

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

TESE DE DOUTORADO

**ANÁLISE INELÁSTICA AVANÇADA DE PÓRTICOS PLANOS DE
AÇO CONSIDERANDO AS INFLUÊNCIAS DO CISALHAMENTO
E DE LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS**

AUTORA: RENATA GOMES LANNA DA SILVA
ORIENTADOR: PROF. DR. ARMANDO CESAR CAMPOS LAVALL

2010

**ANÁLISE INELÁSTICA AVANÇADA DE PÓRTICOS PLANOS DE AÇO
CONSIDERANDO AS INFLUÊNCIAS DO CISALHAMENTO E DE LIGAÇÕES
SEMIRRÍGIDAS**

Renata Gomes Lanna da Silva


UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"ANÁLISE INELÁSTICA AVANÇADA DE PÓRTICOS PLANOS DE AÇO
CONSIDERANDO AS INFLUÊNCIAS DO CISALHAMENTO E DE
LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS"**


Renata Gomes Lanna da Silva

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Doutor em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:



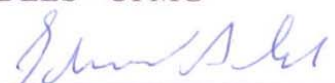
Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall
DEES - UFMG - (Orientador)



Prof. Dr. Gilson Queiroz
DEES-UFMG



Prof. Dr. Ricardo Hallal Fakury
DEES - UFMG



Prof. Dr. Eduardo de Miranda Batista
COPPE - UFRJ



Prof. Dr. Maximiliano Malite
EESC - USP

Belo Horizonte, 15 de outubro de 2010

*“Eu aprendi que todos querem viver no topo da
montanha, mas toda felicidade e crescimento ocorre
quando você está escalando-a.”*

William Shakespeare

*Ao meu marido Leonardo e aos meus filhos Leticia e Lucas,
Aos meus pais José e Maria da Glória,
Aos meus sogros Raimundo e Magna,
Dedico com carinho este trabalho.*

AGRADECIMENTOS

*“Confia ao Senhor as tuas obras,
e terão bom êxito teus projetos”*
Livro dos Provérbios

À Deus por mais um projeto concluído.

Ao Prof. Dr. Armando Cesar Campos Lavall, pela orientação competente e elevado profissionalismo acadêmico. Pela dedicação, incentivo, apoio e amizade.

Aos meus pais, José e Maria da Glória, verdadeiros orientadores e exemplos de vida, de humildade, determinação e fé. Por tudo o que fizeram e ainda fazem por mim, pela educação e princípios que me fizeram chegar aqui.

Ao meu marido Leonardo, pelo companheirismo, compreensão e apoio incondicional. Pelo seu amor e por estar sempre ao meu lado, ajudando-me a escolher o melhor caminho.

Aos meus filhos Letícia e Lucas pela compreensão nas minhas ausências, pelo amor e carinho constantes. Sem eles minha vida não seria completa.

Ao meu sogro Raimundo, grande incentivador e à minha sogra sempre generosa, que me acolheram como filha, sou grata por tudo que fizeram por mim durante todos estes anos.

À minha avó Maria, ao tio Renato, aos meus irmãos Roberta e Pitágoras e aos meus cunhados Raigna, Sydnei, Juliana e Vladimir pelo apoio e palavras de incentivo. Aos meus sobrinhos Lívia, Júlia, Bruna, Rafael, Bárbara e Sofia, pela alegria nos momentos difíceis.

Aos professores e funcionários do Departamento de Estruturas da UFMG, pela atenção, amizade e colaboração durante o curso de Doutorado.

Aos colegas da Pós-Graduação, especialmente ao Reinaldo e ao Rodrigo, pela colaboração e ajuda generosa.

À Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais, FAPEMIG, pelo suporte financeiro.

À todas as pessoas que contribuíram direta e indiretamente para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS	i
LISTA DE FIGURA	xi
LISTA DE TABELA	xviii
ABSTRACT	xxii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Objetivos	7
1.3 Organização do Texto	8
2 VISÃO GERAL SOBRE A ANÁLISE AVANÇADA	11
2.1 Considerações Iniciais	11
2.2 Tipos de Análise	15
2.2.1 Análise Elástica de 1ª Ordem	15
2.2.2 Análise Elástica de 2ª Ordem	15
2.2.3 Análise Inelástica de 1ª Ordem	16
2.2.4 Análise Inelástica de 2ª Ordem	16
2.3 Métodos de Análise Avançada	18
2.3.1 Método da Rótula Plástica Refinada	19
2.3.2 Método da Zona Plástica ou Plasticidade Distribuída	21
2.4 Atributos para o Modelo de Análise Avançada	23
3 FORMULAÇÃO TEÓRICA PARA ANÁLISE INELÁSTICA DE PÓRTICOS PLANOS CONSIDERANDO A TEORIA DE TIMOSHENKO	26
3.1 Considerações Iniciais	26
3.2 Formulação Numérica	28
3.2.1 Deformações e Tensões	29
3.2.2 Relações Constitutivas	34
3.2.3 Definição dos Sistemas de Coordenadas e Graus de Liberdade	39
3.2.4 Teoria Estrutural	48

3.2.5 Cinemática do Elemento: Campo de Deslocamento e Campo de Deformação	48
3.2.6 Equações de Equilíbrio do Elemento.....	53
3.2.7 Interpolação	57
3.2.8 Valor Médio de Deformação	60
3.2.8.1 Condição de Extremidades: Rígido-Rígido	60
3.2.8.2 Condição de Extremidades: Rígido-Rotulado.....	60
3.2.8.3 Condição de Extremidades: Rotulado- Rígido.....	61
3.2.9 Expressões Analíticas para a Matriz de Rigidez Tangente	61
3.2.9.1 Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva e Geométrica em Regime Elástico Linear	64
3.2.9.2 Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva e Geométrica em Regime Elastoplástico.....	67
3.3 Aspectos da Implementação.....	69
3.3.1 Método de Newton-Raphson Puro.....	70
3.3.2 Critério de Convergência.....	72
3.3.3 Modelo Constitutivo	73
3.3.4 Modelo de Fatias.....	76
3.3.5 Tensões Residuais	78
3.3.6 Descrição das Sub-Rotinas	80
3.4 Exemplos Numéricos	83
3.4.1 Viga em Balanço Sujeita a Carga Uniformemente Distribuída.....	83
3.4.2 Viga Biapoiada Sujeita a Carga Uniformemente Distribuída ao Longo do Vão.....	86
3.4.3 Viga Biapoiada Sujeita a um Momento Aplicado no Apoio A.....	88
3.4.4 Viga com a Extremidade <i>A</i> Simplesmente Apoiada e a Extremidade <i>B</i> Engastada.....	90
3.4.5 Viga Biengastada com Carga Concentrada Aplicada a uma Distância <i>a</i> da Extremidade Esquerda	91
3.4.6 Pilares Comprimidos Axialmente.....	93
4 LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS.....	97
4.1 Revisão Bibliográfica.....	97

4.2 Comportamento das Ligações Semirrígidas	106
4.3 Modelagem das Ligações Semirrígidas	111
4.3.1 Modelagem Analítica	111
4.3.1.1 Modelo Polinomial de Frye-Morris	112
4.3.1.2 Modelo B-spline Cúbico	113
4.3.1.3 Modelo de Três Parâmetros de CHEN e KISHI (1989)	114
4.3.1.4 Modelo de Quatro Parâmetros de KISHI et al. (2004)	115
4.3.2 Modelagem Experimental	117
4.3.3 Modelagem mecânica	117
4.3.4 Modelagem numérica	118
4.4 Classificação das Ligações	118
4.4.1 Classificação de BJORHOVDE et al. (1990)	119
4.4.2 Classificação segundo o Eurocode 3 - EN 1993-1-8: 2005	121
4.4.3 Classificação segundo o ANSI/AISC: 2005	123
4.4.4 Classificação segundo a ABNT NBR 8800:2008	124
4.5 Características das Ligações e Procedimentos de Análise	125
4.5.1 Características e Descrição do Comportamento das Ligações	125
4.5.2 Procedimentos de Análise	128
4.5.2.1 Método da “Linha de Viga” para Avaliação da Rigidez de Ligações Semirrígidas	128
4.5.2.2 Métodos Numéricos Considerando as Ligações Semirrígidas ...	132
4.5.3 Aspectos da Implementação da Ligação Semirrígida	135
4.6 Exemplos numéricos	141
4.6.1 Análise Elástica em Teoria de 2ª Ordem de Estruturas com Ligações Semirrígidas	142
4.6.1.1 Viga com Carga Distribuída	142
4.6.1.2 Pórtico Não contraventado de Um Andar e Um Vão	145
4.6.1.3 Pórtico Não contraventado de 2 Andares e 1 Vão	150
4.6.1.4 Pórtico Não contraventado de 4 Andares e 2 Vãos	155
4.6.2 Análise Inelástica em Teoria de 2ª Ordem de Estrutura com Ligações Semirrígidas	160
4.6.2.1 Pórtico Contraventado de Dois Andares e Um Vão	160

4.6.2.2	Pórtico Não contraventado de Dois Andares e Um Vão.....	167
4.6.2.3	Pórtico Não contraventado de Dois Andares e Dois Vãos.....	172
5	ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE PÓRTICOS SEMIRRÍGIDOS CONFORME A NBR	
8800	USANDO A ANÁLISE AVANÇADA	180
5.1	Considerações Iniciais	180
5.2	Aspectos de Projeto da NBR 8800 e Regras para a Análise Avançada.....	182
5.2.1	Combinação de Ações para o Método dos Estados-limites.....	182
5.2.2	Lei Constitutiva para o Aço.....	185
5.2.3	Seções Transversais Compactas.....	187
5.2.4	Imperfeições Geométricas	188
5.2.5	Instabilidade lateral	188
5.2.6	Não linearidades geométrica, do material e da ligação.....	188
5.3	Resistência à Tração – Lei Constitutiva para Projeto.....	189
5.3.1	Condições Específicas para o Dimensionamento de Barras Submetidas à	
Tração.....		189
5.3.2	Lei Constitutiva Característica	190
5.3.3	Definição da Lei Constitutiva para Projeto	194
5.4	Resistência à Compressão	195
5.4.1	Condições Específicas para o Dimensionamento de Barras Submetidas à	
Compressão.....		195
5.4.2	Influência das Tensões Residuais e das Imperfeições Geométricas	
Iniciais na Resistência de Pilares Axialmente Comprimidos		196
5.4.3	Curva de Resistência Última para a Análise Avançada	201
5.4.4	Resistência Máxima de Projeto para Pilares	207
5.4.5	Exemplo Numérico para Dimensionamento à Compressão	212
5.5	Resistência à Flexão	214
5.5.1	Condições Específicas para o Dimensionamento de Barras Submetidas à	
Flexão Simples		214
5.5.2	Comportamento Momento Fletor x Curvatura na Flexão Pura.....	215
5.5.3	Exemplo Numérico para Dimensionamento à Flexão.....	218
5.6	Solicitações Combinadas	219

5.6.1 Condições Específicas para o Dimensionamento de Barras Submetidas aos Esforços Solicitantes Combinados.....	219
5.6.2 Resistência Plástica da Seção Transversal.....	221
5.6.3 Comparação entre as Curvas de Interação da Análise Avançada e da NBR 8800: 2008.....	225
5.6.4 Exemplo Numérico para Dimensionamento ao Esforço Combinado de Força Normal e Momento Fletor.....	228
5.7 Ligações Semirrígidas.....	231
5.8 Exemplos de Projeto.....	231
5.8.1 Pórtico de Dois Andares e Um Vão.....	232
5.8.2 Pórtico de Onze Andares e Dois Vãos.....	244
6 CONCLUSÕES.....	255
6.1 Considerações Finais.....	255
6.2 Conclusões.....	257
6.3 Sugestões para Trabalhos Futuros.....	261
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA.....	262
A ESTUDO ANALÍTICO DE BARRAS CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DO CISALHAMENTO ATRAVÉS DA TEORIA DE TIMOSHENKO.....	273
B DIMENSIONAMENTO DAS ESTRUTURAS.....	279
B.1 Dimensionamento à Tração e à Compressão.....	279
B.2 Dimensionamento à Flexão.....	284
B.3 Dimensionamento ao Esforço Combinado de Força Normal e Momento Fletor.....	286
B.4 Dimensionamento ao Esforço Combinado de Força Normal e Momento Fletor para Pórtico de Projeto.....	290

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas Minúsculas

- a, b - Nós do elemento nas extremidades da esquerda e direita, respectivamente
- b_f - Largura da mesa do perfil “I”
- b_i - Largura da fatia i
- d - Altura total do perfil “I”
- $d\varepsilon$ - Acréscimo de deformação
- $d\varepsilon^e$ - Acréscimo de deformação elástica
- $d\varepsilon^p$ - Acréscimo de deformação plástica
- $d\sigma$ - Acréscimo de tensão normal
- $d\tau$ - Acréscimo de tensão cisalhante
- $dS_c, d\overline{S}_c$ - Comprimento da fibra situada a uma distância y_r do eixo da barra e de uma fibra situada neste eixo, respectivamente, na configuração corrigida
- $dS_r, d\overline{S}_r$ - Comprimento da fibra situada a uma distância y_r do eixo da barra e de uma fibra situada neste eixo, respectivamente, na configuração de referência
- $d\overline{u}_c, d\overline{v}_c$ - Deslocamentos infinitesimais, axial e transversal, na configuração deformada
- d - Altura da alma do perfil “I”
- dV_r - Elemento de volume na configuração de referência
- dx_r - Distância entre duas seções transversais ortogonais ao eixo longitudinal
- f - Fator de forma da seção transversal
- f_u - Resistência à ruptura do aço
- f_y - Resistência ao escoamento do aço
- f_{ys} - Resistência ao escoamento superior do aço
- f_{yd} - Resistência de cálculo ao escoamento do aço
- f_{yk} - Resistência característica ao escoamento do aço
- f_{ud} - Resistência de cálculo à ruptura do aço

f_{uk}	- Resistência característica à ruptura do aço
g	- Parâmetro de Cisalhamento
h	- Altura da seção transversal
k	- Rigidez, parâmetro geral
k_c	- Fator de forma de uma seção transversal
k_{ij}	- Coeficientes da matriz de rigidez tangente do elemento, onde $i, j = 1, \dots, 6$
\mathbf{k}	- Matriz de rigidez tangente global do sistema
$\bar{\mathbf{k}}_G$	- Forma local da matriz de rigidez geométrica no regime elástico em coordenadas cartesianas
$\bar{\mathbf{k}}_G^{ep}$	- Forma local da matriz de rigidez geométrica no regime elastoplástico em coordenadas cartesianas
$\bar{\mathbf{k}}_M$	- Forma local da matriz de rigidez constitutiva no regime elástico em coordenadas cartesianas
$\bar{\mathbf{k}}_M^{ep}$	- Forma local da matriz de rigidez constitutiva no regime elastoplástico em coordenadas cartesianas
\mathbf{k}_t	- Matriz de rigidez tangente do elemento
$\bar{\mathbf{k}}_t$	- Forma local da matriz de rigidez tangente no regime elástico
$\bar{\mathbf{k}}_t^{ep}$	- Forma local da matriz de rigidez tangente no regime elastoplástico
l/r	- Índice de esbeltez
l_r, l_c	- Comprimento do elemento ou fibra na configuração de referência e corrigida, respectivamente
$\bar{\mathbf{m}}$	- Momento adimensional da ligação, dado pela relação M/M_{pl}
n	- Fator de forma da ligação
$\dot{\mathbf{p}}$	- Variação no tempo dos graus de liberdade p_i
p_i	- Graus de liberdade cartesianos, onde $i = 1, \dots, 6$
q	- Carga distribuída ao longo do elemento
\mathbf{q}_α	- Vetor que contém os graus de liberdade naturais ou corrotacionais, onde $\alpha = 1, 2, 3$
q_l	- Grau de liberdade natural que mede a mudança de comprimento da corda de um elemento (alongamento ou encurtamento)

- q_2, q_3 - Graus de liberdade naturais que medem o ângulo α_a da extremidade a do elemento e o ângulo α_b da extremidade b do elemento, respectivamente, na configuração corrigida, independentes da rotação de corpo rígido
- r - Raio de giração da seção transversal
- \mathbf{r} - Vetor dos deslocamentos nodais da estrutura
- $\dot{\mathbf{r}}$ - Derivada da matriz dos deslocamentos nodais da estrutura
- r_c - Raio de curvatura local
- \mathbf{t} - Parcela não-nula da matriz de rotação de eixos \mathbf{T}
- t_f - Espessura da mesa do perfil “I”
- t_i - Espessura da fatia i
- t_w - Espessura da alma do perfil “I”
- u - Deslocamento axial do nó
- \bar{u} - Deslocamento axial dos pontos situados sobre o eixo da barra
- \bar{u}' - Derivada do deslocamento axial \bar{u}
- u_a, u_b - Deslocamento axial dos nós a e b , respectivamente
- v - Deslocamento transversal do nó
- v_t - Deslocamento transversal total do nó (flexão + cisalhamento)
- v_f - Deslocamento transversal do nó devido a flexão
- v_c - Deslocamento transversal do nó devido ao cisalhamento
- \bar{v} - Deslocamento transversal dos pontos situados sobre o eixo da barra
- v_a, v_b - Deslocamento transversal dos nós a e b , respectivamente
- x - Coordenada genérica do ponto no eixo das abscissas
- x_a, x_b - Coordenadas nodais, segundo o eixo das abscissas na configuração de referência
- x_c, x_r - Eixo paralelo ao elemento no sistema local corrotacional centrado, respectivamente, nos elementos deformado e de referência
- y_a, y_b - Coordenadas nodais, segundo o eixo das ordenadas na configuração de referência
- y_c, y_r - Eixo perpendicular ao elemento no sistema local corrotacional centrado, respectivamente, nos elementos deformado e de referência

- y_r - Distância entre o eixo de um elemento de barra curva e uma fibra paralela a este eixo
- z_i - Coordenada no centro da fatia i em relação ao centro de gravidade da seção transversal

Letras Romanas Maiúsculas

- A - Área da seção transversal
- \mathbf{A} - Matriz de incidência cinemática
- A_g - Área bruta da seção transversal
- A_e - Área líquida efetiva da seção transversal
- A_r - Área da seção transversal do elemento ou fibra na configuração de referência (inicial)
- \mathbf{A}^T - Transposta da matriz de incidência cinemática
- \mathbf{B} - Matriz de mudança de coordenadas
- $\overline{\mathbf{B}}$ - Forma local da matriz \mathbf{B}
- \mathbf{B} - Transposta da matriz de mudança de coordenadas
- B_1, B_2 - Fatores de amplificação para o momento solicitante, devido aos efeitos de segunda ordem
- C_α - Coeficiente de rigidez, onde $\alpha = 1, 2, 3$
- C_{am} - Coeficientes de rigidez médios, onde $\alpha = 1, 2, 3$
- C_m - Coeficiente de equivalência de momentos
- C_t - Coeficiente de redução usado no cálculo da área líquida efetiva
- \mathbf{D} - Matriz constituinte da parcela constitutiva da matriz de rigidez tangente
- \mathbf{D}^f - Matriz constituinte da parcela constitutiva da matriz de rigidez tangente devido à flexão
- \mathbf{D}^c - Matriz constituinte da parcela constitutiva da matriz de rigidez tangente devido ao cisalhamento
- $D_{\alpha\beta}$ - Elementos da matriz de rigidez constitutiva do elemento no sistema de coordenadas corrotacionais, onde $\alpha, \beta = 1, 2, 3$
- $D_{\alpha\beta}^f$ - Elementos da matriz de rigidez constitutiva do elemento no sistema de coordenadas corrotacionais devido à flexão

$D_{\alpha\beta}^c$	- Elementos da matriz de rigidez constitutiva do elemento no sistema de coordenadas corrotacionais devido ao cisalhamento
D_m	- Família de módulos de rigidez do material de uma fibra
D_m^e	- Módulo de rigidez elástico do material
D_m^{ep}	- Módulo de rigidez plástico do material
D_f	- Módulo de rigidez do material devido à flexão
D_c	- Módulo de rigidez do material devido ao cisalhamento
E	- Módulo de elasticidade longitudinal
E_e	- Módulo tangente no encruamento
E_t	- Módulo tangente
F_G	- Valor característico das ações permanentes
F_Q	- Valor característico das ações variáveis
G	- Módulo de elasticidade transversal
\mathbf{G}_α	- Matriz simétrica que representa uma parcela da matriz de rigidez geométrica e vem da derivada segunda $q_{\alpha,ij}$, onde $\alpha = 1, 2, 3$ e $i = 1, \dots, 6$
$\overline{\mathbf{G}}_\alpha$	- Forma local da matriz \mathbf{G}_α
\mathbf{H}	- Matriz constituinte da parcela geométrica da matriz de rigidez tangente
\mathbf{H}^f	- Matriz constituinte da parcela geométrica da matriz de rigidez tangente devido à flexão
\mathbf{H}^c	- Matriz constituinte da parcela geométrica da matriz de rigidez tangente devido ao cisalhamento
$H_{\alpha\beta}$	- Elementos da matriz \mathbf{H} , onde $\alpha = 1, 2, 3$
$H_{\alpha\beta}^f$	- Elementos da matriz \mathbf{H} devido à flexão
$H_{\alpha\beta}^c$	- Elementos da matriz \mathbf{H} devido ao cisalhamento
H'	- Parâmetro de encruamento
I	- Momento de inércia da seção transversal
K	- Coeficiente de flambagem de barras comprimidas
K_i	- Rigidez inicial da ligação

K_t, K_{tan}	- Rigidez tangente da ligação
K_p	- Rigidez com endurecimento da ligação
K_{sec}	- Rigidez secante da ligação
K_{des}	- Rigidez de descarregamento da ligação
L	- Vão, distância, comprimento do elemento
L_b	- Comprimento da viga pertencente ao pórtico
L_c	- Comprimento do pilar pertencente ao pórtico
M	- Momento fletor atuante
M_a, M_b	- Momento fletor atuante no nós a e b
M_{pl}, M_p	- Momento plástico da seção transversal
$M_{v,pl,Rd}$	- Momento plástico resistente da viga
$M_{p,pl,Rd}$	- Momento plástico resistente do pilar
M_{Sd}	- Momento fletor solicitante de cálculo
M_{Rd}	- Momento fletor resistente de cálculo
$M_{pl,x}, M_{pl,y}$	- Momento plástico segundo os eixos de maior e menor inércia
$M_{x,Sd}, M_{y,Sd}$	- Momento fletores solicitantes de cálculo, respectivamente em relação aos eixos x e y da seção transversal
$M_{x,Rd}, M_{y,Rd}$	- Momento fletores resistentes de cálculo, respectivamente em relação aos eixos x e y da seção transversal
M_u	- Momento fletor último da ligação
$M_{j,Rd}, M_{u,Rd}$	- Momento fletor resistente de cálculo da ligação
$M_{u,k}$	- Momento fletor último característico da ligação
M_0	- Momento fletor de referência de uma ligação
M_y	- Momento fletor elástico máximo
$N_{t,Sd}$	- Força de tração solicitante de cálculo
$N_{t,Rd}$	- Força de tração resistente de cálculo
$N_{c,Sd}$	- Força de compressão solicitante de cálculo
$N_{c,Rd}$	- Força de compressão resistente de cálculo
N_a, N_b	- Força normal atuante nas extremidades a e b
N_m	- Força normal média
N_e	- Carga crítica de flambagem elástica de Euler

0_3	- Matriz nula (3x3)
\mathbf{P}	- Vetor das forças internas no sistema local cartesiano
$\dot{\mathbf{P}}$	- Derivada do vetor de esforços nodais internos \mathbf{P}
P_i	- Forças nodais internas de um elemento no sistema global de coordenadas cartesianas
P_y	- Carga de escoamento
Q	- Fator de redução total associado à flambagem local
Q_a, Q_s	- Fatores de redução que levam em conta a flambagem local de elementos AA e AL, respectivamente
\mathbf{Q}	- Vetor dos esforços internos naturais no sistema de coordenadas corrotacionais, onde $\alpha = 1, 2, 3$
Q_α	- Esforços internos nas coordenadas naturais ou corrotacionais
R_d	- Resistência de cálculo; solicitação resistente de cálculo
\mathbf{R}	- Vetor das forças externas concentradas aplicadas nos nós da estrutura
$\dot{\mathbf{R}}$	- Derivada do vetor de carregamentos nodais externos \mathbf{R}
\mathbf{R}^T	- Transposta do vetor dos carregamentos nodais externos
S	- Momento estático da seção transversal
S_d	- Solicitação de cálculo
S_{ser}	- Valores dos efeitos estruturais (deslocamentos, rotações, deformações, etc), obtidos com base nas combinações de serviço das ações
S_{lim}	- Valores limites dos efeitos estruturais (deslocamentos, rotações, deformações, etc)
\mathbf{S}	- Vetor dos esforços internos da estrutura
$\dot{\mathbf{S}}$	- Derivada do vetor dos esforços internos \mathbf{S}
\mathbf{S}^T	- Transposta do vetor dos esforços internos da estrutura
\mathbf{T}	- Matriz de rotação de eixos
\mathbf{T}^T	- Transposta da matriz de rotação de eixos
V	- Força cortante
V_r, V_c	- Volume do elemento nas configurações de referência e corrigida
W	- Módulo de resistência elástico
Z	- Módulo de resistência plástico

Letras Gregas

α	- Ângulo de rotação do eixo de um elemento em relação à sua corda após a deformação; rotação da seção devido à flexão
α'	- Derivada do ângulo entre a corda e a tangente ao eixo da barra
α_a, α_b	- Ângulo de rotação nas extremidades do elemento, $\alpha_a = q_2$ e $\alpha_b = q_3$
β	- Ângulo de rotação devido ao cisalhamento
γ	- Coeficiente de ponderação da resistência ou das ações; rotação devido ao cisalhamento
γ_{xy}	- Distorção no plano xy
δ_0	- Flecha máxima devido ao efeito da imperfeição geométrica da peça
δ	- Flecha, deslocamento
$\delta\varepsilon$	- Deformação virtual de uma fibra
$\delta\mathbf{p}_i$	- Vetor de deslocamentos nodais virtuais do elemento
δw_i	- Trabalho virtual interno de uma fibra
δw_e	- Trabalho virtual externo de uma fibra
Δl	- Medida do alongamento ou encurtamento do elemento
$\Delta\mathbf{p}$	- Correção genérica entre ψ e \mathbf{k}
$\Delta\mathbf{p}_0$	- Correção genérica entre ψ e \mathbf{k} iniciais
$\Delta\mathbf{r}$	- Incremento nos deslocamentos nodais
$\Delta\mathbf{R}$	- Incremento no carregamento
ε	- Deformação ou deformação de engenharia; campo de deformação
$\bar{\varepsilon}$	- Deformação de uma fibra genérica situada no eixo longitudinal
ε_x	- Deformação longitudinal do elemento
ε_m	- Representação da família de deformações
$\bar{\varepsilon}_m$	- Valor médio para a deformação $\bar{\varepsilon}$
$\varepsilon_{,\alpha}$	- Derivada primeira do campo de deformação ε
$\varepsilon_{,\alpha\beta}$	- Derivada segunda do campo de deformação ε
ε_e	- Deformação do início do encruamento
ε_y	- Deformação do início do escoamento

ε_{lim}	- Deformação limite
$\varepsilon_{1/2}$	- Deformação de engenharia
$\gamma_{,\alpha}$	- Derivada primeira do campo de deformação γ
$\gamma_{,\alpha\beta}$	- Derivada segunda do campo de deformação γ
γ_{gi}	- Coeficientes de ponderação das ações permanentes
γ_{qj}	- Coeficientes de ponderação das ações variáveis
γ_{a1}, γ_{a2}	- Coeficientes de ponderação da resistência
θ	- Rotação do nó
θ_a, θ_b	- Rotação dos nós a e b medidos a partir da configuração de referência até a corda
θ_c	- Rotação de corpo rígido
θ_r	- Rotação relativa da ligação
θ_p	- Rotação na extremidade da viga no regime elástico-linear
θ_0	- Rotação plástica de referencia dado pela relação entre momento último e rigidez inicial da ligação
$\bar{\theta}$	- Rotação relativa adimensional da ligação dada pela relação θ_r/θ_p
λ	- Estiramento de uma fibra genérica; índice de esbeltez
λ_0	- Índice de esbeltez reduzido
λ_p	- Parâmetro de esbeltez limite para seções compactas
λ_{lim}	- Esbeltez limite
$\bar{\lambda}$	- Estiramento de uma fibra genérica situada no eixo longitudinal
ν	- Coeficiente de Poisson
σ_e	- Tensão inicial de escoamento do material
σ	- Tensão normal ou de engenharia de uma fibra
σ_m	- Representação da família de tensões conjugada com a deformação ε_m
σ_N	- Tensão nominal ou de engenharia
σ_p	- Tensão limite de proporcionalidade
σ_r	- Tensão residual

σ_{rc}	- Tensão residual de compressão
σ_{rt}	- Tensão residual de tração
σ_y	- Resistência ao escoamento
$\sigma_{1/2}$	- Tensão conjugada com a deformação $\varepsilon_{1/2}$, igual à tensão de engenharia
τ_{xy}	- Tensão de cisalhamento no plano xy
ϕ_y	- Curvatura máxima associada à M_y
φ_r, φ_c	- Ângulos que a corda do elemento faz com o eixo das abscissas nas configurações de referência e deformada
χ	- Fator de redução associado à resistência de compressão
ψ	- Fator de redução de ações; fator de combinação de ações
ψ_i	- Função de interpolação para os deslocamentos

LISTA DE FIGURA

FIGURA 1.1 – (a) Rotação relativa de uma ligação metálica viga-pilar, (b) Curvas momento x rotação para diversos tipos de ligações, adaptada de CHEN e TOMA (1994).....	5
FIGURA 2.1 – Comportamento força x deslocamento dos vários tipos de análise.....	16
FIGURA 2.2 – Comportamento carga-deslocamento: análise de rótula elastoplástica convencional e análise de rótula elastoplástica refinada.....	20
FIGURA 2.3 – Modelagem do método de zona plástica.....	22
FIGURA 2.4 – Comportamento carga-deslocamento: análise de rótula elastoplástica convencional, análise de rótula elastoplástica refinada e análise de zona plástica ...	23
FIGURA 3.1 – Configurações de uma fibra de material	29
FIGURA 3.2 – Módulo de rigidez longitudinal no comportamento elastoplástico de uma fibra	37
FIGURA 3.3 – Elemento de pórtico plano em sua configuração de referência e em sua configuração corrigida para a condição de extremidades rígido-rígido.....	40
FIGURA 3.4 – Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rotulada.....	44
FIGURA 3.5 – Campo de deslocamento na flexão considerando a teoria de Timoshenko	48
FIGURA 3.6 – Elemento diferencial de barra reta	50
FIGURA 3.7 – Rotação α da seção transversal.....	52
FIGURA 3.8 – Método de Newton-Raphson	71
FIGURA 3.9 – Comportamento elastoplástico do material para o caso uniaxial.....	73
FIGURA 3.10 – Modelo de fatias.....	76
FIGURA 3.11 – Processo de plastificação das fatias ao longo da altura da seção transversal	77
FIGURA 3.12 – Fluxograma geral para análise não linear incremental e iterativa.....	82
FIGURA 3.13 – Viga em balanço com carregamento uniformemente distribuído	83
FIGURA 3.14 – Relação entre as flechas máximas na extremidade livre da viga, tomando-se como referência o valor fornecido pela teoria de Bernoulli-Euler	85

FIGURA 3.15 – Viga biapoiada com carga uniformemente distribuída ao longo do vão	86
FIGURA 3.16 – Relação entre as flechas máximas no meio do vão da viga, tomando-se como referência o valor fornecido pela teoria de Bernoulli-Euler.....	87
FIGURA 3.17 – (a) Viga biapoiada com momento aplicado no apoio A, (b) Viga discretizada em nós e elementos	88
FIGURA 3.18 – Viga com a extremidade <i>A</i> simplesmente apoiada e a extremidade <i>B</i> engastada.....	90
FIGURA 3.19 – Fator de transmissão do momento para viga com a extremidade <i>A</i> simplesmente apoiada e a extremidade <i>B</i> engastada.....	91
FIGURA 3.20 – Viga biengastada com carga concentrada aplicada a uma distância <i>a</i> do engaste esquerdo	92
FIGURA 3.21 – Momento fletor no engaste <i>A</i> considerando o efeito do cisalhamento	93
FIGURA 3.22 – Pilar comprimido axialmente: (a) com extremidades articuladas, (b) com extremidades engastada e livre.....	94
FIGURA 4.1 – Rotação de uma ligação metálica viga-pilar	107
FIGURA 4.2 – Curvas momento x rotação para diversos tipos de ligações, adaptada de CHEN e TOMA (1994).....	108
FIGURA 4.3 – Exemplos de ligações viga-pilar, adaptada de CHEN e TOMA (1994)	109
FIGURA 4.4 – Influência da rigidez da ligação no comportamento da viga	110
FIGURA 4.5 – Modelos matemáticos da curva $M-\theta$ da ligação	111
FIGURA 4.6 – Comportamento momento x rotação para o modelo de três parâmetros CHEN e KISHI (1989).....	114
FIGURA 4.7 – Comportamento momento x rotação para o modelo de quatro parâmetros KISHI et al. (2004).....	116
FIGURA 4.8 – Regiões para verificação da resistência em uma ligação viga-pilar com placa de extremidade, adaptada de LIMA (2003).....	118
FIGURA 4.9 – Propriedades para dimensionamento de uma ligação	119
FIGURA 4.10 – Classificação das ligações proposta por BJORHOVDE et al (1990)	120
FIGURA 4.11 – Classificação das ligações quanto à rigidez segundo o.....	121
EN 1993-1-8: 2005	121

FIGURA 4.12 – Curvas momento x rotação para ligações.....	125
FIGURA 4.13 – Definição da rigidez da ligação segundo CHRISTOPHER e BJORHOVDE (1999)	126
FIGURA 4.14 – Comportamento de ligações semirrígidas em um pórtico simples deslocável.....	127
FIGURA 4.15 – Viga com carregamento uniformemente distribuído	129
FIGURA 4.16 – Linha da viga e diagrama $M-\theta$ para ligação semirrígida	131
FIGURA 4.17 – Formas de representação de uma estrutura reticulada segundo o modelo adotado para descrever a ligação.....	132
FIGURA 4.18 – Elemento de viga-pilar com ligações semirrígidas sujeito a momentos de extremidades e forças axiais.....	133
FIGURA 4.19 – Elemento de mola: (a) graus de liberdade; (b) esquema das curvas carga-deslocamento generalizados.....	135
FIGURA 4.20 – Diagrama multilinear $M-\theta$ da ligação	136
FIGURA 4.21 – Transição entre trechos lineares.....	138
FIGURA 4.22 – Descarga ou recarga elástica a partir do trecho i	141
FIGURA 4.23 – Viga submetida à carga uniformemente distribuída com ligações semirrígidas.....	143
FIGURA 4.24 – Momentos fletores na viga em função do fator de rigidez.....	144
FIGURA 4.25 – Pórtico de um andar e um vão com ligações semirrígidas.....	145
FIGURA 4.26 – Curva $M-\theta_r$ relativa pelo modelo de três parâmetros.....	146
FIGURA 4.27 – Curva multilinear momento fletor x rotação relativa.....	146
FIGURA 4.28 – Processo de carga, descarga e recarga do pórtico do caso 1	147
FIGURA 4.29 – Comportamento das ligações esquerda e direita do pórtico do caso 2	149
FIGURA 4.30 – Pórtico de 2 andares e 1 vão: (a) bases rotuladas, (b) bases engastadas, adaptada de PINHEIRO e SILVEIRA (2005)	151
FIGURA 4.31 – Curvas momento fletor x rotação relativa, adaptada de PINHEIRO e SILVEIRA (2005)	152
FIGURA 4.32 – Curvas momento fletor x rotação relativa multilineares	152
FIGURA 4.33 – Curvas carga-deslocamento para pórticos com bases rotuladas	154
FIGURA 4.34 – Curvas carga-deslocamento para pórticos com bases engastadas.....	154

FIGURA 4.35 – Pórtico de quatro andares e dois vãos	155
FIGURA 4.36 – Pórtico de quatro andares e dois vãos: dimensões e perfis	156
FIGURA 4.37 – Curva momento x rotação relativa multilinear.....	157
FIGURA 4.38 – Diagrama de momentos fletores: (a) nos pilares e (b) nas vigas	159
FIGURA 4.39 – Estado de rigidez das ligações semirrígidas para 100% do carregamento	160
FIGURA 4.40 – Pórtico contraventado de dois andares e um vão	161
FIGURA 4.41 – Comportamento das ligações $C1$ a $C3$ pelo modelo dos três parâmetros	161
FIGURA 4.42 – Comportamento das ligações $C1$, $C2$ e $C3$ pelo modelo multilinear. 162	
FIGURA 4.43 – Classificação das ligações proposta por BJORHOVDE et al. (1990) 162	
FIGURA 4.44 – Efeito das ligações no comportamento dos pórticos com ligações não lineares	163
FIGURA 4.45 – Efeito das ligações no comportamento dos pórticos com ligações convencionais.....	164
FIGURA 4.46 – Comportamento fator de carga-deslocamento lateral do nó 3 (cm)...	165
FIGURA 4.47 – Diagrama de momento fletor	166
FIGURA 4.48 – Pórtico de dois andares e um vão adaptado de CHEN et al. (1996)..	168
FIGURA 4.49 – Comportamento das ligações $C1$ e $C2$: (a) Sistema de classificação de BJORHOVDE et al. (1990), (b) Curvas momento x rotação relativa multilinear das ligações.....	169
FIGURA 4.50 – Comportamento carga-deslocamento lateral do nó 6 (cm).....	170
FIGURA 4.51 – Percentual de plastificação nas barras do pórtico e percentual do momento último nas ligações.....	171
FIGURA 4.52 – Percentual de plastificação nas barras do pórtico rígido.....	172
FIGURA 4.53 – Pórtico de dois andares e dois vãos adaptado de LIU et al. (2008) ...	173
FIGURA 4.54 – Sistema de classificação das ligações segundo BJORHOVDE et al. (1990).....	174
FIGURA 4.55 – Comportamento fator de carga-deslocamento lateral do nó 9 (cm)...	175
FIGURA 4.56 – Plastificação nas barras do pórtico semirrígido	175
FIGURA 4.57 – Plastificação nas barras do pórtico rígido convencional.....	176

FIGURA 4.58 – Curvas momento \times rotação multilinear das ligações <i>C1</i> , <i>C2</i> , <i>C3</i> e <i>C4</i>	177
FIGURA 4.59 – Sistema de classificação de BJORHOVDE et al. (1990) para as ligações <i>C1</i> , <i>C2</i> , <i>C3</i> e <i>C4</i>	178
FIGURA 4.60 – Comportamento inelástico: (a) Plastificação nas barras, (b) Plastificação em seções transversais e (c) Estado de rigidez das ligações para a carga de colapso.....	179
FIGURA 5.1 – Relação tensão-deformação para aço estrutural.....	186
FIGURA 5.2 – Treliça hiperestática com 3 barras	190
FIGURA 5.3 – Lei constitutiva característica para o aço <i>ASTM A36</i> e curva da análise numérica.....	191
FIGURA 5.4 – Lei constitutiva característica para o aço <i>ASTM 572-Grau 50</i> e curva da análise numérica.....	193
FIGURA 5.5 – Leis constitutivas característica e de projeto para aços estruturais.....	195
FIGURA 5.6 – Pilar birrotulado com imperfeição inicial e tensão residual.....	197
FIGURA 5.7 – Curva de resistência última considerando o eixo de maior inércia.....	198
FIGURA 5.8 – Curva de resistência última considerando o eixo de menor inércia.....	198
FIGURA 5.9 – Curvas de resistência última para o eixo de maior inércia.....	203
FIGURA 5.10 – Curva de resistência última para a análise avançada (eixo de maior inércia).....	203
FIGURA 5.11 – Curvas de resistência última para o eixo de menor inércia.....	204
FIGURA 5.12 – Curvas de resistência última para o eixo de menor inércia.....	205
FIGURA 5.13 – Curvas de resistência última em torno do eixo de menor inércia	206
FIGURA 5.14 – Curvas de resistência máxima para pilares com diferentes condições de contorno segundo o eixo de maior inércia.	208
FIGURA 5.15 – Curvas de resistência máxima para pilares com diferentes condições de contorno segundo o eixo de menor inércia.	210
FIGURA 5.16 – Curvas de resistência máxima para pilares com diferentes condições de contorno para o eixo de menor inércia.....	212
FIGURA 5.17 – Mísula treliçada com carga aplicada no nó B	213
FIGURA 5.18 – Viga biapoiada submetida à flexão pura.....	216

FIGURA 5.19 – Curva momento-curvatura para o perfil <i>W 200x46,1</i> fletido em torno do eixo de maior inércia	217
FIGURA 5.20 – Curva momento-curvatura para o perfil <i>W 200x46,1</i> fletido em torno do eixo de menor inércia	217
FIGURA 5.21 – Viga biapoiada com cargas concentradas simetricamente aplicadas.	218
FIGURA 5.22 – Superfície de resistência plástica para perfil laminado fletido segundo o eixo de maior inércia	223
FIGURA 5.23 – Superfície de resistência plástica para perfil laminado fletido segundo o eixo de menor inércia	224
FIGURA 5.24 – Superfícies de resistência plástica, característica e de cálculo, para a seção transversal de perfis <i>I</i> laminados, segundo o eixo de maior inércia.....	224
FIGURA 5.25 – Comparação de curvas de interação para o eixo de maior inércia.....	227
FIGURA 5.26 – Comparação de curvas de interação para o eixo de menor inércia	228
FIGURA 5.27 – Viga biapoiada flexo-comprimida	229
FIGURA 5.28 – Pórtico de dois andares e um vão adaptado de CHEN et al. (1996) ..	232
FIGURA 5.29 – Comportamento e classificação das ligações: (a) viga inferior, (b) viga superior.....	233
FIGURA 5.30 – Comportamento das ligações pelo modelo multilinear: (a) viga inferior, (b) viga superior	234
FIGURA 5.31 – Curvas fator de carga-deslocamento: (a) Deslocamento lateral no 1º e 2º andares e (b) Flecha no meio do vão das vigas inferior e superior do pórtico ...	240
FIGURA 5.32 – Percentuais de solicitação em relação à superfície de plastificação das barras e nas ligações semirrígidas para 101% do carregamento majorado	241
FIGURA 5.33 – Diagrama do momento fletor e da força normal para 100% do carregamento majorado (Análise Avançada)	242
FIGURA 5.34 – Diagrama do momento fletor e da força normal para 100% do carregamento majorado (Análise Elástica em 2ª Ordem)	243
FIGURA 5.35 – Pórtico de 11 andares e 2 vãos adaptada de SILVA (2004)	244
FIGURA 5.36 – Ações nominais do pórtico: permanente, sobrecarga e vento	245
FIGURA 5.37 – Ligação com placa de extremidade estendida de AVAKIAN (2007)	247
FIGURA 5.38 – Curva momento fletor x rotação relativa da ligação	247
FIGURA 5.39 – Curva fator de carga x deslocamento lateral no topo do pórtico.....	248

FIGURA 5.40 – Curva fator de carga-deslocamento lateral no topo do 1º andar do pórtico	249
FIGURA 5.41 – Diagrama de momento fletor para a viga do 5º andar para $P/P_w=121\%$	250
FIGURA 5.42 – Percentuais da superfície de plastificação nas barras e de momento nas ligações do pórtico	251
FIGURA A.1 – Distorção das seções transversais de uma viga devido à força cortante	274
FIGURA A.2 – Configuração do elemento após as deformações adaptada de BRANCO (2002)	274

LISTA DE TABELA

TABELA 3.1 – Tipos de distribuição das tensões residuais.....	79
TABELA 3.2 – Flecha máxima na extremidade livre (mm)	84
TABELA 3.3 – Rotação máxima na extremidade livre (rad).....	85
TABELA 3.4 – Deslocamento transversal no meio do vão e rotação no apoio <i>A</i> da viga biapoiada	87
TABELA 3.5 – Deslocamento transversal e rotação nos nós dos elementos da viga biapoiada	89
TABELA 3.6 – Correspondência entre o fator de cisalhamento β e a relação L/h da viga.	91
TABELA 3.7 – Correspondência entre o fator de cisalhamento β e a altura da seção transversal.	92
TABELA 3.8 – Carga crítica de flambagem (kN) para o pilar com extremidades rotuladas	95
TABELA 3.9 – Carga crítica de flambagem (kN) para o pilar com uma extremidade engastada e a outra livre	95
TABELA 4.1 – Tabela das constantes de ajuste e dos parâmetros de padronização das funções polinomiais de FRYE e MORRIS apud CHEN e TOMA (1994)	113
TABELA 4.2 – Classificação das ligações segundo BJORHOVDE et al. (1990)	120
TABELA 4.3 – Momentos fletores e deslocamentos, angular e transversal, na viga ..	143
TABELA 4.4 – Resultados de momento fletor e rotação relativa para o pórtico do caso 1	148
TABELA 4.5 – Resultados de momento fletor e rotação relativa para o pórtico do caso 2.....	150
TABELA 4.6 – Parâmetros das ligações <i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> e <i>D</i> para o comportamento multilinear	153
TABELA 4.7 – Deslocamento lateral nos andares	157
TABELA 4.8 – Momento máximo nos pilares do pórtico	158
TABELA 4.9 – Parâmetros das ligações	161
TABELA 4.10 – Parâmetros das ligações <i>C1</i> , <i>C2</i> e <i>C3</i> - comportamento multilinear	162

TABELA 4.11 – Parâmetros das ligações semirrígidas de CHEN et al. (1996)	168
TABELA 4.12 – Parâmetros das ligações <i>C1</i> e <i>C2</i> para o comportamento multilinear	169
TABELA 4.13 – Classificação das ligações <i>C1</i> e <i>C2</i> quanto à rigidez rotacional e resistência ao momento fletor	174
TABELA 4.14 – Parâmetros das ligações semirrígidas de KISHI et al. (2004).....	177
TABELA 4.15 – Parâmetros das ligações <i>C1</i> a <i>C4</i> para o comportamento multilinear	177
TABELA 5.1 – Propriedades características dos aços estruturais.....	187
TABELA 5.2 – Resultados da análise numérica considerando o aço <i>ASTM A36</i> ($\varepsilon_y = 0,00125$ e $\varepsilon_e = 0,0150$).....	191
TABELA 5.3 – Resultados da análise numérica considerando o aço <i>ASTM A572</i> – <i>Grau 50</i> ($\varepsilon_y = 0,001725$ e $\varepsilon_e = 0,0207$).....	193
TABELA 5.4 – Propriedades resistentes de cálculo dos aços estruturais	194
TABELA 5.5 – Resistências máximas considerando-se o eixo de maior inércia.....	199
TABELA 5.6 – Resistências máximas considerando-se o eixo de menor inércia.....	199
TABELA 5.7 – Resistências máximas de projeto para o eixo de maior inércia - Resultados da análise numérica e da ABNT NBR 8800:2008.....	207
TABELA 5.8 – Resistências máximas de projeto para o eixo de menor inércia - Resultados da análise numérica e da ABNT NBR 8800:2008.....	209
TABELA 5.9 – Resistências máximas de projeto para o eixo de menor inércia - Resultados da análise numérica e da curva da Eq. (5.18).....	211
TABELA 5.10 – Perfis das barras da mísula treliçada.....	213
TABELA 5.11 – Força máxima aplicada no nó <i>B</i> da mísula treliçada.....	214
TABELA 5.12 – Parâmetros de cálculo das ligações para o modelo de três parâmetros	234
TABELA 5.13 – Parâmetros das ligações para o modelo multilinear.....	235
TABELA 5.14 – Fator de carga para o limite de resistência do pórtico com ligações rotuladas, semirrígidas e rígidas.....	236
TABELA 5.15 – Flecha máxima nas vigas sob carga de serviço.....	237
TABELA 5.16 – Deslocamento lateral no topo e relativo entre andares do pórtico sob a carga de serviço.....	238

TABELA 5.17 – Rotação relativa necessária e capacidade de rotação disponível da ligação sob carga majorada	239
TABELA 5.18 – Resultados das equações de interação para verificação ao ELU	244
TABELA 5.19 – Flecha no meio do vão das vigas e deslocamento relativo entre andares do pórtico	252

RESUMO

SILVA, R. G. L. *Análise Inelástica Avançada de Pórticos Planos de Aço Considerando as Influências do Cisalhamento e de Ligações Semirrígidas*. Tese de Doutorado. 302p. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

A análise convencional de estruturas de aço geralmente é realizada admitindo-se que as ligações viga-pilar são perfeitamente rígidas ou idealmente rotuladas. No entanto, a maioria das ligações é do tipo semirrígida, cujo comportamento se situa entre esses dois casos extremos. As ligações semirrígidas, bem como as diversas não linearidades, geométrica e do material, influenciam na distribuição do momento fletor em vigas e pilares das estruturas. Uma forma de levar em conta todos esses efeitos no dimensionamento de pórticos é através do uso de uma Análise Inelástica Avançada. O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo do comportamento inelástico de pórticos semirrígidos de aço utilizando a análise avançada, considerando-se as prescrições da norma brasileira para análise quanto aos estados-limites último e de serviço. Para isso, desenvolve-se uma formulação geometricamente exata, considerando-se ambas as não linearidades, geométrica e do material. A não linearidade geométrica inclui os efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$ e as deformações por cisalhamento nas barras através da teoria de Timoshenko. Para se considerar a não linearidade do material utilizam-se os conceitos da plasticidade distribuída, que leva em conta o escoamento gradual do aço na seção transversal e ao longo do comprimento das barras e as tensões residuais. Elementos de mola não lineares são usados para incluir as ligações, cujo comportamento é modelado através de curvas momento \times rotação multilinearizadas. Visando adequar o programa desenvolvido, para a sua utilização como um método de análise inelástica avançada, são feitas calibrações com os parâmetros de dimensionamento da ABNT NBR 8800:2008. Os exemplos apresentados são analisados com o objetivo de demonstrar como a *Análise Inelástica Avançada* proposta pode ser usada no dimensionamento de estruturas de pórticos semirrígidos de aço.

Palavras-chave: Análise Inelástica Avançada; Plasticidade Distribuída; Deformações por Cisalhamento; Ligações Semirrígidas; Estruturas de Aço.

ABSTRACT

SILVA, R. G. L. *Inelastic Advanced Analysis of Plane Steel Frames Considering the Influences of Shear and Semi-rigid Connections*. Doctoral Thesis. 302p. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

Conventional analysis of steel frames is usually carried out under the assumption that the beam-to-columns connections are either fully rigid or ideally pinned. However, most connections are of type semi-rigid and their behavior lies between these two extreme cases. The semi-rigid connections as well as several geometric and material nonlinearities, influence the bending moment distribution in beams and columns of structures. One way to account for all these effects in frame design is using an Inelastic Advanced Analysis. The objective of this work is to present a study of inelastic behaviour of semi-rigid steel frames using advanced analysis, taking into account the Brazilian code prescriptions for checking the strength limit state and serviceability conditions. Inelastic Advanced Analysis developed account for both geometric and material nonlinearities. A geometrically exact finite element formulation to consider material and geometric nonlinearities is presented. The formulation includes P- δ and P- Δ effects and shear strain of members through the Timoshenko theory. The distributed-plasticity analysis includes the spread of plasticity within the cross section and along the member length and residual stresses. Nonlinear spring elements are used to include connections and their behaviour is modelled using multilinearized moment-rotation curves. Aiming to use adequately the program developed as a method of Inelastic Advanced Analysis, calibrations are made with the parameters of ABNT NBR 8800:2008. The examples presented are analyzed in order to demonstrate how the Inelastic Advanced Analysis can be used in designing of semi-rigid steel frames.

Keywords: Inelastic Advanced Analysis; Spread of Plasticity; Shear Strain; Semi-rigid Connections; Steel Structures.

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

O *projeto estrutural* tem como objetivo conceber uma estrutura que atenda a todas as necessidades para as quais ela será construída, satisfazendo as questões de segurança e de utilização, e também, questões econômicas e construtivas. A sua elaboração compreende a realização de uma *análise* para a obtenção das respostas da estrutura, o *dimensionamento* de seus elementos capazes de atender às solicitações encontradas na análise e o *detalhamento* final do projeto, para posterior execução da obra.

O *método dos estados-limites*, adotado por diversas normas como ABNT NBR 8800: 2008, ANSI/AISC 360-05 e EN-1993-1-1: 2005, estabelecem que no dimensionamento de uma estrutura nenhum estado-limite aplicável seja excedido quando esta for submetida a todas as combinações apropriadas de ações.

A *análise*, dentro do contexto do projeto estrutural, tem como função determinar os efeitos das ações na estrutura, como por exemplo, os esforços solicitantes e os deslocamentos produzidos no modelo estrutural. O *dimensionamento* deve garantir a segurança da estrutura, sujeita às combinações mais desfavoráveis de ações previstas em sua vida útil, em relação aos estados-limites últimos e, ao mesmo tempo, garantir o seu desempenho sob as condições normais de serviço.

Portanto, visando um dimensionamento adequado e confiável de uma estrutura, devem ser cumpridas as exigências estabelecidas por uma norma que, por sua vez, adota um método de cálculo de modo que nenhum estado-limite seja excedido.

Até recentemente, os projetos eram geralmente desenvolvidos considerando-se o equilíbrio da estrutura na sua posição indesejada e o comportamento elástico linear dos materiais, ou seja, utilizando-se a análise elástica em teoria de primeira ordem. No entanto, essa situação usualmente adotada na prática pelo engenheiro projetista, não refletia a condição real da estrutura.

Atualmente, a ABNT NBR 8800: 2008 recomenda a determinação dos esforços solicitantes através de um tipo de análise, conforme a classificação da estrutura. Assim, para uma estrutura de *média deslocabilidade* permite-se que os esforços solicitantes sejam determinados por meio de uma análise elástica de segunda ordem aproximada, como, por exemplo, através do método de amplificação dos esforços solicitantes, no qual, os coeficientes B_1 e B_2 são calculados com as rigidezes a flexão e axial reduzidas para 80% dos seus valores originais, de modo a considerar a influência das imperfeições do material. Quando a estrutura é classificada de *pequena deslocabilidade*, o efeito global de segunda ordem $P-\Delta$ e o efeito das imperfeições do material podem ser desprezados, podendo-se obter os esforços a partir de uma análise elástica linear. No entanto, para as estruturas classificadas como de *grande deslocabilidade*, deve ser feita uma análise de segunda ordem rigorosa, incluindo-se as não linearidades geométricas e de material. Opcionalmente, a ABNT NBR 8800: 2008 estabelece que, a critério do responsável técnico pelo projeto estrutural, pode ser utilizado o mesmo procedimento de análise realizado para estruturas de média deslocabilidade, desde que os efeitos das imperfeições geométricas iniciais sejam adicionados às combinações últimas de ações em que atuem ações variáveis devido ao vento.

O projeto estrutural estabelecido pela norma brasileira ABNT NBR 8800: 2008 consiste de duas etapas: na primeira, os esforços solicitantes são determinados de acordo com a classificação da estrutura quanto à sua deslocabilidade, em geral usando-se a análise elástica de 2ª ordem, conforme descrito anteriormente. Depois, numa segunda etapa, são

feitos os dimensionamentos dos elementos, utilizando-se os critérios da norma. O procedimento é aproximado, uma vez que a norma ainda separa a análise do dimensionamento. A análise elástica é usada para determinar os esforços solicitantes atuantes nas barras, enquanto que no dimensionamento de cada barra, tratada como um elemento isolado, os esforços resistentes são obtidos considerando-se a possibilidade de instabilidade e de plastificação da seção transversal. Os resultados dos esforços solicitantes e resistentes são aplicados nas equações de interação.

Diante desse fato, e aliado aos avanços da informática, têm sido desenvolvidos métodos de análises avançadas, que avaliam simultaneamente a resistência e a estabilidade do sistema estrutural como um todo, fornecendo resultados mais precisos, conseqüentemente, mais realistas, evitando simplificações no projeto de uma estrutura.

Uma análise que considera a teoria em 2ª ordem, a distribuição da plasticidade, as tensões residuais, as imperfeições geométricas iniciais, as deformações por cisalhamento, a flexibilidade das ligações, entre outros efeitos, e que, calibrada com os coeficientes de ponderação das resistências estabelecidas pelas Normas Técnicas, elimine a necessidade da verificação posterior de cada elemento estrutural isolado, é, por definição, um método “exato” de *Análise Inelástica Avançada*.

A *Análise Inelástica Avançada* refere-se, a qualquer método de análise que, de forma adequada, avalie simultaneamente a resistência e a estabilidade de um sistema estrutural como um todo, de tal forma que as verificações posteriores de cada elemento separadamente, conforme fazem as normas técnicas, possam ser dispensadas.

O crescente avanço tecnológico na área da informática, tanto em hardware quanto em software, tem propiciado o desenvolvimento de eficientes ferramentas computacionais baseadas em formulações teóricas rigorosas e consistentes, segundo a filosofia da *Análise Inelástica Avançada*, permitindo-se fazer um dimensionamento seguro, preciso e realista dos sistemas estruturais em aço.

Dessa forma, pesquisadores e engenheiros têm reconhecido a necessidade e a importância de se considerar, no projeto de estruturas de aço, os diversos efeitos não lineares envolvidos no problema, destacando-se os efeitos de 2ª ordem, o comportamento inelástico do material e a flexibilidade das ligações. A não linearidade geométrica é causada pelos efeitos de segunda ordem $P-\Delta$ e $P-\delta$, oriundos da deformação da estrutura, à medida que esta é carregada. A não linearidade do material é representada através da perda da rigidez das barras, à medida que parte ou todo o material de uma seção entra em escoamento. E, a não linearidade das ligações é representada usualmente por curvas momento \times rotação que simulam o comportamento semirrígido da ligação durante o processo de carregamento.

Outros efeitos, não menos importantes, são provenientes de imperfeições geométricas oriundas dos processos de fabricação, armazenagem, transporte das peças e montagem da estrutura; das tensões residuais, ocasionadas principalmente pelo processo de fabricação dos perfis e da distorção das seções transversais devido à atuação da força cortante.

Ligações semirrígidas no dimensionamento de pórticos

A análise convencional e o dimensionamento de pórticos de aço são usualmente considerados sob a hipótese de que as ligações entre vigas e pilares são totalmente rígidas ou rotuladas. A hipótese de uma ligação totalmente rígida conduz a uma perfeita continuidade rotacional, fazendo com que o ângulo formado pelos elementos estruturais conectados permaneça o mesmo após a atuação de todo o carregamento da estrutura, possibilitando a transmissão total do momento fletor. Por outro lado, nas ligações idealmente rotuladas, não há continuidade rotacional e nenhuma transmissão de momento fletor ocorre entre os elementos conectados.

Embora a consideração das hipóteses do comportamento totalmente rígido ou rotulado da ligação simplifique consideravelmente a análise e o dimensionamento de uma estrutura, a validade dessas hipóteses pode ser questionada nos casos em que a flexibilidade das ligações deve ser levada em conta no projeto.

Os cálculos baseados em idealizações de nós totalmente rígidos ou rotulados resultam em valores incorretos das respostas estruturais. Isso porque, na realidade, a maioria das ligações nas estruturas de aço apresenta um comportamento não linear intermediário, definido como semirrígido, que permite algum movimento relativo e uma determinada transmissão de momento fletor entre os elementos conectados, conforme mostra a Fig. 1.1-a. O comportamento de uma ligação pode ser representado através da curva momento \times rotação relativa, que relaciona o momento fletor a que está solicitada à ligação com a rotação relativa entre os elementos ligados. A Figura 1.1-b mostra curvas momento \times rotação relativa para vários tipos de ligação.

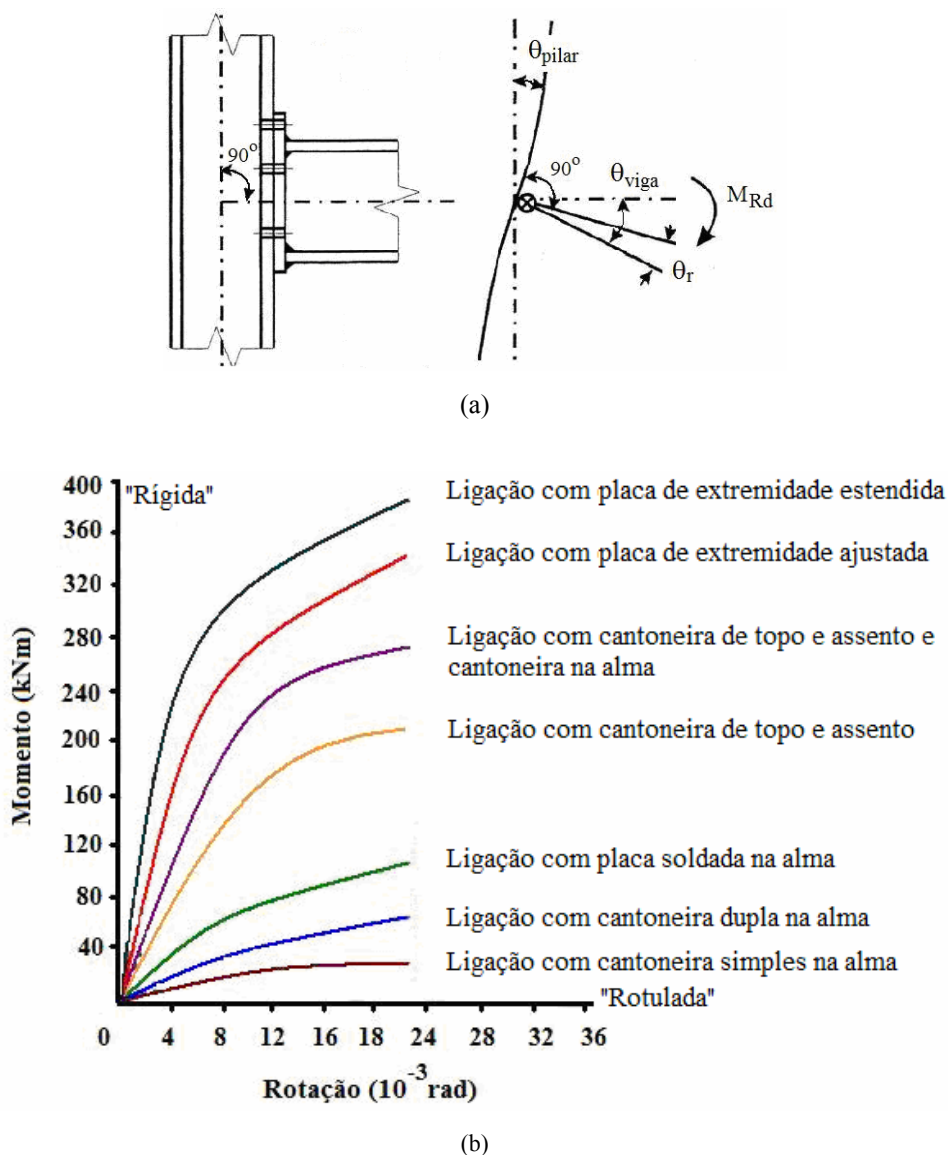


FIGURA 1.1 – (a) Rotação relativa de uma ligação metálica viga-pilar, (b) Curvas momento \times rotação para diversos tipos de ligações, adaptada de CHEN e TOMA (1994)

Diversas pesquisas relacionadas com o estudo do comportamento e classificação das ligações têm sido incorporadas às normas modernas, permitindo aos projetistas considerar explicitamente o comportamento das ligações no projeto de estruturas de aço. Assim, as especificações da norma americana ANSI/AISC 360-05 distinguem dois tipos de construção: completamente restringidas (*FR - fully restrained*) e parcialmente restringidas (*PR - partially restrained*). Se a construção do tipo PR é usada, o efeito das ligações deve ser levado em conta na análise e dimensionamento do pórtico. A norma brasileira ABNT NBR 8800: 2008 estabelece que a influência do comportamento das ligações deve ser considerada nos métodos de análise de uma estrutura de aço, caso a ligação seja classificada como semirrígida. Segundo o EN 1993-1-8: 2005, a influência das ligações deve ser considerada na análise elástica, rígido-plástica ou elastoplástica, quando os nós do modelo são classificados como semicontínuos.

A busca contínua de uma modelagem estrutural mais realista tem apontado para a consideração dos efeitos relacionados às não linearidades que afetam significativamente o comportamento estrutural. Indubitavelmente, o comportamento das ligações semirrígidas deve ser considerado na análise, pois influenciam na distribuição das forças internas e na estabilidade global dos pórticos. Quando as ligações semirrígidas são consideradas, um aumento significativo de deslocamento lateral pode ocorrer na estrutura, conseqüentemente o aumento do efeito $P-\Delta$ é observado em relação à análise convencional com ligações totalmente rígidas.

Plasticidade na análise e no dimensionamento de pórticos

Nos projetos de engenharia em estruturas de aço tem ocorrido uma utilização crescente de análises e dimensionamento que consideram, explicitamente, a resposta estrutural através de comportamentos elásticos e inelásticos até o estado-limite último. A análise, capaz de descrever o comportamento real de um sistema estrutural, é definida como *análise inelástica em teoria de 2ª ordem*.

A principal vantagem da análise inelástica em 2ª ordem é a consideração da redistribuição inelástica dos esforços internos, levando a resultados mais confiáveis da

rigidez, da resistência e da estabilidade da estrutura e possibilitando prever com maior precisão os possíveis modos de colapso.

A partir da década de 1990 vários pesquisadores têm desenvolvido e validado formulações para a análise inelástica em teoria de 2ª ordem, especialmente para os pórticos em estruturas de aço. Essas formulações podem ser classificadas em dois grupos: da plasticidade concentrada, baseado no conceito de rótula plástica, e da plasticidade distribuída, também definida como zona plástica, que considera a distribuição da plasticidade ao longo do comprimento dos elementos estruturais e na área de suas seções transversais. O modelo da plasticidade distribuída exige maior grau de refinamento na formulação do que o modelo da plasticidade concentrada, levando a resultados mais precisos na análise. Esse modelo é tratado neste trabalho.

1.2 Objetivos

O trabalho tem como objetivo apresentar um estudo do comportamento inelástico de pórticos planos semirrígidos de aço considerando os conceitos da *Análise Inelástica Avançada*. Para isso, será apresentado o estudo de uma formulação geometricamente exata utilizando os conceitos da plasticidade distribuída e sua implementação no programa computacional PPLANLEP, desenvolvido por LAVALL (1996), capaz de realizar a análise de **Pórticos Planos** de aço, considerando a **Análise Não Linear Elasto-Plástica**.

Como objetivos específicos, visando obter uma formulação geral, geometricamente exata, capaz de realizar a análise inelástica avançada, propõe-se:

- (i) Obtenção e implementação da matriz de rigidez tangente (constitutiva e geométrica), considerando-se a influência das deformações por cisalhamento através da teoria de Timoshenko. As matrizes de rigidez são deduzidas de forma consistente para o caso do elemento com ambas as extremidades rígidas e do elemento com uma extremidade rotulada e a outra rígida;

- (ii) Desenvolvimento de um algoritmo para a implementação de um modelo multilinear da curva momento x rotação de uma ligação no programa computacional PPLANLEP, por meio de elementos de mola;
- (iii) Validação da formulação e da implementação computacional através de aplicações em exemplos práticos de estruturas reticuladas planas, considerando-se os efeitos da deformação por cisalhamento e das ligações semirrígidas;
- (iv) Adequação dos coeficientes de ponderação das resistências e calibração das tensões residuais estabelecidos pela ABNT NBR 8800: 2008, assegurando, na análise proposta, o nível de confiabilidade adotado pela norma brasileira, de modo que o procedimento seja considerado como um método de *Análise Inelástica Avançada* de pórticos planos de aço.

1.3 Organização do Texto

Inicialmente, é apresentada no *Capítulo 2*, uma revisão bibliográfica sobre a análise avançada que tem atraído cada vez mais pesquisadores para o assunto. O capítulo inicia-se com a conceituação dos tipos de análise existentes, destacando-se a análise inelástica de 2ª ordem com plasticidade distribuída. Para que uma análise seja consistente segundo os preceitos da Análise Avançada, são descritos os princípios básicos e os atributos considerados relevantes nas análises estruturais, nos quais o modelo deve ser baseado, a fim de validar os diversos métodos de análise avançada a serem utilizados na prática de projetos.

O *Capítulo 3* inicia-se com uma pequena revisão bibliográfica sobre a consideração do cisalhamento nas formulações numéricas, citando alguns trabalhos relacionados com o tema. Em seguida, é apresentada uma formulação numérica, geometricamente exata, considerando a plasticidade distribuída e as deformações por cisalhamento através da teoria de Timoshenko, de um elemento finito com condições de extremidades rígido-rígido e rígido-rotulado. O desenvolvimento teórico é feito dentro de uma rigorosa formulação Lagrangiana, que utiliza a técnica corrotacional para a dedução consistente

da matriz de rigidez tangente do elemento de pórtico plano. É feita uma apresentação itemizada dessa teoria, onde se definem as tensões e deformações conjugadas e objetivas; as relações constitutivas elásticas e elastoplásticas; os sistemas de coordenadas global (Cartesiano) e local (corrotacional); os campos de deformação e deslocamento, segundo as hipóteses cinemáticas da teoria de *Timoshenko*. São introduzidas as interpolações usuais do cálculo numérico e as aproximações de segunda ordem para a determinação analítica das matrizes de rigidez tangente, elástica e elastoplástica, com o efeito das deformações por força cortante na análise do elemento.

Como o equilíbrio do elemento deve ser analisado de forma incremental e iterativa, os aspectos da implementação computacional também são descritos nesse capítulo. O procedimento numérico de Newton-Raphson é usado para a análise não linear do sistema de equações e, através do critério de convergência para os deslocamentos nodais, determina-se a solução do problema. O modelo constitutivo multilinear e o modelo de fatias são apresentados para a análise de problemas elastoplásticos, cuja implementação permite a consideração de tensões residuais e o acompanhamento da plastificação gradual na seção transversal e seu espalhamento ao longo do elemento. Exemplos numéricos são apresentados mostrando a validade e precisão da formulação considerando-se a teoria de Timoshenko.

Analogamente ao capítulo anterior, o *Capítulo 4* inicia-se com um breve resumo do estado da arte sobre as ligações semirrígidas. Posteriormente, apresentam-se conceitos gerais, necessários à compreensão do texto, como o comportamento, os tipos de modelagem existentes e a classificação das ligações segundo diversas normas técnicas. Os aspectos da implementação do modelo multilinear das ligações inserido no programa de análise inelástica em teoria de 2ª ordem são apresentados. Finalmente, são analisados alguns exemplos numéricos, investigando a influência das ligações nas estruturas de aço e validando o modelo proposto com os exemplos disponíveis na literatura.

Visando adequar a *Análise Inelástica Avançada* proposta neste trabalho com as prescrições da ABNT NBR 8800: 2008, no *Capítulo 5* são apresentados os aspectos de projeto da norma brasileira, os procedimentos e calibrações para o dimensionamento de

barras submetidas à tração, à compressão, à flexão e aos esforços combinados, bem como as orientações para o dimensionamento considerando-se as ligações semirrígidas. Finalmente, estudos de casos para análise e dimensionamento de pórticos semirrígidos são apresentados para validar a *Análise Inelástica Avançada* proposta.

No *Capítulo 6* são apresentadas as conclusões do trabalho, procurando-se validar a presente formulação como um método de Análise Avançada, bem como sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO

2

VISÃO GERAL SOBRE A ANÁLISE AVANÇADA

2.1 Considerações Iniciais

As estruturas reticuladas quando sujeitas a um determinado conjunto de esforços apresentam um comportamento não linear desde o início do carregamento. Esse comportamento não linear resulta da consideração do equilíbrio da estrutura na posição deslocada (análise em teoria de 2ª ordem; estudo da não linearidade geométrica) e/ou do fato de os materiais possuírem leis constitutivas não lineares (não linearidade do material).

