) por $d\bar{S}_r = dx_r = dx$:

$$\bar{\lambda} = \frac{d\bar{S}_c}{d\bar{S}_r} = \left[(1 + \bar{u}_c')^2 + (\bar{v}_c')^2 \right]^{1/2} \quad (3.39)$$

O cosseno do ângulo α dividido também por dx , será dado por:

$$\cos \alpha = \frac{1 + \bar{u}_c'}{\bar{\lambda}} \quad (3.40)$$

Finalmente, o estiramento de uma fibra da barra é dado por:

$$\bar{\lambda} = (1 + \bar{u}_c') \sec \alpha \quad (3.41)$$

Sabendo-se que $\bar{\varepsilon} = \bar{\lambda} - 1$, a expressão analítica do campo de deformação, consistente com a teoria estrutural adotada, dada pela Eq. (3.35) torna-se:

$$\varepsilon = \left(1 + \overline{u_c'}\right) \sec \alpha - 1 - y_r \alpha' \quad (3.42)$$

A determinação do campo de deformação descrito acima fica dependente da escolha de funções de interpolação aproximadoras para o deslocamento $\overline{u_c}$ do eixo da barra e para o ângulo α de rotação do eixo. Essas funções serão expressas em função dos graus de liberdade naturais (objetivos), q_α , e o campo de deformação passará a ser função de:

$$\varepsilon = f[q_\alpha(p_i)] \quad (3.43)$$

3.7 Equações de Equilíbrio do Elemento

Conhecido o campo de deformação, descrito pela Eq. (3.43), o equilíbrio do elemento pode ser obtido através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Sabe-se que o trabalho virtual interno de um elemento é dado por:

$$\delta \omega_i = \int_{V_r} \sigma \cdot \delta \varepsilon \cdot dV_r \quad (3.44)$$

onde dV_r é o elemento de volume na configuração de referência, σ é a tensão normal de uma fibra e $\delta \varepsilon$ é a deformação virtual de uma fibra.

A deformação virtual é dada pela variação da Eq. (3.43), e é obtida com o emprego da Regra da Cadeia:

$$\delta \varepsilon = \varepsilon_\alpha q_{\alpha,i} \delta p_i \quad (3.45)$$

onde δp_i é o vetor dos deslocamentos nodais virtuais do elemento.

As forças nodais internas P_i são definidas de tal forma que:

$$\delta\omega_i = P_i \delta p_i \quad (3.46)$$

Igualando-se as Eq. (3.44) e Eq. (3.46), com o auxílio da Eq. (3.45) e sabendo-se que $q_{\alpha,i}$ representa uma transformação de coordenadas que independe do volume de referência, chega-se à equação de equilíbrio, dada por:

$$P_i = \left(\int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r \right) q_{\alpha,i} \quad (3.47)$$

Chamando de Q_α os esforços internos nas coordenadas naturais ou corrotacionais:

$$Q_\alpha = \int_{V_r} \sigma \varepsilon_{,\alpha} dV_r \quad (3.48)$$

tem-se que a equação de equilíbrio do elemento, em notação indicial, dada por:

$$P_i = Q_\alpha q_{\alpha,i} \quad (3.49)$$

Matriz de Rigidez Tangente do Elemento

As componentes k_{ij} da matriz de rigidez tangente do elemento são obtidas derivando-se P_i em relação às coordenadas cartesianas p_j . Derivando-se a Eq. (3.49) com o auxílio da Regra da Cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = k_{ij} = q_{\alpha,i} Q_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_\alpha q_{\alpha,ij} \quad (3.50)$$

Resolvendo-se a derivada dentro da integral da Eq. (3.48) com ajuda da Eq. (3.5), conclui-se que:

$$Q_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} (\varepsilon_{,\alpha} D\varepsilon_{,\beta} + \sigma\varepsilon_{,\alpha\beta}) dV_r \quad (3.51)$$

onde define-se:

$$D_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \varepsilon_{,\alpha} D\varepsilon_{,\beta} dV_r \quad (3.52)$$

$$H_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \sigma\varepsilon_{,\alpha\beta} dV_r \quad (3.53)$$

Levando-se a Eq. (3.51) na Eq. (3.50), com o auxílio das Eqs. (3.52) e (3.53), tem-se:

$$k_{ij} = \underbrace{q_{\alpha,i} (D_{\alpha,\beta} + H_{\alpha,\beta}) q_{\beta,j}}_{\text{parcela objetiva}} + \underbrace{Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}}_{\text{parcela do movimento de corpo rígido}} \quad (3.54)$$

$$k_{ij} = \underbrace{q_{\alpha,i} D_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}}_{\text{parcela constitutiva}} + \underbrace{q_{\alpha,i} H_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}}_{\text{parcela geométrica}} \quad (3.55)$$

A parcela geométrica de k_{ij} , oriunda da análise em teoria de segunda ordem, leva em conta os chamados efeitos $P\delta$ ($q_{\alpha,i} H_{\alpha,\beta} q_{\beta,j}$) e $P\Delta$ ($Q_{\alpha} q_{\alpha,ij}$).

Escrevendo em notação matricial, a matriz de rigidez constitutiva vem da parcela constitutiva da Eq.(3.55). Usando-se $q_{\alpha,i} = q_{\beta,j} = \mathbf{B}_{(3 \times 6)}$ e $D_{\alpha,\beta} = \mathbf{D}_{(3 \times 3)}$, simétrica, resulta em:

$$\mathbf{k}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (3.56)$$

que também é simétrica e tem dimensão (6x6).

A matriz de rigidez geométrica é obtida da parcela geométrica da Eq. (3.55) com o auxílio de $H_{\alpha,\beta} = \mathbf{H}_{(3 \times 3)}$ e $q_{\alpha,ij} = \mathbf{G}_{\alpha(6 \times 6)}$, ambas simétricas, com $\alpha = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{k}_G = \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha \quad (3.57)$$

Finalmente, pode-se escrever a matriz de rigidez tangente, simétrica (6x6), na seguinte forma:

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_M + \mathbf{k}_G \quad (3.58)$$

3.8 Interpolação

O campo de deformação adotado neste trabalho é dado pela Eq. (3.42), onde $\varepsilon = (1 + \overline{u_c}') \sec \alpha - 1 - y_r \alpha'$. Para que o campo de deformação seja conhecido é necessário definir funções aproximadoras para o deslocamento $\overline{u_c}$ e para o ângulo α de rotação do eixo. Várias funções podem ser utilizadas para descrever $\overline{u_c}$ e α ao longo da barra, desde que fiquem explícitas em função de q_α . Utilizando-se as funções de interpolação usuais da análise numérica aplicada à mecânica dos materiais, pode-se escrevê-las em função dos graus de liberdade corrotacionais, desconsiderando-se, assim, o movimento de corpo rígido:

$$\overline{u_c} = q_1 \psi_1 \quad (3.59)$$

$$\alpha = q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3' \quad (3.60)$$

onde:

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \\ \psi_2' = \frac{3x_r^2}{l_r^2} - \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \\ \psi_3' = \frac{3x_r^2}{l_r^2} + \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \end{cases} \quad (3.61)$$

Partindo-se então da Eq.(3.42) tem-se a expressão do campo de deformação ε em função das coordenadas corrotacionais q_α :

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \sec(q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3') - y_r (q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'') - 1 \quad (3.62)$$

onde:

$$\psi_1' = \frac{1}{l_r} \quad \psi_2'' = \frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} \quad \psi_3'' = \frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r} \quad (3.63)$$

3.9 Aproximações e Simplificações

3.9.1 Aproximações de Segunda Ordem

Se o ângulo de rotação α ao longo dos elementos é suficientemente pequeno, o que pode ser obtido com elementos curtos, sem perda da generalidade da formulação, as seguintes aproximações de segunda ordem de suas funções trigonométricas podem ser utilizadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \approx \alpha \\ \operatorname{tg} \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots \approx \alpha \\ \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \\ \sec \alpha = 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{5\alpha^4}{24} + \dots \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2} \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Assim, com as simplificações e aproximações adotadas, chega-se a uma nova expressão para o campo de deformação:

$$\varepsilon = \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left[1 + \frac{(q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3')^2}{2}\right] - 1 - y_r (q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'') \quad (3.65)$$

3.9.2 Valor Médio de Deformação

3.9.2-1 Condição de Extremidades: Rígido-Rotulado

Como visto, a Eq. (3.65) pode ser escrita conforme a Eq. (3.35) por $\varepsilon = \bar{\varepsilon} - y_r \alpha'$, onde:

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left[1 + \frac{(q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3')^2}{2}\right] - 1 \\ \alpha' = (q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'') \end{cases} \quad (3.66)$$

Substituindo-se a relação $q_3 = -q_2/2$, oriunda da condição de extremidades rígido-rotulada, na Eq. (3.66), tem-se:

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon} = \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left[1 + \frac{\left(q_2 \psi_2' - \frac{q_2}{2} \psi_3'\right)^2}{2}\right] - 1 \\ \alpha' = q_2 \left(\psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2}\right) \end{cases} \quad (3.67)$$

A deformação do eixo da barra é dada por $\bar{\varepsilon}$, que é variável ao longo de seu comprimento, uma vez que as funções ψ_2' e ψ_3' variam com x_r . Para facilitar o desenvolvimento analítico da formulação, adotar-se-á um valor constante para $\bar{\varepsilon}$, representado por seu valor médio:

$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{1}{l_r} \int \bar{\varepsilon} dx_r \quad (3.68)$$

Então o campo de deformações que será adota nesta formulação, para a condição de extremidades rígido-rotulado, é dada por:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left(\frac{q_2^2}{10}\right) - y_r q_2 \left(\psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2}\right) \quad (3.69)$$

3.9.2-2 Condição de Extremidades: Rígido-Rígido

Conforme demonstrado por LAVALL (1996) e FERREIRA (1999), resolvendo-se a integral descrita pela Eq. (3.68), com o auxílio da Eq. (3.66), chega-se à expressão final do campo de deformação para a condição de extremidades rígido-rígido, dada por:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left(\frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) - y_r (q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'') \quad (3.70)$$

3.10 Expressões Analíticas para a Matriz de Rigidez Tangente

3.10.1 Condição de Extremidades: Rígido – Rotulado

A matriz de rigidez tangente de um elemento é dada pela Eq. (3.58):

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha.$$

As matrizes \mathbf{B} e \mathbf{G}_α são dadas pelas Eqs. (3.11), (3.17), (3.18) e (3.19). Os esforços internos naturais nas coordenadas corrotacionais, através da Eq. (3.48) são dados por:

$$\begin{cases} Q_1 = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N}{l_r} \left(1 + \frac{q_2^2}{10}\right) dx_r \\ Q_2 = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[N \lambda \left(\frac{q_2}{5}\right) + M \left(\psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2}\right) \right] dx_r \\ Q_3 = 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

onde N é a força normal e M é o momento fletor, atuantes na seção transversal do elemento. O estiramento λ é dado por $\lambda = l_0/l_r$, conforme a Eq. (3.2).

A partir da equação (3.53), os elementos da matriz \mathbf{H} são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11} = 0 \\ H_{12} = H_{21} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N}{l_r} \left(\frac{q_2}{5} \right) dx_r \\ H_{13} = H_{31} = 0 \\ H_{22} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N\lambda}{5} dx_r \\ H_{23} = H_{32} = 0 \\ H_{33} = 0 \end{array} \right. \quad (3.72)$$

Os elementos da matriz \mathbf{D} são obtidos a partir da Eq. (3.52):

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{11} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{C_1}{l_r^2} \left(1 + \frac{q_2^2}{10} \right) dx_r \\ D_{12} = D_{21} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[C_1 \lambda \left(\frac{q_2}{5} \right) - C_2 \left(\psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2} \right) \right] \frac{1}{l_r} \left(1 + \frac{q_2^2}{10} \right) dx_r \\ D_{13} = D_{31} = 0 \\ D_{22} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[C_1 \lambda^2 \left(\frac{q_2}{5} \right)^2 - 2C_2 \lambda \left(\frac{q_2}{5} \right) \left(\psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2} \right) + C_3 \left(\psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2} \right)^2 \right] dx_r \\ D_{23} = D_{32} = 0 \\ D_{33} = 0 \end{array} \right. \quad (3.73)$$

onde os coeficientes de rigidez C_1 , C_2 e C_3 são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \int_{A_r} D dA_r \\ C_2 = \int_{A_r} D y_r dA_r \\ C_3 = \int_{A_r} D y_r^2 dA_r \end{array} \right. \quad (3.74)$$

3.10.1-1 Elementos Prismáticos em Regime Elástico Linear

No regime elástico linear, o material segue a Lei de Hooke, dada por:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.75)$$

e o campo de deformação é dado por $\varepsilon = \bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha'$, onde a deformação média $\bar{\varepsilon}_m$ e o produto $y_r \alpha'$, que varia linearmente com x_r , são dados respectivamente por:

$$\bar{\varepsilon}_m = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left(\frac{q_2^2}{10}\right) \quad (3.76)$$

$$y_r \alpha' = y_r q_2 \left(\psi_2'' - \frac{\psi_3''}{2} \right) = y_r q_2 \left[\left(\frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} \right) - \left(\frac{3x_r}{l_r^2} + \frac{1}{2l_r} \right) \right] \quad (3.77)$$

As expressões analíticas para Q_α , $H_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta}$ e C_α , ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$), em regime elástico linear, são obtidas com o auxílio das Eqs. (3.71) à (3.74).

a) Determinação da Força Normal N e do Momento Fletor M

Com o auxílio das Eqs. (3.35) e (3.75), tem-se que:

$$\begin{aligned} N &= \int_{A_r} \sigma dA_r = \int_{A_r} E(\bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha') dA_r \Rightarrow N = E\bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} dA_r - E\alpha' \int_{A_r} y_r dA_r \\ N &= EA_r \bar{\varepsilon}_m \end{aligned} \quad (3.78)$$

Como $\bar{\varepsilon}_m$ é um valor médio constante ao longo do elemento, N também o será. O momento estático da seção será nulo, $\int_{A_r} y_r dA_r = 0$.

$$\begin{aligned} M &= - \int_{A_r} \sigma y_r dA_r = - \int_{A_r} E(\bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha') y_r dA_r \\ M &= -E\bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} y_r dA_r + E\alpha' \int_{A_r} y_r^2 dA_r \\ M &= EI\alpha' \end{aligned} \quad (3.79)$$

Observa-se que M varia linearmente ao longo do elemento, pois α' varia linearmente com x_r . Os momentos fletores nas extremidades a e b do elemento segundo a FIG 3.3, na convenção clássica, valem:

$$\begin{cases} x = -\frac{l_r}{2} & \therefore M_a = -\frac{3EI}{l_r} q_2 \\ x = +\frac{l_r}{2} & \therefore M_b = 0 \end{cases} \quad (3.80)$$

b) Matriz de Rigidez Tangente do Elemento no Sistema Local Cartesiano em Regime Elástico Linear

A matriz de rigidez tangente do elemento no sistema local cartesiano, pode ser explicitada na forma matricial através da Eqs. (3.56), (3.57) e (3.58):

$$\bar{\mathbf{k}}_t = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha \quad (3.81)$$

onde as matrizes de rigidez, constitutiva e geométrica, no sistema local cartesiano são dadas, respectivamente, por:

$$\bar{\mathbf{k}}_M = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}} \quad (3.82)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha \quad (3.83)$$

Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elástico Linear

Tendo em vista as Eqs. (3.11), (3.73) e (3.82), a matriz de rigidez constitutiva será dada por:

$$\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 & -\frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l_r l_c^2} & \frac{3EI}{l_r l_c} & 0 & -\frac{3EI}{l_r l_c^2} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l_r} & 0 & -\frac{3EI}{l_r l_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI}{l_r l_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

Matriz de Rigidez Tangente Geométrica em Regime Elástico Linear

Tendo em vista as Eqs. (3.11), (3.21), (3.22), (3.23), (3.71), (3.72) e (3.83), a matriz de rigidez geométrica será dada por:

$$\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3M_a}{2l_c^2} & 0 & 0 & \frac{3M_a}{2l_c^2} & 0 \\ \frac{6N}{5l_c} & \frac{N}{5} & \frac{3M_a}{2l_c^2} & -\frac{6N}{5l_c} & 0 & 0 \\ \frac{Nl_c}{5} & 0 & -\frac{N}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3M_a}{2l_c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6N}{5l_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento, em regime elástico, no sistema local em coordenadas cartesianas, é dada pela soma da matriz $\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{M}}$, dada pela Eq. (3.84), e a matriz $\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{G}}$, dada pela Eq. (3.85):

$$\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{G}} \quad (3.86)$$

3.10.1-2 Elementos Prismáticos em Regime Elastoplástico

No caso elastoplástico o campo de deformação $\varepsilon = \bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha'$ continua válido. Como nesta região, a Lei de Hooke não é mais válida, adota-se a seguinte lei constitutiva dada por:

$$\sigma = D\varepsilon \quad (3.87)$$

a) Determinação dos Coeficientes C_α

Das Eqs. (3.74) tem-se que: $C_1 = \int_{A_r} D dA_r$, $C_2 = \int_{A_r} D y_r dA_r$, $C_3 = \int_{A_r} D y_r^2 dA_r$

b) Determinação da Força Normal N e do Momento Fletor M

Com o auxílio das Eqs. (3.35) e (3.87), tem-se que:

$$\begin{aligned} N &= \int_{A_r} \sigma dA_r = \int_{A_r} D \varepsilon dA_r \\ N &= \int_{A_r} D (\bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha') dA_r = \bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} D dA_r - \alpha' \int_{A_r} D y_r dA_r \\ N &= C_1 \bar{\varepsilon}_m - C_2 \alpha' \end{aligned} \quad (3.88)$$

que é constante na seção mas variável ao longo do elemento, uma vez que C_1 , C_2 e α' variam com x_r .

Se por simplificação admitirmos que, neste regime, os coeficientes C_1 e C_2 sejam constantes ao longo do elemento e iguais à média de seus valores nas extremidades a e b do elemento (essa aproximação será tanto melhor quanto mais curto for o elemento), ou seja:

$$\begin{cases} C_{1m} = \frac{C_{1a} + C_{1b}}{2} \\ C_{2m} = \frac{C_{2a} + C_{2b}}{2} \end{cases} \quad (3.89)$$

pode-se escrever que:

$$N = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m - C_{2m} \alpha' \quad (3.90)$$

Com o auxílio das Eqs. (3.94) e (3.81), determinam-se as forças normais nas extremidades a e b do elemento, onde $x_r = -l_r/2$ e $x_r = l_r/2$, respectivamente:

$$\begin{cases} N_a = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + C_{2m} \frac{3q_2}{l_r} \\ N_b = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m \end{cases} \quad (3.91)$$

Define-se, então, uma força normal média, constante ao longo do elemento, igual a:

$$N_m = \frac{N_a + N_b}{2} = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + C_{2m} \frac{3q_2}{2l_r} \quad (3.92)$$

Já com relação ao momento tem-se:

$$\begin{aligned} M &= -\int_{A_r} \sigma y_r dA_r = -\int_{A_r} D \varepsilon y_r dA_r = -\int_{A_r} D (\bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha') y_r dA_r \\ M &= -\bar{\varepsilon}_m \int_{A_r} D y_r dA_r + \alpha' \int_{A_r} D y_r^2 dA_r \\ M &= -C_2 \bar{\varepsilon}_m + C_3 \alpha' \end{aligned} \quad (3.93)$$

Analogamente ao caso anterior, admitiremos que os coeficientes C_2 e C_3 sejam constantes ao longo do elemento e iguais a:

$$\begin{cases} C_{2m} = \frac{C_{2a} + C_{2b}}{2} \\ C_{3m} = \frac{C_{3a} + C_{3b}}{2} \end{cases} \quad (3.94)$$

Desta forma obtém-se que:

$$M = -C_{2m} \bar{\varepsilon}_m + C_{3m} \alpha' \quad (3.95)$$

Variável com x_r . Com o auxílio das Eqs. (3.63) e (3.67), determinam-se os momentos fletores nas extremidades a e b do elemento, na convenção clássica, para $x_r = -l_r/2$ e $x_r = l_r/2$, respectivamente:

$$\begin{cases} x = -\frac{l_r}{2} & \therefore M_a = -C_{2a} \bar{\varepsilon}_m - C_{3a} \frac{3q_2}{l_r} \\ x = +\frac{l_r}{2} & \therefore M_b = -C_{2b} \bar{\varepsilon}_m \end{cases} \quad (3.96)$$

c) Matriz de Rigidez Tangente do Elemento no Sistema Local Cartesiano em Regime Elastoplástico

Por total analogia com o caso elástico, a matriz de rigidez tangente do elemento, em regime elastoplástico, no sistema local cartesiano, será dada por:

$$\bar{\mathbf{k}}_t^{ep} = \bar{\mathbf{k}}_M^{ep} + \bar{\mathbf{k}}_G^{ep} \quad (3.97)$$

onde as matrizes de rigidez, constitutiva e geométrica, no sistema local cartesiano serão expressas à seguir:

Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elastoplástico

A matriz de rigidez constitutiva elastoplástica vem de $\bar{\mathbf{k}}_M^{ep} = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}}$:

$$\bar{\mathbf{k}}_M^{ep} = \begin{pmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{C_{2m}}{l_r l_c} & -\frac{C_{2m}}{l_r} & -\frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r l_c} & 0 \\ & \frac{3C_{3m}}{l_r l_c^2} & \frac{3C_{3m}}{l_r l_c} & \frac{C_{2m}}{l_r l_c} & -\frac{3C_{3m}}{l_r l_c^2} & 0 \\ & & \frac{3C_{3m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r} & -\frac{3C_{3m}}{l_r l_c} & 0 \\ & & & \frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{C_{2m}}{l_r l_c} & 0 \\ & & & & \frac{3C_{3m}}{l_r l_c^2} & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

onde C_{1m} , C_{2m} e C_{3m} são dados pelas Eqs. (3.89) e (3.94).

Matriz de Rigidez Tangente Geométrica em Regime Elastoplástico

$$\bar{\mathbf{k}}_G^{ep} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3M_a}{2l_c^2} & 0 & 0 & \frac{3M_a}{2l_c^2} & 0 \\ \frac{6N_m}{5l_c} & \frac{N_m}{5} & \frac{3M_a}{2l_c^2} & -\frac{6N_m}{5l_c} & 0 & 0 \\ & \frac{N_m l_c}{5} & 0 & -\frac{N_m}{5} & 0 & 0 \\ & & 0 & -\frac{3M_a}{2l_c^2} & 0 & 0 \\ & & & \frac{6N_m}{5l_c} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.99)$$

onde N_m e M_a são dados pelas Eqs.(3.92) e (3.96), respectivamente.

3.10.2 Condição de Extremidades: Rotulado – Rígido

Analogamente ao caso de extremidades rígido-rotulado, as parcelas constitutiva e geométrica da matriz de rigidez tangente, nos regimes elástico e elastoplástico, podem ser obtidas considerando-se $q_2 = -q_3/2$.

Assim, a deformação dada pela Eq. (3.69) pode ser escrita como:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) \left(\frac{q_3^2}{10}\right) - y_r q_3 \left(-\frac{\psi_2''}{2} + \psi_3''\right) \quad (3.100)$$

Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elástico Linear

A parcela $\bar{\mathbf{k}}_M = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}}$ é idêntica à indicada pela Eq. (3.84), trocando-se as linhas e colunas nas posições 3 e 6 da matriz constitutiva, devido à mudança de posição dos coeficientes nas matrizes $\bar{\mathbf{B}}$ e \mathbf{D} .