A fim de prever a resistência última das estruturas é necessário considerar ambas as não linearidades, a geométrica e a do material, na análise estrutural. Pode-se dizer que, desde meados da década de 1960, vêm sendo realizados trabalhos teóricos levando-se em conta os efeitos das não linearidades no comportamento das estruturas. Mesmo assim, a análise não linear é um tema que ainda desperta a curiosidade de diversos pesquisadores em todo mundo, considerando a sua relevância para o estudo de estruturas esbeltas e mais complexas.

Atualmente, com o grande desenvolvimento da informática em hardwares e softwares, é possível realizar análises inelásticas mais rigorosas incluindo os efeitos de segunda ordem, as propriedades do material, as tensões residuais, as imperfeições geométricas, a flexibilidade das ligações e demais parâmetros relevantes no estudo do equilíbrio e da

resistência das estruturas. A literatura na área de estruturas de aço tem definido essas análises rigorosas como *Análises Avançadas*.

A Análise Avançada “*exata*” é uma técnica que procura introduzir nos modelos matemáticos que descrevem os comportamentos físico e geométrico dos elementos representativos da estrutura, hipóteses mais próximas da realidade e, unir a isso, procedimentos numéricos e iterativos para se estimar o comportamento não linear dessas estruturas, de tal forma que o método, por si só, seja suficiente para a verificação da estrutura com respeito aos seus estados-limites. Dessa maneira, a análise avançada engloba os efeitos não lineares, geométricos e dos materiais, nas análises dos sistemas estruturais e de seus elementos componentes.

Como primeiros trabalhos encontrados na literatura considerando-se os conceitos das análises avançadas podem-se citar as curvas de resistência do SSRC que foram obtidas por meio de um extenso estudo desenvolvido por BJORHOVDE (1972) apud CHEN et al. (1996) e as curvas de interação do AISC obtidas por KANCHANALAI (1977).

A partir da década de 1990, têm sido importantes os trabalhos de CLARKE et al. (1992), LIEW et al. (1993-a,b), WHITE (1993), CHEN e TOMA (1994), CHEN et al. (1996, 2001), WHITE e HAJJAR (2000) entre outros, que têm estudado a análise avançada de pórticos rígidos e semirrígidos, planos e espaciais.

O desenvolvimento de programas de computador adequados para a análise avançada tem seguido três direções principais. A primeira é baseada na análise inelástica de segunda ordem com formação de rótulas plásticas, sem nenhuma modificação em relação à teoria clássica do cálculo plástico (WHITE, 1993). A segunda aproximação para a análise avançada é baseada na modificação ou no refinamento da teoria clássica de rótulas plásticas, ao permitir uma suave degeneração da rigidez devido aos efeitos da plasticidade distribuída (KIM e CHEN 1996 - a, b; LIEW et al., 1993 – a, b). A terceira

BJORHOVDE, R. (1972) *Deterministic and Probabilistic Approaches to the Strength of Steel Columns*. Ph.D. Dissertation Department of Civil Engineering. Lehigh University. Bethlehem, PA.

considera o efeito da plastificação na formulação, onde a barra é discretizada em vários elementos e a seção transversal de cada elemento é dividida em fatias, permitindo a distribuição da plasticidade ao longo do comprimento do elemento e a plastificação gradual da seção transversal ao longo da altura do elemento, respectivamente, conforme os trabalhos de VOGEL (1985), CLARKE et al. (1992), FOLEY e VINNAKOTA (1997).

No Brasil, a análise inelástica avançada de sistemas estruturais metálicos tem despertado interesse de pesquisadores e diversos trabalhos envolvendo esse tema têm sido publicados, destacando-se os recentes trabalhos de LAVALL (1996), LANDESMAN (2003), NETO e PIMENTA (2004), SILVA e LAVALL (2005, 2008, 2009), MACHADO e SILVEIRA (2005), PINHEIRO e SILVEIRA (2005), ALMEIDA (2006), CALDAS (2008), ARAÚJO (2010), entre outros.

Considerando-se os conceitos da plasticidade distribuída, LAVALL (1996), SILVA e LAVALL (2005) e ALMEIDA (2006) abordaram o método da zona plástica para capturar o escoamento gradual ao longo do comprimento das barras dos pórticos e ao longo da altura da seção transversal, levando-se em conta, a influência das imperfeições iniciais nas barras e tensões residuais nas seções transversais. SILVA e LAVALL (2008) apresentaram uma formulação geometricamente exata para a análise avançada de pórticos planos de aço, utilizando os conceitos da plasticidade distribuída e os efeitos do cisalhamento através da teoria de Timoshenko. SILVA e LAVALL (2009) introduziram o comportamento de ligações semirrígidas por meio de curvas momento \times rotação relativa. Para a aproximação do comportamento real, a ligação viga-pilar é representada por meio de uma mola rotacional com rigidez rotacional K_θ obtida através de curvas multilíneas $M-\theta_r$. ARAÚJO (2010) simulou leis constitutivas multilíneas para o aço, contemplando o processo de carga e descarga, possibilitando um estudo da influência do encruamento do aço no comportamento e na resistência das estruturas.

LANDESMAN (2003) desenvolveu um modelo computacional para análise avançada de estruturas planas de aço em situação de incêndio, no qual o comportamento da

estrutura é realizado usando os conceitos da plasticidade concentrada, envolvendo o modelo refinado das rótulas plásticas e a influência das ligações semirrígidas, consideradas na análise através da modificação da rigidez do elemento.

NETO e PIMENTA (2004) estudaram o comportamento estrutural em 3-D de edifícios de aço de múltiplos andares, considerando a teoria não linear geometricamente exata para barras retas tridimensionais e as lajes como cascas inicialmente planas, considerando o efeito da plasticidade nas barras de aço e de seção transversal mista.

MACHADO e SILVEIRA (2005) desenvolveram um programa computacional para análise avançada de estruturas metálicas, no qual os efeitos inelásticos da estrutura são incorporados na análise através da modificação da rigidez do elemento híbrido, tendo como base o emprego do método dos elementos finitos e do método da rótula plástica refinada.

DÓRIA (2007) empregou uma análise numérica avançada via MEF, utilizando o programa ABAQUS 6.5, que permite a modelagem explícita dos efeitos que contribuem para a instabilidade da estrutura, visando validar métodos simplificados de análise de pórticos planos de aço.

CALDAS (2008) desenvolveu modelos numéricos avançados capazes de simular de forma adequada o comportamento de estruturas de aço, concreto e mistas de aço e concreto em temperatura ambiente e elevada, possibilitando a verificação e o estudo de estruturas com ligações semirrígidas, sob essas condições.

RIBEIRO (2009) desenvolveu um sistema computacional baseado no Método dos Elementos Finitos para análise termodinâmica transiente e não-linear de estruturas tridimensionais de aço e mistas aço e concreto em situação de incêndio.

Este capítulo apresenta uma visão geral sobre os tipos de análise utilizados para a determinação das resistências últimas de estruturas de aço, bem como as características e atributos desejáveis para o desenvolvimento de um modelo de Análise Inelástica Avançada.

2.2 Tipos de Análise

Inicialmente, uma visão geral dos tipos de análise utilizados no cálculo de pórticos planos será apresentada para uma melhor compreensão do seu comportamento global. A Fig. 2.1 mostra, esquematicamente, as curvas força x deslocamento lateral de um pórtico rígido submetido a carregamentos estáticos, para cada tipo de análise a ser considerada.

2.2.1 Análise Elástica de 1ª Ordem

Na análise elástica de 1ª ordem, o equilíbrio da estrutura é formulado considerando-a na sua posição indeslocada, ou seja, segundo sua geometria original (linearidade geométrica) e o material é modelado como elástico linear (linearidade do material). Dessa forma, essa análise considera, necessariamente, a hipótese de pequenos deslocamentos e, sendo o material elástico linear, vale o princípio da superposição dos efeitos.

Embora a análise elástica de primeira ordem, ou simplesmente análise elástica linear, seja a mais usada nas rotinas de cálculo dos escritórios de projetos, ela não fornece informações sobre a influência da plasticidade e da estabilidade no comportamento da estrutura. Essas influências são consideradas indiretamente no dimensionamento ao se verificar isoladamente cada barra através do uso das equações de interação, das curvas de resistência de pilares, do comprimento efetivo e dos fatores de amplificação dos momentos. A curva força x deslocamento obtida é linear, como indicada na Fig. 2.1.

2.2.2 Análise Elástica de 2ª Ordem

Na análise elástica de 2ª ordem, o equilíbrio é formulado considerando a estrutura na sua posição deslocada (não linearidade geométrica) e o material ainda é elástico linear (linearidade do material). A resposta da curva força x deslocamento tende assintoticamente para a carga crítica elástica (P_e) da estrutura, conforme indica a Fig. 2.1. Quando obtida rigorosamente, essa análise inclui os efeitos da estabilidade elástica, $P-\delta$ e $P-\Delta$, mas não fornece nenhuma informação direta da resistência inelástica real do pórtico. Trata-se de uma análise não linear geométrica.

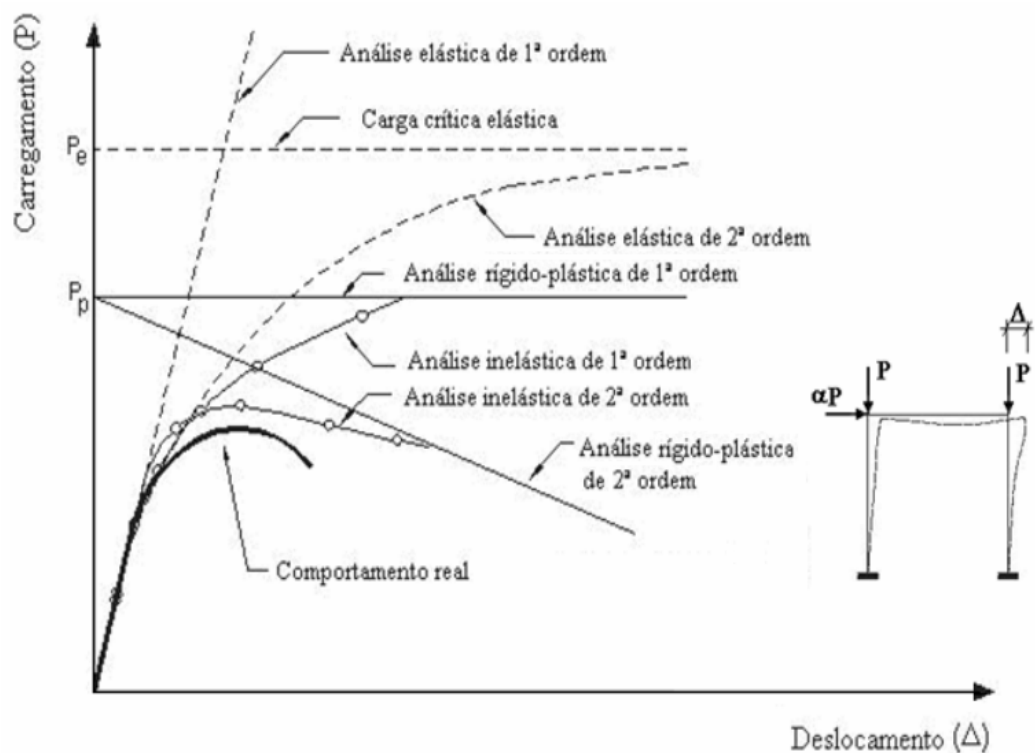


FIGURA 2.1 – Comportamento força x deslocamento dos vários tipos de análise

2.2.3 Análise Inelástica de 1ª Ordem

Na análise inelástica de 1ª ordem, o equilíbrio é verificado considerando a geometria ind deslocada da estrutura (linearidade geométrica) e considera-se a não linearidade do material. Esse tipo de análise inclui os efeitos de plastificação das barras, que podem ser representados desde os modelos simples de rótulas plásticas até modelos mais detalhados que consideram a propagação da plastificação no interior das mesmas. Quando o material é elastoplástico perfeito, a resposta da curva força x deslocamento de uma análise inelástica de primeira ordem aproxima assintoticamente da carga limite plástica (P_P), conforme ilustra a Fig. 2.1, calculada por análise de mecanismo plástico. Trata-se de uma análise não linear do material.

2.2.4 Análise Inelástica de 2ª Ordem

Na análise inelástica de 2ª ordem, o equilíbrio é formulado considerando-se a estrutura na sua posição deslocada (não linearidade geométrica) e considera-se a não linearidade do material. A carga limite obtida pela análise inelástica de segunda ordem é a que mais

se aproxima da resistência real, sendo esta a análise que melhor representa o verdadeiro comportamento de um pórtico. Trata-se de uma análise não linear geométrica e do material.

A análise inelástica, tanto em 1ª quanto em 2ª ordem, se refere a qualquer método de análise que considere os efeitos do escoamento do material, podendo ser classificada em dois tipos principais: (1) formulação por zona plástica ou plasticidade distribuída e (2) formulação baseada na formação de rótulas plásticas. Essa generalização é baseada no grau de refinamento na representação dos efeitos do escoamento. O método da rótula plástica é a mais simples formulação, enquanto que o modelo de zona plástica exige um maior refinamento.

Análise Inelástica por Zona Plástica

A análise por *zona plástica* ou *plasticidade distribuída* que inclua a distribuição da plasticidade, as tensões residuais, as imperfeições geométricas iniciais e quaisquer outros efeitos de segunda ordem significativos é geralmente classificada como um método “*exato*” de *Análise Inelástica Avançada*. As equações de interação das barras de pórtico, adotadas nas principais normas técnicas em todo o mundo, foram desenvolvidas, em parte, pelo ajuste de curvas de ensaios de laboratório aos resultados obtidos de uma Análise Inelástica por Zona Plástica.

Análise Inelástica por Rótula Plástica

O mais simples e direto tipo de análise inelástica é aquele que adota a formulação com formação de rótulas elastoplásticas. Essa análise geralmente envolve o uso de um elemento de viga-pilar para cada barra do pórtico, assumindo que os mesmos permaneçam elásticos exceto nas suas extremidades, onde as rótulas plásticas de comprimento nulo se formam.

Em termos práticos, a análise inelástica por rótula plástica utiliza dois métodos de análise: (1) método rígido-plástico e (2) método elastoplástico. O método rígido-plástico

é estudado a partir da formação do mecanismo de colapso final da estrutura, ou seja, quando a mesma desenvolve um número suficiente de rótulas plásticas levando ao seu colapso, não permitindo mais a redistribuição do momento fletor.

O método elastoplástico é um método alternativo de análise plástica que, além de determinar a carga de colapso da estrutura, fornece informações adicionais sobre o processo de redistribuição de forças, antes que o mecanismo de colapso seja alcançado. Assim, o método determina a sequência de formação das rótulas plásticas, o fator de carga associado a cada rótula e a variação do momento fletor nas barras entre cada rótula formada, além de permitir o cálculo aproximado dos deslocamentos durante a história do carregamento.

Apesar de a análise inelástica por rótulas plásticas ser eficiente em alguns casos, principalmente para estruturas nas quais a força normal nas barras é pequena e predomina o efeito dos momentos fletores, tem sido mostrado que é somente um método aproximado. Quando usado para analisar um simples elemento de pórtico submetido aos esforços combinados de força normal e momento fletor, esse método frequentemente superestima a resistência e a rigidez do elemento quando o mesmo é carregado até a região inelástica. Dessa forma, esse método não pode ser classificado como método de Análise Avançada para uso no projeto de estruturas, devendo ser modificado ou refinado para permitir a degeneração da rigidez devido aos efeitos da plasticidade distribuída.

2.3 Métodos de Análise Avançada

Conforme KIM e CHEN (1996-a), desde meados dos anos de 1970, pesquisas têm sido realizadas sobre o desenvolvimento e validação de vários métodos de Análise Avançada. Diferentes tipos de Análise Avançada podem ser classificados em duas categorias:

- Método da rótula plástica refinada,
- Método da zona plástica.

2.3.1 Método da Rótula Plástica Refinada

Nos métodos de análise com plasticidade concentrada os elementos de pórtico são usados para modelar todas as barras da estrutura. Nesta análise assume-se que cada elemento permanece totalmente elástico exceto nas suas extremidades, onde a rótula plástica de comprimento nulo pode ocorrer. Quando a capacidade plástica da barra é atingida, a rótula plástica é inserida na extremidade do elemento para representar o comportamento inelástico da barra.

Pesquisas de LIEW et al. (1993-a, b) mostraram que o método de rótula elastoplástica convencional superestima a resistência da barra, uma vez que o mesmo não pode representar a diminuição da rigidez devido ao espalhamento do escoamento ao longo da barra. Além disso, o método convencional não inclui os efeitos das imperfeições geométricas e das tensões residuais na análise, os quais devem ser representados em uma análise avançada.

Segundo LIEW et al. (1993-a) para que os elementos com rótulas plásticas sejam considerados nas análises avançadas de pórticos planos, algumas exigências devem ser cumpridas:

- O modelo deve ser suficientemente preciso mesmo usando somente um elemento por barra. A carga limite não deve superar em 5% os valores obtidos com soluções de análises “exatas” de zona plástica;
- O modelo deve ser capaz de representar os efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$, incluindo os efeitos de pilares instáveis (leaning columns). O modelo deve também incluir os efeitos da distribuição da plasticidade associada com as tensões residuais e as imperfeições geométricas iniciais (fora do prumo e curvatura inicial);
- Os efeitos da inelasticidade devem ser representados, tanto na deformação axial, como na deformação por flexão;
- Os esforços solicitantes nas seções não podem violar a resistência máxima definida pela condição da plasticidade completa da seção. Dessa forma, com a formação da rótula plástica, as forças internas na seção transversal do elemento deverão mover na superfície plástica.

Na análise da rótula plástica refinada, os efeitos de segunda ordem associados com a instabilidade (efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$) são calculados usando-se as funções de estabilidade. Este método é baseado em modificações do método da rótula elastoplástica. Duas modificações são feitas para levar em conta a degeneração gradual da rigidez da seção, nos locais de rótula plástica, bem como a degradação gradual da rigidez da barra entre duas rótulas plásticas. Consequentemente, o método da rótula plástica refinada preserva a eficiência e a simplicidade do método da rótula plástica, mas sem superestimar a resistência e a rigidez da barra.

A Figura 2.2 mostra curvas normalizadas carga-deslocamento no plano de flexão de uma viga biengastada com carga concentrada a um terço do vão, com o objetivo de comparar o comportamento descrito pela análise de rótula plástica convencional com a análise de rótula plástica refinada.

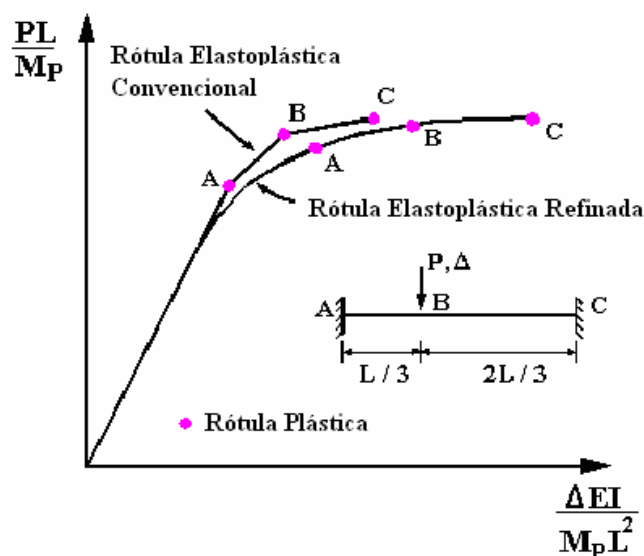


FIGURA 2.2 – Comportamento carga-deslocamento: análise de rótula elastoplástica convencional e análise de rótula elastoplástica refinada

Apesar de a análise de rótula elastoplástica fornecer com precisão a carga de colapso da estrutura, o comportamento da curva carga-deslocamento é diferente daquele descrito pelo método da rótula elastoplástica refinada. A curva gerada pelo método convencional é formada por trechos lineares devido a formação de rótulas plásticas “instantâneas”, ao contrário da curva carga-deslocamento gerada pela análise de rótula elastoplástica refinada, que apresenta uma transição suave da rigidez durante todo o processo de

carregamento. Esse comportamento não linear é devido à presença de tensões residuais e ao espalhamento da plasticidade. Percebe-se também que o deslocamento vertical da viga na fase inelástica pelo método da rótula plástica refinada é maior que o deslocamento vertical pelo método convencional.

Pelo fato da análise de rótula elastoplástica convencional omitir os efeitos da tensão residual e da plastificação gradual, a distribuição das forças internas durante o processo de carregamento é diferente daquela prescrita pelo método de análise de rótula plástica refinada, superestimando a rigidez do sistema. A redistribuição da força inelástica na análise de rótula elastoplástica convencional não ocorre até que a primeira rótula plástica na viga seja formada.

Na rótula elastoplástica refinada, a carga correspondente à formação da primeira rótula é maior que a carga da análise convencional. O atraso da formação da primeira rótula plástica é devido à redistribuição das forças inelásticas, que ocorrem muito antes da plastificação total da seção A. Os efeitos da plastificação no ponto A tendem a redistribuir a carga para outros pontos da barra que ainda são mais rígidos.

2.3.2 Método da Zona Plástica ou Plasticidade Distribuída

Entre os vários métodos de análise avançada, o método da zona plástica é considerado como aquele que fornece os resultados mais precisos. Esse método envolve o modelamento da distribuição gradual da plasticidade no volume do elemento. O método é capaz de incluir diversos atributos físicos e comportamentos das estruturas de aço como, por exemplo, as tensões residuais e as imperfeições geométricas, que podem ser modeladas diretamente na análise.

Existem dois métodos de análise com zona plástica. O primeiro envolve o uso de elementos finitos tridimensionais de cascas. Essa análise exige tipicamente o modelamento da estrutura usando um grande número de elementos finitos e a integração numérica para calcular a matriz de rigidez elastoplástica. A análise tridimensional do espalhamento da plasticidade, quando combinada com a teoria de 2ª ordem para considerar o problema da estabilidade é computacionalmente trabalhosa e, portanto,

mais adequada para a análise de estruturas de pequena escala, ou se são exigidas respostas detalhadas de pontos localizados de estrutura.

O segundo método de análise em teoria de 2ª ordem com zona plástica é baseado na teoria de viga-pilar, onde as barras de pórtico são discretizadas em vários elementos finitos e a seção transversal é subdividida em fatias, conforme mostra a Fig. 2.3. O equilíbrio de cada elemento deve ser formulado considerando sua posição deslocada, ou seja, em teoria de 2ª ordem, e deve incluir os efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$, garantindo a interação entre o sistema estrutural e suas barras no estudo da estabilidade da estrutura.

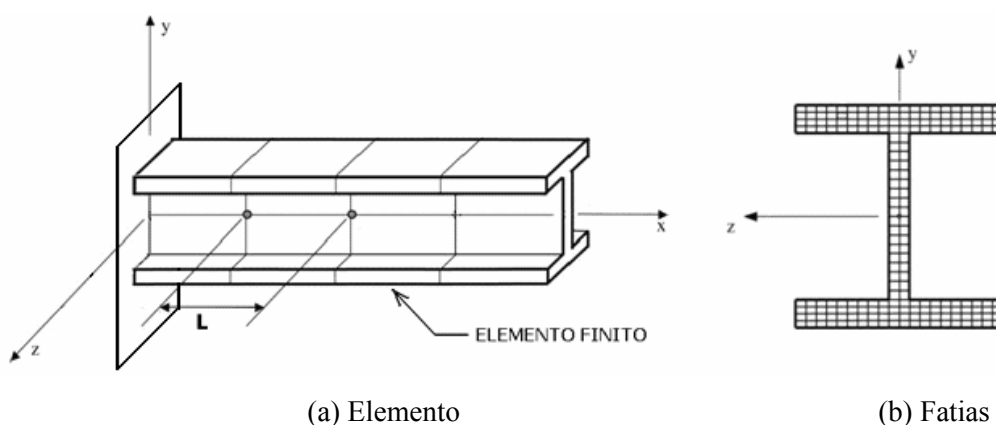


FIGURA 2.3 – Modelagem do método de zona plástica

Nesse método a tensão residual em cada fatia é admitida ser constante, desde que as fatias tenham pequena espessura. O estado de tensão em cada fatia pode ser calculado, permitindo que a distribuição gradual da plastificação devido ao escoamento possa ser captada.

A análise utilizando o método da zona plástica é capaz de acomodar os fatores mais importantes relacionados com os pórticos de aço e prever com precisão a capacidade última da estrutura, conforme ilustra a Fig. 2.4.

Esse segundo tipo de análise é, portanto, amplamente usado no desenvolvimento de bancos de dados e na calibração de pórticos, visando validar análises inelásticas de segunda ordem. A análise com zona plástica também é frequentemente usada para substituir ensaios em laboratórios de estruturas de grande porte e com elevado custo para pesquisas.

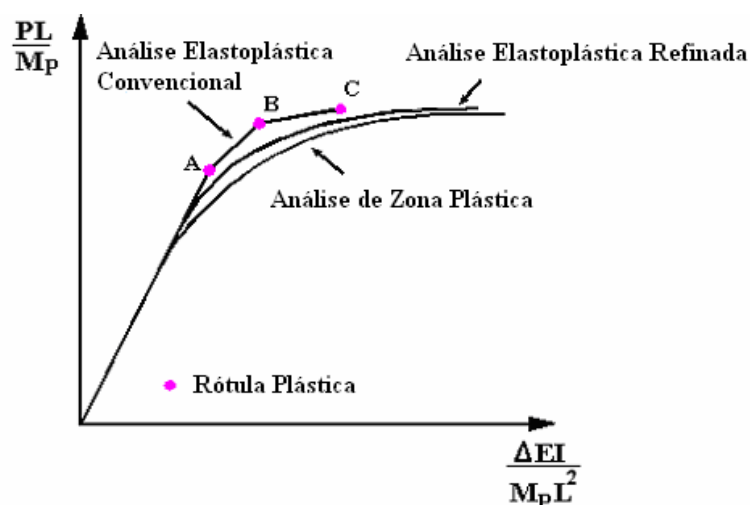


FIGURA 2.4 – Comportamento carga-deslocamento: análise de rótula elastoplástica convencional, análise de rótula elastoplástica refinada e análise de zona plástica

2.4 Atributos para o Modelo de Análise Avançada

A *Análise Inelástica Avançada* refere-se a qualquer método de análise que, de forma adequada, avalie simultaneamente a resistência e a estabilidade de um sistema estrutural como um todo. Esse tipo de análise consiste basicamente em introduzir no modelo numérico e nas formulações a serem adotados todos os fatores considerados relevantes na análise da estrutura, e que permitem ao calculista fazer o dimensionamento seguro do sistema estruturado em aço.

Dentre os fatores considerados relevantes a serem incluídos, de forma explícita ou implícita na análise avançada, segundo CHEN et al. (1996), destacam-se:

A) Atributos físicos

- *Topologia de pórticos: comprimento das barras considerados como a distância entre os eixos das mesmas ou como os comprimentos livres das barras com nós finitos;*
- *Estruturas bi ou tridimensionais com elementos ortogonais ou inclinados;*
- *Imperfeições iniciais devido à curvatura inicial das barras, pórticos e pilares fora de prumo, desalinhamento das barras, distorção da seção transversal;*
- *Tensões residuais devido a processos de fabricação e montagem;*

- Restrições de extremidades devido a contraventamentos, apoios, fundações, etc.;
- *Tipos de ligações: flexível, rígida, semirrígida;*
- *Tipos de seções transversais: simétrica, não simétrica, perfil aberto ou fechado;*
- *Barras de perfis prismáticos ou não-prismáticos;*
- Sequência de construção/montagem;
- Interação com a fundação.

B) Resposta a fenômenos não lineares

Não linearidade geométrica:

- *Efeito $P-\Delta$: momentos de segunda ordem devido a forças axiais agindo nos deslocamentos associados com rotação de corda do eixo longitudinal;*
- *Efeito $P-\delta$: momentos de segunda ordem devido a forças axiais agindo nos deslocamentos associados com a curvatura de barras fletidas;*
- *Deformação axial devido ao “efeito bowing”;*
- *Deformação por cisalhamento das barras;*
- Flambagem local e distorções;
- Interação entre flambagem local e global;
- Deformações de painéis.

Não linearidade física dos materiais:

- *Formação de rótulas plásticas;*
- *Distribuição da plastificação ao longo das barras e das seções transversais;*
- *Strain hardening (encruamento do material);*
- Descarregamento devido a deformações plásticas;
- *Interação inelástica da força normal, momentos fletores, momentos de torção e força cortante;*
- Efeitos de plasticidade cíclica.

C) Efeitos de carregamentos:

- *Carregamentos proporcionais e não proporcionais;*

- *Carregamentos conservativos* e não conservativos;
- Carregamentos fora do centro de cisalhamento;
- Carregamentos variáveis e repetitivos;
- Carregamentos dinâmicos;
- Carregamentos devido aos estágios de construção (escoramentos, equipamentos, etc.).

D) Incertezas

- Variabilidade dos carregamentos;
- Variabilidade das resistências das ligações, das barras e das estruturas;
- Variabilidade da resistência dos materiais.

Para que um método de análise seja classificado como avançado nem todos os atributos mostrados anteriormente necessitam ser representados no modelo. Dessa forma, a literatura técnica tem considerado que, pelo menos, o estudo em teoria de segunda ordem (efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$), a distribuição da plasticidade, as tensões residuais, as imperfeições geométricas iniciais, as deformações por cisalhamento e a flexibilidade das ligações devem ser levadas em conta na análise. A falta de alguns atributos caracteriza uma limitação da análise, e essa limitação deve ser levada em conta no projeto final conforme os critérios estabelecidos pelas normas técnicas. Dentre os atributos descritos anteriormente, aqueles destacados em *itálico* são considerados na presente formulação.

CAPÍTULO

3

FORMULAÇÃO TEÓRICA PARA ANÁLISE INELÁSTICA DE PÓRTICOS PLANOS CONSIDERANDO A TEORIA DE TIMOSHENKO

3.1 Considerações Iniciais

A análise do comportamento estrutural de barras pode ser realizada, com suficiente aproximação, com base na teoria clássica de Bernoulli-Euler, na qual considera-se a hipótese de que as seções transversais planas, inicialmente normais ao eixo da viga, permanecem planas, indeformáveis e normais a este eixo após a deformação. Essa teoria, desenvolvida em 1705 e ainda usualmente utilizada pelos engenheiros devido à sua simplicidade, não leva em conta as deformações causadas por tensões de cisalhamento (distorções) nas seções transversais.

A teoria clássica de Bernoulli-Euler é mais apropriada para barras cujas dimensões da seção transversal são pequenas em comparação com seu comprimento (barras longas e esbeltas), ocorrendo diferenças significativas no caso de barras onde a razão entre o seu comprimento e a altura da seção transversal é pequena (barras curtas), principalmente no caso de perfis metálicos do tipo I, onde a influência da deformação por cisalhamento é mais pronunciada pelo fato de possuírem elevados fatores de forma. Nesses casos, os efeitos do cisalhamento não podem ser desprezados e o modelo de Timoshenko pode ser adotado.

Em 1921 TIMOSHENKO¹ apud PLAIS (1998) estendeu o limite de validade da teoria clássica, ao introduzir os efeitos do cisalhamento, tomados como constantes ao longo da altura da seção transversal da barra, nas equações diferenciais que governam o problema. Dessa forma, a consideração de que as seções transversais permanecem planas após a deformação continua válida, porém não mais perpendiculares ao eixo normal da viga. A teoria admite, portanto, além da deformação oriunda do momento fletor, uma deformação adicional devido à distorção da seção.

Em GERE (1965) e TIMOSHENKO e GERE (1983, 1984) podem ser encontradas discussões importantes sobre o desenvolvimento teórico de vigas considerando-se a influência das deformações por cisalhamento, bem como em AMARAL (2002), que apresenta um estudo bastante didático sobre a influência dos efeitos do cisalhamento na análise de vigas.

WANG (1995) mostrou que soluções considerando-se o modelo de Timoshenko podem ser facilmente obtidas, sem a necessidade de se desenvolver análises mais complexas de deformações por flexão e cisalhamento. O autor apresentou flechas e esforços solicitantes resultantes de vigas de Timoshenko considerando-se vários tipos de carregamentos e condições de contorno, associadas às soluções correspondentes na teoria clássica.

Vários modelos de elementos finitos que consideram as hipóteses de Timoshenko já foram propostos na literatura, diferindo na escolha das funções de interpolação utilizadas para o deslocamento vertical e rotacional. O elemento de viga de Timoshenko mais simples é atribuído a HUGHES² apud OWEN e HINTON (1980), que considera interpolações lineares tanto para os deslocamentos transversais, quanto para as rotações. No entanto, devido à inconsistência da ordem das funções de interpolação utilizadas para os deslocamentos transversais e rotações, o modelo leva ao efeito “shear locking”, acarretando o bloqueio ou travamento da solução.

¹TIMOSHENKO, S. P. (1921) *On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars*. Philosophical Magazine, v. 41, pp 744-746.

²HUGHES, T. J. R., TAYLOR, R. L. e KANOKNUKULCHAI, S. (1977) *A Simple and Efficient Finite Element for Bending*. Int. J. Num. Meth. Engng. 11, pp 1529-1543.

A Teoria de Timoshenko tem sido amplamente investigada e aplicada na análise estrutural. No entanto, a ação combinada do efeito do cisalhamento e do efeito P-delta associados à flexão tem sido pouco estudada. Segundo LIU (2007), em problemas não lineares geométricos, o efeito da deformação por cisalhamento pode contribuir significativamente para o comportamento não linear de estruturas.

NEVES (2000) desenvolveu um programa computacional para a determinação mais rigorosa dos deslocamentos, esforços internos, deformações e tensões em grelhas de concreto armado. Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento, o autor adaptou ao modelo de grelha a distorção da seção transversal, empregando-se a teoria de vigas de Timoshenko.

Baseado no trabalho de NEVES (2000), BRANCO (2002) desenvolveu um algoritmo, com a correspondente implementação de um código computacional, baseado no Método dos Elementos Finitos, considerando-se as não lineares, geométrica e do material, de pórticos planos em concreto armado. Para levar em conta a influência das tensões de cisalhamento foi utilizada a teoria de Timoshenko para a obtenção da matriz de rigidez do elemento.

Visando obter resultados que possam representar com uma maior aproximação a deformação real das barras de uma estrutura é apresentada uma formulação numérica considerando-se o modelo de Timoshenko para pórticos planos de aço. Finalmente, exemplos numéricos são apresentados para comprovar a importância do efeito da distorção da seção transversal na análise, principalmente no caso onde a razão entre o comprimento da barra e a altura da seção transversal é pequena.

3.2 Formulação Numérica

Visando ao estudo da influência das deformações por cisalhamento no comportamento de barras de estruturas de aço é apresentada, neste capítulo, uma teoria geral para a análise não linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos, através da hipótese cinemática da Teoria de Timoshenko. A formulação considera ambos os comportamentos não lineares, geométrico (NLG) e do material (NLM), das estruturas.

O desenvolvimento teórico é feito dentro de uma rigorosa formulação Lagrangiana, que utiliza a técnica corrotacional para a dedução consistente das matrizes do elemento de pórtico plano. A formulação apresentada pretende ser a mais geral possível, permitindo que os nós sofram grandes deslocamentos e rotações e as barras sofram grandes alongamentos e curvaturas e, além disso, estas barras podem ser não-homogêneas, não-prismáticas, possuir tensões residuais, imperfeições iniciais e podem ser constituídas de material elastoplástico.

A seguir é feita uma apresentação itemizada desta teoria para melhor entendimento do assunto, observando que os trabalhos de PIMENTA (1986, 1989), LAVALL (1996), SILVA e LAVALL (2008), entre outros, foram importantes para este desenvolvimento teórico, possibilitando a formulação analítica das matrizes de rigidez tangente, elástica e elastoplástica, considerando-se a teoria de Timoshenko para levar em conta o efeito do cisalhamento nas seções transversais das barras.

3.2.1 Deformações e Tensões

Deformações

Seja uma fibra de material onde se designa por V_r , A_r e l_r o seu volume, a sua área da seção transversal e o seu comprimento, respectivamente, na configuração de referência ou inicial. Por V_c , A_c e l_c são designados o seu volume, a sua área da seção transversal e o seu comprimento, respectivamente, na configuração corrigida ou atual ou deformada, na qual atua sobre a fibra uma força normal N , conforme a Fig. 3.1.

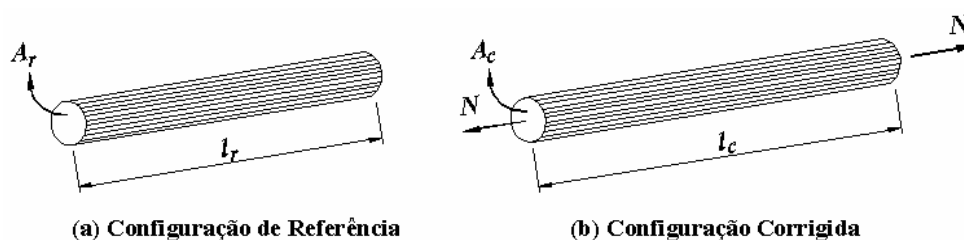


FIGURA 3.1 – Configurações de uma fibra de material

Evidentemente, são válidas as seguintes equações:

$$\begin{cases} V_r = A_r l_r \\ V_c = A_c l_c \end{cases} \quad (3.1)$$

Uma medida de deformação é definida como qualquer grandeza que compare os comprimentos da fibra nas configurações de referência e corrigida. Uma medida básica de deformação é o estiramento da fibra, dado por:

$$\lambda = \frac{l_c}{l_r} \quad (3.2)$$

Uma família de medidas de deformação ou família de deformações pode ser definida através de:

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \frac{(\lambda^{2m} - 1)}{2m} & , m \neq 0 \\ \ln \lambda & , m = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Com a ajuda da Eq. (3.2) podem ser explicitados alguns membros desta família:

a) Deformação quadrática ou de Green-Lagrange: $m = 1$

$$\varepsilon_1 = \frac{\lambda^2 - 1}{2} = \frac{l_c^2 - l_r^2}{2l_r^2} \quad (3.3a)$$

b) Deformação linear ou técnica ou de engenharia: $m = 1/2$

$$\varepsilon_{1/2} = \lambda - 1 = \frac{l_c - l_r}{l_r} = \frac{\Delta l}{l_r} \quad (3.3b)$$

c) Deformação natural ou logarítmica ou de Henchy: $m = 0$

$$\varepsilon_o = \ln \lambda = \ln \frac{l_c}{l_r} \quad (3.3c)$$

d) Deformação hiperbólica ou de Reiner: $m = -1/2$

$$\varepsilon_{-1/2} = 1 - \lambda^{-1} = \frac{l_c - l_r}{l_c} = \frac{\Delta l}{l_c} \quad (3.3d)$$

e) Deformação de Almansi: $m = -1$

$$\varepsilon_{-1} = \frac{1 - \lambda^{-2}}{2} = \frac{l_c^2 - l_r^2}{2l_c^2} \quad (3.3e)$$

Derivando-se a Eq. (3.3) no tempo, com a ajuda da Eq. (3.2) e sendo $\dot{\lambda} = \frac{\dot{l}_c}{l_r}$, obtém-se uma família de taxas de deformação:

$$\dot{\varepsilon}_m = \frac{d\varepsilon_m}{dt} = \lambda^{2m-1} \cdot \dot{\lambda} = \lambda^{2m} \frac{\dot{l}_c}{l_c}$$

chamando-se de taxa instantânea de deformação, que independe da configuração de referência, a relação

$$\dot{d} = \frac{\dot{l}_c}{l_c} \quad (3.4)$$

tem-se, finalmente, a família de taxas de deformação, dada por:

$$\dot{\varepsilon}_m = \lambda^{2m} \dot{d} \quad (3.5)$$

No caso de pequenas deformações, pode-se considerar que $\lambda \cong 1$ e, nesse caso, todos os membros das famílias (3.3) e (3.5) se confundem.

Tensões

A tensão de Cauchy e a tensão de engenharia (ou nominal) da fibra são definidas, respectivamente, por:

$$\sigma_C = \frac{N}{A_c} \quad \text{e} \quad \sigma_N = \frac{N}{A_r} \quad (3.6)$$

No entanto, outras definições para as tensões são possíveis, podendo-se chegar a elas através da potência da força normal N por unidade de volume de referência. Do trabalho de N por unidade de volume de referência dado por $W = N(l_c - l_r)/V_r$, determina-se a potência de N por:

$$\dot{\omega} = \frac{N}{V_r} \dot{l}_c \quad (3.7)$$

que pode ser escrita em função de σ_N , com o auxílio das Eq. (3.2) e (3.4), através de:

$$\dot{\omega} = \lambda \sigma_N \dot{d} \quad (3.8)$$

Para se definir a tensão σ_m conjugada com a deformação ε_m dada em (3.3), deve-se igualar a potência dos esforços externos, dada pela Eq. (3.8), com a potência dos esforços internos, dada por:

$$\dot{\omega} = \sigma_m \dot{\varepsilon}_m \quad (3.9)$$

Igualando-se (3.8) com (3.9) e com o auxílio de (3.5), tem-se que:

$$\sigma_m = \lambda^{1-2m} \sigma_N \quad (3.10)$$

que representa a família de tensões σ_m conjugada com a família de deformações ε_m dada pela Eq. (3.3).

Alguns membros dessa família podem ser definidos em função da tensão de engenharia σ_N da seguinte maneira:

a) Segunda tensão de Piola-Kirchhoff

$$\sigma_1 = \lambda^{-1} \sigma_N \quad (3.11a)$$

que é conjugada com a deformação de Green-Lagrange, dada pela Eq. (3.3a).

b) Tensão de engenharia ou tensão nominal: $m = 1/2$

$$\sigma_{1/2} = \sigma_N \quad (3.11b)$$

que é conjugada com a deformação de engenharia ou linear, dada pela Eq. (3.3b).

c) Tensão de Kirchhoff-Treffz: $m = 0$

$$\sigma_0 = \lambda \sigma_N \quad (3.11c)$$

conjugada com a deformação de Henchy ou natural ou hiperbólica, dada pela Eq. (3.3c).

Derivando-se a Eq. (3.10) no tempo, obtém-se uma família de taxas de tensionamento dada por:

$$\dot{\sigma}_m = \lambda^{1-2m} \dot{\sigma}_N + (1-2m)\lambda^{-2m} \dot{\lambda} \sigma_N \quad (3.12)$$

Chamando a atenção para o caso de pequenas deformações, quando $\lambda \cong 1$, as Eqs. (3.11) e (3.12) ficam:

$$\sigma_m \cong \sigma_N \quad \text{e} \quad \dot{\sigma}_m \cong \dot{\sigma}_N + (1-2m)\dot{\lambda} \sigma_N \quad (3.13)$$

ou seja, todos os membros da Eq. (3.11) se confundem, mas os membros da Eq. (3.12) diferem entre si.

Numa análise teórica consistente em mecânica dos sólidos e estruturas, as medidas de tensões e deformações devem ser conjugadas e objetivas. Conforme demonstrado, as tensões e deformações de engenharia são pares de medidas de tensões e deformações conjugadas. Ao se adotar o sistema de coordenadas corrotacionais no desenvolvimento da formulação deste trabalho, pode-se garantir que as tensões e deformações de engenharia são, também, pares de medidas de tensões e deformações objetivas. Elas serão utilizadas como referência neste trabalho, sendo designadas por:

$$\varepsilon_{1/2} = \varepsilon = \lambda - 1 \quad \sigma_{1/2} = \sigma = \sigma_N \quad (3.14)$$

cujas derivadas no tempo valem:

$$\dot{\varepsilon}_{1/2} = \dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \quad \dot{\sigma}_{1/2} = \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_N \quad (3.15)$$

Ao se considerar o efeito das deformações por cisalhamento, o tensor de deformações de uma fibra de material é dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & -0,5\gamma_{xy} \\ -0,5\gamma_{yx} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

sendo:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{1/2} = \lambda - 1 = \frac{l_c}{l_r} - 1 = \frac{\Delta l}{l_r} \quad (3.17)$$

$$\sigma_x = \sigma_{1/2} = \sigma_N = \frac{N}{A_r} \quad (3.18)$$

Na teoria de Timoshenko a tensão de cisalhamento τ_{xy} , conjugada à distorção γ_{xy} , obtida em função da força cortante V e admitida constante em cada seção, é dada por:

$$\gamma_{xy} = \frac{d_u}{d_y} + \frac{d_v}{d_x} \quad (3.19)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{V}{k_c A_r} \quad (3.20)$$

3.2.2 Relações Constitutivas

Tratando de forma concisa as relações tensão x deformação de uma fibra, usam-se as definições anteriores de ε_m (Eq. (3.3)) e σ_m (Eq. (3.10)), para se introduzir de forma consistente o módulo de rigidez do material de uma fibra e abordar de maneira sucinta as relações constitutivas elásticas e elastoplásticas das fibras, as quais serão utilizadas neste trabalho.

Seja a relação entre tensão \times deformação expressa por:

$$\sigma_m = \sigma_m (\varepsilon_m) \quad (3.21)$$

Relaciona-se, neste caso, tensões e deformações conjugadas por uma questão de simplicidade e conveniência, uma vez que qualquer combinação é admissível. Se a Eq. (3.21) for linear para um certo valor de m , não o será para os outros. Isto quer dizer que o conceito de linearidade física depende da definição adotada para a tensão e deformação, conforme afirma PIMENTA (1986).

Derivando-se a Eq. (3.21) no tempo, vem que:

$$\dot{\sigma}_m = D_m \dot{\varepsilon}_m \quad (3.22)$$

onde:

$$D_m = \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon_m} \quad (3.23)$$

é o módulo de rigidez do material de uma fibra, introduzido por meio da Eq. (3.23), sendo portanto, o coeficiente angular da curva $\sigma_m \times \varepsilon_m$.

Levando-se as Eqs. (3.12) e (3.5) na Eq. (3.22), vem que:

$$\lambda^{1-2m} \dot{\sigma}_N + (1-2m)\lambda^{-2m} \dot{\lambda} \sigma_N = D_m \lambda^{2m-1} \dot{\lambda} \quad (3.24)$$

Escrevendo-se a Eq. (3.24) para $m = 1/2$, que é a referência adotada neste trabalho, tem-se:

$$\dot{\sigma}_{1/2} = D_{1/2} \dot{\varepsilon}_{1/2} \quad (3.25)$$

Com o auxílio da Eq. (3.15) e fazendo $D_{1/2} = D$, fica:

$$\dot{\sigma}_N = D \dot{\lambda} \quad (3.26)$$

Levando-se a Eq. (3.26) na Eq. (3.24) e arranjando, chega-se à:

$$D_m = \lambda^{2-4m} D + (1-2m) \lambda^{1-4m} \sigma_N \quad (3.27)$$

que representa uma família de módulos de rigidez.

Da Eq. (3.27) pode-se obter uma expressão para D , dada por:

$$D = \lambda^{4m-2} D_m + (2m-1) \lambda^{-1} \sigma_N \quad (3.28)$$

Para pequenas deformações, $\lambda \cong 1$,

$$D_m = D + (1-2m) \sigma_N \quad (3.27a)$$

$$D = D_m + (2m-1) \sigma_N \quad (3.28a)$$

donde se conclui que, mesmo para pequenas deformações, os valores de D_m são diferentes para cada família mas, observa-se também que, quando D é muito maior do que σ_N , essas diferenças podem ser irrelevantes. Conforme observa PIMENTA (1986), enquanto isso é comum na elasticidade, não é verdade na elastoplasticidade, onde D pode ser muito pequeno, nulo ou até negativo.

Pensando agora em abordar de maneira sucinta as relações constitutivas elásticas e elastoplásticas, que serão utilizadas neste trabalho, considere-se a Fig. 3.2, onde é mostrada a relação tensão \times deformação expressa por $\sigma_m = \sigma_m(\varepsilon_m)$.

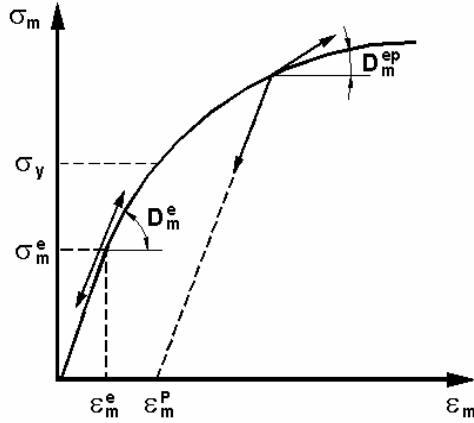


FIGURA 3.2 – Módulo de rigidez longitudinal no comportamento elastoplástico de uma fibra

Diz-se que uma fibra está em regime elástico se existe uma relação que associa cada deformação a uma só tensão. Nesse caso, tem-se:

$$\dot{\sigma}_m = D_m^e \dot{\varepsilon}_m \quad (3.29)$$

e tanto em carga $(\varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m > 0)$, quanto em descarga $(\varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m < 0)$, o módulo de rigidez elástica,

$$D_m^e = \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon_m} \quad (3.30)$$

é único e é função apenas de ε_m e independe de $\dot{\varepsilon}_m$.

$$D_m^e = D_m^e(\varepsilon_m) \quad (3.31)$$

Diz-se que uma fibra está em regime elastoplástico se:

$$\dot{\sigma}_m = \begin{cases} D_m^e \dot{\varepsilon}_m & , \text{ se } \varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m < 0 & \text{(descarga)} \\ D_m^{ep} \dot{\varepsilon}_m & , \text{ se } \varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m > 0 & \text{(carga)} \end{cases} \quad (3.32)$$

onde D_m^{ep} é o módulo de rigidez elastoplástica.

Pode-se escrever a Eq. (3.32) do regime elastoplástico, de forma simplificada, através de:

$$\dot{\sigma}_m = D_m \dot{\varepsilon}_m \quad (3.33)$$

onde D_m tem dois valores, D_m^e e D_m^{ep} , e é uma função de ε_m e $\dot{\varepsilon}_m$.

$$D_m = D_m \left(\varepsilon_m, \dot{\varepsilon}_m \right) \quad (3.34)$$

Ao se analisar uma barra em regime elastoplástico distinguem-se, conforme mostrado na Fig. 3.2, duas regiões: uma região elástica, onde σ_m é menor do que σ_y , sendo σ_y a tensão inicial de escoamento do material e uma região plástica, onde σ_m é maior do que σ_y , de tal forma que:

- a) Se $(\sigma_m - \sigma_y) < 0$, a barra está na fase elástica e $D_m = D_m^e = \frac{d\sigma_m}{d\varepsilon_m}$, tanto em carga quanto em descarga.
- b) Se $(\sigma_m - \sigma_y) > 0$, a barra se encontra na fase plástica e $D_m = D_m^e$, se ela estiver em descarga, ou seja $\varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m < 0$, ou $D_m = D_m^{ep}$ se estiver em carga, ou seja $\varepsilon_m \dot{\varepsilon}_m > 0$.

Neste trabalho, o módulo de rigidez longitudinal D_f e transversal D_c do material de uma fibra são introduzidos por meio de:

$$D_f = \frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x} \quad e \quad D_c = \frac{d\tau_{xy}}{d\gamma_{xy}} \quad (3.35)$$

A plasticidade será considerada apenas em relação à tensão normal, ignorando-se a interação de σ_x e τ_{xy} durante o escoamento, conforme fazem OWEN e HINTON (1980)

e NETO e PIMENTA (2004), que afirmam que experiências têm mostrado que o efeito do cisalhamento não é um fator de primeira importância no escoamento da seção, principalmente quando as barras são esbeltas.

3.2.3 Definição dos Sistemas de Coordenadas e Graus de Liberdade

Na análise de sólidos e estruturas pelo método dos elementos finitos, a formulação Lagrangiana é a mais utilizada para a obtenção da matriz de rigidez tangente dos elementos. Nessa formulação os campos de deslocamentos dos elementos são definidos em relação a uma configuração de referência fixa, arbitrariamente escolhida (eixos cartesianos fixos). Pensando então num desenvolvimento teórico baseado numa rigorosa formulação Lagrangiana, o sistema de referência global da estrutura escolhido neste trabalho é o sistema de coordenadas Lagrangiano ou Cartesiano.

Porém, conforme já mencionado anteriormente, as tensões e deformações de engenharia adotadas como referência neste trabalho são energeticamente conjugadas, mas não são objetivas. Para torná-las objetivas, escolhe-se inicialmente um sistema local de coordenadas corrotacional, diferente do sistema global de referência, que está ligado ao elemento, no qual os deslocamentos generalizados são medidos em relação a uma configuração deformada. Trata-se, portanto, de um sistema de referência móvel que acompanha a estrutura deformada.

Nesse sistema os graus de liberdade de corpo rígido não são considerados, levando-se em conta apenas os graus de liberdade naturais, que são quantidades objetivas. Escrevem-se, então, as funções de interpolação para os deslocamentos locais do elemento em função desses graus de liberdade e se obtêm as deformações de engenharia objetivas. Além disso, a obtenção das matrizes de rigidez do problema é facilitada, uma vez que se trabalha com um número reduzido de graus de liberdade.

Uma transformação de coordenadas muda do sistema corrotacional local para o sistema Lagrangiano ou Cartesiano local, levando-se em conta os deslocamentos de corpo rígido. Finalmente, uma rotação de eixos coloca este último sistema paralelo ao sistema global de referência.

Condição de Extremidades: Rígido –Rígido

A Figura 3.3 mostra um elemento de pórtico plano com extremidades a e b em sua configuração inicial. No sistema global de referência (x, y) , os nós possuem três graus de liberdade, sendo duas translações u e v nas direções x e y , respectivamente, e uma rotação θ , considerada positiva quando medida no sentido anti-horário.

Considerando-se o sistema local de coordenadas corrotacional (x_r, y_r) , com origem no centro do elemento, define-se l_r como o comprimento do elemento entre os seus nós de extremidade, cujo ângulo com o eixo de referência global é ϕ_r .

Para um determinado nível de carregamento, o elemento encontra-se deformado na posição atualizada ou corrigida. Da mesma forma, introduz-se sobre a corda um sistema local de coordenadas corrotacional (x_c, y_c) com origem no seu centro, sendo ϕ_c o ângulo entre a corda e o eixo global x . Para esta posição deformada, o ângulo entre a corda e a tangente é dado por α .

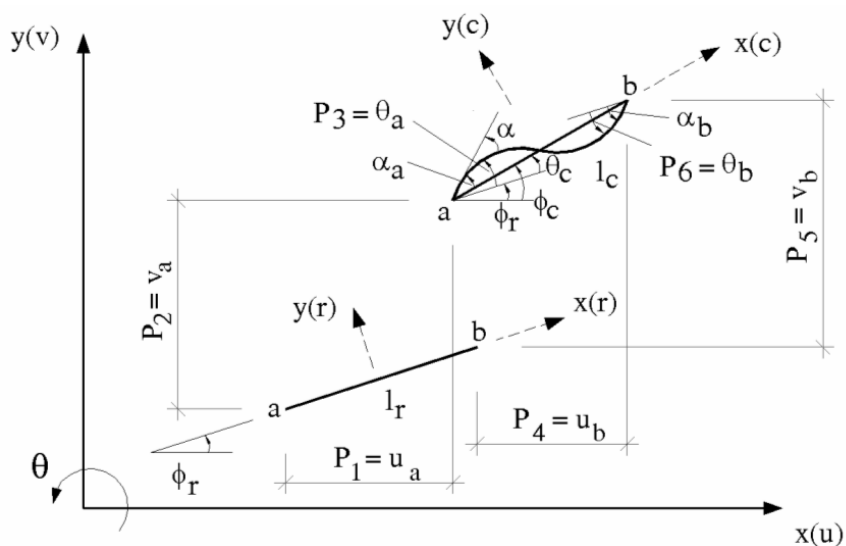


FIGURA 3.3 – Elemento de pórtico plano em sua configuração de referência e em sua configuração corrigida para a condição de extremidades rígido-rígido

Os graus de liberdade, denominados naturais ou corrotacionais podem ser agrupados no vetor 3×1 , definido por:

$$\mathbf{q}^T_{\alpha} = \{q_1, q_2, q_3\} \quad (3.36)$$

sendo, $q_1 = \Delta = l_c - l_r$, $q_2 = \alpha_a$ e $q_3 = \alpha_b$, independentes da rotação de corpo rígido $\theta_c = \phi_c - \phi_r$.

Os graus de liberdade cartesianos p_i ($i=1, \dots, 6$) são definidos por $p_1 = u_a$; $p_2 = v_a$; $p_3 = \theta_a$; $p_4 = u_b$; $p_5 = v_b$; $p_6 = \theta_b$, e podem ser reunidos no vetor \mathbf{p}_i (6×1), denominado vetor de deslocamentos nodais do elemento, da seguinte forma:

$$\mathbf{p}_i^T = (u_a \quad v_a \quad \theta_a \quad u_b \quad v_b \quad \theta_b) \quad (3.37)$$

Os graus de liberdade em coordenadas corrotacionais \mathbf{q}_{α} , e os graus de liberdade em coordenadas globais cartesianos \mathbf{p}_i , podem ser relacionados conforme as expressões a seguir, deduzidas com auxílio da Fig. 3.3.

$$\begin{cases} q_1 = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a = \theta_a - \theta_c = p_3 - \varphi_c + \varphi_r \\ q_3 = \alpha_b = \theta_b - \theta_c = p_6 - \varphi_c + \varphi_r \end{cases} \quad (3.38)$$

onde:

$$\begin{cases} l_c = \left[(x_b - x_a + p_4 - p_1)^2 + (y_b - y_a + p_5 - p_2)^2 \right]^{1/2} \\ l_r = \left[(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 \right]^{1/2} \\ \left. \begin{aligned} \sin \varphi_c &= \frac{y_b - y_a + p_5 - p_2}{l_c}; & \cos \varphi_c &= \frac{x_b - x_a + p_4 - p_1}{l_c} \\ \varphi_c &= \arctg \left(\frac{y_b - y_a + p_5 - p_2}{x_b - x_a + p_4 - p_1} \right); & \varphi_r &= \ar \cos \left(\frac{x_b - x_a}{l_r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Nas equações (Eq. (3.39)), x_a , x_b , y_a e y_b são as coordenadas dos elementos na configuração de referência.

As relações diferenciais entre as coordenadas locais corrotacionais e as coordenadas globais cartesianas podem ser escritas numa matriz $\mathbf{B}_{3 \times 6}$ ao se derivar \mathbf{q}_{α} em relação a \mathbf{p}_i ,

isto é, $\partial q_\alpha / \partial p_i$, também escritas na forma indicial por $q_{\alpha,i}$ (onde a vírgula indica diferenciação e os índices gregos variam de 1 a 3, enquanto os latinos variam de 1 a 6).

$$\mathbf{q}_{\alpha,i} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c & \text{sen} \varphi_c & 0 \\ -\frac{\text{sen} \varphi_c}{l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 1 & \frac{\text{sen} \varphi_c}{l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 0 \\ -\frac{\text{sen} \varphi_c}{l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 0 & \frac{\text{sen} \varphi_c}{l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

onde a matriz \mathbf{B} é uma matriz de mudança de coordenadas que relaciona as taxas de deslocamentos nas coordenadas locais corrotacionais com as taxas de deslocamentos nas coordenadas globais cartesianas.

Esta matriz \mathbf{B} pode ser escrita como $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}\mathbf{T}$, onde:

$$\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 1 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{T}_{(6 \times 6)} = \begin{pmatrix} t & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & t \end{pmatrix}; \quad \mathbf{t}_{(3 \times 3)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_c & \text{sen} \varphi_c & 0 \\ -\text{sen} \varphi_c & \cos \varphi_c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

onde $\bar{\mathbf{B}}$ é a forma local de \mathbf{B} e relaciona os graus de liberdade naturais do sistema corrotacional, com os graus de liberdade do sistema cartesiano local (mudança de coordenadas), \mathbf{T} é a matriz de rotação de eixos, que muda as coordenadas locais no sistema cartesiano para as coordenadas globais também no sistema cartesiano e $\mathbf{0}_3$ é a matriz nula (3x3).

As derivadas segunda de q_α em relação a p_i , isto é $\partial^2 q_\alpha / \partial q_i \partial q_j$, ($\alpha=1,2,3$ e $i=j=1, \dots, 6$), ou $q_{\alpha,ij}$ serão também necessárias e podem ser colocadas em três matrizes simétricas \mathbf{G}_α (6x6) dadas por:

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{bmatrix} \text{sen}^2 \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -\text{sen}^2 \varphi_c & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & \cos^2 \varphi_c & 0 & \text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -\cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{sen}^2 \varphi_c & -\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & \text{simétrica} & & & \cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_3 = \frac{1}{l_c^2} \begin{bmatrix} -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -(\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & (\cos^2 \varphi_c - \text{sen}^2 \varphi_c) & 0 \\ & \text{simétrica} & & & 2\text{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Esta derivada segunda $q_{\alpha,ij}$ é uma relação que envolve apenas geometria, ou seja, deslocamentos em coordenadas corrotacionais e cartesianas, e será uma parcela da matriz geométrica oriunda da teoria de segunda ordem. Esta matriz geométrica \mathbf{G}_α pode ser escrita como um triplo produto matricial $\mathbf{G}_\alpha = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{G}}_\alpha \mathbf{T}$, onde $\bar{\mathbf{G}}_\alpha$, $\alpha=1,2,3$, é a forma local de \mathbf{G}_α e \mathbf{T} é a matriz de rotação de eixos. Então:

$$\bar{\mathbf{G}}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_2 = \bar{\mathbf{G}}_3 = \frac{1}{l_c^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Condição de Extremidade: Rígido – Rótula

A formulação do elemento, descrita a seguir, foi adaptada de ALMEIDA (2006), considerando-se um elemento qualquer ab pertencente ao pórtico, cuja extremidade a é

perfeitamente rígida e a extremidade b é perfeitamente rotulada, conforme mostra a Fig. 3.4.

Analogamente ao caso anterior, pode-se estabelecer a relação entre os graus de liberdade cartesianos p_i e os graus de liberdade corrotacionais q_α , considerando-se as condições das extremidades a rígida e b rotulada e os efeitos da deformação por cisalhamento:

$$\begin{cases} q_1 = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a = \theta_a - \theta_c = p_3 - \varphi_c + \varphi_r \\ q_3 = \alpha_b = -\frac{2-\beta}{4+\beta} q_2 = -\frac{2-\beta}{4+\beta} (p_3 - \varphi_c + \varphi_r) \end{cases} \quad (3.47)$$

sendo β o fator de cisalhamento, definido no Anexo A:

$$\beta = \frac{12EI}{k_c G A l_r^2} \quad (3.48)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal, G o módulo de elasticidade transversal, I o momento de inércia no plano de flexão, A a área da seção transversal, l_r o comprimento do elemento na posição de referência e l/k_c o fator de forma para o cisalhamento.

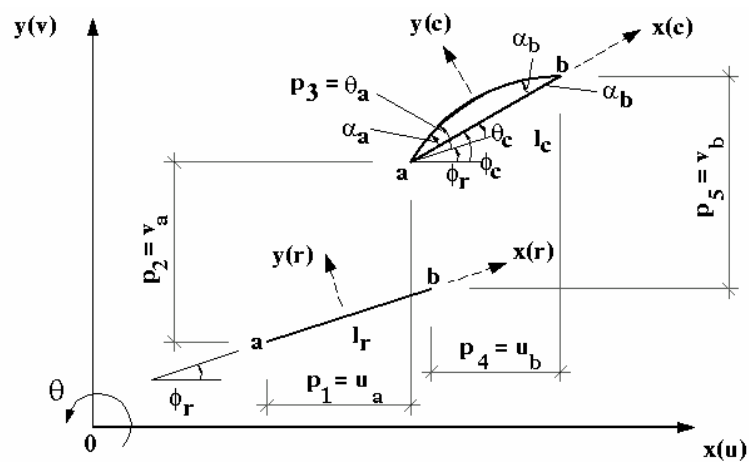


FIGURA 3.4 – Deslocamentos do elemento de pórtico plano em suas configurações de referência e deformada para a condição de extremidades rígido-rotulada

Assim, a matriz \mathbf{B} , obtida derivando-se q_α em relação a p_i , é dada por:

$$q_{\alpha,i} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_c & -\operatorname{sen} \varphi_c & 0 & \cos \varphi_c & \operatorname{sen} \varphi_c & 0 \\ -\frac{\operatorname{sen} \varphi_c}{l_c} & \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 1 & \frac{\operatorname{sen} \varphi_c}{l_c} & -\frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 0 \\ -\eta \frac{\operatorname{sen} \varphi_c}{l_c} & \eta \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & \eta & \eta \frac{\operatorname{sen} \varphi_c}{l_c} & -\eta \frac{\cos \varphi_c}{l_c} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

onde, conforme definido por GERE (1965):

$$\eta = -\frac{2 - \beta}{4 + \beta} \quad (3.50)$$

Pensando na forma local de \mathbf{B} , originada pelo produto $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}}\mathbf{T}$, tem-se:

$$\overline{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 1 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 0 \\ 0 & \eta \frac{1}{l_c} & \eta & 0 & -\eta \frac{1}{l_c} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

onde a matriz de rotação de eixos \mathbf{T} é dada pela Eq. (3.42).

As derivadas de segunda ordem, q_α em relação a p_i , são dadas por:

$$\mathbf{G}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 \varphi_c & -\operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 & -\operatorname{sen}^2 \varphi_c & \operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & \cos^2 \varphi_c & 0 & \operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & -\cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \operatorname{sen}^2 \varphi_c & -\operatorname{sen} \varphi_c \cos \varphi_c & 0 \\ & & & & \cos^2 \varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{1}{l_c^2} \begin{pmatrix} -2\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & (\cos^2\varphi_c - \text{sen}^2\varphi_c) & 0 & 2\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & -(\cos^2\varphi_c - \text{sen}^2\varphi_c) & 0 \\ & 2\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & 0 & -(\cos^2\varphi_c - \text{sen}^2\varphi_c) & -2\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & (\cos^2\varphi_c - \text{sen}^2\varphi_c) & 0 \\ & & & & 2\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{G}_3 = \frac{\eta}{l_c^2} \begin{pmatrix} -2\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & \cos^2\varphi_c - \text{sen}^2\varphi_c & 0 & 2\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & -(\cos^2\varphi_c - \text{sen}^2\varphi_c) & 0 \\ & 2\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & 0 & -(\cos^2\varphi_c - \text{sen}^2\varphi_c) & 2\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & \cos^2\varphi_c - \text{sen}^2\varphi_c & 0 \\ & & & & 2\text{sen}\varphi_c \cos\varphi_c & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Pensando no produto de três matrizes $\mathbf{G}_a = \mathbf{T}^T \overline{\mathbf{G}}_a \mathbf{T}$, tem-se:

$$\overline{\mathbf{G}}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

$$\overline{\mathbf{G}}_2 = \frac{1}{l_c^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

$$\overline{\mathbf{G}}_3 = \frac{\eta}{l_c^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Condição de Extremidade: Rótula – Rígido

De forma análoga, a relação entre os graus de liberdade cartesianos p_i , e os graus de liberdade corrotacionais q_α considerando-se as condições das extremidades a rotulada e b rígida, têm-se.

$$\begin{cases} q_1 = l_c - l_r \\ q_2 = \alpha_a = -\frac{2-\beta}{4+\beta}q_3 = -\frac{2-\beta}{4+\beta}(p_6 - \varphi_c + \varphi_r) \\ q_3 = \alpha_b = \theta_b - \theta_c = p_6 - \varphi_c + \varphi_r \end{cases} \quad (3.58)$$

Assim, a matriz \mathbf{B} , obtida derivando-se q_α em relação a p_i é dada, na sua forma local, por:

$$\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta}{l_c} & 0 & 0 & -\frac{\eta}{l_c} & \eta \\ 0 & \frac{1}{l_c} & 0 & 0 & -\frac{1}{l_c} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

As derivadas de segunda ordem, q_α em relação a p_i , na forma local, são dadas por:

$$\bar{\mathbf{G}}_1 = \frac{1}{l_c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_2 = \frac{\eta}{l_c^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

$$\bar{\mathbf{G}}_3 = \frac{1}{l_c^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

3.2.4 Teoria Estrutural

A teoria estrutural utilizada neste trabalho parte da hipótese cinemática do modelo de Timoshenko, onde se afirma que: “As seções transversais planas e ortogonais ao eixo da barra, permanecem planas e indeformáveis após a deformação, porém não mais permanecem ortogonais ao eixo da barra”.

3.2.5 Cinemática do Elemento: Campo de Deslocamento e Campo de Deformação

Campo de Deslocamento

De acordo com a hipótese de Timoshenko o campo de deslocamento dos pontos pertencentes à barra fica caracterizado se os deslocamentos axiais (\bar{u}) e transversais (\bar{v}) dos pontos situados sobre o eixo são conhecidos, bem como a rotação (θ) das seções transversais, conforme Fig. 3.5.

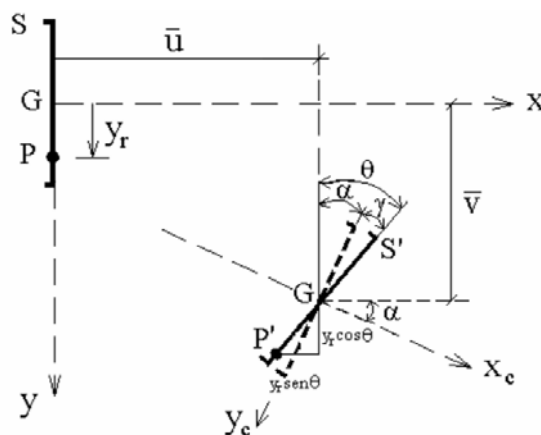


FIGURA 3.5 – Campo de deslocamento na flexão considerando a teoria de Timoshenko

No sistema corrotacional (x_c, y_c) os deslocamentos u_c e v_c representam os campos de deslocamento do ponto P pertencente à seção S , caracterizado pela coordenada y_r relativa ao eixo da barra, dados por:

$$u_c(x, y) = \bar{u}_c(x) - y_r \text{sen} \theta \quad (3.63)$$

$$v_c(x, y) = \bar{v}_c(x) - y_r(1 - \cos \theta) \quad (3.64)$$

onde \bar{u}_c e \bar{v}_c são os deslocamentos do eixo da barra no sistema corrotacional.

Se o ângulo de rotação θ ao longo dos elementos é suficientemente pequeno, o que pode ser obtido com elementos curtos, sem perda da generalidade da formulação, as aproximações de segunda ordem das funções trigonométricas podem ser utilizadas:

$$\text{sen} \theta = \text{tg} \theta \cong \theta; \quad \cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}; \quad \sec \theta \cong 1 + \frac{\theta^2}{2} \quad (3.65)$$

Essas aproximações correspondem à hipótese de pequenas rotações do eixo dos elementos em relação às suas cordas. Devido à formulação corrotacional, essa hipótese não impede a ocorrência de grandes curvaturas, desde que os elementos sejam suficientemente curtos. Se as curvaturas forem pequenas, o que é normal em estruturas usuais da engenharia civil, o ângulo θ será pequeno independentemente do comprimento dos elementos e a hipótese também se justifica.

Assim, com as aproximações adotadas obtêm-se as expressões simplificadas para o campo de deslocamentos:

$$u_c(x, y) = \bar{u}_c(x) - y_r \theta \quad (3.66)$$

$$v_c(x, y) = \bar{v}_c(x) - y_r \frac{\theta^2}{2} \quad (3.67)$$

Campo de Deformação

Partindo-se do campo de deslocamentos dado pelas Eqs. (3.66) e (3.67), e sabendo-se que a rotação total θ é resultado da soma da rotação devido à flexão α e da rotação devido ao cisalhamento γ , conforme definido no anexo A, pode-se determinar as expressões analíticas do campo de deformações consistente com a teoria estrutural adotada. Desprezando-se os termos que contém produto de ordem superior, tem-se:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{d\bar{u}}{dx} - y_r \frac{d\theta}{dx} = \bar{\varepsilon}_x - y_r \alpha' \quad (3.68)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = -\theta + \alpha = -\gamma \quad (3.69)$$

A deformação longitudinal pode ser obtida conforme LAVALL (1996), onde se considera um elemento diferencial de uma barra reta de pórtico plano na configuração inicial, como mostrado na Fig. (3.6-a). Esse elemento é limitado por duas seções transversais ortogonais a um eixo longitudinal, arbitrariamente definido, e distantes dx_r , uma da outra.

Denominando-se fibra a um conjunto de pontos materiais sobre uma reta paralela ao eixo longitudinal, verifica-se que uma fibra a uma distância y_r do eixo e uma fibra nesse eixo têm os comprimentos dS_r e $d\bar{S}_r$, respectivamente, dados por:

$$dS_r = d\bar{S}_r = dx_r \quad (3.70)$$

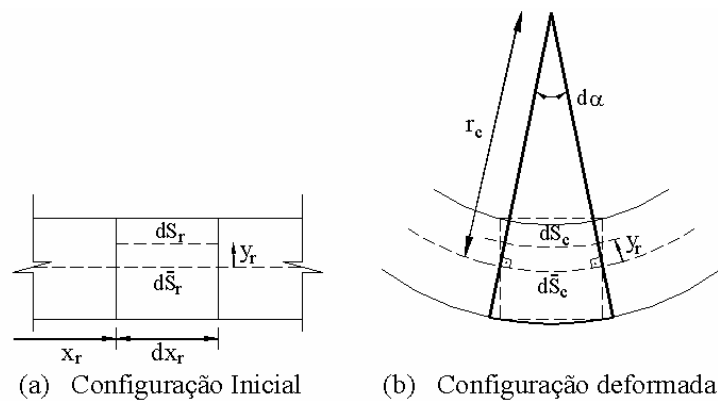


FIGURA 3.6 – Elemento diferencial de barra reta

Seja o mesmo elemento na configuração deformada, conforme Fig. 3.6-b, obtém-se que, para uma fibra a uma distância y_r do eixo da barra e outra pertencente ao eixo, seus comprimentos são, respectivamente, dados por:

$$dS_c = (r_c - y_r)d\alpha \quad e \quad d\bar{S}_c = r_c d\alpha \quad (3.71)$$

onde r_c é o raio de curvatura local e $d\alpha$ é o ângulo interno do setor definido pelas seções transversais, formado após a deformação. Da Eq. (3.71) tem-se que:

$$dS_c = d\bar{S}_c - y_r d\alpha \quad (3.72)$$

O estiramento de uma fibra a uma distância y_r do eixo da barra, λ , e o estiramento de uma fibra do eixo, $\bar{\lambda}$, são definidos por:

$$\lambda = dS_c/dS_r \quad e \quad \bar{\lambda} = d\bar{S}_c/d\bar{S}_r \quad (3.73)$$

Na Eq. (3.73) valores maiores que a unidade indicam alongamento da barra e valores menores indicam encurtamento. Levando-se a Eq. (3.73) na Eq. (3.72), com o auxílio da Eq. (3.70), tem-se o estiramento dado por:

$$\lambda = \bar{\lambda} - y_r \alpha' \quad (3.74)$$

onde $\alpha' = d\alpha/dx_r$. Das definições iniciais, tem-se que a deformação de engenharia da fibra a uma distância y_r do eixo e a deformação de engenharia da fibra do eixo, são dadas, respectivamente, por:

$$\varepsilon = \lambda - 1 \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\lambda} - 1 \quad (3.75)$$

Subtraindo-se a unidade em ambos os lados na Eq. (3.74), tem-se a expressão analítica da deformação longitudinal e definida anteriormente pela Eq. (3.68):

$$\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}_x - y_r \alpha' \quad (3.76)$$

A rotação de flexão α das seções transversais decorre dos deslocamentos \bar{v}_c e \bar{u}_c dos pontos situados sobre o eixo, com mostra a Fig. 3.7, donde se tem que:

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha = \left(\frac{d\bar{v}_c}{dx + d\bar{u}_c} \right) = \left(\frac{d\bar{v}_c / dx}{1 + d\bar{u}_c / dx} \right) = \left(\frac{\bar{v}'_c}{1 + \bar{u}'_c} \right) \quad (3.77)$$

Do triângulo formado por $G'G''H'$ da Fig. 3.7 tem-se que, após a deformação, a fibra do eixo da barra fica com o comprimento infinitesimal $d\bar{S}_c$ dado por:

$$d\bar{S}_c = \left[(dx + d\bar{u}_c)^2 + (d\bar{v}_c)^2 \right]^{1/2} \quad (3.78)$$

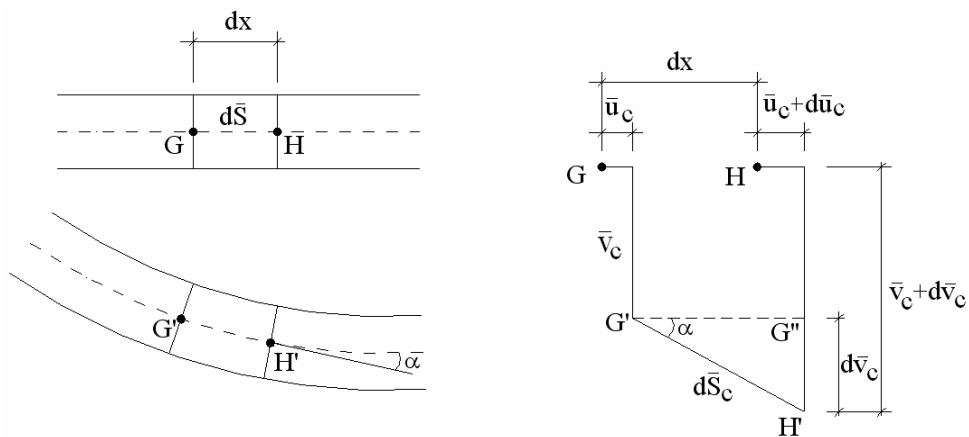


FIGURA 3.7 – Rotação α da seção transversal

O estiramento de uma fibra do eixo é obtido dividindo-se a Eq. (3.78) por $d\bar{S}_r = dx_r = dx$:

$$\bar{\lambda} = \frac{d\bar{S}_c}{d\bar{S}_r} = \left[(1 + \bar{u}'_c)^2 + (d\bar{v}'_c)^2 \right]^{1/2} \quad (3.79)$$

O cosseno do ângulo α , obtido após dividir o numerador e o denominador por dx , é dado por:

$$\cos \alpha = \frac{dx + d\bar{u}_c}{d\bar{S}_c} = \frac{1 + \bar{u}'_c}{\bar{\lambda}} \quad (3.80)$$

E o estiramento da fibra do eixo é dado por:

$$\bar{\lambda} = (1 + \bar{u}'_c) \sec \alpha \quad (3.81)$$

Sabendo-se que $\bar{\varepsilon} = \bar{\lambda} - 1$, a expressão analítica do campo de deformações, consistente com a teoria estrutural, dada pela Eq. (3.76) torna-se:

$$\varepsilon_x = (1 + \bar{u}'_c) \sec \alpha - 1 - y_r \alpha' \quad (3.82)$$

Adotando-se as aproximações de segunda ordem para a função trigonométrica, a Eq.(3.82) pode ser escrita como:

$$\varepsilon_x = (1 + \bar{u}'_c) \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) - 1 - y_r \alpha' \quad (3.83)$$

A determinação das deformações, longitudinal e angular, depende da escolha de funções de interpolação expressas em função dos graus de liberdade naturais. Portanto:

$$\varepsilon_x = f[q_\alpha(p_i)] \quad e \quad \gamma_{xy} = f[q_\alpha(p_i)] \quad (3.84)$$

3.2.6 Equações de Equilíbrio do Elemento

O equilíbrio do elemento pode ser obtido através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). O trabalho virtual interno de um elemento é dado por:

$$\delta W_i = \int_{V_r} \sigma_x \delta \varepsilon_x dV_r + \int_{V_r} \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dV_r \quad (3.85)$$

onde dV_r é o elemento de volume na configuração de referência, σ_x a tensão normal, τ_{xy} a tensão de cisalhamento, $\delta \varepsilon_x$ a deformação longitudinal virtual e $\delta \gamma_{xy}$ distorção virtual de uma fibra.

As deformações virtuais são dadas pelas variações da Eq. (3.84), e obtidas com o emprego da Regra da Cadeia, onde δp_i é o vetor dos deslocamentos nodais virtuais do elemento. Dessa forma, o alongamento e a distorção virtuais são dados, respectivamente, por:

$$\frac{d\varepsilon_x}{dp_i} = \frac{d\varepsilon_x}{dq_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dp_i} = \varepsilon_{x,\alpha} q_{\alpha,i} \quad \therefore \quad \delta\varepsilon_x = \varepsilon_{x,\alpha} q_{\alpha,i} \delta p_i \quad (3.86)$$

$$\frac{d\gamma_{xy}}{dp_i} = \frac{d\gamma_{xy}}{dq_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dp_i} = \gamma_{xy,\alpha} q_{\alpha,i} \quad \therefore \quad \delta\gamma_{xy} = \gamma_{xy,\alpha} q_{\alpha,i} \delta p_i \quad (3.87)$$

As forças nodais internas P_i são definidas de tal forma que:

$$\delta W_i = P_i \delta p_i \quad (3.88)$$

Igualando-se as Eqs. (3.85) e (3.88) com o auxílio das Eqs. (3.86) e (3.87) vem que:

$$\int_{V_r} \sigma_x \varepsilon_{x,\alpha} q_{\alpha,i} \delta p_i dV_r + \int_{V_r} \tau_{xy} \gamma_{xy,\alpha} q_{\alpha,i} \delta p_i dV_r = P_i \delta p_i \quad (3.89)$$

onde $q_{\alpha,i}$ representa uma mudança de coordenadas (do sistema corrotacional para o sistema cartesiano), portanto independente do volume de referência, assim como δp_i , logo:

$$\left(\int_{V_r} \sigma_x \varepsilon_{x,\alpha} dV_r + \int_{V_r} \tau_{xy} \gamma_{xy,\alpha} dV_r \right) q_{\alpha,i} \delta p_i = P_i \delta p_i \quad (3.90)$$

e a equação de equilíbrio do elemento é dada por:

$$P_i = \left(\int_{V_r} \sigma_x \varepsilon_{x,\alpha} dV_r + \int_{V_r} \tau_{xy} \gamma_{xy,\alpha} dV_r \right) q_{\alpha,i} \quad (3.91)$$

Chamando:

$$Q_\alpha = \int_{V_r} (\sigma_x \varepsilon_{x,\alpha} + \tau_{xy} \gamma_{xy,\alpha}) dV_r \quad (3.92)$$

a equação de equilíbrio do elemento, em notação indicial, é dada por:

$$P_i = Q_\alpha q_{\alpha,i} \quad (3.93)$$

Nesta Eq. (3.93), Q_α representa os esforços internos naturais nas coordenadas corrotacionais. Reunindo-se P_i e Q_α em dois vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} , respectivamente, pode-se escrever a Eq. (3.93) na forma matricial:

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Q} \quad (3.94)$$

Matriz de Rigidez Tangente do Elemento

Pensando numa formulação incremental de equilíbrio, a derivada no tempo de P pode ser dada por:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial p} \frac{dp}{dt} \quad (3.95)$$

De onde define-se a matriz de rigidez tangente do elemento nas coordenadas cartesianas como \mathbf{k}_t , dada por:

$$\mathbf{k}_t = \frac{\partial P}{\partial p} \quad (3.96)$$

As componentes k_{ij} da matriz de rigidez tangente são as derivadas de P_i em relação às coordenadas cartesianas p_j . Derivando-se a Eq. (3.93) com o auxílio da Regra da Cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = k_{ij} = q_{\alpha,i} Q_{\alpha,\beta} q_{\beta,j} + Q_\alpha q_{\alpha,ij} \quad (3.97)$$

Derivando-se a Eq. (3.92), obtém-se $Q_{\alpha,\beta}$:

$$Q_{\alpha,\beta} = \int_{V_r} \left(\varepsilon_{x,\alpha} D_f \varepsilon_{x,\beta} + \sigma_x \varepsilon_{x,\alpha\beta} + \gamma_{xy,\alpha} D_c \gamma_{xy,\beta} + \tau_{xy} \gamma_{xy,\alpha\beta} \right) dV_r \quad (3.98)$$

onde $D_f = d\sigma_x/d\varepsilon_x$ e $D_c = d\tau_{xy}/d\gamma_{xy}$.

Definindo-se $D_{\alpha,\beta}^f$, $H_{\alpha,\beta}^f$, $D_{\alpha,\beta}^c$ e $H_{\alpha,\beta}^c$, dados respectivamente por:

$$D_{\alpha,\beta}^f = \int_{V_r} \varepsilon_{x,\alpha} D_f \varepsilon_{x,\beta} dV_r \quad (3.99)$$

$$H_{\alpha,\beta}^f = \int_{V_r} \sigma_x \varepsilon_{x,\alpha\beta} dV_r \quad (3.100)$$

$$D_{\alpha,\beta}^c = \int_{V_r} \gamma_{xy,\alpha} D_c \gamma_{xy,\beta} dV_r \quad (3.101)$$

$$H_{\alpha,\beta}^c = \int_{V_r} \tau_{xy} \gamma_{xy,\alpha\beta} dV_r \quad (3.102)$$

chega-se a:

$$Q_{\alpha,\beta} = D_{\alpha,\beta}^f + H_{\alpha,\beta}^f + D_{\alpha,\beta}^c + H_{\alpha,\beta}^c \quad (3.103)$$

Levando-se a Eq. (3.103) na Eq. (3.97), com o auxílio das Eqs. (3.99) a (3.102), tem-se:

$$k_{ij} = \underbrace{q_{\alpha,i} \left(D_{\alpha,\beta}^f + H_{\alpha,\beta}^f + D_{\alpha,\beta}^c + H_{\alpha,\beta}^c \right) q_{\beta,j}}_{\text{Parcela objetiva}} + \underbrace{Q_\alpha q_{\alpha,ij}}_{\text{Parcela do movimento de corpo rígido}} \quad (3.104)$$

$$k_{ij} = \underbrace{q_{\alpha,i} \left(D_{\alpha,\beta}^f + D_{\alpha,\beta}^c \right) q_{\beta,j}}_{\text{Parcela constitutiva}} + \underbrace{q_{\alpha,i} \left(H_{\alpha,\beta}^f + H_{\alpha,\beta}^c \right) q_{\beta,j}}_{\text{Parcela geométrica}} + Q_\alpha q_{\alpha,ij} \quad (3.105)$$

Na parcela geométrica da Eq. (3.105) a expressão $q_{\alpha,i} \left(H_{\alpha,\beta}^f + H_{\alpha,\beta}^c \right) q_{\beta,j}$ é responsável pelo efeito P - δ e a expressão $Q_\alpha q_{\alpha,ij}$ pelo efeito P - Δ .

Escrevendo em notação matricial, a matriz de rigidez constitutiva vem da parcela constitutiva da Eq. (3.105). Usando-se $q_{\alpha,i} = q_{\beta,j} = \mathbf{B}_{(3 \times 6)}$, e $D_{\alpha,\beta}^f = D_{(3 \times 3)}^f$ e $D_{\alpha,\beta}^c = D_{(3 \times 3)}^c$, simétricas, resulta em:

$$\mathbf{k}_M = \mathbf{B}^T (\mathbf{D}^f + \mathbf{D}^c) \mathbf{B} \quad (3.106)$$

(6x6), também simétrica. A matriz de rigidez geométrica é obtida da parcela geométrica da Eq. (3.105) com o auxílio de $H_{\alpha,\beta}^f = H_{(3 \times 3)}^f$, $H_{\alpha,\beta}^c = H_{(3 \times 3)}^c$ e $q_{\alpha,ij} = \mathbf{G}_{\alpha(6 \times 6)}$, todas simétricas, com $\alpha = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{k}_G = \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha \quad (3.107)$$

Finalmente, pode-se escrever a matriz de rigidez tangente, simétrica (6x6), como:

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_M + \mathbf{k}_G = \mathbf{B}^T (\mathbf{D}^f + \mathbf{D}^c) \mathbf{B} + \mathbf{B}^T (\mathbf{H}^f + \mathbf{H}^c) \mathbf{B} + Q_\alpha \mathbf{G}_\alpha \quad (3.108)$$

3.2.7 Interpolação

Os campos de deformação determinados neste trabalho são dados pela Eq. (3.68) ou Eq. (3.83) e pela Eq. (3.69):

$$\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}_x - y_r \alpha' = (1 + \bar{u}'_c) \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} \right) - 1 - y_r \alpha'$$

$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = -\theta + \alpha = -\gamma$$

Para que esses campos de deformação sejam conhecidos é necessário definir funções interpoladoras para o deslocamento \bar{u}_c do eixo da barra, para o ângulo α de rotação por flexão deste eixo e para o ângulo de distorção γ .

Utilizando-se as funções de interpolação, usuais da análise numérica, aplicadas à mecânica dos materiais, pode-se escrever as deformações em função dos graus de liberdade corrotacionais, desconsiderando-se, assim, o movimento de corpo rígido.

Os deslocamentos \bar{u}_c são interpolados linearmente através de:

$$\bar{u}_c = q_1 \psi_1 = q_1 \left(\frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.109)$$

cuja primeira derivada vale:

$$\bar{u}'_c = q_1 \psi'_1 = q_1 \left(\frac{1}{l_r} \right) \quad (3.110)$$

O polinômio dos deslocamentos transversais, contendo somente a parcela de flexão e o polinômio da rotação total, contendo a parcela da flexão (α) e do cisalhamento (γ), expressos em função dos parâmetros generalizados, conforme apresentado no anexo A, são escritos em função dos parâmetros nodais, podendo-se determinar:

- A rotação de flexão (α) é dada por:

$$\alpha = q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3' \quad (3.111)$$

onde:

$$\begin{cases} \psi_2' = \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{3x_r^2}{l_r^2} - \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\beta}{1+\beta} \left(-\frac{x_r}{l_r} \right) \\ \psi_3' = \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{3x_r^2}{l_r^2} + \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{x_r}{l_r} \right) \end{cases} \quad (3.112)$$

- Para descrever a deformação longitudinal (Eq.(3.83)) é necessária a derivada α' :

$$\alpha' = q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'' \quad (3.113)$$

onde:

$$\begin{cases} \psi_2'' = \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} \right) + \frac{\beta}{1+\beta} \left(-\frac{1}{l_r} \right) \\ \psi_3'' = \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r} \right) + \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{1}{l_r} \right) \end{cases} \quad (3.114)$$

- A rotação total (θ) é dada por:

$$\theta = q_2 \psi_4' + q_3 \psi_5' \quad (3.115)$$

onde:

$$\begin{cases} \psi_4' = \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{3x_r^2}{l_r^2} - \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\beta}{1+\beta} \left(-\frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \right) \\ \psi_5' = \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{3x_r^2}{l_r^2} + \frac{x_r}{l_r} - \frac{1}{4} \right) + \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{x_r}{l_r} + \frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad (3.116)$$

- A distorção γ pode ser obtida fazendo-se a diferença entre as Eqs. (3.115) e (3.111),
donde:

$$\gamma = q_2 \psi_6' + q_3 \psi_7' \quad (3.117)$$

onde:

$$\begin{cases} \psi_6' = \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{1}{2} \right) \\ \psi_7' = \frac{\beta}{1+\beta} \left(\frac{1}{2} \right) \end{cases} \quad (3.118)$$

Obtêm-se, finalmente, as expressões para os campos de deformações:

$$\varepsilon_x = (1 + q_1 \psi_1') \left[1 + \frac{(q_2 \psi_2' + q_3 \psi_3')^2}{2} \right] - 1 - y_r (q_2 \psi_2'' + q_3 \psi_3'') \quad (3.119)$$

$$\gamma_{xy} = -\gamma = -(q_2 \psi_6' + q_3 \psi_7') \quad (3.120)$$

3.2.8 Valor Médio de Deformação

3.2.8.1 Condição de Extremidades: Rígido-Rígido

A deformação do eixo da barra é dada por $\bar{\varepsilon}_{x_m}$, que é variável ao longo de seu comprimento, uma vez que as funções ψ_2' e ψ_3' variam com x_r . Para facilitar o desenvolvimento analítico da formulação, LAVALL (1996) adotou um valor constante para $\bar{\varepsilon}$, representado por seu valor médio, dado por:

$$\bar{\varepsilon}_{x_m} = \frac{1}{l_r} \int \bar{\varepsilon}_x dx_r \quad (3.121)$$

Resolvendo-se a integral acima, chega-se à expressão da deformação média $\bar{\varepsilon}_{x_m}$:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{x_m} = \frac{q_1}{l_r} + \left(1 + \frac{q_1}{l_r}\right) & \left\{ q_2^2 \left[\frac{1}{(1+\beta)^2} \frac{1}{15} + \frac{\beta}{(1+\beta)^2} \frac{1}{12} + \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} \frac{1}{24} \right] + q_2 q_3 \left[\frac{1}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{30}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\beta}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} \left(-\frac{1}{12}\right) \right] + q_3^2 \left[\frac{1}{(1+\beta)^2} \frac{1}{15} + \frac{\beta}{(1+\beta)^2} \frac{1}{12} + \frac{\beta^2}{(1+\beta)^2} \frac{1}{24} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.122)$$

A expressão final da deformação longitudinal é dada por:

$$\varepsilon_x = \bar{\varepsilon}_{x_m} - y_r \alpha' \quad (3.123)$$

onde $\bar{\varepsilon}_{x_m}$ é dado pela Eq. (3.122) e α' pela Eq. (3.113). A distorção é dada pela Eq. (3.120).

3.2.8.2 Condição de Extremidades: Rígido-Rotulado

Sabe-se que para a condição de extremidades rígido-rotulada, considerando-se o efeito do cisalhamento, tem-se a seguinte relação:

$$q_3 = -\frac{2-\beta}{4+\beta} q_2 = \eta q_2 \quad (3.124)$$

Substituindo-se a Eq. (3.124) nas Eqs. (3.113), (3.120) e (3.122), obtêm-se os campos de deformação para a condição de extremidades rígido-rotulada.

3.2.8.3 Condição de Extremidades: Rotulado- Rígido

Analogamente, para a condição de extremidades rotulado-rígido, considerando-se o efeito do cisalhamento, tem-se a relação:

$$q_2 = -\frac{2-\beta}{4+\beta}q_3 = \eta q_3 \quad (3.125)$$

que substituindo-se nas Eqs. (3.113), (3.120) e (3.122), obtêm-se os campos de deformação para a condição de extremidades rotulado-rígido.

3.2.9 Expressões Analíticas para a Matriz de Rigidez Tangente

A matriz de rigidez tangente de um elemento é dada pela Eq. (3.108). A força normal, a força cortante e o momento fletor atuantes na seção transversal do elemento são dados, respectivamente, por $N = \int_{A_r} \sigma_x dA$, $V = -\int_{A_r} \tau_{xy} dA$ e $M = -\int_{A_r} \sigma_x y_r dA$. Para o cálculo dos esforços naturais internos Q_α e dos elementos da matriz $H_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}^f + H_{\alpha\beta}^c$ e $D_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}^f + D_{\alpha\beta}^c$, nas coordenadas corrotacionais, são necessários calcular primeiramente as derivadas $\varepsilon_{x,\alpha}$, $\gamma_{xy,\alpha}$, $\varepsilon_{x,\alpha\beta}$, $\gamma_{xy,\alpha\beta}$ devidas ao alongamento e distorção do elemento.

Para a condição de extremidades rígido-rígido tem-se:

$$\begin{cases} \varepsilon_{x,1} = \frac{1}{l_r} \left\{ 1 + \frac{q_2^2}{(1+\beta)^2} \left[\frac{1}{15} + \frac{\beta}{12} + \frac{\beta^2}{24} \right] + \frac{q_2 q_3}{(1+\beta)^2} \left[-\frac{1}{30} - \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{12} \right] + \frac{q_3^2}{(1+\beta)^2} \left[\frac{1}{15} + \frac{\beta}{12} + \frac{\beta^2}{24} \right] \right\} \\ \varepsilon_{x,2} = \lambda \left\{ \frac{q_2}{(1+\beta)^2} \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] + \frac{q_3}{(1+\beta)^2} \left[-\frac{1}{30} - \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{12} \right] \right\} - \frac{y_r}{1+\beta} \left[\frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} - \frac{\beta}{l_r} \right] \\ \varepsilon_{x,3} = \lambda \left\{ \frac{q_2}{(1+\beta)^2} \left[-\frac{1}{30} - \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{12} \right] + \frac{q_3}{(1+\beta)^2} \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] \right\} - \frac{y_r}{1+\beta} \left[\frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r} + \frac{\beta}{l_r} \right] \end{cases} \quad (3.126)$$

$$\begin{cases} \gamma_{xy,1} = 0 \\ \gamma_{xy,2} = \gamma_{xy,3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right) \end{cases} \quad (3.127)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{x,11} = 0 \\ \varepsilon_{x,12} = \frac{1}{l_r} \left\{ \frac{q_2}{(1+\beta)^2} \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] + \frac{q_3}{(1+\beta)^2} \left[-\frac{1}{30} - \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{12} \right] \right\} \\ \varepsilon_{x,13} = \frac{1}{l_r} \left\{ \frac{q_2}{(1+\beta)^2} \left[-\frac{1}{30} - \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{12} \right] + \frac{q_3}{(1+\beta)^2} \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] \right\} \\ \varepsilon_{x,22} = \left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \frac{1}{(1+\beta)^2} \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] \\ \varepsilon_{x,23} = \left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \frac{1}{(1+\beta)^2} \left[-\frac{1}{30} - \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{12} \right] \\ \varepsilon_{x,33} = \left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \frac{1}{(1+\beta)^2} \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] \end{cases} \quad (3.128)$$

$$\gamma_{xy,11} = \gamma_{xy,12} = \gamma_{xy,13} = \gamma_{xy,22} = \gamma_{xy,23} = \gamma_{xy,33} = 0 \quad (3.129)$$

Para a condição de extremidades rígido-rotulado tem-se:

$$\begin{cases} \varepsilon_{x,1} = \frac{1}{l_r} + \frac{q_2^2}{l_r(1+\beta)^2} \left\{ \left[\frac{1}{15} + \frac{\beta}{12} + \frac{\beta^2}{24} \right] + \eta \left[-\frac{1}{30} - \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{12} \right] + \eta^2 \left[\frac{1}{15} + \frac{\beta}{12} + \frac{\beta^2}{24} \right] \right\} \\ \varepsilon_{x,2} = \lambda \frac{q_2}{(1+\beta)^2} \left\{ \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] + \eta \left[-\frac{1}{15} - \frac{\beta}{3} - \frac{\beta^2}{6} \right] + \eta^2 \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] \right\} - \\ + \frac{y_r}{1+\beta} \left\{ \left[\frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} - \frac{\beta}{l_r} \right] + \eta \left[\frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r} + \frac{\beta}{l_r} \right] \right\} \\ \varepsilon_{x,3} = 0 \end{cases} \quad (3.130)$$

$$\begin{cases} \gamma_{xy,1} = 0 \\ \gamma_{xy,2} = -\frac{\beta}{4+\beta} \\ \gamma_{xy,3} = 0 \end{cases} \quad (3.131)$$

$$\begin{cases}
\varepsilon_{x,11} = 0 \\
\varepsilon_{x,12} = \frac{q_2}{l_r(1+\beta)^2} \left\{ \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] + \eta \left[-\frac{1}{15} - \frac{\beta}{3} - \frac{\beta^2}{6} \right] + \eta^2 \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] \right\} \\
\varepsilon_{x,13} = 0 \\
\varepsilon_{x,22} = \left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \left\{ \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] + \eta \left[-\frac{1}{15} - \frac{\beta}{3} - \frac{\beta^2}{6} \right] + \eta^2 \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] \right\} \\
\varepsilon_{x,23} = 0 \\
\varepsilon_{x,33} = 0
\end{cases} \quad (3.132)$$

Assim como na condição de extremidades rígido-rígido, a derivada segunda para todos os elementos da distorção é nula.

Analogamente para a condição de extremidades rotulado-rígido tem-se:

$$\begin{cases}
\varepsilon_{x,1} = \frac{1}{l_r} + \frac{q_3^2}{l_r(1+\beta)^2} \left\{ \left[\frac{1}{15} + \frac{\beta}{12} + \frac{\beta^2}{24} \right] + \eta \left[-\frac{1}{30} - \frac{\beta}{6} - \frac{\beta^2}{12} \right] + \eta^2 \left[\frac{1}{15} + \frac{\beta}{12} + \frac{\beta^2}{24} \right] \right\} \\
\varepsilon_{x,2} = 0 \\
\varepsilon_{x,3} = \lambda \frac{q_3}{(1+\beta)^2} \left\{ \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] + \eta \left[-\frac{1}{15} - \frac{\beta}{3} - \frac{\beta^2}{6} \right] + \eta^2 \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] \right\} - \\
+ \frac{y_r}{1+\beta} \left\{ \eta \left[\frac{6x_r}{l_r^2} - \frac{1}{l_r} - \frac{\beta}{l_r} \right] + \left[\frac{6x_r}{l_r^2} + \frac{1}{l_r} + \frac{\beta}{l_r} \right] \right\}
\end{cases} \quad (3.133)$$

$$\begin{cases}
\gamma_{xy,1} = 0 \\
\gamma_{xy,2} = 0 \\
\gamma_{xy,3} = -\frac{\beta}{4+\beta}
\end{cases} \quad (3.134)$$

$$\begin{cases}
\varepsilon_{x,11} = 0 \\
\varepsilon_{x,12} = 0 \\
\varepsilon_{x,13} = \frac{q_3}{l_r(1+\beta)^2} \left\{ \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] + \eta \left[-\frac{1}{15} - \frac{\beta}{3} - \frac{\beta^2}{6} \right] + \eta^2 \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] \right\} \\
\varepsilon_{x,22} = 0 \\
\varepsilon_{x,23} = 0 \\
\varepsilon_{x,33} = \left(1 + \frac{q_1}{l_r} \right) \left\{ \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] + \eta \left[-\frac{1}{15} - \frac{\beta}{3} - \frac{\beta^2}{6} \right] + \eta^2 \left[\frac{2}{15} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12} \right] \right\}
\end{cases} \quad (3.135)$$

A derivada segunda para todos os elementos da distorção é nula. Utilizando-se as equações anteriores pode-se obter os esforços naturais internos Q_{α} , os elementos da matriz $H_{\alpha\beta}$ e $D_{\alpha\beta}$, nas coordenadas corrotacionais, para as condições de extremidades rígido-rígido, rígido-rotulado e rotulado-rígido.

3.2.9.1 Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva e Geométrica em Regime Elástico Linear

Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elástico Linear

A matriz de rigidez constitutiva pode ser escrita com o auxílio da matriz $\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)}$ e com o auxílio da matriz de rigidez constitutiva em coordenadas corrotacionais, constituída pelos elementos $D_{\alpha,\beta}$. Desprezando-se os termos multiplicados por q_2 e q_3 por serem suficientemente pequenos, obtém-se a matriz de rigidez constitutiva $\mathbf{k}_M = \mathbf{B}^T (\mathbf{D}^f + \mathbf{D}^c) \mathbf{B}$ em regime elástico, no sistema local do elemento, em coordenadas cartesianas.

Condição de Extremidades: Rígido – Rígido

$$\bar{\mathbf{k}}_M = \begin{bmatrix} \frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 & -\frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 \\ \frac{12 E I}{l_r l_c^2 (1 + \beta)} & \frac{6 E I}{l_r l_c (1 + \beta)} & 0 & -\frac{12 E I}{l_r l_c^2 (1 + \beta)} & \frac{6 E I}{l_r l_c (1 + \beta)} & 0 \\ \frac{E I (4 + \beta)}{l_r (1 + \beta)} & 0 & 0 & -\frac{6 E I}{l_r l_c (1 + \beta)} & \frac{E I (2 - \beta)}{l_r (1 + \beta)} & 0 \\ \frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 & \frac{12 E I}{l_r l_c^2 (1 + \beta)} & 0 & 0 \\ \text{simétrica} & & & -\frac{6 E I}{l_r l_c (1 + \beta)} & \frac{6 E I}{l_r l_c (1 + \beta)} & 0 \\ & & & \frac{E I (4 + \beta)}{l_r (1 + \beta)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

Condição de Extremidades: Rígido – Rotulado

$$\bar{\mathbf{k}}_M = \begin{bmatrix} \frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 & -\frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 E I}{l_r l_c^2 (4 + \beta)} & \frac{12 E I}{l_r l_c (4 + \beta)} & 0 & -\frac{12 E I}{l_r l_c^2 (4 + \beta)} & 0 \\ 0 & \frac{12 E I}{l_r l_c (4 + \beta)} & \frac{12 E I}{l_r} \left(\frac{1}{4 + \beta} \right) & 0 & -\frac{12 E I}{l_r l_c (4 + \beta)} & 0 \\ -\frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 & \frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12 E I}{l_r l_c^2 (4 + \beta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

simétrica

Condição de Extremidades: Rotulado – Rígido

$$\bar{\mathbf{k}}_M = \begin{bmatrix} \frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 & -\frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 E I}{l_r l_c^2 (4 + \beta)} & 0 & 0 & -\frac{12 E I}{l_r l_c^2 (4 + \beta)} & \frac{12 E I}{l_r l_c (4 + \beta)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E A_r}{l_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12 E I}{l_r l_c^2 (4 + \beta)} & -\frac{12 E I}{l_r l_c (4 + \beta)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12 E I}{l_r l_c (4 + \beta)} & \frac{12 E I}{l_r (4 + \beta)} \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

simétrica

Matriz de Rigidez Tangente Geométrica em Regime Elástico Linear

A matriz de rigidez geométrica é composta de duas parcelas: uma devida à matriz \mathbf{H} e outra devida às matrizes $\bar{\mathbf{G}}_\alpha$. A parcela da matriz de rigidez geométrica, $\bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}}$ é escrita com o auxílio da forma local $\bar{\mathbf{B}}_{(3 \times 6)}$ e com a matriz \mathbf{H} , em coordenadas corrotacionais, simétricas, de dimensão (3×3) , constituída pelos elementos $H_{\alpha, \beta}$.

Novamente, desprezando-se os termos multiplicados por q_2 e q_3 obtém-se a matriz $\bar{\mathbf{B}}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{B}}$ simplificada, no sistema local do elemento, em coordenadas cartesianas. A

segunda parcela da matriz de rigidez geométrica é dada pelo somatório $Q_1 \bar{\mathbf{G}}_1 + Q_2 \bar{\mathbf{G}}_2 + Q_3 \bar{\mathbf{G}}_3$.

Condição de Extremidades: Rígido – Rígido

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V}{l_c(1+\beta)}\left(1+\frac{\beta}{\lambda}\right) & 0 & 0 & -\frac{V}{l_c(1+\beta)}\left(1+\frac{\beta}{\lambda}\right) & 0 \\ \frac{N}{l_c}\left(1+\frac{1}{5(1+\beta)^2}\right) & \frac{N}{10(1+\beta)^2} & -\frac{V}{l_c(1+\beta)}\left(1+\frac{\beta}{\lambda}\right) & -\frac{N}{l_c}\left(1+\frac{1}{5(1+\beta)^2}\right) & \frac{N}{10(1+\beta)^2} & \frac{N}{10(1+\beta)^2} \\ \frac{Nl_c}{(1+\beta)^2}\left(\frac{2}{15}+\frac{\beta}{6}+\frac{\beta^2}{12}\right) & 0 & 0 & -\frac{N}{10(1+\beta)^2} & \frac{Nl_c}{(1+\beta)^2}\left(-\frac{1}{30}-\frac{\beta}{6}-\frac{\beta^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{V}{l_c(1+\beta)}\left(1+\frac{\beta}{\lambda}\right) & \frac{N}{l_c}\left(1+\frac{1}{5(1+\beta)^2}\right) & 0 & -\frac{N}{10(1+\beta)^2} \\ \text{simétrica} & & & & & \frac{Nl_c}{(1+\beta)^2}\left(\frac{2}{15}+\frac{\beta}{6}+\frac{\beta^2}{12}\right) \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

onde $\lambda = l_c/l_r$.

Condição de Extremidades: Rígido – Rotulado

$$\bar{\mathbf{k}}_G = \begin{bmatrix} \bar{k}_{Gaa} & \bar{k}_{Gab} \\ \bar{k}_{Gab}^T & \bar{k}_{Gbb} \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{Gaa} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c}\right) - \frac{4}{4+\beta} \frac{M_a}{l_c^2} & 0 \\ \frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{16}{5(4+\beta)^2}\right) & \frac{16N}{5(4+\beta)^2} & \frac{16N l_c}{5(4+\beta)^2} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{Gab} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c}\right) + \frac{4}{4+\beta} \frac{M_a}{l_c^2} & 0 \\ -\frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c}\right) + \frac{4}{4+\beta} \frac{M_a}{l_c^2} & -\frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{16}{5(4+\beta)^2}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{16N}{5(4+\beta)^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\text{Gbb}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) - \frac{4}{4+\beta} \frac{M_a}{l_c^2} & 0 \\ \frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{16}{5(4+\beta)^2} \right) & & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

Condição de Extremidades: Rotulado – Rígido

$$\bar{\mathbf{k}}_{\text{Gaa}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) + \frac{4}{4+\beta} \frac{M_b}{l_c^2} & 0 \\ \frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{16}{5(4+\beta)^2} \right) & & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\text{Gab}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) - \frac{4}{4+\beta} \frac{M_b}{l_c^2} & 0 \\ -\frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) - \frac{4}{4+\beta} \frac{M_b}{l_c^2} & -\frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{16}{5(4+\beta)^2} \right) & \frac{16N}{5(4+\beta)^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\text{Gbb}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V}{\lambda} \frac{\beta}{(4+\beta)} \left(\frac{1}{l_c} \right) + \frac{4}{4+\beta} \frac{M_b}{l_c^2} & 0 \\ \frac{N}{l_c} \left(1 + \frac{16}{5(4+\beta)^2} \right) & -\frac{16N}{5(4+\beta)^2} & \frac{16N l_c}{5(4+\beta)^2} \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

3.2.9.2 Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva e Geométrica em Regime Elastoplástico

No caso elastoplástico o campo de deformação dado pelas Eqs. (3.120) e (3.123) continua válido, embora a Lei de Hooke não seja mais válida. De maneira análoga, fazendo-se as substituições adequadas, determinam-se as matrizes de rigidez tangente, constitutiva e geométrica, em regime elastoplástico.

Matriz de Rigidez Tangente Constitutiva em Regime Elastoplástico

A matriz de rigidez constitutiva $\bar{\mathbf{k}}_M$ em regime elastoplástico, no sistema local do elemento, em coordenadas cartesianas, é dada por:

Condição de Extremidades: Rígido – Rígido

$$\bar{\mathbf{k}}_M^{ep} = \begin{bmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & -\frac{C_{2m}}{l_r} & -\frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & \frac{C_{2m}}{l_r} \\ \frac{12 C_{3m}}{l_r l_c^2 (1+\beta)} & \frac{6 C_{3m}}{l_r l_c (1+\beta)} & 0 & -\frac{12 C_{3m}}{l_r l_c^2 (1+\beta)} & \frac{6 C_{3m}}{l_r l_c (1+\beta)} & \frac{C_{3m} (2-\beta)}{l_r (1+\beta)} \\ \frac{C_{3m} (4+\beta)}{l_r (1+\beta)} & \frac{C_{2m}}{l_r} & -\frac{6 C_{3m}}{l_r l_c (1+\beta)} & \frac{C_{1m}}{l_r} & 0 & -\frac{C_{2m}}{l_r} \\ \text{simétrica} & & & & & \\ & & & & \frac{12 C_{3m}}{l_r l_c^2 (1+\beta)} & \frac{6 C_{3m}}{l_r l_c (1+\beta)} \\ & & & & & \frac{C_{3m} (4+\beta)}{l_r (1+\beta)} \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

onde $C_{1m} = \int_{A_r} D^f dA_r$, $C_{2m} = \int_{A_r} D^f y_r dA_r$, $C_{3m} = \int_{A_r} D^f y_r^2 dA_r$. C_1 , C_2 e C_3 são constantes em cada seção, mas variam ao longo do elemento, pois D^f não é necessariamente constante ao longo de x_r .

Condição de Extremidades: Rígido – Rotulado

$$\bar{\mathbf{k}}_M^{ep} = \begin{bmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & -\frac{C_{2m}}{l_r} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & -\frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & 0 \\ \frac{12 C_{3m}}{l_r l_c^2 (4+\beta)} & \frac{12 C_{3m}}{l_r l_c (4+\beta)} & \frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & -\frac{12 C_{3m}}{l_r l_c^2 (4+\beta)} & 0 & 0 \\ \frac{12 C_{3m}}{l_r} \left(\frac{1}{4+\beta} \right) & \frac{C_{2m}}{l_r} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & -\frac{12 C_{3m}}{l_r l_c (4+\beta)} & \frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & 0 \\ \text{simétrica} & & & & & \\ & & & & \frac{12 C_{3m}}{l_r l_c^2 (4+\beta)} & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

Condição de Extremidades: Rotulado – Rígido

$$\bar{\mathbf{k}}_M^{ep} = \begin{bmatrix} \frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & 0 & -\frac{C_{1m}}{l_r} & -\frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & \frac{C_{2m}}{l_r} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) \\ & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2 (4+\beta)} & 0 & -\frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & -\frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2 (4+\beta)} & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c (4+\beta)} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{C_{1m}}{l_r} & \frac{C_{2m}}{l_r l_c} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) & -\frac{C_{2m}}{l_r} \left(\frac{6}{4+\beta} \right) \\ & \text{simétrica} & & & \frac{12C_{3m}}{l_r l_c^2 (4+\beta)} & -\frac{12C_{3m}}{l_r l_c (4+\beta)} \\ & & & & & \frac{12C_{3m}}{l_r (4+\beta)} \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

Matriz de Rigidez Tangente Geométrica em Regime Elastoplástico

A matriz de rigidez geométrica total, dada por $\bar{\mathbf{k}}_G^{ep} = \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{Q}_\alpha \bar{\mathbf{G}}_\alpha$, para todas as condições de extremidades anteriores é análoga à matriz de rigidez tangente geométrica no regime elástico, com N e V calculados no regime elastoplástico.

Observação:

A matriz de rigidez tangente de um elemento, desenvolvida para as condições de extremidade rígida-rígida, rígida-rótula e rótula-rígida, considerando-se o efeito do cisalhamento, recai na matriz de rigidez de Bernoulli-Euler, obtida por LAVALL (1996) e ALMEIDA (2006), igualando-se o fator de cisalhamento β a zero.

3.3 Aspectos da Implementação

A solução de problemas não lineares é usualmente obtida através da utilização de combinação de procedimentos incrementais e iterativos. Esses procedimentos consideram incrementos de cargas com iterações de equilíbrio realizadas dentro de cada passo e o desempenho da análise depende do parâmetro de incremento de carga adotado. A convergência do procedimento é outro fator importante a ser considerado.

Os métodos iterativos mais empregados são os métodos de Newton-Raphson Puro (NRP) e o de Newton-Raphson Modificado (NRM). A descrição destes métodos pode ser encontrada nas seguintes referências: OWEN e HINTON (1980), CRISFIELD (1991), BATHE (1996), entre outros. A diferença básica entre eles é que, no NRP, a matriz de rigidez tangente é atualizada a cada iteração, ao passo que no NRM, a matriz de rigidez tangente é mantida constante durante um incremento ou um conjunto de incrementos.

A determinação apropriada das matrizes de rigidez tangente foi discutida na seção anterior. Esta seção apresenta com maiores detalhes o método iterativo de Newton-Raphson Puro, utilizado para a solução das equações não lineares que descrevem o problema. Na sequência, será apresentado o critério de convergência adotado na verificação final do processo incremental-iterativo, os modelos constitutivos atribuídos ao material, bem como as aproximações adotadas. Considerações sobre a implementação do modelo de fatias da seção transversal do elemento e das sub-rotinas do programa adaptado de LAVALL (1996) e ALMEIDA (2006) também são apresentadas.

3.3.1 Método de Newton-Raphson Puro

Conforme se sabe da literatura técnica sobre o assunto, o uso do MEF para análise não linear de estruturas leva ao sistema de equações simultâneas, que associam o vetor de cargas aplicadas \mathbf{P} com o vetor de deslocamentos \mathbf{p} , através da matriz de rigidez tangente global do sistema \mathbf{k} :

$$\mathbf{k}\mathbf{p} + \mathbf{P} = 0 \quad (3.150)$$

Se os coeficientes da matriz \mathbf{k} dependem das incógnitas de \mathbf{p} ou de suas derivadas, o problema torna-se não linear e o uso de um processo iterativo faz-se necessário.

Conforme afirmam vários autores, o procedimento numérico mais recomendado para análises não lineares é o Método de Newton-Raphson o qual, a cada incremento de carga, atualiza a matriz de rigidez e, por iteração, retorna os deslocamentos nodais sofridos, após a determinação do equilíbrio da estrutura.

No Método de Newton-Raphson supõe-se um sistema de forças residuais segundo a Eq. (3.151):

$$\psi = \mathbf{k}\mathbf{p} + \mathbf{P} \neq 0 \quad (3.151)$$

onde as forças residuais ψ podem ser interpretadas como uma medida de distância entre a solução apresentada e a curva do equilíbrio da estrutura.

Em problemas estruturais, a solução, para qualquer nível de carga, é também função do histórico do carregamento. Assim, o processo incremental-iterativo é utilizado, como ilustra a Fig. 3.8, para o caso de uma única variável. A solução parte da definição do valor inicial para o vetor de deslocamentos \mathbf{p}_0 (para problemas estruturais, é tomado como nulo). A matriz de rigidez tangente \mathbf{k} associada a este deslocamento é determinada e o vetor ψ_0 é então calculado segundo a Eq. (3.151). A correção $\Delta\mathbf{p}_0$ pode ser definida através da Eq. (3.152):

$$\Delta\mathbf{p}_0 = -\frac{\psi(p_0)}{\mathbf{k}(p_0)} \quad (3.152)$$

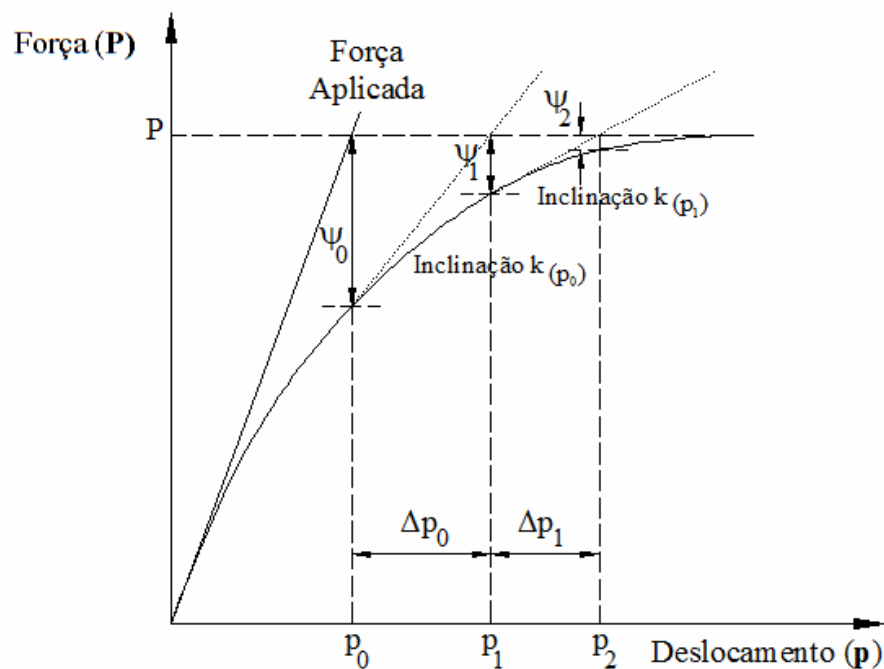


FIGURA 3.8 – Método de Newton-Raphson

Então, uma melhor aproximação para o vetor dos deslocamentos é obtido por $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p}_0$ e o processo iterativo prossegue até a solução convergir para a resposta não linear, ou seja, até que a norma do vetor ψ_r ou do vetor $\Delta\mathbf{p}_r$ tenda a zero.

3.3.2 Critério de Convergência

Como descrito anteriormente, o processo iterativo é executado até a solução convergir para uma tolerância adequada, previamente definida. Essa verificação deverá ocorrer no final de cada iteração.

No presente trabalho verifica-se a convergência da solução comparando-se os valores dos deslocamentos nodais da iteração corrente com aqueles da iteração imediatamente anterior. No instante em que a diferença entre esses valores for inferior ou igual à tolerância, para cada um dos valores nodais, admite-se que a convergência foi atingida. Assim:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^r)^2 - \sum_{i=1}^n (p_i^{r-1})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i^1)^2}} \times 100 \leq \text{Tolerância Adotada} \quad (3.153)$$

onde n é o número total de graus de liberdade da estrutura e r e $r-1$ referem-se às iterações sucessivas. A tolerância deve ser indicada em porcentagem, já que a Eq. (3.153) é multiplicada por 100.

Observa-se que a convergência é atingida quando a diferença entre as normas de duas iterações sucessivas é menor ou igual ao valor da tolerância multiplicada pela norma da primeira iteração. O valor 0,5% de tolerância será adotado, pois é considerado adequado para a maioria das aplicações em Engenharia Estrutural.

3.3.3 Modelo Constitutivo

A Figura 3.9 idealiza o comportamento elastoplástico por meio de um diagrama bilinear, onde se distingue um comportamento elástico (região OA), com módulo de elasticidade E , e um comportamento elastoplástico (região AB), com encruamento linear e módulo tangente E_t .

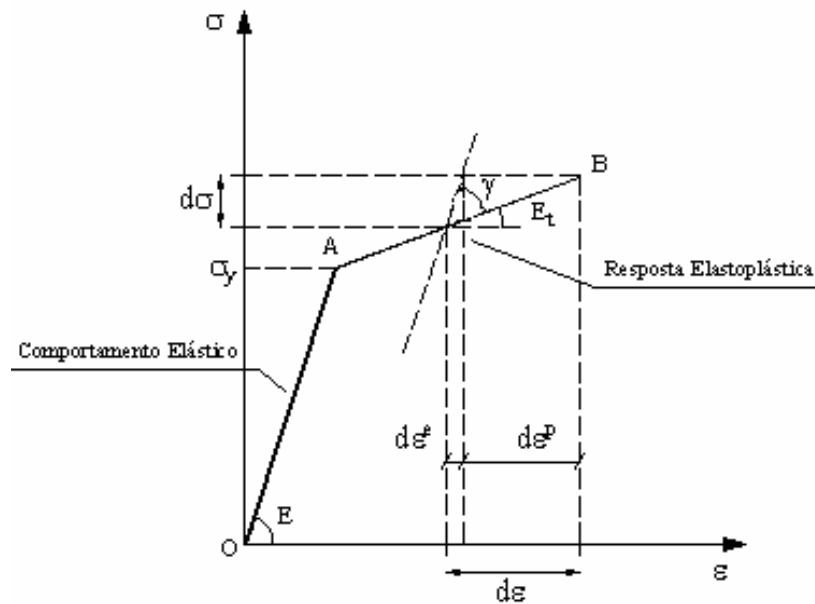


FIGURA 3.9 – Comportamento elastoplástico do material para o caso uniaxial

O material deforma-se, inicialmente, com módulo de elasticidade E até que a tensão atuante atinja o valor da resistência ao escoamento σ_y . Para níveis de tensões superiores à este limite, o material passa a se deformar segundo o módulo tangente E_t . Nota-se que num certo estágio após o escoamento inicial, o acréscimo de deformação $d\epsilon$ é associado a um acréscimo de tensão $d\sigma$. Separando-se as deformações elástica e plástica, tem-se:

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (3.154)$$

O parâmetro de endurecimento H' é definido por:

$$H' = \frac{d\sigma}{d\epsilon^p} \quad (3.155)$$

Com o auxílio da Eq. (3.154), o parâmetro de encruamento pode ser escrito em função do módulo tangente E_t :

$$H' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^e} = \frac{E_t}{1 - (E_t/E)} \quad (3.156)$$

Reescrevendo e desenvolvendo a Eq. (3.154), tem-se que:

$$d\varepsilon = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H'} \right) d\sigma = \left(\frac{H'+E}{EH'} \right) d\sigma \quad (3.157)$$

Logo,

$$d\sigma = \left(\frac{EH'}{E+H'} \right) d\varepsilon \quad (3.158)$$

Sendo $d\sigma = E_t d\varepsilon$, conclui-se que:

$$E_t = \left(\frac{EH'}{E+H'} \right) \quad (3.159)$$

Segundo a Fig. 3.9, pode-se escrever $d\sigma$ como:

$$d\sigma = E_t d\varepsilon = (E - \gamma) d\varepsilon \quad (3.160)$$

Sendo $E_t = E - \gamma$ e com o auxílio da Eq. (3.159), determina-se:

$$\gamma = \frac{E^2}{E+H'} \quad (3.161)$$

Levando-se a Eq. (3.161) na Eq. (3.160), tem-se que:

$$d\sigma = E \left(1 - \frac{E}{E+H'} \right) d\varepsilon \quad (3.162)$$

E, finalmente, define-se o módulo tangente adotado para níveis de tensões superiores à de escoamento:

$$E_t = E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) = \left(\frac{EH'}{E + H'} \right) \quad (3.163)$$

Assim, na implementação do programa, as tensões serão tratadas como:

$$d\sigma = \begin{cases} E d\varepsilon & \text{fase elástica} \\ E \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) d\varepsilon & \text{fase plástica} \end{cases} \quad (3.164)$$

Quando $H' = 0$ tem-se que $E_t = 0$ e o comportamento elástico perfeitamente plástico é contemplado.

Sendo $d\sigma = E_t d\varepsilon = E d\varepsilon^e$, e ainda com o auxílio das Eqs. (3.155) e (3.158), as deformações elástica e plástica são dadas por:

$$d\varepsilon^e = \left(\frac{E_t}{E} \right) d\varepsilon \quad (3.165)$$

$$d\varepsilon^p = \left(\frac{E}{E + H'} \right) d\varepsilon \quad (3.166)$$

Visando uma maior generalização para se considerar diversas leis constitutivas para o aço, com o objetivo de se estudar, por exemplo, o comportamento elastoplástico com ou sem patamar de escoamento, a influência do encruamento, etc., foi adotada neste trabalho a solução através de diagramas tensão-deformação multilíneares, conforme desenvolvido em ARAÚJO (2010).

3.3.4 Modelo de Fatias

Ao se considerar a não linearidade física do material, permite-se que as fibras constituintes da seção transversal plastifiquem devido às tensões provenientes do carregamento aplicado serem superiores à resistência ao escoamento do material. A formulação apresentada na seção 3.2 ainda prevê o espalhamento da plastificação ao longo das barras da estrutura, ao dividi-la em elementos finitos.

Assim, para a determinação dos coeficientes da matriz de rigidez, que são função das propriedades EA , EI e ES , das forças normal N e cortante V e do momento fletor M , a seção transversal foi dividida em fatias. A Fig. 3.10 mostra um exemplo típico para o perfil metálico tipo “I”, dividido em fatias. Além da alma, as mesas foram fatiadas permitindo o estudo das tensões residuais, medidas na metade da espessura de cada fatia.

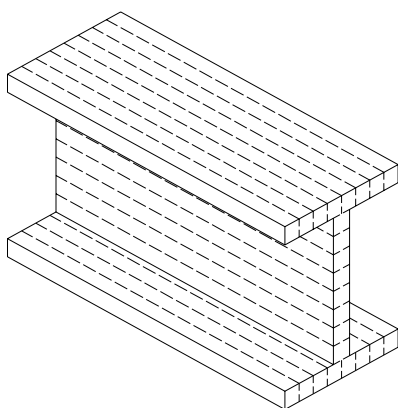


FIGURA 3.10 – Modelo de fatias

Tomando-se cada fatia como uma fibra da seção transversal, pode-se analisar o problema elastoplástico, considerando somente a contribuição das fatias elásticas, ou seja, somente a parcela da seção que ainda está sujeita às tensões inferiores à de escoamento f_y . A Fig. 3.11 apresenta a propagação da plastificação ao longo da altura da seção, bem como os níveis de tensões até a formação da rótula plástica no nó considerado.

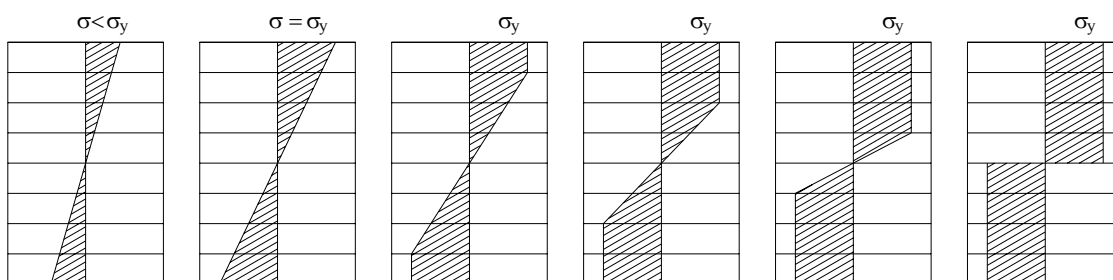


FIGURA 3.11 – Processo de plastificação das fatias ao longo da altura da seção transversal

Na implementação do modelo de fatias, considera-se que o estado de tensão em seu centro é representativo de toda a fatia. As contribuições para a força normal, o momento fletor e os coeficientes de rigidez EA , EI e ES totais são determinadas pelo somatório das contribuições de cada fatia. Assim, pode-se dizer que:

$$\begin{aligned}
 EA &= \sum_i E_i b_i t_i \\
 ES &= \sum_i E_i b_i t_i z_i \\
 EI &= \sum_i E_i \left(b_i t_i z_i^2 + \frac{b_i t_i^3}{12} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.167}$$

onde b_i , t_i e z_i são, respectivamente, largura da fatia i , espessura da fatia i e coordenada z no centro da fatia i , em relação ao centro de gravidade da seção transversal e E_i é o módulo de elasticidade do material da fatia i .

Se a tensão no centro da fatia alcançar a resistência ao escoamento, toda fatia passa a ser considerada elastoplástica e o módulo de elasticidade passa a ser o módulo tangente E_{ti} , dado por:

$$E_{ti} = E_i \left(1 - \frac{E_i}{E_i + H'} \right)
 \tag{3.168}$$

conforme definido na Eq. (3.163), onde H' é o parâmetro de encruamento.

3.3.5 Tensões Residuais

Os perfis estruturais de aço, soldados e laminados, possuem tensões residuais provenientes do processo de fabricação devido ao resfriamento não uniforme da peça. Essas tensões residuais são tensões auto-equilibradas e têm um papel importante no dimensionamento dos elementos de aço, pois sendo a principal causa da não linearidade do diagrama tensão-deformação na região inelástica, afetam significativamente sua resistência na compressão.

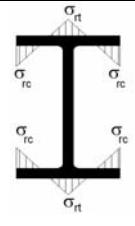
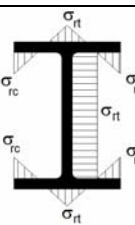
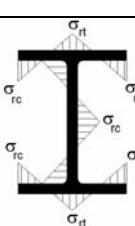
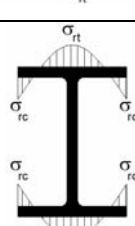
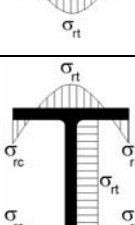
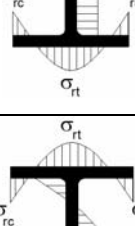
De acordo com GALAMBOS (1988) o valor e a distribuição das tensões residuais dependem da forma da seção transversal, da temperatura de laminação ou soldagem, das condições de resfriamento, dos métodos de retificação das peças e das propriedades do material, não sendo possível definir uma distribuição única para todos os perfis.

A literatura técnica tem adotado, de forma simplificada, as distribuições parabólica ou linear para a variação das tensões residuais dos perfis laminados e soldados. Vários pesquisadores (KANCHANALAI, 1977; CHEN e TOMA, 1994; CHEN et al., 1996; KIM e CHEN, 1996a, 1996b, entre outros) utilizam a distribuição linear nas mesas e constante na alma nos modelos de análise que considerem as tensões residuais.

No programa computacional as tensões residuais, adaptadas por ALMEIDA (2006) no programa PPLANLEP desenvolvido por LAVALL (1996), são previstas como dados de entrada e atribuídas a cada fatia da seção transversal dos elementos, sendo adicionadas automaticamente às tensões normais durante a análise.

A Tab. 3.1, adaptada de ALMEIDA (2006), apresenta expressões da relação entre as tensões residuais de tração σ_{rt} (+) e de compressão σ_{rc} (-), segundo os tipos de distribuição que podem ser considerados no presente programa. Nas expressões, b_f e t_f são a largura e a espessura das mesas; h_w e t_w são a altura e a espessura da alma e d é a altura total do perfil.

TABELA 3.1 – Tipos de distribuição das tensões residuais

Configuração	Distribuição		Tensão residual de tração σ_{rt}
	Mesas	Alma	
	Linear	Sem Tensão Residual	$\sigma_{rt} = -\sigma_{rc}$
	Linear	Constante	$\sigma_{rt} = -\frac{t_f b_f}{t_f b_f + t_w h_w} \sigma_{rc}$ onde: $h_w = d - 2t_f$
	Linear	Linear	$\sigma_{rt} = -\sigma_{rc}$
	Parabólica	Sem Tensão Residual	$\sigma_{rt} = -\frac{\sigma_{rc}}{2}$
	Parabólica	Constante	$\sigma_{rt} = -\frac{2t_f b_f}{4t_f b_f + 3t_w h_w} \sigma_{rc}$
	Parabólica	Parabólica	$\sigma_{rt} = -\frac{t_f b_f + t_w h_w}{4t_f b_f + t_w h_w} 2\sigma_{rc}$

3.3.6 Descrição das Sub-Rotinas

O programa adaptado de LAVALL (1996) e ALMEIDA (2006), escrito na linguagem *FORTRAN 90*, divide-se em duas partes: o programa principal, que estabelece a sequência das sub-rotinas e controla o número de iterações a serem executadas e as sub-rotinas que executam os procedimentos para que seja feita a análise não linear da estrutura em questão. A Figura 3.12 apresenta o fluxograma indicando a sequência dos procedimentos.

- **Sub-rotina DADOS:** Através da leitura de um arquivo de texto, gerado pelo pré-processador, os parâmetros característicos do problema são coletados e atribuídos às variáveis. Além de informações básicas, tais como coordenadas, vinculações e carregamentos nodais, fatores limitantes referentes às iterações e à convergência da solução, são também informados os tipos de análise (Bernoulli-Euler ou Timoshenko), o número e divisões das fatias, os valores das tensões residuais aplicadas, parâmetros das curvas multilíneas para o material (tensão e deformação) e para a ligação (momento e rotação relativa).

- **Sub-rotina INICIA:** Visando o correto preenchimento dos dados, são zerados vetores e matrizes.

- **Sub-rotina INCAR:** Controla o processo incremental do carregamento e atualiza o vetor correspondente a cada passo do processo.

- **Sub-rotina ALGOR:** Controla o tipo de algoritmo a ser empregado para a solução do problema. Como citado anteriormente, o algoritmo escolhido foi o Método de Newton-Raphson puro.

- **Sub-rotina MATRIG:** Determina a matriz de rigidez tangente do elemento de barra e a matriz de rigidez da ligação atualizadas em cada iteração do processo, em regime elástico ou elastoplástico. Com o auxílio da **sub-rotina FATIA** são avaliados o nível de plastificação da seção transversal, através da contribuição de cada fatia no cálculo de propriedades geométricas e nos coeficientes de rigidez. Quando a tensão no centro de

uma fatia alcança o valor de escoamento σ_y , considera-se que esta fatia da seção transversal plastificou-se.

- **Sub-rotina MONRIG:** Executa a montagem da matriz de rigidez global do sistema e do vetor de cargas, através da superposição da matriz de rigidez de cada elemento de barra e de mola, de acordo como a incidência nodal adotada.

- **Sub-rotina REDGAS:** Executa os procedimentos necessários ao desenvolvimento da fase de eliminação progressiva do Método de Redução de Gauss para solução do sistema de equações não lineares a cada iteração do processo.

- **Sub-rotina SUBREG:** Executa a substituição regressiva do sistema de equações triangular superior originado pela sub-rotina REDGAS. São calculados os deslocamentos nodais e as reações de apoio, além de proceder a atualização das coordenadas nodais, dos comprimentos e dos cossenos diretores dos elementos.

- **Sub-rotina ESFOR:** Determina o vetor das forças nodais equivalentes internas, levando-se em conta se o elemento está em carga ou descarga, de acordo com a lei constitutiva. Seguindo a formulação adotada, são calculados os deslocamentos, correspondentes aos graus de liberdade nos sistemas cartesiano e no corrotacional, definindo as rotações de corpo rígido e seus valores acumulativos. As deformações são calculadas, e, através da lei constitutiva, são calculados os esforços nodais equivalentes e os esforços residuais que serão reaplicados à estrutura até que a mesma esteja em equilíbrio (princípio do processo iterativo).

- **Sub-rotina CONVER:** Verifica a convergência da solução do problema através do controle do erro entre os deslocamentos nodais da iteração corrente com a anterior.

- **Sub-rotina RESULT:** Fornece a saída dos resultados da análise do problema apresentado, tais como os deslocamentos nodais e as reações de apoio segundo o sistema global de referência, os esforços solicitantes nas extremidades de cada elemento de barra e de mola (coordenadas locais) e as deformações elásticas, plásticas e totais calculadas em cada fatia nas extremidades do elemento de barra, além do valor de tensões nas mesmas.

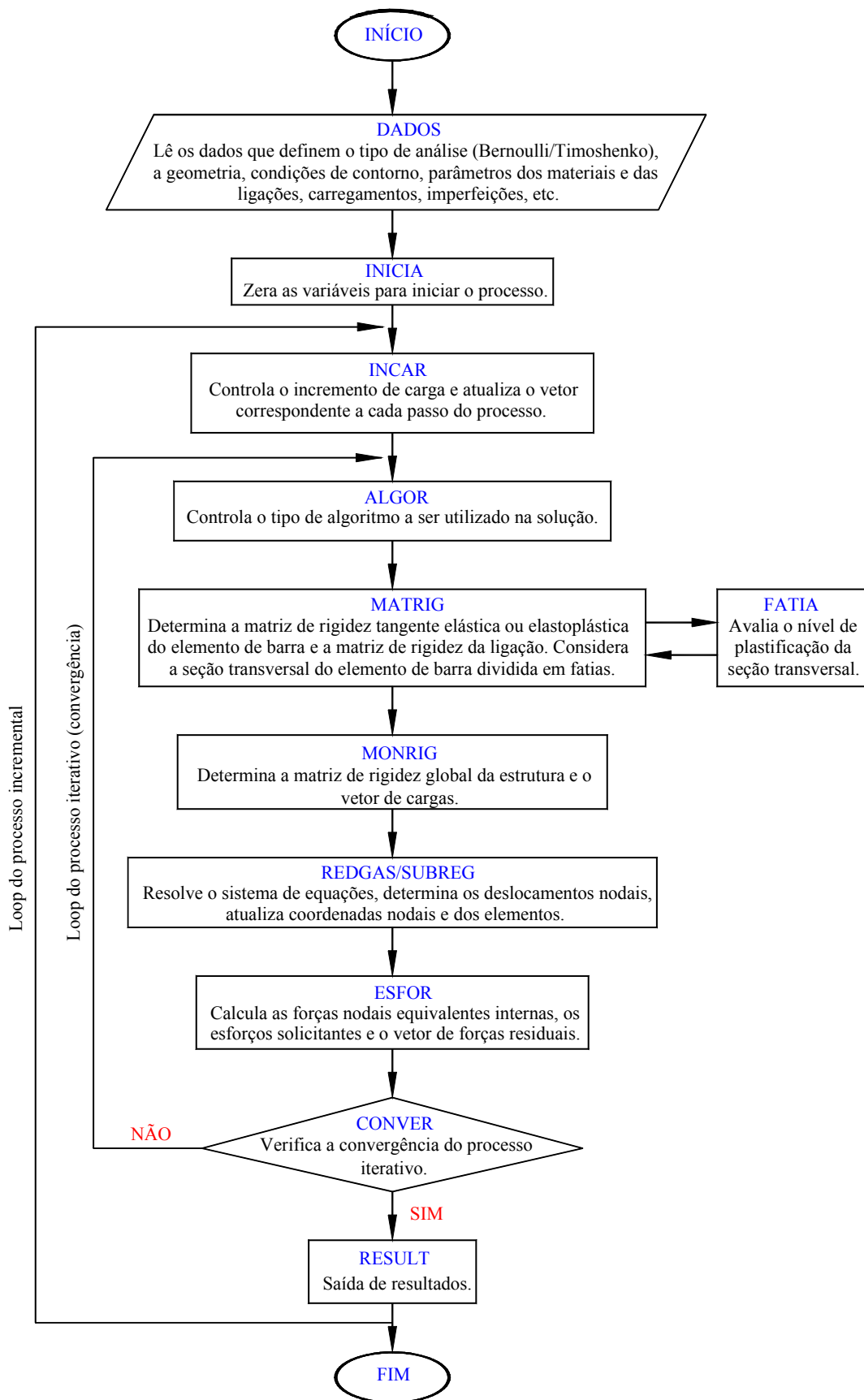


FIGURA 3.12 – Fluxograma geral para análise não linear incremental e iterativa

3.4 Exemplos Numéricos

Nesta seção são apresentados alguns exemplos numéricos com o objetivo de validar a formulação desenvolvida. Pretende-se, portanto, estudar a influência das deformações por cisalhamento nos deslocamentos transversais, nas rotações das seções transversais e na transmissão de esforços em vigas à medida que a relação entre seu vão livre e a altura de sua seção transversal varia.

3.4.1 Viga em Balanço Sujeita a Carga Uniformemente Distribuída

O comportamento estrutural de vigas pode ser satisfatoriamente aproximado pela teoria elementar de Bernoulli-Euler. No entanto, essa teoria leva a discrepâncias em casos onde a razão entre o vão livre da viga e a altura de sua seção transversal torna-se pequena. Nesses casos, os efeitos produzidos pelas tensões de cisalhamento não podem ser desconsiderados como acontece na teoria clássica.

O exemplo a seguir tem como objetivo mostrar a influência do efeito da deformação por cisalhamento no deslocamento vertical (flecha máxima) e na rotação da seção transversal da extremidade livre da viga em balanço. A viga está submetida a um carregamento distribuído de 10 kN/m , conforme mostra a Fig. 3.13, e é totalmente contida lateralmente. Para implementação dos dados do programa a viga foi dividida em 20 elementos iguais e a seção transversal retangular dividida em 20 fatias. Foi adotado o módulo de elasticidade $E=210000 \text{ MPa}$. Para captar a evolução do comportamento do deslocamento vertical e do giro da seção, variou-se a relação L/h (vão/altura) da viga, fixando-se a altura da seção transversal e variando-se o seu comprimento.

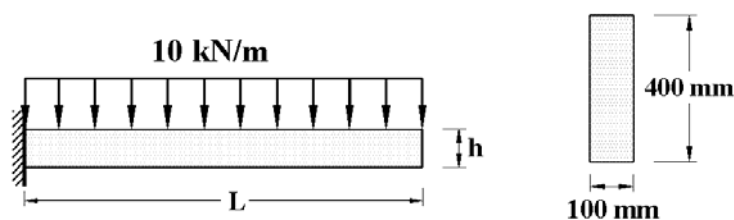


FIGURA 3.13 – Viga em balanço com carregamento uniformemente distribuído

A Tabela 3.2 e o gráfico da Fig. 3.14 apresentam de forma comparativa os resultados obtidos para a flecha na extremidade livre da viga para as várias relações entre o vão livre e a altura da seção transversal, tomando-se como referência o valor fornecido pela teoria clássica de Bernoulli-Euler (valores entre parênteses).