Assim,

$$\bar{\mathbf{k}}_M = \begin{pmatrix} \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 & -\frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & \frac{3EI}{l_r l_c^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI}{l_r l_c^2} & \frac{3EI}{l_r l_c} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{3EI}{l_r l_c^2} & -\frac{3EI}{l_r l_c} \\ & & & & & \frac{3EI}{l_r} \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

Matriz de Rigidez Tangente Geométrica em Regime Elástico Linear

Adotando-se os mesmos procedimentos de troca dos coeficientes, obtém-se a matriz de rigidez tangente geométrica total, dada por $\bar{\mathbf{k}}_G = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha$, que fica então determinada a seguir:

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3M_b}{2l_c^2} & 0 & 0 & -\frac{3M_b}{2l_c^2} & 0 \\ & \frac{6N}{5l_c} & 0 & -\frac{3M_b}{2l_c^2} & -\frac{6N}{5l_c} & \frac{N}{5} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{3M_b}{2l_c^2} & 0 \\ & & & & \frac{6N}{5l_c} & -\frac{N}{5} \\ & & & & & \frac{Nl_c}{5} \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

Novamente, a matriz de rigidez tangente do elemento, em regime elástico, no sistema local em coordenadas cartesianas, é dada pela soma da matriz $\bar{\mathbf{k}}_M$, dada pela Eq. (3.101) com a matriz $\bar{\mathbf{k}}_G$, dada pela Eq. (3.102).

Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elastoplástico

Baseando-se na formulação análoga para a condição Rígido-Rotulado, com as transformações devidas chega-se a:

$$\bar{\mathbf{k}}_M^{ep} = \begin{pmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r l_c} & 0 & -\frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{C_{2m}}{l_r l_c} & \frac{C_{2m}}{l_r} \\ & \frac{3C_{3m}}{l_r l_c^2} & 0 & -\frac{C_{2m}}{l_r l_c} & -\frac{3C_{3m}}{l_r l_c^2} & \frac{3C_{3m}}{l_r l_c} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r l_c} & -\frac{C_{2m}}{l_r} \\ & & & & \frac{3C_{3m}}{l_r l_c^2} & -\frac{3C_{3m}}{l_r l_c} \\ & & & & & \frac{3C_{3m}}{l_r} \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

Matriz de Rigidez Tangente Geométrica em Regime Elastoplástico

Analogamente, $\bar{\mathbf{k}}_G$ será dada por (3.104):

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3M_b}{2l_c^2} & 0 & 0 & -\frac{3M_b}{2l_c^2} & 0 \\ & \frac{6N_m}{5l_c} & 0 & -\frac{3M_b}{2l_c^2} & -\frac{6N_m}{5l_c} & \frac{N_m}{5} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{3M_b}{2l_c^2} & 0 \\ & & & & \frac{6N_m}{5l_c} & -\frac{N_m}{5} \\ & & & & & \frac{N_m l_c}{5} \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

3.10.3 Condição de Extremidades: Rígido – Rígido

Os esforços naturais internos nas coordenadas corrotacionais são dados pela Eq. (3.48), que com o auxílio das Eqs. (3.78) e (3.79) tem-se:

$$\begin{cases} Q_1 = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N}{l_r} \left(1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) dx_r \\ Q_2 = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[N\lambda \left(\frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) + M\psi_2'' \right] dx_r \\ Q_3 = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[N\lambda \left(\frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) + M\psi_3'' \right] dx_r \end{cases} \quad (3.105)$$

Os elementos da matriz \mathbf{H} são dados através da Eq. (3.53), com o auxílio das Eqs. (3.78) e (3.79):

$$\begin{cases} H_{11} = 0 \\ H_{12} = H_{21} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N}{l_r} \left(\frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) dx_r \\ H_{13} = H_{31} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N}{l_r} \left(\frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) dx_r \\ H_{22} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{2N\lambda}{15} dx_r \\ H_{23} = H_{32} = - \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{N\lambda}{30} dx_r \\ H_{33} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{2N\lambda}{15} dx_r \end{cases} \quad (3.106)$$

E a matriz \mathbf{D} será calculada a partir da Eq. (3.52):

$$\begin{cases} D_{11} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \frac{C_1}{l_r^2} \left(1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right)^2 dx_r \\ D_{12} = D_{21} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[C_1 \lambda \left(\frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) - C_2 \psi_2'' \right] \frac{1}{l_r} \left(1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) dx_r \\ D_{13} = D_{31} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[C_1 \lambda \left(\frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) - C_2 \psi_3'' \right] \frac{1}{l_r} \left(1 + \frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2 q_3}{30} \right) dx_r \\ D_{22} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[C_1 \lambda^2 \left(\frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right)^2 - 2C_2 \lambda \left(\frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) \psi_2'' + C_3 \psi_2'' \psi_2'' \right] dx_r \\ D_{23} = D_{32} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left\{ C_1 \lambda^2 \left(\frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) \left(\frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) - C_2 \lambda \left[\left(\frac{2q_2}{15} - \frac{q_3}{30} \right) \psi_3'' + \left(\frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) \psi_2'' + C_3 \psi_3'' \psi_3'' \right] \right\} dx_r \\ D_{33} = \int_{-l_r/2}^{l_r/2} \left[C_1 \lambda^2 \left(\frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right)^2 - 2C_2 \lambda \left(\frac{2q_3}{15} - \frac{q_2}{30} \right) \psi_3'' + C_3 \psi_3'' \psi_3'' \right] dx_r \end{cases} \quad (3.107)$$

onde os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 são dados pela Eq. (3.74).

3.10.3-1 Elementos Prismáticos em Regime Elástico Linear

No regime elástico linear, o material segue a Lei de Hooke, dada pela Eq. (3.75) e o campo de deformação dado pela Eq.(3.70). O produto $y_r(q_2\psi_2''+q_3\psi_3'')$, que varia linearmente com x_r , é dado por:

$$y_r(q_2\psi_2''+q_3\psi_3'') = y_r \left[q_2 \left(\frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} \right) + q_3 \left(\frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r} \right) \right] \quad (3.108)$$

Logo, tem-se:

$$\varepsilon = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \left(\frac{q_2^2}{15} + \frac{q_3^2}{15} - \frac{q_2q_3}{30} \right) - y_r \left[q_2 \left(\frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} \right) + q_3 \left(\frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r} \right) \right] \quad (3.109)$$

a) Determinação da Força Normal N e Momento Fletor M

A força normal N será idêntica ao descrito segundo a Eq. (3.78).

Com o auxílio da Eq. (3.79), os momentos fletores, nas extremidades a e b do elemento, segundo a FIG 3.4, na convenção clássica, valem:

$$\begin{cases} x = -\frac{l_r}{2} & \therefore M_a = -\frac{EI}{l_r}(4q_2 + 2q_3) \\ x = +\frac{l_r}{2} & \therefore M_b = +\frac{EI}{l_r}(2q_2 + 4q_3) \end{cases} \quad (3.110)$$

b) Matriz de Rigidez Tangente do Elemento no Sistema Local Cartesiano em Regime Elástico Linear

Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elástico Linear

A matriz de rigidez constitutiva $\bar{\mathbf{k}}_M$ no regime elástico, em coordenadas cartesianas, é obtida utilizando-se a matriz local $\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)}$, Eq. (3.26) e a matriz de rigidez constitutiva em

coordenadas corrotacionais \mathbf{D} , desprezando-se os termos multiplicados por q_2 ou q_3 por serem suficientemente pequenos.

$$\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 & -\frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l_r l_c^2} & \frac{6EI}{l_r l_c} & 0 & -\frac{12EI}{l_r l_c^2} & \frac{6EI}{l_r l_c} \\ & & \frac{4EI}{l_r} & 0 & -\frac{6EI}{l_r l_c} & \frac{2EI}{l_r} \\ & & & \frac{EA_r}{l_r} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{l_r l_c^2} & -\frac{6EI}{l_r l_c} \\ & & & & & \frac{4EI}{l_r} \end{pmatrix} \quad (3.111)$$

Matriz de Rigidez Geométrica em Regime Elástico Linear

A matriz de rigidez geométrica total, dada pelo somatório $\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha$, fica então determinada:

$$\bar{\mathbf{k}}_{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 \\ & \frac{6N}{5l_c} & \frac{N}{10} & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & \frac{6N}{5l_c} & \frac{N}{10} \\ & & \frac{2Nl_c}{15} & 0 & -\frac{N}{10} & -\frac{Nl_c}{30} \\ & & & 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 \\ & & & & \frac{6N}{5l_c} & -\frac{N}{10} \\ & & & & & \frac{2Nl_c}{15} \end{pmatrix} \quad (3.112)$$

onde N , M_a e M_b são dados pelas Eqs. (3.78) e (3.110) e a força cortante vale:

$$V = \frac{Q_2 + Q_3}{l_c} = \frac{M_b - M_a}{l_c} \quad (3.113)$$

Analogamente à condição de extremidades rígido-rotulado, a matriz de rigidez tangente do elemento, em regime elástico, no sistema local em coordenadas cartesianas, é dada pela soma da matriz $\bar{\mathbf{k}}_M$, dada pela Eq. (3.111), e a matriz $\bar{\mathbf{k}}_G$, dada pela Eq. (3.112).

3.10.3-2 Elementos Prismáticos em Regime Elastoplástico

No caso elastoplástico, o campo de deformação $\varepsilon = \bar{\varepsilon}_m - y_r \alpha'$ continua válido e a lei constitutiva é dada segundo a Eq. (3.100), $\sigma = D\varepsilon$.

a) Determinação da Força Normal N e do Momento Fletor M

Com o auxílio da Eq. (3.90), pode-se determinar a força normal nas extremidades a e b do elemento (pontos $x_r = -l_r/2$ e $x_r = l_r/2$):

$$\begin{cases} N_a = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{2m}}{l_r} (4q_2 + 2q_3) \\ N_b = C_{1m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{2m}}{l_r} (2q_2 + 4q_3) \end{cases} \quad (3.114)$$

Então, a força normal média, constante ao longo do elemento é definida como:

$$N_m = \frac{N_a + N_b}{2} \quad (3.115)$$

Com o auxílio da Eq. (3.95), os momentos fletores, nas extremidades a e b do elemento, segundo a FIG.3.4, na convenção clássica, valem:

$$\begin{cases} x = -\frac{l_r}{2} & \therefore M_a = -C_{2m} \bar{\varepsilon}_m - \frac{C_{3m}}{l_r} (4q_2 + 2q_3) \\ x = +\frac{l_r}{2} & \therefore M_b = -C_{2m} \bar{\varepsilon}_m + \frac{C_{3m}}{l_r} (2q_2 + 4q_3) \end{cases} \quad (3.116)$$

onde os coeficientes C_α são idênticos aos descritos segundo a Eq. (3.74)

b) Matriz de Rigidez Tangente do Elemento no Sistema Local Cartesiano em Regime Elastoplástico

Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elastoplástico

$$\bar{\mathbf{k}}_M^{ep} = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & -\frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & \frac{C_{2m}}{l_r} \\ & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2} & \frac{6C_{3m}}{l_r l_c} & 0 & -\frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2} & \frac{6C_{3m}}{l_r l_c} \\ & & \frac{4C_{3m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r} & -\frac{6C_{3m}}{l_r l_c} & \frac{2C_{3m}}{l_r} \\ & & & \frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & -\frac{C_{2m}}{l_r} \\ & & & & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2} & -\frac{6C_{3m}}{l_r l_c} \\ & & & & & \frac{4C_{3m}}{l_r} \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

Utilizando-se a hipótese simplificadora que anula termos na matriz \mathbf{D} que contem o produto entre q_2 e q_3 .

Matriz de Rigidez Geométrica em Regime Elastoplástico $\bar{\mathbf{k}}_G^{ep} = \bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}} + Q_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha$

$$\bar{\mathbf{k}}_G^{ep} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 \\ & \frac{6N_m}{5l_c} & \frac{N_m}{10} & -\frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & \frac{6N_m}{5l_c} & \frac{N_m}{10} \\ & & \frac{2N_m l_c}{15} & 0 & -\frac{N_m}{10} & -\frac{N_m l_c}{30} \\ & & & 0 & \frac{1}{l_c^2}(M_b - M_a) & 0 \\ & & & & \frac{6N_m}{5l_c} & -\frac{N_m}{10} \\ & & & & & \frac{2N_m l_c}{15} \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

onde N_m , M_a e M_b são dados pelas Eqs. (3.115) e (3.116).

4

ASPECTOS DA IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

4.1 Introdução

O desenvolvimento de programas de computador adequados para a *análise avançada* tem seguido três direções principais. A primeira é baseada na análise inelástica de segunda ordem com formação de rótulas plásticas, sem nenhuma modificação em relação à teoria clássica do cálculo plástico. A segunda aproximação para a *análise avançada* é baseada na modificação ou no refinamento da teoria clássica de rótulas plásticas, ao permitir uma suave degeneração da rigidez devido aos efeitos da plasticidade distribuída. A terceira considera o efeito da plastificação na formulação. Neste caso, a barra é discretizada em vários elementos e a seção transversal de cada elemento é dividida em fatias, permitindo a distribuição da plasticidade ao longo do comprimento do elemento e a plastificação gradual da seção transversal ao longo da altura do elemento, respectivamente.

O programa desenvolvido neste trabalho segue a terceira direção definida anteriormente, ou seja, considera a plasticidade distribuída e é fundamentada na formulação geometricamente exata descrita no Capítulo 3. O programa faz a análise elastoplástica de pórticos planos, via MEF, considerando a não linearidade da geometria e do material.

Através do processo incremental-iterativo para o carregamento pode-se verificar o equilíbrio da estrutura segundo um critério de convergência previamente adotado, utilizando-se o Método de Newton-Raphson para a solução das equações não-lineares que descrevem o problema.

Após a contribuição de ALMEIDA (2006) e agora deste trabalho, a versão original do programa existente em LAVALL (1996) na linguagem *FORTRAN 90* é capaz, neste momento, de analisar problemas com ligações articuladas entre as barras da estrutura, tensões residuais aplicadas na mesa e na alma de perfis do tipo **I** e diferentes carregamentos nodais com incrementos e fatores de ponderação diferenciados, levando-se em consideração as diversas leis constitutivas para o aço, permitindo, por exemplo, estudar os efeitos do encruamento do material após a plastificação dos elementos (*strain hardening*).

Sendo assim, neste capítulo procura-se comentar o método de Newton-Raphson utilizado para a solução das equações não-lineares que descrevem o problema, o critério de convergência adotado na verificação final do processo incremental-iterativo e a simulação de leis constitutivas pelo modelo multilinear, bem como as aproximações adotadas. Considerações sobre a implementação do modelo de fatias da seção transversal do elemento e das sub-rotinas do programa desenvolvido também serão apresentadas.

4.2 Método de Newton-Raphson

Conforme se sabe da literatura técnica sobre o assunto, o uso do MEF para análise não-linear de estruturas leva ao sistema de equações simultâneas, que associam o vetor de cargas aplicadas **P** com o vetor de deslocamentos **p**, através da matriz de rigidez tangente global do sistema **k**:

$$\mathbf{k}\mathbf{p} + \mathbf{P} = 0 \quad (4.1)$$

Se os coeficientes da matriz **k** dependem das incógnitas de **p** ou de suas derivadas, o problema torna-se não-linear e o uso de um processo iterativo faz-se necessário.

Como descrito por EL-ZANATY *et al.* (1980), o procedimento numérico mais recomendado para análises não-lineares é o Método de Newton-Raphson o qual, a cada

incremento de carga, atualiza a matriz de rigidez e, por iteração, retorna os deslocamentos nodais sofridos, após a determinação do equilíbrio da estrutura.

No Método de Newton-Raphson supõe-se um sistema de forças residuais segundo a Eq. (4.2):

$$\psi = kp + P \neq 0 \quad (4.2)$$

onde as forças residuais ψ podem ser interpretadas como uma medida de distância entre a solução apresentada e a curva do equilíbrio da estrutura.

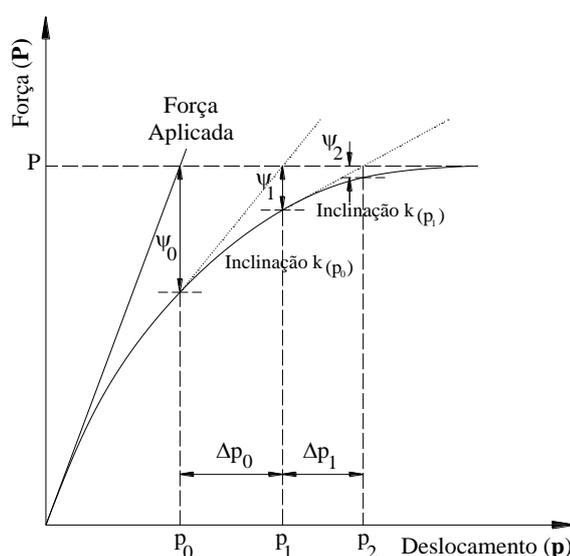


FIGURA 4. 1 – Método de Newton-Raphson

Em problemas estruturais, a solução, para qualquer nível de carga, é também função do histórico do carregamento. Assim, o processo incremental-iterativo é utilizado, como ilustra a FIG. 4.1, para o caso de uma única variável. A solução parte da definição do valor inicial para o vetor de deslocamentos \mathbf{p}_0 (para problemas estruturais, é tomado como nulo). A matriz de rigidez tangente \mathbf{k} associada a este deslocamento é determinada e o vetor ψ_0 é então calculado segundo a Eq. (4.2). A correção $\Delta \mathbf{p}_0$ pode ser definida através da Eq. (4.3):

$$\Delta \mathbf{p}_0 = -\frac{\psi(p_0)}{\mathbf{k}(p_0)} \quad (4.3)$$

Então, uma melhor aproximação para o vetor dos deslocamentos é obtido por $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}_0$ e o processo iterativo prossegue até a solução convergir para a resposta não-linear, ou seja, até que a norma do vetor ψ_r ou do vetor $\Delta\mathbf{p}_r$ tenda a zero.

4.3 Critério de Convergência

Como descrito anteriormente, o processo iterativo é executado até a solução convergir para uma tolerância adequada, previamente definida. Esta verificação deve ocorrer no final de cada iteração.

No presente trabalho verifica-se a convergência da solução comparando-se os valores dos deslocamentos nodais da iteração corrente com aqueles da iteração imediatamente anterior. No instante em que a diferença entre esses valores for inferior ou igual à tolerância, para cada um dos valores nodais, admite-se que a convergência foi atingida. Assim:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^r)^2 - \sum_{i=1}^n (p_i^{r-1})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^1)^2}} \times 100 \leq \text{Tolerância Adotada} \quad (4.4)$$

onde n é o número total de graus de liberdade da estrutura e r e $r-1$ referem-se às iterações sucessivas. A tolerância deve ser indicada em porcentagem, já que a Eq. (4.4) é multiplicada por cem (100).

Observa-se que a convergência é atingida quando a diferença entre as normas de duas iterações sucessivas é menor ou igual ao valor da tolerância multiplicada pela norma da primeira iteração. Foi adotado o valor de tolerância de 0,5%, pois é considerado adequado para a maioria das aplicações em Engenharia Estrutural.

4.4 Modelo Constitutivo Multilinear

4.4.1 Introdução

Focando-se no material base utilizado neste estudo de análise avançada, o aço, foi adotada como referência de lei constitutiva o diagrama tensão x deformação convencional para materiais dúcteis, conforme a FIG. 4.2. O fenômeno da estrição, que ocorre a partir da tensão última foi desprezado.

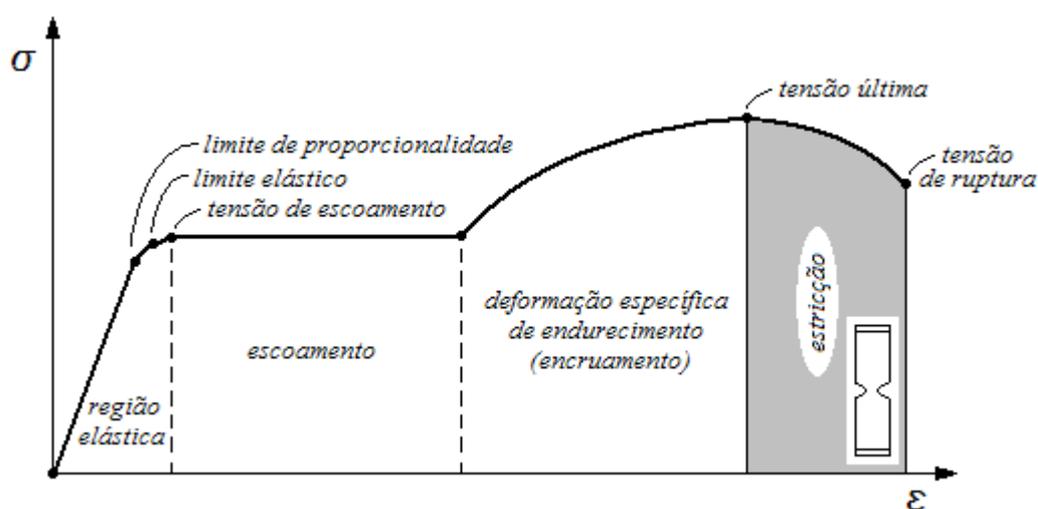


FIGURA 4. 2 – Diagrama tensão x deformação convencional para o aço (fora de escala)

Contudo, a implementação computacional dos diagramas pode se tornar complicada ao exigir a criação de um modelo matemático mais complexo para definir seus trechos não-lineares, podendo no entanto se optar por soluções mais simples sem prejuízo relevante ao resultado. Para maior facilidade de simulação das diversas leis constitutivas, vários trabalhos têm utilizado a solução dos diagramas multilíneares, que facilitam a implementação numérica e ainda apresentam considerável precisão quanto maior for o número dos trechos lineares com a média da rigidez daquele intervalo. Na FIG. 4.3 são exemplificados alguns diagramas simplificados em trechos lineares.

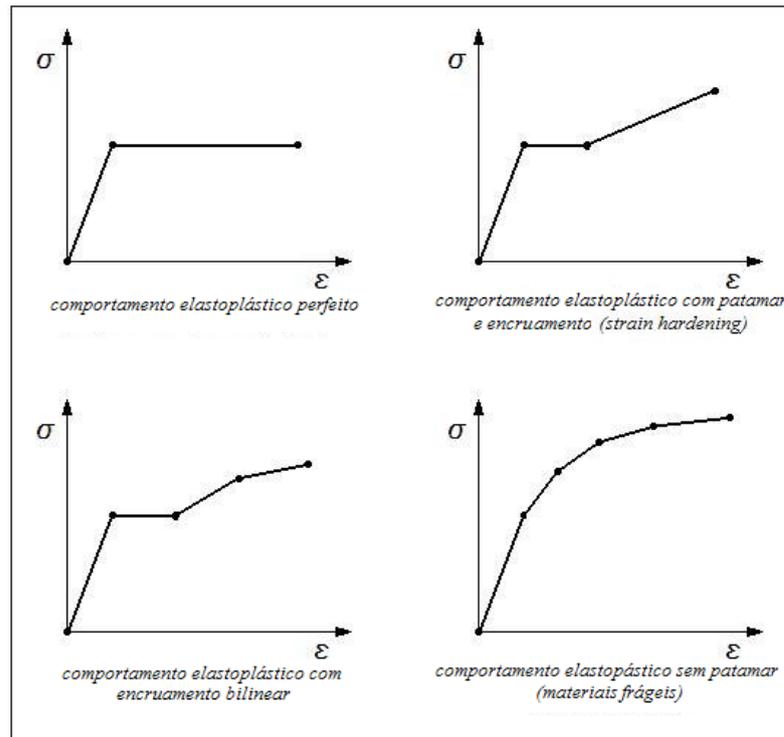


FIGURA 4. 3 – Exemplos de representação multilinear de diagramas tensão x deformação

4.4.2 O problema elastoplástico unidimensional

A FIG. 4.4 ilustra um comportamento elastoplástico idealizado por meio de um diagrama bilinear, apresentando um trecho de comportamento elástico (região OA), com módulo de elasticidade E , e um trecho elastoplástico (região AB), com encruamento linear e módulo tangente E_t .