Conforme mostra a Tab. 3.2, os resultados da flecha máxima na extremidade livre obtidos pelo programa, considerando-se a teoria clássica de Bernoulli-Euler e a teoria de Timoshenko foram próximos dos resultados obtidos analiticamente (Bernoulli-Euler, Timoshenko e Elasticidade), confirmando a expectativa da grande potencialidade da formulação adotada.

Pode-se observar, pela Tab. 3.2 e o gráfico da Fig. 3.14 que, em termos práticos, para uma relação $L/h \geq 5$, a influência do cisalhamento sobre os deslocamentos transversais de seções retangulares é pequena, por esta razão, todos os resultados da teoria de Timoshenko e da teoria da Elasticidade convergem para o valor fornecido pela teoria clássica. Percebe-se, também, que à medida que essa relação decresce ($L/h < 5$), a influência do cisalhamento sobre os deslocamentos transversais da viga passa a ser de grande importância, não podendo ser desprezada.

TABELA 3.2 – Flecha máxima na extremidade livre (mm)

L/h	Analítico			Programa	
	Bernoulli-Euler	Timoshenko	Elasticidade	Bernoulli-Euler	Timoshenko
1	0,0003	0,0006 (2,040)	0,0006 (2,125)	0,0003 (1,017)	0,0006 (2,057)
2	0,0046	0,0058 (1,260)	0,0059 (1,281)	0,0046 (1,017)	0,0058 (1,256)
3	0,0231	0,0258 (1,116)	0,0260 (1,125)	0,0235 (1,017)	0,0262 (1,132)
4	0,0731	0,0779 (1,065)	0,0783 (1,070)	0,0744 (1,017)	0,0791 (1,082)
5	0,1786	0,1860 (1,042)	0,1866 (1,045)	0,1816 (1,017)	0,1890 (1,058)
6	0,3703	0,3810 (1,029)	0,3819 (1,031)	0,3765 (1,017)	0,3872 (1,046)
8	1,1703	1,1893 (1,016)	1,1909 (1,018)	1,1898 (1,017)	1,2088 (1,033)
10	2,8571	2,8869 (1,010)	2,8893 (1,011)	2,9048 (1,017)	2,9345 (1,027)
15	14,4643	14,5311 (1,005)	14,5366 (1,005)	14,7053 (1,017)	14,7722 (1,021)
20	45,7143	45,8331 (1,003)	45,8429 (1,003)	46,4762 (1,017)	46,5951 (1,019)

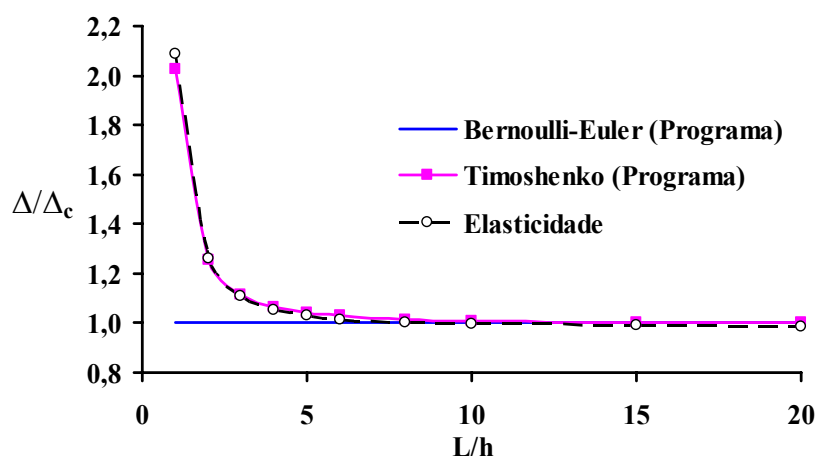


FIGURA 3.14 – Relação entre as flechas máximas na extremidade livre da viga, tomando-se como referência o valor fornecido pela teoria de Bernoulli-Euler

A Tabela 3.3 mostra os resultados da rotação máxima da seção transversal na extremidade livre da viga, tanto para a teoria clássica de Bernoulli-Euler quanto para a teoria de Timoshenko, obtidos pelo programa. Observa-se que os resultados da rotação para ambas as teorias são iguais, apresentando-se apenas um giro devido à flexão.

Conclui-se, portanto que, quando a viga é carregada transversalmente, as seções não sofrem rotações devido ao efeito do cisalhamento, uma vez que o carregamento causa um deslizamento vertical sucessivo das seções transversais adjacentes devido a força cortante, cujo resultado se traduz num deslocamento transversal que vem a se somar a um deslocamento transversal devido à flexão. E nesse caso, após a deformação, as seções sofrem rotações apenas de flexão.

TABELA 3.3 – Rotação máxima na extremidade livre (rad)

L/h	Programa	
	Bernoulli-Euler	Timoshenko
1	0,000001	0,000001
2	0,000008	0,000008
3	0,000026	0,000026
4	0,000063	0,000063
5	0,000122	0,000122
6	0,000211	0,000211
8	0,000501	0,000501
10	0,000979	0,000979
15	0,003303	0,003303
20	0,007829	0,007829

3.4.2 Viga Biapoiada Sujeita a Carga Uniformemente Distribuída ao Longo do Vão

De forma análoga ao caso anterior, este exemplo tem como objetivo mostrar a influência do efeito da deformação por cisalhamento no deslocamento vertical (flecha) e no deslocamento angular de uma viga biapoiada sujeita a carga uniformemente distribuída de 10 kN/m , conforme mostra a Fig. 3.15, totalmente contida lateralmente. Para implementação dos dados do programa a viga foi dividida em 20 elementos iguais e a seção transversal, em perfil I, dividida em 20 fatias. Foi adotado o módulo de elasticidade igual a $E=210000 \text{ MPa}$. A relação L/h (vão/altura) foi obtida fixando-se a altura da seção transversal e variando-se o comprimento da viga.

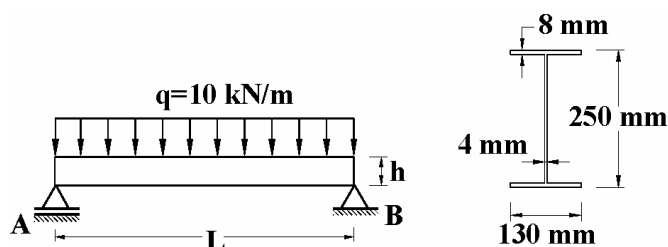


FIGURA 3.15 – Viga biapoiada com carga uniformemente distribuída ao longo do vão

Os resultados do deslocamento vertical no meio do vão obtidos pelo programa, considerando-se a teoria de clássica de Bernoulli-Euler e a teoria de Timoshenko, foram comparados com os resultados analíticos fornecidos pela teoria clássica e pela teoria de Timoshenko, conforme mostra a Tab. 3.4, para as várias relações entre o vão livre da viga e a altura da seção transversal. Observa-se que os resultados apresentados estão sempre relacionados com os resultados fornecidos analiticamente pela teoria clássica de Bernoulli-Euler (valores entre parênteses) para melhor comparação. A Tab 3.4 também mostra o giro da seção transversal no apoio A, obtidos pelo programa, considerando-se a teoria de clássica de Bernoulli-Euler e a teoria de Timoshenko.

Conforme mostra a Tab. 3.4, os resultados do deslocamento transversal no meio do vão apresentados pelo programa, considerando-se a teoria clássica e a teoria de Timoshenko foram próximos dos resultados obtidos analiticamente, confirmando novamente a grande potencialidade da formulação adotada.

TABELA 3.4 – Deslocamento transversal no meio do vão e rotação no apoio *A* da viga biapoiada

L/h	Analítico		Programa			
	Flecha no meio do vão (mm)		Flecha no meio do vão (mm)		Rotação no apoio A (rad)	
	Bernoulli-Euler	Timoshenko	Bernoulli-Euler	Timoshenko	Bernoulli-Euler	Timoshenko
1	0,00007	0,00110 (15,82)	0,00007 (1,01)	0,00111 (15,99)	0,000001	0,000001
2	0,00112	0,00525 (4,71)	0,00113 (1,01)	0,00530 (4,75)	0,000007	0,000007
3	0,00565	0,01495 (2,65)	0,00570 (1,01)	0,01510 (2,67)	0,000024	0,000024
4	0,01785	0,03438 (1,93)	0,01801 (1,01)	0,03472 (1,95)	0,000058	0,000058
5	0,04358	0,06941 (1,59)	0,04396 (1,01)	0,07008 (1,61)	0,000112	0,000112
6	0,09037	0,12757 (1,41)	0,09116 (1,01)	0,12877 (1,42)	0,000194	0,000194
8	0,28561	0,35174 (1,23)	0,28812 (1,01)	0,35497 (1,24)	0,000194	0,000194
10	0,69728	0,80062 (1,15)	0,70334 (1,01)	0,80778 (1,16)	0,000461	0,000461
15	3,52999	3,76250 (1,07)	3,56110 (1,01)	3,79613 (1,08)	0,000900	0,000900
20	11,15650	11,56985 (1,04)	11,25450 (1,01)	11,67220 (1,05)	0,007199	0,007199

Pode-se observar na Tab. 3.4 que os resultados da rotação no apoio *A*, tanto para a teoria clássica de Bernoulli-Euler quanto para a teoria de Timoshenko, foram iguais. Isso porque, conforme dito no exemplo anterior, para uma viga carregada transversalmente, as seções não sofrem rotações devido ao efeito do cisalhamento, apresentando, após a deformação, apenas rotações de flexão.

O gráfico da Fig. 3.16 apresenta de forma comparativa os resultados obtidos para a flecha máxima no meio do vão para as várias relações entre seu vão livre e a altura de sua seção transversal, tomando-se como referência o valor fornecido pelo programa considerando-se a teoria clássica.

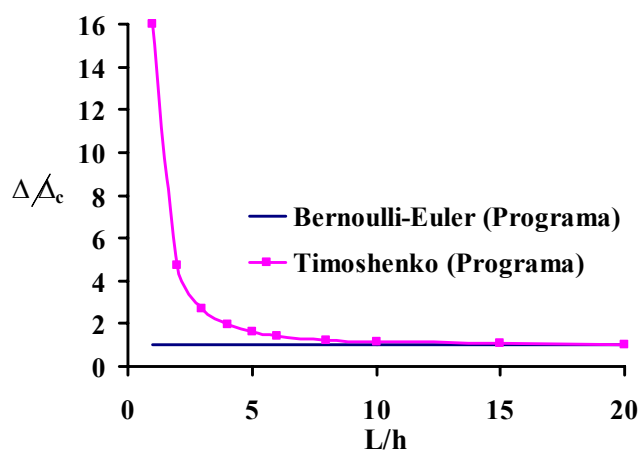


FIGURA 3.16 – Relação entre as flechas máximas no meio do vão da viga, tomando-se como referência o valor fornecido pela teoria de Bernoulli-Euler

Pode-se observar, a partir da Tab. 3.4 e do gráfico da Fig.3.16, que para uma relação $L/h \geq 10$ a influência do cisalhamento sobre os deslocamentos transversais é pequena, por esta razão, os valores obtidos pela teoria de Timoshenko convergem para o valor fornecido pela teoria clássica.

Percebe-se, ainda, no caso dos perfis I, que à medida que essa relação decresce ($L/h < 10$), a influência do cisalhamento sobre o deslocamento transversal passa a ser de grande importância, não podendo ser desprezada na análise. Por este motivo, os valores obtidos divergem bastante da resposta de Bernoulli-Euler, chegando a apresentar uma diferença percentual próximo ou superior a 100% para $L/h \leq 4$.

3.4.3 Viga Biapoiada Sujeita a um Momento Aplicado no Apoio A

Com o mesmo objetivo dos exemplos anteriores, de avaliar a influência do efeito da deformação por cisalhamento no deslocamento vertical (flecha) e no deslocamento angular, a Fig.3.17-a mostra uma viga biapoiada, contida lateralmente, sujeita a um momento aplicado de 100 kNm no apoio A. A seção transversal adotada é a mesma do perfil I utilizada no exemplo do subitem anterior.

A viga foi dividida em 10 elementos iguais conforme mostra a Fig. 3.17-b e a seção transversal dividida em 20 fatias. Foi adotado o módulo de elasticidade $E=200000 \text{ MPa}$. A relação L/h (vão/altura) da viga é igual a 10.

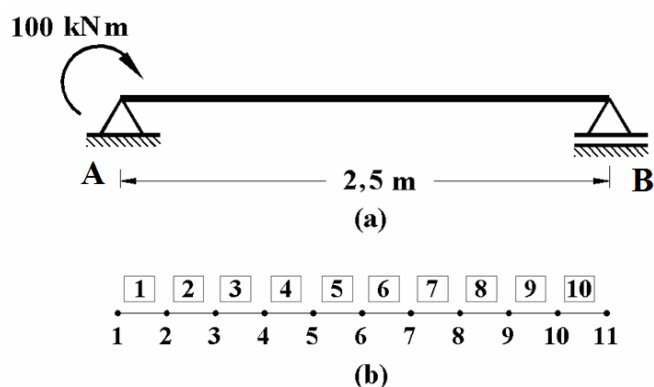


FIGURA 3.17 – (a) Viga biapoiada com momento aplicado no apoio A, (b) Viga discretizada em nós e elementos

A Tab. 3.5 apresenta os resultados do deslocamento vertical e da rotação da seção para todos os nós da viga (Fig. 3.17-b), considerando-se a teoria clássica de Bernoulli-Euler e a teoria de Timoshenko, obtidos pelo programa.

Pode-se observar que, quando o carregamento é constituído exclusivamente por binários externos aplicados à viga, o cisalhamento não tem influência alguma no deslocamento vertical. Dessa forma, os resultados, considerando-se tanto a teoria clássica quanto a Teoria de Timoshenko são iguais, apresentando deslocamentos verticais devidos apenas à flexão.

O mesmo não acontece com o giro da seção transversal, cujos resultados apresentados para ambas as teorias são diferentes entre si. Nota-se que as seções transversais dos elementos ao longo do comprimento da viga, considerando-se a teoria clássica, sofrem apenas rotações devidas à flexão. Porém, quando a teoria de Timoshenko é adotada, além da rotação devida à flexão, as seções transversais também sofrem, todas elas, uma mesma distorção γ devida ao cisalhamento. A última coluna da Tab. 3.5 confirma essa afirmação, mostrando que a distorção γ é constante, para todas as seções transversais ao longo do comprimento da viga, conforme prevê a teoria.

TABELA 3.5 – Deslocamento transversal e rotação nos nós dos elementos da viga biapoiada

Nó	Deslocamento vertical (cm)		Deslocamento angular (rad)		
	Bernoulli-Euler	Timoshenko	Bernoulli-Euler (rotação α)	Timoshenko (rotação $\alpha+\gamma$)	rotação γ
1	0,0000	0,0000	-0,0120	-0,0126	-0,0006
2	0,2566	0,2566	-0,0086	-0,0091	-0,0006
3	0,4321	0,4321	-0,0055	-0,0061	-0,0006
4	0,5356	0,5356	-0,0028	-0,0034	-0,0006
5	0,5761	0,5761	-0,0005	-0,0010	-0,0006
6	0,5626	0,5626	0,0015	0,0009	-0,0006
7	0,5041	0,5041	0,0031	0,0026	-0,0006
8	0,4096	0,4096	0,0044	0,0038	-0,0006
9	0,2881	0,2881	0,0053	0,0047	-0,0006
10	0,1485	0,1485	0,0058	0,0053	-0,0006
11	0,0000	0,0000	0,0060	0,0054	-0,0006

3.4.4 Viga com a Extremidade *A* Simplesmente Apoiada e a Extremidade *B* Engastada

Este exemplo tem como objetivo mostrar a influência do efeito da deformação por cisalhamento na transmissão do momento fletor em uma viga que possui a extremidade *A* simplesmente apoiada e a extremidade *B* engastada, conforme mostra a Fig. 3.18. A viga é totalmente contida lateralmente.

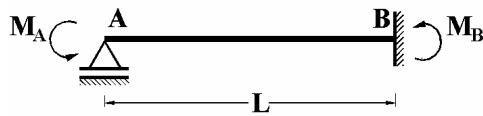


FIGURA 3.18 – Viga com a extremidade *A* simplesmente apoiada e a extremidade *B* engastada

O fator de transmissão do momento F_T é definido pela relação entre o momento M_B na extremidade engastada *B* e momento fletor M_A aplicado na extremidade *A* da viga. Esta relação é dada analiticamente por $F_T = \frac{M_B}{M_A} = \frac{2 - \beta}{4 + \beta}$, onde β é definido como fator de cisalhamento $\beta = \frac{12EI}{k_c GAL^2}$. Quanto maior o valor de β , maior é a influência das deformações por cisalhamento na análise.

Para implementação dos dados do programa, a viga foi dividida em 20 elementos iguais e foi utilizada a mesma seção transversal dos exemplos 3.4.2 e 3.4.3, ou seja, o perfil I, dividido em 20 fatias. Um momento fletor $M_A = 100 \text{ kNm}$ foi aplicado na extremidade *A* da viga. O módulo de elasticidade $E = 205000 \text{ MPa}$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ foram adotados. Para captar a evolução do fator de transmissão do momento, variou-se o comprimento da viga em função do fator de cisalhamento β .

O gráfico da Fig. 3.19, que mostra a variação do fator de transmissão do momento em função do fator de cisalhamento β , foi traçado utilizando-se os resultados obtidos pelo programa. Pode-se observar que para $\beta = 0$, ou seja, quando a influência das deformações por cisalhamento é nula, o fator de transmissão do momento F_T é igual a 0,5, que corresponde à teoria de Bernoulli-Euler. Quando a influência das deformações

por cisalhamento cresce, ou seja, quando o fator de cisalhamento β aumenta, o fator de transmissão F_T diminui e a viga não transmite nenhum momento para o engaste da extremidade B quando $\beta = 2$. Os resultados obtidos pelo programa são idênticos aos resultados obtidos analiticamente, mostrando a consistência da formulação desenvolvida.

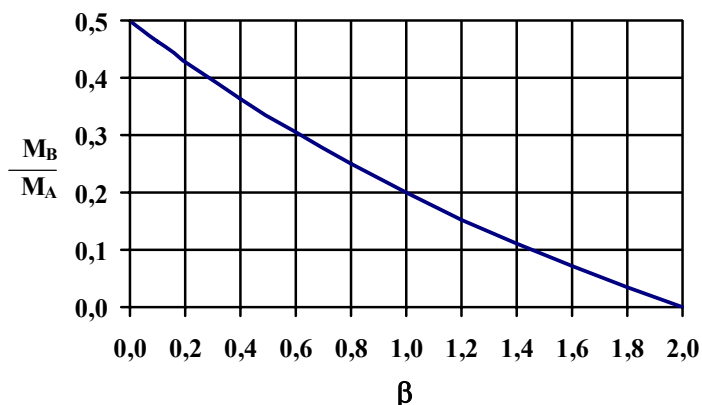


FIGURA 3.19 – Fator de transmissão do momento para viga com a extremidade A simplesmente apoiada e a extremidade B engastada

A Tabela 3.6 mostra a correspondência entre o fator de cisalhamento β e a relação L/h da viga. Nota-se que, quando o fator de cisalhamento β cresce, a relação comprimento/altura da seção transversal diminui. Quando $\beta = 2$ essa relação L/h é pequena e igual a 3,04.

TABELA 3.6 – Correspondência entre o fator de cisalhamento β e a relação L/h da viga.

β	0,01	0,10	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00
L/h	43,04	13,61	6,81	4,81	3,93	3,40	3,04

3.4.5 Viga Biengastada com Carga Concentrada Aplicada a uma Distância a da Extremidade Esquerda

Este exemplo tem como objetivo mostrar a influência dos efeitos do cisalhamento na determinação dos momentos de engastamento de uma viga biengastada quando a carga P é aplicada a uma determinada distância a do engaste esquerdo da viga, conforme mostra a Fig. 3.20.

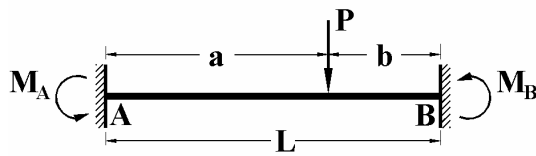


FIGURA 3.20 – Viga biengastada com carga concentrada aplicada a uma distância a do engaste esquerdo

Os momentos fletores nos engastes A e B produzidos por uma carga concentrada aplicada a uma distância a do engaste esquerdo são obtidos analiticamente por:

$$M_a = \frac{Pab^2}{l^2} \frac{2 + (l/b)\beta}{2(1 + \beta)} \text{ e } M_b = -\frac{Pa^2b}{l^2} \frac{2 + (l/a)\beta}{2(1 + \beta)}, \text{ onde } \beta \text{ é o fator de cisalhamento.}$$

Observa-se que, quando se omite o efeito do cisalhamento ($\beta=0$) ou quando a carga aplicada está no centro da viga ($a=b=0,5L$) essas expressões se reduzem às expressões convencionais da flexão.

Para implementação dos dados do programa considerou-se a viga com comprimento igual 10 m , dividida em 20 elementos iguais e uma seção transversal retangular de $5xh\text{ cm}^2$, dividida em 20 fatias. Uma carga concentrada de 3125 kN foi aplicada a uma distância a do engaste esquerdo. O módulo de elasticidade $E = 205000\text{ MPa}$, o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e o fator de cisalhamento $k_c = 1/1,2$ foram adotados. Para captar a influência dos efeitos do cisalhamento na determinação dos momentos fletores de engastamento, variou-se a altura da seção transversal em função do fator de cisalhamento β , conforme mostra a Tab. 3.7.

TABELA 3.7 – Correspondência entre o fator de cisalhamento β e a altura da seção transversal.

β	0,00	0,40	1,00	2,00
h (cm)	100	358	566	800

O gráfico da Fig. 3.21 mostra os momentos fletores obtidos no engaste A normalizados em relação ao ponto da carga aplicada, considerando-se o efeito da força cortante.

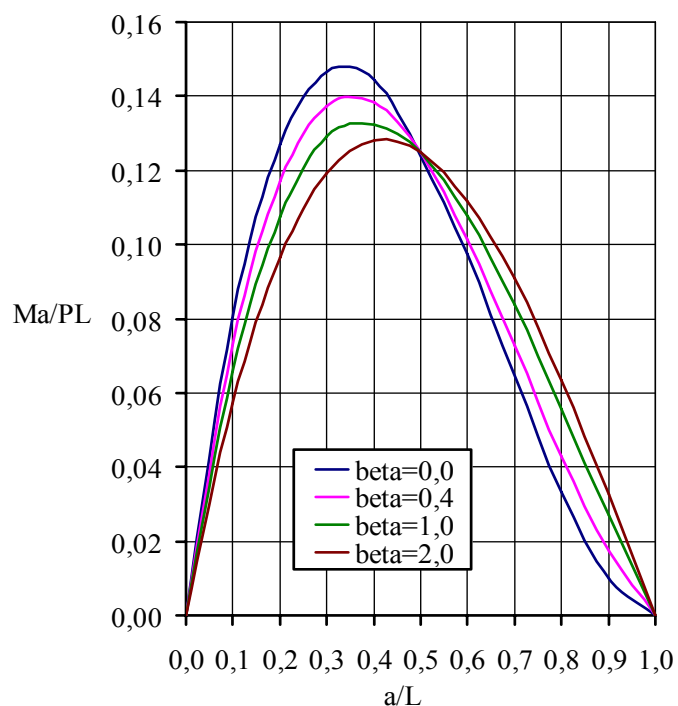


FIGURA 3.21 – Momento fletor no engaste A considerando o efeito do cisalhamento

Conforme mostra o gráfico da Fig. 3.21, à medida que o efeito do cisalhamento aumenta (β aumenta), o momento fletor no engaste A tende a diminuir quando a carga aplicada está mais próxima desse engaste e tende a aumentar quando ela se afasta dessa extremidade. Observa-se também que quando a carga está aplicada no centro da viga, isto é, quando o carregamento é simétrico, a força cortante não produz efeito algum na determinação do momento fletor no engaste A para qualquer valor de β , e o resultado torna-se idêntico ao da teoria clássica.

3.4.6 Pilares Comprimidos Axialmente

No dimensionamento de pilares axialmente comprimidos, um dos modos de colapso a ser considerado é a flambagem por flexão da barra. O conceito físico de flambagem está associado ao conceito matemático de bifurcação do equilíbrio, ou seja, na flambagem ocorre uma mudança brusca no comportamento estrutural da barra, com perda de estabilidade global ou não, podendo a mesma assumir configurações de equilíbrio distintas. Dessa forma, a carga de flambagem para pilares comprimidos no regime elástico é determinada considerando-se a teoria de 2ª ordem com as simplificações introduzidas pela teoria dos pequenos deslocamentos.

A carga de flambagem, incluindo o efeito do cisalhamento na redução da resistência à compressão de pilares, é determinada analiticamente, conforme SALMON e JOHNSON (1996), pela expressão:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \frac{1}{\left[1 + \frac{\pi^2 EI}{k_c GA(KL)^2}\right]} = P_E \frac{1}{\left[1 + \frac{\pi^2}{12 \cdot K^2} \beta\right]} \quad (3.169)$$

onde KL é definido como comprimento efetivo de flambagem.

Este exemplo tem como objetivo mostrar o efeito do cisalhamento na redução da resistência à compressão de pilares comprimidos axialmente. Para isso, são analisados dois pilares, o primeiro com as duas extremidades articuladas e o segundo com uma extremidade livre e a outra engastada, conforme mostra a Fig. 3.22.

Para implementação dos dados do programa, os pilares foram divididos em 20 elementos iguais e a seção transversal $W 200 \times 46,1$ dividida em 10 fatias. O módulo de elasticidade $E = 205000 \text{ MPa}$ e a resistência ao escoamento $f_y = 250 \text{ MPa}$ foram adotados, levando-se ao índice de esbeltez limite igual a $\lambda_{lim} = 90$. A relação L/h (vão/altura) foi obtida fixando-se a altura da seção transversal e variando-se o comprimento dos pilares.

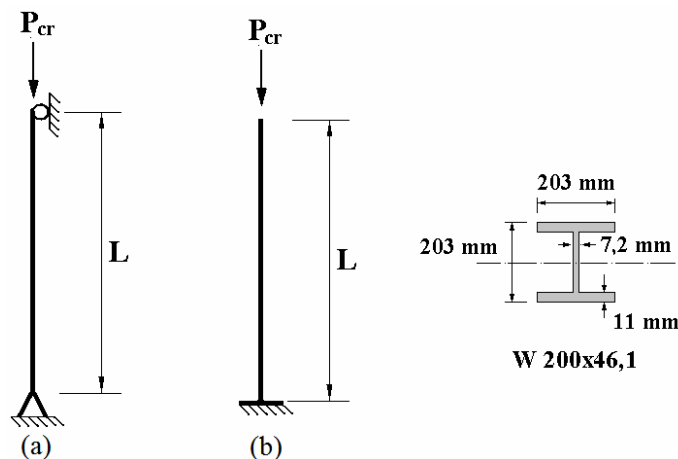


FIGURA 3.22 – Pilar comprimido axialmente: (a) com extremidades articuladas, (b) com extremidades engastada e livre

As Tabelas 3.8 e 3.9 apresentam, respectivamente, os resultados da carga crítica de flambagem elástica para os pilares com as duas extremidades articuladas (Fig. 3.22-a) e com uma extremidade engastada e a outra livre (Fig. 3.22-b), considerando-se várias relações entre o vão livre e a altura da seção transversal. Os resultados numéricos são comparados com os resultados obtidos analiticamente.

TABELA 3.8 – Carga crítica de flambagem (kN) para o pilar com extremidades rotuladas

L/h	L(cm)	kL/r	P _n (Analítico)		P _n (Programa)		P _n (Programa) Rótula-Rígido/Rígido-Rótula	
			Bernoulli	Timoshenko	Bernoulli	Timoshenko	Bernoulli	Timoshenko
23	467	91,5	1423,9	1418,7 (0,996)	1426,2	1419,0 (0,995)	1426,2	1419,0 (0,995)
25	508	99,5	1205,2	1201,5 (0,997)	1205,3	1205,3 (1,000)	1205,3	1205,3 (1,000)
30	609	119,4	837,0	835,1 (0,998)	838,6	838,6 (1,000)	838,6	838,6 (1,000)
35	711	139,3	614,9	613,9 (0,998)	615,3	615,3 (1,000)	615,3	615,3 (1,000)
38	771	151,3	521,6	520,9 (0,999)	523,2	523,2 (1,000)	523,2	523,2 (1,000)
40	812	159,2	470,8	470,2 (0,999)	471,7	471,7 (1,000)	471,7	471,7 (1,000)

TABELA 3.9 – Carga crítica de flambagem (kN) para o pilar com uma extremidade engastada e a outra livre

L/h	L(cm)	kL/r	P _n (Analítico)		P _n (Programa)	
			Bernoulli	Timoshenko	Bernoulli	Timoshenko
12	244	95,5	1307,7	1303,3 (0,997)	1304,3	1300,4 (0,997)
15	305	119,4	837,0	835,1 (0,998)	835,0	832,5 (0,997)
17	346	135,6	649,3	648,2 (0,998)	648,2	647,6 (0,999)
18	365	143,3	581,2	580,3 (0,999)	582,5	581,9 (0,999)
20	406	159,2	470,8	470,2 (0,999)	471,0	470,5 (0,999)
30	609	238,8	209,2	209,1 (0,999)	209,2	209,2 (1,000)
40	812	318,4	117,7	117,7 (1,000)	117,7	117,7 (1,000)

Conforme mostram as Tab. 3.8 e 3.9, os resultados apresentados da carga crítica de flambagem elástica pelo programa, para ambos os pilares, considerando-se a teoria clássica e a teoria de Timoshenko foram próximos dos resultados analíticos, evidenciando, mais uma vez, a boa precisão do programa. A Tabela 3.8 mostra também excelentes resultados da carga crítica, ao se considerar no programa a condição da extremidade rígida-rotulada e rotulada-rígida do elemento, validando as matrizes de rigidez do elemento finito desenvolvido com essas condições de extremidades.

Os valores entre parênteses relacionam os resultados obtidos considerando-se a teoria de Timoshenko com aqueles que consideram a Teoria de Bernoulli-Euler, fornecidos analiticamente e pelo programa.

Dessa forma, para os pilares comprimidos mostrados na Fig. 3.22, a flambagem em regime elástico ocorre quando os índices de esbeltez ($\lambda=kL/r$) são maiores que 90, o que corresponde a relações entre o comprimento da barra e a altura da seção transversal elevadas ($L/h \geq 23$ para o pilar bi-rotulado e $L/h \geq 12$ para o pilar com extremidades engastada e livre). Consequentemente, o fator de cisalhamento β , nesses casos, são praticamente nulos.

Analisando-se os resultados obtidos nas Tab. 3.8 e 3.9 para carga de flambagem elástica, conclui-se que, o efeito do cisalhamento na redução da resistência à compressão de pilares axialmente comprimidos é menor que 0,3%. Para índices de esbeltez menores do que 90, a flambagem ocorre em regime inelástico e, nesse caso, o efeito do cisalhamento equivale a uma redução da resistência à compressão de pilares axialmente comprimidos em torno de 1 a 2% podendo ser, seguramente, desprezado, conforme também afirmam SALMON e JOHNSON (1996).

CAPÍTULO

4

LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

4.1 Revisão Bibliográfica

Uma etapa importante na análise e dimensionamento de estruturas de aço está relacionada com uma avaliação mais precisa dos modelos estruturais utilizados nas análises. Atualmente, tem-se exigido dos pesquisadores e engenheiros um melhor conhecimento do comportamento real das ligações, visando, exatamente, o refinamento desses modelos de cálculo.

Tradicionalmente, em projetos de estruturas metálicas, considera-se uma idealização do comportamento das ligações, situando-as em duas classes extremas: ligações rígidas e ligações flexíveis (ou rotuladas). Contudo, muitas vezes, na prática da engenharia de projetos são usadas ligações do tipo semirrígido, com comportamento situado entre esses dois casos extremos idealizados.

A consideração de uma ligação rígida conduz a uma perfeita continuidade rotacional entre os elementos estruturais conectados, fazendo com que o ângulo formado entre esses elementos permaneça o mesmo após a atuação do carregamento da estrutura, possibilitando a transmissão total do momento fletor. Essa idealização leva o projetista a subestimar os deslocamentos que ocorrem nas estruturas e superestimar os esforços atuantes nas ligações. Por outro lado, considera-se que nas ligações flexíveis não há continuidade rotacional e que nenhuma transmissão de momento fletor ocorre entre os elementos, podendo levar a um projeto com vigas mais pesadas.

Os cálculos baseados em idealizações de nós totalmente rígidos ou flexíveis resultam em valores imprecisos das respostas de estruturas aperticadas. Isso porque, na realidade, a maioria das ligações nas estruturas de aço apresenta um comportamento semirrígido, devido à impossibilidade prática de se projetarem ligações ideais. Essas ligações permitem algum movimento relativo entre os elementos conectados nas ligações consideradas rígidas e uma determinada transmissão de momento fletor entre os elementos conectados, nas ligações consideradas flexíveis.

As ligações semirrígidas são geralmente caracterizadas com base em grandezas associadas ao seu projeto como a rigidez rotacional, a resistência à flexão e a capacidade de rotação. As corretas considerações desses parâmetros levam a uma análise mais realista do comportamento global do sistema estrutural adotado, resultando em estruturas mais econômicas e seguras.

O comportamento das ligações pode ser determinado, de forma mais precisa, através de ensaios experimentais. Pesquisas na área experimental tiveram início no começo do século XX quando WILSON e MOORE¹ apud MAGGI (2004) avaliaram a rigidez rotacional de ligações rebitadas e sua influência no comportamento da estrutura.

Na década de 1960, com a difusão dos microcomputadores, houve um avanço nas pesquisas, intensificando a necessidade de se incorporar o comportamento não linear das ligações na análise estrutural, podendo-se citar os trabalhos de LIGHTFOOT e BAKER² apud SANTOS (1998) que desenvolveram um programa computacional para analisar pórticos planos com ligações elásticas. MONFORTON e WU³ apud CHEN e TOMA (1994) incluíram as ligações semirrígidas na análise matricial de estruturas e que tem servido de base para vários outros trabalhos.

¹ WILSON, W. M. E MOORE, H. F. (1917) *Tests to Determine the Rigidity of Riveted Joints in Steel Structures*. Bulletin nº 104, Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urban, IL.

² LIGHTFOOT, E., BARKER, A. R. (1961) *The Analysis of Steel Frames with Elastic Beam Column Connections*. In: Congress Symposium On The Design Of Building, Hong Kong: Hong Kong University Press, pp. 205-17.

³ MONFORTON, G. R., WU, T. S. (1963) *Matrix Analysis of Semi-rigid Connected Frames*. Journal of the Structural Division, v. 87, n. ST6, pp. 13-42.

As metodologias utilizadas na modelagem numérica em elementos finitos têm sido implementadas e modificadas desde a década de 70. MAGGI (2004) cita vários trabalhos importantes de um mesmo pesquisador, KRISHNAMURTHY, realizados nessa época. O estudo detalhado pelo autor sobre a concentração de esforços nas placas e parafusos e os problemas do “efeito alavanca” em ligações com placa de extremidade foi considerado como referência fundamental na metodologia de dimensionamento das ligações parafusadas em 1980 pelo AISC.

A difusão da filosofia do Método dos Estados-limites a partir de 1980 contribuiu significativamente para que as ligações fossem classificadas de acordo com parâmetros mais realísticos de rigidez e resistência. Desde então, as pesquisas a nível mundial vêm confirmando a importância de se considerar as ligações semirrígidas na análise, na tentativa de melhor representar o comportamento global das estruturas.

Nessa época JONES et al. (1980) verificaram a influência das ligações semirrígidas em pilares de aço. Posteriormente, em 1983, os mesmos autores JONES et al. (1983) analisaram o comportamento de pórticos com ligações semirrígidas.

Em 1983, GOVERDHAM¹ apud CHEN et al. (1996) reuniu um total de 230 curvas momento x rotação, obtidas experimentalmente, em um banco de dados relativo ao comportamento de ligações. KISHI e CHEN² apud CHEN et al. (1996) estenderam a coleta feita por GOVERDHAM e criaram um sistema computadorizado para gerenciamento do banco de dados. Objetivando desenvolver um método racional de análise para pórticos semirrígidos, os autores criaram o programa SCDB (Steel Connection Data Bank) para reunir dados experimentais e estabelecer uma relação matemática no ajuste da curva experimental momento x rotação da ligação.

¹ GOVERDHAM, A. V. (1983). *A Collection of Experimental Moment Rotation Curves and Evaluation of Predict Equations for Semi-rigid Connections*. Nashville. Master's Thesis. Vanderbilt University.

² KISHI, N. E CHEN, W. F. (1986) *Data Base of Steel Beam-to-Column Connections*. Structural Engineering Report No. CE-STR-86-26. School of Civil Engineering, Purdue University, West Lafayette, IN. Vol. 2, p. 653.

Em 1990, BJORHOVDE et al. (1990) estabeleceram um esquema para classificação das ligações em função da rigidez, resistência e da ductilidade que elas apresentavam. Posteriormente, um novo sistema de classificação para as ligações foi proposto por HASAN et al. (1998) que consistia em dividir o diagrama $M-\theta$, para estrutura não-contraventada, em três zonas, definindo-se um diagrama trilinear.

Diversas pesquisas relacionadas com o estudo do comportamento e classificação das ligações têm sido incorporadas às normas modernas. Assim, as especificações da norma americana ANSI/AISC 360-05 distinguem dois tipos de ligações: completamente restringidas (*fully restrained*) e parcialmente restringidas (*partially restrained*).

O EN 1993-1-8: 2005 estabelece um método de classificação da ligação baseado nos critérios de rigidez e resistência. Pelo critério de rigidez, as ligações são classificadas como flexíveis (*nominally pinned*), semirrígidas ou rígidas. Pelo critério de resistência ao momento fletor, as ligações são classificadas em: completamente resistentes (*full strength connections*) e parcialmente resistentes (*partial strength connections*).

A norma brasileira ABNT NBR 8800: 2008 classifica a ligação apenas em relação à rigidez relativa entre as barras, porém não estabelece regras para obter a resistência das ligações.

Nas últimas décadas, pesquisadores e engenheiros têm buscado aperfeiçoar as análises estruturais considerando processos de cálculo cada vez mais refinados, através de programas computacionais capazes de realizar análises mais complexas, considerando vários fatores não lineares, como os efeitos de segunda ordem ($P-\Delta$ e $P-\delta$), a plasticidade do aço e as ligações semirrígidas.

O desenvolvimento de formulações e métodos de análises baseados no modelo da plasticidade concentrada ou rótula plástica com determinado grau de refinamento, incorporando-se os efeitos das ligações na análise de pórticos de aço foram implementados por diversos pesquisadores, como ACKROYD e GERSTLE (1982), LIEW et al. (1993-a,b), KING (1994), CHEN e TOMA (1994), KIM e CHEN (1996),

CHEN et al. (1996), KIM e CHOI (2001), GIZEJOWSKI et al. (2006), CHOI e KIM (2006).

As modificações ou refinamentos no método da rótula plástica, conforme documentaram alguns autores, são consideradas por dois motivos. Primeiro, devido às limitações analíticas do método da rótula plástica. As modificações ou refinamentos tentam suavizar a plastificação abrupta que ocorre na análise e permitir que rótulas plásticas concentradas se formem ao longo do comprimento da barra. O segundo motivo diz respeito ao esforço computacional exigido quando a análise pelo método da zona plástica ou plasticidade distribuída é adotado. Entretanto, devido ao avanço computacional, este último argumento já não é mais razoável, podendo atualmente, o modelo da plasticidade distribuída ser considerado o método mais direto de análise inelástica avançada.

FOLEY e VINNAKOTA (1997, 1999-a) desenvolveram um elemento finito para realizar uma análise inelástica em 2ª ordem, onde a plasticidade distribuída foi considerada nas seções transversais e ao longo do comprimento das barras de pórticos planos de aço de pequeno porte, totalmente resistentes (TR) e parcialmente resistentes (PR). FOLEY e VINNAKOTA (1999-b) estenderam a pesquisa analisando pórticos de aço TR e PR, com múltiplos andares e múltiplos vãos.

Em 1999, CHRISTOPHER e BJORHOVDE analisaram as características do comportamento de ligações de pórticos semirrígidos, considerando as diferenças das características de carga e descarga. Uma representação da curva momento \times rotação para as ligações foi apresentada através do modelo dos três parâmetros, para o cálculo da rigidez da ligação exigida na análise de pórticos semirrígidos.

No início do século XXI, SEKULOVIC e SALATIC (2001) desenvolveram um programa de computador baseado no Método dos Elementos Finitos para calcular os esforços e deslocamentos atuantes nas estruturas planas de aço, considerando-se o comportamento não linear das ligações e a não linearidade geométrica. O modelo de três parâmetros foi utilizado para descrever o comportamento não linear das ligações.

ZHOU (2005) desenvolveu um programa de computador capaz de simular o comportamento momento \times rotação das ligações com placa de extremidade com oito parafusos e expressões matemáticas para o cálculo dos parâmetros dessas ligações, de modo que elas sejam utilizadas no modelo matemático de três parâmetros e possam ser implementadas em um programa de computador para análise de pórticos de aço. Em seu trabalho, o autor também demonstrou como as propriedades desse tipo de ligação afetam significativamente o comportamento da estrutura, através da análise dos resultados de deslocamentos, esforços e formação de rótulas plásticas dos pórticos, obtidos por um programa de computador baseado no método da rótula plástica refinada de autoria de CHEN e KIM apud ZHOU (2005).

LIU et al. (2008) investigaram a interação entre o comportamento semirrígido das ligações e o comportamento elastoplástico das barras. Os autores propuseram um elemento de barra híbrido, com duas molas em cada extremidade. Para incluir ambos os efeitos, um fator de degradação de rigidez composto, função dos fatores degradação de rigidez da ligação semirrígida e da inelasticidade da barra, foi desenvolvido. O efeito interativo foi estudado em diversos pórticos semirrígidos.

Embora o estudo de ligações já venha sendo realizado no exterior desde o início do século passado, com maior ênfase a partir de 1960, no Brasil, o tema só começou a receber atenção nos últimos vinte anos, e, mesmo assim, direcionados ao estudo das ligações em si e não à influência que elas podem exercer sobre a estrutura.

O primeiro trabalho sobre a influência das ligações semirrígidas em pórticos de aço foi apresentado por CAMPOS Jr. apud SANTOS (1998). O autor desenvolveu um elemento híbrido de viga-pilar para incorporar a não linearidade geométrica dos pórticos, utilizando as funções de estabilidade, e a não linearidade das ligações em um programa de análise estrutural de pórticos planos com ligações semirrígidas entre vigas e pilares de aço. No ano seguinte, PRELOURENTZOU (1991) apresentou um estudo experimental de ligações com placa de extremidade e de ligações com cantoneira de alma, discutindo a sua classificação quanto à rigidez.

CHEN, W. F. e KIM, S. E. (1997) *LRFD Steel Design Using Advanced Analysis*, CRC Press, Boca Raton, Florida.

QUEIROZ (1992) estudou o comportamento de ligações rígidas entre perfis I com almas coplanares, analisando os estados-limites aplicáveis às ligações completamente soldadas e às ligações com placa de extremidade, determinando as resistências últimas considerando a presença ou não de enrijecedores no pilar. O autor elaborou um programa computacional que dimensiona tais ligações e fornece, para a ligação dimensionada, as constantes de mola do modelo proposto. Mais tarde, QUEIROZ (1995) avaliou a resistência, rigidez e capacidade de deformação das ligações soldadas através de ensaios e apresentou um modelo teórico para a análise de estruturas reticuladas.

Posteriormente, MONTEIRO (1997) elaborou um programa computacional para análise de pórticos planos visando considerar, de forma simplificada, a influência da semi-rigidez das ligações nas respostas da estrutura. O programa gera automaticamente os nós, conforme o modelo desenvolvido por QUEIROZ (1992), determina as constantes de mola da ligação adotada e efetua a análise da estrutura.

RIBEIRO (1998) realizou diversos ensaios de ligações com placa de extremidade para avaliar a influência do diâmetro dos parafusos e a espessura da placa de extremidade estendida no comportamento das ligações semirrígidas. No mesmo ano, SANTOS (1998) propôs um modelo para descrever do comportamento momento x rotação de ligações com placa de extremidade estendida e estudou a influência da rigidez dessas ligações na deslocabilidade lateral e na distribuição de esforços de pórticos planos de aço.

MELLO (1999) desenvolveu um programa computacional considerando-se os efeitos da não linearidade geométrica e do material, associados ao comportamento das ligações semirrígidas. O trabalho desenvolvido foi baseado no método dos deslocamentos com auxílio da técnica matricial utilizando as funções de estabilidade. Apesar do processo não necessitar de subdivisões dos elementos de barra, como no método dos elementos finitos, ele demonstrou grande eficiência e precisão nos resultados.

CAMPOS JR. R. A. (1990). *Análise do Comportamento de Estruturas Reticuladas de Aço com Ligações Semirrígidas*. Dissertação de Mestrado. PUC - RIO, p. 165.

SOUZA (1999) desenvolveu um programa para análise elástica, em teorias de 1ª e 2ª ordem, de estruturas planas de aço considerando as ligações semirrígidas, por meio de modificações adequadas na matriz de rigidez dos elementos componentes.

ROMANHOLO (2001) elaborou um programa computacional, incluindo o comportamento das ligações semirrígidas na matriz de rigidez do elemento de estruturas planas, modificando-as através da introdução de coeficientes que considere a rigidez axial e rotacional das ligações. Em seu trabalho, efetuou vários exemplos com estruturas de diferentes configurações e diferentes vãos para analisar o comportamento do deslocamento, da rotação e do momento em função da rigidez da estrutura.

Com o objetivo de descrever o comportamento de pórticos planos em madeira considerando-se a influência das propriedades de rigidez das ligações, SANTANA (2002) apresentou um trabalho dividido em quatro etapas. Uma modelagem teórica do comportamento da ligação resistente a momento fletor a partir do comportamento individual dos pinos de ligação foi realizada. Uma modelagem experimental, no qual foram feitos ensaios da madeira ao embutimento, ensaios de ligações e ensaios de modelos de pórticos planos, com finalidade de verificar os resultados dos modelos teóricos desenvolvidos. O trabalho também consistiu no desenvolvimento de um programa capaz de realizar uma análise não linear de pórticos planos em madeira com ligações semirrígidas, onde os modelos teóricos implementados foram aplicados na análise, com a finalidade de obter informações a respeito da grandeza da influência das ligações no comportamento estrutural. E, finalmente, foi feita essa mesma análise no programa comercial ANSYS, com a finalidade de comparar os resultados com os modelos teóricos implementados.

Em 2003 foram desenvolvidos vários trabalhos, destacando-se os de OLIVEIRA (2003) que apresentou uma ferramenta computacional para análise de sistemas de pisos mistos aço-concreto considerando a presença da ligação semirrígida viga-viga. LANDESMANN (2003) que desenvolveu uma metodologia de análise estrutural não linear elastoplástica para pórticos considerando a flexibilidade das ligações metálicas entre viga-pilar. LIMA (2003) que analisou o comportamento estrutural de ligações

viga-pilar com placa de extremidade através de ensaios e propôs um modelo mecânico elastoplástico para ligações com placa de extremidade em estruturas aporticadas submetidas a momento fletor e força normal. E, finalmente, o trabalho de BORGES et al. (2003) que desenvolveram uma ferramenta para análise avançada com ligações metálicas e mistas denominado *NASCON*, um programa de cálculo não linear baseado no método das componentes preconizado pelo EN 1993-1-8: 2005.

Em 2004, MAGGI desenvolveu um estudo numérico e experimental do comportamento de ligações parafusadas viga-pilar com placa de extremidade estendida através de análise tridimensional. No mesmo ano, GALVÃO (2004) apresentou uma análise dinâmica no cálculo das estruturas de pórticos planos com ligações semirrígidas.

MATA (2005) propôs um método simplificado de análise de pórticos deslocáveis com ligações mistas, adequado para utilização em escritórios de projeto e um modelo de elementos finitos para análise elastoplástica avançada de pórticos deslocáveis com ligações mistas.

LANDESMANN e BATISTA (2005) desenvolveram um programa capaz de realizar uma análise avançada baseado no método da rótula plástica refinada, utilizando o conceito do módulo tangente, sendo este calculado em função das curvas de resistência à compressão, especificadas pela antiga ABNT NBR 8800:1986. O programa computacional, desenvolvido com base nas funções de estabilidade do elemento, é utilizado para avaliar o comportamento de estrutura de aço com ligações semirrígidas. A flexibilidade das ligações é introduzida no programa através da modificação da matriz de rigidez do elemento.

PINHEIRO e SILVEIRA (2005) discutiram detalhes e procedimentos computacionais referentes às análises de pórticos com ligações semirrígidas. Tais procedimentos não lineares de análise de sistemas estruturais semirrígidos foram implementados na metodologia de solução de sistemas de equações não lineares proposta por SILVEIRA (1995). Modificações da matriz de rigidez de um elemento semirrígido sujeito à análise não linear produziram resultados extremamente precisos quando

comparados com aqueles encontrados na literatura, demonstrando a validade dos procedimentos sugeridos e da implementação computacional das ligações com comportamentos lineares e não lineares.

CASTRO (2006) propôs o emprego de um modelo mecânico com elementos de mola rotacionais não lineares para simular adequadamente o efeito das ligações semirrígidas na análise dinâmica de pórticos de aço.

E finalmente, AVAKIAN (2007) analisou os efeitos de 2ª ordem em estruturas aporticadas, para diversas soluções estruturais, observando a influência do comportamento real das ligações semirrígidas e mistas aço-concreto no desempenho global da estrutura. Para a análise estrutural foram aplicados os métodos aproximados propostos pelo ANSI/AISC 360-05 e pela ABNT NBR 8800 - Projeto de Revisão (Setembro de 2006) através dos coeficientes de amplificação dos momentos B_1 - B_2 e o método do coeficiente γ_z recomendado pela ABNT NBR 6118: 2003. Técnicas de análise avançada também foram aplicadas através de um modelo numérico não linear elastoplástico baseado no método das rótulas plásticas refinadas.

Com o avanço das pesquisas aliado ao desenvolvimento computacional, o comportamento semirrígido vem sendo incorporado progressivamente nas análises de cálculo, resultando em análises mais realistas da resposta global das estruturas, permitindo um dimensionamento mais preciso.

4.2 Comportamento das Ligações Semirrígidas

O conhecimento do comportamento de ligações entre os elementos estruturais é essencial para a análise e dimensionamento de uma estrutura. Em uma ligação entre viga e pilar, geralmente, ocorre a transmissão de forças normais, forças cortantes, momentos fletores e de torção. Contudo, em vários casos de ligações em estruturas aporticadas, as deformações causadas pelas forças normais e cortantes são pequenas quando comparadas com as deformações rotacionais, podendo ser desconsideradas na análise. O efeito causado pela torção também não é considerado no estudo de estruturas planas.

A rotação relativa θ_r da ligação representa a mudança do ângulo entre a viga e o pilar da configuração original devido ao momento fletor, conforme mostra a Fig. 4.1. O comportamento de uma ligação pode ser representado através da curva momento \times rotação relativa, que relaciona o momento fletor a que está solicitada à ligação com a rotação relativa entre os elementos ligados.

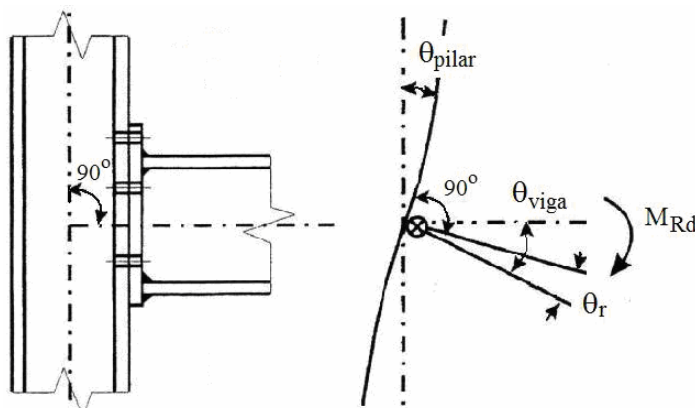


FIGURA 4.1 – Rotação de uma ligação metálica viga-pilar

A Figura 4.2, adaptada de CHEN e TOMA (1994), mostra curvas momento \times rotação para vários tipos de ligação, relacionando o momento fletor total aplicado com a rotação relativa da ligação. Analisando-se as curvas, pode-se observar que:

- Todos os tipos de ligações possuem comportamento situado entre dois extremos: perfeitamente rígido (eixo vertical) e rotulado (eixo horizontal);
- A relação $M - \theta_r$ para ligações semirrígidas é tipicamente não linear desde o início do carregamento, com redução da rigidez conforme a rotação aumenta;
- Para o mesmo valor de momento, quanto mais flexível for uma ligação, maior será a rotação;
- Para um determinado valor de rotação θ , quanto mais flexível for uma ligação, menor será a transmissão de momento entre os elementos conectados. Dessa forma, o momento máximo que uma ligação pode transmitir diminui com a flexibilidade da ligação;
- No carregamento, a rigidez da ligação diminui com o aumento da rotação e no descarregamento, ela se aproxima da rigidez inicial.

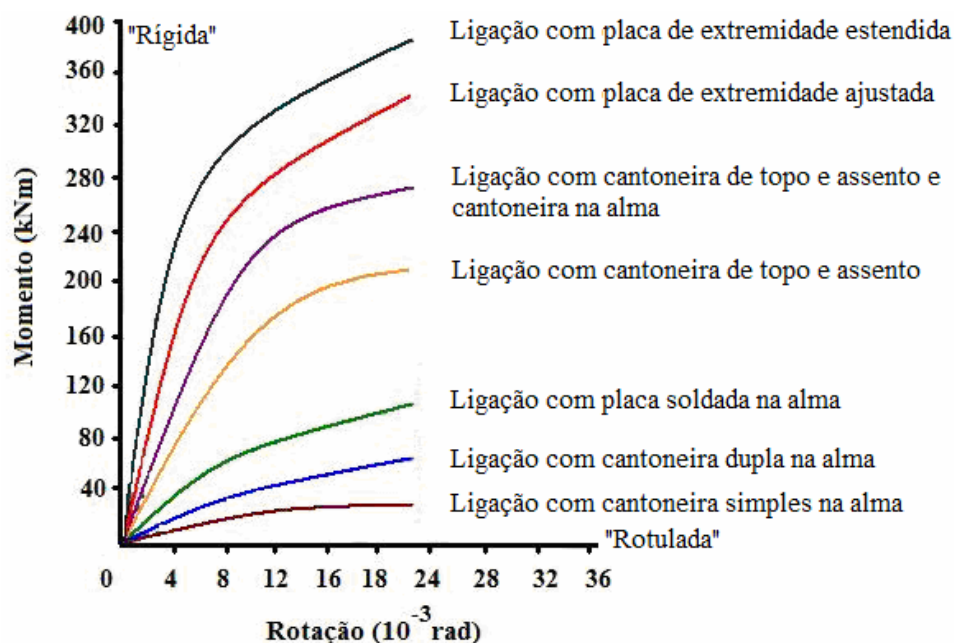


FIGURA 4.2 – Curvas momento \times rotação para diversos tipos de ligações, adaptada de CHEN e TOMA (1994)

As ligações soldadas são geralmente classificadas como rígidas, pois são as que apresentam maior resistência e pouca capacidade rotacional e as cantoneiras de alma são geralmente classificadas como rotuladas, apresentando pouca resistência à flexão e grande capacidade rotacional. As ligações situadas entre esses dois extremos são classificadas como semirrígidas.

A Figura 4.3 mostra exemplos de ligações viga-pilar que podem ser classificadas como rígidas: ligações T-stub e ligações com placa de extremidade estendida com ou sem enrijecedores na alma do pilar; semirrígidas: ligações com cantoneiras de topo e assento com ou sem cantoneira dupla na alma e flexíveis: ligações com cantoneira simples ou dupla ou com placa soldada na alma da viga. As ligações que possuem cantoneiras de topo e assento e as ligações T-stub não são muito empregadas no Brasil.

Uma determinada ligação pode apresentar diversos comportamentos rotacionais, simplesmente modificando os seus parâmetros. Por exemplo, a rigidez e a resistência de uma ligação com placa de extremidade podem ser alteradas, ao variar a espessura da placa e/ou o diâmetro dos parafusos, bem como outros parâmetros da ligação.

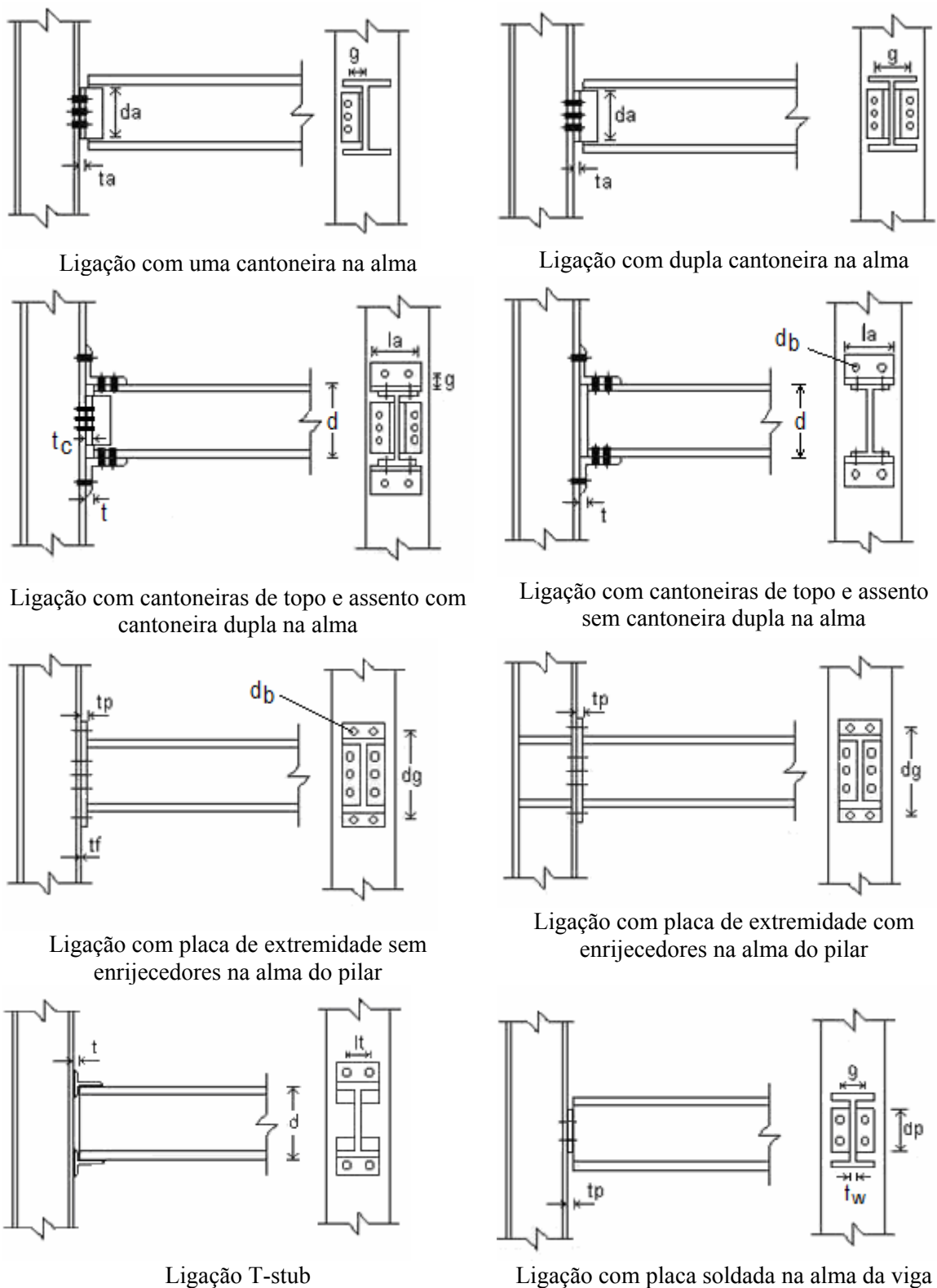


FIGURA 4.3 – Exemplos de ligações viga-pilar, adaptada de CHEN e TOMA (1994)

De modo geral, os efeitos que causam a não linearidade da relação momento x rotação relativa das ligações semirrígidas são atribuídos a vários fatores, como por exemplo:

- Escoamento local de algumas partes dos componentes da ligação;
- Flambagem local de mesas e/ou alma da viga e pilar conectados na ligação;
- Descontinuidade geométrica na ligação devido a combinação de vários elementos como parafusos, chapas, cantoneiras, permitindo um deslizamento e movimento relativo entre componentes quando submetido a qualquer valor de carregamento;
- Concentrações de tensões e deformações causadas por furos, chapas de contato e porcas utilizadas como elementos de montagem da ligação;
- Tensões residuais oriundas de operações de soldagem e recorte.

Os resultados dos esforços nas barras, deslocamentos e rotações dos nós, dependem do tipo de ligação considerado. A Figura 4.4 mostra como o momento fletor na barra e a flecha no meio do vão podem variar para cada tipo de apoio considerado (flexível, semirrígido e rígido), para o mesmo carregamento aplicado na estrutura. Dessa forma, a rigidez das ligações, ou seja, a sua capacidade de impedir a rotação relativa local das peças ligadas, é responsável pelo comportamento final da estrutura, em termos de rotações e deslocamentos e quanto à distribuição dos esforços.

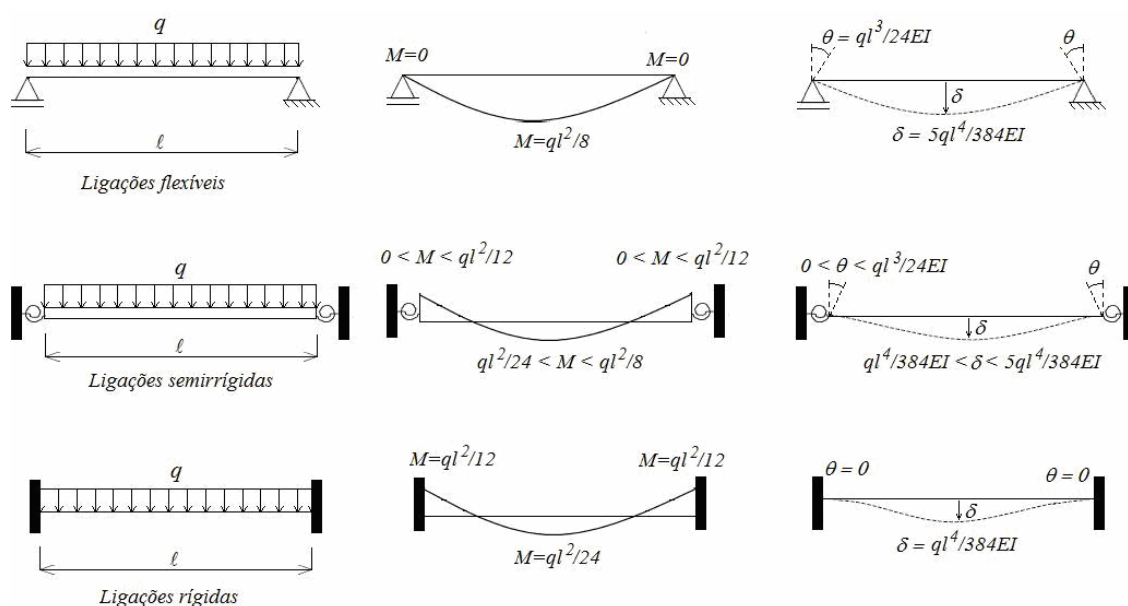


FIGURA 4.4 – Influência da rigidez da ligação no comportamento da viga

4.3 Modelagem das Ligações Semirrígidas

A modelagem de uma ligação consiste na descrição do seu comportamento mediante a ação de esforços solicitantes, principalmente a transmissão de momento fletor.

A incorporação do comportamento das ligações na análise estrutural exige uma representação matemática das curvas momento \times rotação relativa, que pode ser realizada através dos seguintes modelos: analítico, experimental, mecânico e numérico utilizando o método dos elementos finitos.

4.3.1 Modelagem Analítica

A escolha do modelo matemático depende do nível de refinamento desejado para a curva $M-\theta_r$ e de sua influência na resposta da estrutura, podendo ser, por exemplo, linear, bi-linear, tri-linear, multilinear e continuamente não linear, conforme mostra a Fig. 4.5, para o caso de ligações simétricas, conforme abordadas neste trabalho. Os modelos analíticos são geralmente validados através da comparação com os resultados experimentais e/ou modelos numéricos e até mesmo com outros modelos analíticos.

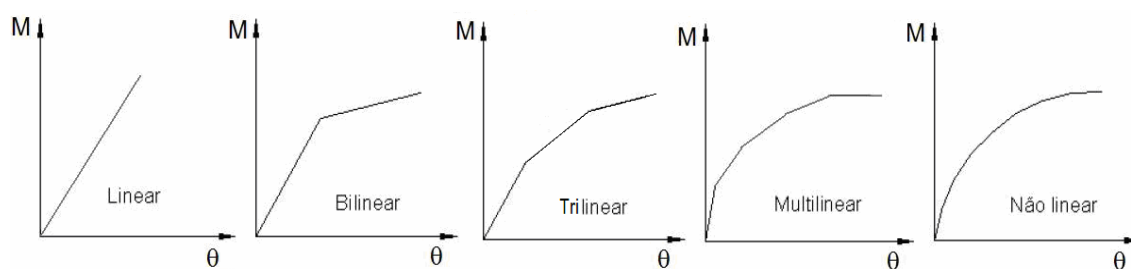


FIGURA 4.5 – Modelos matemáticos da curva $M-\theta$ da ligação

Segundo CHEN e TOMA (1994) os primeiros estudos desenvolvidos abordavam apenas a rigidez inicial da ligação num modelo linear $M-\theta$. Apesar de o modelo linear ter como vantagem a facilidade de uso, pois utiliza a rigidez inicial para representar todo o comportamento da ligação, ele torna-se menos preciso à medida que a solicitação aumenta, superestimando a capacidade da ligação.

Uma melhoria significativa é obtida através do modelo bi-linear, apesar deste não ser capaz de considerar mudanças contínuas de rigidez na curva. Esse modelo é geralmente utilizado nas análises elasto-plásticas. Para amenizar a mudança repentina na rigidez da ligação dos modelos bilineares, JONES et al. (1980) propuseram o modelo B-spline cúbico para obter uma função mais adequada. Entretanto, esse modelo requer um grande número de dados de amostras durante o processo de formulação. Quando se deseja descrever a curva $M-\theta_r$ de forma mais precisa, modelos trilineares e multilineares podem ser adotados. Porém, um maior grau na precisão pode ser obtido por meio do uso de curvas $M-\theta_r$ continuamente não lineares, como os apresentados a seguir.

4.3.1.1 Modelo Polinomial de Frye-Morris

FRYE e MORRIS apud CHEN e TOMA (1994) apresentaram um modelo polinomial para avaliar o comportamento de diversos tipos de ligações. O modelo consiste em aproximar a curva experimental através de uma função polinomial que apresenta a seguinte forma:

$$\theta_r = C_1(kM) + C_2(kM)^3 + C_3(kM)^5 \quad (4.1)$$

onde k é um parâmetro de padronização que depende do tipo e das características geométricas da ligação, e os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 , constantes obtidas por técnicas de ajuste de curva. A Tab. 4.1 fornece as constantes de ajuste das funções polinomiais para diversos tipos de ligações, bem como os parâmetros de padronização das ligações que estão mostrados na Fig. 4.3. As expressões mostradas na Tab. 4.1 foram calibradas por ensaios com perfis estrangeiros e as constantes das funções foram ajustadas no sistema inglês de unidades.

O modelo descreve bem o comportamento da ligação até um determinado limite do carregamento, a partir do qual começa a apresentar grandes discrepâncias em relação à curva experimental, além de apresentar valores negativos de rigidez para determinados tipos de ligação.

FRYE, M. J.; MORRIS, G. A. (1975). *Analysis of Flexibility Connected Steel Frames*. Canadian Journal of Civil Engineering, v. 2, pp. 280-291.

TABELA 4.1 – Tabela das constantes de ajuste e dos parâmetros de padronização das funções polinomiais de FRYE e MORRIS apud CHEN e TOMA (1994)

Tipo de ligação	Constantes de ajuste de curva	Parâmetro de padronização
Ligação com uma cantoneira na alma	$C_1 = 4,28 \times 10^{-3}$ $C_2 = 1,45 \times 10^{-9}$ $C_3 = 1,51 \times 10^{-16}$	$k = d_a^{-2,4} t_a^{-1,81} g^{0,15}$
Ligação com dupla cantoneira na alma	$C_1 = 3,66 \times 10^{-4}$ $C_2 = 1,15 \times 10^{-6}$ $C_3 = 4,57 \times 10^{-8}$	$k = d_a^{-2,4} t_a^{-1,81} g^{0,15}$
Ligações com cantoneiras de topo e assento e dupla cantoneira na alma	$C_1 = 2,23 \times 10^{-5}$ $C_2 = 1,85 \times 10^{-8}$ $C_3 = 3,19 \times 10^{-12}$	$k = d^{-1,287} t^{-1,128} t_c^{-0,415} l_a^{-0,694} g^{1,35}$
Ligação com cantoneiras de topo e assento	$C_1 = 8,46 \times 10^{-4}$ $C_2 = 1,01 \times 10^{-4}$ $C_3 = 1,24 \times 10^{-8}$	$k = d^{-1,5} t^{-0,5} l_a^{-0,7} d_b^{-1,1}$
Ligação com placa de extremidade estendida sem enrijecedores de alma do pilar	$C_1 = 1,83 \times 10^{-3}$ $C_2 = -1,04 \times 10^{-4}$ $C_3 = 6,38 \times 10^{-6}$	$k = d_g^{-2,4} t_p^{-0,4} t_f^{-1,5}$
Ligação com placa de extremidade estendida com enrijecedores de alma do pilar	$C_1 = 1,79 \times 10^{-3}$ $C_2 = -1,76 \times 10^{-4}$ $C_3 = 2,04 \times 10^{-4}$	$k = d_g^{-2,4} t_p^{-0,4}$
T-stub	$C_1 = 2,10 \times 10^{-4}$ $C_2 = 6,2 \times 10^{-6}$ $C_3 = -7,6 \times 10^{-9}$	$k = d^{-1,5} t^{-0,5} l_t^{-0,7} d_b^{-1,1}$
Ligação com placa soldada à alma da viga	$C_1 = 5,10 \times 10^{-5}$ $C_2 = 6,20 \times 10^{-10}$ $C_3 = 2,10 \times 10^{-13}$	$k = t_p^{-1,6} g^{1,6} d_p^{-2,3} t_w^{-0,5}$

4.3.1.2 Modelo B-spline Cúbico

JONES et al. (1980) corrigiram com precisão o problema do modelo polinomial propondo um modelo B-spline cúbico para melhorar a aproximação da curva e evitar o problema da tangente negativa. Esse método exige a subdivisão da curva experimental em um número de trechos menores e em cada trecho uma função cúbica é ajustada mantendo a continuidade da primeira e segunda derivadas, entre trechos adjacentes. Essas condições garantem curvas suaves e contínuas que se aproximam bastante das curvas experimentais. Contudo, essa aproximação necessita de um grande número de parâmetros.

4.3.1.3 Modelo de Três Parâmetros de CHEN e KISHI (1989)

CHEN e KISHI (1989) apresentaram um modelo com três parâmetros para representar o comportamento $M-\theta_r$ das ligações. Os três parâmetros do modelo são: a rigidez inicial da ligação (K_i), a capacidade última ao momento da ligação (M_u) e o fator de forma n . Esses parâmetros são calculados através de um modelo analítico simples, utilizando as propriedades do material e dimensões geométricas. Usando-se esses parâmetros no modelo dado por RICHARD e ABBOTT apud CHEN et al. (1996), obtém-se a função que representa o comportamento momento \times rotação relativa da ligação:

$$M = \frac{K_i \theta_r}{\left[1 + \left(\frac{\theta_r}{\theta_0}\right)^n\right]^{1/n}} \quad (4.2)$$

onde K_i é a rigidez inicial da ligação, n o fator de forma, θ_0 a rotação plástica de referência e igual a M_u/K_i , sendo M_u o momento último da ligação. A Eq. (4.2) é representada na Fig. 4.6, onde se pode observar curvas distintas para cada valor do parâmetro n .

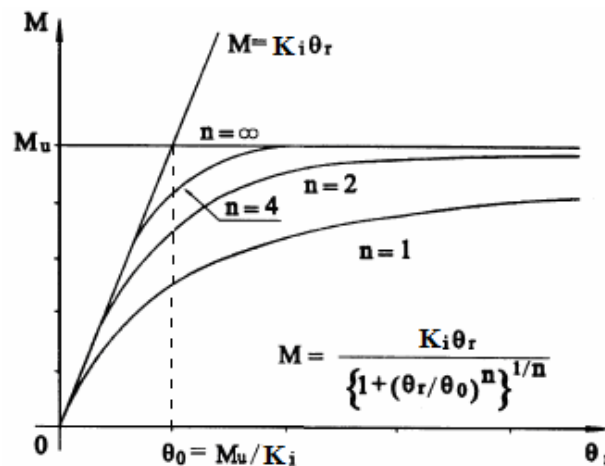


FIGURA 4.6 – Comportamento momento \times rotação para o modelo de três parâmetros CHEN e KISHI (1989)

RICHARD, R. M. e ABBOTT, B. J. (1975) *Versatile Elastic-Plastic Stress-Strain Formula*. Journal of Engineering Mechanics Division. ASCE, v. 101, nº EM4, pp. 511-515.

Diversos pesquisadores basearam-se nesse modelo para descrever o comportamento das ligações. Segundo CHEN e TOMA (1994), esse modelo é considerado uma ferramenta útil para análises não lineares, pois a rigidez tangente e a rotação da ligação podem ser obtidas diretamente da expressão analítica do modelo, fazendo a derivada primeira da Eq. (4.2), sem a necessidade de processos iterativos adicionais. A rigidez tangente K_t e θ_r são dados, respectivamente, por:

$$K_t = \frac{dM}{d\theta_r} = \frac{K_i}{\left[1 + \left(\frac{\theta_r}{\theta_0}\right)^n\right]^{\frac{(n+1)}{n}}} \quad (4.3)$$

$$\theta_r = \frac{M}{K_i \left[1 - \left(\frac{M}{M_u}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}} \quad (4.4)$$

4.3.1.4 Modelo de Quatro Parâmetros de KISHI et al. (2004)

O modelo de quatro parâmetros proposto por KISHI et al. (2004) para descrever o comportamento das ligações semirrígidas através de curvas momento \times rotação relativa é composto pelos seguintes parâmetros: rigidez inicial (K_i), rigidez com encruamento (K_p), momento de referência (M_0) e parâmetro de forma (n). Esses parâmetros foram determinados a partir de testes experimentais de 168 tipos de ligações de placa de extremidade e armazenados em banco de dados.

O momento fletor M , a rotação relativa θ_r e a rigidez tangente K_t para o modelo de quatro parâmetros são dados, respectivamente por:

$$M = \frac{(K_i - K_p)\theta_r}{\left[1 + \left(\frac{\theta_r}{\theta_0}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}} + K_p\theta_r \quad (4.5)$$

$$\theta_r = \left\{ \left(\frac{K_i - K_p}{K_t - K_p} \right)^{\frac{n}{n+1}} - 1 \right\}^{\frac{1}{n}} \theta_0 \quad (4.6)$$

$$K_t = \frac{dM}{d\theta_r} = \frac{K_i - K_p}{\left(1 + \left(\frac{\theta_r}{\theta_0} \right)^n \right)^{\frac{(n+1)}{n}}} + K_p \quad (4.7)$$

onde θ_0 é a rotação relativa de referência dada por:

$$\theta_0 = \frac{M_0}{(K_i - K_p)} \quad (4.8)$$

A Figura 4.7 mostra curvas $M-\theta_r$ de uma ligação para o fator de forma n variando de um valor pequeno a infinito. Observa-se na Fig. 4.7 que, quando n tende a infinito, o modelo é reduzido para um comportamento bilinear com rigidez inicial K_i e rigidez com encruamento K_p .

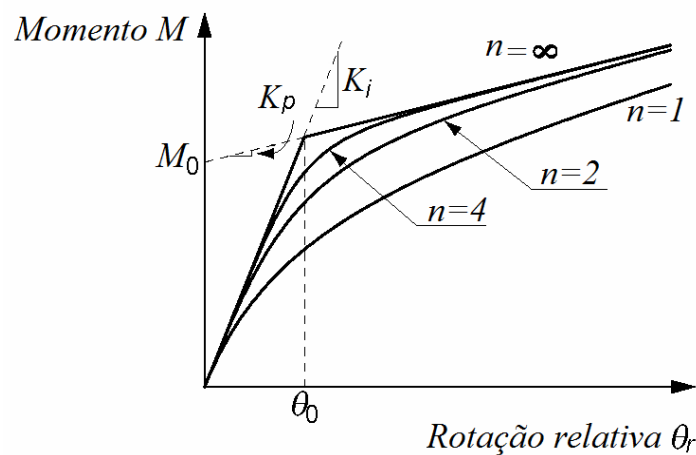


FIGURA 4.7 – Comportamento momento \times rotação para o modelo de quatro parâmetros
KISHI et al. (2004)

4.3.2 Modelagem Experimental

A modelagem experimental consiste na realização de ensaios de laboratórios em modelos de escala real ou reduzida, com a finalidade de estudar o comportamento mecânico da ligação. A realização de ensaios experimentais permite obter, de forma confiável e precisa, o comportamento real das ligações. Com base nos resultados é possível calibrar os diversos modelos existentes para determinação do momento resistente, da rigidez inicial e de sua capacidade de rotação.

No entanto, apesar de a modelagem experimental ser importante na avaliação dos resultados, na calibração e na validação dos modelos analíticos propostos, os custos envolvidos são bastante elevados, fazendo com que esta não seja uma técnica adotada com frequência na prática, se restringido muitas vezes a estudos de pesquisas.

4.3.3 Modelagem mecânica

O modelo mecânico consiste em identificar os componentes ativos da ligação, estabelecer relações de força versus deslocamento para cada um desses componentes e por último realizar a associação dos componentes para obtenção da curva momento x rotação da ligação.

O Método dos Componentes é o modelo mecânico utilizado no dimensionamento de ligações estruturais em aço, presente no EN 1993-1-8: 2005, onde os componentes são representados por molas translacionais, com comportamento linear ou não linear, formando sistemas que são tratados como estruturas para simular o comportamento momento x rotação das ligações.

A primeira etapa do Método dos Componentes para a construção da curva momento x rotação da ligação é a identificação dos componentes presentes na mesma. Neste método, as ligações são consideradas como uma série de elementos básicos distribuídos em três regiões distintas: uma região tracionada, uma região comprimida e uma região de cisalhamento, conforme mostra a Fig. 4.8. Em seguida, as curvas força-deslocamento

de cada um dos componentes identificados são obtidas. E finalmente, combinando-se os valores de rigidez de cada um dos componentes, representados por molas, associadas em série e em paralelo, obtém-se a curva momento \times rotação da ligação.

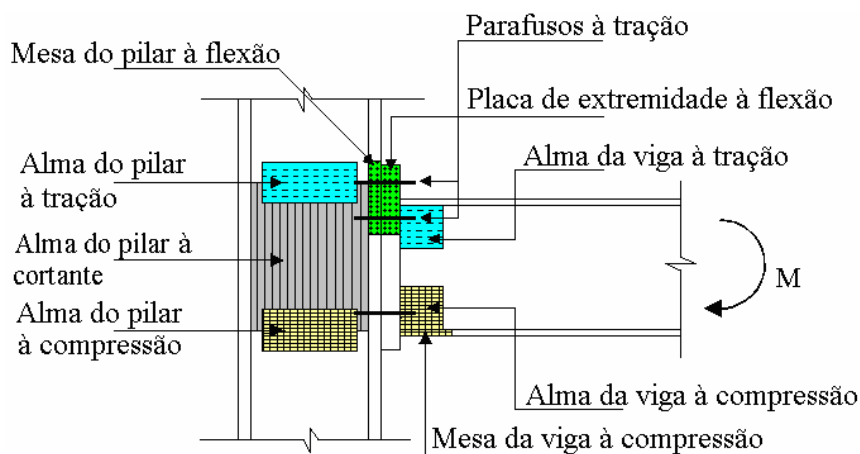


FIGURA 4.8 – Regiões para verificação da resistência em uma ligação viga-pilar com placa de extremidade, adaptada de LIMA (2003)

4.3.4 Modelagem numérica

A modelagem numérica baseada no método dos elementos finitos é considerada uma ferramenta adequada na realização de pesquisas visando à calibração de modelos. Os inconvenientes da sua aplicação prática são os custos envolvidos, devido à utilização de programas comerciais sofisticados e o tempo gasto na simulação.

4.4 Classificação das Ligações

O comportamento das ligações é geralmente representado pela curva $M-\theta_r$, conforme mostra a Fig. 4.9. A partir desta curva, definem-se as três propriedades fundamentais de uma ligação:

- Rigidez rotacional inicial (K_i);
- Momento Resistente (M_u);
- Ductilidade ou capacidade rotacional (θ_u).

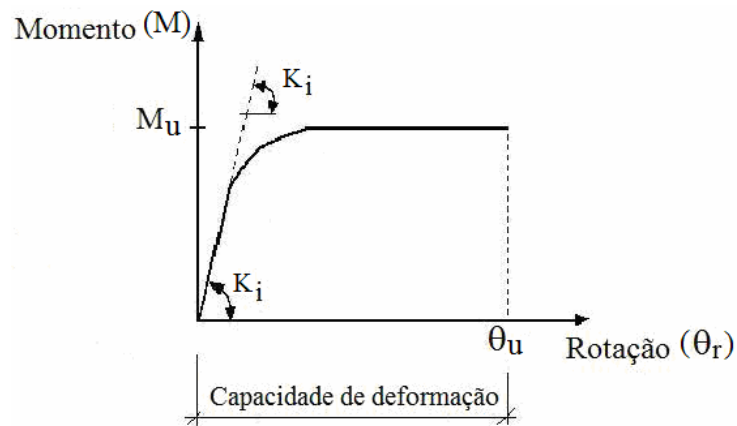


FIGURA 4.9 – Propriedades para dimensionamento de uma ligação

Existem, na literatura técnica, diferentes sistemas de classificação que estabelecem limites segundo os critérios de rigidez, resistência e capacidade de rotação, bastante difundidos no meio técnico-científico. Neste trabalho os critérios de classificação propostos por BJORHOVDE et al. (1990) e pelas normas técnicas ANSI/AISC 360-05, EN 1993-1-8: 2005 e a ABNT NBR 8800: 2008 são apresentados.

4.4.1 Classificação de BJORHOVDE et al. (1990)

BJORVHODE et al. (1990) propuseram um sistema adimensional de classificação baseado em diagramas $M-\theta_r$ bilineares, estabelecendo critérios segundo a rigidez, a resistência e a capacidade de rotação da ligação. O sistema de classificação proposto foi baseado em resultados de modelos experimentais, no qual se compara a rigidez da ligação com a rigidez da viga, utilizando um comprimento de referência da viga igual a $5d$, onde d é a altura da seção transversal. O método classifica as ligações em três categorias:

- **rígidas,**
- **semirrígidas,**
- **flexíveis.**

A Figura 4.10 mostra as regiões delimitadas para cada uma dessas classificações, onde os parâmetros adimensionais \bar{m} e $\bar{\theta}$ utilizados são definidos, respectivamente, por:

$$\bar{m} = \frac{M}{M_p} ; \quad \bar{\theta} = \frac{\theta_r}{\theta_p} \quad (4.9)$$

sendo, M_p o momento de plastificação total da seção transversal da viga, θ_r a rotação relativa da ligação para momento fletor M , e $\theta_p = 5M_p d / EI_b$ a rotação de referência da viga, onde $5d$ é o comprimento de referência, I_b o momento de inércia da seção transversal da viga e E o módulo de elasticidade do aço.

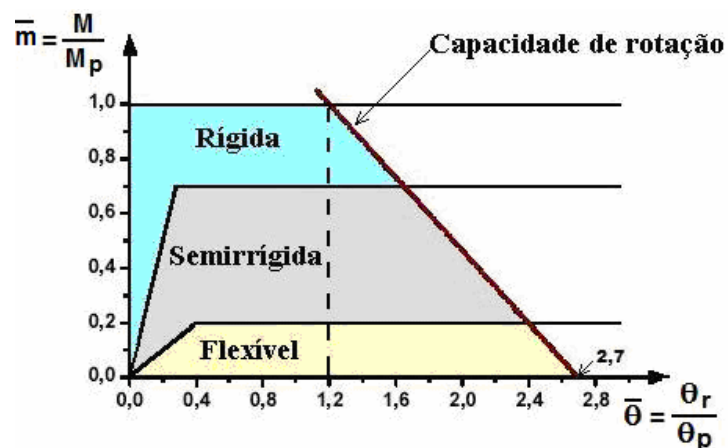


FIGURA 4.10 – Classificação das ligações proposta por BJORHOVDE et al (1990)

Segundo BJORHOVDE et al. (1990), uma ligação é classificada como rígida, se em termos de resistência $\bar{m} \geq 0,7$ e em termos de rigidez $\bar{m} \geq 2,5\bar{\theta}$. Uma ligação é considerada semirrígida, se em termos de resistência os limites forem dados por $0,2 < \bar{m} < 0,7$ e em termos de rigidez $0,5\bar{\theta} < \bar{m} < 2,5\bar{\theta}$. Quando os limites de resistência e de rigidez forem, respectivamente, $\bar{m} \leq 0,2$ e $\bar{m} \leq 0,5\bar{\theta}$, a ligação é considerada flexível. A Tabela 4.2 mostra os limites para a classificação das ligações segundo BJORHOVDE et al. (1990).

TABELA 4.2 – Classificação das ligações segundo BJORHOVDE et al. (1990)

Tipo de ligação	Classificação em termos de	
	resistência	rigidez
Rígida	$\bar{m} \geq 0,7$	$\bar{m} \geq 2,5\bar{\theta}$
Semirrígida	$0,2 < \bar{m} < 0,7$	$0,5\bar{\theta} < \bar{m} < 2,5\bar{\theta}$
Rotulada	$\bar{m} \leq 0,2$	$\bar{m} \leq 0,5\bar{\theta}$

BJORHOVDE et al. (1990) também desenvolveram uma expressão para cálculo da capacidade de rotação da ligação baseada no comprimento de referência da viga e por curvas de ajustes com dados de ensaios. Essa expressão é dada por:

$$\bar{m} = \frac{5,4 - 2\bar{\theta}}{3} \quad (4.10)$$

4.4.2 Classificação segundo o Eurocode 3 - EN 1993-1-8: 2005

O EN 1993-1-8: 2005 também estabelece uma classificação para as ligações baseada nos critérios de rigidez e resistência.

Classificação quanto a rigidez

A classificação proposta utiliza o comprimento real da viga para definir a rigidez, sendo dependente do tipo de estrutura (contraventada ou não) uma vez que os efeitos da semi-rigidez das ligações diferem para cada caso. Segundo o critério da rigidez rotacional, três regiões são definidas, conforme mostra a Fig. 4.11.

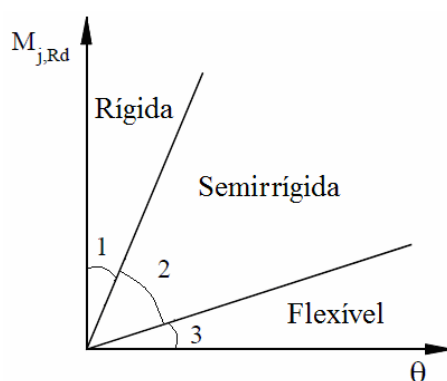


FIGURA 4.11 – Classificação das ligações quanto à rigidez segundo o EN 1993-1-8: 2005

- **Região 1 – ligações rígidas:** são aquelas que possuem rigidez rotacional suficiente para justificar a análise baseada na continuidade total.

Para estruturas contraventadas:

$$K_i \geq \frac{8EI_v}{L_v} \quad (4.11)$$

sendo K_i a rigidez da ligação, I_v o momento de inércia da seção transversal da viga no plano da estrutura e L_v o comprimento da viga conectada à ligação.

Para estruturas não-contraventadas:

$$K_i \geq \frac{25EI_v}{L_v} \quad (4.12)$$

As Eqs. (4.11) e (4.12) são válidas desde que, em cada andar, $K_v/K_p \geq 0,1$, onde K_v é o valor médio de I_v/L_v para todas as vigas no topo do andar e K_p é o valor médio de I_p/L_p para todos os pilares do andar. Se $K_v/K_p < 0,1$, a ligação deve ser considerada semirrígida.

- **Região 2 – Ligações semirrígidas:** são aquelas que não se enquadram tanto nos critérios de ligação rígida quanto nos de flexível;
- **Região 3 – Ligações Flexíveis:** são aquelas capazes de transmitir as forças internas, sem desenvolver momentos significativos que podem afetar, de forma adversa, as barras ou a estrutura como um todo.

Uma ligação deve ser classificada como flexível se:

$$K_i \leq \frac{0,5EI_v}{L_v} \quad (4.13)$$

Classificação quanto à Resistência

Quanto à resistência, uma ligação pode ser classificada como totalmente resistente, flexível ou parcialmente resistente ao se comparar o seu momento resistente de cálculo com os momentos resistentes de cálculo das barras a ela conectadas.

- **Totalmente resistentes (*full strength*):** são aquelas onde o momento resistente de cálculo da ligação é igual ou superior ao dos elementos conectados. Sendo assim, a rótula plástica se desenvolve na barra e não na ligação.

A ligação é classificada como totalmente resistente se:

$$M_{j,Rd} \geq \text{menor}(M_{v,pl,Rd}; M_{p,pl,Rd}) \quad (4.14)$$

para uma ligação localizada no pilar do topo, e,

$$M_{j,Rd} \geq \text{menor}(M_{v,pl,Rd}; 2M_{p,pl,Rd}) \quad (4.15)$$

para uma ligação localizada nos pilares intermediários. $M_{j,Rd}$ é o momento resistente de cálculo da ligação, $M_{v,pl,Rd}$ o momento plástico resistente da viga e $M_{p,pl,Rd}$, o momento plástico resistente do pilar.

- **Flexíveis (*nominally pinned*):** são aquelas capazes de transmitir as forças internas, sem desenvolver momentos significativos que podem afetar, de forma adversa, as barras ou a estrutura como um todo.

A ligação deve ser classificada como flexível se:

$$M_{j,Rd} \leq 0,25 \times \text{menor}(M_{v,pl,Rd}; M_{p,pl,Rd}) \quad (4.16)$$

- **parcialmente resistentes (*partial strength*):** são aquelas que não se enquadram tanto nos critérios de ligação totalmente resistente quanto nos de flexível.

4.4.3 Classificação segundo o ANSI/AISC: 2005

As especificações americanas apresentam apenas uma classificação qualitativa da ligação, introduzindo as seguintes definições:

- **Ligações FR – totalmente restringidas (*fully restrained*):** ocorre transferência de momento fletor com uma rotação insignificante entre os elementos conectados. Na análise estrutural não é permitida qualquer rotação relativa. Uma ligação do tipo **FR** deverá ter resistência e rotação suficientes para manter inalterado o ângulo entre os elementos conectados no estado-limite último.
- **Ligações PR - parcialmente restringidas (*partial restrained*):** ocorre transferência de momento fletor com rotação significativa entre os elementos conectados. Na análise estrutural, o comportamento da ligação deverá ser incluído. A resposta característica da ligação poderá ser obtida através da literatura técnica existente ou através de modelos analíticos ou experimentais. Os componentes de uma ligação do tipo **PR** deverão apresentar resistência, rigidez e capacidade de rotação suficientes no estado-limite último. As ligações do tipo **PR** englobam as ligações flexíveis e as ligações semirrígidas.

4.4.4 Classificação segundo a ABNT NBR 8800:2008

A norma brasileira ABNT NBR 8800:2008 classifica as ligações em relação à rigidez rotacional, mas não estabelece regras quanto à resistência. A ligação, independente do tipo de estrutura (deslocável ou não), é considerada **rígida** quando a sua rigidez satisfaz a Eq. (4.12) e **rotulada** quando satisfaz a Eq. (4.13). Além disso, as condições de validade da Eq. (4.12) devem ser as mesmas especificadas pelo EN 1993-1-8: 2005. Quando a ligação não atende aos critérios de ligação rígida ou rotulada, ela é classificada como **semirrígida**.

Tendo em vista as classificações apresentadas, a Fig. 4.12 mostra cinco comportamentos distintos de ligações considerando-se a rigidez, a resistência e a ductilidade das mesmas. As ligações com características similares às das curvas *A* e *B* são classificadas como rígidas, totalmente resistentes e as ligações com características similares às das curvas *C* e *D* são classificadas como semirrígidas, parcialmente resistentes. As ligações com características similares à da curva *E* são classificadas como rotuladas. As ligações correspondentes às curvas *A*, *D* e *E* são adequadas para os casos onde é necessária a ocorrência de redistribuição plástica de momentos, por

apresentarem grande capacidade rotacional. Já as curvas *B* e *C* são inadequadas para esses casos.

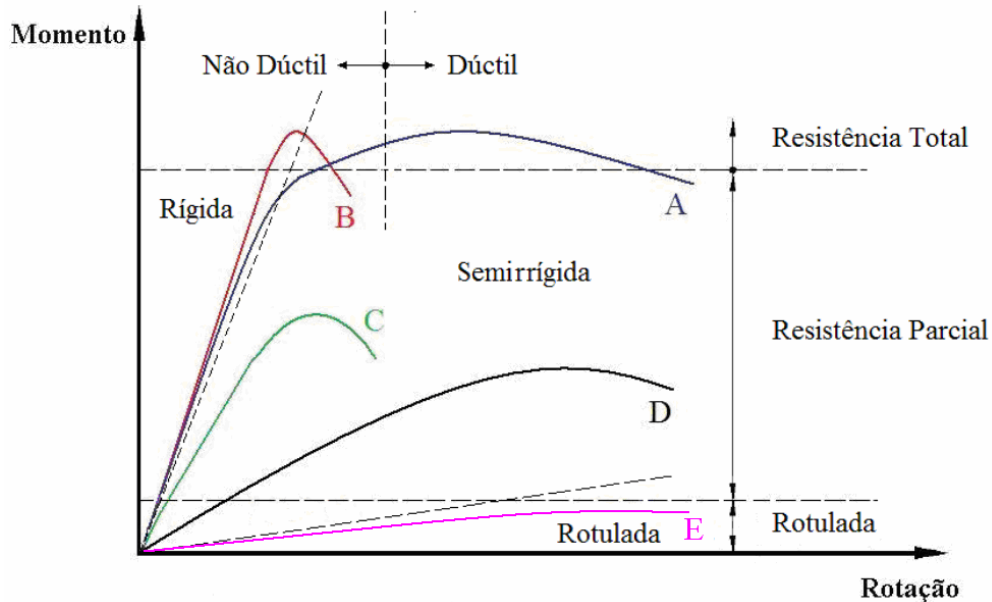


FIGURA 4.12 – Curvas momento \times rotação para ligações

4.5 Características das Ligações e Procedimentos de Análise

4.5.1 Características e Descrição do Comportamento das Ligações

Quando uma estrutura é solicitada por uma ação externa, podem-se distinguir os seguintes tipos de rigidez da ligação, conforme mostra a Fig. 4.13:

- **Rigidez inicial (K_i):** é a inclinação inicial da curva $M-\theta$, que é aproximadamente constante para os primeiros pontos da curva. Contudo, algumas ligações apresentam relações que tornam uma definição precisa muito difícil devido à dispersões nos primeiros dados dos ensaios (CHRISTOPHER e BJORHOVDE, 1999).
- **Rigidez de serviço (K_{ser}):** é a rigidez secante da ligação baseada em um momento de serviço esperado, dada pela Eq. (4.17).

$$K_{ser} = \frac{M_{ser}}{\theta_{ser}} \quad (4.17)$$

- **Rigidez tangente (K_{tan}):** é a rigidez tangente ou instantânea que diminui continuamente com acréscimos de momento. Dessa forma, a rigidez real de uma ligação corresponde, em qualquer ponto, à tangente à curva.

$$K_{tan} = \frac{dM}{d\theta} \quad (4.18)$$

- **Rigidez de descarregamento (K_{des}):** a rigidez de descarregamento é aproximadamente linear até atingir o momento igual a zero e, geralmente, é assumida ser igual à rigidez inicial. O descarregamento resulta de cargas impostas que produzem rotações na ligação no sentido oposto à rotação inicial.

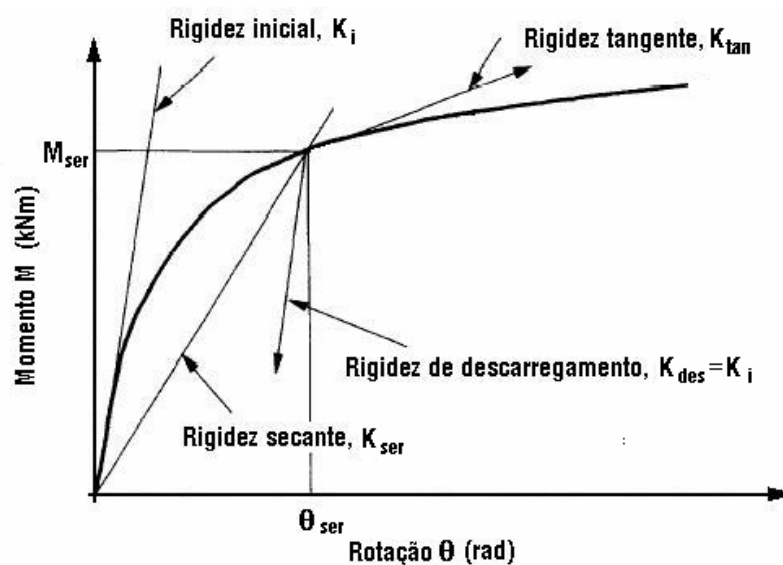


FIGURA 4.13 – Definição da rigidez da ligação segundo CHRISTOPHER e BJORHOVDE (1999)

A Figura 4.14 mostra, qualitativamente, o comportamento das ligações semirrígidas em um pórtico deslocável. Inicialmente, o pórtico é submetido à carga permanente e as ligações, idênticas nas extremidades da viga, apresentam o mesmo giro (em sentidos opostos), comportando-se segundo a tangente às curvas (K_{tan}), mostradas na Fig. 4.14-a.

Com a aplicação posterior da força horizontal devida ao vento, por exemplo, (Fig.4.14-b), a extremidade da viga, oposta à aplicação dessa força, continua a girar no mesmo sentido, com comportamento $M-\theta_r$ baseado na rigidez tangente (K_{tan}), enquanto que, a extremidade da viga onde a carga de vento foi aplicada começa a girar no sentido oposto ao inicial, apresentando um comportamento linear de descarga, com inclinação igual à rigidez inicial da ligação ($K_{des}=K_i$).

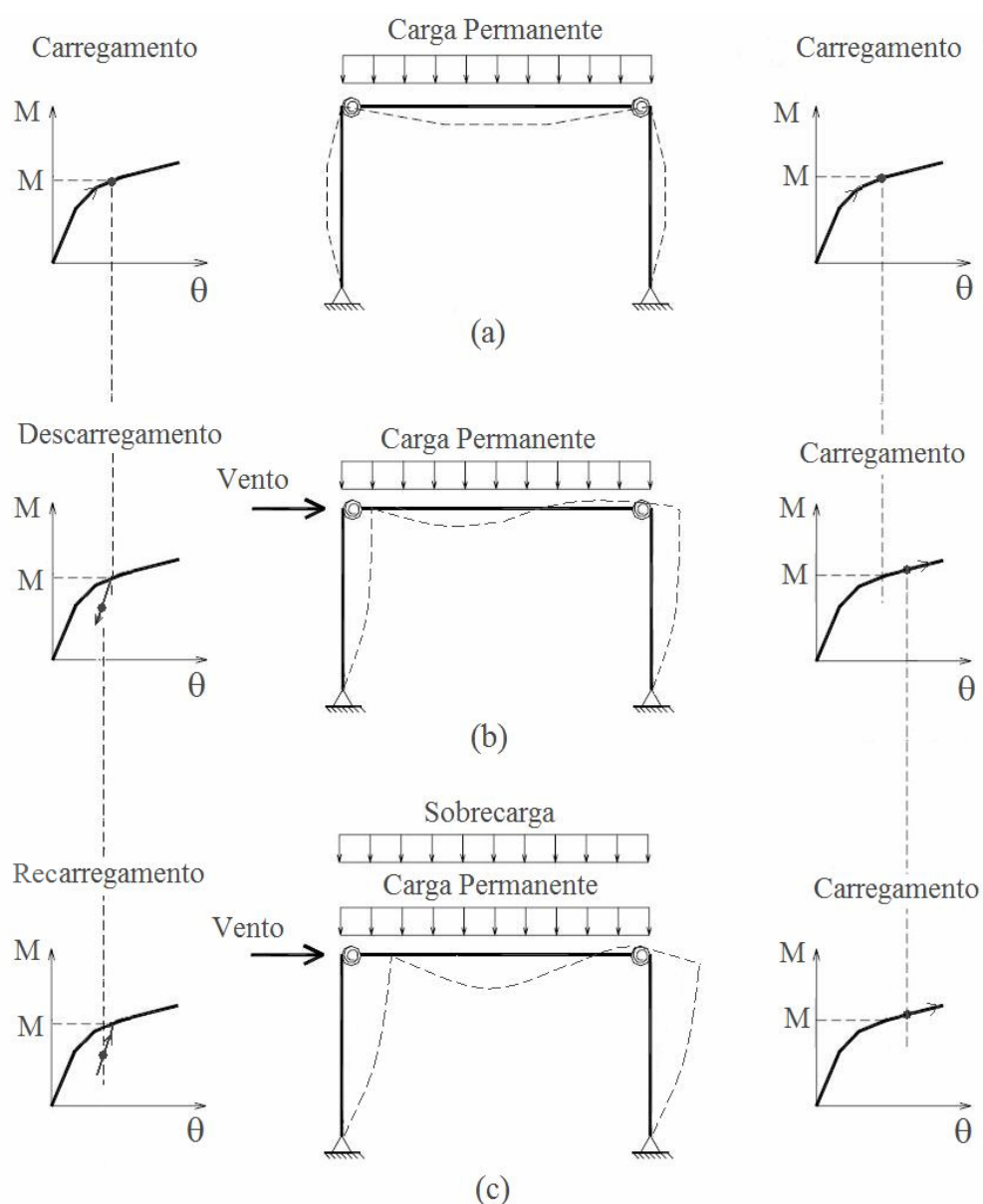


FIGURA 4.14 – Comportamento de ligações semirrígidas em um pórtico simples deslocável

Na etapa subsequente, a sobrecarga é aplicada ao pórtico, conforme mostra a Fig. 4.14-c. O comportamento das ligações é significativamente afetado, uma vez que, a rigidez tangente (K_{tan}) na extremidade da viga, oposta a aplicação da força de vento, é muito menor que a rigidez de recarregamento ($K_{rec}=K_{des}=K_i$) na outra extremidade.

Pode-se observar que, as características de carregamento das ligações semirrígidas são muito diferentes das suas características de descarregamento e, certamente, o comportamento da ligação é afetado pela história e direção das ações aplicadas sequencialmente.

4.5.2 Procedimentos de Análise

4.5.2.1 Método da “Linha de Viga” para Avaliação da Rigidez de Ligações Semirrígidas

Para analisar o comportamento das ligações semirrígidas em estruturas metálicas BATHO e ROWAN (1934) apud SALMON et al. (2008) desenvolveram um procedimento denominado “Beam-Line” ou método da linha de viga, que permite obter a resistência da ligação compatível com sua rigidez, considerando-se comportamento elástico.

A reta denominada “linha de viga” é definida a partir da união dos pontos que correspondem às situações de engastamento perfeito e de rótula perfeita nas extremidades da viga. O engastamento perfeito corresponde à situação em que não há rotação nas ligações das extremidades da viga, qualquer que seja o momento fletor resistido pela ligação. A rótula perfeita corresponde à situação em que as ligações não são capazes de resistir aos momentos fletores, ficando suscetíveis ao giro.

Da teoria estrutural elementar, de acordo com a Fig. 4.15, pode-se mostrar que as rotações θ_i e θ_j , nas extremidades de uma viga prismática ij , são dadas pelas Eqs. (4.19) e (4.20):

BATHO, C. E ROWAN, H. C. (1934) *Investigations of Beam and Stanchion Connections*. 2nd Report, Steel Structures Research Committee, Londres.

$$\theta_i = \frac{L}{6EI} [2(M_{fi} - M_i) - (M_{fj} - M_j)] \quad (4.19)$$

$$\theta_j = \frac{L}{6EI} [2(M_{fj} - M_j) - (M_{fi} - M_i)] \quad (4.20)$$

onde M_{fi} e M_{fj} são os momentos nas extremidades i e j da viga para uma ligação perfeitamente rígida, M_i e M_j são os momentos parciais nas extremidades i e j da viga para uma ligação real.

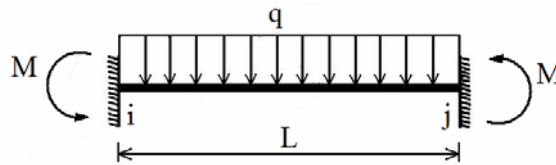


FIGURA 4.15 – Viga com carregamento uniformemente distribuído

Para $\theta_j = 0$ (ligação perfeitamente rígida em j), tem-se:

$$M_{fj} - M_j = \frac{M_{fi} - M_i}{2} \quad (4.21)$$

Substituindo a Eq. (4.21) na Eq. (4.19), vem que:

$$\theta_i = \frac{L}{4EI} (M_{fi} - M_i), \text{ quando } \theta_j=0 \quad (4.22)$$

Se a extremidade j for rotulada, então M_{fj} e M_j são ambos nulos e a Eq. (4.19) torna-se:

$$\theta_i = \frac{L}{3EI} (M_{fi} - M_i) \quad (4.23)$$

Se as ligações nas duas extremidades forem idênticas e o carregamento for simétrico, M_{fi} e M_{fj} são iguais e opostos e, conseqüentemente, M_i e M_j são também iguais e opostos.

$$M_{fj} - M_j = -(M_{fi} - M_i) \quad (4.24)$$

E assim a Eq. (4.19) reduz-se a:

$$\theta_i = \frac{L}{2EI} (M_{\hat{f}} - M_i) \quad (4.25)$$

Para o caso da Fig. (4.16), com carga distribuída ao longo do vão:

$$M_{\hat{f}} = \frac{qL^2}{12} \quad (4.26)$$

Para ligação totalmente flexível, $M_i = 0$ e, de acordo com a Eq. (4.25), obtém-se:

$$\theta = \frac{L}{2EI} \frac{qL^2}{12} = \frac{qL^3}{24EI} \quad (4.27)$$

Para ligação semirrígida, com $M_i = M$, tem-se:

$$\theta = \frac{qL^3}{24EI} - \frac{ML}{2EI} \quad (4.28)$$

onde a primeira parcela é a rotação devida à carga distribuída q e a segunda parcela é a rotação devida ao momento real na extremidade.

Para uma viga bi-rotulada: $M=0 \rightarrow \theta = \frac{qL^3}{24EI}$

Para uma viga bi-engastada: $\theta=0 \rightarrow M = \frac{qL^2}{12}$.

Tem-se assim a linha de uma reta (linha de viga) dada por:

$$M = \frac{qL^2}{12} - \frac{2EI}{L} \theta \quad (4.29)$$

A Figura 4.16 representa o gráfico do momento fletor na extremidade da viga versus rotação, onde são plotadas a linha de viga e a curva $M-\theta$ de uma ligação semirrígida.

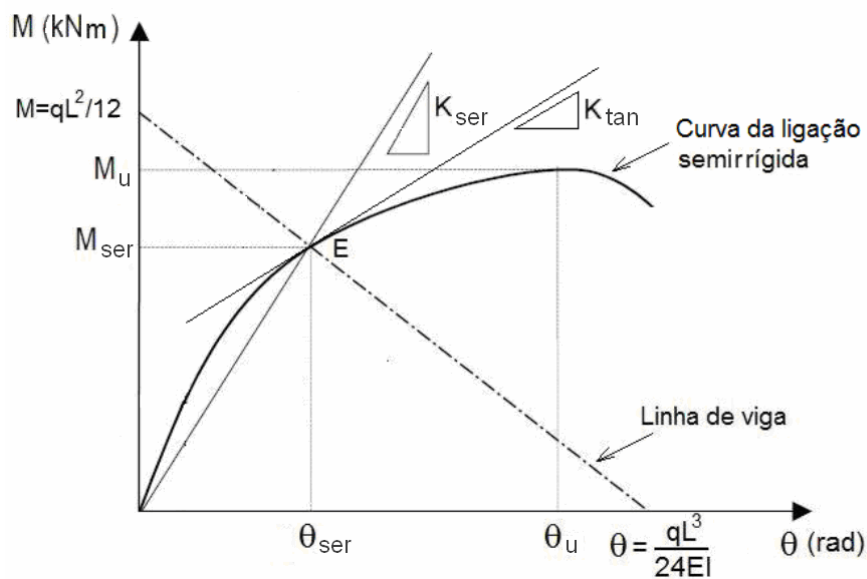


FIGURA 4.16 – Linha da viga e diagrama $M-\theta$ para ligação semirrígida

No ponto E, ou seja, na interseção da reta (linha de viga) com a curva momento \times rotação da ligação, existe uma compatibilização entre o giro da extremidade da viga com o giro relativo da ligação, podendo-se definir, o momento de serviço da ligação M_{ser} , a rigidez secante K_{ser} e a rigidez tangente da ligação K_{tan} .

Esses parâmetros são geralmente utilizados nos métodos simplificados de análises considerando o comportamento das ligações, como o procedimento proposto por CHEN et al. (1996) que adotam a rigidez tangente e o proposto por BARAKAT e CHEN apud CHEN e TOMA (1994), que adotam a rigidez secante juntamente com os fatores de amplificação de momentos B_1 e B_2 , para analisar pórticos planos contraventados e não contraventados com ligações semirrígidas.

No caso em que o pilar também gira, a análise torna-se mais complexa e, normalmente, são usados programas de computador onde a curva $M-\theta_r$ é previamente definida. Entretanto, em muitos casos a rotação dos pilares é pequena resultando em uma boa estimativa do momento na extremidade da viga e da rigidez da ligação.

BARAKAT, M. E CHEN, W. F. (1991) *Design Analysis of Semi-rigid Frames: Evaluation and Implementation*. Engineering Journal, Second Quarter, p. 55-64.

4.5.2.2 Métodos Numéricos Considerando as Ligações Semirrígidas

O comportamento de uma ligação, como já foi mostrado anteriormente, é caracterizado pela sua curva característica momento \times rotação ($M-\theta_r$). Para uma aproximação do comportamento real, pode-se representar uma ligação viga-pilar por meio de uma mola em espiral. Desse modo, as ligações inseridas no ponto de interseção entre a viga e o pilar podem ser modeladas de duas maneiras: com *elementos híbridos (elementos de barra modificados)* ou com *elementos de mola*.

Uma análise que considera o elemento de ligação como elemento de mola permite descrever os deslocamentos relativos entre os elementos estruturais de forma mais direta. Já na análise que considera o comportamento da ligação através do elemento híbrido, os deslocamentos relativos são embutidos no comportamento do elemento estrutural formado pela associação das barras e molas.

A Figura 4.17 mostra um exemplo de um pórtico e as suas possibilidades de modelagem em termos da discretização da estrutura, considerando-se elementos híbridos ou elementos de mola.

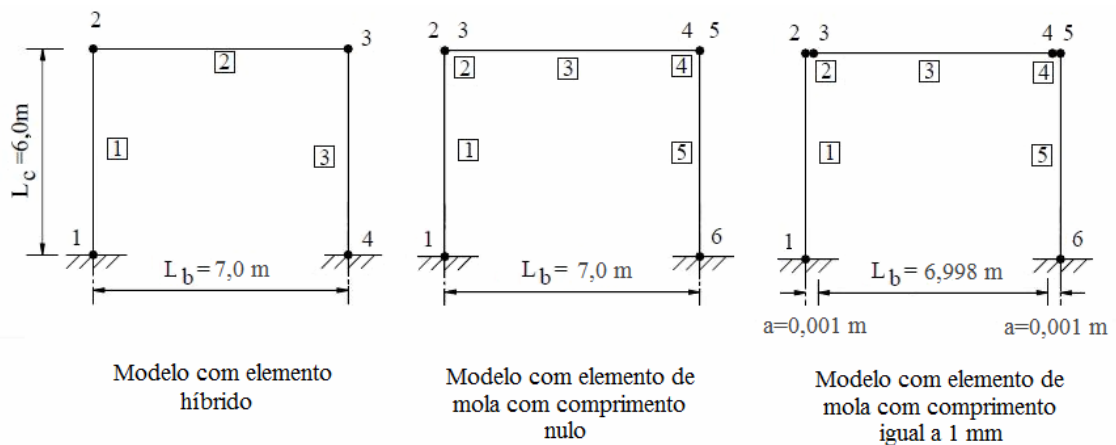


FIGURA 4.17 – Formas de representação de uma estrutura reticulada segundo o modelo adotado para descrever a ligação

Nota-se uma diferença na quantidade de elementos e nós, entre os modelos com elementos híbridos e elementos de mola. Nos modelos considerando-se elemento de

mola, dependendo da formulação, a mola pode apresentar um comprimento nulo ou um comprimento pequeno. Alguns autores consideram o comprimento igual a l mm, necessário apenas para o cálculo dos cossenos diretores do elemento, ou com outros comprimentos para levar em consideração um valor de excentricidade relativo ao comprimento do elemento de ligação, como descrito por SEKULOVIC e SALATIC (2001). O elemento de mola adotado neste trabalho terá comprimento nulo.

Os elementos híbridos e de mola são apresentados a seguir:

- **Elemento híbrido ou elemento de barra modificado**

Este elemento baseia-se na modificação dos elementos de barra através do acoplamento de molas nas suas extremidades. Dessa forma, as ligações são modeladas como elementos de ligação rotacionais, fixados às extremidades do elemento, tendo sua relação momento \times rotação ($M-\theta_r$) definida com base na rigidez tangente da ligação (K_t).

A Figura 4.18 mostra um elemento híbrido, no qual a modelagem das ligações, através de molas com rigidez rotacional, introduz rotações relativas θ_{rA} e θ_{rB} nos nós A e B do elemento, respectivamente, modificando o comportamento não linear de um sistema estrutural idealmente rígido.

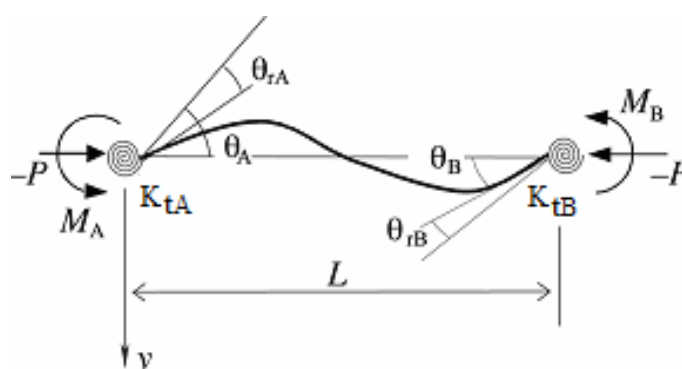


FIGURA 4.18 – Elemento de viga-pilar com ligações semirrígidas sujeito a momentos de extremidades e forças axiais

WEAVER e GERE (1990) apresentam a matriz de rigidez de barra modificada, em função da rigidez das ligações para levar em conta a influência das ligações elásticas. Vários pesquisadores, entre eles, CHEN et al. (1996), RIBEIRO (1998), SOUZA (1999), LANDESMANN (2003), PINHEIRO e SILVEIRA (2004, 2005), adotam o elemento híbrido para considerar o comportamento das ligações semirrígidas na análise.

- **Elementos de mola**

Elementos de mola são elementos que representam uma ligação deformável (semirrígida). Na modelagem de estruturas, os elementos de mola têm a função de unir dois elementos de barra e representar o comportamento de uma ligação na análise.

Conforme LI et al. (1995) o método com elemento de mola é bastante prático para a análise de estruturas com ligações semirrígidas, pois consiste simplesmente na união de elementos de ligação adicionalmente aos elementos de barra, sem que estes sejam modificados. A modelagem com elemento de mola é normalmente empregada em programas comerciais de análise de elementos finitos como o ANSYS (ANSYS INC., 1995).

O elemento de ligação possui os mesmos graus de liberdade por extremidade (nó) que os elementos de barra, sendo duas translações e uma rotação. A Figura 4.19 apresenta um esquema dos graus de liberdade e das curvas carga-deslocamento generalizados que são fornecidas para obtenção da matriz de rigidez do elemento de mola:

$$\mathbf{k}_T = \begin{bmatrix} k_u & 0 & 0 & -k_u & 0 & 0 \\ 0 & k_v & 0 & 0 & -k_v & 0 \\ 0 & 0 & k_\theta & 0 & 0 & -k_\theta \\ -k_u & 0 & 0 & k_u & 0 & 0 \\ 0 & -k_v & 0 & 0 & k_v & 0 \\ 0 & 0 & -k_\theta & 0 & 0 & k_\theta \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

O elemento de mola mostrado na Fig. 4.19-a é adotado neste trabalho. As rigidezes generalizadas são as tangentes às curvas carga-deslocamento generalizados (Fig. 4.19-b). Deve-se notar que as rigidezes são função dos deslocamentos relativos, ou seja, o deslocamento de um dos nós do elemento em relação ao outro.

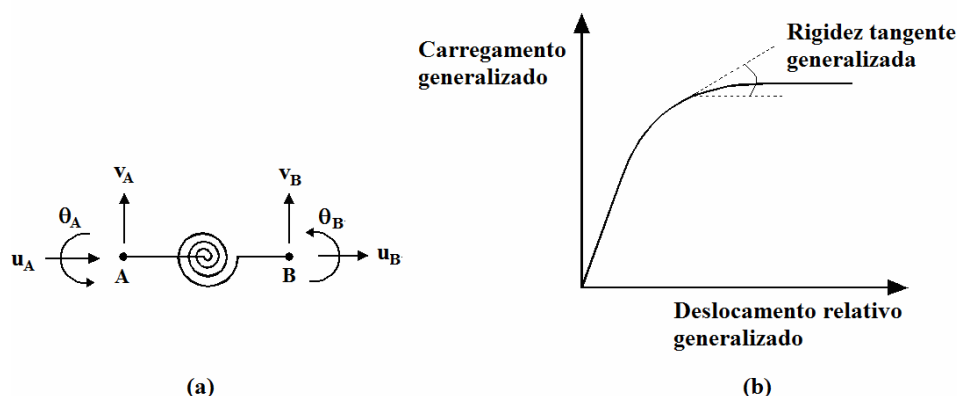


FIGURA 4.19 – Elemento de mola: (a) graus de liberdade; (b) esquema das curvas carga-deslocamento generalizados

Neste trabalho, as rigidezes K_u e K_v , referentes aos graus de liberdades translacionais, u e v , respectivamente, apresentam valores suficientemente elevados e constantes no processo incremental-iterativo, de modo que os deslocamentos relativos u e v possam ser tomados iguais a zero. A rigidez rotacional K_θ será obtida através de curvas multilinearizadas, $M-\theta$, de diferentes tipos de ligações, disponíveis na literatura.

4.5.3 Aspectos da Implementação da Ligação Semirrígida

As ligações semirrígidas podem ser modeladas usando-se uma curva momento \times rotação linearizada. Neste trabalho uma representação multilinear da curva momento \times rotação, tal como aquela mostrada na Fig. 4.20 é usada. Esse modelo é capaz de descrever a curva $M-\theta$, da ligação com maior precisão que os modelos bi e tri-lineares.

Os cinco valores distintos de rigidez para a curva linearizada são visualmente ajustadas aos dados disponíveis para várias configurações de ligação. Os valores dos pares momento fletor e rotação relativa são inseridos diretamente como dados de entrada no programa e os valores de rigidez para cada trecho são calculados automaticamente para uma determinada ligação.

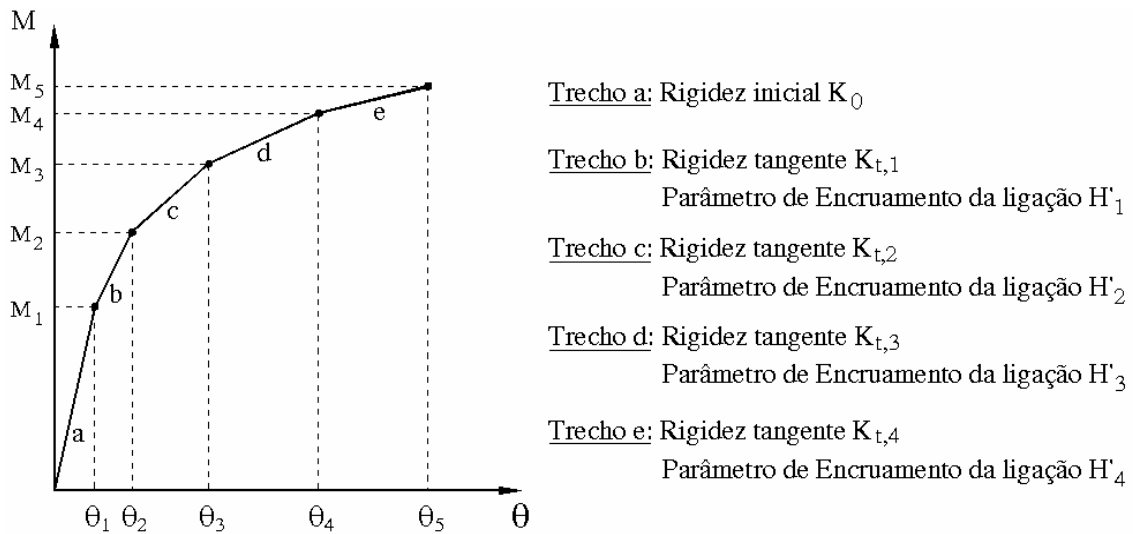


FIGURA 4.20 – Diagrama multilinear M- θ da ligação

Conforme mostra a Fig. 4.20, o primeiro trecho sempre será definido por uma rigidez inicial elástica K_0 e, por definição, parâmetro de encruamento nulo. Para simular o comportamento não linear, os demais trechos apresentam uma rigidez tangente $K_{t,i}$ e por analogia ao comportamento elastoplástico do elemento de barra, um parâmetro de encruamento da ligação H'_i ($i = 1,4$). Conforme FOLEY e VINNAKOTA (1997), o descarregamento da ligação é admitido seguir a rigidez inicial.

O primeiro intervalo, definido como “trecho a”, compreende as rotações relativas no intervalo de $0 \leq \theta < \theta_1$. A solução numérica para a transição entre esse trecho e o próximo (trecho b) é apresentada a seguir. Posteriormente, é tratado o caso geral $\theta_i \leq \theta < \theta_{i+1}$ onde a partir do trecho i passa-se ao trecho $i+1$, ($i = 1,4$), levando-se também em conta na implementação a descarga e recarga que podem ocorrer nas ligações.

a) Primeiro intervalo de transição (trecho a – trecho b): $0 \leq \theta^{r-1} < \theta_1$

O procedimento adotado para esse intervalo consiste na determinação da rotação relativa total no elemento de ligação na iteração r de tal forma que o critério de limite θ_l seja satisfeito. Caso esse valor corrente da rotação relativa da ligação exceda tal valor de referência, são aplicadas sobre o valor excedente as propriedades do trecho seguinte, o

que tem efeito direto sobre os momentos residuais, conseqüentemente na manutenção do equilíbrio e, finalmente, na convergência da solução para esse incremento de carga.

Então, para a iteração atual relativa a um dado incremento, o algoritmo para a solução deste problema pode ser assim apresentado:

- I. O carregamento aplicado na iteração r são os momentos residuais calculados ao final da iteração $r-1$. Este carregamento produz um incremento nas componentes de deslocamento denotado aqui por Δp^r . Em seguida, calcula-se o incremento de rotação relativa corrente $\Delta \theta^r$.

- II. Armazena-se a rotação relativa total para cada elemento de ligação:

$$\theta^r = \theta^{r-1} + \Delta \theta^r \quad (4.31)$$

- III. O próximo passo consiste em verificar se na iteração r a rotação relativa total naquele elemento de ligação ultrapassou o limite do trecho a , verificando se: $\theta^r \leq \theta_1$.

Caso a resposta seja:

SIM Significa que o elemento ainda está no trecho a . Assim sendo, a partir da rotação relativa total acumula-se a rotação relativa elástica θ_e^r e o momento fletor total M^r :

$$\theta_e^r = \theta^r \quad (4.32)$$

$$M^r = K_0 \theta^r \quad (4.33)$$

NÃO Então a ligação já se encontra com uma porção de rotação relativa sob o trecho b (Fig. 4.21). Evidentemente, isso tem que ser levado em conta no cálculo do momento fletor total para a manutenção do equilíbrio. Além do momento, são calculadas as porções elástica e plástica da rotação relativa total:

$$\theta_e^r = \theta_e^{r-1} + (\theta_1 - \theta^{r-1}) + \frac{K_{t,1}}{K_0} (\theta^r - \theta_1) \quad (4.34)$$

$$\theta_p^r = \theta_p^{r-1} + \frac{K_0}{K_0 + H_1} (\theta^r - \theta_1) \quad (4.35)$$

onde o parâmetro de encruamento da ligação é dado por:

$$H' = \frac{dM}{d\theta_p^r} \quad (4.36)$$

e

$$M^r = M^{r-1} + K_0 (\theta_1 - \theta^{r-1}) + K_{t,1} (\theta^r - \theta_1) \quad (4.37)$$

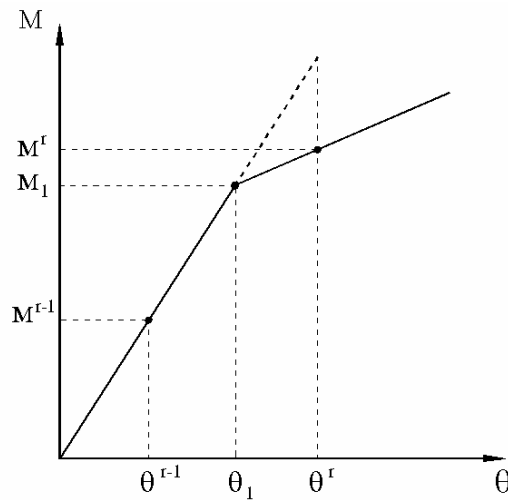


FIGURA 4.21 – Transição entre trechos lineares

b) Demais intervalos (trecho i - trecho $i+1$): $\theta_i \leq \theta^{r-1} < \theta_{i+1}$ ($i=1,4$)

O procedimento para se considerar a transição de um dado trecho i , caso a rotação relativa total θ na iteração corrente ultrapasse o limite θ_{i+1} , é análogo ao procedimento anterior (item a). No entanto, caso haja descarregamento, conforme mostra a Fig. 4.22, este deve ocorrer segundo a rigidez inicial K_0 da ligação.

- I. O carregamento aplicado na iteração r são os momentos residuais calculados ao final da iteração anterior ($r-1$). Esse carregamento produz um incremento nas componentes de deslocamento denotado por Δp^r . Em seguida, calcula-se o incremento da rotação relativa corrente $\Delta \theta^r$.
- II. Armazena-se a rotação relativa total, conforme Eq. (4.31): $\theta^r = \theta^{r-1} + \Delta \theta^r$
- III. O próximo passo consiste no teste para verificar se está ocorrendo o descarregamento elástico na iteração r , verificando se: $\theta^r < \theta^{r-1}$.

Caso a resposta seja:

SIM Atualizam-se os valores da rotação relativa elástica e momento totais. Conceitualmente, a parcela plástica da rotação relativa (θ_p) permanece inalterada. Armazena-se também a máxima rotação relativa total última, no instante em que ocorre a primeira descarga, θ_{ult} .

$$\theta_e^r = \theta_e^{r-1} + \Delta \theta^r \quad (4.38)$$

$$M^r = M^{r-1} + K_0 \Delta \theta^r \quad (4.39)$$

$$\theta_{ult} = \theta^{r-1} \quad (4.40)$$

NÃO Ir para item IV.

- IV. A ligação agora pode estar em carga ou em recarga. Pode ter havido uma descarga na iteração anterior $r-1$, situando-se fora da curva $M-\theta$. A recarga, deve portanto, ser feita elasticamente considerando-se a rigidez inicial (K_0) até que se atinja a rotação relativa θ_{ult} , e a partir daí considera-se seu retorno à curva $Mx\theta$, conforme se indica na Fig. 4.22.

Dessa forma, a questão então é verificar se a ligação vem de um descarregamento na iteração $r-1$. Caso a resposta seja:

SIM A ligação está em recarga elástica. Atualizam-se os valores da rotação relativa elástica e momento totais conforme as Eqs. (4.38) e (4.39) até que se atinja a rotação relativa última θ_{ult} .

NÃO Ir para item V.

V. A ligação está em carga. Neste caso verifica-se então se na iteração r ocorre a passagem para o próximo trecho. A questão então é: se $\theta^r \leq \theta_{i+1}$.

Caso a resposta seja:

SIM A ligação encontra-se na iteração r ainda no trecho i . Assim sendo:

$$\theta_e^r = \theta_e^{r-1} + \frac{K_{t,i}}{K_0} \Delta\theta^r \quad (4.41)$$

$$\theta_p^r = \theta_p^{r-1} + \frac{K_0}{K_0 + H_i} \Delta\theta^r \quad (4.42)$$

$$M^r = M^{r-1} + K_{t,i} \Delta\theta^r \quad (4.43)$$

NÃO Sabe-se então que a ligação já se encontra com uma porção da rotação relativa sob o trecho $i+1$. Evidentemente, isto tem que ser levado em conta no cálculo do momento total para a manutenção do equilíbrio:

$$\theta_e^r = \theta_e^{r-1} + \frac{K_{t,i}}{K_0} (\theta_{i+1} - \theta^{r-1}) + \frac{K_{t,i+1}}{K_0} (\theta^r - \theta_{i+1}) \quad (4.44)$$

$$\theta_p^r = \theta_p^{r-1} + \frac{K_0}{K_0 + H_i} (\theta_{i+1} - \theta^{r-1}) + \frac{K_0}{K_0 + H_{i+1}} (\theta^r - \theta_{i+1}) \quad (4.45)$$

$$M^r = M^{r-1} + K_{t,i} (\theta_{i+1} - \theta^{r-1}) + K_{t,i+1} (\theta^r - \theta_{i+1}) \quad (4.46)$$

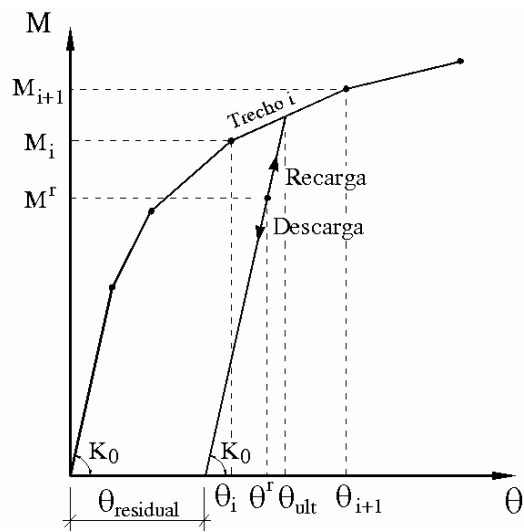


FIGURA 4.22 – Descarga ou recarga elástica a partir do trecho i

4.6 Exemplos numéricos

Pretende-se verificar nesta seção, a eficiência da implementação das ligações semirrígidas proposta na seção 4.5.3, no programa PPLANLEP, escrito na linguagem FORTRAN 90, que considera as análises em teoria de 2ª ordem elástica e elastoplástica de pórticos planos semirrígidos.

Vários exemplos numéricos são apresentados, com o objetivo de estudar a influência das ligações na resistência, na deslocabilidade lateral e na distribuição das forças internas, em vigas, pilares e pórticos planos de aço. Os resultados obtidos pelo programa são comparados com os resultados fornecidos por diversos autores e com aqueles fornecidos por análises clássicas.

Os exemplos apresentados são divididos em duas seções. Na primeira seção, 4.6.1, trata-se do estudo do comportamento de estruturas com ligações semirrígidas considerando-se a análise em teoria de 2ª ordem elástica e na segunda seção, 4.6.2, são analisados pórticos planos semirrígidos considerando-se o regime inelástico em teoria de 2ª ordem.

4.6.1 Análise Elástica em Teoria de 2ª Ordem de Estruturas com Ligações Semirrígidas

4.6.1.1 Viga com Carga Distribuída

Este exemplo tem com objetivo mostrar a influência das ligações na distribuição de momentos fletores, na flecha e no deslocamento angular de uma viga. Para definir a rigidez inicial de uma determinada ligação em relação à viga conectada, um fator de rigidez (f_r) proposto por CUNNINGHAM (1990) é utilizado. Esse fator é dado por:

$$f_r = \frac{1}{1 + 3 \frac{EI}{LK_i}} \quad (4.47)$$

onde, E é o módulo de elasticidade longitudinal, I o momento de inércia da barra, L o comprimento da barra e K_i a rigidez inicial da ligação. Os valores do fator de rigidez variam de 0, para ligações idealmente rotuladas, isto é, quando a rigidez inicial é nula ($K_i = 0$), até 1 para ligações idealmente rígidas, quando a rigidez inicial da ligação é consideravelmente grande ($K_i = \infty$). Para valores entre esses limites as ligações são consideradas semirrígidas.

Dessa forma, analisa-se uma viga de aço com 800 cm de vão e submetida a uma carga uniformemente distribuída de 0,10 kN/cm, conforme mostra a Fig. 4.23. A viga foi discretizada em 80 elementos iguais e a seção transversal constituída pelo perfil VE 400x49 em 20 fatias, sendo uma fatia para cada mesa e 18 para alma do perfil. O módulo de elasticidade do aço é igual a 200000 MPa. A carga uniformemente distribuída foi modelada como um conjunto de cargas nodais equivalentes. Para a análise elástica em 2ª ordem, as ligações apresentam comportamento linear com rigidez inicial rotacional mostrada na segunda coluna da Tab. 4.3.

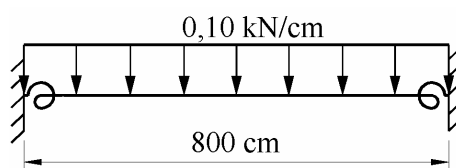


FIGURA 4.23 – Viga submetida à carga uniformemente distribuída com ligações semirrígidas

Conforme mostra a Tab. 4.3, o aumento do fator de rigidez está relacionado com o aumento da rigidez inicial rotacional da ligação. O aumento da rigidez produz um aumento do momento nas extremidades da viga e uma diminuição do momento no meio do vão. Observa-se também um decréscimo nas rotações, com o aumento da rigidez inicial rotacional. Verifica-se que a rotação nas extremidades da viga varia de $qL^3/24EI=0,00612 \text{ rad}$, quando a ligação é totalmente rotulada até um valor nulo, quando a ligação é perfeitamente rígida e a flecha no meio do vão varia de $5qL^4/384EI=1,531 \text{ cm}$ para a ligação idealmente rotulada a $qL^4/384EI=0,306 \text{ cm}$ para a ligação idealmente rígida.

TABELA 4.3 – Momentos fletores e deslocamentos, angular e transversal, na viga

Fator de rigidez f_r	Rigidez inicial da ligação K_i (kNcm/rad)	Programa				Analítico - Linha de viga			
		M_{EXT} (kNcm)	$M_{VÃO}$ (kNcm)	Rotação (rad)	Flecha (cm)	M_{EXT} (kNcm)	$M_{VÃO}$ (kNcm)	Rotação (rad)	Flecha (cm)
Idealmente Rotulado		0,0	7999,9	0,00613	1,532	0,0	8000,0	0,00612	1,531
0,0	0	0,0	7999,9	0,00613	1,532				
0,1	145133	761,2	7227,0	0,00524	1,355	762,0	7238,0	0,00525	1,356
0,2	326550	1453,6	6538,3	0,00445	1,196	1454,7	6545,3	0,00445	1,197
0,3	559800	2086,2	5908,4	0,00373	1,052	2087,2	5912,8	0,00373	1,052
0,4	870800	2666,0	5330,4	0,00306	0,919	2666,9	5333,1	0,00306	0,919
0,5	1306200	3199,5	4798,2	0,00245	0,796	3200,2	4799,8	0,00245	0,796
0,6	1959300	3691,9	4306,7	0,00188	0,683	3692,5	4307,5	0,00188	0,683
0,7	3047800	4147,7	3851,4	0,00136	0,579	4148,3	3851,7	0,00136	0,578
0,8	5224800	4570,9	3428,6	0,00087	0,481	4571,5	3428,5	0,00087	0,481
0,9	11755800	4964,9	3034,9	0,00042	0,391	4965,6	3034,4	0,00042	0,391
1,0	infinito	5332,6	2667,4	0,00000	0,306	5333,3	2666,7	0,00000	0,306
Idealmente Rígido		5332,6	2667,4	0,00000	0,306				

Os momentos fletores no meio do vão e nas extremidades da viga, a flecha e a rotação máxima apresentaram excelentes resultados quando comparados com os resultados analíticos obtidos pelo método da linha de viga, para toda a variação do fator de rigidez.

A Tab. 4.3 também mostra os resultados obtidos pelo programa considerando-se as ligações idealmente rotuladas, definidas no programa através das condições de extremidades do elemento rotulado-rígido e rígido-rotulado e as ligações idealmente rígidas, através das condições de extremidade do elemento rígido-rígido. Como era de se esperar, estes resultados foram idênticos àqueles obtidos utilizando-se uma ligação com rigidez inicial praticamente nula e com rigidez consideravelmente grande ($K_i=10^{12} \text{ kNcm/rad}$).

O gráfico da Fig. 4.24 mostra que o emprego de ligações semirrígidas permite um balanceamento entre os momentos nas extremidades e no meio do vão. Uma viga biengastada conduz ao emprego de um perfil mais leve, pois o desenvolvimento de momentos nas extremidades diminui a solicitação no meio do vão da viga. Porém o custo desta ligação pode ser muito elevado. Já uma viga biapoiada permite o emprego de ligações menos rígidas, o que significa menos detalhes de fabricação e montagem, e, conseqüentemente, uma redução no custo da ligação, entretanto resulta em um aumento considerável de flecha e do momento máximo no meio do vão da viga. Dessa forma, a situação ideal de projeto é aquela aonde os momentos no meio do vão e na extremidade da viga são coincidentes, ou seja, no ponto de interseção entre as duas curvas, mostrada na Fig. 4.24.

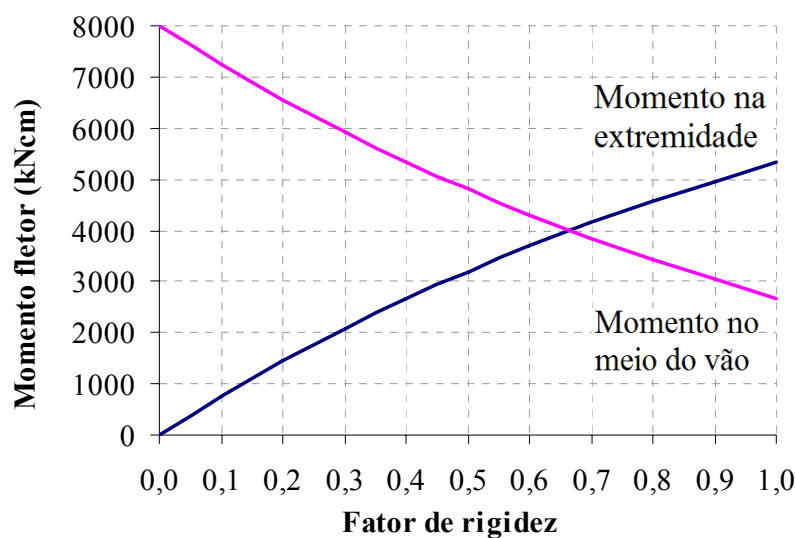


FIGURA 4.24 – Momentos fletores na viga em função do fator de rigidez

4.6.1.2 Pórtico Não contraventado de Um Andar e Um Vão

Este exemplo tem como objetivo estudar o comportamento em carga, descarga e recarga nas ligações de um pórtico de um andar e um vão. Dois casos são analisados: no primeiro estuda-se o comportamento em carga, descarga e recarga nas ligações do pórtico submetido apenas ao carregamento vertical uniformemente distribuído, conforme mostra a Fig. 4.25-a e no segundo estuda-se o comportamento em carga e descarga nas ligações do pórtico da Fig. 4.25-b, quando este é submetido também a uma força horizontal, após todo o carregamento vertical uniformemente distribuído ser aplicado na estrutura.

Para ambos os pórticos a viga e os pilares são constituídos por perfis I, com área e momento de inércia respectivamente iguais a 43 cm^2 e 2770 cm^4 para a viga, e área e momento de inércia iguais a $33,4 \text{ cm}^2$ e 1510 cm^4 para os pilares. O carregamento e o comprimento das barras também são mostrados na figura. O módulo de elasticidade longitudinal do aço adotado é igual a 210000 MPa .

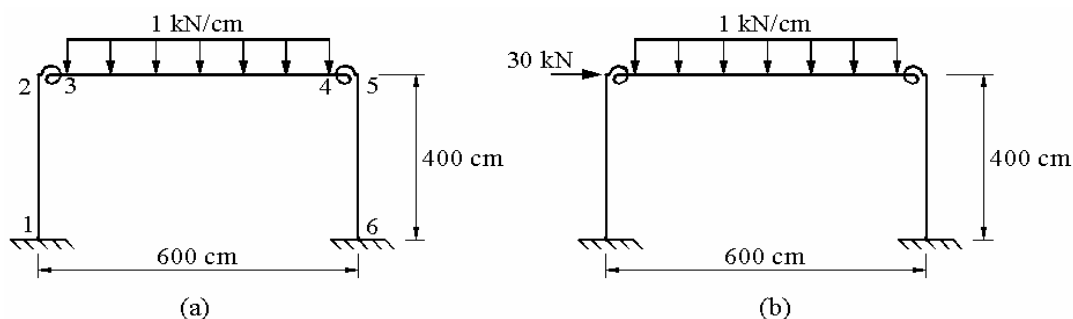


FIGURA 4.25 – Pórtico de um andar e um vão com ligações semirrígidas

Para a implementação dos dados do programa a viga foi dividida em 10 elementos iguais e os pilares em 4 elementos iguais. A seção transversal foi dividida em 20 fatias, sendo uma fatia para cada mesa e 18 para alma do perfil.

As ligações $C23$ e $C45$ dos pórticos são constituídas por cantoneiras de topo e assento e cantoneira dupla na alma e o seu comportamento não linear foi apresentado por KISHI et al. (2001) considerando-se o modelo de três-parâmetros, como mostrado na Fig. 4.26. A capacidade de momento último M_u da ligação é igual a 7720 kNcm , a rigidez inicial K_i igual a 3671400 kNcm/rad e o fator de forma da ligação igual a $0,921$.

O comportamento da ligação é aproximado pela curva multilinear, mostrada na Fig. 4.27, onde os pares de rotação relativa e momento fletor para cada trecho são indicados na curva.