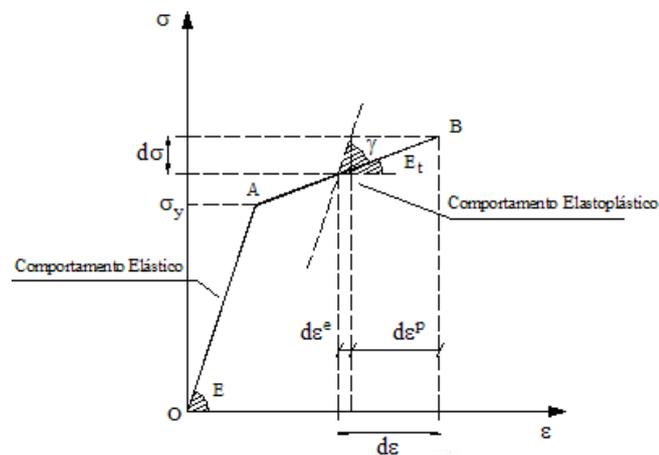


FIGURA 4. 4 – Comportamento elastoplástico do material para o caso uniaxial

O material deforma-se, inicialmente, com módulo de elasticidade E até que a tensão atuante atinja o valor da tensão de escoamento σ_y . Para níveis de tensões superiores a este limite, o material passa a se deformar segundo o módulo tangente E_t . Nota-se que num certo estágio após o escoamento inicial, o acréscimo de deformação $d\varepsilon$ é associado a um acréscimo de tensão $d\sigma$. Separando as deformações elástica e plástica, tem-se:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (4.5)$$

O parâmetro de endurecimento H' é definido por:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (4.6)$$

Com o auxílio da Eq. (4.5), o parâmetro de endurecimento pode ser escrito em função do módulo tangente E_t :

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^e} = \frac{E_t}{1 - (E_t/E)} \quad (4.7)$$

Reescrevendo e desenvolvendo a Eq. (4.5), tem-se que:

$$d\varepsilon = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H'} \right) d\sigma = \left(\frac{H' + E}{EH'} \right) d\sigma \quad (4.8)$$

Logo,

$$d\sigma = \left(\frac{EH'}{E + H'} \right) d\varepsilon \quad (4.9)$$

Sendo $d\sigma = E_t \cdot d\varepsilon$, conclui-se que:

$$E_t = \left(\frac{EH'}{E + H'} \right) \quad (4.10)$$

Segundo a FIG. 4.4, pode-se escrever $d\sigma$ como:

$$d\sigma = E_t \cdot d\varepsilon = (E - \gamma)d\varepsilon \quad (4.11)$$

Sendo $E_t = E - \gamma$ e com o auxílio da Eq. (4.10), determina-se:

$$\gamma = \frac{E^2}{E + H'} \quad (4.12)$$

Levando-se a Eq. (4.12) na Eq. (4.11), tem-se que:

$$d\sigma = E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) d\varepsilon \quad (4.13)$$

E, finalmente, define-se o módulo tangente adotado para níveis de tensões superiores ao limite elástico:

$$E_t = E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) = \left(\frac{EH'}{E + H'} \right) \quad (4.14)$$

Assim, na implementação do programa, as tensões são tratadas como:

$$d\sigma = \begin{cases} Ed\varepsilon & \text{fase elástica} \\ E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) d\varepsilon & \text{fase elastoplástica} \end{cases} \quad (4.15)$$

Quando $H' = 0$ tem-se que $E_t = 0$, o que representa o comportamento perfeitamente plástico (patamar de escoamento).

Sendo $d\sigma = E_t d\varepsilon = E d\varepsilon^e$ e ainda com auxílio das Eqs. (4.6) e (4.10) as deformações elásticas e plásticas serão dadas por:

$$d\varepsilon^e = \left(\frac{E_t}{E} \right) d\varepsilon \quad (4.16)$$

$$d\varepsilon^p = \left(\frac{E}{E + H'} \right) d\varepsilon \quad (4.17)$$

4.4.3 Análise incremental das tensões e deformações no comportamento elasto-plástico

Para este trabalho foi proposto, conforme apresentado na FIG. 4.5, um diagrama $\sigma \times \varepsilon$ geral que, dividido em cinco trechos lineares, torna possível a simulação numérica do comportamento elastoplástico dos mais diversos tipos de aço.

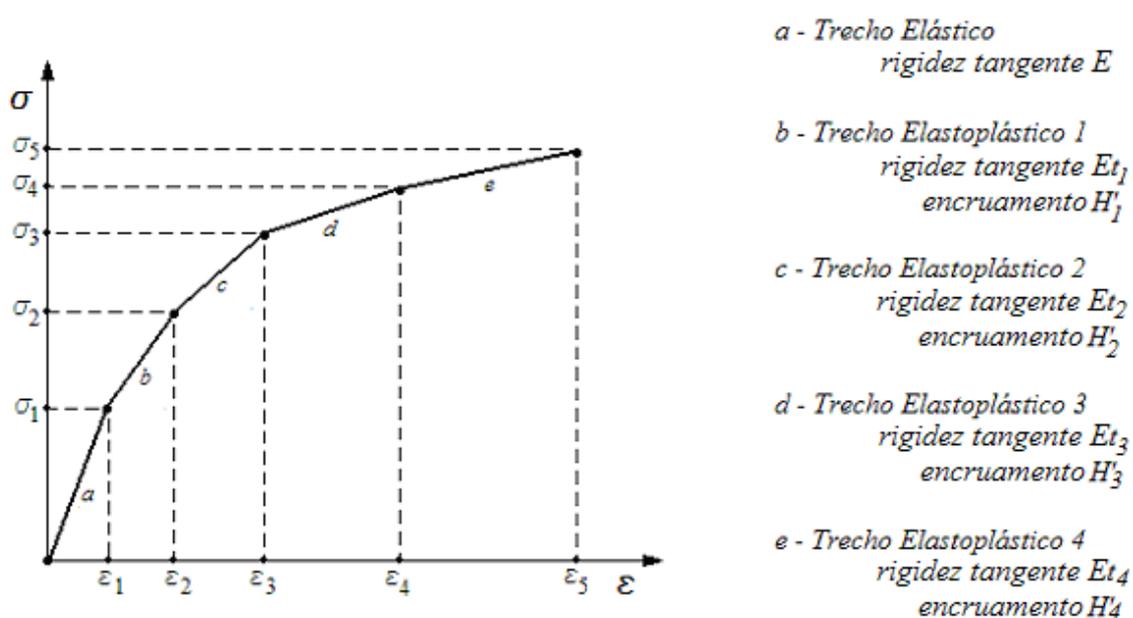


FIGURA 4. 5 – Diagrama tensão-deformação multilinear onde cada par $(\sigma_i, \varepsilon_i)$, ($i = 1,5$), define os limites de cada um dos trechos

O primeiro trecho sempre será definido pela lei de Hooke, atribuindo ao material rigidez elástica E , e por definição, parâmetro de encruamento nulo. Os demais trechos simulam o comportamento elastoplástico, com módulo de rigidez tangente E_i e parâmetro de encruamento H'_i , ($i = 1...4$).

Durante o processo incremental-iterativo adotado para a solução do problema da análise estrutural não-linear, tem-se a etapa na qual se calculam os deslocamentos e forças nodais equivalentes e que a partir destes são calculadas deformações, tensões e forças residuais. Assim sendo, as componentes de deformação e de tensão correspondentes deverão ser armazenadas a partir dos valores obtidos em cada uma das iterações do processo.

No entanto, esta tarefa que aparentemente é simples, torna-se mais complexa frente ao fato que os elementos da estrutura evoluem seu estado de tensão-deformação percorrendo a curva de sua lei constitutiva a cada incremento do carregamento, assumindo comportamento físico diverso ao transpor trechos com rigidezes diferentes quando da reaplicação de forças residuais.

A concepção numérica utilizada na implementação computacional para a questão da transição entre os trechos baseia-se no entendimento do diagrama como sendo uma função descontínua $\sigma = f(\varepsilon)$ definida por:

$$\sigma = \begin{cases} \varepsilon \cdot E & (0 \leq \varepsilon < \varepsilon_1) \\ \varepsilon \cdot E_{t_i} & (\varepsilon_i \leq \varepsilon < \varepsilon_{i+1}) \quad (i = 1, 4) \end{cases} \quad (4.18)$$

Vale observar que o patamar de escoamento (regime plástico perfeito) pode ser simulado ao longo de um ou mais trechos considerando-se $E_{t_i} = 0$.

A análise então é feita a partir de intervalos definidos em seu domínio representado pelo eixo das deformações.

A seguir são apresentados os algoritmos que regem a simulação do comportamento elastoplástico durante o processo de carregamento incremental segundo cada intervalo de deformação, levando-se também em conta na implementação os eventos da descarga e recarga elástica.

a) Primeiro intervalo de transição (elástico - elastoplástico 1) : $0 \leq \varepsilon^{r-1} < \varepsilon_1$

O procedimento adotado para este intervalo consiste na determinação da deformação total no elemento na iteração \mathbf{r} de tal forma que o critério de limite elástico ε_1 seja satisfeito. Caso este valor corrente de deformação do elemento exceda tal valor de referência, são aplicados sobre o valor excedente as propriedades do trecho seguinte, o que tem efeito direto sobre as forças residuais, conseqüentemente na manutenção do equilíbrio e, finalmente, na convergência da solução para este incremento de carga. Então, para a

iteração atual relativa a um dado incremento, o algoritmo para a solução deste problema pode ser assim apresentado:

I. O carregamento aplicado na iteração r são as forças residuais calculadas ao final da iteração $r-1$. Este carregamento produz um incremento nas componentes de deslocamento denotado aqui por Δp^r . Em seguida, calcula-se o incremento de deformação corrente $\Delta \varepsilon^r$.

II. Armazena-se a deformação total para cada elemento:

$$\varepsilon^r = \varepsilon^{r-1} + \Delta \varepsilon^r \quad (4.19)$$

III. O próximo passo consiste no teste se na iteração r a deformação total naquele elemento da estrutura ultrapassou o limite elástico verificando se: $\boxed{\varepsilon^r \leq \varepsilon_1}$.

Caso a resposta seja:

SIM Significa que o elemento ainda está na fase elástica. Assim sendo, a partir da deformação total acumula-se a deformação elástica ε_e^r , e a tensão total σ^r :

$$\varepsilon_e^r = \varepsilon^r \quad (4.20)$$

$$\sigma^r = E \cdot \varepsilon^r \quad (4.21)$$

NÃO Sabe-se então que o elemento já se encontra com uma porção de deformação sob o regime elastoplástico I (FIG. 4.6). Evidentemente, isto tem que ser levado em conta no cálculo da tensão total para a manutenção do equilíbrio. Além da tensão, são calculadas as porções elástica e plástica da deformação total, conforme as Eqs. (4.16) e (4.17):

$$\varepsilon_e^r = \varepsilon_e^{r-1} + (\varepsilon_1 - \varepsilon^{r-1}) + \frac{E_{t_1}}{E} (\varepsilon^r - \varepsilon_1) \quad (4.22)$$

$$\varepsilon_p^r = \varepsilon_p^{r-1} + \frac{E}{E + H_1} (\varepsilon^r - \varepsilon_1) \quad (4.23)$$

$$\sigma^r = \sigma^{r-1} + E(\varepsilon_1 - \varepsilon^{r-1}) + E_{t_1} (\varepsilon^r - \varepsilon_1) \quad (4.24)$$

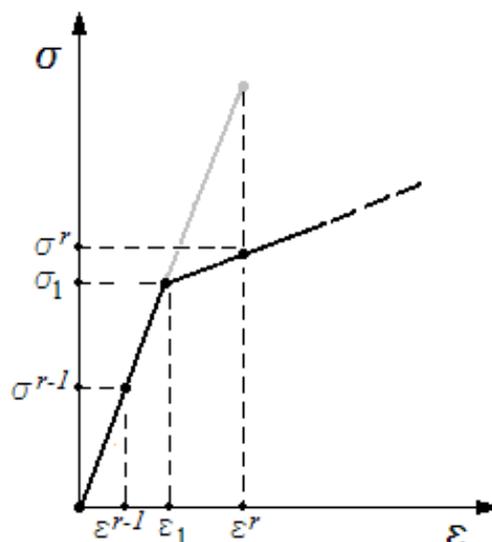


FIGURA 4. 6 – Transição entre trechos lineares

b) Demais intervalos (elástoplástico i - elástoplástico $i+1$): $\varepsilon_i \leq \varepsilon^{r-1} < \varepsilon_{i+1}$ ($i=1, 4$)

O procedimento adotado para considerar a transição a partir de um dado trecho elástoplástico i , caso a deformação total ε^r na interação corrente venha a transpor sua extremidade ε_{i+1} , tem solução análoga ao procedimento anterior. No entanto há que se considerar neste momento a questão do descarregamento que deve ocorrer elasticamente sob o módulo E .

I. O carregamento aplicado na interação r são as forças residuais calculadas ao final da interação $r-1$. Este carregamento produz um incremento nas componentes de deslocamento denotado aqui por Δp^r . Em seguida, calcula-se o incremento de deformação corrente $\Delta \varepsilon^r$.

II. Armazena-se a deformação total para cada elemento, conforme Eq. (4.19)

$$\varepsilon^r = \varepsilon^{r-1} + \Delta \varepsilon^r$$

III. O próximo passo consiste no teste se na iteração \mathbf{r} ocorre o descarregamento elástico verificando se: $\boxed{\varepsilon^{\mathbf{r}} < \varepsilon^{\mathbf{r}-1}}$.

Caso a resposta seja:

SIM Atualizam-se os valores da deformação elástica e tensão totais. Conceitualmente, a parcela plástica da deformação permanece neste caso inalterada. Armazena-se também a máxima deformação total última, no instante em que ocorre a primeira descarga, ε_{ult} .

$$\varepsilon_e^{\mathbf{r}} = \varepsilon_e^{\mathbf{r}-1} + \Delta\varepsilon^{\mathbf{r}} \quad (4.25)$$

$$\sigma^{\mathbf{r}} = \sigma^{\mathbf{r}-1} + \mathbf{E} \cdot \Delta\varepsilon^{\mathbf{r}} \quad (4.26)$$

$$\varepsilon_{\text{ult}} = \varepsilon^{\mathbf{r}-1} \quad (4.27)$$

NÃO Ir para item **IV**.

IV. O elemento agora pode estar em carga ou em recarga. Pode ter havido uma descarga na interação anterior $\mathbf{r}-1$, o que indica um estado de tensão x deformação fora da curva da lei constitutiva em uma linha de recarga, que deve ser feita elasticamente até que ele atinja a deformação ε_{ult} , e a partir daí considera-se seu retorno à curva $\sigma \times \varepsilon$, conforme se indica na FIG. 4.7.

Desta forma, a questão então é se o elemento vem de um descarregamento na interação $\mathbf{r}-1$. Caso seja a resposta seja:

SIM O elemento está em recarga elástica atualizam-se os valores da deformação elástica e tensão totais conforme as Eq. (4.25) e (4.26) até que ele atinja a deformação ε_{ult} .

NÃO Ir para item **V**.

V. O elemento está em carga. Neste caso verifica-se então se na interação r ocorre a passagem para o próximo patamar. A questão então é se $\boxed{\varepsilon^r \leq \varepsilon_{i+1}}$.

Caso a resposta seja:

SIM O elemento encontra-se na interação r ainda no trecho elastoplástico i . Assim sendo:

$$\varepsilon_e^r = \varepsilon_e^{r-1} + \frac{E_{t_i}}{E} \Delta \varepsilon^r \quad (4.28)$$

$$\varepsilon_p^r = \varepsilon_p^{r-1} + \frac{E}{E+H_i} \Delta \varepsilon^r \quad (4.29)$$

$$\sigma^r = \sigma^{r-1} + E_{t_i} \Delta \varepsilon^r \quad (4.30)$$

NÃO Sabe-se então que o elemento já se encontra com uma porção da deformação sob o regime elastoplástico $i+1$. Evidentemente, isto tem que ser levado em conta no cálculo da tensão total para a manutenção do equilíbrio:

$$\varepsilon_e^r = \varepsilon_e^{r-1} + \frac{E_{t_i}}{E} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon^{r-1}) + \frac{E_{t_{i+1}}}{E} (\varepsilon^r - \varepsilon_{i+1}) \quad (4.31)$$

$$\varepsilon_p^r = \varepsilon_p^{r-1} + \frac{E}{E+H_i} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon^{r-1}) + \frac{E}{E+H_{i+1}} (\varepsilon^r - \varepsilon_{i+1}) \quad (4.32)$$

$$\sigma^r = \sigma^{r-1} + E_{t_i} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon^{r-1}) + E_{t_{i+1}} (\varepsilon^r - \varepsilon_{i+1}) \quad (4.33)$$

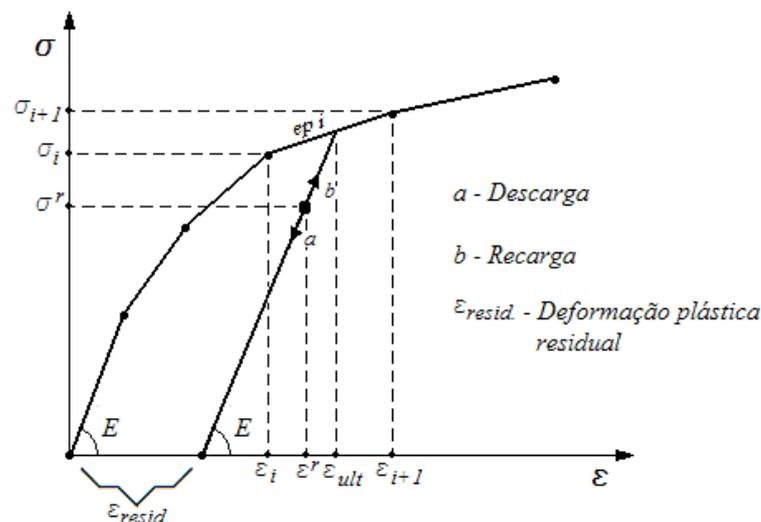


FIGURA 4. 7 – Descarga ou recarga elástica a partir do trecho elastoplástico i .

4.5 Modelo de Fatias

Ao se considerar a não-linearidade física do material, permite-se que as fibras constituintes da seção transversal plastifiquem devido às tensões provenientes do carregamento aplicado serem superiores à tensão de escoamento do material. A formulação apresentada no Capítulo 3 ainda prevê o espalhamento da plastificação ao longo das barras da estrutura, ao dividi-la em elementos finitos.

Assim, para a determinação dos coeficientes da matriz de rigidez, que são função das propriedades EA , EI e ES , das forças normais N e momentos fletores M , a seção transversal foi dividida em fatias. A FIG. 4.8 mostra um exemplo típico para o perfil metálico tipo “I”, dividido em fatias. Além da alma, as mesas foram fatiadas permitindo o estudo das tensões residuais, medidas na metade da espessura de cada fatia.

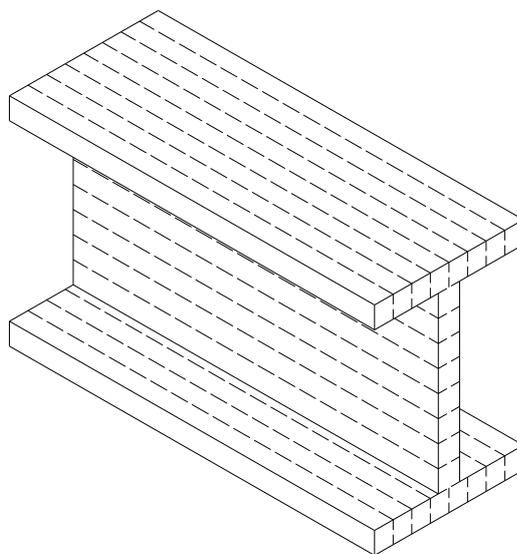


FIGURA 4. 8 – Modelo de fatias

Tomando-se cada fatia como uma fibra da seção transversal, pode-se analisar o problema elastoplástico, considerando somente a contribuição das fatias elásticas, ou seja, somente a parcela da seção que ainda está sujeita a tensões inferiores à de escoamento σ_y . A FIG. 4.9 apresenta a propagação da plastificação ao longo da altura da seção, bem como os níveis de tensões até a formação da rótula plástica no nó considerado.

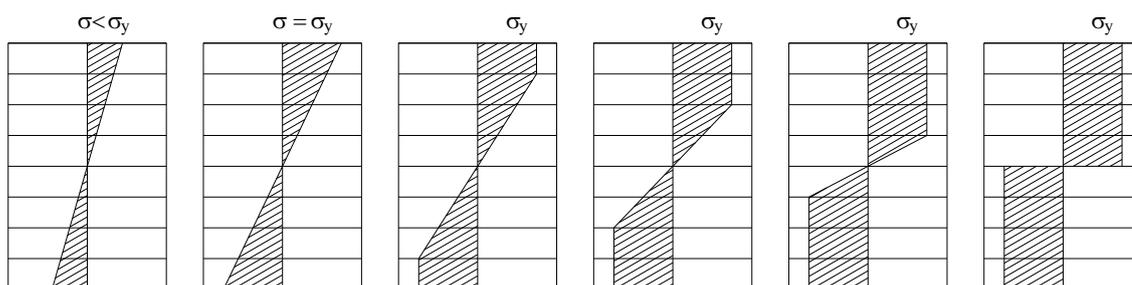


FIGURA 4. 9 – Processo de plastificação das fatias ao longo da altura da seção transversal

Na implementação do modelo de fatias, considera-se que o estado de tensão em seu centro é representativo de toda a fatia. As contribuições para a força normal, o momento fletor e os coeficientes de rigidez EA , EI e ES totais são determinadas pelo somatório das contribuições de cada fatia. Assim, pode-se dizer que:

$$\begin{aligned}
 EA &= \sum_i E_i b_i t_i \\
 ES &= \sum_i E_i b_i t_i z_i \\
 EI &= \sum_i E_i \left(b_i t_i z_i^2 + \frac{b_i t_i^3}{12} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

onde: b_i , t_i e z_i são, respectivamente, largura da fatia i , espessura da fatia i e coordenada z no centro da fatia i , em relação ao centro de gravidade da seção transversal.

E_i é o módulo de elasticidade do material da fatia i .

Se a tensão no centro da fatia alcançar a tensão de escoamento, toda a fatia passa a ser considerada elastoplástica e o módulo de elasticidade passa a ser o módulo tangente E_t , dado por:

$$E_t = E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right)
 \tag{4.35}$$

conforme definido na Eq. (4.14), onde H' é o parâmetro de encruamento.

4.6 Considerações Sobre as Tensões Residuais nos Perfis de Aço

As tensões residuais aparecem nos perfis de aço estruturais e chapas durante o processo de fabricação e permanecem, inevitavelmente, se nenhuma técnica de alívio de tensões for utilizada. Devido ao resfriamento não-uniforme após a laminação ou soldagem da peça, surgem deformações plásticas e, conseqüentemente, tensões residuais que podem, em alguns casos, atingir o mesmo nível de grandeza da tensão de escoamento do material.