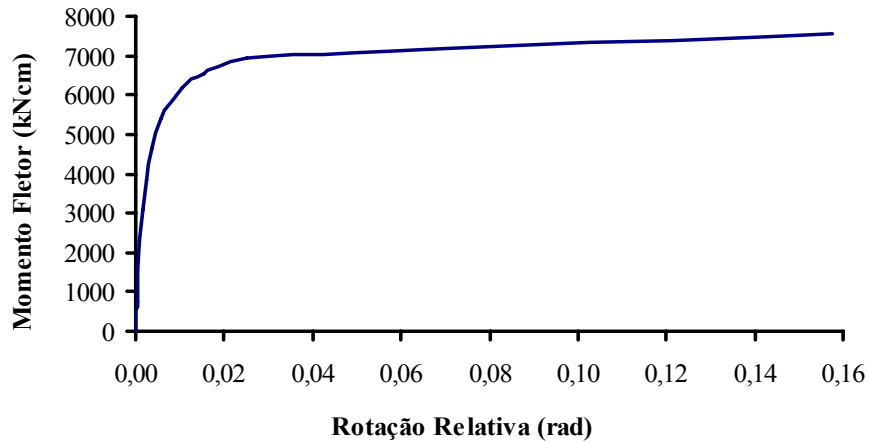


FIGURA 4.26 – Curva M-θ_r relativa pelo modelo de três parâmetros

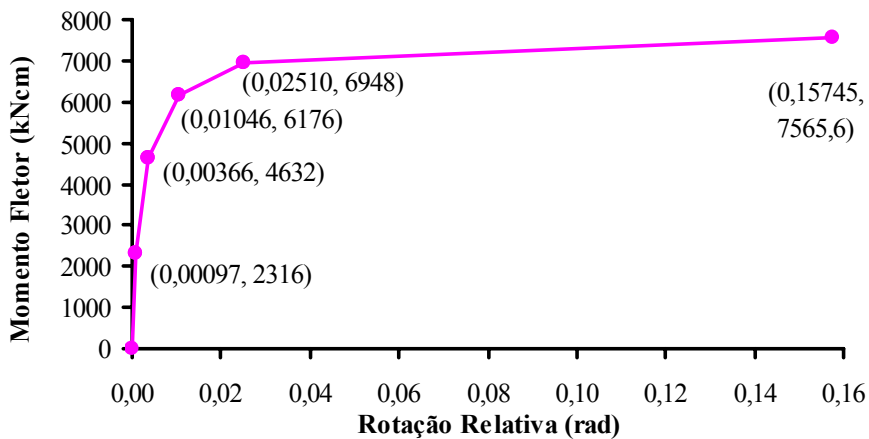


FIGURA 4.27 – Curva multilinear momento fletor x rotação relativa

CASO 1:

O pórtico do primeiro caso é submetido ao carregamento uniformemente distribuído de 1 kN/cm , conforme mostra a Fig. 4.25-a. Essa carga é modelada como um conjunto de cargas nodais equivalentes e o pórtico é analisado em teoria de 2^a ordem, no regime elástico. Como o pórtico semirrígido é submetido apenas ao carregamento vertical uniformemente distribuído, as ligações, que são idênticas nas extremidades da viga, apresentam, em módulo, os mesmos momentos fletores e giros, apresentando consequentemente o mesmo comportamento.

Inicialmente aplica-se o carregamento incremental até 35% da carga vertical total do pórtico. Conforme mostra a Fig. 4.28 e a Tab. 4.4, a ligação atinge um momento fletor igual a 5517 kNcm e apresenta uma deformação rotacional de $0,00756 \text{ rad}$, situando-se no terceiro trecho da curva multilinear da ligação semirrígida. Então, inicia-se o descarregamento, retirando-se a carga até se obter o valor de momento nulo. No processo de descarga, observa-se que o comportamento da ligação é sempre linear, com rigidez igual à rigidez inicial, apresentando uma rotação relativa residual de $0,00525 \text{ rad}$.

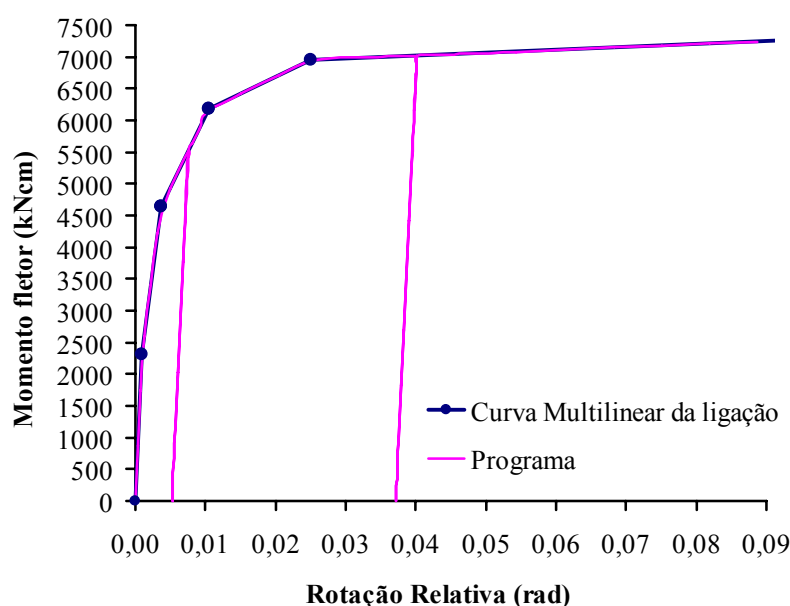


FIGURA 4.28 – Processo de carga, descarga e recarga do pórtico do caso 1

Em seguida, um recarregamento até 65% de carga é realizado, onde pode-se observar que, até os 35% de carga, o comportamento é linear com rigidez igual à rigidez inicial e as rotações relativas são as mesmas encontradas no descarregamento. A partir de 35% de carga, a rigidez assume o valor tangente do trecho 3, caminhando sobre a curva $M-\theta$. Quando o carregamento atinge 65% de carga, a ligação fica solicitada por um momento fletor de 7018 kNcm e apresenta uma deformação rotacional igual a $0,04012 \text{ rad}$. Neste instante, a ligação situa-se no último trecho da curva multilinear. Um descarregamento é novamente realizado até a ligação apresentar o valor de momento igual a zero. De forma similar ao descarregamento anterior o comportamento é linear com rigidez igual à rigidez inicial, porém apresentando ao final uma rotação relativa residual maior, igual a $0,03718 \text{ rad}$. Um posterior recarregamento até 100% da carga aplicada no pórtico é

realizado, onde o comportamento é linear até os primeiros 65% de carga e não linear, com rigidez tangente, para incrementos maiores até o valor do carregamento total.

TABELA 4.4 – Resultados de momento fletor e rotação relativa para o pórtico do caso 1

Momento Fletor (kNm)	Rotação Relativa (rad)	Observações
0	0,00000	
876	0,00037	
1752	0,00073	
2603	0,00130	
3409	0,00224	
4214	0,00317	
4919	0,00492	
5517	0,00756	
5344	0,00749	← Início do primeiro descarregamento
4647	0,00719	
3774	0,00683	
2900	0,00646	
2026	0,00610	
1151	0,00573	
276	0,00536	
100	0,00529	
0	0,00525	
100	0,00529	← Início do primeiro recarregamento
276	0,00536	
1151	0,00573	
2900	0,00646	
4647	0,00719	
5517	0,00756	
6114	0,01019	
6701	0,02041	
6985	0,03299	
7011	0,03870	
7018	0,04012	
6849	0,04005	← Início do segundo descarregamento
6159	0,03976	
4429	0,03904	
2694	0,03831	
955	0,03758	
84	0,03722	
0	0,03718	
18	0,03719	← Início do segundo recarregamento
84	0,03722	
955	0,03758	
2694	0,03831	
4429	0,03904	
6159	0,03976	
7018	0,04012	
7051	0,04720	
7117	0,06125	
7181	0,07511	
7245	0,08879	

CASO 2:

No segundo caso analisa-se o comportamento de carga e descarga nas ligações do pórtico da Fig. 4.25-b, quando este é submetido a uma força horizontal, após o carregamento vertical uniformemente distribuído ser aplicado na estrutura. A Fig. 4.29 e a Tab. 4.5 mostram os resultados do momento fletor e da rotação relativa para as ligações da esquerda (C23) e da direita (C45) para todo o incremento de carga.

Observa-se que, quando o pórtico é submetido inicialmente à carga uniformemente distribuída, as ligações, idênticas nas extremidades da viga, estão igualmente solicitadas, para todo o incremento de carga vertical, apresentando, em módulo, o mesmo momento fletor igual a 7245 kNcm e mesmo giro igual a $0,08879 \text{ rad}$, para 100% do carregamento.

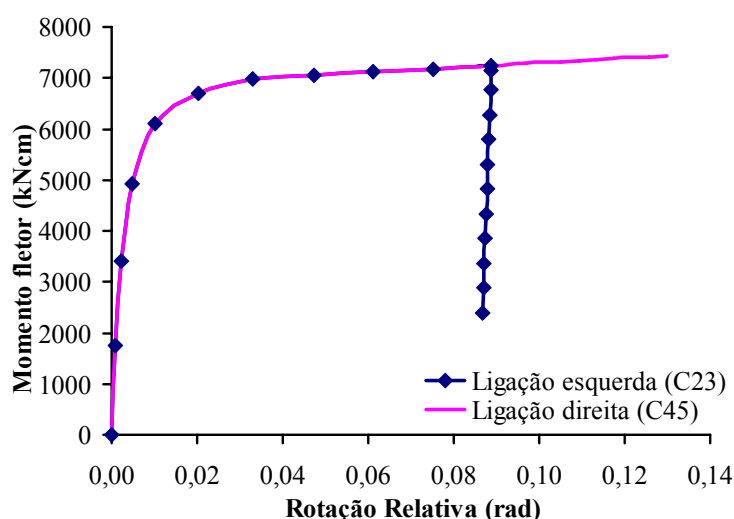


FIGURA 4.29 – Comportamento das ligações esquerda e direita do pórtico do caso 2

Com a aplicação posterior da carga horizontal incremental, a ligação na extremidade da viga, oposta à aplicação da carga (ligação C45), continua a girar no mesmo sentido, com comportamento $M-\theta$, baseado na rigidez tangente, enquanto que a ligação na extremidade da viga onde a carga horizontal foi aplicada (ligação C23) começa a descarregar, apresentando um comportamento linear, com inclinação igual à rigidez inicial da ligação, conforme mostra a Fig. 4.29. Quando a estrutura apresenta-se totalmente carregada, a ligação C45 apresenta-se mais solicitada, com momento igual a 7437 kNcm e giro igual a $0,12982 \text{ rad}$, e a ligação C23, devido ao descarregamento

provocado pela força horizontal, com momento fletor igual a 2395 kNcm e giro de $0,08676 \text{ rad}$.

TABELA 4.5 – Resultados de momento fletor e rotação relativa para o pórtico do caso 2

% Carga		Ligação esquerda		Ligação direita	
Vertical	Horizontal	M (kNcm)	θ_R (rad)	M (kNcm)	θ_R (rad)
10	0	1752	0,00073	1752	0,00073
20	0	3408	0,00224	3408	0,00224
30	0	4919	0,00492	4919	0,00492
40	0	6114	0,01019	6114	0,01019
50	0	6701	0,02041	6701	0,02041
60	0	6985	0,03299	6985	0,03299
70	0	7051	0,04721	7051	0,04721
80	0	7117	0,06125	7117	0,06125
90	0	7181	0,07511	7181	0,07511
100	0	7245	0,08880	7245	0,08880
100	2	7159	0,08876	7249	0,08953
100	10	6769	0,08860	7264	0,09284
100	20	6282	0,08839	7283	0,09696
100	30	5796	0,08819	7303	0,10108
100	40	5309	0,08798	7322	0,10520
100	50	4823	0,08778	7341	0,10931
100	60	4337	0,08758	7360	0,11341
100	70	3851	0,08737	7379	0,11752
100	80	3366	0,08717	7398	0,12162
100	90	2880	0,08697	7418	0,12572
100	100	2395	0,08676	7437	0,12982

Após a apresentação dos casos 1 e 2, observa-se que o comportamento das ligações em carga é bastante diferente do comportamento em descarga, donde se conclui que o comportamento da ligação é bastante afetado pelo histórico de aplicação da carga. Finalmente, observa-se a excelente performance do programa no acompanhamento do comportamento das ligações em carga, descarga e recarga, conforme mostram as Figs. 4.28 e 4.29.

4.6.1.3 Pórtico Não contraventado de 2 Andares e 1 Vão

A Figura 4.30 mostra dois pórticos de dois andares e um vão, com bases rotuladas (Fig. 4.30-a) e com bases engastadas (Fig. 4.30-b). Esses pórticos foram analisados previamente por PINHEIRO e SILVEIRA (2005) para o carregamento e dimensões de

barras mostradas na Fig. 4.30. As vigas e os pilares são constituídos, respectivamente, pelos perfis $W 360 \times 72$ e $W 310 \times 143$. O carregamento é constituído por cargas verticais concentradas P , aplicadas nos pilares e por duas cargas horizontais, de $0,002P$ aplicada no primeiro andar e outra de $0,001P$ aplicadas no segundo andar. O módulo de elasticidade longitudinal do aço é igual a 205000 MPa .

Para a implementação dos dados do programa as vigas e os pilares foram discretizados em 4 elementos iguais e as seções transversais em 20 fatias, sendo uma fatia para cada mesa e 18 para alma do perfil.

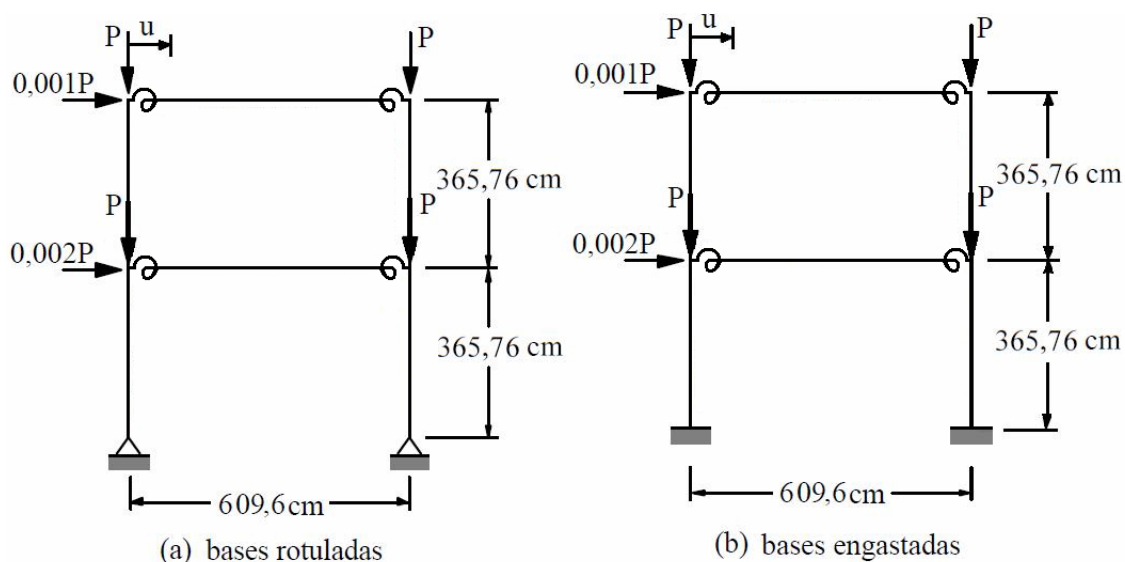


FIGURA 4.30 – Pórtico de 2 andares e 1 vão: (a) bases rotuladas, (b) bases engastadas, adaptada de PINHEIRO e SILVEIRA (2005)

Para considerar as ligações não lineares, quatro tipos de ligações foram considerados por PINHEIRO e SILVEIRA (2005) e obtidos através do modelo exponencial: uma ligação com cantoneira simples na alma, uma ligação com cantoneiras de topo e assento, uma ligação com placa de extremidade ajustada e uma ligação com placa de extremidade estendida, nomeados, respectivamente, por A , B , C e D . Os comportamentos momento \times rotação relativa de cada ligação são representados na Fig. 4.31. O comportamento não linear dessas ligações é aproximado por curvas multilíneas, considerando-se cinco trechos lineares, conforme mostram a Fig. 4.32 e a Tab. 4.6.

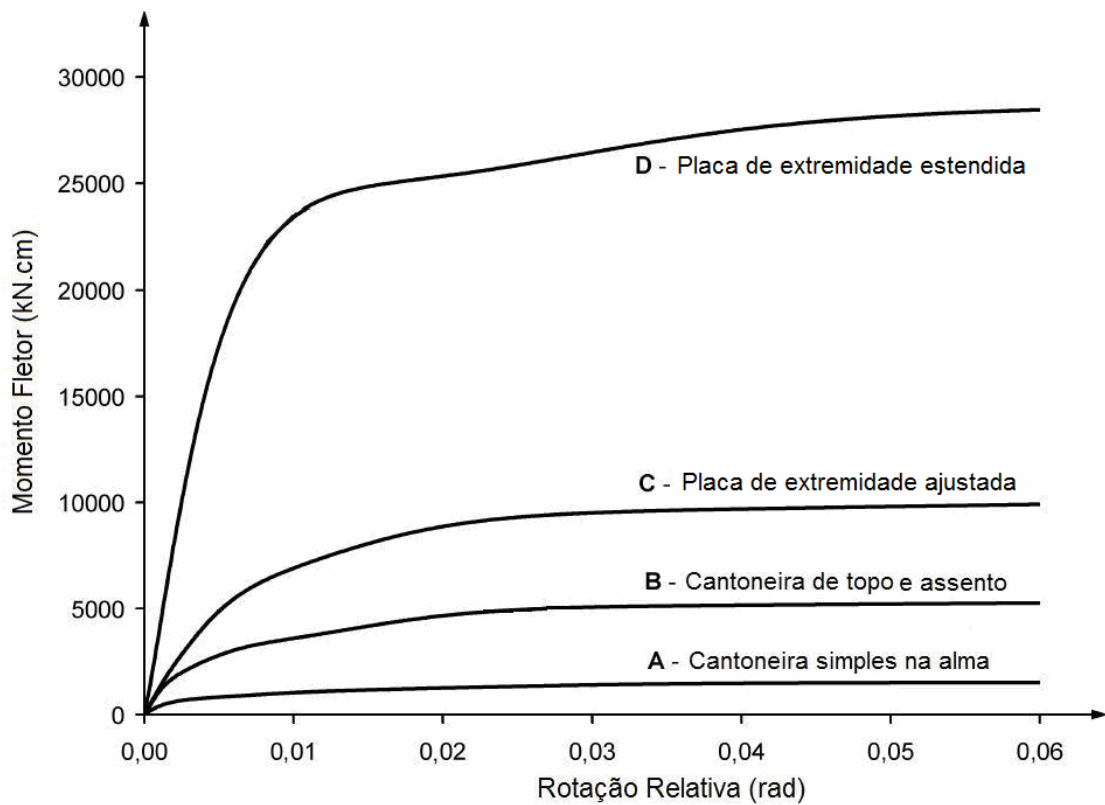


FIGURA 4.31 – Curvas momento fletor \times rotação relativa, adaptada de PINHEIRO e SILVEIRA (2005)

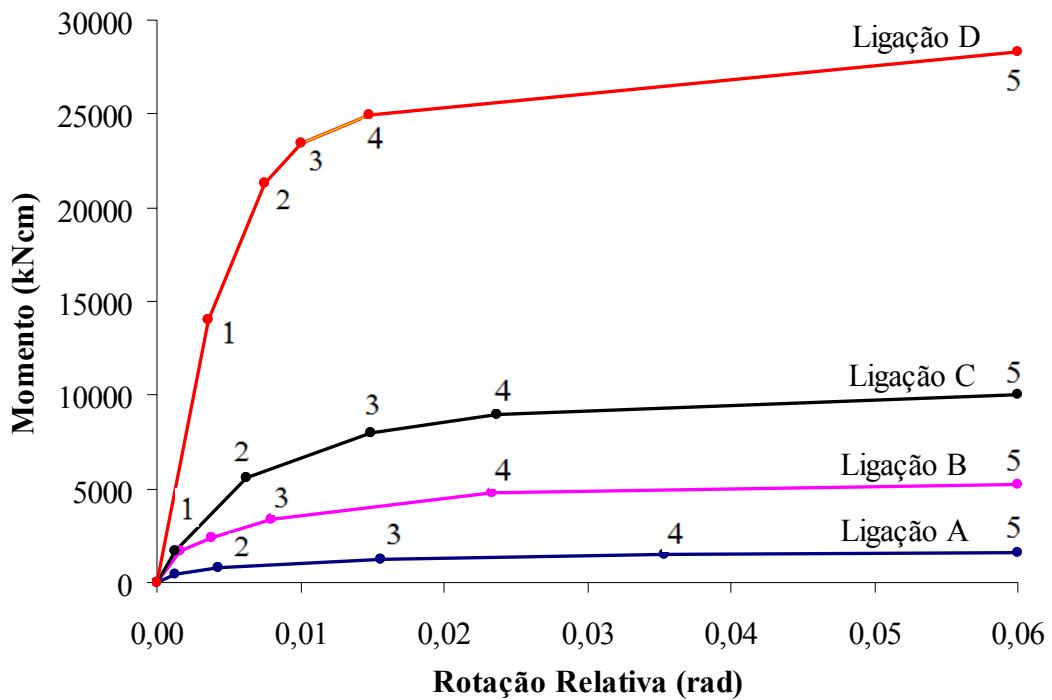


FIGURA 4.32 – Curvas momento fletor \times rotação relativa multilíneas

TABELA 4.6 – Parâmetros das ligações *A*, *B*, *C* e *D* para o comportamento multilinear

n°	Ligação A		Ligação B		Ligação C		Ligação D	
	M (kNcm)	θ (rad)	M (kNcm)	θ (rad)	M (kNcm)	θ (rad)	M (kNcm)	θ (rad)
	0	0,00000	0	0,00000	0	0,00000	0	0,00000
1	435	0,00123	1650	0,00166	1700	0,00129	14000	0,00364
2	800	0,00429	2400	0,00380	5600	0,00620	21300	0,00756
3	1200	0,01557	3400	0,00800	8000	0,01493	23400	0,01000
4	1500	0,03543	4800	0,02340	9000	0,02366	24900	0,01485
5	1560	0,06000	5240	0,06000	10000	0,06000	28300	0,06000

As cargas críticas obtidas através da análise elástica de 2ª ordem e as trajetórias de equilíbrio dos dois pórticos, com apoios rotulados e engastados, considerando-se os quatros tipos de ligações são apresentadas nos gráficos das Figs. 4.33 e 4.34. Além desses quatro comportamentos de ligação, também são apresentados os resultados considerando-se ligações idealmente rígidas.

Os resultados obtidos pelo programa foram comparados com aqueles fornecidos por PINHEIRO e SILVEIRA (2005), que considera as ligações semirrígidas em sua formulação, através de elementos híbridos ou elementos de barra modificados.

Pode-se observar que, os valores obtidos para a carga crítica são praticamente os mesmos daqueles obtidos pelos autores, tanto para o pórtico rotulado quanto para o pórtico engastado. Observa-se também que, o comportamento das curvas carga x deslocamento lateral no topo para ambos os pórticos até o valor da carga crítica, obtidas pelo programa apresentam uma boa correlação com aqueles apresentados pelos autores, para todos os tipos de ligações. Nota-se que a influência dos efeitos das ligações semirrígidas reduz drasticamente a carga crítica do pórtico, quando as ligações de menor rigidez são comparadas com àquelas de maior rigidez e resistência. Observa-se também que, o comportamento do pórtico sem contraventamento, na análise elástica de 2ª ordem, é fortemente controlado pelo efeito de flexibilidade da ligação.

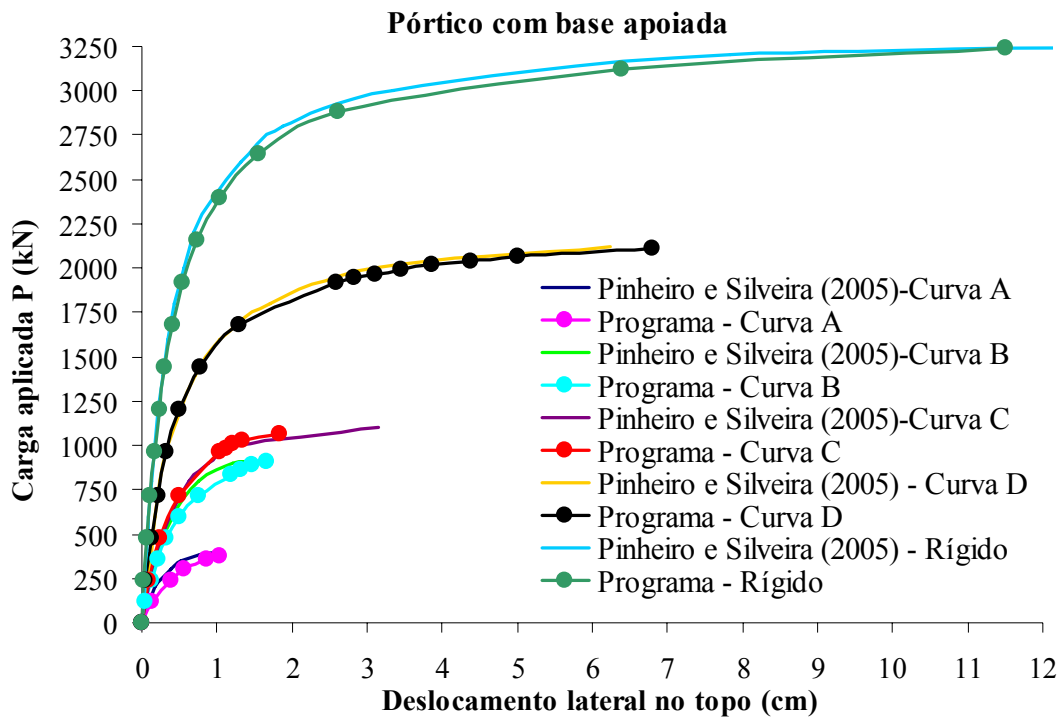


FIGURA 4.33 – Curvas carga-deslocamento para pórticos com bases rotuladas

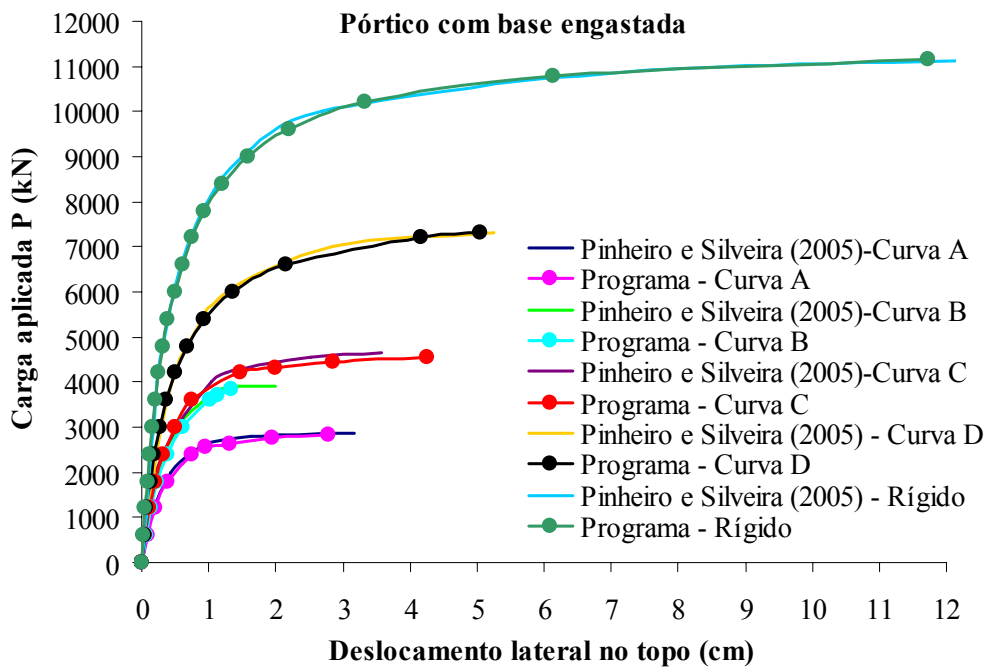


FIGURA 4.34 – Curvas carga-deslocamento para pórticos com bases engastadas

4.6.1.4 Pórtico Não contraventado de 4 Andares e 2 Vãos

O pórtico de quatro andares e dois vãos, mostrado na Fig. 4.35, foi investigado por KING e CHEN (1993) para avaliar os momentos máximos solicitantes nos pilares e os deslocamentos laterais nos andares do pórtico, considerando-se as ligações idealmente rígidas e semirrígidas entre viga-pilar. Este exemplo tem como objetivo comparar os resultados obtidos pelos autores com os resultados obtidos pelo programa, através de uma análise elástica rigorosa em 2ª ordem.

A carga uniformemente distribuída nas vigas foi modelada como um conjunto de cargas nodais equivalentes e as forças horizontais concentradas, devidas à ação do vento, foram aplicadas em todos os andares. Os carregamentos vertical e horizontal foram aplicados de forma incremental. A numeração dos nós e dos pilares também é indicada, bem como os comprimentos dos vãos das vigas e as alturas dos pilares. As bases do pórtico são engastadas e as seções transversais, constituídas por perfis I, são mostradas na Fig. 4.36.

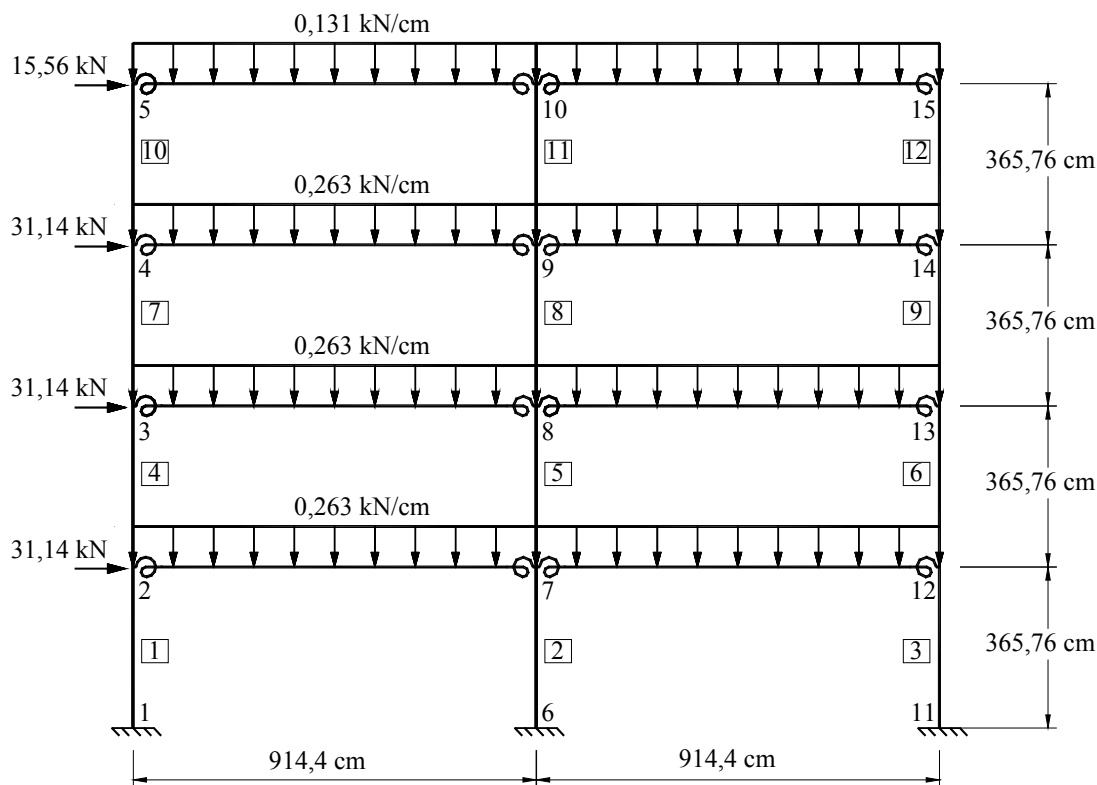


FIGURA 4.35 – Pórtico de quatro andares e dois vãos

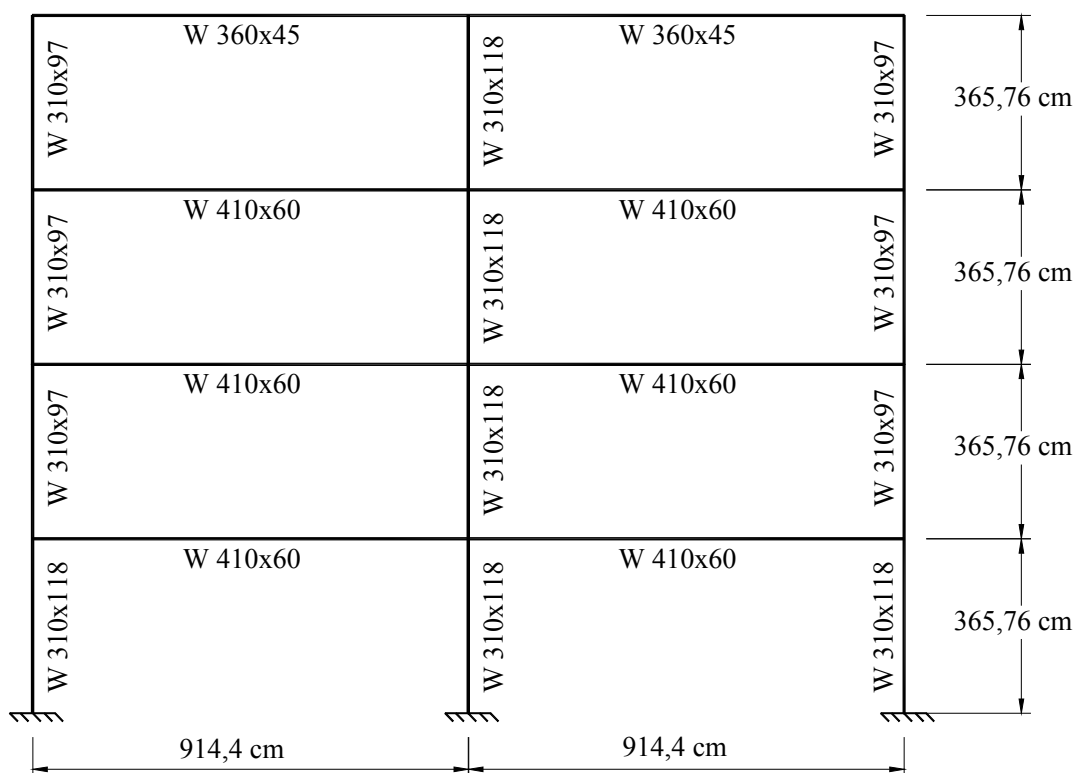


FIGURA 4.36 – Pórtico de quatro andares e dois vãos: dimensões e perfis

Dez elementos finitos foram utilizados para modelar as vigas e quatro para modelar os pilares. As seções transversais foram divididas em 20 fatias iguais, sendo uma para cada mesa e 18 para a alma do perfil. O módulo de elasticidade longitudinal do aço adotado foi $E = 210000 \text{ MPa}$.

Uma ligação com placa de extremidade estendida foi considerada em todos os nós do modelo, cujo comportamento não linear $M-\theta_r$, foi obtido pelo modelo de três parâmetros, por KING e CHEN (1993). O comportamento não linear dessa ligação é aproximado por uma curva multilinear, considerando-se cinco trechos lineares, com os pares de θ_r e M , mostrados na Fig. 4.37.

Os resultados do deslocamento horizontal nos andares do pórtico (nós 2 a 5) são apresentados na Tab. 4.7, para o carregamento total aplicado. Observa-se que os resultados obtidos pelo programa e aqueles obtidos pelos autores são aproximadamente

iguais, para ambos os pórticos, rígido e semirrígido. Como esperado, o pórtico com ligações rígidas possui menores deslocamentos do que com ligações semirrígidas.

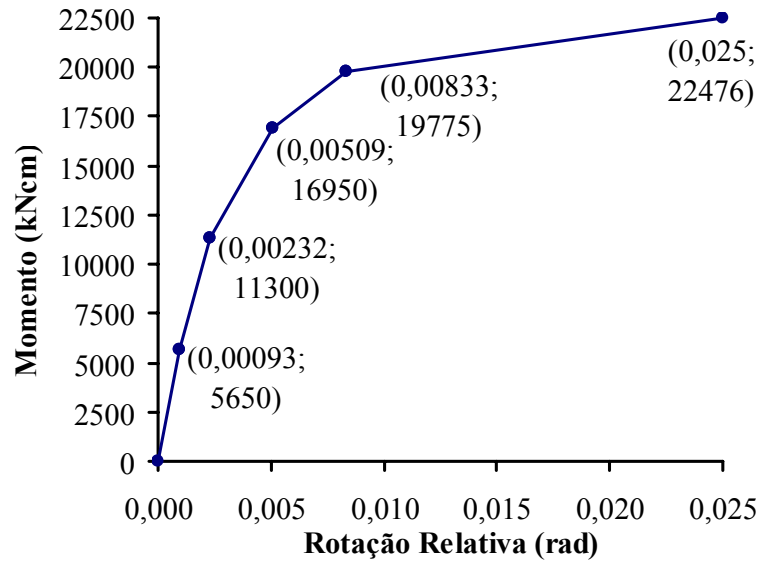


FIGURA 4.37 – Curva momento x rotação relativa multilinear

TABELA 4.7 – Deslocamento lateral nos andares

Deslocamento Lateral (cm)						
Nó	Ligação Rígida			Ligação Semirrígida		
	KING e CHEN (1993) (1)	Programa (2)	(2)/(1)	KING e CHEN (1993) (3)	Programa (4)	(4)/(3)
2	0,69	0,66	0,97	1,02	1,01	0,99
3	1,68	1,63	0,97	2,72	2,70	0,99
4	2,39	2,32	0,97	4,09	4,07	1,00
5	2,82	2,73	0,97	4,95	4,94	1,00

Os resultados do momento máximo nos pilares do pórtico são apresentados na Tab 4.8. Observa-se uma boa correlação entre os resultados obtidos pelo método de análise proposto e aqueles obtidos pelos autores, para ambos os pórticos.

Dessa forma, os resultados obtidos, tanto do deslocamento lateral quanto dos momentos fletores nos pilares, confirmam a validade da implementação computacional realizada, para considerar o comportamento não linear das ligações através da curva $M-\theta$, multilinear, sendo bastante adequado para a análise realizada.

TABELA 4.8 – Momento máximo nos pilares do pórtico

Momento Máximo (kNcm)						
Elemento	Ligação rígida			Ligação semirrígida		
	KING e CHEN (1993) (1)	Programa (2)	(2)/(1)	KING e CHEN (1993) (3)	Programa (4)	(4)/(3)
1	6034	64	0,01	9526	10004	1,05
2	10825	10882	1,01	13221	13371	1,01
3	13583	13501	0,99	15786	15719	1,00
4	5142	5084	0,99	3288	2760	0,84
5	7413	7421	1,00	6735	7074	1,05
6	12441	12368	0,99	11797	11392	0,97
7	6950	6870	0,99	6317	5894	0,93
8	5345	5355	1,00	6125	6169	1,01
9	11628	11546	0,99	11255	10856	0,96
10	7933	7883	0,99	8012	7670	0,96
11	2260	2271	1,00	3537	3649	1,03
12	9243	9192	0,99	9560	9339	0,98

As Figuras 4.38-a e 4.38-b mostram o diagrama de momento fletor nos pilares e nas vigas, respectivamente, para o carregamento total aplicado. O diagrama representado por linhas tracejadas e os valores entre colchetes indicam os momentos fletores para o pórtico considerando-se as ligações idealmente rígidas. O diagrama representado por linhas contínuas e os valores sem colchetes indicam os momentos fletores para o pórtico com ligações semirrígidas.

De acordo com as Figs. 4.38-a e 4.38-b é possível observar uma redistribuição de momentos, nos pilares e vigas do pórtico, com a introdução da ligação semirrígida. Ao se considerar o comportamento semirrígido das ligações entre viga-pilar, observa-se a ocorrência de um aumento significativo nos momentos fletores nas bases do pórtico, uma redução dos momentos negativos nas extremidades das vigas e um aumento dos momentos positivos nos vãos, conforme esperado.

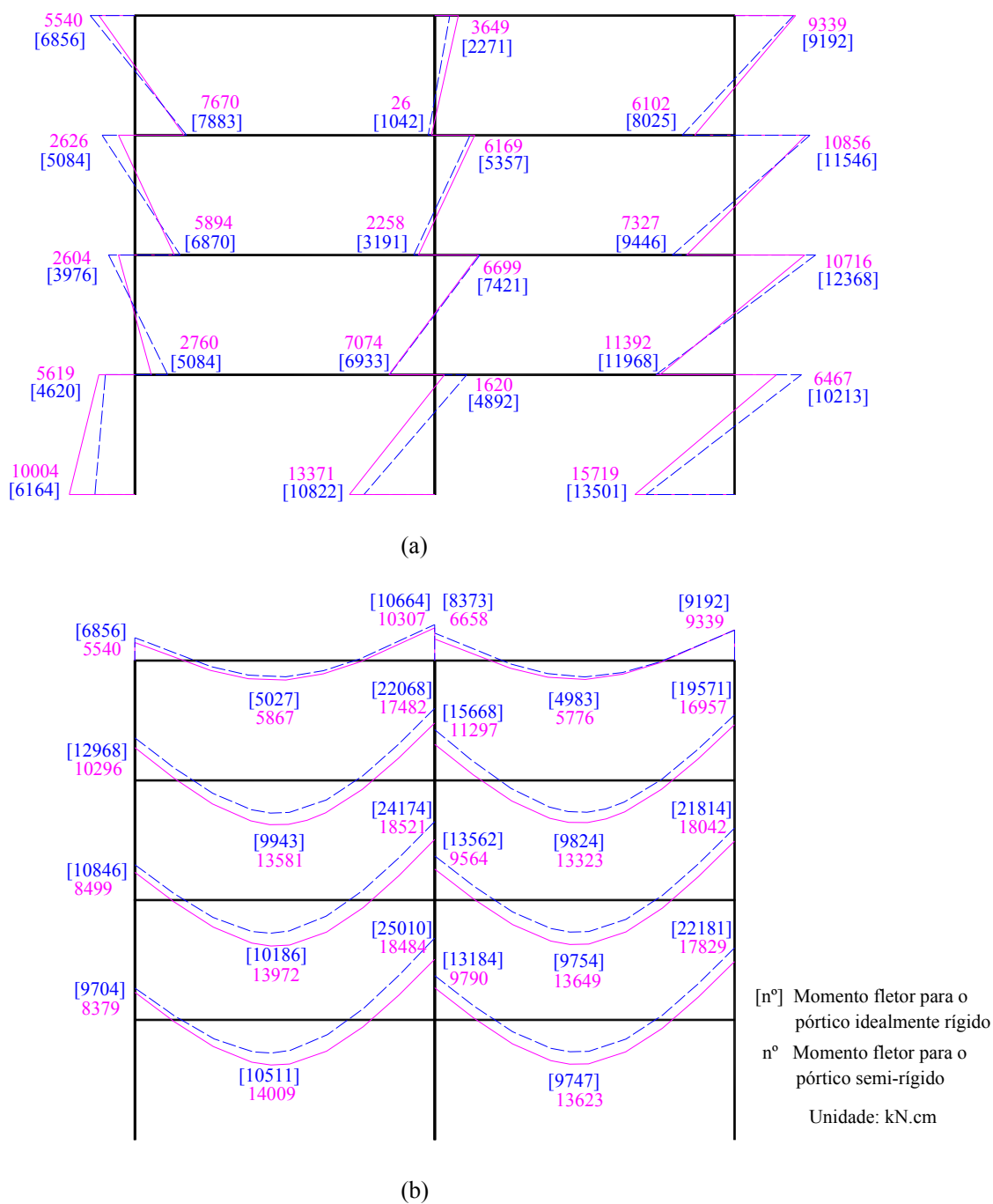


FIGURA 4.38 – Diagrama de momentos fletores: (a) nos pilares e (b) nas vigas

A Figura 4.39 mostra, esquematicamente, o estado de rigidez das ligações para o carregamento total aplicado, obtido pela análise elástica em 2ª ordem. Nota-se que, as ligações na extremidade direita das vigas são mais solicitadas em relação à sua extremidade esquerda, atingindo o trecho 4 da curva $M-\theta_r$ da Fig. 4.37, cuja rigidez

tangente é igual a K_4 . Conforme a legenda, uma ligação encontra-se no 1º trecho, nove estão no 2º trecho e as seis mais carregadas encontram-se no 4º trecho.

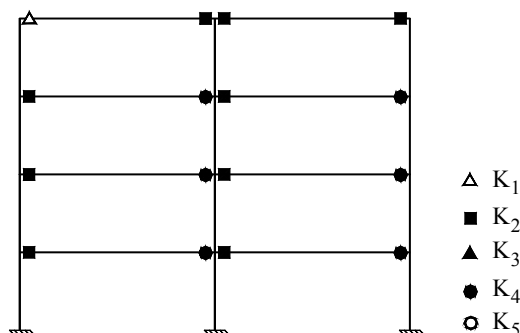


FIGURA 4.39 – Estado de rigidez das ligações semirrígidas para 100% do carregamento

4.6.2 Análise Inelástica em Teoria de 2ª Ordem de Estrutura com Ligações Semirrígidas

4.6.2.1 Pórtico Contraventado de Dois Andares e Um Vão

Neste exemplo será estudado o comportamento de um pórtico contraventado de dois andares e um vão, com ligações com placa de extremidade. O pórtico, mostrado na Fig. 4.40, foi anteriormente estudado por ZHOU (2005) considerando-se as mesmas ligações, dimensões das barras e o carregamento aplicado majorado para uma combinação de carga de $1,0 x$ força vertical + $1,3 x$ força de vento. As bases são totalmente engastadas e o pórtico apresenta contraventamentos com barras diagonais. As imperfeições iniciais geométricas são assumidas iguais a zero e a influência das tensões residuais não são consideradas na análise. A resistência ao escoamento do aço é igual a 250 MPa e o módulo de elasticidade longitudinal igual a 200000 MPa .

Para implementação dos dados do programa, as vigas, os pilares e as diagonais de contraventamento foram divididos em 4 elementos iguais. As seções transversais das vigas e pilares, constituídas respectivamente pelos perfis $W 460x52$ e $W 200x46,1$, foram divididas em 20 fatias, sendo uma fatia para cada mesa e 18 para alma do perfil. O momento plástico teórico para as vigas é igual a $M_{pv}=1095,9x25=27397,5 \text{ kNcm}$ e para os pilares igual a $M_{pp}=495,3x25=12382,5 \text{ kNcm}$. O contraventamento é realizado com cantoneira $L75x50x6$, para ambos os andares.

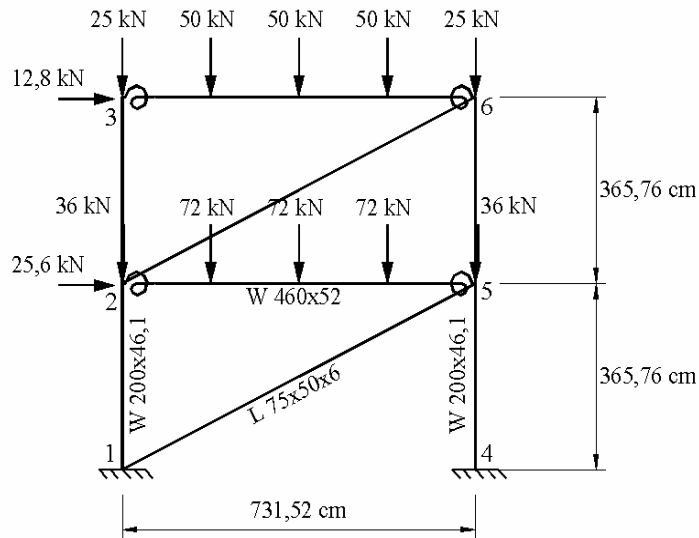


FIGURA 4.40 – Pórtico contraventado de dois andares e um vão

A Figura 4.41 mostra o comportamento não linear das ligações obtidas pelo modelo de três parâmetros. Os valores dos parâmetros usados para gerar as curvas $M-\theta_r$ são mostrados na Tab. 4.9, onde M_u é a capacidade de momento último, K_i a rigidez inicial e n o fator de forma da ligação. As curvas multilíneas, conforme mostram a Fig. 4.42 e a Tab. 4.10 são capazes de descrever o comportamento $M-\theta_r$ com adequada precisão para obtenção de resultados.

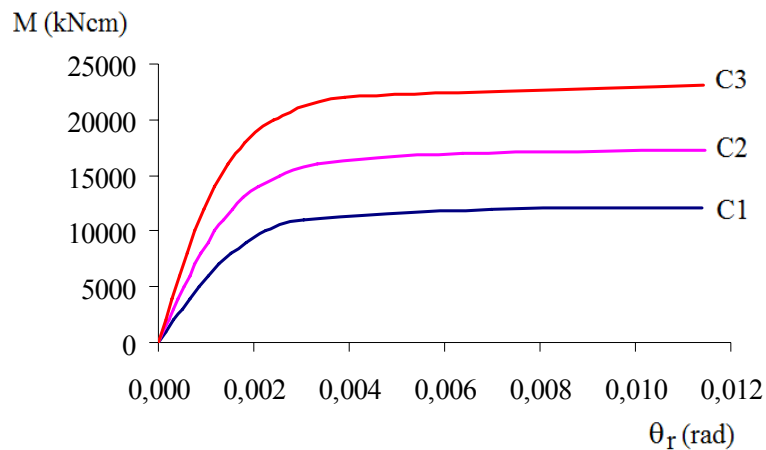


FIGURA 4.41 – Comportamento das ligações C1 a C3 pelo modelo dos três parâmetros

TABELA 4.9 – Parâmetros das ligações

Ligação semi-rígida	K_i (kNm/rad)	M_u (kNm)	n
C1	6063580	12136	2,761
C2	9427590	17266	2,563
C3	13695600	23165	2,411

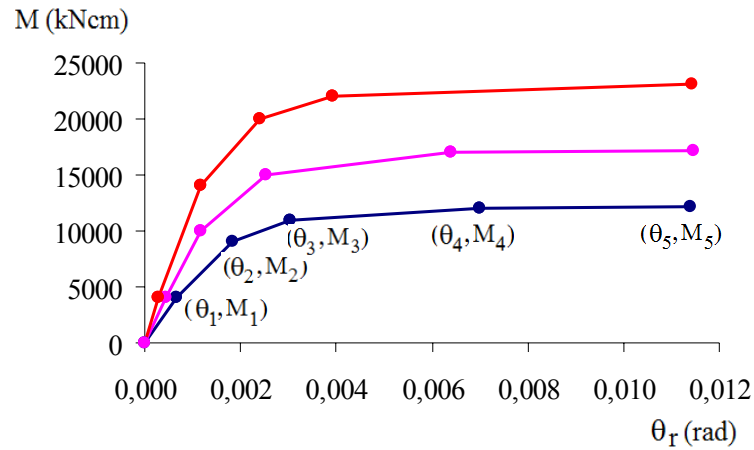


FIGURA 4.42 – Comportamento das ligações C1, C2 e C3 pelo modelo multilinear

TABELA 4.10 – Parâmetros das ligações C1, C2 e C3 - comportamento multilinear

	Ligação C1		Ligação C2		Ligação C3	
	M (kNcm)	θ_r (rad)	M (kNcm)	θ_r (rad)	M (kNcm)	θ_r (rad)
1	4000	0,00067	4000	0,00043	4000	0,00029
2	9000	0,00183	10000	0,00118	14000	0,00118
3	11000	0,00305	15000	0,00254	20000	0,00241
4	12000	0,00699	17000	0,00639	22000	0,00391
5	12100	0,01138	17205	0,01145	23070	0,01144

As curvas normalizadas de momento \times rotação das ligações são apresentadas na Fig. 4.43, onde o sistema de classificação de BJORHOVDE et al. (1990) é aplicado para classificar as ligações adotadas. Pode-se observar que, em termos de rigidez, todas as ligações são classificadas como rígidas. Em termos de resistência, as ligações C1 e C2 são classificadas como semirrígidas e a ligação C3 como rígida.

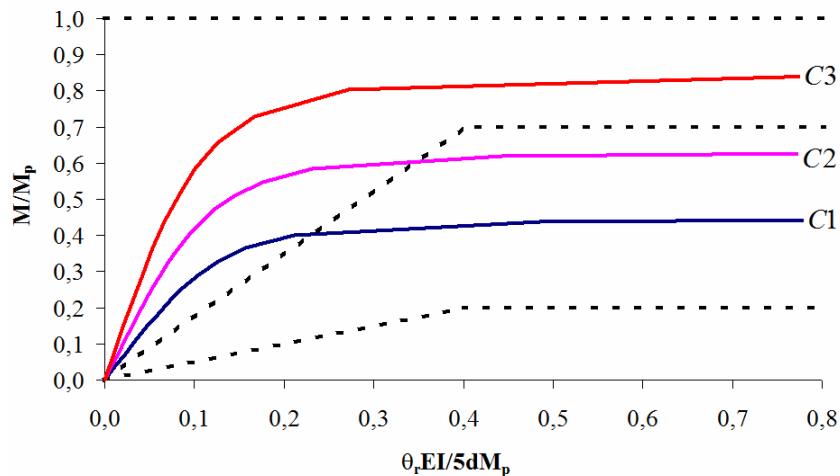


FIGURA 4.43 – Classificação das ligações proposta por BJORHOVDE et al. (1990)

A Figura 4.44 mostra a relação fator de carga-deslocamento até o colapso do pórtico considerando-se as ligações não lineares *C1*, *C2*, *C3*. A Fig. 4.45 mostra a relação fator de carga-deslocamento até o colapso para as ligações rotuladas e rígidas convencionais. A abscissa refere-se ao deslocamento lateral do topo (nó 3) do pórtico.

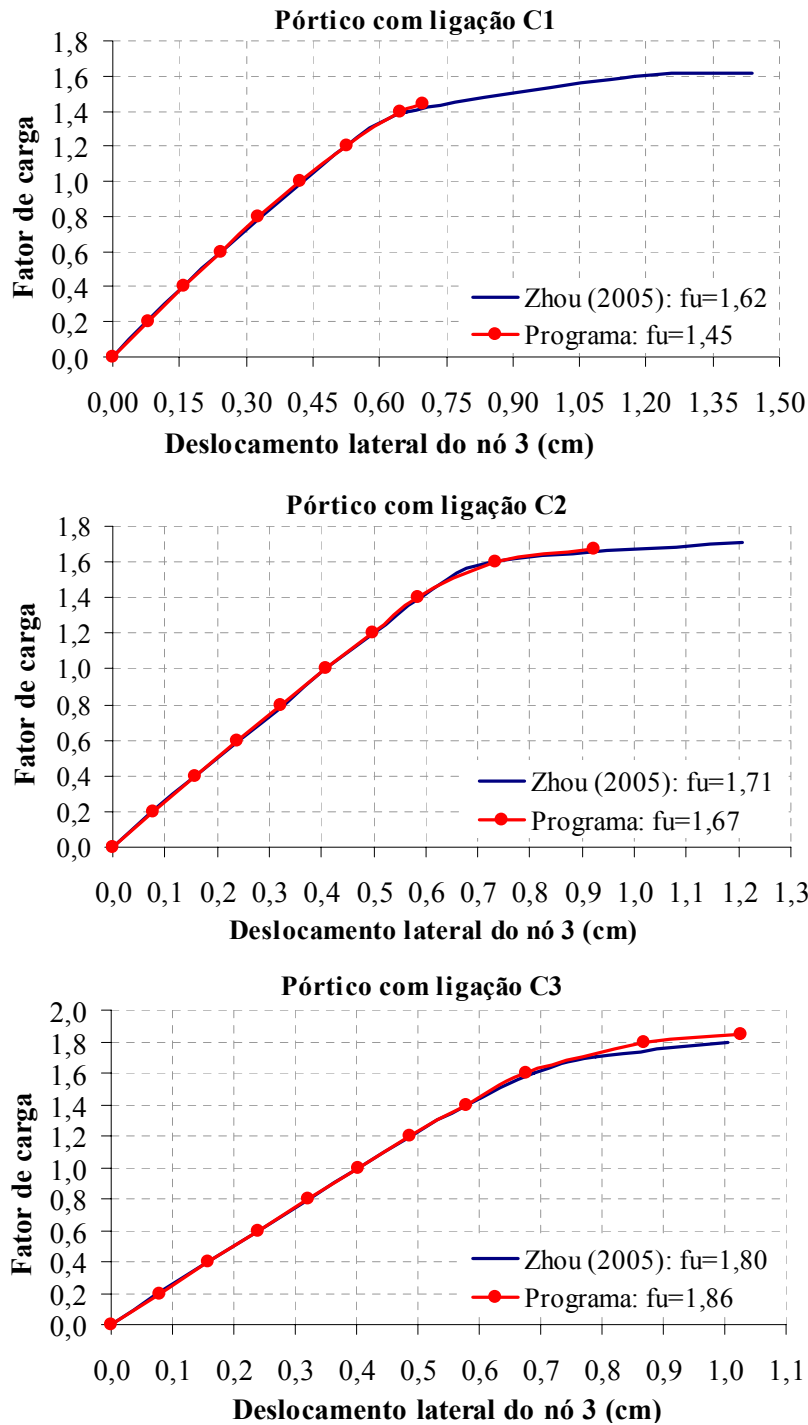


FIGURA 4.44 – Efeito das ligações no comportamento dos pórticos com ligações não lineares

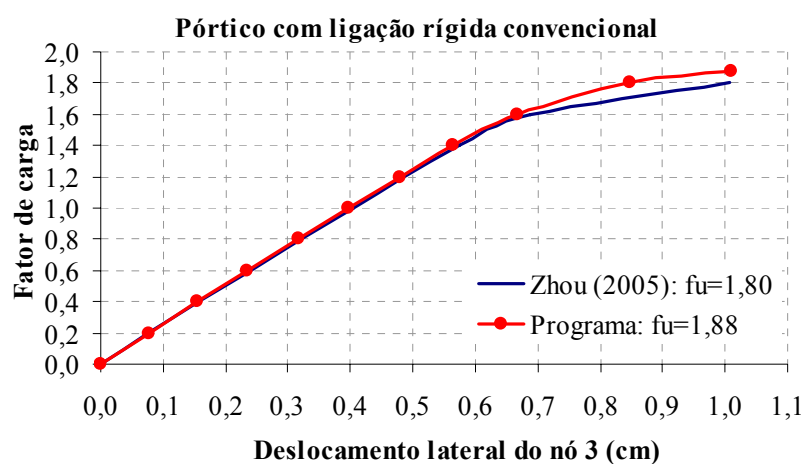
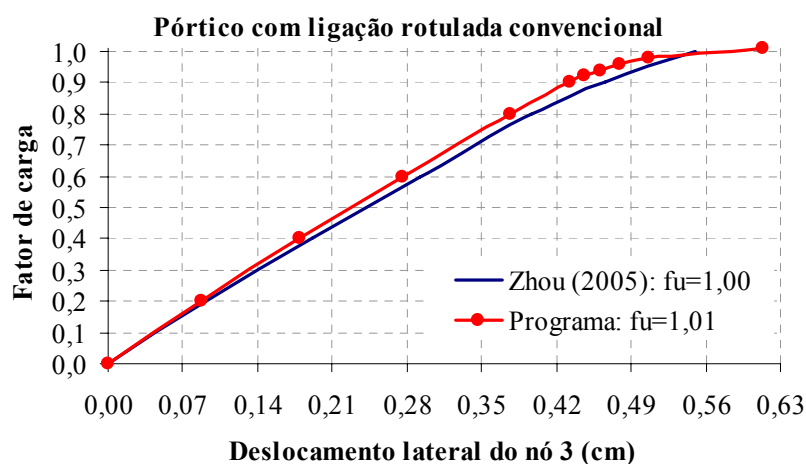


FIGURA 4.45 – Efeito das ligações no comportamento dos pórticos com ligações convencionais

Os resultados da análise inelástica avançada pelo método da zona plástica obtido pelo programa são comparados com os resultados obtidos pelo método da rótula plástica refinada, adotado por ZHOU (2005), que também considera os efeitos das ligações, através do modelo de três parâmetros.

Observa-se nas Figs. 4.44 e 4.45, uma boa correlação entre os resultados, tanto para os pórticos com as ligações não lineares $C1$, $C2$ e $C3$, quanto para os pórticos com ligações convencionais. Percebe-se que, os níveis de carga última para os diversos pórticos são próximos, exceto para o pórtico com ligações semirrígidas $C1$, onde a diferença do valor da carga última foi mais acentuada.

A Figura 4.46 mostra a relação fator de carga-deslocamento até o colapso do pórtico, obtida pelo programa, para uma melhor comparação entre os modelos estudados.

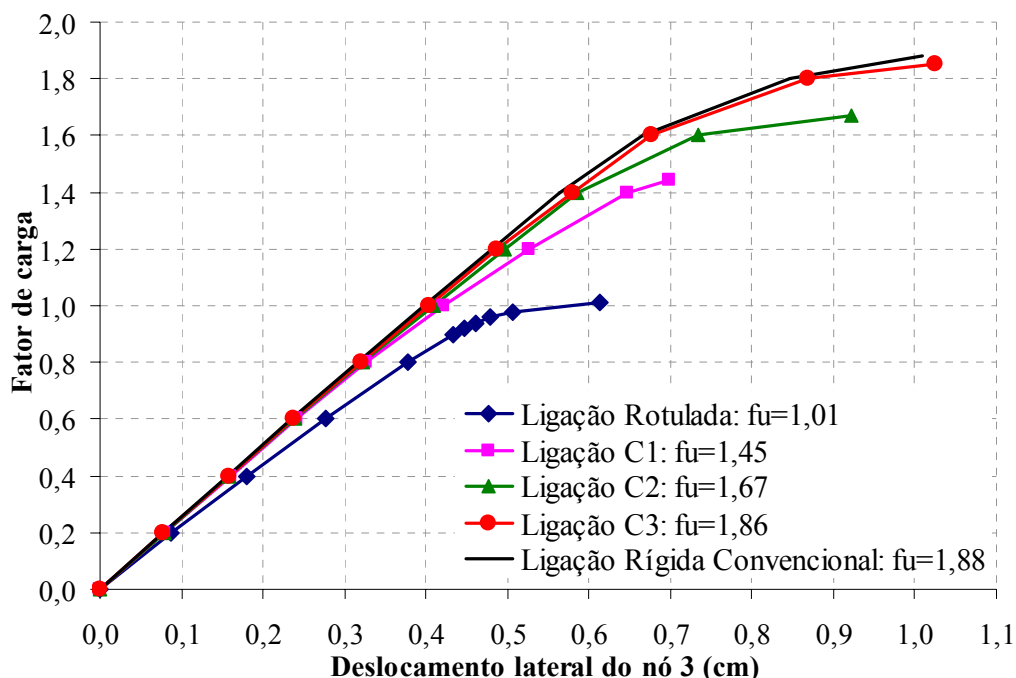


FIGURA 4.46 – Comportamento fator de carga-deslocamento lateral do nó 3 (cm)

Os resultados da Fig. 4.46 mostram que as propriedades das ligações têm influência significativa na resistência, rigidez e ductilidade do pórtico. O fato de o pórtico ser contraventado explica a sua pouca deslocabilidade que varia de $0,61\text{ cm}$ para o pórtico com ligações rotuladas até $1,03\text{ cm}$ para o pórtico com ligações rígidas convencionais.

O comportamento fator de carga-deslocamento entre as curvas definidas pelo pórtico com ligações rígidas convencionais e com as ligações C3 é bastante similar, confirmando a classificação da ligação como rígida. As outras duas ligações C1 e C2 de fato se comportam como ligações semirrígidas, com resultados intermediários entre os pórticos com ligações convencionais, rotulada e rígida.

A Figura 4.47 mostra os diagramas de momento fletor para a carga última do pórtico com os diferentes tipos de ligações. Observa-se a coerência entre os diversos diagramas que apresentam distribuições similares e, à medida que as ligações se tornam mais rígidas, a estrutura passa a suportar maior carregamento.

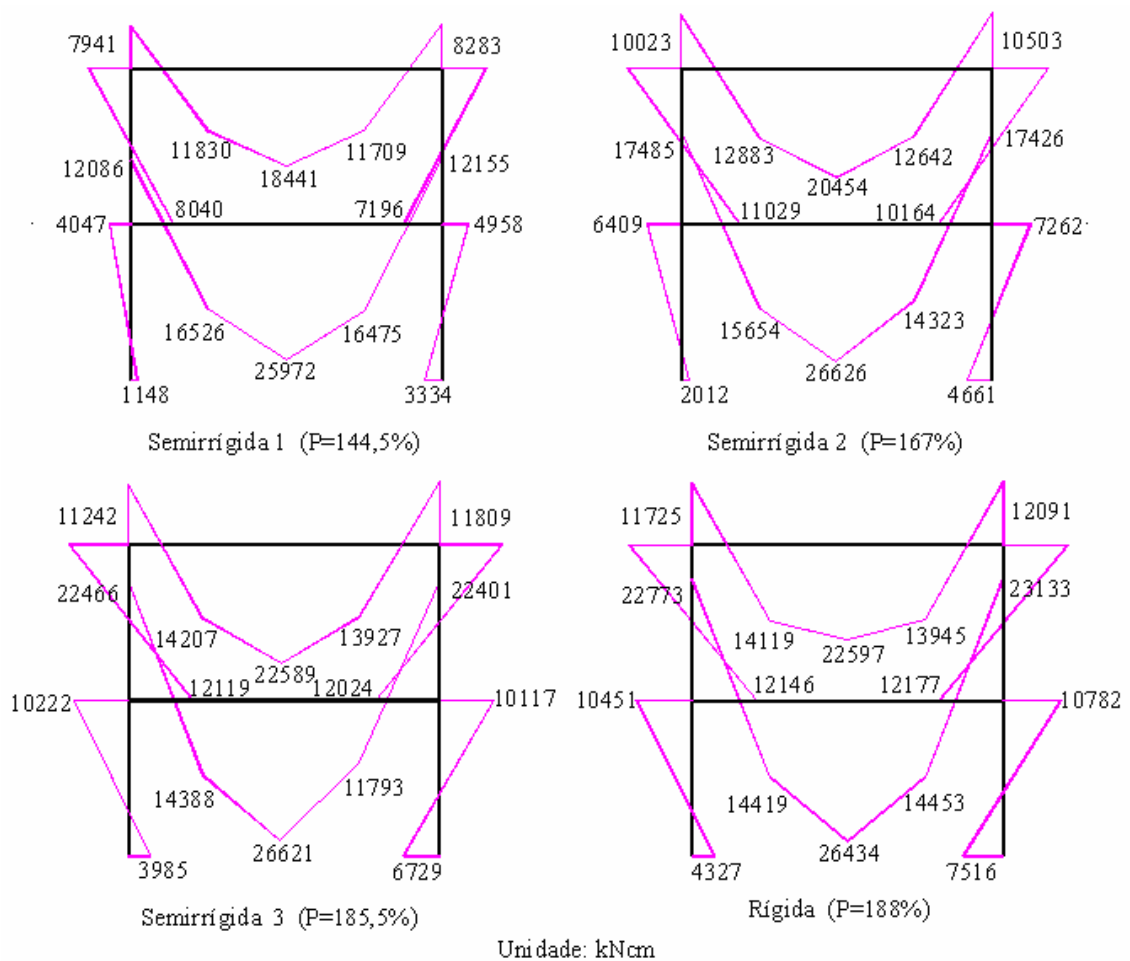


FIGURA 4.47 – Diagrama de momento fletor

Além das ligações *CI* a *C3* apresentarem ductilidade adequada, elas atingiram praticamente a capacidade máxima (M_u), permitindo a evolução da plastificação até o mecanismo de colapso. Dessa forma, os pórticos com ligações *CI* e *C2* falham devido à formação do mecanismo de viga do andar inferior, atingindo o colapso para um fator de carga última $f_u=1,45$ e $f_u=1,67$, respectivamente.

O pórtico com ligações *C3*, similarmente ao pórtico rígido convencional, rompe devido ao mecanismo de viga do andar inferior, provavelmente em combinação com o mecanismo dos nós 2 e 5, para fatores de carga última iguais a $f_u=1,86$ e $f_u=1,88$, respectivamente. Nesses casos, o mecanismo lateral do andar superior somente não ocorre devido ao contraventamento existente, uma vez que os nós superiores e inferiores de ambos os pilares encontram-se bastante plastificados. Finalmente, observa-se que os

momentos fletores máximos alcançados no pórtico com ligações *C3* são superiores a 90% dos momentos alcançados no pórtico rígido convencional, confirmando a caracterização como ligação rígida.

4.6.2.2 Pórtico Não contraventado de Dois Andares e Um Vão

Considere o pórtico de dois andares e um vão com ligações semirrígidas, conforme mostra a Fig. 4.48. Esse pórtico foi analisado e calculado anteriormente por CHEN et al. (1996) e LIU et al. (2008) para o carregamento, dimensões e ligações também mostradas na Fig. 4.48. A combinação de carga considerada é dada por 1,2CP+1,6SC. A resistência ao escoamento do aço é igual a 250 MPa e o coeficiente de ponderação da resistência $\gamma_{a,1}=1,1$. Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal adotados são respectivamente iguais a 200000 MPa e 77000 MPa. A deformação por cisalhamento é dada através da teoria de Timoshenko e as imperfeições geométricas são consideradas explicitamente na análise, onde é assumido que todos os pilares do pórtico apresentam uma inclinação de $h/400$, onde h é a altura do andar. A distribuição linear, tanto nas mesas quanto na alma, das tensões residuais com $\sigma_{rc}=0,3\sigma_y$ é considerada na análise.

Para implementação dos dados do programa as vigas foram divididas em 4 elementos e os pilares em 2 elementos iguais. As seções transversais foram divididas em 50 fatias para considerar as tensões residuais, sendo 20 fatias em cada mesa e 10 fatias na alma.

As ligações *C1* e *C2*, do primeiro e segundo andar, respectivamente, constituídas por cantoneiras de topo e assento e cantoneira dupla na alma, foram representadas por CHEN et al. (1996) através do modelo de três-parâmetros. Os parâmetros dessas ligações são mostrados nas três últimas colunas da Tab. 4.11, onde M_u é a capacidade de momento último, K_i a rigidez inicial e n o fator de forma da ligação. Os valores de M_u não foram reduzidos pelo coeficiente de ponderação de resistência $\gamma_{a,1}$. Na segunda coluna da Tab. 4.11, também são apresentados os momentos plásticos característicos das vigas do pórtico.

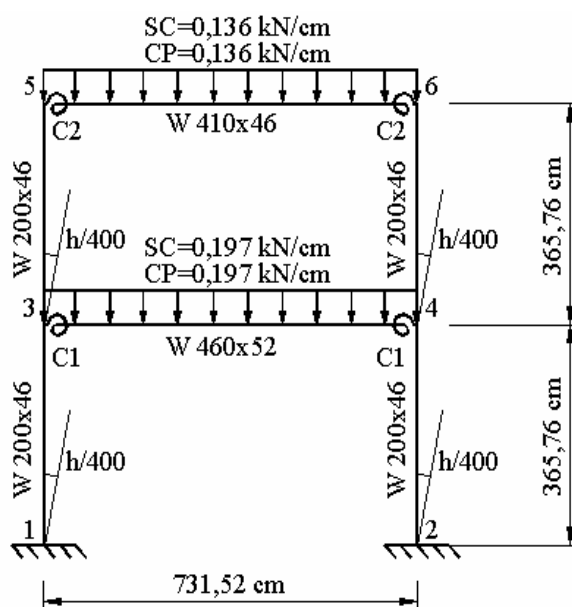


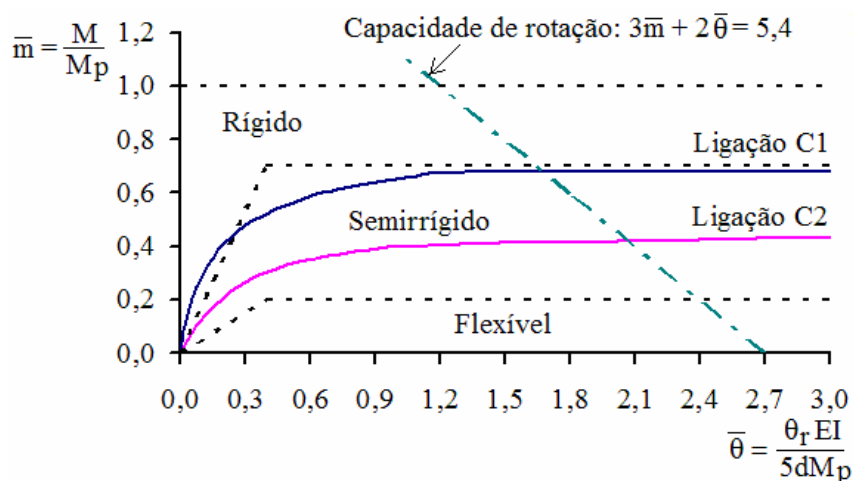
FIGURA 4.48 – Pórtico de dois andares e um vão adaptado de CHEN et al. (1996)

As curvas normalizadas de momento x rotação das ligações são apresentadas na Fig. 4.49-a, onde o sistema de classificação de BJORHOVDE et al. (1990) é aplicado para classificar as ligações adotadas. Pode-se observar que, para esse sistema de classificação, as duas ligações são semirrígidas. Outros sistemas de classificação também foram analisados. Pelo critério de rigidez estabelecido, tanto pela ABNT NBR 8800: 2008, quanto pelo EN 1993-1-8: 2005, as ligações *C1* e *C2*, também são classificadas como semirrígidas. Quanto à resistência, a norma brasileira não estabelece regras para classificar as ligações, porém, segundo a norma europeia, as ligações *C1* e *C2* são classificadas como parcialmente resistentes.

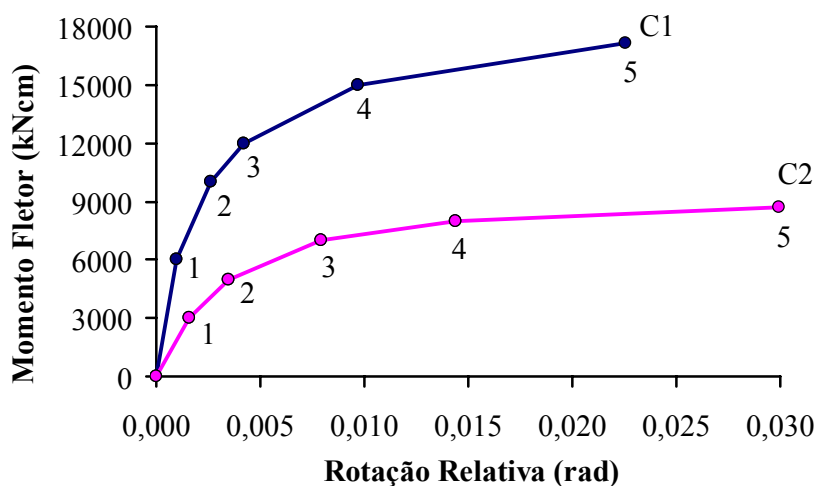
O comportamento não linear das ligações obtido através do modelo de três parâmetros é aproximado por curvas multilíneas, conforme mostram a Fig. 4.49-b e a Tab. 4.12, onde θ_s é a capacidade última de rotação da ligação, conforme define BJORHOVDE et al. (1990).

TABELA 4.11 – Parâmetros das ligações semirrígidas de CHEN et al. (1996)

Ligação	M_p (10^3 kNcm)	M_u (10^3 kNcm)	K_i (10^5 kNcm/rad)	n
C1	27,0	20,0	107,8	0,81
C2	22,0	9,2	23,3	1,27



(a)



(b)

FIGURA 4.49 – Comportamento das ligações *C1* e *C2*: (a) Sistema de classificação de BJORHOVDE et al. (1990), (b) Curvas momento \times rotação relativa multilinear das ligações

TABELA 4.12 – Parâmetros das ligações *C1* e *C2* para o comportamento multilinear

Ligação	Momento (10^3 kNcm)					Rotação (10^{-3} rad)					Rigidez (10^3 kNcm/rad)				
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
C1	6	10	12	15	17,16	1,00	2,63	4,23	9,68	22,58	6000	2454	1250	550	167
C2	3	5	7	8	8,69	1,60	3,50	7,90	14,37	30,11	1875	1053	455	155	44

A Figura 4.50 mostra a relação carga-deslocamento para o nó 6 até o colapso do pórtico. Para o método de análise inelástica avançada proposto neste trabalho e considerando-se

as ligações parcialmente resistentes, o pórtico falha para o fator de carga igual a $f_u=1,078$. A máxima carga obtida por CHEN et al. (1996) e LIU et al. (2008) foram, respectivamente, $f_u=1,096$ e $f_u=1,101$. Para a carga de colapso, as rotações obtidas pelo programa nas ligações C1 foram 0,0114 (nó 3) e 0,0131 (nó 4), ambas situadas no 5º trecho da curva $M-\theta_r$, e nas ligações C2, 0,0150 (nó 5) e 0,0173 (nó 6), também situados no 5º trecho da curva $M-\theta_r$, portanto, menores do que a capacidade última de rotação θ_u das ligações correspondentes. Dessa forma, as ligações apresentam ductilidade adequada para permitir a evolução da plastificação até o mecanismo de colapso.

O gráfico da Fig. 4.50 também mostra a diferença entre os comportamentos carga-deslocamento das análises considerando-se as ligações semirrígidas e as ligações rígidas convencionais. O comportamento do pórtico semirrígido é determinado pelas ligações, que apresentam momentos últimos significativamente inferiores ao momento plástico da viga conectada (ligações parcialmente resistentes). Nota-se que, o fator da carga de colapso f_u aumenta 9,8%, de $f_u=1,078$ para o pórtico com ligações semirrígidas para $f_u=1,184$ para o pórtico com ligações rígidas, indicando uma boa correlação entre as duas situações.

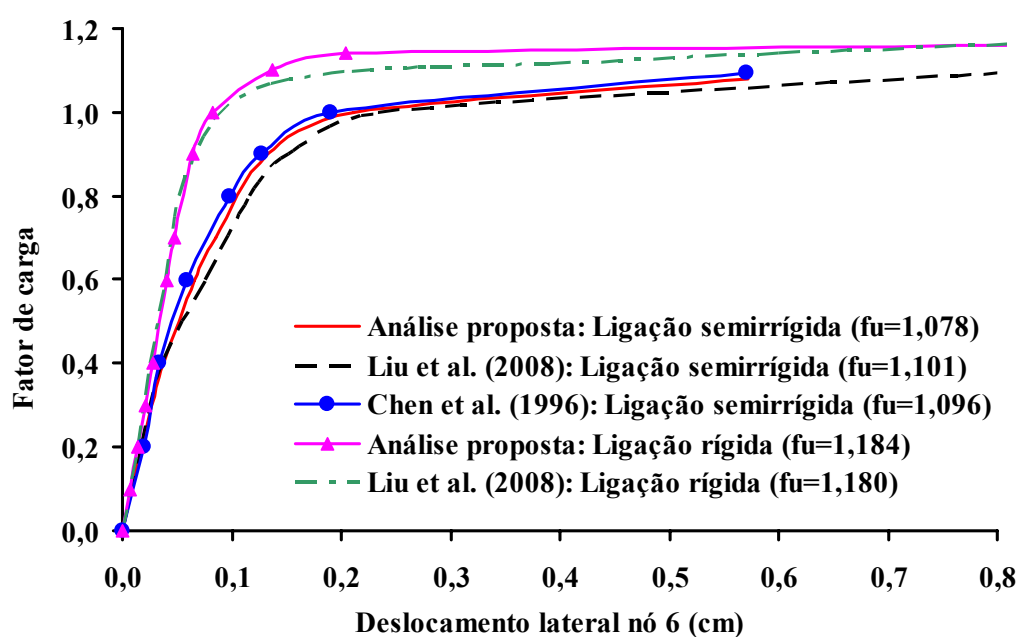


FIGURA 4.50 – Comportamento carga-deslocamento lateral do nó 6 (cm)

As Figuras 4.51 e 4.52 mostram, para a carga de colapso da estrutura, os percentuais de solicitação em relação à plastificação nas extremidades dos pilares e nas extremidades e no meio do vão das vigas. A Figura 4.51 também apresenta os percentuais do momento último nas ligações semirrígidas.

Pode-se observar que o comportamento do pórtico parcialmente restringido é diferente do pórtico rígido convencional. No pórtico parcialmente restringido formam-se rótulas plásticas no centro do vão de cada viga, do 1º e 2º andares, e as ligações *C1* e *C2* também se plastificam, pois apresentam grandes rotações, situando-se no trecho cinco da curva $M-\theta_r$ da Fig. 4.49-b, indicando que a estrutura falha devido ao mecanismo de viga em ambos os andares.

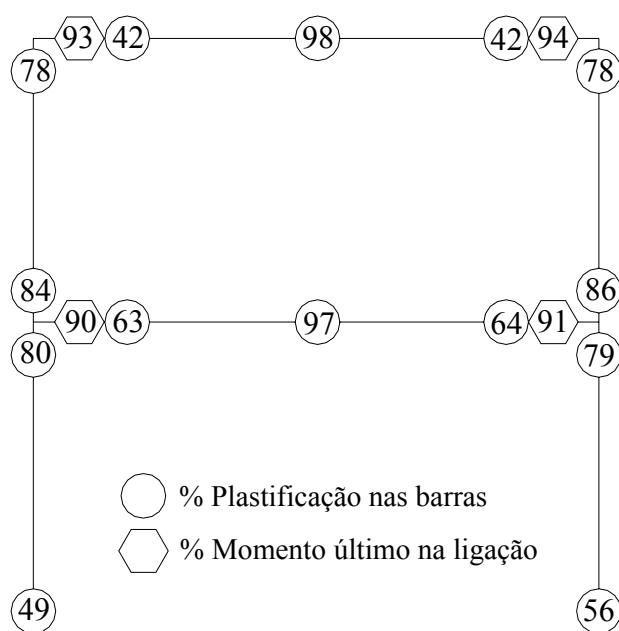


FIGURA 4.51 – Percentual de plastificação nas barras do pórtico e percentual do momento último nas ligações

No pórtico com ligações rígidas, as rótulas plásticas são desenvolvidas nas extremidades superiores dos pilares do 1º andar, nas extremidades superiores e inferiores dos pilares do 2º andar e no meio do vão de ambas as vigas, conforme mostra a Fig. 4.52. Diferentemente do pórtico parcialmente restringido, o pórtico rígido falha por instabilidade inelástica associada com o mecanismo combinado de viga e de andar do 2º pavimento.

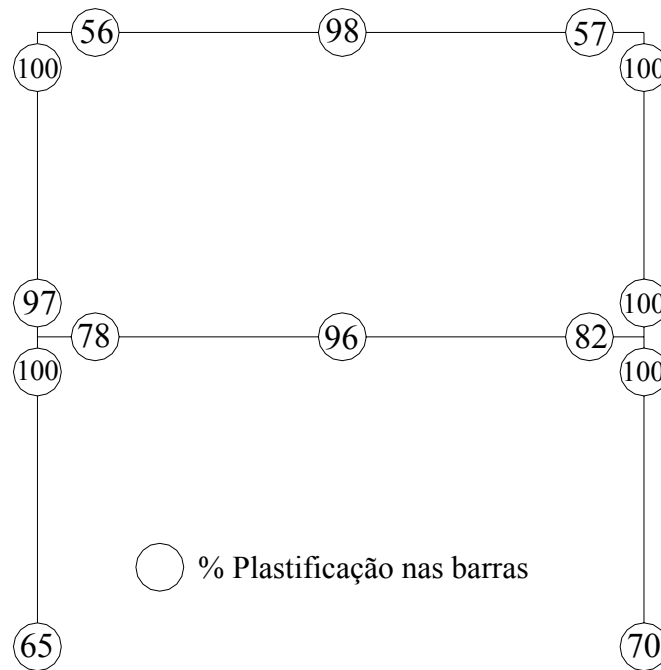


FIGURA 4.52 – Percentual de plastificação nas barras do pórtico rígido

4.6.2.3 Pórtico Não contraventado de Dois Andares e Dois Vãos

A Figura 4.53 mostra um pórtico de dois andares e dois vãos apresentado por LIU et al. (2008) admitindo-se ligações semirrígidas. O pórtico foi estudado por ZIEMIAN (1992), CLARKE apud CHEN e TOMA (1994) e FOLEY e VINNAKOTA (1997), considerando-se as ligações rígidas convencionais. As dimensões, as seções transversais e o carregamento vertical nominal são mostrados na Fig. 4.53. O carregamento vertical é majorado por 1,4 e a resistência ao escoamento do aço é considerada igual a 250 MPa . Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal adotados são respectivamente iguais a 200000 MPa e $G=77000 \text{ MPa}$. A deformação por cisalhamento é dada através da teoria de Timoshenko. As imperfeições iniciais geométricas são assumidas iguais a zero e os apoios do pórtico são considerados como perfeitamente rotulados. A distribuição linear, tanto nas mesas quanto na alma, das tensões residuais com $\sigma_{rc}=0,3\sigma_y$, é considerada na análise.

CLARKE, M.J. in *Advanced Analysis of Steel Frames*, Chen, W. F. and Toma, S. (Eds) CRS Press, Boca Raton, 1994, cap. 6.

Para implementação dos dados do programa as vigas e os pilares foram divididos em 4 elementos iguais e as seções transversais foram divididas em 50 fatias, sendo 20 fatias e cada mesa e 10 fatias na alma, para considerar as tensões residuais.

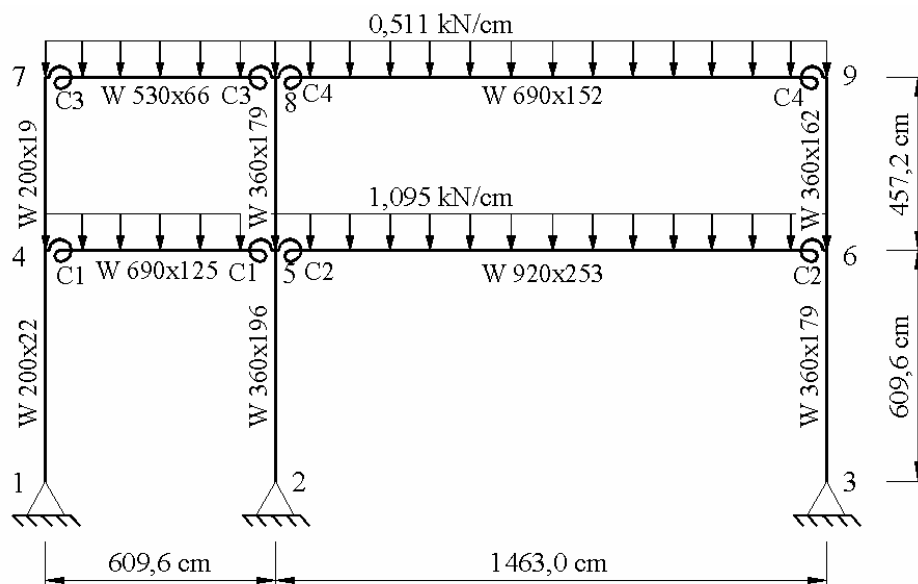


FIGURA 4.53 – Pórtico de dois andares e dois vãos adaptado de LIU et al. (2008)

O exemplo tem como objetivo investigar o efeito das ligações semirrígidas na estrutura até o seu colapso. Os resultados obtidos são comparados com os resultados apresentados por LIU et al. (2008). Dois casos de ligações são analisados: ligações flexíveis e ligações rígidas totalmente resistentes.

No primeiro caso são utilizadas as ligações *C1* e *C2* do exemplo anterior. Desse modo, a ligação *C1* é aplicada nas vigas do primeiro andar do pórtico e a ligação *C2* nas vigas do segundo andar. Como a classificação de uma ligação é função das dimensões da viga à qual ela está conectada, uma mesma ligação, em diferentes estruturas, pode apresentar classificações diferentes. Conforme BJORHOVDE et al. (1990), todas as ligações *C1* e *C2* são, neste exemplo, praticamente flexíveis, conforme mostra a Fig. 4.54.

A Tabela 4.13 apresenta a classificação das ligações *C1* e *C2* de acordo com o critério de rigidez estabelecido pelas normas brasileira e europeia e quanto à resistência ao momento fletor, estabelecido pela norma europeia.

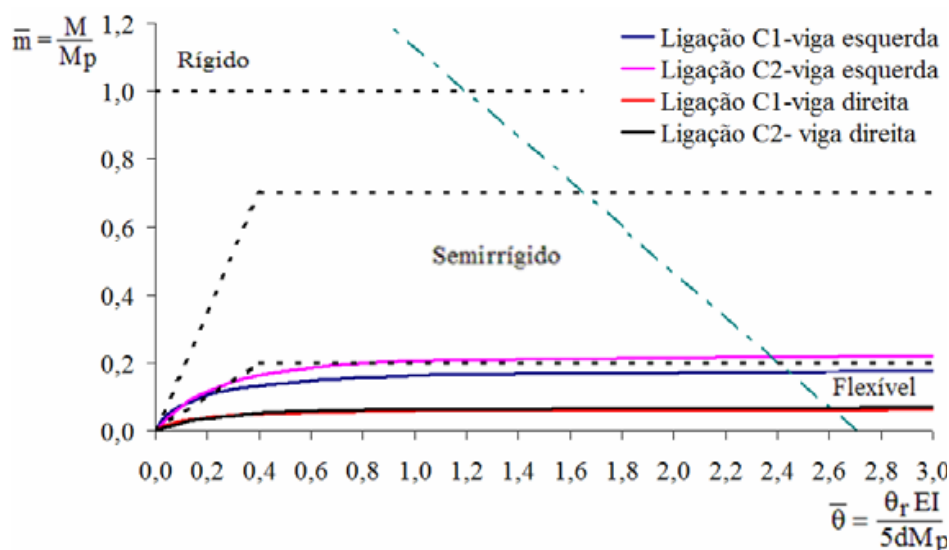


FIGURA 4.54 – Sistema de classificação das ligações segundo BJORHOVDE et al. (1990)

TABELA 4.13 – Classificação das ligações C1 e C2 quanto à rigidez rotacional e resistência ao momento fletor

Ligação	Rigidez	Resistência
	ABNT NBR 8800: 2008 EN 1993-1-8: 2005	EN 1993-1-8: 2005
C1 (nó 4 - viga 45)	Semirrígida	Totalmente Resistente
C1 (nó 5 - viga 45)	Semirrígida	Rotulada
C1 (nó 5 - viga 56)	Semirrígida	Rotulada
C1 (nó 6 - viga 56)	Semirrígida	Rotulada
C2 (nó 7 - viga 78)	Semirrígida	Totalmente Resistente
C2 (nó 8 - viga 78)	Semirrígida	Parcialmente Resistente
C2 (nó 8 - viga 89)	Semirrígida	Rotulada
C2 (nó 9 - viga 89)	Semirrígida	Rotulada

Pelo método de análise proposto, o pórtico atingiu o colapso para o fator de carga igual a $f_u=0,70$ (70% do carregamento majorado aplicado à estrutura), conforme mostra o gráfico da Fig. 4.55, do comportamento fator de carga-deslocamento lateral do nó 9. Considerando-se as ligações rígidas convencionais, o fator da carga de colapso aumentou para 1,08. Além da significativa mudança na carga última, houve uma grande redução no deslocamento lateral do pórtico. Observa-se também na Fig. 4.55, uma boa correlação entre os resultados obtidos por LIU et al. (2008) e aqueles obtidos neste trabalho.

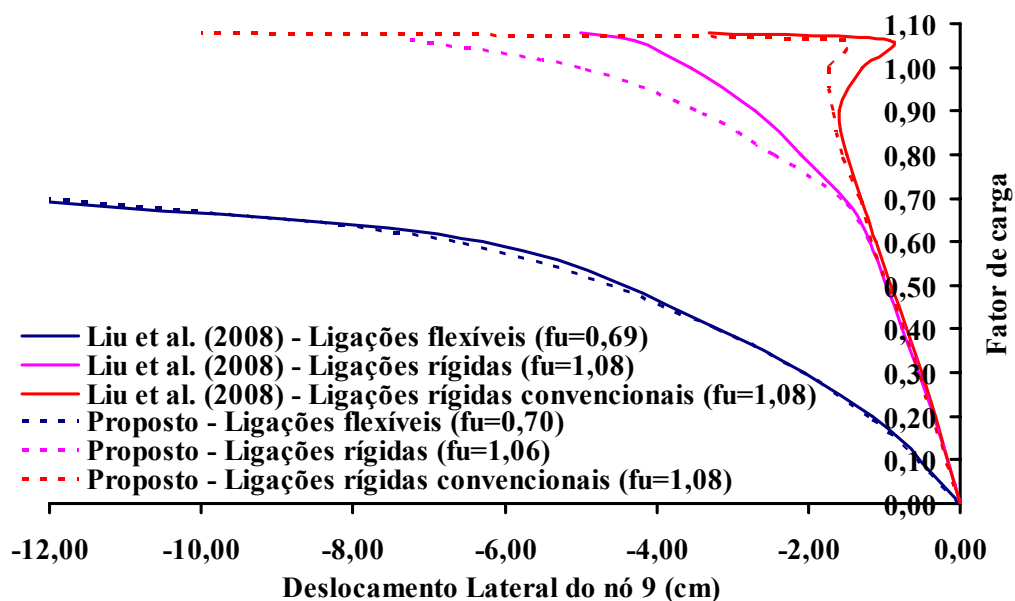


FIGURA 4.55 – Comportamento fator de carga-deslocamento lateral do nó 9 (cm)

As Figuras 4.56 e 4.57 mostram a distribuição da plasticidade nas barras para os pórticos considerando-se as ligações *C1* e *C2* e as ligações rígidas convencionais e, também, os trechos em que se situam as rigidezes das ligações. Pode-se observar que, como as ligações apresentam pouca capacidade resistente a momento fletor, nenhuma plastificação ocorre nas extremidades das vigas e, conseqüentemente, nos pilares (Fig. 4.56), portanto, o comportamento do pórtico é determinado pelas ligações. Porém, quando a ligação rígida convencional é adotada na análise (Fig. 4.57), a resistência plástica das barras determina o comportamento não linear do pórtico.

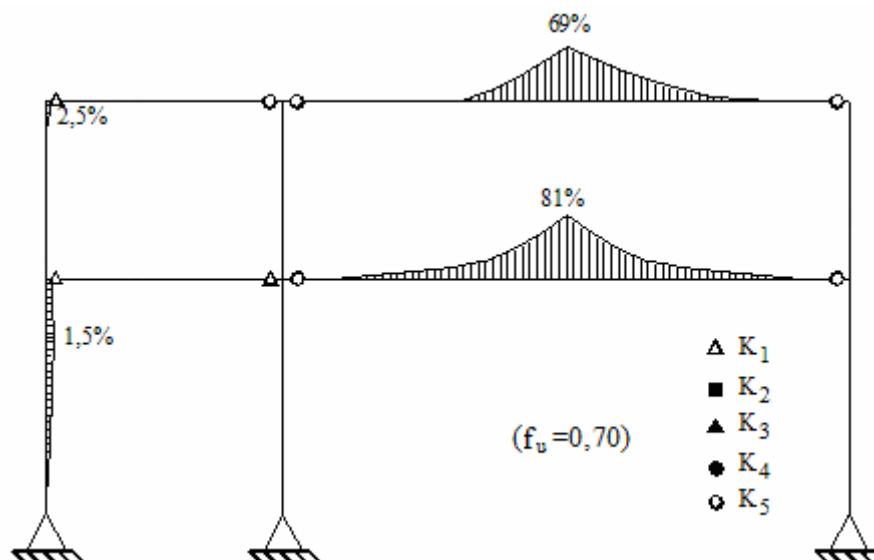


FIGURA 4.56 – Plastificação nas barras do pórtico semirrígido

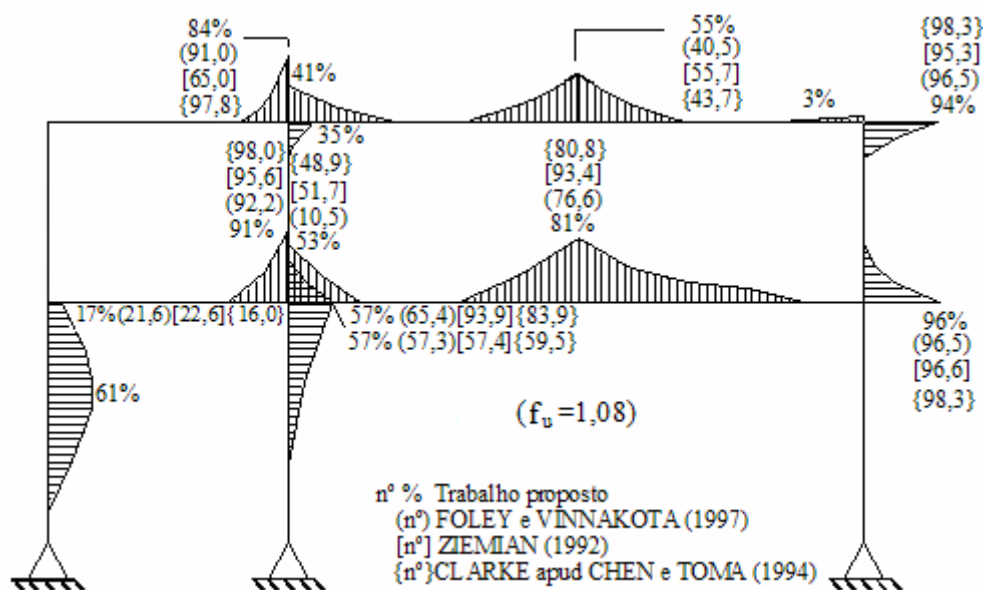


FIGURA 4.57 – Plastificação nas barras do pórtico rígido convencional

O colapso da estrutura com as ligações $C1$ e $C2$ ocorre pela formação de mecanismo de viga em ambos os andares, devido à plastificação no centro dos vãos das vigas maiores (5-6) e (8-9) e nas ligações de suas extremidades, que apresentam grandes rotações, situadas no trecho cinco da curva $M-\theta_r$. O sinal negativo do deslocamento do nó 9 na Fig. 4.55, indica a formação do mecanismo de viga. O colapso da estrutura com ligações rígidas convencionais ocorre devido ao mecanismo do nó 5, conforme sugere a inversão no sentido do deslocamento do nó a partir de 90% do carregamento aplicado.

Em termos práticos, quando as ligações $C1$ e $C2$ são adotadas, o pórtico apresenta deslocamentos excessivos que não satisfazem as exigências de projeto para o estado-limite de serviço. Dessa forma, para aumentar a rigidez e a resistência do pórtico, outras ligações são selecionadas, chamadas $C1$, $C2$, $C3$ e $C4$, conforme mostra a Fig. 4.53, mantendo-se as mesmas propriedades das vigas e dos pilares. Os parâmetros das novas ligações adotadas na análise estrutural são mostrados na Tab. 4.14, onde M_0 é o momento de referência e K_p a rigidez com encruamento da ligação.

O comportamento não linear dessas ligações, obtido pelo modelo de quatro parâmetros de KISHI et al. (2004) é, então, linearizado em cinco trechos para ser considerado no método de análise proposto, com pares de valores de M e θ_r , apresentados na Tab. 4.15 e comportamento não linear conforme mostra a Fig. 4.58.

TABELA 4.14 – Parâmetros das ligações semirrígidas de KISHI et al. (2004)

Ligação	M_p (10^3 kNcm)	M_u (10^3 kNcm)	M_0 (10^3 kNcm)	K_i (10^5 kNcm/rad)	K_p (10^5 kNcm/rad)	n
C1	100	174	60	1240	57	1,39
C2	274	325	162	15300	82	1,20
C3	39	87	26	893	30	1,18
C4	125	149	57	1020	46	1,69

TABELA 4.15 – Parâmetros das ligações C1 a C4 para o comportamento multilinear

Intervalo	Ligação C1		Ligação C2		Ligação C3		Ligação C4	
	M (kNcm)	θ_r (10^{-3} rad)	M (kNcm)	θ_r (10^{-3} rad)	M (kNcm)	θ_r (10^{-3} rad)	M (kNcm)	θ_r (10^{-3} rad)
1	16018	0,1443	30484	0,0224	7511	0,1029	14349	0,1483
2	38443	0,4877	78392	0,0798	17027	0,3682	36112	0,4774
3	58680	1,3666	126692	0,2443	25678	1,1402	54742	1,2153
4	72763	2,8985	150531	0,5686	32660	2,6840	64846	2,3248
5	173342	20,0000	324948	20,0000	86544	20,0000	149313	20,0000

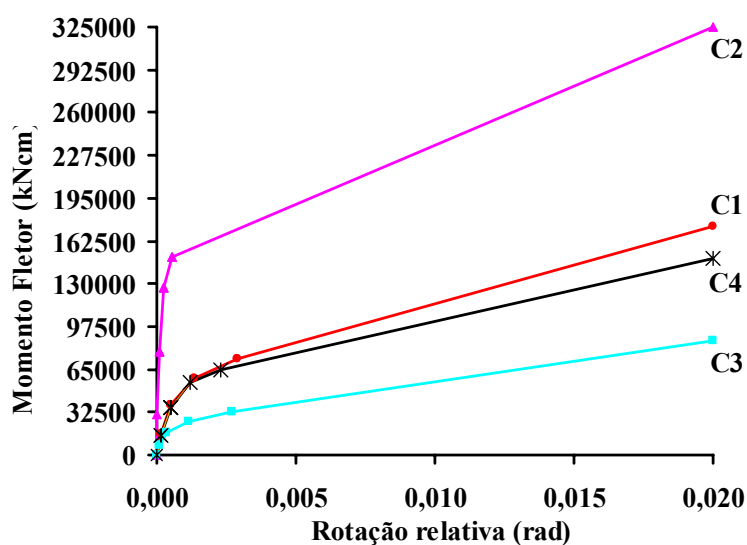


FIGURA 4.58 – Curvas momento x rotação multilinear das ligações C1, C2, C3 e C4

De acordo com os valores do momento plástico das vigas (M_p) e do momento último das ligações (M_u) as novas ligações C1, C2, C3 e C4 são classificadas como rígidas, conforme o critério de BJORHOVDE et al. (1990), mostrado na Fig. 4.59. Segundo o critério de rigidez estabelecido pelas normas brasileira, ABNT NBR 8800: 2008, e europeia, EN 1993-1-8: 2005, as ligações C1 a C4, são também classificadas como rígidas. Quanto à resistência, a norma europeia, classifica as ligações C1 a C4 como totalmente resistentes.

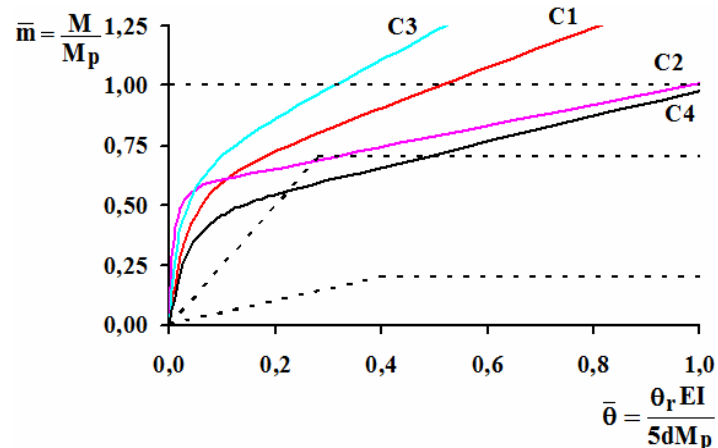


FIGURA 4.59 – Sistema de classificação de BJORHOVDE et al. (1990) para as ligações *C1*, *C2*, *C3* e *C4*

Voltando-se ao gráfico da Fig. 4.55, que mostra a curva fator de carga-deslocamento lateral do nó 9 do pórtico, considera-se também o comportamento com as novas ligações *C1* a *C4*. O fator de carga última, utilizando-se a análise inelástica avançada proposta é igual a $f_u = 1,06$, resultado muito próximo daquele obtido para o pórtico rígido convencional ($f_u = 1,08$). Observa-se que, a rigidez do pórtico com ligações rígidas *C1* a *C4* é consideravelmente maior do que a rigidez do pórtico com as ligações *C1* e *C2* e aproximadamente igual à rigidez do pórtico rígido convencional para o fator de carga $f_u \leq 0,65$.

O comportamento fator de carga-deslocamento do pórtico com ligações rígidas *C1* a *C4* não apresenta nenhuma inversão no diagrama quando o carregamento externo se aproxima do colapso estrutural, como acontece no pórtico rígido convencional. Observa-se, finalmente, uma boa correlação entre os resultados obtidos por LIU et al. (2008) e aqueles obtidos pelo proposto neste trabalho.

A Figura 4.60-a mostra a distribuição da plastificação nas barras do pórtico rígido considerando-se as ligações *C1* a *C4*, imediatamente anterior ao colapso. Nota-se que essa distribuição é muito diferente daquela obtida para o pórtico com ligações flexíveis, porém bastante semelhante à do pórtico rígido convencional. A Fig. 4.60-b mostra a distribuição da plastificação em algumas seções transversais das vigas e pilares que apresentam uma grande quantidade de fatias plastificadas e a Fig. 4.60-c mostra, esquematicamente, os trechos em que se situam as rigidezes das ligações.

O colapso do pórtico com ligações *C1* a *C4* ocorre devido à formação do mecanismo de viga do segundo andar (viga 8-9) combinado com o mecanismo do nó 5. A formação do mecanismo de viga do segundo andar (viga 8-9) ocorre devido à plastificação excessiva no centro do vão da viga e nas ligações de sua extremidade (ligações *C4*), que apresentam grandes rotações, situadas no trecho cinco da curva $M-\theta_r$. O mecanismo do nó 5 se dá pela plastificação excessiva das extremidades dos pilares que chegam nesse nó, assim como pela deformação excessiva das ligações *C1* e *C2* que são conectadas nesse nó 5. Essa combinação de mecanismos de colapso explica a não ocorrência da inversão do deslocamento do nó na curva da Fig. 4.55.

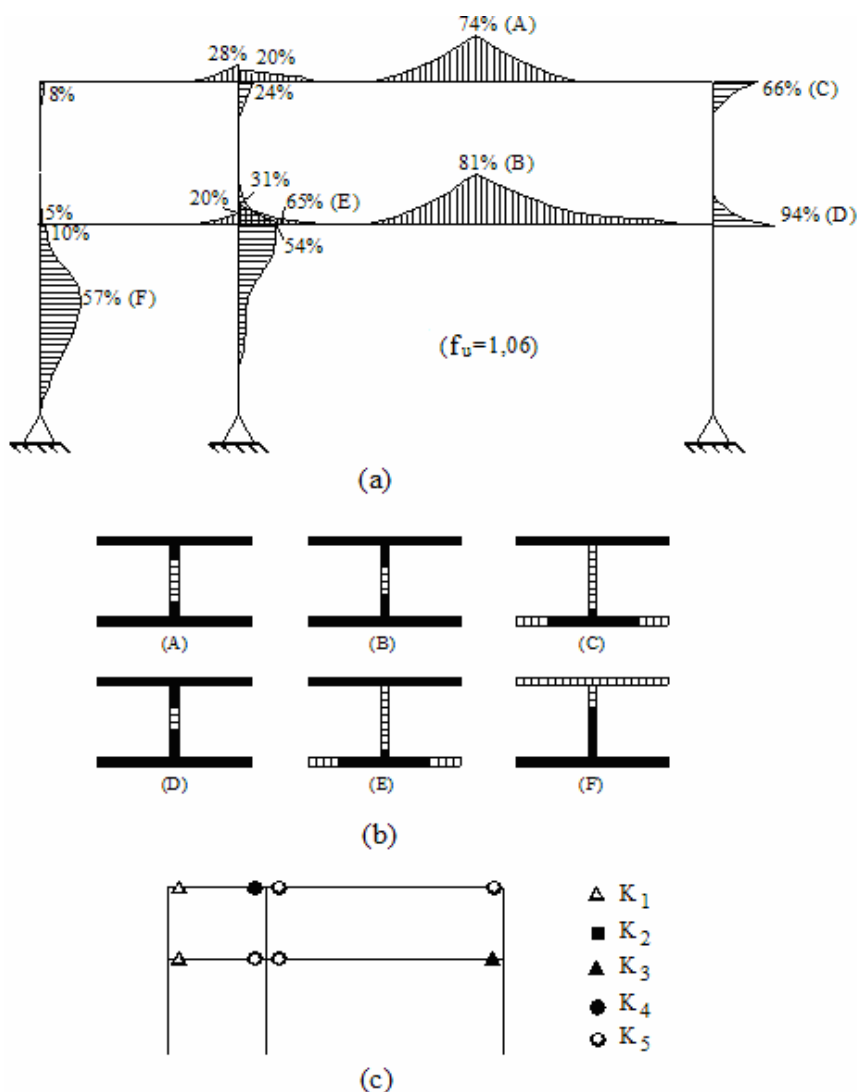


FIGURA 4.60 – Comportamento inelástico: (a) Plastificação nas barras, (b) Plastificação em seções transversais e (c) Estado de rigidez das ligações para a carga de colapso.

CAPÍTULO

5

ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE PÓRTICOS SEMIRRÍGIDOS CONFORME A NBR 8800 USANDO A ANÁLISE AVANÇADA

5.1 Considerações Iniciais

O *projeto estrutural* tem como objetivo conceber uma estrutura que atenda a todas as necessidades para as quais ela será construída, satisfazendo-se as questões de segurança, de utilização, econômicas e construtivas. A sua elaboração exige do engenheiro uma grande capacitação técnica para a realização da análise, dimensionamento e detalhamento dos modelos, constituindo-se em uma das etapas mais importantes na construção de uma estrutura.

Atualmente, a prática usual de projeto estabelecida pela norma brasileira ABNT NBR 8800: 2008 segue um procedimento com duas etapas: na primeira, os esforços solicitantes são determinados de acordo com a classificação da estrutura quanto à sua deslocabilidade, em geral usando-se a análise elástica em 2ª ordem. Depois, numa segunda etapa, são feitos os dimensionamentos das barras e das ligações da estrutura, utilizando-se os critérios da norma. Esse procedimento com duas etapas tem suas limitações, uma vez que a norma ainda separa a análise do dimensionamento. A análise elástica é usada para determinar os esforços solicitantes atuantes nas barras, enquanto que no dimensionamento de cada barra, tratada como um elemento isolado, os esforços

solicitantes resistentes são obtidos considerando-se a possibilidade de plastificação da seção transversal.

Dessa forma, através das análises em teoria de segunda ordem inelástica é possível modelar explicitamente o comportamento real de cada barra e então, considerar adequadamente a compatibilidade entre a análise e o dimensionamento do sistema estrutural e seus elementos.

A *Análise Avançada* é um método de análise que, de forma adequada, avalia simultaneamente a resistência e a estabilidade de um sistema estrutural como um todo. Esse tipo de análise consiste, basicamente, em introduzir no modelo numérico e nas formulações a serem adotados diversos fatores considerados relevantes na análise da estrutura como, principalmente, os efeitos não lineares decorrentes da plastificação da barra, os efeitos de 2ª ordem ($P-\Delta$ e $P-\delta$), a flexibilidade das ligações, as imperfeições geométricas e as tensões residuais.

O crescente avanço tecnológico na área da informática, tanto em hardware, quanto em software, tem propiciado o desenvolvimento de eficientes ferramentas computacionais baseadas em formulações teóricas rigorosas e consistentes, segundo a filosofia da *Análise Inelástica Avançada*, tornando viável a sua utilização em trabalhos de pesquisas e quiçá, num futuro próximo, nos escritórios de cálculo. Essa análise pode prever com bastante precisão os possíveis modos de falha de uma estrutura, apresentar um nível mais uniforme de segurança e proporcionar um maior índice de confiabilidade na análise e dimensionamento, ao se utilizar adequadamente os fatores de combinação das ações e os coeficientes de ponderação das resistências.

Visando adequar a *Análise Inelástica Avançada* proposta neste trabalho de modo a assegurar o nível de confiabilidade adotado pela ABNT NBR 8800: 2008, torna-se necessário considerar os coeficientes de ponderação das resistências prescritos e calibrar as tensões residuais segundo a curva de resistência à compressão da norma brasileira. Dessa forma, são apresentados os aspectos de projeto da norma brasileira, os procedimentos e calibrações para o dimensionamento de barras submetidas à tração, à

compressão, à flexão e aos esforços combinados, bem como as orientações para o dimensionamento considerando-se as ligações semirrígidas. Finalmente, estudos de casos para análise e dimensionamento de pórticos semirrígidos são apresentados para validar a *Análise Inelástica Avançada* proposta.

5.2 Aspectos de Projeto da NBR 8800 e Regras para a Análise Avançada

5.2.1 Combinação de Ações para o Método dos Estados-limites

Para que uma estrutura tenha um comportamento adequado e confiável é necessário que no seu dimensionamento nenhum estado-limite relevante seja excedido. O *Método dos Estados-limites*, adotado pela ABNT NBR 8800: 2008, utiliza uma sistemática de dimensionamento na qual a estrutura é verificada em várias situações extremas, caracterizadas pelos chamados *Estados-limites Últimos (ELU)* e *Estados-limites de Serviço (ELS)*.

Os *estados-limites últimos* são aqueles relacionados com a segurança, e sua ocorrência está sempre associada ao colapso parcial ou total da estrutura. No projeto em estruturas de aço, os estados-limites últimos são geralmente caracterizados, com maior frequência, pela ruptura por tração, pelo escoamento por tração ou por compressão, pela instabilidade global ou local por compressão e/ou por flexão, pela formação de mecanismos plásticos, entre outros.

No dimensionamento referente ao Estado-limite Último (ELU), as condições de segurança são expressas por desigualdade do tipo:

$$\theta(S_d, R_d) \geq 0 \quad (5.1)$$

onde S_d representa os valores de cálculo dos esforços solicitantes, obtidos com base nas combinações últimas de ações e R_d representa os valores de cálculo dos correspondentes esforços resistentes.

Quando a segurança é verificada isoladamente em relação a cada um dos esforços atuantes, as condições de segurança tomam a seguinte forma simplificada:

$$S_d \leq R_d \quad (5.2)$$

Os esforços solicitantes de cálculo S_d devem ser obtidos a partir de uma análise estrutural feita considerando-se a combinação de ações mais desfavorável.

As combinações últimas normais decorrem do uso previsto para a edificação e devem ser consideradas tantas combinações de ações quantas forem necessárias para a verificação das condições de segurança em relação a todos os estados-limites últimos aplicáveis. Para cada combinação, aplica-se a seguinte expressão:

$$\sum_{i=1}^m (\gamma_{gi} F_{Gi,k}) + \gamma_{q1} F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n (\gamma_{qj} \psi_{0j} F_{Qj,k}) \quad (5.3)$$

onde,

$F_{Gi,k}$ representa os valores característicos das ações permanentes;

$F_{Q1,k}$ é o valor característico da ação variável considerada principal para a combinação;

$F_{Qj,k}$ representa os valores característicos das ações variáveis que podem atuar concomitantemente com a ação variável principal;

γ_{gi} , γ_{q1} e γ_{qj} são os coeficientes de ponderação das ações permanentes, da ação variável principal e das demais ações variáveis;

ψ_{0j} são fatores de combinação para as ações variáveis utilizados para levar em conta a probabilidade reduzida de ações variáveis de diferentes tipos atuarem com suas intensidades máximas, simultaneamente com a ação variável principal.

Os esforços resistentes de cálculo R_d são dados por:

$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_a} \quad (5.4)$$

onde R_k é o esforço resistente nominal para o ELU em consideração e γ_a é o coeficiente de ponderação da resistência àquele ELU. No caso do aço estrutural, são definidos dois coeficientes, γ_{a1} e γ_{a2} , o primeiro para os estados-limites últimos relacionados ao escoamento e à instabilidade e o segundo à ruptura.

A ocorrência dos *Estados-limites de Serviço* está relacionada com o desempenho da estrutura e sua ocupação, sob condições normais de utilização, tais como deslocamentos (flechas), deformações permanentes e vibrações.

Para que não ocorram os estados-limites de serviço, certos deslocamentos da estrutura, determinados a partir de uma combinação de ações de serviço, não podem superar valores máximos requeridos, estabelecidos pela ABNT NBR 8800: 2008. Essa condição é expressa por desigualdades do tipo:

$$S_{ser} \leq S_{lim} \quad (5.5)$$

onde,

S_{ser} representa os valores dos efeitos estruturais de interesse, obtidos com base nas combinações de serviço das ações;

S_{lim} representa os valores limites adotados para esses efeitos, fornecidos pela norma.

As combinações de ações de serviço, de acordo com seu período de atuação sobre a estrutura, são classificadas em *quase permanentes*, *frequentes e raras*.

As *combinações quase permanentes* são definidas como aquelas que podem atuar de ordem da metade do período da vida útil da estrutura. Essas combinações são utilizadas para os efeitos de longa duração e quando se verifica apenas a aparência da estrutura. Nessa situação, os deslocamentos não provocam danos a outros componentes da construção e a combinação de ações é dada pela Eq. (5.6):

$$\sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + \sum_{j=1}^n (\psi_{2j} F_{Qj,k}) \quad (5.6)$$

As *combinações frequentes*, dada pela Eq. (5.7), são aquelas que se repetem muitas vezes durante a vida da estrutura, da ordem de 10^5 vezes em 50 anos, ou que tem uma duração total igual a uma parte não desprezável desse período, da ordem de 5%. Essas combinações são utilizadas para os estados-limites reversíveis, isto é, que não causam danos permanentes à estrutura ou a outros componentes da construção, incluindo os relacionados ao conforto dos usuários a ao funcionamento de equipamentos, tais como vibrações excessivas, aberturas de fissuras, etc.

$$\sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + \psi_1 F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n (\psi_{2j} F_{Qj,k}) \quad (5.7)$$

As *combinações raras*, dada pela Eq. (5.8), são aquelas que podem atuar no máximo algumas horas durante o período de vida da estrutura. Essas combinações são utilizadas para os estados-limites irreversíveis, isto é, que causam danos permanentes à estrutura ou a outros componentes da construção e para aqueles relacionados ao funcionamento adequado da estrutura.

$$\sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n (\psi_{1j} F_{Qj,k}) \quad (5.8)$$

Nas combinações de ações de serviço, ψ_{1j} e ψ_{2j} são fatores de redução para as ações variáveis.

5.2.2 Lei Constitutiva para o Aço

Neste trabalho, admite-se para o modelo constitutivo do aço, o comportamento trilinear para as relações tensão-deformação, conforme mostra a Fig. 5.1. Nesse gráfico, o trecho *OA* corresponde à fase elástica do material que se inicia na origem até este atingir a tensão f_y , chamada de resistência ao escoamento. Nesse trecho as tensões são proporcionais às deformações, sendo ε_y a deformação correspondente ao início do

escoamento, determinada pela relação entre a resistência ao escoamento e o módulo de elasticidade longitudinal E , igual a 200000 MPa . O trecho AB corresponde à fase plástica e define o patamar de escoamento do material. Nesse trecho a deformação aumenta consideravelmente, com tensão constante f_y , até atingir o valor da deformação associada ao início do encruamento ε_e . Para aços estruturais ε_e é da ordem de 10 a $20\varepsilon_y$ (NEAL, 1977). Neste trabalho, adota-se ε_e igual a $12\varepsilon_y$.

O trecho BC representa a fase de encruamento do material, onde o aço sofre um revigoramento e a tensão volta a crescer com o aumento da deformação até atingir a tensão limite f_{lim} igual a $1,10f_y$. A deformação correspondente a essa tensão é definida neste trabalho como deformação limite ε_{lim} igual a $0,04$, acima da qual o material está sujeito à grandes deformações, conforme também é adotado por BATHE (1996). A tensão limite $f_{lim} = 1,10f_y$ foi estabelecida com base em curvas tensão \times deformação típicas apresentadas em SALMON (1996).

A partir do ponto C o comportamento do material ocorre em regime de grandes deformações até atingir a resistência última f_u com deformação última $\varepsilon_u = 0,20$, conforme mostra a linha tracejada do gráfico. Neste trabalho as análises serão realizadas em regime de pequenas deformações limitando-se a deformação do material a $\varepsilon_{lim} = 0,04$.

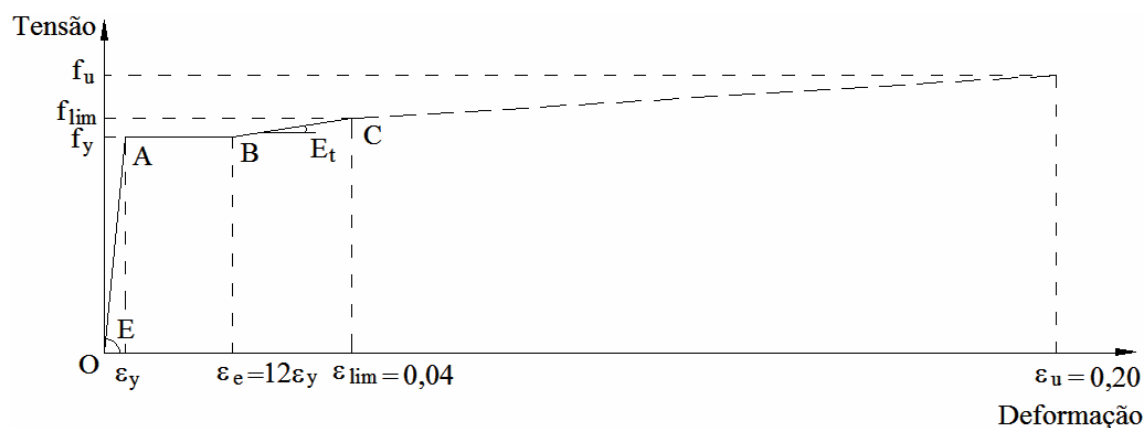


FIGURA 5.1 – Relação tensão-deformação para aço estrutural

A Tabela 5.1 mostra os valores característicos do modelo constitutivo para os aços estruturais usualmente adotados no Brasil, que atendem às condições relacionadas às propriedades mecânicas exigidas pela norma ($f_y \leq 450 \text{ MPa}$ e $f_u/f_y \geq 1,18$)

TABELA 5.1 – Propriedades características dos aços estruturais

Denominação	f_y (MPa)	f_{lim} (MPa)	f_u (MPa)	ε_y	ε_e	ε_{lim}	ε_u	E (MPa)	E_t (MPa)
ASTM A36	250	275	400	0,001250	0,0150	0,04	0,20	200000	1000
ASTM A572-G.50	345	380	450	0,001725	0,0207	0,04	0,20	200000	1813
ASTM A242	345	380	485	0,001725	0,0207	0,04	0,20	200000	1813
USI CIVIL 300	300	330	400	0,001500	0,0180	0,04	0,20	200000	1364
USI CIVIL 350	350	385	500	0,001750	0,0210	0,04	0,20	200000	1842
COS CIVIL 300	300	330	400	0,001500	0,0180	0,04	0,20	200000	1364
COS CIVIL 350	350	385	490	0,001750	0,0210	0,04	0,20	200000	1842

Admite-se que, até a deformação atingir a deformação limite ε_{lim} , o modelo constitutivo seja válido tanto para a tração quanto para a compressão. O modelo constitutivo relacionado à tensão de cisalhamento é similar ao modelo constitutivo para as tensões normais, onde se definem o módulo de elasticidade transversal $G = 77000 \text{ MPa}$, a resistência ao escoamento por cisalhamento $f_{vy} \cong 0,60 f_y$, e a resistência à ruptura por cisalhamento $f_{vu} \cong 0,60 f_u$.

5.2.3 Seções Transversais Compactas

As barras formadas por seções transversais compactas são adequadas para a análise inelástica porque possuem significativa capacidade de rotação após o início do escoamento, suficiente para permitir a redistribuição de forças devido à formação de mecanismos plásticos.

A compacidade das seções transversais deve ser verificada para assegurar que a flambagem local não limite a capacidade de rotação da barra. Neste trabalho, para seções I e H , laminadas ou soldadas, as limitações das dimensões de mesas e de almas para a análise plástica são baseadas nos critérios adotados pela ABNT NBR 8800: 2008.

5.2.4 Imperfeições Geométricas

As imperfeições relativas ao processo de fabricação das peças, bem como as imperfeições de montagem das estruturas, são fatores importantes que influenciam a resistência dos pilares. Essas imperfeições são inseridas de forma explícita no modelo.

Neste trabalho, as imperfeições relativas ao processo de fabricação das peças serão aproximadas pela forma linear, com a máxima amplitude da imperfeição inicial ocorrendo no meio do vão, tomada igual a $L/1000$ ou $L/1500$, onde L é o comprimento do pilar. As imperfeições de montagem serão levadas em conta nas análises admitindo, em cada andar, um deslocamento horizontal relativo entre os níveis inferior e superior de $h/333$, onde h é a altura do andar considerado.

5.2.5 Instabilidade lateral

Nos exemplos deste capítulo, as barras da estrutura devem ser suficientemente contraventadas fora do plano, para garantir uma adequada capacidade de rotação, tendo em vista a análise inelástica. Portanto, a estabilidade fora do plano das estruturas sempre será garantida por alguma contenção apropriada.

5.2.6 Não linearidades geométrica, do material e da ligação

A formulação geometricamente exata desenvolvida neste trabalho permite considerar nas análises ambas as não linearidades: a geométrica e do material. Os efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$, oriundos da análise não linear geométrica, são contemplados na análise, considerando-se a influência do cisalhamento através da teoria de Timoshenko. A não linearidade do material é formulada pelo método da plasticidade distribuída (método da zona plástica), que permite acompanhar o processo de plastificação ao longo da altura da seção transversal e ao longo do comprimento da barra. As tensões residuais, responsáveis pelo início precoce do comportamento não linear do material são levadas em conta na análise, conforme apresentado na seção 3.4.5.

As ligações semirrígidas são consideradas na análise numérica avançada através de elementos de mola, cuja rigidez rotacional é obtida por meio de curvas multilíneas $M-\theta$, capazes de descrever todo o comportamento não linear da ligação.

5.3 Resistência à Tração – Lei Constitutiva para Projeto

5.3.1 Condições Específicas para o Dimensionamento de Barras Submetidas à Tração

Segundo a ABNT NBR 8800:2008, no dimensionamento à força axial de tração deve ser atendida a seguinte condição:

$$N_{t,Sd} \leq N_{t,Rd} \quad (5.9)$$

onde, $N_{t,Sd}$ é a força axial de tração solicitante de cálculo e $N_{t,Rd}$ é a força axial de tração resistente de cálculo.

A força resistente de cálculo $N_{t,Rd}$ é dada pelo menor dos valores obtidos, considerando-se os estados-limites últimos de escoamento da seção bruta (ESB) e de ruptura da seção líquida (RSL). Para o estado-limite de escoamento da seção bruta, a força axial de tração resistente de cálculo é expressa por:

$$N_{t,Rd} = \frac{A_g f_y}{\gamma_{al}} = \frac{A_g f_y}{1,10} \quad (5.10)$$

onde A_g é a área bruta da seção transversal da barra, f_y a resistência ao escoamento do aço à tensão normal e γ_{al} o coeficiente de ponderação da resistência para o estado-limite de escoamento da seção bruta, igual a 1,10.

Para o estado-limite de ruptura da seção líquida efetiva, a força axial de tração resistente de cálculo é dada por:

$$N_{t,Rd} = \frac{A_e f_u}{\gamma_{a2}} = \frac{A_e f_u}{1,35} \quad (5.11)$$

onde A_e é a área líquida efetiva da seção transversal da barra, f_u a resistência à ruptura do aço à tração e γ_{a2} o coeficiente de ponderação da resistência para o estado-limite último de ruptura da área líquida efetiva, igual a 1,35.

Portanto, observa-se que no dimensionamento à tração a lei constitutiva tem um papel fundamental na verificação dos estados-limites últimos envolvidos. Dessa forma, com o objetivo de se adequar o programa desenvolvido à análise avançada, será verificada a precisão do programa com relação à lei constitutiva característica do aço para, em seguida, se definir a curva de resistência a ser utilizada para o dimensionamento.

5.3.2 Lei Constitutiva Característica

Para se alcançar o objetivo proposto, considere a estrutura mostrada na Fig. 5.2, onde as barras AD , BD e CD apresentam a mesma seção transversal, dada pelo perfil soldado VE 150x13. A estrutura é analisada para dois tipos de aços: $A36$ e $A572$ -Grau 50. O aço estrutural exibe um comportamento não linear com a curva característica trilinear, conforme mostrado na Fig. 5.1. Os valores das tensões e deformações que definem os trechos, elástico e plástico com encruamento são apresentados na Tab. 5.1. Uma força vertical $P=1000 \text{ kN}$ é aplicada de forma incremental no ponto D da estrutura, que apresenta $L=200 \text{ cm}$ e $\theta = 45^\circ$. Na análise numérica as barras são formadas por apenas um elemento e a seção transversal é dividida em 20 fatias, sendo uma para cada mesa e 18 para a alma.

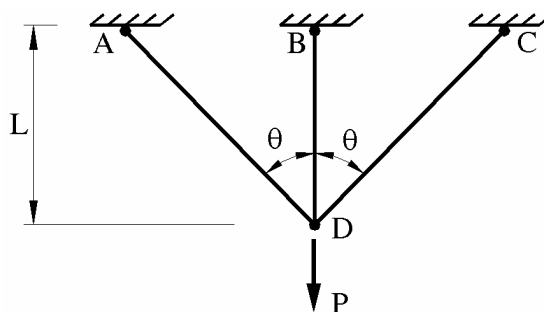


FIGURA 5.2 – Treliça hiperestática com 3 barras

Na Tab. 5.2 são apresentados os resultados da tensão normal e da deformação longitudinal nas barras da treliça até o seu colapso, obtidos pela análise numérica. Na Fig. 5.3 são apresentados em forma de gráfico, para as barras $AD = CD$ e BD , os resultados da análise numérica, comparativamente com a curva da lei constitutiva característica para o aço *ASTM A36*.

TABELA 5.2 – Resultados da análise numérica considerando o aço *ASTM A36*

$$(\varepsilon_y = 0,00125 \text{ e } \varepsilon_e = 0,0150)$$

ASTM A36				
P (%)	Barras AD e CD		Barra BD	
	Tensao (kN/cm ²)	Deformação (cm/cm)	Tensao (kN/cm ²)	Deformação (cm/cm)
0,0	0,000	0,00000	0,000	0,00000
10,0	1,811	0,00009	3,622	0,00018
30,0	5,433	0,00027	10,864	0,00054
50,0	9,054	0,00045	18,104	0,00091
69,5	12,699	0,00063	25,000	0,00127
80,0	17,283	0,00086	25,000	0,00173
90,0	21,646	0,00108	25,000	0,00216
98,5	25,000	0,00875	25,242	0,01742
100,0	25,000	0,01275	26,034	0,02534
101,0	25,026	0,01526	26,530	0,03030
102,0	25,192	0,01692	26,856	0,03356
103,5	25,440	0,01940	27,343	0,03843
104,0				

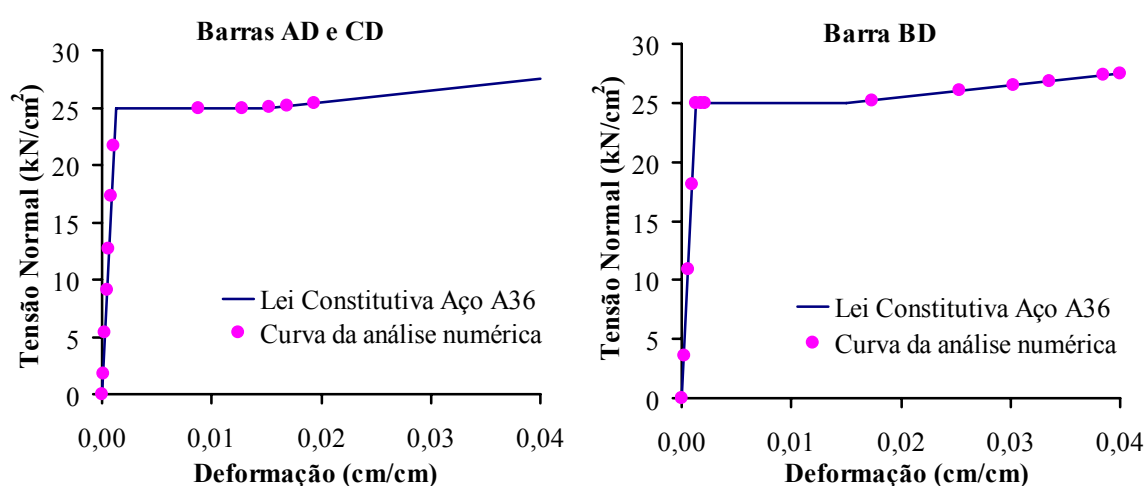


FIGURA 5.3 – Lei constitutiva característica para o aço *ASTM A36* e curva da análise numérica

Observa-se na Tab. 5.2 e na Fig. 5.3 que, para valores menores do que 69,5% do carregamento todas as barras trabalham em regime elástico contribuindo para a rigidez do sistema. A partir dessa carga, a barra *BD* escoar, permanecendo com a tensão constante de 25 kN/cm^2 e deixando de contribuir para a rigidez da estrutura ($E_t = 0$). Apenas as barras *AD* e *CD* resistem aos esforços adicionais. Quando o carregamento atinge 98,5%, as barras *AD* e *CD* também começam a escoar. Entretanto, para esse mesmo nível de carga, a barra *BD* entra na fase de encruamento, fazendo com que apenas esta contribua para a rigidez da estrutura. Com 101% do carregamento, todas as barras se encontram na fase de encruamento, voltando a contribuir para a rigidez da estrutura, com módulo tangente igual 100 kN/cm^2 , até o seu colapso com 104% de carga ($P_u=1040 \text{ kN}$), que ocorre após grandes deformações da barra *BD*, superando a deformação limite de 0,04.

Neste exemplo, o encruamento do aço é responsável por um aumento de 5% na carga de colapso, uma vez que, a carga máxima que a treliça suporta levando-se em conta o comportamento elastoplástico perfeito é de apenas 990 kN , que representa 99% da carga aplicada no ponto *D*.

Conforme mostra a Fig. 5.3, os resultados de tensão e deformação obtidos pelo programa, caminham sobre a curva da lei constitutiva do material, confirmando a precisão do programa PPLANLEP.

Analogamente, considerando-se agora o aço *ASTM A572 - Grau 50*, são apresentados na Tab. 5.3 os resultados numéricos da tensão normal e da deformação longitudinal nas barras da treliça até o seu colapso. Na Fig. 5.4 são apresentados graficamente, os resultados da análise numérica, comparativamente com a curva da lei constitutiva característica do aço usado.

Observa-se na Tab. 5.3 e na Fig. 5.4 que, para valores menores do que 95,5% do carregamento todas as barras trabalham em regime elástico. A partir desta carga, a barra *BD* escoar, permanecendo com a tensão constante de $34,5 \text{ kN/cm}^2$ e deixando de contribuir para a rigidez da estrutura ($E_t = 0$). Apenas as barras *AD* e *CD* resistem aos esforços adicionais. Quando o carregamento atinge 135%, as barras *AD* e *CD* também

começam a escoar. Com 136% do carregamento, a barra *BD* entra na fase de encruamento, fazendo com que apenas esta contribua para a rigidez da estrutura, com módulo tangente igual 181 kN/cm^2 . A estrutura entra em colapso com 142% da carga aplicada ($P_u=1420 \text{ kN}$), que ocorre após grandes deformações da barra *BD*, superando a deformação limite de 0,04, enquanto as barras *AD* e *CD* permanecem no patamar de escoamento.

TABELA 5.3 – Resultados da análise numérica considerando o aço *ASTM A572 – Grau 50* ($\varepsilon_y = 0,001725$ e $\varepsilon_e = 0,0207$)

ASTM A572 - Grau 50				
P (%)	Barras AD e CD		Barra BD	
	Tensao (kN/cm ²)	Deformação (cm/cm)	Tensao (kN/cm ²)	Deformação (cm/cm)
0,0	0,000	0,00000	0,000	0,00000
10,0	1,811	0,00009	3,622	0,00018
30,0	5,433	0,00027	10,864	0,00054
50,0	9,054	0,00045	18,104	0,00091
80,0	14,486	0,00072	28,962	0,00145
95,5	17,342	0,00087	34,500	0,00173
100,0	19,306	0,00097	34,500	0,00193
110,0	23,668	0,00118	34,500	0,00237
120,0	28,029	0,00140	34,500	0,00280
130,0	32,388	0,00162	34,500	0,00324
135,0	34,500	0,00368	34,500	0,00735
136,0	34,500	0,01114	34,765	0,02216
140,0	34,500	0,01726	36,956	0,03424
141,5	34,500	0,01957	37,778	0,03877
142,0				

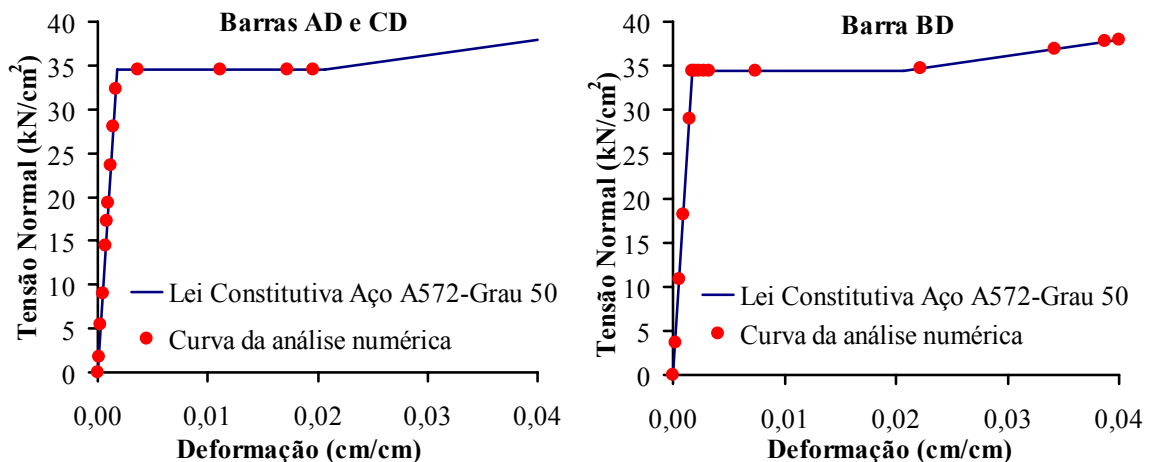


FIGURA 5.4 – Lei constitutiva característica para o aço *ASTM 572-Grau 50* e curva da análise numérica

Neste exemplo, o encruamento do aço é responsável por um aumento de 4% na carga de colapso, uma vez que, a carga máxima que a treliça suporta levando-se em conta o comportamento elastoplástico perfeito é de apenas 1365 kN, que representa 136,5% da carga aplicada no ponto D.

Analogamente ao caso anterior, os resultados obtidos pelo programa acompanharam a lei constitutiva do material, desde a fase inicial do carregamento até o colapso da estrutura, novamente indicando a precisão da análise proposta.

5.3.3 Definição da Lei Constitutiva para Projeto

Visando assegurar o nível de confiabilidade adotado pela norma brasileira, a lei constitutiva para projeto será obtida dividindo-se os parâmetros f_y e f_{lim} pelo coeficiente de ponderação γ_{al} para verificações relacionadas ao estado-limite de escoamento da seção bruta. Os valores das deformações associadas ao início do escoamento, ε_y , ao início do encruamento, ε_e , e à deformação limite, ε_{lim} , permanecem os mesmos.

A Tabela 5.4 apresenta as principais propriedades dos aços anteriormente mencionados, a serem consideradas na lei constitutiva de projeto.

TABELA 5.4 – Propriedades resistentes de cálculo dos aços estruturais

Denominação	f_{yd} (MPa)	f_{limd} (MPa)	ε_y	ε_e	ε_{lim}	E (MPa)	E_t (MPa)
ASTM A36	227	250	0,001250	0,0150	0,04	181818	909
ASTM A572-G.50	314	345	0,001725	0,0207	0,04	181818	1649
ASTM A242	314	345	0,001725	0,0207	0,04	181818	1649
USI CIVIL 300	273	300	0,001500	0,0180	0,04	181818	1240
USI CIVIL 350	318	350	0,001750	0,0210	0,04	181818	1675
COS CIVIL 300	273	300	0,001500	0,0180	0,04	181818	1240
COS CIVIL 350	318	350	0,001750	0,0210	0,04	181818	1675

A Figura 5.5 mostra as curvas de resistência, característica e de projeto, para alguns dos aços estruturais estudados.

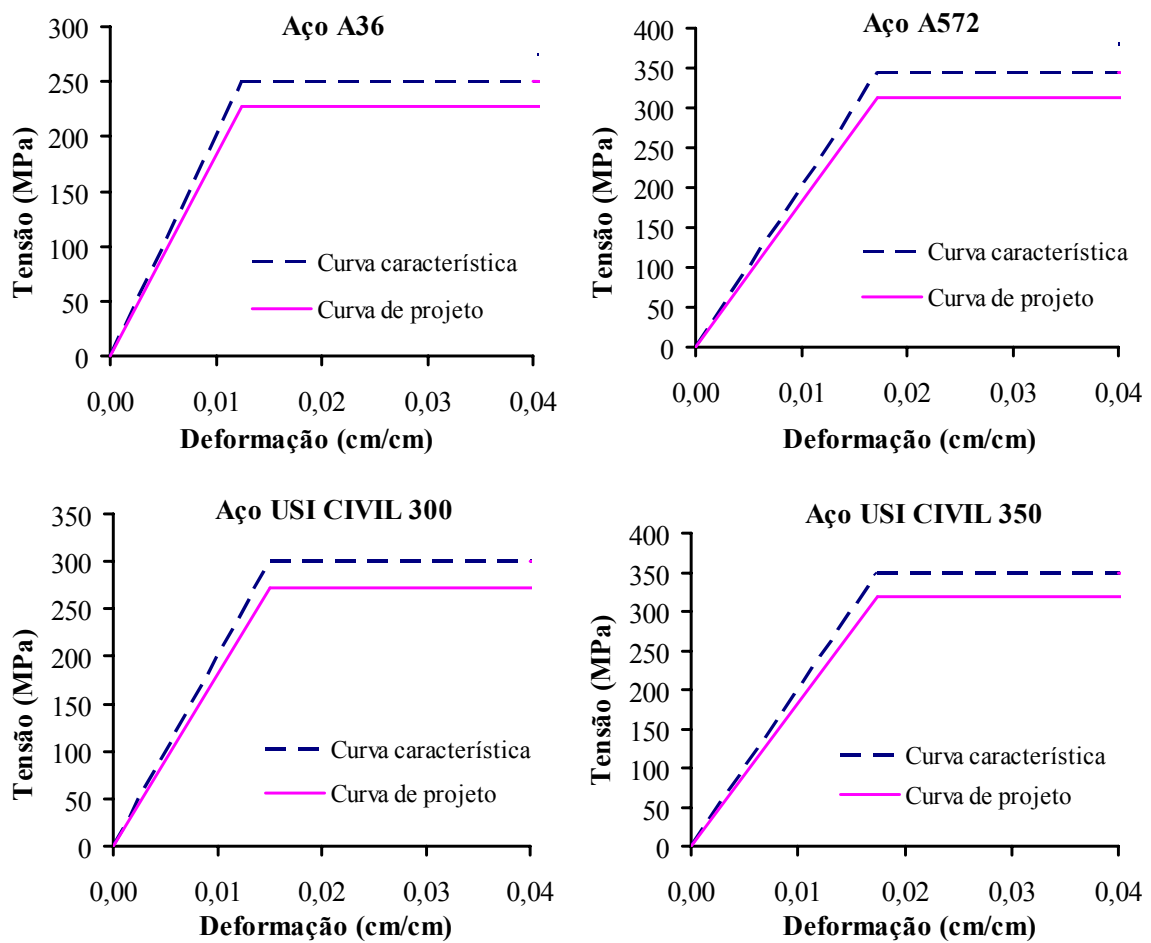


FIGURA 5.5 – Leis constitutivas característica e de projeto para aços estruturais

5.4 Resistência à Compressão

5.4.1 Condições Específicas para o Dimensionamento de Barras Submetidas à Compressão

Segundo a ABNT NBR 8800: 2008, o dimensionamento aos estados-limites últimos de uma barra comprimida, a força axial de compressão solicitante de cálculo $N_{c,Sd}$, obtida com a combinação de ações de cálculo apropriada, deve ser menor que a força axial de compressão resistente de cálculo $N_{c,Rd}$, conforme a Eq. (5.12):

$$N_{c,Sd} \leq N_{c,Rd} \quad (5.12)$$

A força axial de compressão resistente de cálculo de uma barra deve ser determinada pela expressão:

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}} \quad (5.13)$$

onde o numerador representa a força axial resistente nominal e γ_{a1} o coeficiente de ponderação da resistência, igual a 1,10. No numerador, χ é o fator de redução da resistência à compressão associado à instabilidade global e Q o fator de redução total relacionado à flambagem local.