As tensões residuais têm um papel importante no dimensionamento dos pilares de aço, pois, sendo a principal causa da não-linearidade do diagrama tensão x deformação na região inelástica, conforme afirmam ALPSTEN e TALL (1970), elas afetam significativamente a resistência dessas estruturas na compressão.

A FIG. 4.10 apresenta resultados qualitativos de um ensaio comparativo à compressão simples entre um corpo de prova livre de tensões residuais e um pilar muito curto em perfil do tipo “I” com tensão residual. Quando a força axial de compressão é aplicada no pilar, uma curva de transição surge entre o comportamento linear elástico e o perfeitamente plástico do material, por não mais apresentar linearidade entre tensão e deformação. As fibras que têm tensões residuais de compressão escoarão em primeiro lugar, seguidas pelas fibras que têm tensões residuais de tração. Como conseqüência, o escoamento na seção transversal ocorre de maneira gradual, ou seja, a transição entre o limite de proporcionalidade σ_p (região elástica) e o limite elástico σ_y (região plástica) é feito progressivamente, de uma forma suave, caracterizando o regime inelástico. A FIG. 4.10 mostra também o comportamento tensão x deformação de um corpo de prova livre de tensões residuais através da linha tracejada, que exhibe comportamento elastoplástico perfeito.

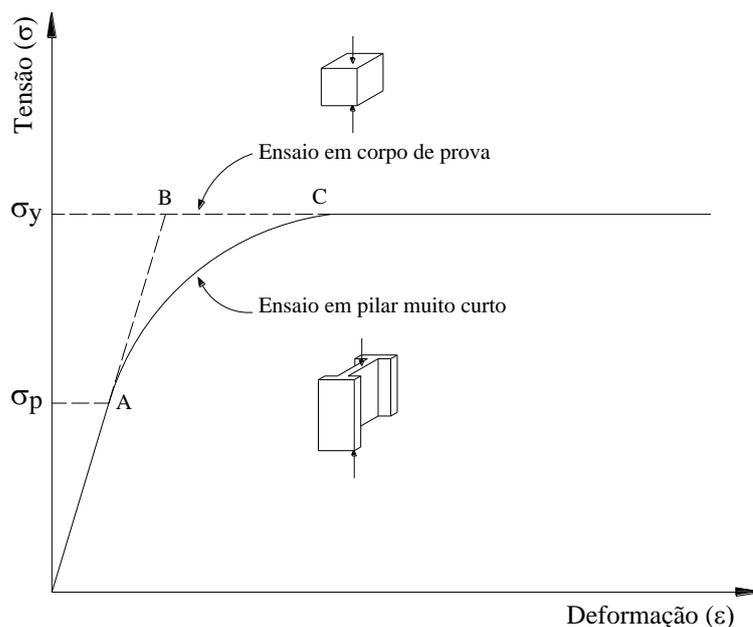


FIGURA 4. 10 – Relação tensão x deformação em corpo de prova e em perfil metálico de aço

De acordo com GALAMBOS (1988) o valor e a distribuição das tensões residuais dependem da forma da seção transversal, da temperatura de laminação ou soldagem, das condições de resfriamento, dos métodos de retificação das peças e das propriedades do material. Contudo a tensão de escoamento do aço não é um fator importante na formação das tensões residuais, uma vez que estas se apresentam na mesma ordem de grandeza tanto para aços especiais quanto para aços comuns.

A literatura técnica tem adotado, de forma simplificada, as distribuições parabólica ou linear para as tensões residuais dos perfis laminados e soldados. Vários pesquisadores (KANCHANALAI, 1977; CHEN e TOMA, 1994; CHEN *et al.*, 1996; KIM e CHEN, 1996a, 1996b; entre outros) têm adotado a distribuição linear nas mesas e comportamento constante na alma. Entretanto, para perfis altos, a variação das tensões ao longo da alma deve ser também considerada. Assim, uma boa aproximação seria considerar distribuições parabólicas ou lineares, tanto nas mesas, quanto na alma.

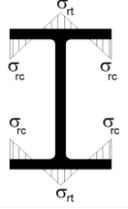
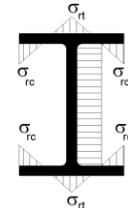
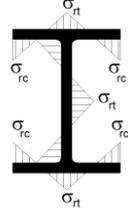
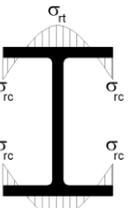
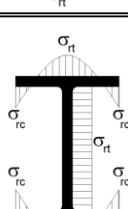
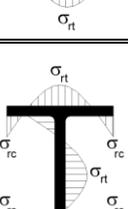
Como as tensões residuais que aparecem nos perfis de aço são auto-equilibradas, a TAB. 4.1 apresenta expressões da relação entre as tensões residuais de tração σ_{rt} (+) e de compressão σ_{rc} (-).

Na formulação apresentada por ALMEIDA (2006), admite-se que a tensão normal σ já leva em conta a presença de tensões residuais σ_r na seção transversal. Assim, a tensão normal pode ser reescrita como a soma de duas parcelas:

$$\sigma = \sigma_r + D.\varepsilon \quad (4.36)$$

Para a implementação computacional, seguindo a Eq. (4.36), as tensões residuais são previstas como dados de entrada e atribuídas a cada fatia da seção transversal dos elementos conforme opções apresentadas pela TAB. 4.1, sendo adicionadas automaticamente às tensões normais durante a análise.

TABELA 4. 1 – Tipos de distribuição das tensões residuais

Configuração	Distribuição		Tensão residual de tração σ_{rt}
	Mesas	Alma	
	Linear	Sem TR	$\sigma_{rt} = -\sigma_{rc}$
	Linear	Constante	$\sigma_{rt} = -\frac{t_f b_f}{t_f b_f + t_w d_w} \sigma_{rc}$ onde: $d_w = d - 2t_f$
	Linear	Linear	$\sigma_{rt} = -\sigma_{rc}$
	Parabólica	Sem TR	$\sigma_{rt} = -\frac{\sigma_{rc}}{2}$
	Parabólica	Constante	$\sigma_{rt} = -\frac{2t_f b_f}{4t_f b_f + 3t_w d_w} \sigma_{rc}$
	Parabólica	Parabólica	$\sigma_{rt} = -\frac{t_f b_f + t_w d_w}{4t_f b_f + t_w d_w} 2\sigma_{rc}$

onde: b_f e t_f são a largura e a espessura das mesas; d_w e t_w são a altura e a espessura da alma; d é a altura total do perfil.

4.7 Descrição das Sub-Rotinas

O programa, escrito na linguagem *FORTRAN 90* utilizando a plataforma *VISUAL FORTRAN 6.0*, divide-se em duas partes: o programa principal, que sequencia as sub-rotinas e controla o número de incrementos e iterações a serem executadas e as sub-rotinas que executam os procedimentos para que seja feita a análise não-linear da estrutura em questão. A FIG. 4.11 apresenta o fluxograma indicando a seqüência dos procedimentos.

- **Sub-rotina DADOS:** Através da leitura de um arquivo de texto, os parâmetros característicos do problema são coletados e atribuídos às variáveis. Além de informações básicas, tais como coordenadas e vinculações nodais, número e divisões das fatias, são informados os pares tensão-deformação que definem a lei constitutiva, os valores das tensões residuais aplicadas, os carregamentos nodais e os fatores limitantes referentes às interações e à convergência da solução.

- **Sub-rotina INICIA:** Visando o correto preenchimento dos dados, são zerados vetores e matrizes.

- **Sub-rotina INCAR:** Controla o processo incremental do carregamento e atualiza o vetor correspondente a cada passo do processo.

- **Sub-rotina ALGOR:** Controla o tipo de algoritmo a ser empregado para a solução do problema. Como citado anteriormente, o algoritmo escolhido foi o Método de Newton-Raphson puro.

- **Sub-rotina MATRIG:** Determina a matriz de rigidez tangente do elemento atualizada em cada iteração do processo, em regime elástico ou elastoplástico. Com o auxílio da **sub-rotina FATIA** são avaliados o nível de plastificação da seção transversal, através da contribuição de cada fatia no cálculo de propriedades geométricas e nos coeficientes de rigidez. Quando a tensão no centro de uma fatia alcança o valor de escoamento σ_y , considera-se que esta fatia da seção transversal plastificou-se.

- **Sub-rotina MONRIG:** Executa a montagem da matriz de rigidez global do sistema e do vetor de cargas, através da superposição da matriz de rigidez de cada elemento, de acordo como a incidência nodal adotada.

- **Sub-rotina REDGAS:** Executa os procedimentos necessários ao desenvolvimento da fase de eliminação progressiva do Método de Redução de Gauss para solução do sistema carregamento/ deslocamento a cada interação do carregamento.

- **Sub-rotina SUBREG:** Executa a substituição regressiva do sistema de equações triangular superior originado pela sub-rotina REDGAS. São calculados os deslocamentos nodais e as reações de apoio, além de proceder a atualização das coordenadas nodais, dos comprimentos e dos cossenos diretores dos elementos.

- **Sub-rotina ESFOR:** Determina o vetor das forças nodais equivalentes internas, levando-se em conta se o elemento está em carga ou descarga, de acordo com a lei constitutiva. Seguindo a formulação adotada, são calculados os deslocamentos, correspondentes aos graus de liberdade nos sistemas cartesiano e no corrotacional, definindo as rotações de corpo rígido e seus valores acumulativos. As deformações são calculadas, e, através da lei constitutiva, são calculados os esforços nodais equivalentes e os esforços residuais que serão reaplicados à estrutura até que a mesma esteja em equilíbrio (princípio do processo iterativo).

- **Sub-rotina CONVER:** Verifica a convergência da solução do problema através do controle do erro entre os deslocamentos nodais da iteração corrente com a anterior.

- **Sub-rotina RESULT:** Fornece a saída dos resultados da análise do problema apresentado, tais como os deslocamentos nodais e as reações de apoio segundo o sistema global de referência, os esforços solicitantes nas extremidades de cada elemento (coordenadas locais) e as deformações elásticas, plásticas e totais calculadas em cada fatia nas extremidades do elemento, além do valor de tensão nas mesmas.

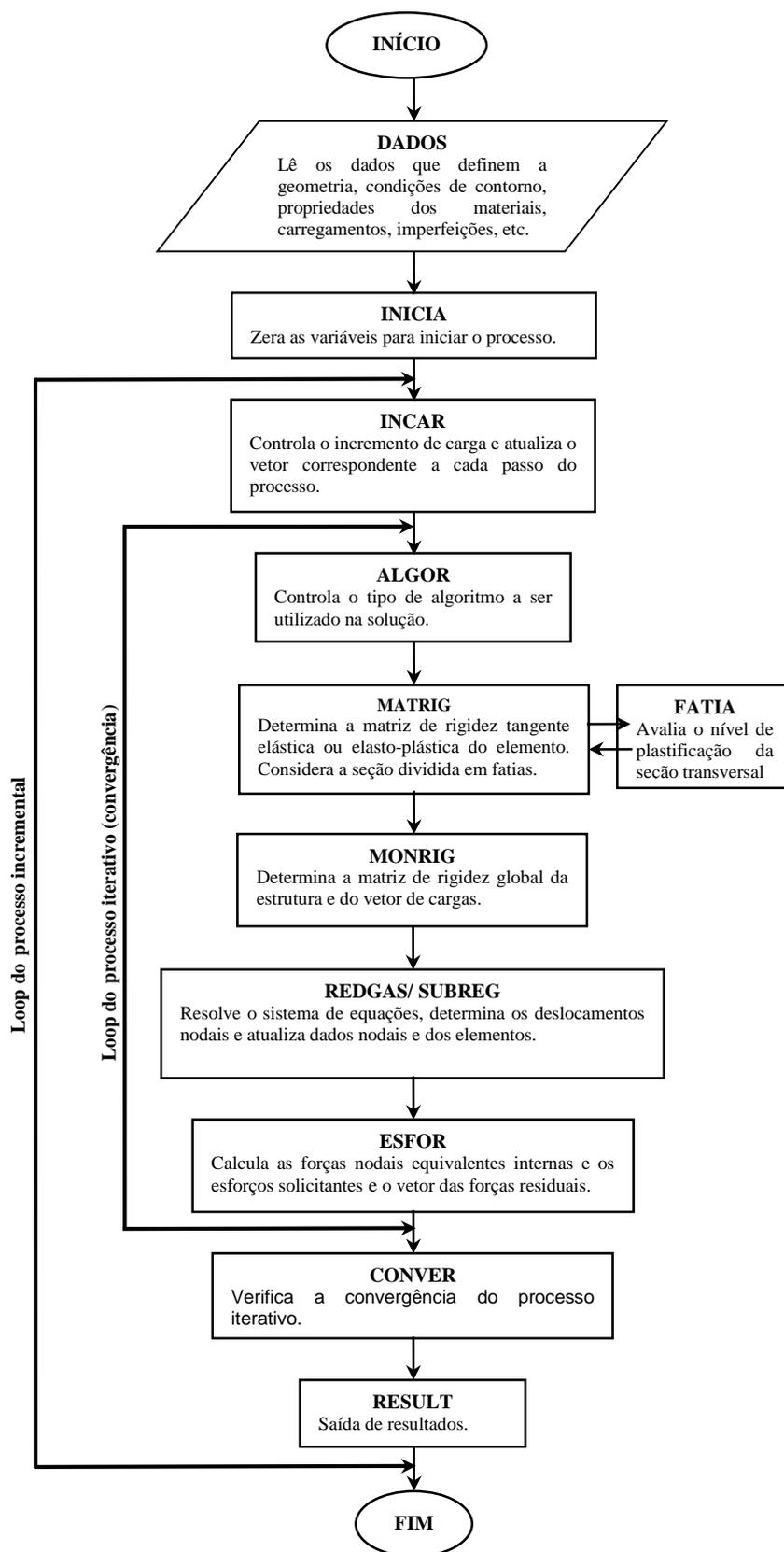


FIGURA 4. 11 – Fluxograma geral para análise não-linear incremental e iterativa

5

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

5.1 Introdução

Neste capítulo, o estudo do comportamento estrutural de sistemas reticulares planos em aço é apresentado através de aplicações numéricas para alguns modelos estruturais como treliça, viga em balanço, pórtico retangular de um andar e pórtico de andares múltiplos, sendo a situação de o colapso determinada pela hipoestaticidade ocasionada pela formação de rótulas plásticas.

A análise numérica é baseada na formulação teórica geometricamente exata desenvolvida no Capítulo 3 considerando a plasticidade distribuída, levando-se em conta as não linearidades geométrica e do material. Assim, os efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$ oriundos da não linearidade geométrica são considerados, bem como a não linearidade dos materiais através da distribuição da plasticidade ao longo das barras e das alturas das seções transversais.

Inicialmente, os exemplos visam mostrar a consistência e precisão da formulação desenvolvida, confirmando a validade de sua aplicação como um método de Análise Inelástica Avançada.

Além do exposto, é também objetivo deste capítulo apresentar um estudo sobre a influência do encruamento do aço e das tensões residuais no comportamento de estruturas reticulares planas. Para isto, serão apresentados resultados de análises para alguns modelos estruturais, os quais podem ser comparados graficamente destacando tais influências. Embora esses efeitos tenham sido investigados por muitos pesquisadores, suas influências sobre o comportamento e resistências dos pórticos não têm sido consideradas mais detalhadamente. Para tal, a implementação computacional, modificada por ALMEIDA (2006) para considerar os efeitos das tensões residuais nas análises, recebe neste trabalho a capacidade de considerar leis constitutivas através do modelo multilinear, além de um aperfeiçoamento da simulação da descarga e recarga elásticas, viabilizando um estudo cada vez mais detalhado e mais próximo do comportamento real.

5.2 Influência das Leis Constitutivas na Análise do Comportamento Não-Linear das Estruturas

Este exemplo clássico tem como objetivo mostrar que, para estruturas tanto em regime elástico ou elastoplástico, o programa aqui desenvolvido tem sua eficiência comprovada. A estrutura da FIG. 5.1 será analisada para 3 casos de comportamento elastoplástico representados por 3 leis constitutivas distintas, além de um exemplo de descarga/recarga, considerando-se a análise incremental das tensões e deformações apresentadas no item 4.4.3, com o objetivo de avaliar a influência das leis constitutivas no comportamento não-linear da estrutura.

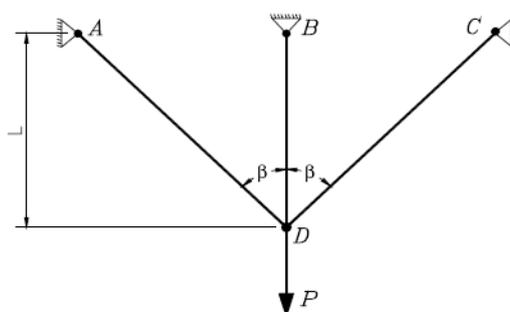


FIGURA 5. 1 – Estrutura hiperestática com 3 barras em regime elastoplástico

Será considerado que as barras AD, BD e CD têm por igual o módulo de rigidez longitudinal $E = 20.500 \text{ kN/cm}^2$ e a área de seção transversal $A = 12,51 \text{ cm}^2$. A carga aplicada vale $P = 1.050 \text{ kN}$, sendo $L = 200 \text{ cm}$ e $\beta = 45^\circ$.

a) Lei Constitutiva 01

Neste caso considera-se o comportamento elastoplástico perfeito onde a tensão de escoamento vale $\sigma_y = \sigma_1 = 34,50 \text{ kN/cm}^2$, e a deformação correspondente $\varepsilon_1 = 0,001683$, conforme o diagrama $\sigma \times \varepsilon$ da FIG. 5.2.

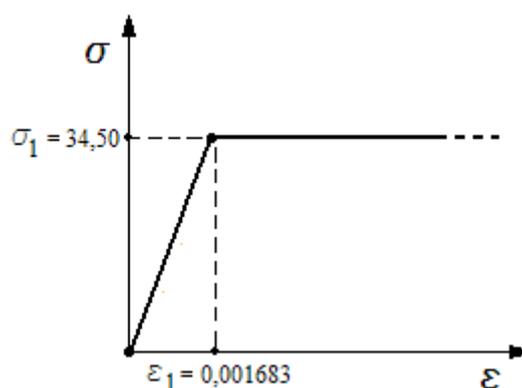


FIGURA 5. 2 – Comportamento elastoplástico perfeito – lei constitutiva 01

Os resultados obtidos pelo programa desenvolvido são comparados com os resultados teóricos cujas equações são dadas pela Mecânica dos Sólidos. Para a fase em que as três barras estão no regime elástico tem-se:

$$F_{AD} = F_{CD} = \frac{P \cos^2 \beta}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad ; \quad F_{BD} = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta} \quad ; \quad \delta_D = \frac{(P - F_{BD})L}{2EA \cos^3 \beta} = \frac{F_{BD}L}{EA} \quad (5.1)$$

onde δ_D é o deslocamento do ponto D.

O escoamento da barra central BD se dá quando P atinge a carga de escoamento $P_e = \sigma_y A (1 + 2 \cos^3 \beta) = 736,78 \text{ kN}$. Após esse escoamento, as forças normais nas barras e o deslocamento do ponto D são dados, analiticamente, por:

$$F_{AD} = F_{CD} = \frac{(P - \sigma_y A)}{2 \cos \beta} \quad ; \quad F_{BD} = \sigma_y A = \text{constante}; \quad \delta_D = \frac{(P - P_e)L}{2EA \cos^3 \beta} + \frac{F_{BD}L}{EA} \quad (5.2)$$

A estrutura entra em colapso quando P atinge o valor limite:

$$P_{LIM} = \sigma_y A (1 + 2 \cos \beta) = 1.041,96 \text{ kN} \quad (5.3)$$

Aplicou-se então o carregamento de 0 a 1.050 kN, em 17 incrementos de carga conforme os percentuais indicados nas tabelas a seguir. Na TAB. 5.1 são apresentados os resultados analíticos obtidos usando-se Eqs. (5.1) e (5.2), e na TAB. 5.2 aparecem os resultados fornecidos pelo programa PLANLEP.

TABELA 5. 1 – Resultados analíticos considerando a lei constitutiva 01

Inc.	fração	(%) total	P (kN)	F_{AD} (kN)	F_{BD} (kN)	ε_{AD}	ε_{BD}	δ_D (cm)	
01	20,0 %	20,0 %	210,00	61,51	123,02	0,000240	0,000480	0,096	
02	10,0 %	30,0 %	315,00	92,26	184,52	0,000360	0,000720	0,144	
03	5,0 %	35,0 %	367,50	107,64	215,28	0,000420	0,000839	0,168	
04	5,0 %	40,0 %	420,00	123,02	246,03	0,000480	0,000969	0,192	
05	5,0 %	45,0 %	472,50	138,39	276,78	0,000540	0,001079	0,216	
06	5,0 %	50,0 %	525,00	153,77	307,54	0,000600	0,001199	0,240	
07	5,0 %	55,0 %	577,50	169,15	338,29	0,000660	0,001319	0,264	
08	5,0 %	60,0 %	630,00	184,52	369,05	0,000720	0,001439	0,288	
09	5,0 %	65,0 %	682,50	199,90	399,80	0,000780	0,001559	0,312	
10	5,0 %	70,0 %	735,00	215,28	430,55	0,000840	0,001679	0,336	
11	5,0 %	75,0 %	787,50	251,66	431,60	0,000982	0,001963	0,393	
12	5,0 %	80,0 %	840,00	288,79	431,60	0,001127	0,002252	0,450	
13	5,0 %	85,0 %	892,50	325,91	431,60	0,001272	0,002542	0,508	
14	5,0 %	90,0 %	945,00	363,03	431,60	0,001417	0,002831	0,566	
15	5,0 %	95,0 %	997,50	400,16	431,60	0,001562	0,003121	0,624	
16	4,3 %	99,3 %	1.042,65	432,08	431,60	0,001686	0,003370	0,674	
17	0,7 %	100,0 %	1.050,00	Colapso					

Observa-se que as forças normais nas barras, assim como os valores dos deslocamentos para o ponto D, mostram a considerável precisão do programa computacional frente aos resultados analíticos.

Até 70% do carregamento ($P = 735$ kN) todos os elementos da estrutura trabalham em regime elástico, $\varepsilon_{70\%} < \varepsilon_1$, contribuindo para a rigidez do sistema. Então, a partir desta

carga, a barra BD escoa, permanecendo com esforço constante ($F_{BD} = 431,60$ kN), e deixa de contribuir para a rigidez da estrutura.

Apenas as barras AD e CD resistem aos esforços adicionais, e esta diminuição na rigidez global é indicada pela mudança de inclinação que ocorre na curva dos resultados analíticos e da análise numérica no gráfico apresentado na FIG. 5.3.

TABELA 5. 2 – Resultados da análise numérica considerando a lei constitutiva 01

Inc.	fração	(%) total	P (kN)	F_{AD} (kN)	F_{BD} (kN)	ε_{AD}	ε_{BD}	δ_D (cm)
01	20,0 %	20,0 %	210,00	61,51	123,00	0,000240	0,000480	0,096
02	10,0 %	30,0 %	315,00	92,26	184,48	0,000360	0,000720	0,144
03	5,0 %	35,0 %	367,50	107,63	215,22	0,000420	0,000839	0,168
04	5,0 %	40,0 %	420,00	123,00	245,96	0,000480	0,000959	0,192
05	5,0 %	45,0 %	472,50	138,38	276,69	0,000540	0,001079	0,216
06	5,0 %	50,0 %	525,00	153,76	307,42	0,000600	0,001199	0,240
07	5,0 %	55,0 %	577,50	169,13	338,15	0,000660	0,001319	0,264
08	5,0 %	60,0 %	630,00	184,51	368,89	0,000719	0,001438	0,288
09	5,0 %	65,0 %	682,50	199,89	399,61	0,000779	0,001558	0,312
10	5,0 %	70,0 %	735,00	215,26	430,33	0,000839	0,001678	0,336
11	5,0 %	75,0 %	787,50	251,42	431,60	0,000980	0,001960	0,393
12	5,0 %	80,0 %	840,00	288,46	431,60	0,001125	0,002248	0,450
13	5,0 %	85,0 %	892,50	325,50	431,60	0,001269	0,002537	0,507
14	5,0 %	90,0 %	945,00	362,25	431,60	0,001414	0,002825	0,565
15	5,0 %	95,0 %	997,50	399,54	431,60	0,001558	0,003113	0,623
16	4,3 %	99,3 %	1.042,65	431,36	431,60	0,001682	0,003361	0,672
17	0,7 %	100,0 %	1.050,00	Colapso				

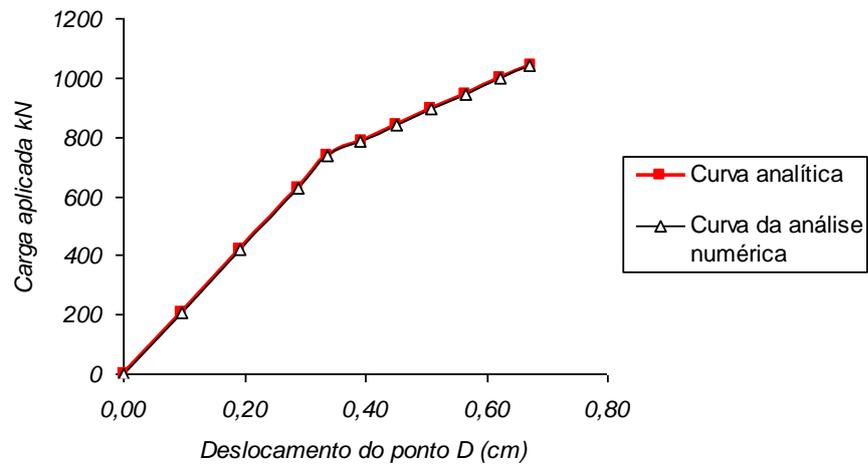


FIGURA 5. 3 – Curva carga x deslocamento para a lei constitutiva 01

b) Lei Constitutiva 02

Para a mesma estrutura da FIG. 5.1 será adotada a lei constitutiva exibida na FIG. 5.4. Os valores das tensões e deformações limites que definem cada trecho são:

- $\sigma_1 = 17,25 \text{ kN/cm}^2$, $\varepsilon_1 = 0,000842$;
- $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 34,50 \text{ kN/cm}^2$, $\varepsilon_2 = 0,002945$.

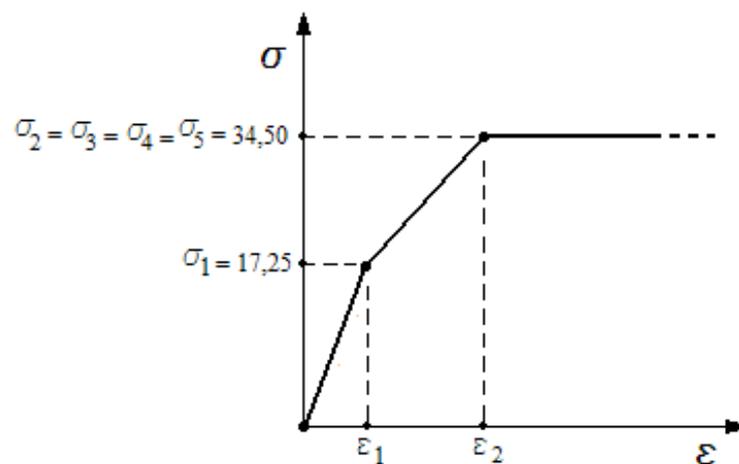


FIGURA 5. 4 – Comportamento elastoplástico – lei constitutiva 02

Portanto, o módulo de elasticidade ainda será dado por $E = 20.500 \text{ kN/cm}^2$, o módulo tangente do primeiro trecho elastoplástico será $E_{t_1} = 8.200 \text{ kN/cm}^2$ e dos demais $E_{t_2} = E_{t_3} = E_{t_4} = 0$.

A TAB. 5.3 apresenta os resultados da análise considerando a lei constitutiva 02 e 17 incrementos de carga conforme os percentuais indicados. Os gráficos da FIG. 5.5 mostram o comportamento carga x deslocamento do ponto D da estrutura segundo as leis constitutivas 01 e 02. Uma análise da TAB. 5.3 e de sua representação gráfica na FIG. 5.5 permite distinguir 4 etapas no comportamento da estrutura.

TABELA 5.3 – Resultados da análise numérica considerando a lei constitutiva 02

Inc.	fração	(%) total	P (kN)	F_{AD} (kN)	F_{BD} (kN)	ε_{AD}	ε_{BD}	δ_D (cm)	
01	20,0 %	20,0 %	210,00	61,51	123,00	0,000240	0,000480	0,096	
02	10,0 %	30,0 %	315,00	92,26	184,48	0,000360	0,000719	0,144	
03	5,0 %	35,0 %	367,50	107,63	215,22	0,000420	0,000839	0,168	
04	5,0 %	40,0 %	420,00	131,18	234,39	0,000512	0,001023	0,205	
05	5,0 %	45,0 %	472,50	154,88	253,34	0,000604	0,001207	0,242	
06	5,0 %	50,0 %	525,00	178,57	272,29	0,000696	0,001392	0,278	
07	5,0 %	55,0 %	577,50	202,26	291,23	0,000789	0,001577	0,315	
08	5,0 %	60,0 %	630,00	222,39	315,21	0,000906	0,001811	0,362	
09	5,0 %	65,0 %	682,50	237,75	345,91	0,001056	0,002110	0,422	
10	5,0 %	70,0 %	735,00	253,12	376,61	0,001205	0,002409	0,482	
11	5,0 %	75,0 %	787,50	268,48	407,30	0,001355	0,002708	0,542	
12	5,0 %	80,0 %	840,00	288,34	431,60	0,001549	0,003095	0,619	
13	5,0 %	85,0 %	892,50	325,29	431,60	0,001909	0,003814	0,763	
14	5,0 %	90,0 %	945,00	362,21	431,60	0,002269	0,004532	0,907	
15	5,0 %	95,0 %	997,50	399,11	431,60	0,002628	0,005250	1,050	
16	4,3 %	99,3 %	1.042,65	430,82	431,60	0,002938	0,005867	1,173	
17	0,7 %	100,0 %	1.050,00	Colapso					

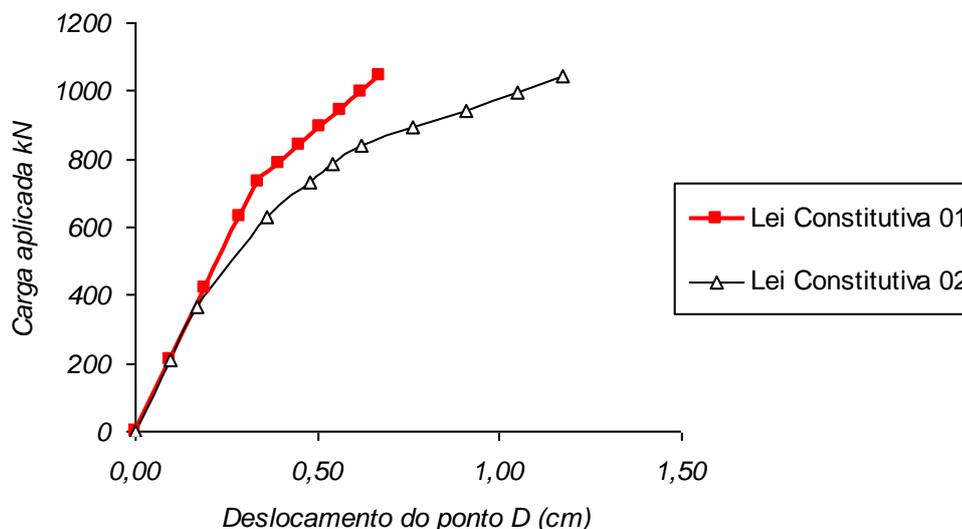


FIGURA 5. 5 – Curvas carga x deslocamento para a estrutura da FIG. 5.1 segundo as leis constitutivas 01 e 02.

1ª etapa: Do início do processo incremental até o 3º incremento de carga. Nesta etapa, todas as barras estão em regime elástico com deformações menores que ε_1 e contribuem para a rigidez da estrutura. Observa-se então na FIG. 5.5 que as curvas correspondentes às leis 01 e 02 são coincidentes até certa altura da fase inicial do carregamento.

2ª etapa: Entre o 4º e o 7º incremento observa-se que $\varepsilon_{AD} < \varepsilon_1$ e que $\varepsilon_1 < \varepsilon_{BD} < \varepsilon_2$. Portanto, a barra central BD já se encontra sob regime elastoplástico enquanto as demais ainda permanecem elásticas. Há então um decréscimo na rigidez global da estrutura evidenciado pelo início do afastamento da curva correspondente à lei constitutiva 02 em relação àquela referente à lei 01.

3ª etapa: Vai do 8º ao 11º incremento. Nesta etapa todas as barras estão no trecho elastoplástico. As deformações e deslocamentos são ainda maiores para os mesmos incrementos de carga, ou seja, há mais um decréscimo na da rigidez do sistema conforme se pode observar por um terceiro trecho de inclinação ainda menor na curva relativa à lei constitutiva 02, FIG.5.5.

4ª etapa: Vai do 12º incremento até o colapso. No início desta etapa tem-se $\varepsilon_{BD} > \varepsilon_2$ e, assim sendo, a barra BD escoá. Isto acentua ainda mais a diminuição da rigidez do

sistema, já que neste caso, apenas as demais barras laterais com a mesma deformação, $\varepsilon_1 < \varepsilon_{AD} < \varepsilon_2$, contribuem para a rigidez do sistema até que no 17º incremento estas também escoam e acontece o colapso da estrutura. Esta etapa é representada na FIG. 5.5 pelo quarto e último trecho com inclinação ligeiramente inferior ao anterior.

Da análise conclui-se que o colapso da estrutura ocorre com a mesma carga limite $P_{LIM} = 1.042,65$ kN (bem próximo do valor analítico de 1.041,97 kN) da lei constitutiva 01. Porém a lei constitutiva 02 antecipa o comportamento elastoplástico da estrutura que se inicia quando a mesma está sob a ação de valores superiores a de 35% da carga total de colapso, que, ante aos 70% verificados com a lei 01, denota a diminuição da rigidez do sistema, que desenvolve então um comportamento carga x deslocamento diferente, resultando em maiores deslocamentos para os mesmos valores de carga.

c) Lei Constitutiva 03

Ainda para a estrutura da FIG. 5.1 será adotada a lei constitutiva elasto-plástica do gráfico $\sigma \times \varepsilon$ exibida na FIG. 5.6, considerando o encruamento do aço. Os valores das tensões e deformações limites que definem cada trecho são:

- Trecho elástico: $\sigma_y = \sigma_1 = 34,50$ kN/cm² , $\varepsilon_1 = 0,001683$
- Trecho elastoplástico 01: $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 34,50$ kN/cm² , $\varepsilon_2 = 0,003366$
- Trecho elastoplástico 02: $\sigma_5 = 50,00$ kN/cm² , $\varepsilon_5 = \varepsilon_{lim} = 0,030000$

Assim o módulo elástico é igual a $E = 20.500$ kN/cm² , e os módulos tangentes terão os seguintes valores: $E_{t_1} = 0$ e $E_{t_2} = 582$ kN/cm² .

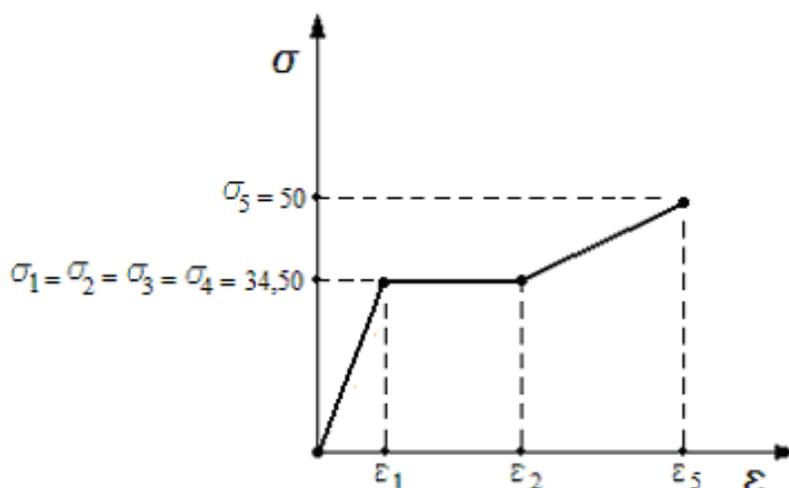


FIGURA 5. 6 – Comportamento elastoplástico com encruamento do aço – lei const. 03

A TAB. 5.4 apresenta os resultados da análise considerando a lei constitutiva 03 e 27 incrementos de carga conforme os percentuais indicados. Os gráficos da FIG. 5.7 mostram o comportamento carga x deslocamento do ponto D da estrutura segundo as leis constitutivas 01, 02 e 03. Uma análise da TAB. 5.4 e de sua representação gráfica na FIG. 5.7 permite distinguir 4 etapas no comportamento da estrutura.

1ª etapa: Do início do processo incremental até o 10º incremento de carga, as três barras estão com valores de deformação inferiores a ϵ_1 . Nesta etapa todos os cabos trabalham em regime elástico e contribuem com a rigidez da estrutura. Até então, o comportamento estrutural é idêntico ao apresentado para a lei constitutiva 01. (FIG. 5.7).

2ª etapa: Vai do 11º incremento até o 16º incremento com os valores de deformação ϵ_{AD} ainda menores que ϵ_1 e $\epsilon_1 < \epsilon_{BD} < \epsilon_2$, conforme a TAB. 5.4. Nesta etapa, a barra BD escoar, permanecendo com esforço constante $F_{BD} = 431,59$ kN, deixando de contribuir provisoriamente para a rigidez do sistema. Apenas as barras AD e CD contribuem para a rigidez da estrutura. O comportamento carga x deformação ainda é semelhante ao correspondente à lei 01.

3ª etapa: Após o 16º incremento, um adicional de apenas 0,7 % de carga é suficiente para escoar as barras AD e CD, levando, ao mesmo tempo, ao início do encruamento da barra

BD. Desta forma, nesta etapa que consiste apenas no 17º incremento de carga, somente a barra BD contribui para a rigidez da estrutura, uma vez que $\varepsilon_1 < \varepsilon_{AD} < \varepsilon_2$ e $\varepsilon_1 < \varepsilon_{BD} < \varepsilon_5$. Portanto nota-se assim um curto deslocamento, praticamente na horizontal, no desenvolvimento da curva carga x deslocamento da estrutura referente à lei constitutiva 03, (FIG. 5.7), evidenciando uma momentânea, porém intensa, perda de rigidez da estrutura.

4ª etapa: Vai do 18º incremento até o colapso da estrutura. Nesta etapa, além da barra BD, AD e CD também entram na fase de encruamento do aço e com $\varepsilon_2 < \varepsilon_{BD} < \varepsilon_5$ e $\varepsilon_2 < \varepsilon_{AD} < \varepsilon_5$, ambas as três contribuem para a rigidez com módulo tangente E_{t_2} até a estrutura entrar em regime de grandes deformações considerando o estado limite último; neste caso $\varepsilon_5 = 0,030000$.

TABELA 5. 4 – Resultados da análise numérica considerando a lei constitutiva 03

Inc.	fração	(%) total	P (kN)	F_{AD} (kN)	F_{BD} (kN)	ε_{AD}	ε_{BD}	δ_D (cm)	
01	20,0 %	20,0 %	210,00	61,51	123,00	0,000240	0,000480	0,096	
02	10,0 %	30,0 %	315,00	92,26	184,48	0,000360	0,000719	0,144	
03	5,0 %	35,0 %	367,50	107,63	215,22	0,000420	0,000839	0,168	
04	5,0 %	40,0 %	420,00	123,00	245,96	0,000480	0,000959	0,192	
05	5,0 %	45,0 %	472,50	138,38	276,69	0,000540	0,001079	0,216	
06	5,0 %	50,0 %	525,00	153,76	307,42	0,000600	0,001199	0,240	
07	5,0 %	55,0 %	577,50	169,13	338,15	0,000659	0,001319	0,264	
08	5,0 %	60,0 %	630,00	184,51	368,88	0,000719	0,001438	0,288	
09	5,0 %	65,0 %	682,50	199,88	399,61	0,000779	0,001558	0,312	
10	5,0 %	70,0 %	735,00	215,26	430,33	0,000839	0,001678	0,336	
11	5,0 %	75,0 %	787,50	251,42	431,59	0,000980	0,001960	0,392	
12	5,0 %	80,0 %	840,00	288,46	431,59	0,001125	0,002248	0,450	
13	5,0 %	85,0 %	892,50	325,50	431,59	0,001269	0,002537	0,507	
14	5,0 %	90,0 %	945,00	362,52	431,59	0,001414	0,002825	0,565	
15	5,0 %	95,0 %	997,50	399,54	431,59	0,001558	0,003113	0,623	
16	4,3 %	99,3 %	1.042,65	431,36	431,59	0,001682	0,003361	0,672	
17	0,7 %	100,0 %	1050,00	431,59	438,33	0,002148	0,004291	0,858	
18	2,5 %	102,5 %	1076,35	433,83	460,48	0,003674	0,007334	1,467	
19	2,5 %	105,0 %	1102,50	441,34	475,44	0,004705	0,009388	1,878	
20	5,0 %	110,0 %	1155,00	456,36	505,30	0,006768	0,013490	2,698	
21	5,0 %	115,0 %	1207,50	471,37	535,10	0,008830	0,017583	3,517	
22	5,0 %	120,0 %	1260,00	486,38	564,82	0,010891	0,021666	4,333	
23	5,0 %	125,0 %	1312,50	501,38	594,49	0,012952	0,025740	5,148	
24	3,0 %	128,0 %	1344,00	510,38	612,25	0,014188	0,028181	5,636	
25	1,0 %	129,0 %	1354,50	513,38	618,17	0,014600	0,028993	5,799	
26	1,0 %	130,0 %	1365,00	516,38	624,08	0,015012	0,029806	5,961	
27	0,5 %	130,5 %	1370,25	Colapso					

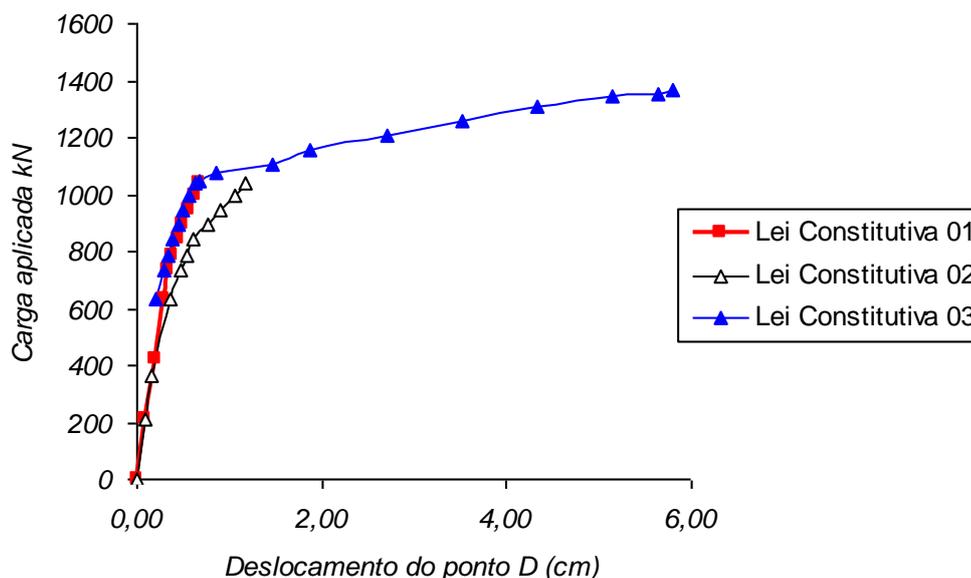


FIGURA 5. 7 – Curvas carga x deslocamento para a estrutura da FIG. 5.1 segundo as leis constitutivas 01, 02 e 03 (*strain-hardening*)

d) Descarga/Recarga Segundo a Lei Constitutiva 03

É reapresentado a seguir o mesmo exemplo do item anterior, onde a estrutura da FIG. 5.1 é submetida à lei constitutiva 03. Porém, a partir do incremento em que se atinge 80% do carregamento total, dá-se o início do processo de descarga, de forma gradual, até o carregamento ser reduzido a 10%. Logo em seguida, a estrutura passa por um processo de recarga, apresentando comportamento elástico, até retomar a mesma condição carga-deslocamento imediatamente anterior à descarga. Ao atingir novamente 80% do carregamento total, o processo de carregamento continua com o mesmo comportamento para a lei constitutiva 03 mostrado na FIG. 5.7, até o colapso estrutural.

Na TAB. 5.5 são apresentados os valores da força normal e deformação em cada barra, além do deslocamento vertical do ponto D, tendo-se em vista $F_{AD} = F_{CD}$, durante todo o processo de carga/descarga da estrutura. Os resultados apresentados na TAB. 5.5 são representados graficamente na FIG. 5.7.

TABELA 5. 5 – Resultados da análise numérica considerando a lei constitutiva 03 com descarga/recarga

Inc.	fração	(%) total	P (kN)	F_{AD} (kN)	F_{BD} (kN)	ε_{AD}	ε_{BD}	δ_D (cm)
00	0,0 %	0,0 %	0,00	0,00	0,00	0,000000	0,000000	0,000
01	20,0 %	20,0 %	210,00	61,51	123,00	0,000240	0,000480	0,096
02	20,0 %	40,0 %	420,00	123,00	245,96	0,000480	0,000959	0,192
03	20,0 %	60,0 %	630,00	184,51	368,88	0,000719	0,001438	0,288
04	20,0 %	80,0 %	840,00	288,46	431,59	0,001125	0,002248	0,450
05	-20,0 %	60,0 %	630,00	226,97	308,73	0,000885	0,001769	0,354
06	-20,0 %	40,0 %	420,00	165,48	185,83	0,000645	0,001290	0,258
07	-20,0 %	20,0 %	210,00	103,98	62,90	0,000405	0,000811	0,162
08	-10,0 %	10,0 %	105,00	73,22	141,64	0,000286	0,000571	0,114
09	10,0 %	20,0 %	210,00	103,98	62,90	0,000405	0,000811	0,162
10	20,0 %	40,0 %	420,00	165,48	185,83	0,000645	0,001290	0,258
11	20,0 %	60,0 %	630,00	226,97	308,73	0,000885	0,001769	0,354
12	20,0 %	80,0 %	840,00	288,46	431,59	0,001125	0,002248	0,450
13	15,0 %	95,0 %	997,50	399,54	431,59	0,001558	0,003113	0,623
14	4,3 %	99,3 %	1.042,65	431,36	431,59	0,001682	0,003361	0,672
15	0,7 %	100,0 %	1050,00	431,59	438,33	0,002148	0,004291	0,858
16	2,5 %	102,5 %	1076,35	433,83	460,48	0,003674	0,007334	1,467
17	2,5 %	105,0 %	1102,50	441,34	475,44	0,004705	0,009388	1,878
19	10,0 %	115,0 %	1207,50	471,37	535,10	0,008830	0,017583	3,517
20	10,0 %	125,0 %	1312,50	501,38	594,49	0,012952	0,025740	5,148
21	5,0 %	130,0 %	1365,00	516,38	624,08	0,015012	0,029806	5,961
22	0,5 %	130,5 %	1370,25	Colapso				

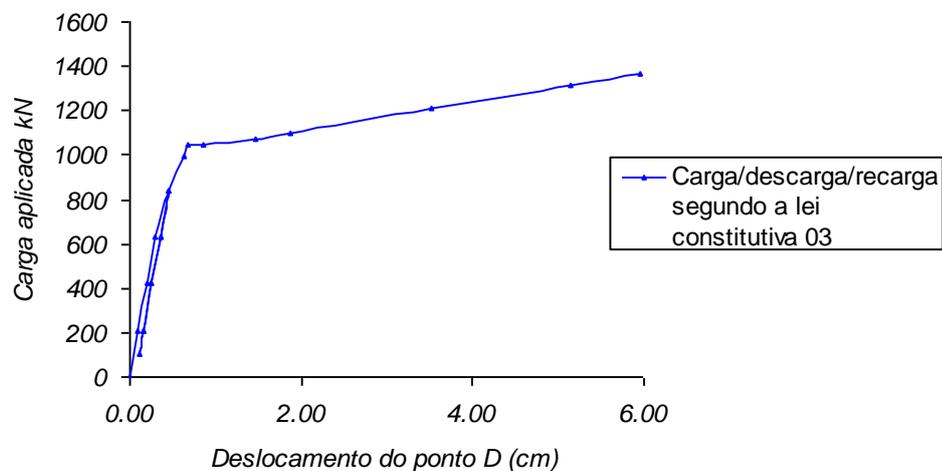


FIGURA 5. 8 – Curvas carga x deslocamento para a estrutura da FIG. 5.1 durante o processo de carga e descarga segundo a lei constitutiva 03

5.3 Efeito das Tensões Residuais e do Encruamento no Comportamento Estrutural

Nesta seção, são examinados os efeitos das tensões residuais e do encruamento do aço no comportamento de vigas submetidas à flexão normal composta, de pórticos simples e pórticos de andares múltiplos. Embora esses efeitos tenham sido investigados por muitos pesquisadores, sua influência sobre o comportamento e resistência dessas estruturas não tem sido considerada em detalhes.

5.3.1 Barras submetidas à flexão normal composta

Neste exemplo são estudados os efeitos das tensões residuais e do encruamento do aço no comportamento da viga em balanço mostrada na FIG. 5.8, que é submetida à força axial de compressão P que é mantida constante enquanto a força vertical Q é aumentada gradualmente até o colapso, cujos resultados são comparados com aqueles obtidos por EL-ZANATY *et al.* (1980).

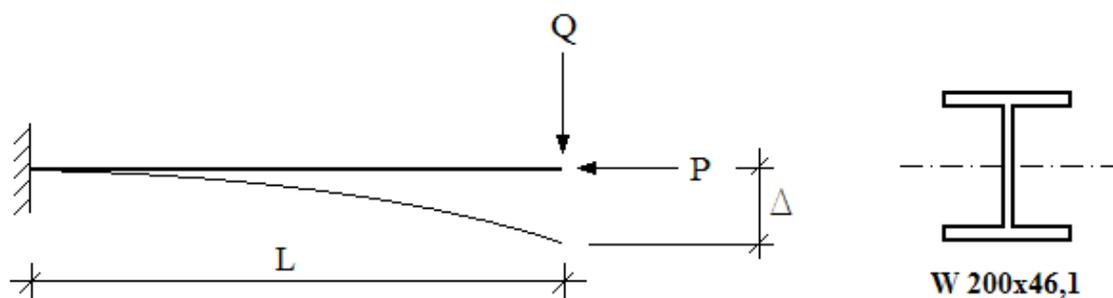


FIGURA 5. 9 – Viga em balanço submetida a flexão normal composta

Foram consideradas relações de esbeltez de 14,4 , 40 e 80 e seu comprimento foi dividido em 10 elementos. A seção transversal do perfil foi dividida em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma, e a flexão se dá em torno do eixo de maior momento de inércia. O valor da tensão residual de compressão máxima, σ_{rc} foi adotado como sendo $0,3 \sigma_y$ e sua distribuição é linear nas mesas e na alma. O valor da carga de plastificação é dado por $P_y = 1.442,30$ kN e o momento plástico $M_p = 12.192,65$ kN.cm.

A FIG. 5.9 apresenta as leis constitutivas adotadas para o aço utilizado neste exemplo, onde o módulo de elasticidade longitudinal vale $E = 20.000$ kN/cm², a deformação no início do encruamento é admitida sendo igual a 12 vezes a deformação do início da plastificação e o módulo tangente adotado para fase do encruamento do aço vale $E_t = 600$ kN/cm². A deformação limite, correspondente à ruptura do aço, vale $\varepsilon_{lim} = 0,04$.

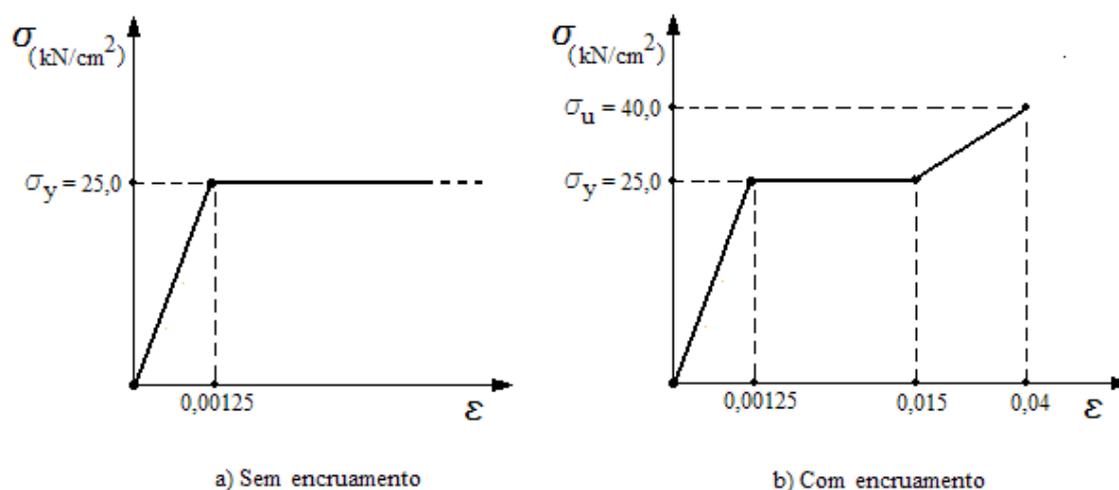


FIGURA 5. 10 – Leis constitutivas utilizadas (fora de escala)

A seguir são apresentados os resultados obtidos após a análise numérica tendo em vista as interações entre P e Q e as leis constitutivas adotadas, considerando-se variações na esbeltez da barra e os efeitos da tensão residual e do encruamento.

a) Curvas de interação para a viga submetida à flexão normal composta

A resistência global da viga em balanço é analisada mais apropriadamente através das curvas de interação mostradas na FIG. 5.11. Nessas curvas, a interação entre a relação adimensional do máximo momento fletor de 1ª ordem, QL/M_p , versus a relação adimensional da força axial, P/P_y , é analisada, considerando-se a lei constitutiva da FIG. 5.9(a). Observa-se na FIG. 5.11 que a presença de tensão residual não tem influência significativa na resistência última da viga.

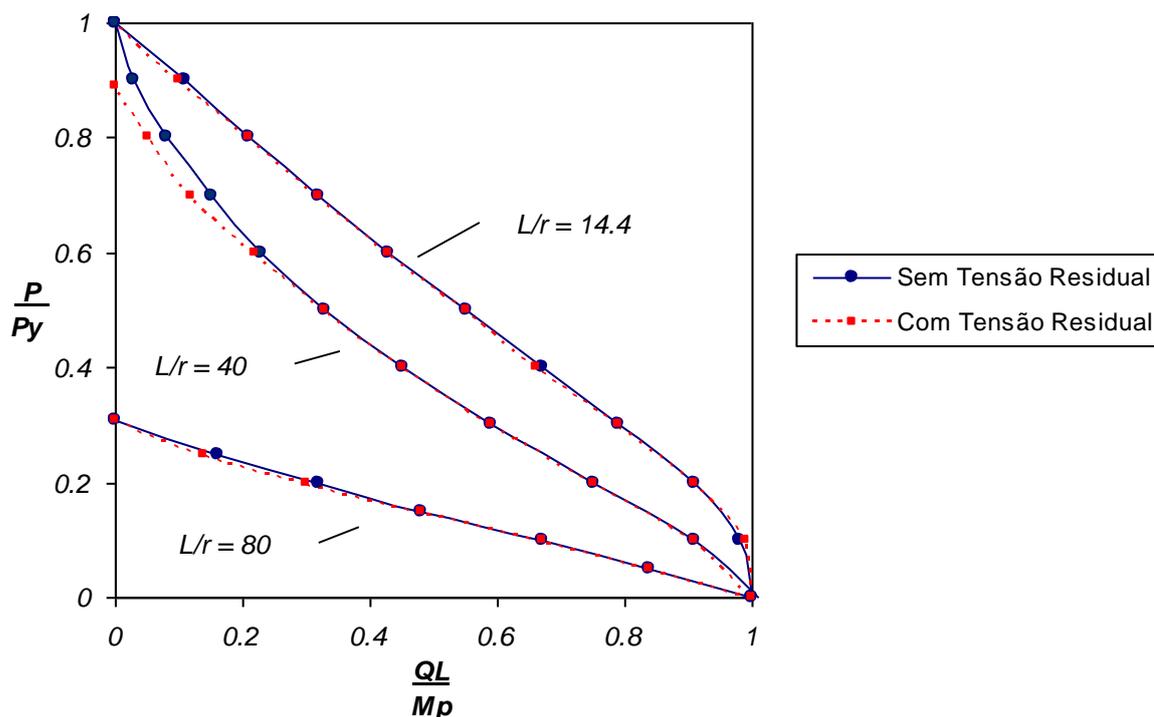


FIGURA 5. 11 – Curvas de interação para a viga em balanço submetida à flexão normal composta

b) Comportamento carga-declividade para a viga em balanço ($L/r = 14,4$ e $P = 0,15P_y$)

A seguir, na TAB. 5.6 são apresentados os valores das flechas e declividades máximas para a viga em balanço da FIG. 5.8, submetida à carga vertical Q , sendo $L/r = 14,4$ e $P/P_y = 0,15$, considerando-se a influência das tensões residuais e do encruamento do aço. A FIG. 5.11 mostra os gráficos de $Q \times \Delta/L$, traçados a partir dos valores numéricos da TAB. 5.6.

TABELA 5. 6 – Valores da flecha e declividade máximas para $L/r = 14,4$ e $P = 0,15P_y$ – viga em balanço

Q (kN)	Sem Tensão Residual		Com Tensão Residual		Encruamento sem Tensão Residual		Encruamento com Tensão Residual	
	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
19,25	0,14886	0,00117	0,14886	0,00117	0,14886	0,00117	0,14886	0,00117
38,50	0,29773	0,00235	0,29773	0,00235	0,29773	0,00235	0,29773	0,00235
57,75	0,44659	0,00352	0,44674	0,00352	0,44659	0,00352	0,44674	0,00352
77,00	0,59553	0,00469	0,60645	0,00478	0,59553	0,00469	0,60645	0,00478
86,63	0,72470	0,00571	0,72162	0,00569	0,72470	0,00571	0,72162	0,00569
89,51	0,80809	0,00637	0,79425	0,00626	0,80809	0,00637	0,79425	0,00626
90,48	0,84885	0,00669	0,83836	0,00661	0,84885	0,00669	0,83836	0,00661
91,44	0,98399	0,00776	0,92197	0,00727	0,98399	0,00776	0,92197	0,00727
93,36	colapso	colapso	colapso	Colapso	2,06464	0,01627	2,08362	0,01642
95,29					2,37071	0,01869	2,33346	0,01839
96,25					2,59131	0,02043	2,56530	0,02022
105,88					6,09476	0,04804	6,01910	0,04745
110,69					8,63533	0,06807	8,62983	0,06803
112,61					9,35997	0,07378	9,34371	0,07365
113,58					9,75385	0,07689	9,75348	0,07688
114,54					10,16490	0,08013	10,10660	0,07967
115,50					colapso	colapso	11,51730	0,09079
116,46							colapso	colapso

Observa-se na TAB. 5.6 que, neste caso, as tensões residuais não têm influência significativa no comportamento e na resistência da viga. Entretanto, ocorre um aumento de aproximadamente 20% na carga de colapso quando se leva em conta o efeito encruamento do aço, conforme também é mostrado na FIG. 5.11.

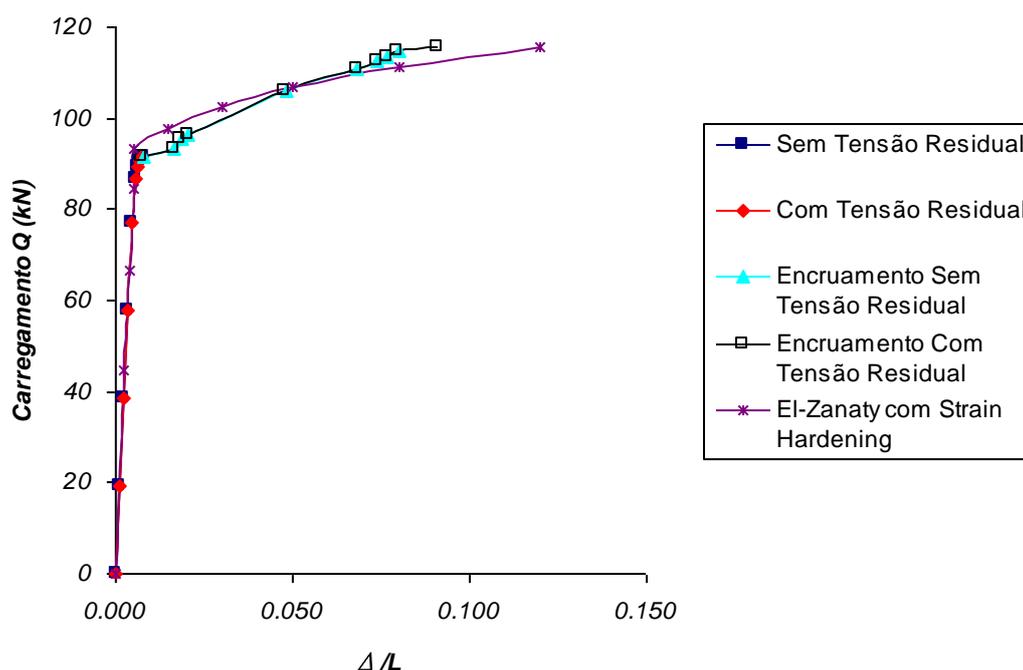


FIGURA 5. 12 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 14,4$ e $P = 0,15P_y$ – viga em balanço

c) Comportamento carga-declividade para a viga em balanço ($L/r = 14,4$ e $P = 0,91P_y$)

A seguir, a TAB. 5.7 apresenta os valores das flechas e declividades máximas para a viga em balanço da FIG. 5.8, submetida à carga vertical Q , sendo $L/r = 14,4$ e $P/P_y = 0,91$, considerando-se a influência das tensões residuais. A FIG. 5.12 mostra os gráficos de Q x Δ/L , traçados a partir dos valores numéricos da TAB. 5.7.

Observa-se na TAB. 5.7 que, embora a esbeltez se mantenha baixa, as tensões residuais têm influência significativa no comportamento e na resistência da viga, uma vez que está submetida a elevado esforço axial de compressão, conforme também é mostrado na FIG.

5.12. As análises também demonstraram que, para este caso, o efeito do encruamento do aço no comportamento e na resistência da viga é insignificante.

TABELA 5. 7 – Valores da flecha e declividade máxima para $L/r = 14,4$ e $P = 0,91P_y$ – viga em balanço

Q (kN)	Sem Tensão Residual		Com Tensão Residual	
	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L
0,00	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00	0,00000E+00
0,96	8,07673E-03	6,36665E-05	1,09634E-02	8,64213E-05
2,89	2,42302E-02	1,91000E-04	3,48511E-02	2,74721E-04
4,81	4,03837E-02	3,18333E-04	6,08702E-02	4,79822E-04
6,74	5,65372E-02	4,45666E-04	9,09147E-02	7,16654E-04
7,70	6,50345E-02	5,12648E-04	1,09074E-01	8,59798E-04
8,66	9,69764E-02	7,44360E-04	colapso	colapso
9,63	Colapso	Colapso		

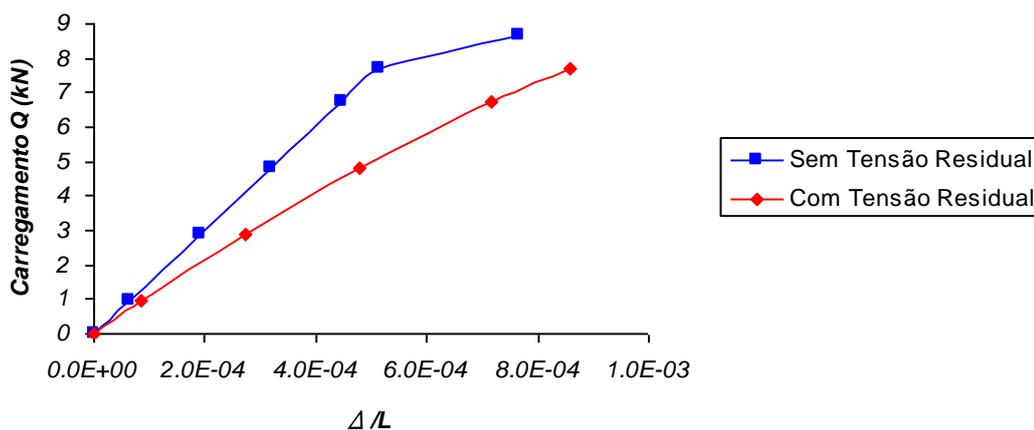


FIGURA 5. 13 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 14,4$ e $P = 0,91P_y$ – viga em balanço

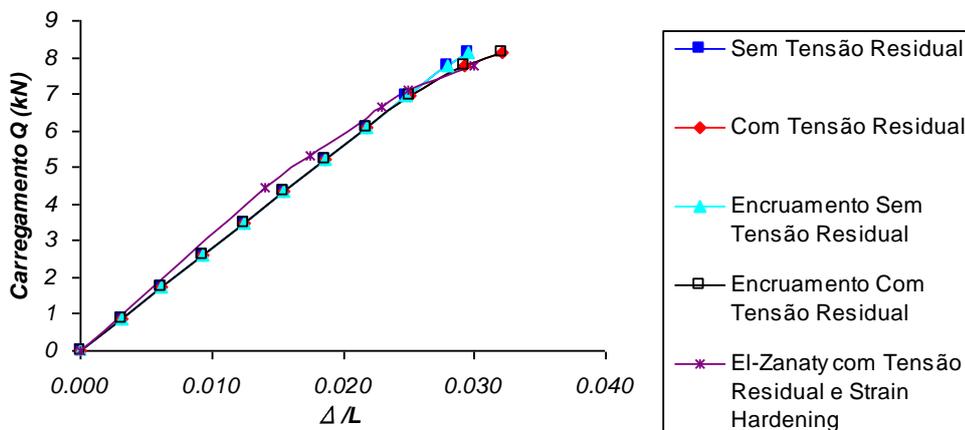


FIGURA 5. 14 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 80$ e $P = 0,15P_y$ – viga em balanço

e) Comportamento carga-declividade para a viga em balanço ($L/r = 80$ e $P = 0,30P_y$)

Na TAB. 5.9 são apresentados os valores das flechas e declividades máximas para a viga em balanço da FIG. 5.8, submetida à carga vertical Q , sendo $L/r = 80$ e $P/P_y = 0,30$, considerando-se a influência das tensões residuais. A FIG. 5.14 mostra os gráficos Q x Δ/L , traçados a partir dos valores numéricos da TAB. 5.9.

TABELA 5. 9 – Valores da flecha e declividade máximas para $L/r = 80$ e $P = 0,30P_y$ – viga em balanço

Q (kN)	Sem Tensão Residual		Com Tensão Residual	
	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,09	4,31662	0,00612	4,31662	0,00612
0,17	8,62099	0,01223	8,62099	0,01223
0,26	12,90120	0,01830	colapso	colapso
0,35	17,14590	0,02433		
0,43	colapso	colapso		

Pode-se observar também na TAB. 5.9 que apesar da viga apresentar esbelteza elevada, se a mesma estiver submetida a valores de força axial relativamente elevados, as tensões residuais passam a ter influência significativa na sua resistência, embora seu comportamento não seja afetado, conforme também é mostrado na FIG. 5.14.

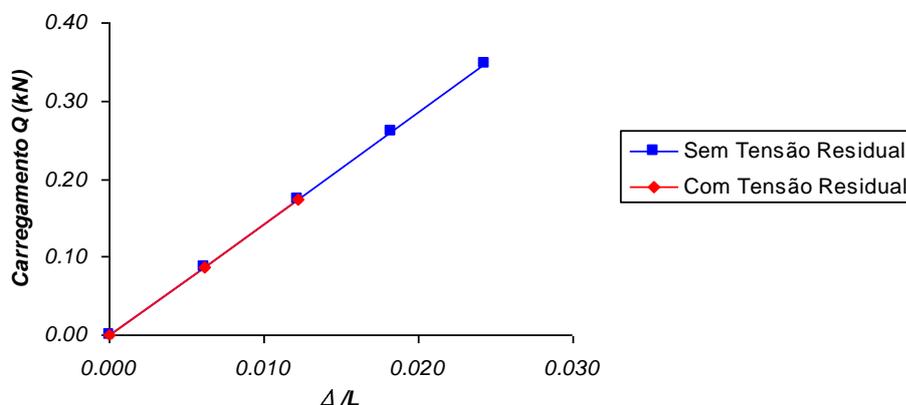


FIGURA 5. 15 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 80$ e $P = 0,30P_y$ – viga em balanço

De forma análoga ao caso anterior, as análises mostraram que barras com esbelteza elevada não sofrem o efeito do encruamento do aço tanto na sua resistência quanto no seu comportamento.

Tendo em vista os casos analisados, pode-se concluir que as tensões residuais terão efeito significativo na resistência última apenas para barras submetidas a elevados valores de força normal de compressão.

Os resultados também demonstraram que o encruamento do aço não tem efeito sobre a resistência última da viga, exceto para o caso de baixa esbelteza ($L/r = 14,4$) e baixo valor de força normal de compressão ($P/P_y = 0,15$), onde o efeito é pronunciado.

5.3.2 Pórtico simples de um andar

De forma similar ao item 5.3.1, neste exemplo serão estudados os efeitos das tensões residuais e do encruamento do aço no comportamento do pórtico simples de um andar mostrado na FIG. 5.15, submetido às forças concentradas, horizontal Q e vertical P , cujos resultados serão comparados com aqueles obtidos por EL-ZANATY *et al.* (1980).

Os pilares tiveram seu comprimento dividido em 4 elementos e a viga em 6. Como no estudo anterior, a seção transversal do perfil, também indicada na FIG. 5.16, foi dividida em 50 fatias e o valor da tensão residual de compressão máxima, σ_{rc} foi adotado como sendo $0,3\sigma_y$, com distribuição linear nas mesas e na alma. A flexão no plano se deu em torno do eixo de maior momento de inércia dos perfis. Trata-se do mesmo tipo de aço cujas hipóteses de leis constitutivas foram apresentadas na FIG. 5.9.

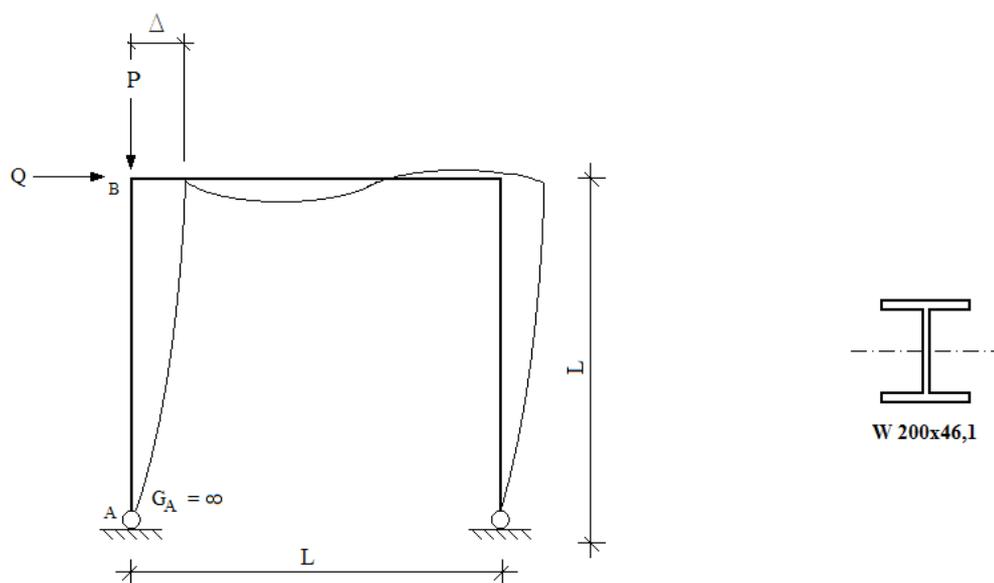


FIGURA 5. 16 – Pórtico simples de um andar submetido às cargas P e Q

Três valores diferentes de G_B são considerados (0, 1 e 3), onde G_B é o fator de rigidez relativo avaliado no nó B do topo do pórtico. Os fatores do comprimento efetivo, K , correspondentes aos valores de G_B de 0, 1 e 3, sendo a extremidade inferior do pilar rotulada ($G_A = \infty$), são 2,0, 2,3 e 2,92, respectivamente. Isto leva a índices de esbelteza efetivos, KL/r , variando entre 80 a 175,2:

$L/r = 40$

- $G_B = 0$, $K = 2,0$
 $KL/r = 80$
- $G_B = 1$, $K = 2,3$
 $KL/r = 92$
- $G_B = 3$, $K = 2,92$
 $KL/r = 116,8$

$L/r = 60$

- $G_B = 0$, $K = 2,0$
 $KL/r = 120$
- $G_B = 1$, $K = 2,3$
 $KL/r = 138$
- $G_B = 3$, $K = 2,92$
 $KL/r = 175,2$

Visando às aplicações numéricas e tendo-se em vista a Eq. 5.4, valores diferentes de G_B puderam ser obtidos por alterações nas dimensões do perfil da viga e no vão do pórtico simples, como mostra a FIG. 5.16.

$$G = \frac{I_c / L_c}{I_v / L_v} \quad (5.4)$$

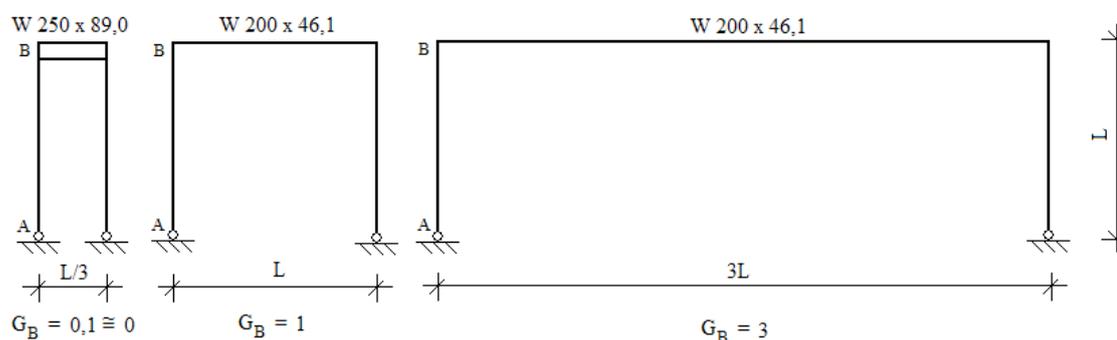


FIGURA 5. 17 – Alterações nas dimensões do perfil da viga e no vão do pórtico simples para variação do fator de rigidez relativo do nó B (G_B)

a) Curvas de interação para os pilares do pórtico simples de um andar

Os resultados da análise da resistência última dos pilares do pórtico simples, incluindo-se o efeito das tensões residuais, são avaliados através das curvas de interação traçadas na FIG. 5.18 e na FIG. 5.19, considerando-se a lei constitutiva da FIG. 5.10(a).

Os resultados mostram que a presença de tensão residual não tem contribuição significativa para o colapso do pórtico quando se analisam os valores últimos combinados das forças lateral e axial. Os resultados, idênticos aos obtidos por EL-ZANATY *et al.* (1980), também mostram que o efeito das tensões residuais diminui com a redução do nível da força axial e com o aumento da esbeltez.

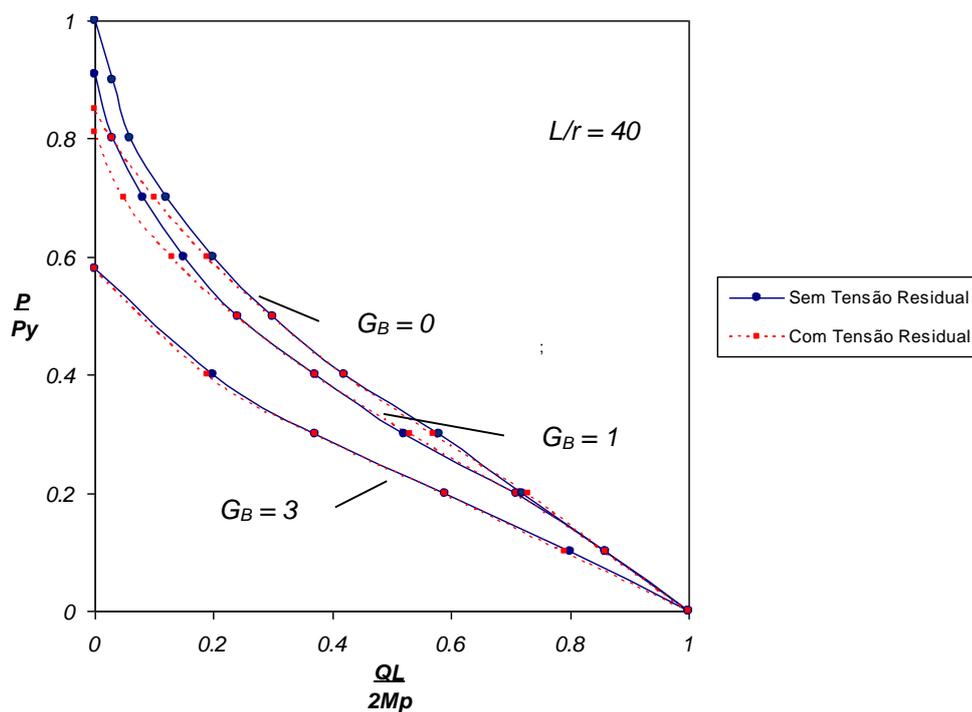


FIGURA 5. 18 – Curvas de interação nos pilares do pórtico simples - $L/r = 40$

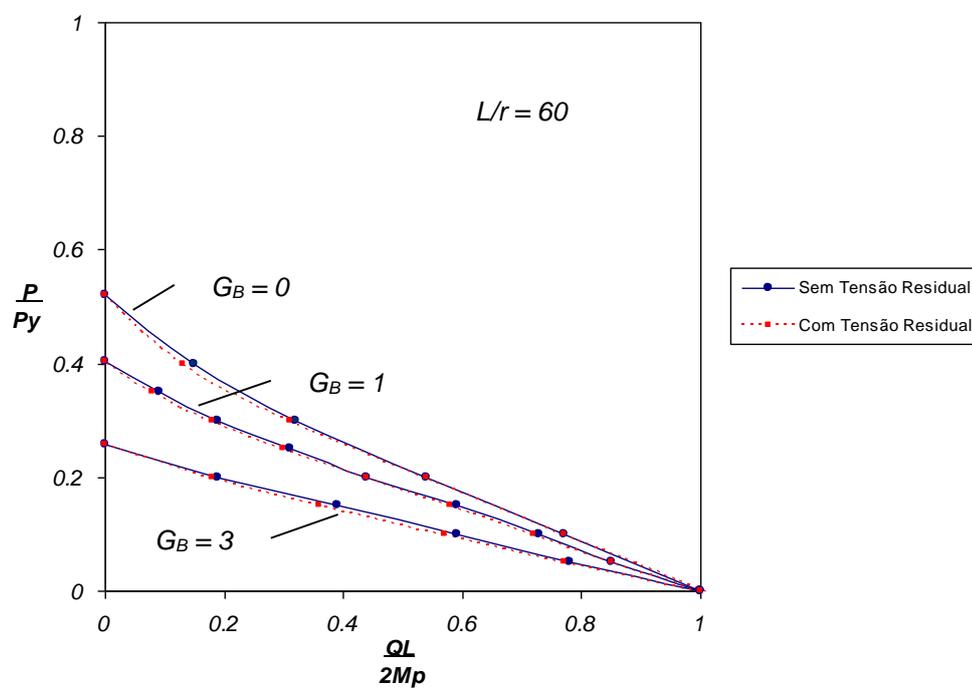


FIGURA 5. 19 – Curvas de interação nos pilares do pórtico simples - $L/r = 60$

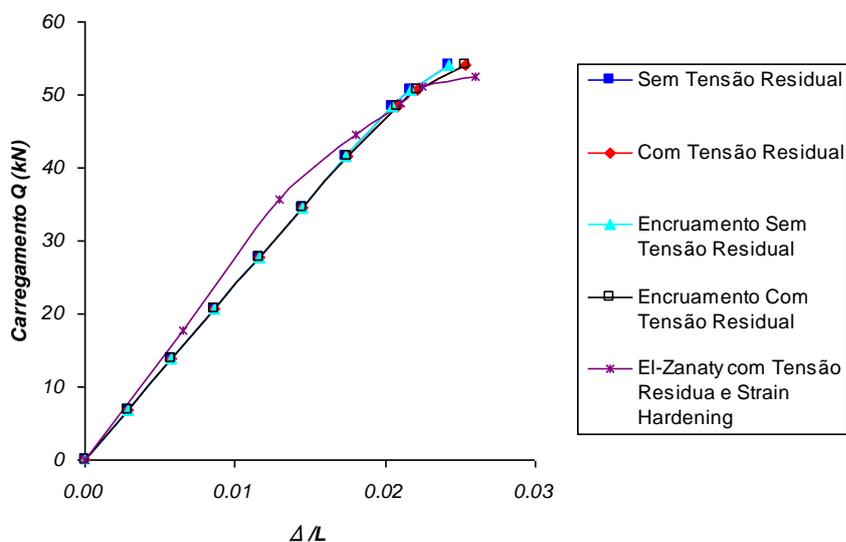


FIGURA 5. 20 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 40$ e $P = 0,15P_y$ – pórtico simples

c) Comportamento carga-declividade para o pórtico simples ($L/r = 40$, $P = 0,60P_y$ e $G_B = 1$)

Na TAB. 5.11 são apresentados os valores dos deslocamentos horizontais do nó B no topo do pórtico da FIG. 5.15 e das declividades máximas para o pilar AB, sendo $L/r = 40$, $P/P_y = 0,60$ e $G_B = 1$, considerando-se a influência das tensões residuais e do encruamento do aço. A FIG. 5.20 mostra os gráficos de Q x Δ/L , traçados a partir dos valores numéricos da TAB. 5.11.

Observa-se ainda em TAB. 5.11 que quando o valor de P/P_y é aumentado para 0,6, a tensão residual causa uma redução de aproximadamente 13% na resistência última do pórtico e um considerável aumento do deslocamento horizontal do nó B, conforme também é mostrado na FIG. 5.20.

Os resultados também mostram que o encruamento do aço não tem nenhum efeito tanto na resistência quanto no comportamento da estrutura.

TABELA 5. 11 – Valores dos deslocamentos horizontais do nó B e declividades máximas para o pilar AB com $L/r = 40$ e $P = 0,60P_y$ – pórtico simples

Q (kN)	Sem Tensão Residual		Com Tensão Residual		Encruamento sem Tensão Residual		Encruamento com Tensão Residual	
	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2,08	0,74569	0,00212	0,74569	0,00212	0,74569	0,00212	0,74569	0,00212
3,47	1,24282	0,00353	1,24282	0,00353	1,24282	0,00353	1,24282	0,00353
4,85	1,73994	0,00494	1,76006	0,00499	1,73994	0,00494	1,76006	0,00499
6,24	2,23706	0,00635	2,33461	0,00662	2,23706	0,00635	2,33461	0,00662
7,62	2,73416	0,00776	3,03433	0,00861	2,73416	0,00776	3,03433	0,00861
8,32	2,98271	0,00846	3,51091	0,00996	2,98271	0,00846	3,51091	0,00996
9,01	3,23124	0,00917	colapso	colapso	3,23124	0,00917	colapso	colapso
9,70	3,60477	0,01023			3,60477	0,01023		
10,40	colapso	colapso			colapso	colapso		

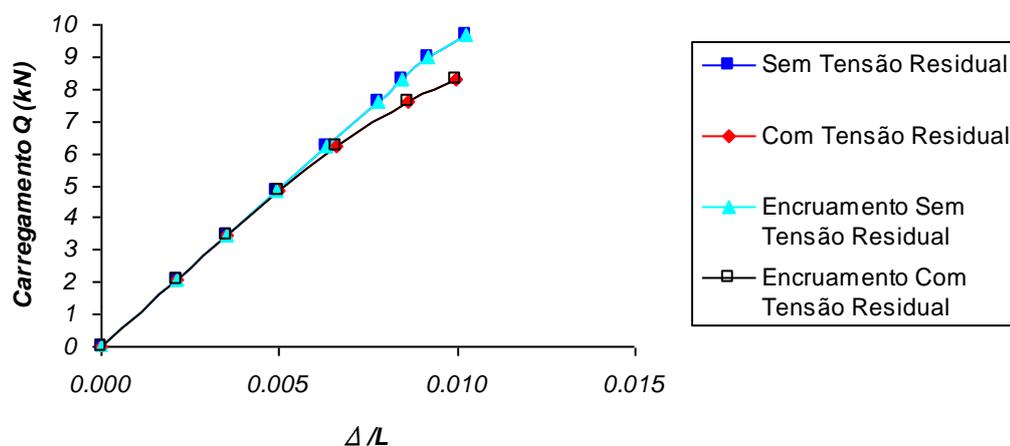


FIGURA 5. 21 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 40,0$ e $P = 0,60P_y$ – pórtico simples

d) Comportamento carga-declividade para o pórtico simples ($L/r = 60$, $P = 0,15P_y$ e $G_B = 1$)

Na TAB. 5.12 são apresentados os valores dos deslocamentos horizontais do nó B no topo do pórtico da FIG. 5.16 e das declividades máximas para o pilar AB, sendo $L/r = 60$, $P/P_y = 0,15$ e $G_B = 1$, considerando-se a influência das tensões residuais e do encruamento

do aço. A FIG. 5.22 mostra os gráficos de $Q \times \Delta/L$, traçados a partir dos valores numéricos da TAB. 5.12.

A TAB. 5.12 mostra também que agora, com o pilar do pórtico apresentando esbeltez elevada e submetido a força axial relativamente pequena, a tensão residual tem pequena influência na sua resistência última com redução de 1,7%, provocando apenas um ligeiro acréscimo de aproximadamente 6,4% no deslocamento do nó B, já na fase final do carregamento, conforme também é mostrado na FIG. 5.22.

Os resultados ainda mostram que o encruamento do aço não tem nenhum efeito tanto na resistência quanto no comportamento da estrutura.

TABELA 5. 12 – Valores dos deslocamentos horizontais do nó B e declividades máximas para o pilar AB com $L/r = 60$ e $P = 0,15P_y$ – pórtico simples

Q (kN)	Sem Tensão Residual		Com Tensão Residual		Encruamento sem Tensão Residual		Encruamento com Tensão Residual	
	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
4.62	3,02821	0,00573	3,02821	0,00573	3,02821	0,00573	3,02821	0,00573
9.24	6,05632	0,01146	6,05632	0,01146	6,05632	0,01146	6,05632	0,01146
13.86	9,08381	0,01718	9,08381	0,01718	9,08381	0,01718	9,08381	0,01718
18.48	12,11020	0,02291	12,12380	0,02294	12,11020	0,02291	12,12380	0,02294
23.10	15,13490	0,02863	15,41360	0,02916	15,13490	0,02863	15,41360	0,02916
25.41	17,04320	0,03224	17,60180	0,03330	17,04320	0,03224	17,60180	0,03330
26.33	18,01570	0,03408	19,16820	0,03626	18,01570	0,03408	19,16820	0,03626
26.80	18,68100	0,03534	colapso	colapso	18,68100	0,03534	colapso	colapso
27.26	colapso	colapso			colapso	colapso		

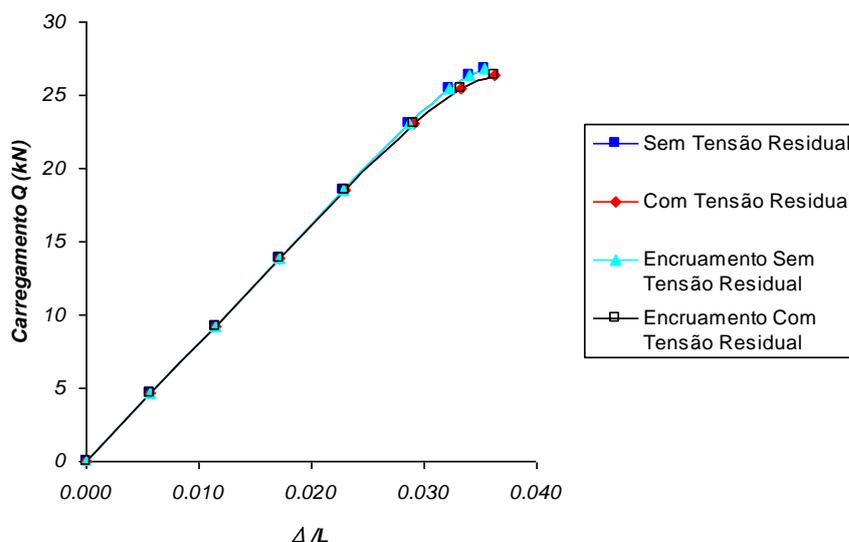


FIGURA 5. 22 – Curvas Q x Δ/L para $L/r = 60$ e $P = 0,15P_y$ – pórtico simples

e) Comportamento carga-declividade para o pórtico simples ($L/r = 60$, $P = 0,40P_y$ e $G_B = 1$)

São apresentados na TAB. 5.13 os valores dos deslocamentos horizontais do nó B no topo do pórtico da FIG. 5.16 e das declividades máximas para o pilar AB, sendo $L/r = 60$, $P/P_y = 0,40$ e $G_B = 1$, considerando-se a influência das tensões residuais e do encruamento do aço. A FIG. 5.23 mostra os gráficos de Q x Δ/L , traçados a partir dos valores numéricos da TAB. 5.13.

Observa-se ainda na TAB. 5.13 que quando o valor de P/P_y é aumentado para 0,4 no pilar esbelto, a tensão residual causa uma redução de aproximadamente 33 % na resistência última do pórtico, confirmando o efeito degenerativo que sua presença provoca na capacidade de carga nos casos de elevação da força normal nos elementos estruturais.

Também neste caso os resultados mostram que o encruamento do aço não tem nenhum efeito tanto na resistência quanto no comportamento da estrutura.

TABELA 5. 13 – Valores dos deslocamentos horizontais do nó B e declividades máximas para o pilar AB com $L/r = 60$ e $P = 0,40P_y$ – pórtico simples

Q (kN)	Sem Tensão Residual		Com Tensão Residual		Encruamento sem Tensão Residual		Encruamento com Tensão Residual	
	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L	Δ (cm)	Δ/L
0,00	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,04	1,25096	0,00355	1,25096	0,00355	1,25096	0,00355	1,25096	0,00355
0,08	2,50141	0,00710	2,50141	0,00710	2,50141	0,00710	2,50141	0,00710
0,12	3,75094	0,01064	3,75094	0,01064	3,75094	0,01064	3,75094	0,01064
0,16	4,99884	0,01419	4,99884	0,01419	4,99884	0,01419	4,99884	0,01419
0,20	6,24478	0,01772	6,24485	0,01772	6,24478	0,01772	6,24485	0,01772
0,24	7,48826	0,02125	colapso	colapso	7,48826	0,02125	colapso	colapso
0,28	8,72863	0,02477			8,72863	0,02477		
0,32	9,96539	0,02828			9,96539	0,02828		
0,36	colapso	colapso			colapso	colapso		

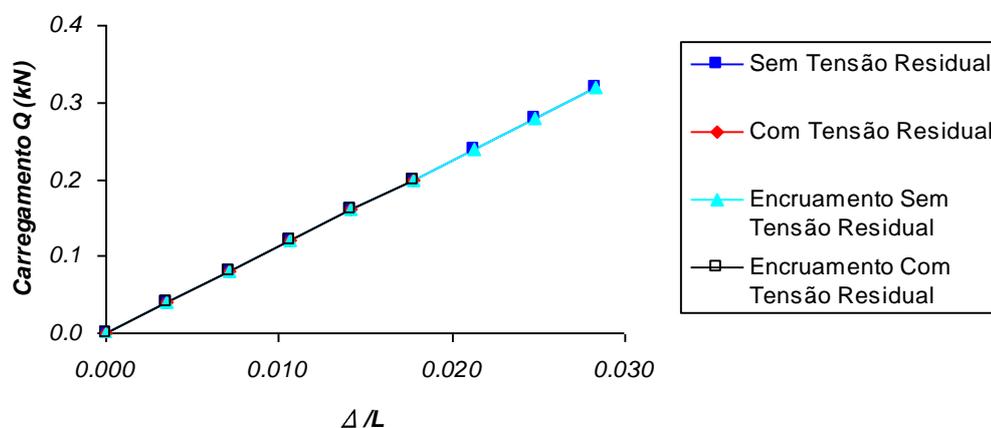


FIGURA 5. 23 – Curvas $Q \times \Delta/L$ para $L/r = 60$ e $P = 0,40P_y$ – pórtico simples

Fica claro então que as tensões residuais têm um efeito significativo sobre a resistência à carga lateral do pórtico, particularmente no caso de pilares com elevada força normal de compressão, conforme é mostrado resumidamente na TAB. 5.14. Ou seja, o efeito da tensão residual diminui quando o nível de força normal de compressão também decresce.

TABELA 5. 14 – Redução da carga lateral última - Q – pórtico simples

Relações de esbeltez	P/Py	Carga lateral última - Q (kN)		
		Sem TR	Com TR	Redução
$L/r = 40$	0,15	54,75	54,75	0,00
	0,60	10,40	9,01	13,40%
$L/r = 60$	0,15	27,26	26,80	1,69%
	0,40	0,36	0,24	33,33%

As figuras 5.18 a 5.19 também mostram que o efeito das tensões residuais decresce quando a relação de esbeltez do pilar aumenta.

Pode-se concluir através das TAB. 5.10 a 5.13 e das FIG. 5.20 a 5.23, que o encruamento do aço não tem nenhum efeito sobre a resistência à carga lateral última do pórtico.

5.3.3 Pórtico de múltiplos andares

A implementação computacional da formulação teórica desenvolvida no Capítulo 3 e do modelo constitutivo multilinear, apresentado na seção 4.4 deste trabalho, tem como objetivo final a Análise Inelástica Avançada de pórticos planos de andares múltiplos em aço. Desta forma, o pórtico plano de oito andares e um vão mostrado na FIG. 5.24 será usado para este propósito.

O comprimento das vigas e as alturas dos pilares são mostrados na FIG. 5.24. Na modelagem computacional as vigas foram divididas em 6 elementos e os pilares em 4 elementos de igual comprimento, num total de 112 elementos e 106 nós. A TAB. 5.15 apresenta os perfis adotados para cada pilar e viga do pórtico, de acordo com a numeração exibida na FIG. 5.24.

Este pórtico foi analisado por KORN e GALAMBOS (1968), EL-ZANATY *et al.* (1980) e LAVALL (1996), estando submetido às forças concentradas, também mostradas na FIG. 5.24, correspondentes à carga de serviço que cresce proporcionalmente até o colapso. Visando ao estudo do efeito das tensões residuais e do encruamento do aço no comportamento estrutural, novamente é utilizada a distribuição linear das tensões

TABELA 5. 15 – Perfis usados nos pilares e vigas – pórtico de andares múltiplos

pilares/vigas	Perfis			pilares/vigas	Perfis		
1	W	150	x 23,1	9	W	250	x 89,2
2	W	200	x 25,3	10	W	250	x 98,1
3	W	200	x 35,7	11	W	310	x 46,1
4	W	200	x 41,6	12	W	360	x 50,6
5	W	200	x 59,5	13	W	360	x 63,9
6	W	250	x 31,2	14	W	360	x 78,8
7	W	250	x 43,1	15	W	360	x 101,1
8	HP	250	x 66,9				

O estudo dos efeitos das tensões residuais e do encruamento do aço no comportamento estrutural do pórtico de oito andares será feito com base no gráfico da FIG. 5.25, que relaciona o fator de carga (λ) com a razão entre o deslocamento horizontal do nó C, no topo, pela altura total do pórtico, (Δ_c/h).

TABELA 5. 16 – Valores dos deslocamentos horizontais do nó C (Δ_c) em função do fator de carga (λ) – pórtico de andares múltiplos

Fator de carga λ	Sem Tensão Residual		Com Tensão Residual		Encruamento sem Tensão Residual		Encruamento com Tensão Residual	
	Δ_c (cm)	Δ_c/h	Δ_c (cm)	Δ_c/h	Δ_c (cm)	Δ_c/h	Δ_c (cm)	Δ_c/h
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,2	1,26496	0,00052	1,26496	0,00052	1,26496	0,00052	1,26496	0,00052
0,6	3,84236	0,00158	3,84236	0,00158	3,84236	0,00158	3,84236	0,00158
1,0	6,48513	0,00266	6,48513	0,00266	6,48513	0,00266	6,48513	0,00266
1,4	9,19587	0,00377	9,19587	0,00377	9,19587	0,00377	9,19587	0,00377
2,0	13,39550	0,00549	13,45480	0,00552	13,39550	0,00549	13,45480	0,00552
2,2	14,86050	0,00609	15,04460	0,00617	14,86050	0,00609	15,04460	0,00617
2,4	16,70240	0,00685	16,90710	0,00693	16,70240	0,00685	16,90710	0,00693
2,5	17,89760	0,00734	18,10190	0,00742	17,89760	0,00734	18,10190	0,00742
2,6	19,30110	0,00792	19,53380	0,00801	19,30110	0,00792	19,53380	0,00801
2,7	21,09220	0,00865	21,25460	0,00872	21,09220	0,00865	21,25460	0,00872
2,8	23,20450	0,00952	23,44640	0,00962	23,20450	0,00952	23,44640	0,00962
2,9	colapso	colapso	colapso	colapso	colapso	colapso	27,18580	0,01115
3,0							colapso	colapso

As curvas da FIG. 5.25 são traçadas com base nos valores apresentados na TAB. 5.16, onde constam os deslocamentos horizontais do nó C do topo do pórtico, Δ_C , em função do fator de carga λ , para as diversas considerações de tensões residuais e do encruamento do aço.

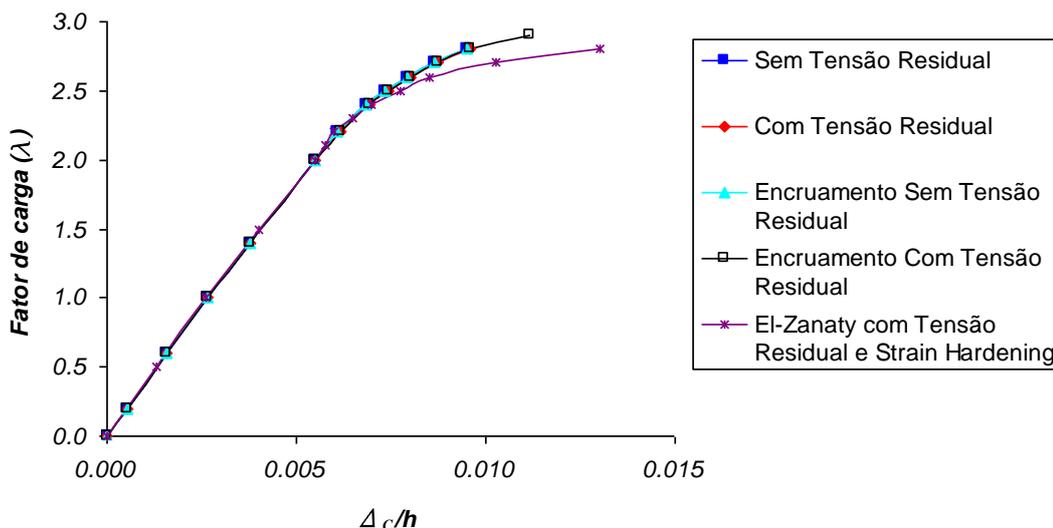


FIGURA 5. 25 – Curvas $\lambda \times \Delta_C/h$ – pórtico múltiplos andares

Os resultados indicam que o efeito do encruamento do aço na resistência estrutural tende a ser mais significativo para pórticos com maior número de graus de hiperstaticidade do que para os pórticos simples. Neste exemplo, o encruamento do aço foi responsável por um acréscimo de 3,5% na carga de colapso. Segundo EL-ZANATY *et al.* (1980), para pórticos mais complexos, o aumento na carga última pode variar de 5 a 10%.

Isto ocorre devido ao grande número de seções transversais a serem plastificadas até que seja alcançada a carga de colapso da estrutura. Quando a plastificação se desenvolve nas últimas seções críticas, as deformações naquelas seções que primeiramente alcançaram a plastificação total podem ter atingido e superado o valor da deformação de encruamento. Isso não ocorre com os pórticos de um andar e um vão porque as seções críticas desenvolvem a plastificação sem que haja tempo para que as deformações atinjam a deformação de encruamento.

Em relação às tensões residuais pode-se observar que estas têm um efeito limitado sobre a resistência última dos pórticos. Contudo, elas têm um ligeiro efeito sobre a curva carga-deformação a partir do início da plastificação até o colapso. Acredita-se que o efeito de tensões residuais em pórticos de andares múltiplos mais complexos se tornará mais significativo com o aumento das cargas axiais de compressão nos pilares.

Na análise elastoplástica em teoria de segunda ordem feita por KORN e GALAMBOS (1968) não foram consideradas as tensões residuais e o fator de carga λ encontrado para a situação de colapso foi $\lambda = 2,816$ com $\Delta_C = 26,237$ cm.

Complementando o estudo do caso, é apresentada na FIG. 5.25 a distribuição final da plastificação em seções das barras do pórtico para a iteração imediatamente anterior à carga de colapso. Uma vez que a formulação e a implementação computacional permitem acompanhar a propagação do escoamento na seção transversal, é possível informar os nós onde já havia se iniciado a formação da rotula plástica e a porcentagem da seção já comprometida pelo processo. Pode-se observar que a plastificação no pórtico indica que a estrutura falha segundo mecanismos de nó no lado direito dos andares 2, 3, 4 e 5. Este comportamento é similar àqueles encontrados por KORN e GALAMBOS (1968) e LAVALL (1996).

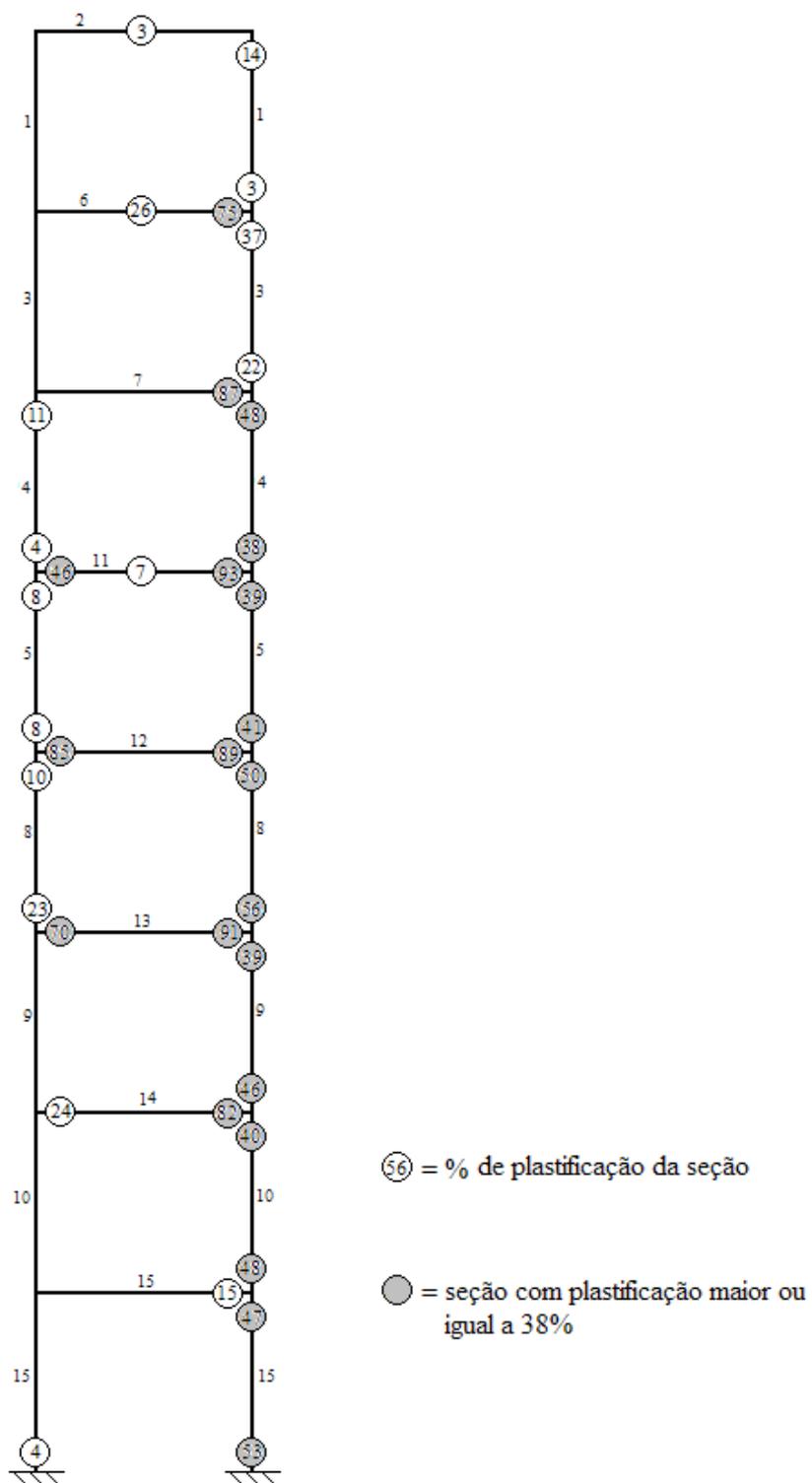


FIGURA 5. 26 – Formação das rótulas plásticas considerando tensões residuais e o strain hardening – colapso do pórtico múltiplos andares

6

CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi descrever uma formulação geometricamente exata para análise não-linear física e geométrica de pórticos planos de aço, via Método dos Elementos Finitos, utilizando os conceitos da plasticidade distribuída, visando sua aplicação como um método de Análise Avançada. Foram formulados elementos com ligações rígido-rotuladas e realizado o estudo e a implementação do modelo constitutivo multilinear para análise incremental das tensões e deformações no comportamento elasto-plástico.

O modelo desenvolvido é capaz de considerar os efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$ nos problemas de instabilidade; avaliar a estabilidade e a resistência das barras da estrutura individualmente e de forma global; descrever os efeitos da distribuição da plastificação ao longo das barras e das seções transversais e avaliar os efeitos isolados ou combinados das tensões residuais e do encruamento do aço, apresentando resultados coerentes com aqueles obtidos pelos modelos clássicos e pela literatura técnica disponível. Assim sendo, a análise realizada a partir da teoria inelástica de segunda ordem, considerando a plasticidade distribuída e provida dessas atribuições, pode ser classificada como Análise Avançada.

As contribuições principais deste trabalho foram:

- 1) A dedução consistente das matrizes de rigidez tangente, elástica e elastoplástica, para elementos com uma extremidade rotulada e outra rígida, explicitando-as analiticamente, de forma simples;
- 2) Adicionar à versão original do programa computacional apresentado por LAVALL (1996), a capacidade de analisar problemas com ligações articuladas entre as barras da estrutura, além de considerar diversas leis constitutivas para o aço baseando-se no modelo multilinear;
- 3) Mostrar a potencialidade da formulação na solução de problemas não-lineares físicos e geométricos, considerando a distribuição da plasticidade na seção transversal, bem como o comportamento das estruturas em situação de carga e descarga;
- 4) Estudar o comportamento carga-deformação e a resistência última dos pórticos submetidos a esforços combinados, sob influência das tensões residuais auto-equilibradas e do encruamento do aço.

O programa desenvolvido neste trabalho mostrou-se bastante eficiente na análise dos exemplos apresentados, confirmando a expectativa da grande potencialidade da formulação adotada. Os efeitos das tensões residuais e do encruamento do aço puderam ser avaliados para diferentes condições de carregamento e esbeltez dos elementos estruturais.

Inicialmente, no exemplo da estrutura hiperestática simples com três barras foi testada a implementação das leis constitutivas multilineares, possibilitando a simulação adequada para diferentes curvas $\sigma \times \varepsilon$ para o aço, o que permitiu estudar as variações que as propriedades do material provocam no comportamento carga-deformação e na resistência última das estruturas.

O exemplo da viga em balanço submetida à flexão normal composta mostrou que as tensões residuais têm efeito significativo na resistência última apenas para barras

submetidas a elevados valores de força normal de compressão. Os resultados também demonstraram que o encruamento do aço não tem efeito sobre a resistência última da viga, exceto para o caso de baixa esbeltez e baixo valor de força normal de compressão, quando o efeito é pronunciado.

No caso do pórtico simples de um andar e um vão, observou-se que as tensões residuais têm um efeito significativo sobre a resistência à carga lateral do pórtico, particularmente no caso de pilares com elevada força normal de compressão, ou seja, o efeito da tensão residual aumenta quando o nível de força normal de compressão cresce. Verificou-se também que o efeito das tensões residuais decresce quando a esbeltez do pilar aumenta. Concluiu-se ainda que o encruamento do aço não tem nenhum efeito sobre a resistência à carga lateral última do pórtico.

Já com relação ao pórtico de andares múltiplos, com oito andares e um vão, os resultados indicaram que o efeito do encruamento do aço na resistência estrutural tende a ser mais significativo para pórticos com maior número de graus de hiperstaticidade do que para os pórticos simples. Em relação às tensões residuais pode-se observar que estas têm um efeito limitado sobre a resistência última dos pórticos, apresentando apenas um ligeiro efeito sobre a curva carga-deformação a partir do início da plastificação até o colapso. Acredita-se que o efeito de tensões residuais em pórticos de andares múltiplos mais complexos torna-se mais significativo com o aumento das cargas axiais de compressão nos pilares.

Ao final deste trabalho surgem algumas propostas para desenvolvimento em estudos posteriores, uma vez que algumas lacunas encontradas devem ser preenchidas. Assim, a formulação pode ser estendida para se considerar os efeitos das deformações por cisalhamento, os efeitos das ligações semi-rígidas, a análise dinâmica e o estudo da instabilidade lateral com torção ao se estender a formulação para o caso tridimensional. A implementação de outros algoritmos de solução numérica e métodos automáticos de incremento de cargas podem ser medidas eficazes para a melhoria da eficiência do programa.

Introduzindo-se estas modificações, acredita-se que a formulação e o programa desenvolvidos neste trabalho estarão cada vez mais inseridos no modelo de *Análise Inelástica Avançada*, que calibrados e validados corretamente, permitirão sua aplicação em estudos detalhados do comportamento estrutural, na verificação da precisão de métodos simplificados de análise, na comparação com resultados experimentais, na obtenção de curvas e ábacos de uso prático e nos estudos de projetos especiais. Conforme afirmam CHEN *et al.* (1996), os métodos de *Análise Inelástica Avançada* representam o estado da arte em projetos para os engenheiros estruturais no século vinte e um.

BIBLIOGRAFIA

ABNT (1986): *Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios. Método dos Estados Limites - NBR 8800/86* - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Rio de Janeiro, 2.ed.

ABNT (2006): *Projeto de Revisão da Norma Brasileira para Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios - NBR 8800/06* - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Versão setembro 2006, p. 253.

ALMEIDA, A. C. B. (2006): *Análise Inelástica de Pórticos Planos Considerando a Plasticidade Distribuída e o Efeito das Tensões Residuais nos Perfis Estruturais de Aço*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 165.

ALPSTEN, G. A. AND TALL, L. (1970): *Residual Stresses in Heavy Welded Shapes*. *Welding Journal/ AWS*, p.93-105.

ANSI/ AISC 360-05 (2005): *Specification for Structural Steel Buildings*. Chicago, Illinois: American Institute of Steel Construction, AISC, INC.

BATTERMAN, R. H. AND JOHNSTON, B. G. (1967): *Behavior and Maximum Strength of Metal Columns*. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v. 93, n. St 2, p. 205-230.

BEEDLE, L. S. AND TALL, L. (1960): *Basic Column Strength*. *Journal of the Structural Division (ASCE)*, v. 86, n. St 7, p. 139-173.

BEER, H. AND SCHULZ, G. (1970): *Bases théoriques des courbes européennes de flambement*. *Construction Métallique*, n. 3, p. 37-57.

BJORHOVDE, R. (1988): *Columns: from Theory to Practice*. *Engineering Journal (AISC)*, v. 25, n. 1, 1st Quarter, p. 21-34.

BJORHOVDE, R., BROZZETTI, J., ALPSTEN, G. A. AND TALL, L. (1972): Residual Stresses in Thick Welded Plates. *Welding Journal (AWS)*, v.51, n. 51, p. 329-405.

CHEN, W. F. AND LUI, E. M. (1987): *Structural Stability – Theory and Implementation*. New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc., p. 490.

CHEN, W. F. AND TOMA, S. (1994): *Advanced Analysis of Steel Frames: Theory, Software, and Applications*. Boca Raton: CRC-Press, p. 384.

CHEN, W. F., GOTO, Y. AND LIEW, J. Y. R. (1996): *Stability Design of Semi-Rigid Frames*. New York: John Wiley e Sons, Inc., p. 468.

ECCS (1976): *Manual on the Stability of Steel Structures - EUROPEAN CONVENTION FOR CONSTRUCTIONAL STEELWORK (ECCS)*. 2° ed., Brussels.

EL-ZANATY, M. H., MURRAY, D. W. AND BJORHOVDE, R. (1980): *Inelastic Behavior of Multistory Steel Frames*. Department of Civil Engineering, University of Alberta.

FERREIRA, R. P. (1999): *Uma Formulação Consistente para Análise Elastoplástica de Estruturas de Aço*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 162.

GALAMBOS, T. V. (1988): *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, 4th Edition, John Willey & Sons.

KANCHANALAI T. (1977): *The Design and Behavior of Beam-columns in Unbraced Steel Frames*. AISI Project N°. 189, Report N°. 2, Civil Engineering/Structures Research Laboratory, University of Texas, Austin (TX), p. 300.

KIM, S. E. AND CHEN, W. F. (1996a): *Practical Advanced Analysis for Braced Steel Frame Design*. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 122(11), p. 1266-1274.

KIM, S. E. AND CHEN, W. F. (1996b): *Practical Advanced Analysis for Unbraced Steel Frame Design*. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 122(11), p. 1259-1265.

KORN, A. E. AND CHEN, W. F. (1996b): *Practical Advanced Analysis for Unbraced Steel Frame Design*. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 122(11), p. 1259-1265.

KORN, A. AND GALAMBOS, T. V. (1968): Behavior of Elastic-Plastic Frames. Journal of the Structural Division, ASCE, v. 94, n. St 5, p. 1119-1142.

LAVALL, A. C. C. (1996): Uma Formulação Teórica Consistente para a Análise Não-Linear de Pórticos Planos pelo Método dos Elementos Finitos Considerando Barras com Imperfeições Iniciais e Tensões Residuais nas Seções Transversais. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos (USP), p. 265.

LIEW, J. Y. R., WHITE, D. W. AND CHEN, W. F. (1993a): Second-Order Refined Plastic Hinge Analysis of Frame Design: Part I. Journal of Structural Engineering, ASCE, 119 (11), p.3196-3216.

LIEW, J. Y. R., WHITE, D. W. AND CHEN, W. F. (1993B): Second-Order Refined Plastic Hinge Analysis of Frame Design: Part 2. Journal of Structural Engineering, ASCE, 119 (11), p.3217-3237.

MACHADO, F. C. S. E SILVEIRA, R. A. M. (2005): Formulação Inelástica de Segunda Ordem para Sistema Estruturados em Aço. REM – Revista da Escola de Minas. Vol. 58 n° 3. Ouro Preto.

MARTHA, L. F (2002): Ftool: Um Programa Gráfico-Interativo para Ensino de Comportamento de Estruturas. PUC-Rio - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. Rio de Janeiro.

MC FALLS, R. K. AND TALL, L. (1969): A study of Welded Columns Manufactured from Flame-Cut Plates. Welding Journal/AWS, p.141-153.

OWEN, D. R. J. AND HINTON, E. (1980): Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice. Swansea, U. K. Pineridge Press Ltd.

PIMENTA, P. M. (1986): Análise Não-Linear de Pórticos Planos. Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8611. São Paulo, EPUSP.

PIMENTA, R. J. (1997): Proposição de uma Curva de Flambagem para Perfis I Soldados formados por Chapas Cortadas a Maçarico. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 149.

REIS, A. E CAMOTIN, D. (2001): Estabilidade Estrutural. Editora Mc Graw Hill de Portugal, p. 470.

SALMON, C. G. AND JOHNSON, J. E. (1996): Steel Structures – Design and Behavior. 4th Edition, Harper Collins Publishers Inc.

SILVA, R. G. L. E LAVALL, A. C. C. (2005): Formulação Geral para Análise Avançada de Pórticos de Aço considerando a Plasticidade Distribuída. XXVI CILANCE – Iberian Latin American Congresso n Computacional Methods in Engineering, 2005, Guarapari – ES. Anais do XXVI CILANCE – v.1, p. 1-15.

WENG, C. C. AND PEKOZ, T. (1950): Residual Stresses in Cold-Formed Steel Members. Journal of Structural Engineering (ASCE), v. 116, n.6, p.1611-1625.