Neste trabalho, o fator Q será considerado igual a 1, uma vez que, as barras são formadas por seções compactas, adequadas para a análise inelástica. Portanto, os estados-limites últimos possíveis são a instabilidade global ou o escoamento da seção transversal.

Na prática, a resistência das barras comprimidas é significativamente influenciada, não somente pelo tipo de material e pelas características geométricas da seção transversal, como também pela distribuição e magnitude das tensões residuais e pela imperfeição geométrica inicial.

Dessa forma, esta seção apresenta um estudo da influência das tensões residuais e das imperfeições geométricas iniciais na resistência de pilares axialmente comprimidos, com base nos procedimentos de dimensionamento à compressão estabelecidos pela ABNT NBR 8800: 2008, visando assegurar, na análise avançada proposta, o nível de confiabilidade da norma brasileira.

5.4.2 Influência das Tensões Residuais e das Imperfeições Geométricas Iniciais na Resistência de Pilares Axialmente Comprimidos

A Figura 5.6 mostra um pilar birrotulado constituído pelo perfil laminado $W 200 \times 46,1$, analisado com os seguintes índices de esbeltez 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180 e 200. A distribuição linear da tensão residual, tanto na alma quanto nas mesas, para o

perfil laminado e uma curvatura inicial, aproximada pela forma linear com amplitude da imperfeição inicial ocorrendo no meio do vão, tomada igual a $L/1000$, onde L é o comprimento do pilar, são consideradas neste exemplo.

O comprimento do pilar é dividido em 10 elementos iguais e a seção transversal dividida em 50 fatias, sendo 20 fatias para cada mesa e 10 para a alma. O aço escolhido é o *ASTM A36*, com a curva tensão-deformação característica apresentada anteriormente na Fig. 5.1 e propriedades na Tab. 5.1. O valor da tensão residual de compressão máxima σ_{rc} é adotado como sendo $0,3\sigma_y$, conforme fazem CHEN e TOMA (1994), CHEN et al. (1996), KIM e CHEN (1996a, 1996b), KANCHANALAI (1977), entre outros. O carregamento foi aplicado gradualmente com incrementos de $0,5\%$ até a carga de escoamento do perfil, $N_y=1442,30 \text{ kN}$.

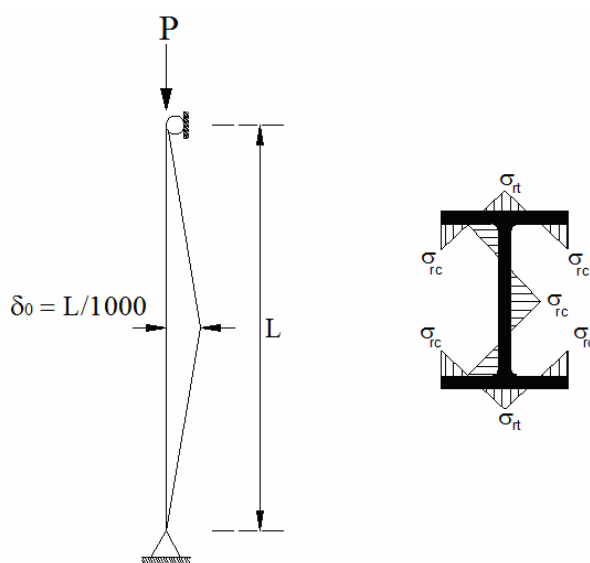


FIGURA 5.6 – Pilar birrotulado com imperfeição inicial e tensão residual

As Figuras 5.7 e 5.8 mostram os gráficos adimensionais das curvas de resistência última em função do índice de esbeltez reduzido ($\lambda_0 = \lambda/\lambda_{lim}$) para os eixos de maior e de menor inércia, respectivamente. Nas Tabs. 5.5 e 5.6, apresentam-se os resultados numéricos das resistências máximas, para as situações de: pilar ideal ($\delta_0 = 0$ e $\sigma_{rc} = 0$), pilar com somente tensões residuais ($\delta_0 = 0$ e $\sigma_{rc} = -0,30\sigma_y$), pilar com apenas imperfeição geométrica inicial ($\delta_0 = L/1000$ e $\sigma_{rc} = 0$) e o pilar considerando

os efeitos combinados ($\delta_0 = L/1000$ e $\sigma_{rc} = -0,30\sigma_y$), para os eixos de maior e menor inércia.

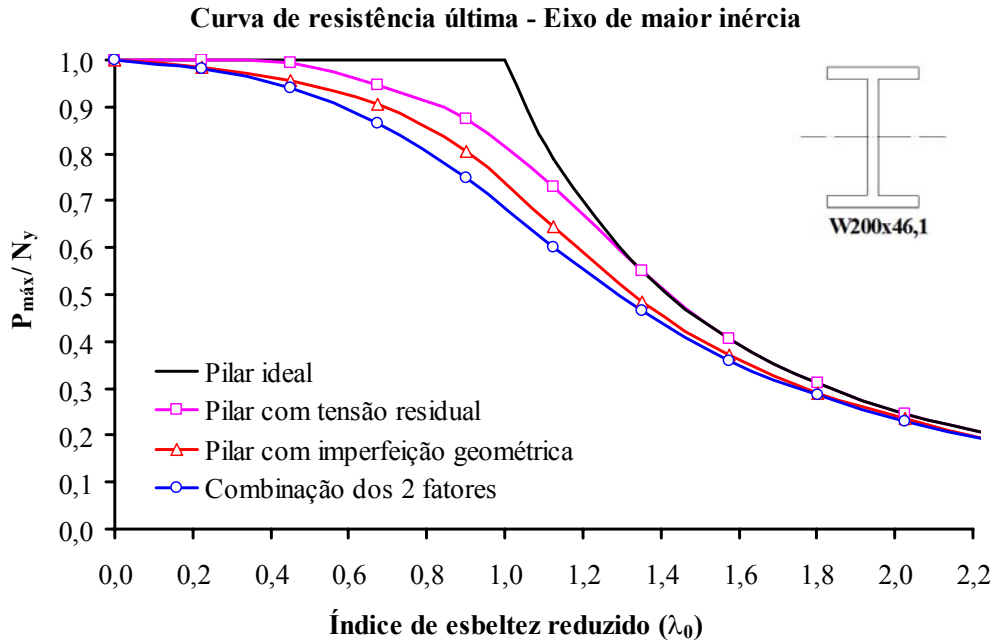


FIGURA 5.7 – Curva de resistência última considerando o eixo de maior inércia

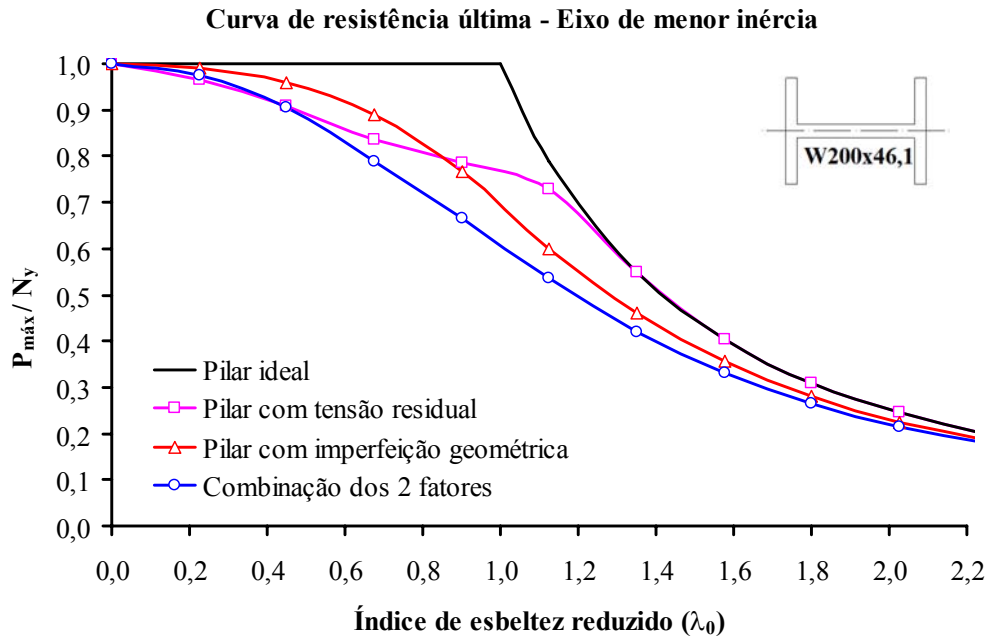


FIGURA 5.8 – Curva de resistência última considerando o eixo de menor inércia

TABELA 5.5 – Resistências máximas considerando-se o eixo de maior inércia

Eixo de Maior Inércia					
λ	λ_0	$P_{m\acute{a}x}/N_y$			
		$\delta_0 = 0$	$\delta_0 = 0$	$\delta_0 = L/1000$	$\delta_0 = L/1000$
		$\sigma_{rc} = 0$	$\sigma_{rc} = -0,30\sigma_y$	$\sigma_{rc} = 0$	$\sigma_{rc} = -0,30\sigma_y$
0	0,00	1,000	1,000	1,000	1,000
20	0,23	1,000	1,000	0,985	0,980
40	0,45	1,000	0,995	0,955	0,940
60	0,68	1,000	0,945	0,905	0,865
80	0,90	1,000	0,875	0,805	0,750
100	1,13	0,790	0,730	0,645	0,600
120	1,35	0,550	0,550	0,485	0,465
140	1,58	0,405	0,405	0,370	0,360
160	1,80	0,310	0,310	0,290	0,285
180	2,03	0,245	0,245	0,235	0,230
200	2,25	0,200	0,200	0,190	0,190

TABELA 5.6 – Resistências máximas considerando-se o eixo de menor inércia

Eixo de Menor Inércia					
λ	λ_0	$P_{m\acute{a}x}/N_y$			
		$\delta_0 = 0$	$\delta_0 = 0$	$\delta_0 = L/1000$	$\delta_0 = L/1000$
		$\sigma_{rc} = 0$	$\sigma_{rc} = -0,30\sigma_y$	$\sigma_{rc} = 0$	$\sigma_{rc} = -0,30\sigma_y$
0	0,00	1,000	1,000	1,000	1,000
20	0,23	1,000	0,965	0,990	0,975
40	0,45	1,000	0,910	0,960	0,905
60	0,68	1,000	0,835	0,890	0,790
80	0,90	1,000	0,785	0,765	0,665
100	1,13	0,790	0,730	0,600	0,535
120	1,35	0,550	0,550	0,460	0,420
140	1,58	0,405	0,405	0,355	0,330
160	1,80	0,310	0,310	0,280	0,265
180	2,03	0,245	0,245	0,225	0,215
200	2,25	0,200	0,200	0,185	0,180

A curva ideal, representativa do pilar livre de imperfeições, delimita, através do índice de esbeltez reduzido $\lambda_0 = 1,0$ ($\lambda_{lim} \cong 89$), as regiões de flambagem elástica ($\lambda_0 \geq 1,0$) e inelástica ($\lambda_0 \leq 1,0$). Observa-se, para o caso isolado da imperfeição do material, que as tensões residuais reduzem significativamente a resistência dos pilares, principalmente

na região inelástica, que fica ampliada para a faixa de $0,0 \leq \lambda_0 \leq 1,3$, para os eixos de maior e menor inércia. Obviamente, no caso das barras retas, o efeito das tensões residuais é nulo para índices de esbeltez reduzidos superiores a 1,3, quando ocorre a flambagem elástica.

Pode-se observar que as tensões residuais são mais desfavoráveis para a flexão em torno do eixo de menor inércia, onde o efeito da plastificação precoce causada pelas tensões residuais leva a uma diminuição de rigidez mais acentuada.

Nota-se que, considerado isoladamente, o efeito da imperfeição geométrica estende-se a toda a faixa de esbeltez, reduzindo a resistência dos pilares. Na região $0,5 \leq \lambda_0 \leq 1,6$, faixa de esbeltez intermediária, a influência das imperfeições iniciais na resistência dos pilares é mais pronunciada, sendo máxima nas proximidades de $\lambda_0 = 1,0$. A partir de $\lambda_0 > 1,6$, pilares muito esbeltos, essa influência diminui, tendendo ao comportamento da curva ideal.

Finalmente, os gráficos das Figs. 5.7 e 5.8 e os valores das Tabs. 5.5 e 5.6 mostram que, quando se consideram os efeitos combinados das imperfeições geométricas e das tensões residuais a resistência dos pilares diminui ainda mais, evidenciando a importância de se considerar a interação entre ambas as imperfeições. Analisando-se os dados das Tabs. 5.5 e 5.6, tendo como referência os resultados para o caso da imperfeição geométrica isolada cuja influência se estende por toda a faixa de esbeltez, observa-se, na coluna dos efeitos combinados, que as tensões residuais também passam a ter influência na resistência dos pilares em toda a faixa de esbeltez.

As resistências dos pilares, reduzidas pelos efeitos das imperfeições geométricas iniciais e de tensões residuais, em comparação com as resistências idealizadas, mostram que a máxima influência, considerando-se os fatores tanto isolados quanto combinados, sempre ocorre quando o índice de esbeltez reduzido λ_0 está na região próxima a $\lambda_0 = 1,0$.

5.4.3 Curva de Resistência Última para a Análise Avançada

Nesta seção, pretende-se calibrar o nível e a distribuição das tensões residuais a serem utilizados na análise avançada proposta, visando garantir o nível de confiabilidade estabelecido pela curva de resistência última adotada pela ABNT NBR 8800: 2008, considerando-se os eixos de maior e menor inércia.

A ABNT NBR 8800: 2008 adota uma curva única de resistência para barras com curvatura inicial de $L/1500$, para ambos os eixos, de maior e de menor inércia. Essa curva fornece o valor do fator adimensional χ em função do índice de esbeltez reduzido λ_0 .

O fator χ possui expressões diferentes dependendo do valor de λ_0 , conforme mostram as Eqs. (5.14) e (5.15).

$$\chi = 0,658^{\lambda_0^2} \quad \text{para } \lambda_0 \leq 1,5 \quad (5.14)$$

$$\chi = \frac{0,877}{\lambda_0^2} \quad \text{para } \lambda_0 > 1,5 \quad (5.15)$$

O índice de esbeltez reduzido pode ser dado pelas Eqs. (5.16) ou (5.17):

$$\lambda_0 = \frac{1}{\pi} \lambda \sqrt{\frac{f_y}{E}} \quad (5.16)$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{QA_g f_y}{N_e}} \quad (5.17)$$

onde λ é o índice de esbeltez da barra, f_y a resistência ao escoamento do aço, E o módulo de elasticidade longitudinal do material e N_e a força de flambagem elástica e Q o fator de redução total associado à flambagem local.

Para a análise numérica considera-se o mesmo pilar birrotulado da seção anterior (perfil laminado $W 200 \times 46, I$), com uma imperfeição geométrica inicial linear $\delta_0 = L/1500$ no meio do vão. Dois tipos de distribuições de tensões residuais são analisados: o primeiro com distribuições lineares, tanto nas mesas quanto na alma, e o segundo com distribuição linear nas mesas e constante na alma, para as tensões de compressão σ_{rc} iguais a $0,30 f_y$ e $0,50 f_y$.

O pilar birrotulado é analisado com os índices de esbeltez variando-se de 20 a 200. O comprimento do pilar é dividido em 10 elementos iguais e a seção transversal dividida em 50 fatias, sendo 20 fatias para cada mesa e 10 para a alma. O aço escolhido é o *ASTM A36*, com a curva tensão-deformação característica apresentada anteriormente na Fig. 5.1 e propriedades na Tab. 5.1. O carregamento foi incrementado gradativamente até a carga de escoamento do perfil $N_y = 1442,30 \text{ kN}$.

Influência das tensões residuais para o eixo de maior inércia

A Figura 5.9 apresenta as curvas de resistência última determinadas pela presente formulação, considerando-se o eixo de maior inércia, e a curva de dimensionamento à compressão da ABNT NBR 8800: 2008, segundo as Eqs. (5.14) e (5.15). Observa-se que as curvas de resistência obtidas numericamente descrevem um comportamento semelhante ao da curva de resistência da norma, em toda a faixa de esbeltez. Visando à calibração, verifica-se que a curva que melhor se aproxima da curva de resistência da ABNT NBR 8800: 2008 corresponde àquela com tensão residual igual a $0,5 f_y$, com distribuição linear nas mesas e constante na alma, além da imperfeição geométrica inicial igual a $L/1500$.

A Figura 5.10 mostra a curva de resistência proposta para a análise avançada, para o eixo de maior inércia, notando-se visivelmente, a boa correlação com a curva de resistência da norma brasileira.

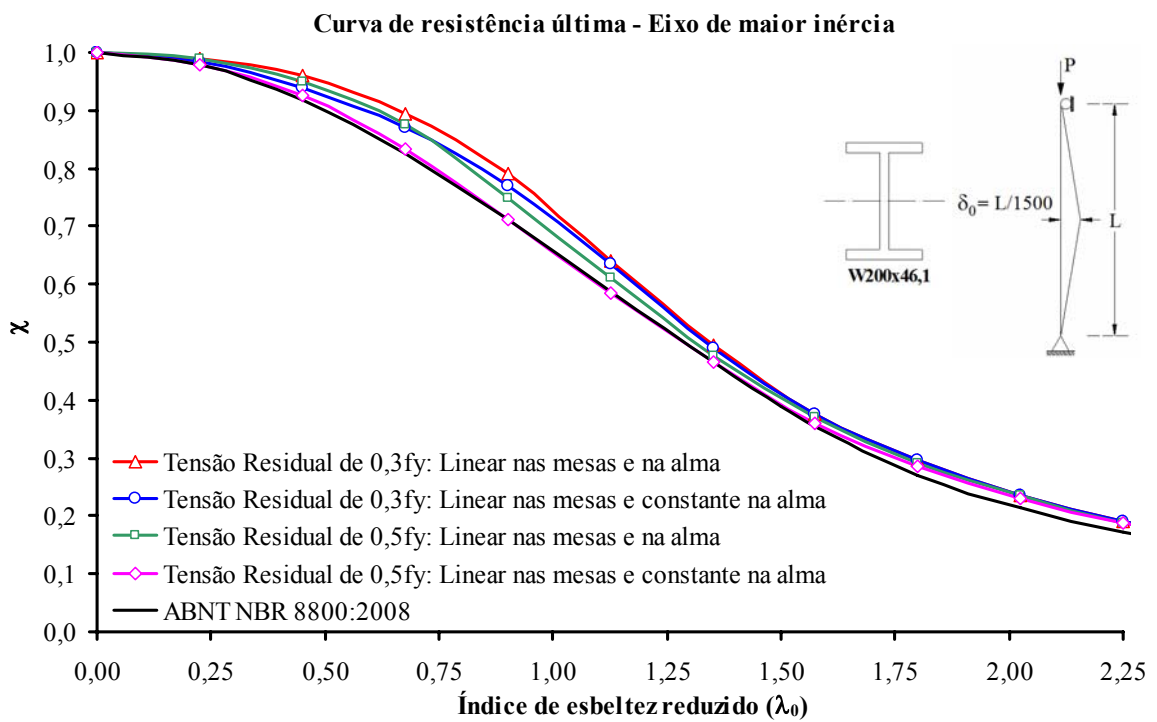


FIGURA 5.9 – Curvas de resistência última para o eixo de maior inércia

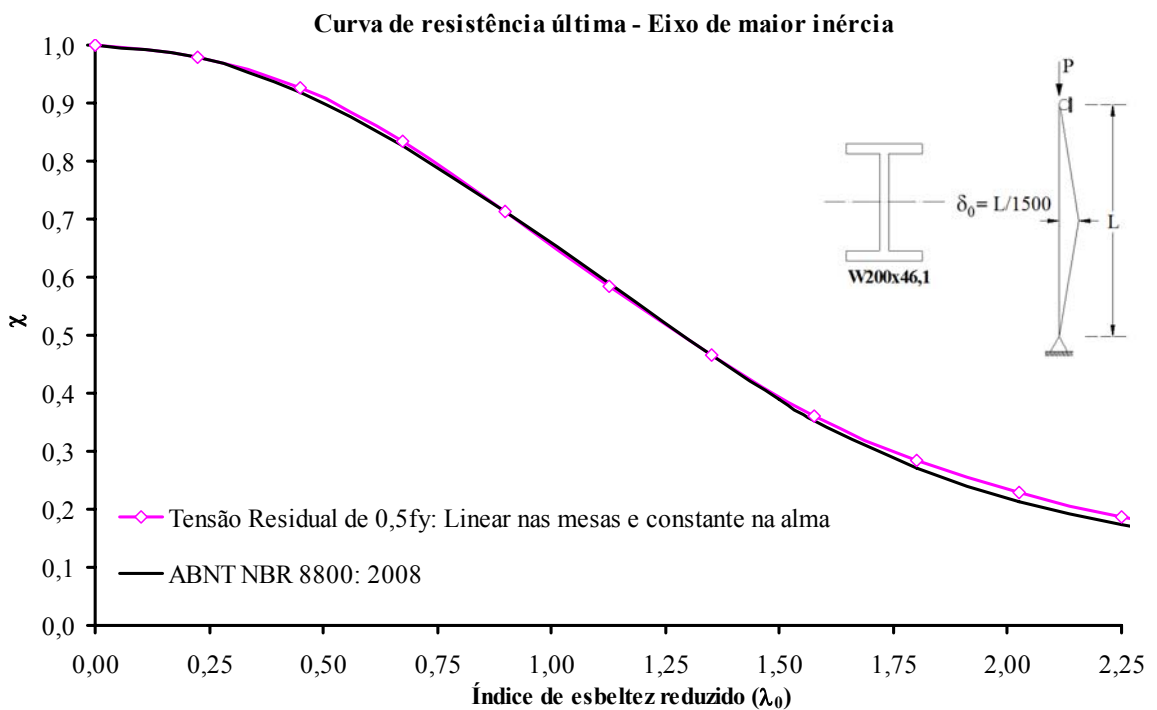


FIGURA 5.10 – Curva de resistência última para a análise avançada (eixo de maior inércia)

Influência das tensões residuais para o eixo de menor inércia

Após a calibração feita para o eixo de maior inércia, verifica-se a validade da curva de resistência para o eixo de menor inércia. Dessa forma, considera-se a tensão residual de compressão σ_{rc} igual a $0,5 f_y$ e mesma distribuição, linear nas mesas e constante na alma, e a imperfeição geométrica de $L/1500$.

A Figura 5.11 apresenta a curva de resistência última para o eixo de menor inércia, determinada numericamente pela presente formulação e a curva única de dimensionamento à compressão da ABNT NBR 8800: 2008. Observa-se que a curva de resistência obtida numericamente apresenta resultados bastante discrepantes para uma faixa de esbeltez de $0,4 \leq \lambda_0 \leq 1,75$. Nitidamente, verifica-se a inadequação do uso da única curva, prescrita pela ABNT NBR 8800: 2008, para o eixo de menor inércia, que apresenta diferença máxima em torno de 25% para a região de λ_0 próximo de 1,0.

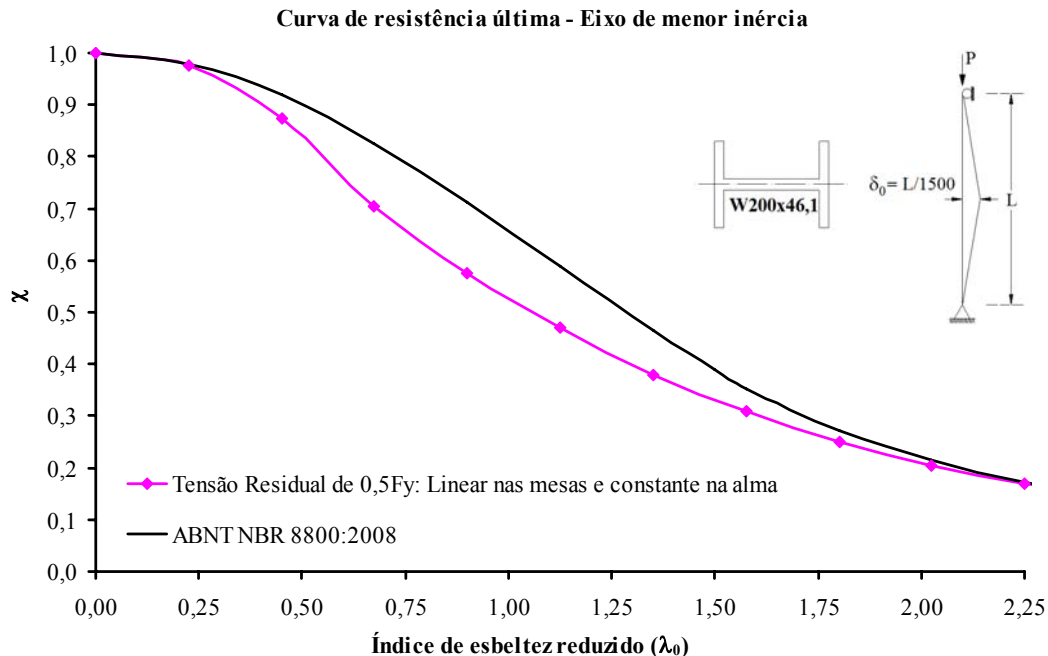


FIGURA 5.11 – Curvas de resistência última para o eixo de menor inércia

Pensando em calibrar as tensões residuais para a verificação da resistência última em torno do eixo de menor inércia, a Fig. 5.12 mostra as curvas para uma distribuição de

tensão residual linear nas mesas e constante na alma, variando-se a intensidade da tensão residual de compressão σ_{rc} , de $0,15f_y$, $0,30f_y$ e $0,50f_y$.

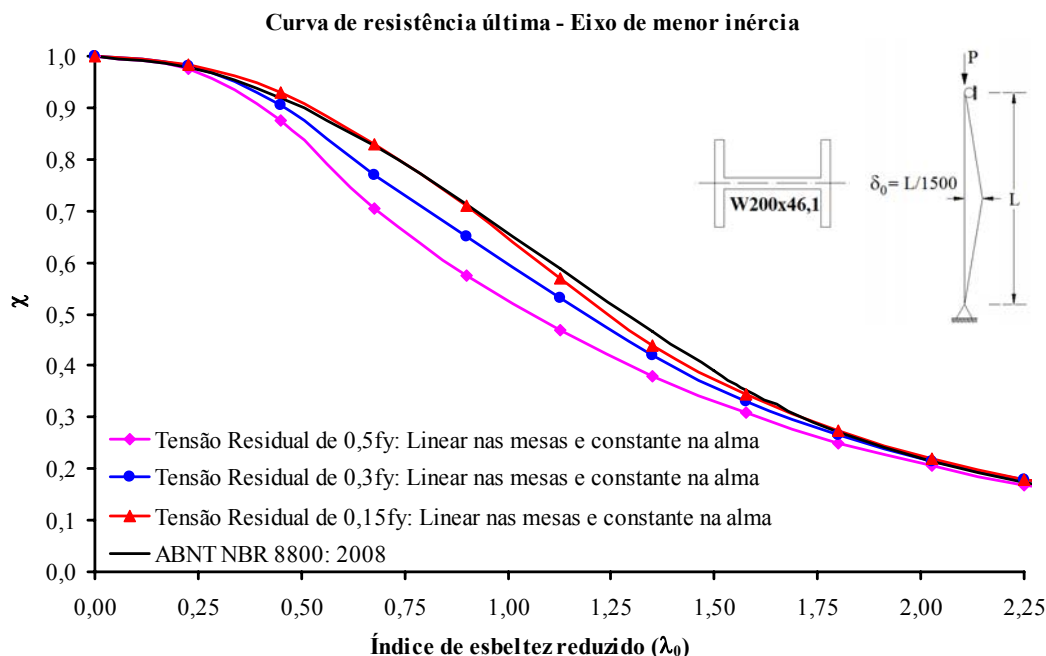


FIGURA 5.12 – Curvas de resistência última para o eixo de menor inércia

Comparando-se as curvas de resistência obtidas na Fig. 5.12, observa-se que a curva com a tensão residual de $0,15f_y$, é a que melhor se ajusta à curva da norma. Todavia, não faz sentido adotar valores distintos de tensão residual em função do eixo de flexão adotado. Dessa forma, de acordo com os resultados apresentados, pode-se pensar na adoção de duas curvas de resistência: uma para a flexão segundo o eixo de maior inércia e outra para a flexão segundo o eixo de menor inércia.

A fim de estudar uma curva de resistência para o eixo de menor inércia, a Fig. 5.13 apresenta, de forma comparativa, as quatro curvas prescritas pelo EN 1993-1-1: 2005, a curva única prescrita pela ABNT NBR 8800: 2008 e a curva de resistência obtida numericamente. A curva de resistência obtida pelo programa é função da distribuição de tensão residual calibrada anteriormente para o eixo de maior inércia, ou seja, linear nas mesas e constante na alma, com uma tensão residual de compressão igual a $0,5 f_y$ e função de uma imperfeição geométrica linear de $L/1500$.

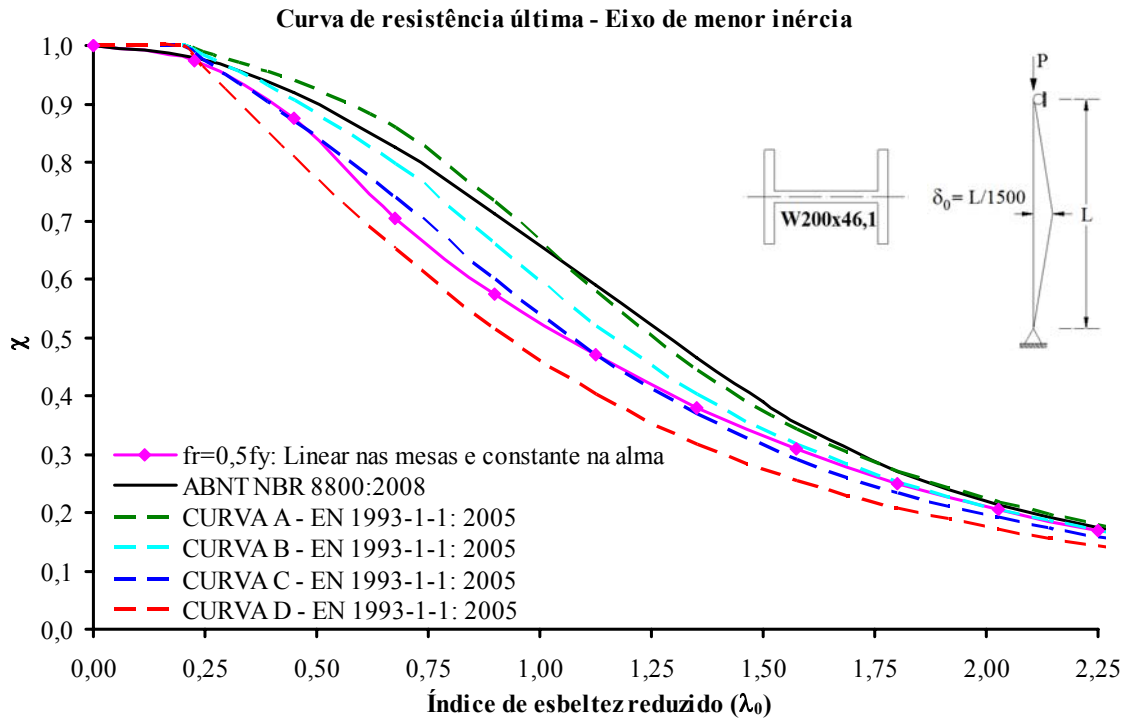


FIGURA 5.13 – Curvas de resistência última em torno do eixo de menor inércia

Observa-se que a curva “c” prescrita pelo EN 1993-1-1: 2005, dada pela Eq. (5.18) e que considera uma imperfeição geométrica inicial $L/1000$, descreve um comportamento semelhante, em toda a faixa de esbeltez, ao da curva obtida pela presente formulação.

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \lambda_0^2}} \leq 1,0 \quad (5.18)$$

onde,

$$\Phi = 0,5[1 + 0,49(\lambda_0 - 0,2) + \lambda_0^2] \quad (5.19)$$

Dessa forma, conclui-se que a resistência de pilares em perfil I ou H pode ser melhor representada por duas curvas de resistências. Nesse caso, as Eqs. (5.14) e (5.15) da ABNT NBR 8800: 2008, para o eixo de maior inércia e a Eq. (5.18) para o eixo de menor inércia, poderiam representar adequadamente a resistência desses pilares.

5.4.4 Resistência Máxima de Projeto para Pilares

Eixo de Maior Inércia

Considerando-se a lei constitutiva de projeto determinada na seção 5.3.3, a distribuição de tensões residuais, linear nas mesas e constante na alma com $\sigma_{rc}=0,5f_y$, calibrada na seção 5.4.3 e a imperfeição geométrica inicial $L/1500$, foram calculadas as resistências máximas de projeto segundo o eixo de maior inércia, para pilares curtos, intermediários e longos, com diferentes condições de contorno. Foram utilizados, para comparação, o programa proposto para análise avançada e os procedimentos da ABNT NBR 8800: 2008, cujos resultados são mostrados na Tab. 5.7 e na Fig. 5.14.

TABELA 5.7 – Resistências máximas de projeto para o eixo de maior inércia - Resultados da análise numérica e da ABNT NBR 8800:2008

Condição de contorno	Índice de esbeltez λ	Índice de esbeltez reduzido λ_0	Programa		ABNT NBR 8800: 2008		
			χ_{Rd}	$P_{m\acute{a}x}$ (kN) (A)	χ_{carac}	$P_{m\acute{a}x}/\gamma_{al}$ (kN) (B)	(A)/(B)
	20	0,23	0,891	1285	0,979	1284	1,00
	60	0,68	0,755	1089	0,826	1083	1,01
	100	1,13	0,524	756	0,588	772	0,98
	140	1,58	0,329	475	0,353	463	1,02
	180	2,03	0,210	303	0,214	280	1,08
	200	2,25	0,173	250	0,173	227	1,10
	20	0,23	0,892	1287	0,979	1284	1,00
	60	0,68	0,757	1092	0,826	1083	1,01
	100	1,13	0,525	757	0,588	772	0,98
	140	1,58	0,328	473	0,353	463	1,02
	180	2,03	0,210	303	0,214	280	1,08
	200	2,25	0,172	248	0,173	227	1,09
	20	0,23	0,891	1285	0,979	1284	1,00
	60	0,68	0,751	1083	0,826	1083	1,00
	100	1,13	0,518	747	0,588	772	0,97
	140	1,58	0,323	466	0,353	463	1,01
	180	2,03	0,207	299	0,214	280	1,07
	200	2,25	0,170	245	0,173	227	1,08
	20	0,23	0,898	1295	0,979	1284	1,01
	60	0,68	0,774	1116	0,826	1083	1,03
	100	1,13	0,539	777	0,588	772	1,01
	140	1,58	0,336	485	0,353	463	1,05
	180	2,03	0,213	307	0,214	280	1,10
	200	2,25	0,174	251	0,173	227	1,11

Observa-se uma boa correlação entre os resultados do programa com os resultados da norma brasileira. Na faixa de $0 < \lambda_0 \leq 1,60$ os resultados são bastante próximos com diferença máxima da ordem de 2%. Apenas para a barra com elevado índice de esbeltez reduzido, $\lambda_0 > 2,0$, a diferença varia de 7% a 11% e os resultados da norma são mais conservadores.

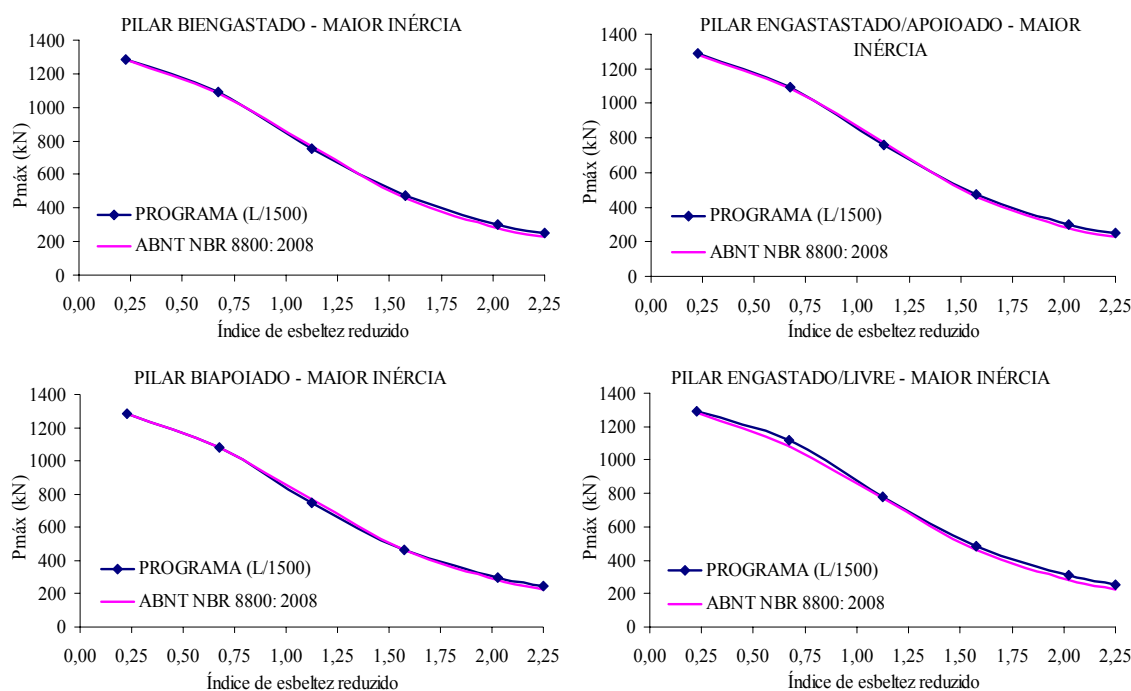


FIGURA 5.14 – Curvas de resistência máxima para pilares com diferentes condições de contorno segundo o eixo de maior inércia.





Conclui-se que a curva de resistência adotada pela ABNT NBR 8800: 2008 apresenta uma ótima correlação com a curva de resistência obtida pela análise avançada, para o eixo de maior inércia.

Eixo de Menor Inércia

Novamente, considerando-se a lei constitutiva de projeto, a distribuição de tensões residuais, linear nas mesas e constante na alma com $\sigma_{rc} = 0,5f_y$ e a imperfeição geométrica inicial $L/1500$, foram calculadas as resistências máximas segundo o eixo de menor inércia, para pilares curtos, intermediários e longos, com diferentes condições de

contorno. Foram utilizados, para comparação, o programa proposto para análise avançada e os procedimentos da ABNT NBR 8800: 2008, cujos resultados são mostrados na Tab. 5.8 e na Fig. 5.15.

TABELA 5.8 – Resistências máximas de projeto para o eixo de menor inércia -
Resultados da análise numérica e da ABNT NBR 8800:2008

Condição de contorno	Índice de esbeltez λ	Índice de esbeltez reduzido λ_0	Programa		ABNT NBR 8800: 2008		
			χ_{Rd}	$P_{m\acute{a}x}$ (kN) (A)	χ_{carac}	$P_{m\acute{a}x}/\gamma_{a1}$ (kN) (B)	(A)/(B)
	20	0,23	0,892	1287	0,979	1284	1,00
	60	0,68	0,653	942	0,826	1083	0,87
	100	1,13	0,449	648	0,588	772	0,84
	140	1,58	0,301	434	0,353	463	0,94
	180	2,03	0,201	290	0,214	280	1,03
	200	2,25	0,167	241	0,173	227	1,06
	20	0,23	0,891	1285	0,979	1284	1,00
	60	0,68	0,655	945	0,826	1083	0,87
	100	1,13	0,451	650	0,588	772	0,84
	140	1,58	0,303	437	0,353	463	0,94
	180	2,03	0,200	288	0,214	280	1,03
	200	2,25	0,166	239	0,173	227	1,06
	20	0,23	0,890	1284	0,979	1284	1,00
	60	0,68	0,647	933	0,826	1083	0,86
	100	1,13	0,446	643	0,588	772	0,83
	140	1,58	0,297	428	0,353	463	0,93
	180	2,03	0,197	284	0,214	280	1,01
	200	2,25	0,163	235	0,173	227	1,04
	20	0,23	0,895	1291	0,979	1284	1,01
	60	0,68	0,661	953	0,826	1083	0,88
	100	1,13	0,469	676	0,588	772	0,88
	140	1,58	0,318	459	0,353	463	0,99
	180	2,03	0,207	299	0,214	280	1,07
	200	2,25	0,171	247	0,173	227	1,09

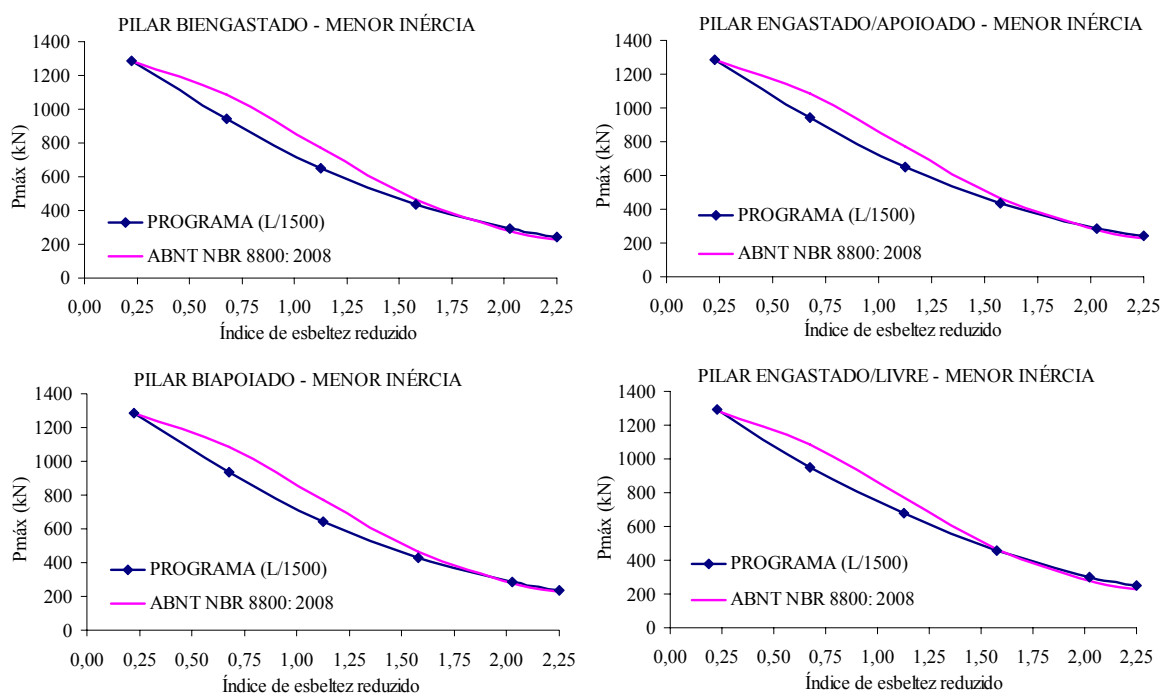


FIGURA 5.15 – Curvas de resistência máxima para pilares com diferentes condições de contorno segundo o eixo de menor inércia.

Observa-se que, para praticamente toda a faixa de $0,2 < \lambda_0 \leq 1,60$, os resultados fornecidos pela norma são bastante discrepantes dos resultados obtidos pelo programa.

Portanto, tendo em vista esses resultados, o mesmo estudo foi realizado para os diversos pilares, mas comparando-se os resultados do programa proposto com os resultados obtidos pela Eq. (5.18), cujos valores são mostrados na Tab. 5.9 e na Fig. 5.16.

Para uma comparação mais adequada com a curva da Eq. (5.18), adotou-se na análise numérica uma imperfeição geométrica linear de $L/1500$ e a mesma distribuição e magnitude da tensão residual calibrada anteriormente.

Observa-se que os resultados obtidos utilizando-se a curva da Eq. (5.18) para a faixa de $0,2 < \lambda_0 \leq 1,50$ apresentam uma boa correlação com aqueles obtidos pela análise numérica. Aliás, essa correlação é mais adequada do que aquela obtida quando se utiliza a curva única da ABNT NBR 8800: 2008, conforme se observa visualizando-se os gráficos das Figs. 5.15 e 5.16.

TABELA 5.9 – Resistências máximas de projeto para o eixo de menor inércia -
Resultados da análise numérica e da curva da Eq. (5.18)

Condição de contorno	Índice de esbeltez λ	Índice de esbeltez reduzido λ_0	Programa		Eq. (5.18)		
			χ_{Rd}	$P_{m\acute{a}x}$ (kN) (A)	χ_{carac}	$P_{m\acute{a}x}/\gamma_{a1}$ (kN) (B)	(A)/(B)
	20	0,23	0,892	1287	0,987	1294	0,99
	60	0,68	0,653	942	0,740	970	0,97
	100	1,13	0,449	648	0,471	617	1,05
	140	1,58	0,301	434	0,291	382	1,14
	180	2,03	0,201	290	0,192	252	1,15
	200	2,25	0,167	241	0,160	209	1,15
	20	0,23	0,891	1285	0,987	1294	0,99
	60	0,68	0,655	945	0,740	970	0,97
	100	1,13	0,451	650	0,471	617	1,05
	140	1,58	0,303	437	0,291	382	1,14
	180	2,03	0,200	288	0,192	252	1,15
	200	2,25	0,166	239	0,160	209	1,14
	20	0,23	0,890	1284	0,987	1294	0,99
	60	0,68	0,647	933	0,740	970	0,96
	100	1,13	0,446	643	0,471	617	1,04
	140	1,58	0,297	428	0,291	382	1,12
	180	2,03	0,197	284	0,192	252	1,13
	200	2,25	0,163	235	0,160	209	1,12
	20	0,23	0,895	1291	0,987	1294	1,00
	60	0,68	0,661	953	0,740	970	0,98
	100	1,13	0,469	676	0,471	617	1,10
	140	1,58	0,318	459	0,291	382	1,20
	180	2,03	0,207	299	0,192	252	1,19
	200	2,25	0,171	247	0,160	209	1,18

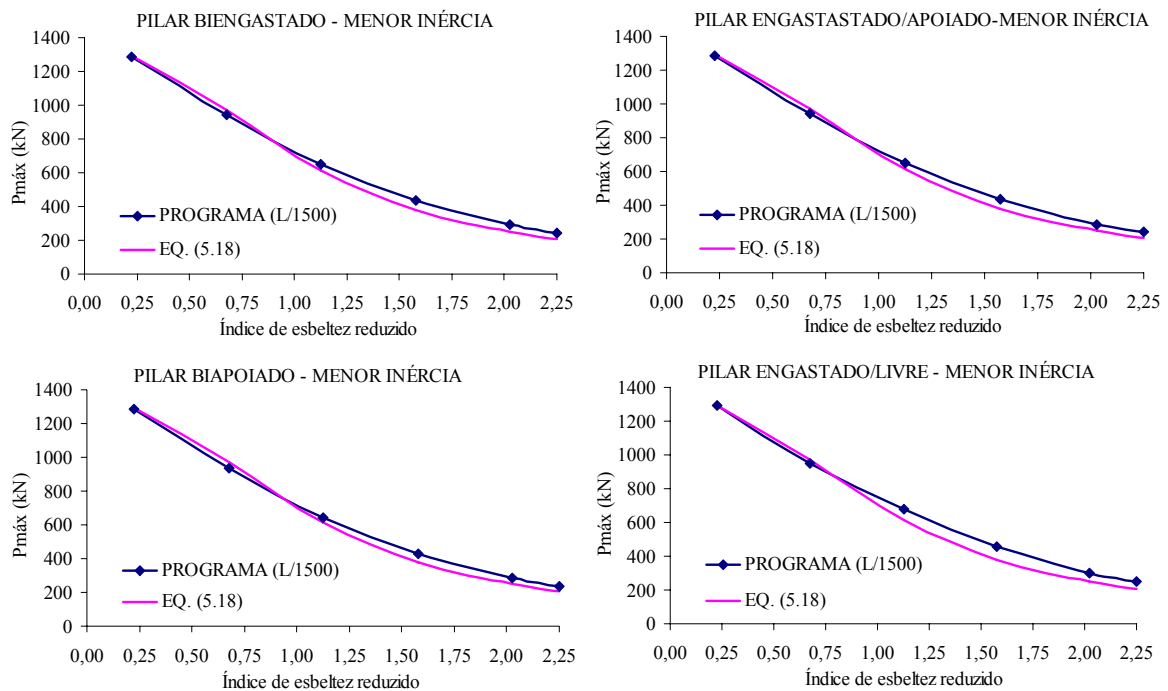


FIGURA 5.16 – Curvas de resistência máxima para pilares com diferentes condições de contorno para o eixo de menor inércia

5.4.5 Exemplo Numérico para Dimensionamento à Compressão

Visando-se aplicar o método da análise avançada no dimensionamento de barras comprimidas, o exemplo apresentado a seguir utiliza, além das leis constitutivas de projeto, a distribuição linear nas mesas e constante na alma das tensões residuais, com $\sigma_{rc}=0,5f_y$, e a imperfeição geométrica $L/1500$.

A Figura 5.17 mostra uma mísula treliçada projetada para suportar uma carga P na extremidade B . A barra AB possui um comprimento de 250 cm e seção transversal em perfil I, cuja flexão no plano se dá em torno do eixo de menor inércia. As demais barras (BC , AE e DE) também são constituídas por perfis I, com flexão em torno do eixo de maior inércia. Conforme mostra a Fig. 5.17, as barras AB e BC formam entre si um ângulo de 30° e são rotuladas nos apoios A e C .

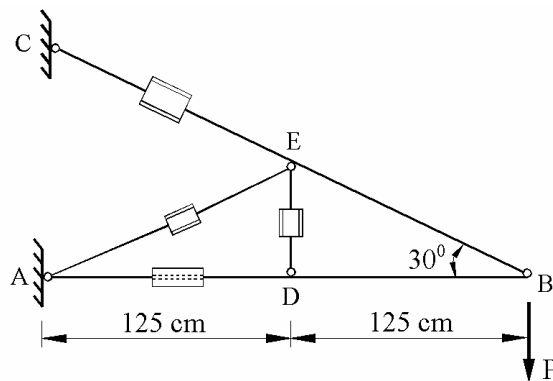


FIGURA 5.17 – Mísula treliçada com carga aplicada no nó B

Três casos são analisados considerando-se os perfis indicados na Tab. 5.10. No *caso 2* as seções transversais das barras *AB* e *BC* são trocadas em relação ao *caso 1* e, no *caso 3*, não se consideram os contraventamentos e as barras *AB* e *BC* são mantidas como no *caso 1*. As seções transversais das barras da treliça são compactas de modo a evitar a flambagem local de mesas e alma do perfil e as barras *AB* e *BC* são contidas lateralmente fora do plano nos pontos *A*, *B*, *C* e *D*. Admite-se que a vinculação utilizada impede a ocorrência da flambagem por torção pura.

TABELA 5.10 – Perfis das barras da mísula treliçada

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Barra AB	W 250x28,4	W 250x44,8	W 250x28,4
Barra CB	W 250x44,8	W 250x28,4	W 250x44,8
Barras AE e DE	W 150x18	W 150x18	-

O aço estrutural adotado é o *USI CIVIL 300* com comportamento e propriedades resistentes do material apresentados, anteriormente, na Fig. 5.5 e Tab. 5.4, respectivamente. Para a análise numérica a barra *AB* foi modelada com 20 elementos iguais, a barra *BC* com 10 elementos iguais e as barras de contraventamento *AE* e *DE* com apenas 2 elementos cada uma. A seção transversal foi dividida em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma.

Este exemplo tem como objetivo determinar a força máxima *P* que a treliça poderá suportar, comparando-se os resultados obtidos pela análise avançada proposta com os resultados considerando-se as Eqs. (5.14) e (5.15) da ABNT NBR 8800: 2008 e a Eq. (5.18).

Na Tabela 5.11 comparam-se os resultados da força $P_{m\acute{a}x}$ obtidos pela análise numérica avançada proposta com os resultados das equações da ABNT NBR 8800: 2008 e da Eq. (5.18), para os casos 1, 2 e 3 definidos anteriormente (ver Anexo B1 – Dimensionamento à tração e à compressão).

TABELA 5.11 – Força máxima aplicada no nó B da mísula treliçada

Caso	Carga máxima no nó B (kN)					Estado-Limite Último
	Programa (A)	NBR 8800: 2008 (B) (B/A)		EQ. (5.18) e $\gamma_{al}=1,10$ (C) (C/A)		
1	392	470	(1,20)	418	(1,07)	Instabilidade Inelástica da barra AB
2	489	499	(1,02)	499	(1,02)	Escoamento por tração da barra BC
3	214	254	(1,19)	201	(0,94)	Instabilidade Inelástica da barra AB

Analisando-se os resultados da Tab. 5.11 observa-se que, no caso 2, o estado-limite último encontrado em todos os procedimentos de cálculo foi o escoamento por tração da barra BC, sendo que os resultados analíticos estão apenas 2% acima dos resultados da análise avançada proposta. Para os casos 1 e 3, os estados-limites últimos encontrados por todos os procedimentos de cálculo também foram os mesmos, ou seja, instabilidade inelástica da barra AB. Entretanto, os resultados segundo a norma brasileira estão 20% e 19% acima dos valores da análise avançada, enquanto os valores obtidos utilizando-se a Eq. (5.18) apresentam resultados mais adequados em relação àqueles da ABNT NBR 8800: 2008, confirmando a hipótese deste trabalho em se utilizar duas curvas de resistência para o dimensionamento à compressão.

5.5 Resistência à Flexão

5.5.1 Condições Específicas para o Dimensionamento de Barras Submetidas à Flexão Simples

No dimensionamento à flexão simples, as vigas devem ser verificadas aos estados-limites últimos relacionados ao momento fletor e à força cortante. Neste trabalho, o dimensionamento das barras sob atuação de forças cortantes não será avaliado.

Segundo a ABNT NBR 8800: 2008, o dimensionamento aos estados-limites últimos de uma barra submetida a momento fletor deve satisfazer a seguinte relação:

$$M_{Sd} \leq M_{Rd} \quad (5.20)$$

onde M_{Sd} é o momento fletor solicitante de cálculo, obtido com a combinação última de ações apropriada, e M_{Rd} o momento fletor resistente de cálculo.

Sob atuação de momento fletor, o colapso pode se dar por flambagem local da mesa (FLM), flambagem local da alma (FLA), flambagem lateral com torção (FLT) ou por plastificação total da seção transversal devido à formação de rótulas plásticas.

Tendo em vista a análise inelástica, considera-se neste trabalho que as barras são formadas por seções compactas, suficientemente contraventadas fora do plano, para garantir uma adequada capacidade de rotação e permitir a redistribuição de forças devido à formação de mecanismos plásticos. Portanto, os estados-limites últimos FLM, FLA e FLT estão automaticamente assegurados e apenas a plastificação total de uma ou mais seções transversais, devido à formação de rótulas plásticas, definirá o colapso das barras submetidas à flexão simples na análise numérica. Portanto, não ocorrendo FLM, FLA e FLT, o momento fletor resistente de cálculo é dado por:

$$M_{Rd} = \frac{M_{pl}}{\gamma_{a1}} \quad (5.21)$$

onde M_{pl} é o momento de plastificação total da seção transversal, dado pela Eq. (5.22):

$$M_{pl} = Z f_y \quad (5.22)$$

sendo Z o módulo plástico e f_y a resistência ao escoamento do aço.

5.5.2 Comportamento Momento Fletor x Curvatura na Flexão Pura

A Figura 5.18 mostra uma viga biapoiada com vão de 200 cm , constituída pelo perfil $W200x46,1$, submetida à flexão pura. O aço $ASTM A36$ é adotado, cuja curva tensão-

deformação e propriedades características foram apresentadas, respectivamente, na Fig. 5.1 e Tab. 5.1 da seção 5.2.2. Para as tensões residuais é considerada a distribuição linear nas mesas e valor constante na alma, sendo $\sigma_{rc} = -0,5f_y$. Para a análise numérica a viga é dividida em 10 elementos e sua seção transversal em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma.

Este exemplo tem como objetivo estudar a relação momento–curvatura para o perfil *W200x46,1*, fletido segundo os eixos de maior e menor inércia, utilizando-se os parâmetros já calibrados anteriormente, da lei constitutiva e das tensões residuais, visando mostrar a precisão e a consistência da formulação.

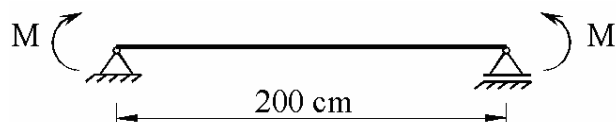


FIGURA 5.18 – Viga biapoiada submetida à flexão pura

As Figuras 5.19 e 5.20 mostram graficamente os resultados da análise realizada, considerando-se a seção transversal da viga sem e com tensões residuais, segundo os eixos de maior e menor inércia, respectivamente. Nessas figuras, o eixo vertical do momento fletor é parametrizado em função dos momentos elásticos máximos dados por $M_y = W \cdot f_y$, que valem $M_y = 11025 \text{ kNcm}$ para a maior inércia e $M_y = 3779 \text{ kNcm}$ para a menor inércia, enquanto a curvatura é parametrizada em relação à curvatura máxima na fase elástica $\phi_y = M_y / EI$.

Considerando-se a análise sem tensão residual, observa-se que na fase elástica a relação momento fletor \times curvatura varia linearmente, num comportamento elástico-linear. A partir do final da fase elástica, a curva deixa de ser linear porque a viga entra na fase elastoplástica e o momento fletor último tende para o momento plástico M_{pl} da seção em cada caso, que valem $M_{pl,x} = 12183 \text{ kNcm}$ e $M_{pl,y} = 5631 \text{ kNcm}$. Sendo o fator de forma dado pela relação $f = M_{pl} / M_y$, tem-se $f = 1,105$ para o eixo de maior inércia e $f = 1,490$ para o eixo de menor inércia, confirmando os resultados teóricos da literatura.

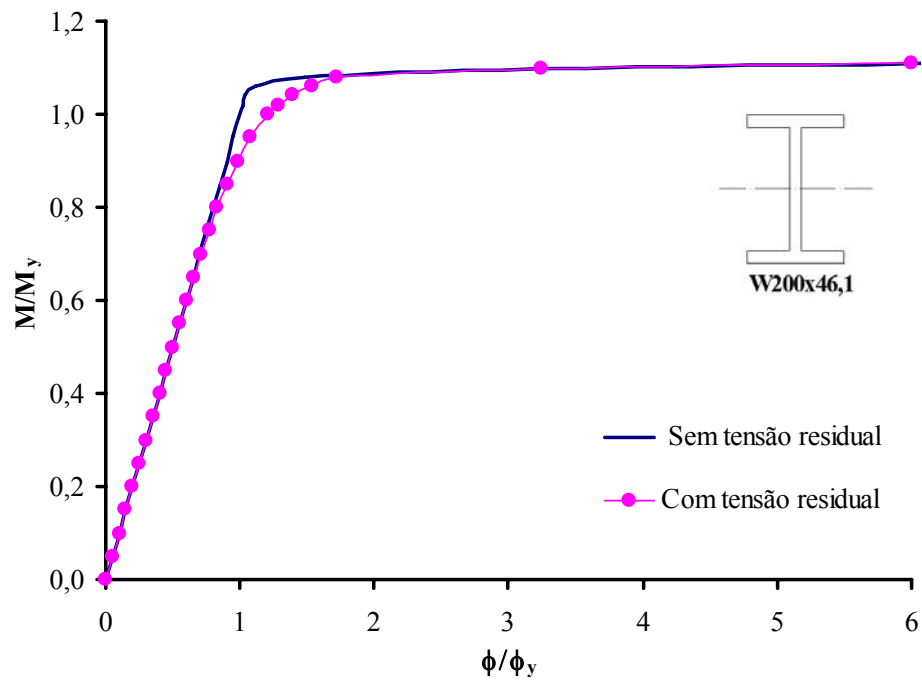


FIGURA 5.19 – Curva momento-curvatura para o perfil *W 200x46,1* fletido em torno do eixo de maior inércia

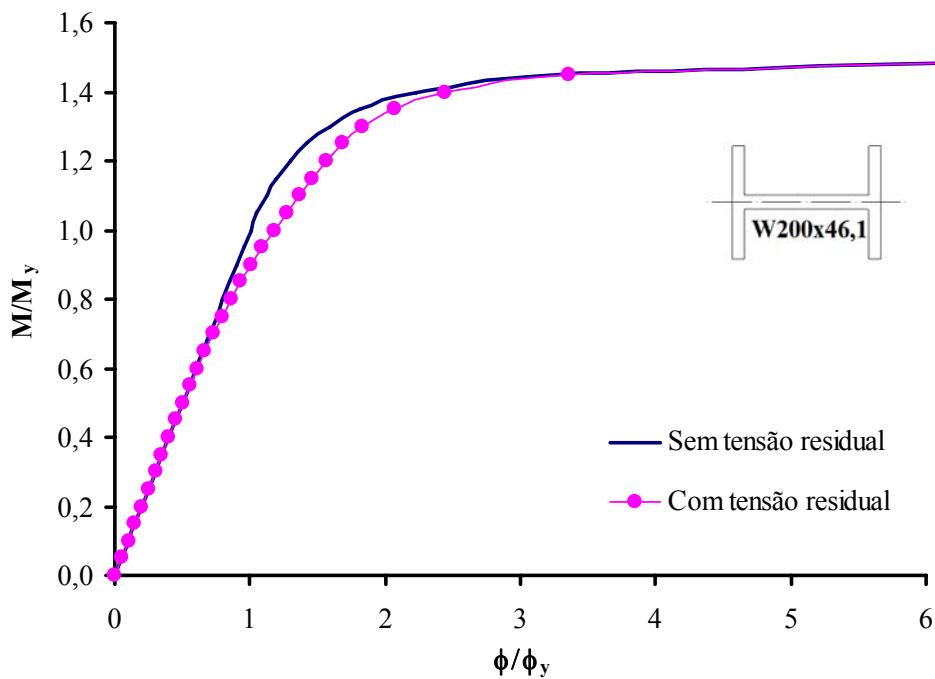


FIGURA 5.20 – Curva momento-curvatura para o perfil *W 200x46,1* fletido em torno do eixo de menor inércia

Nota-se que a existência das tensões residuais antecipa o início do escoamento da seção transversal e, conseqüentemente, amplia a faixa do comportamento inelástico, uma vez

que os máximos momentos que a viga pode atingir com tensão residual, em ambos os eixos, são os mesmos momentos de plastificação M_{pl} , obtidos sem tensão residual.

5.5.3 Exemplo Numérico para Dimensionamento à Flexão

A viga de piso de uma edificação residencial, mostrada na Fig. 5.21, apresenta 900 cm de vão, é constituída pelo perfil compacto $W\ 610 \times 174$ e funciona como apoio para outras duas vigas secundárias. Deseja-se saber qual o valor máximo da carga P , reação das vigas secundárias que descarregam na viga principal, que esta consegue suportar. O aço estrutural adotado é o $ASTM\ A36$, com comportamento e propriedades físicas de cálculo apresentadas, respectivamente, na Fig. 5.5 e Tab. 5.4. A viga é contida lateralmente nos pontos de aplicação das cargas (nós B e C).

A carga P da viga residencial é constituída por 40% de ação permanente e 60% é decorrente de ação variável devido à sobrecarga. O peso próprio da viga principal é desprezado. Verificar apenas a aparência da estrutura dentro dos limites aceitáveis pela ABNT NBR 8800: 2008, admitindo-se que o estado-limite não causa danos temporários ou permanentes à estrutura.

Para a análise numérica a barra AB foi modelada com 18 elementos iguais e a seção transversal foi dividida em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e o restante para a alma, para considerar uma distribuição de tensão residual linear nas mesas e constante na alma, sendo $\sigma_{rc} = -0,5f_y$.

Este exemplo tem como objetivo comparar os resultados da carga máxima aplicada $P_{máx}$ e do momento fletor resistente de cálculo M_{Rd} da viga obtidos pelo programa computacional com os resultados obtidos pela ABNT NBR 8800: 2008.

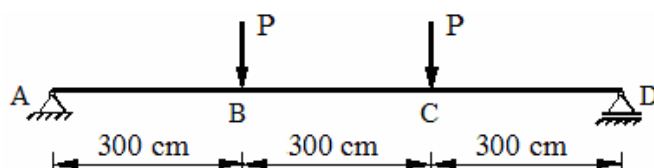


FIGURA 5.21 – Viga biapoiada com cargas concentradas simetricamente aplicadas

Resultado para Estado-limite Último (ELU) segundo a ABNT NBR 8800: 2008 (ver Anexo B2 - Dimensionamento à Flexão):

$$M_{Rd} = 120932 \text{ kNcm} \rightarrow P_{m\acute{a}x} = 403 \text{ kN}$$

Resultado numéricos obtidos pelo programa PPLANLEP

$$M_{Rd} = 120072 \text{ kNcm} \rightarrow P_{m\acute{a}x} = 401 \text{ kN}$$

Os resultados analíticos para M_{Rd} e $P_{m\acute{a}x}$, conforme as exigências da norma brasileira, apresentam uma excelente correlação com os resultados numéricos da análise avançada.

Resultado para Estado-limite de Serviço (ELS) segundo a ABNT NBR 8800: 2008 (ver Anexo B2 - Dimensionamento à Flexão):

$$y_{m\acute{a}x} = 1,45 \text{ cm} < 2,57 \text{ cm}$$

Resultado numérico obtido pelo programa PPLANLEP:

$$y_{m\acute{a}x} = 1,47 \text{ cm} < 2,57 \text{ cm}$$

Conforme esperado, o resultado analítico foi praticamente o mesmo do resultado numérico para a flecha máxima na viga.

5.6 Solicitações Combinadas

5.6.1 Condições Específicas para o Dimensionamento de Barras Submetidas aos Esforços Solicitantes Combinados

No dimensionamento, as barras submetidas à combinação de esforços solicitantes devem ser verificadas, simultaneamente por meio de uma equação de interação, aos estados-limites últimos causados por força normal e por momento fletor e, isoladamente, aos estados-limites últimos causados pela força cortante. Conforme visto

anteriormente, o dimensionamento das barras sob atuação de forças cortantes não será avaliado neste trabalho.

Para a atuação simultânea da força normal e de momentos fletores, a ABNT NBR 8800: 2008 estabelece as seguintes expressões de interação para a verificação aos estados-limites últimos:

$$\frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} + \frac{8}{9} \left(\frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \right) \leq 1,0 \quad \text{para} \quad \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} \geq 0,2 \quad (5.23)$$

$$\frac{N_{Sd}}{2N_{Rd}} + \left(\frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} + \frac{M_{y,Sd}}{M_{y,Rd}} \right) \leq 1,0 \quad \text{para} \quad \frac{N_{Sd}}{N_{Rd}} < 0,2 \quad (5.24)$$

onde:

N_{Sd} é a força axial solicitante de cálculo de tração ou compressão;

N_{Rd} é a força axial resistente de cálculo de tração ou compressão;

$M_{x,Sd}$ e $M_{y,Sd}$ são os momentos fletores solicitantes de cálculo, respectivamente em relação aos eixos x e y da seção transversal;

$M_{x,Rd}$ e $M_{y,Rd}$ são os momentos fletores resistentes de cálculo, respectivamente em relação aos eixos x e y da seção transversal.

Assim como nos estudos anteriores, sendo as barras formadas por seções compactas, suficientemente contraventadas fora do plano, a não ocorrência dos estados-limites últimos FLM, FLA e FLT está automaticamente assegurada.

Dessa forma, para uma barra submetida à flexão normal composta, com força axial de compressão, os estados-limites últimos são:

- Colapso por plastificação total da seção transversal devido à formação de rótula plástica no plano de flexão, causada pela atuação conjunta de força axial e momento fletor;
- Instabilidade no plano de flexão causada pela força axial de compressão e potencializada pelo momento fletor.

Para uma barra submetida à flexão normal composta, com força axial de tração, os estados-limites últimos são:

- Colapso por plastificação total da seção transversal devido à formação de rótula plástica no plano de flexão, causada pela atuação conjunta de força axial e momento fletor;
- Escoamento da área bruta causado pela força axial e potencializado pelo momento fletor;
- Ruptura da área líquida causada pela força axial e potencializada pelo momento fletor.

Para a verificação desses estados-limites últimos, apresentam-se nas seções seguintes estudos da superfície de resistência plástica de um elemento submetido à flexão normal composta e das curvas de interação levando-se em conta os efeitos das tensões residuais, visando avaliar a precisão e consistência do método de análise avançada proposto em comparação com os procedimentos da ABNT NBR 8800: 2008.

5.6.2 Resistência Plástica da Seção Transversal

Considerando-se o problema plano, as curvas de interação dadas pelas Eq. (5.23) e Eq. (5.24) podem ser simplificadas para se definir uma superfície de resistência plástica, admitindo-se o perfil compacto de *comprimento zero*, com as seguintes expressões:

$$\frac{N}{N_y} + \frac{8M}{9M_{pl}} = 1,0 \quad \text{para} \quad \frac{N}{N_y} \geq 0,2 \quad (5.25)$$

$$\frac{N}{2N_y} + \frac{M}{M_{pl}} = 1,0 \quad \text{para} \quad \frac{N}{N_y} < 0,2 \quad (5.26)$$

onde N e M são a força axial e o momento fletor atuantes, respectivamente; N_y e M_{pl} são a força axial de escoamento e o momento plástico da seção transversal, respectivamente.

DUAN e CHEN apud CHEN et al. (1996) propuseram outras equações para considerar os esforços combinados, força axial e momento fletor, aplicadas para vários tipos de seções duplamente simétricas. Adaptando-se essas equações à nomenclatura da ABNT NBR 8800: 2008, tem-se para perfis “I” e “H” fletindo segundo o eixo de maior inércia:

$$\left(\frac{N}{N_y}\right)^{1,3} + \frac{M}{M_{pl}} = 1,0 \quad (5.27)$$

E para perfis “I” e “H” fletindo segundo o eixo de menor inércia, tem-se:

$$\left(\frac{N}{N_y}\right)^{2,7} + \frac{M}{M_{pl}} = 1,0 \quad (5.28)$$

O estudo a seguir, tem como objetivo determinar a superfície de resistência plástica de uma barra submetida à combinação de força normal e momento fletor e comparar os resultados obtidos numericamente com aqueles obtidos através das equações de interação apresentadas pela ABNT NBR 8800: 2008 e por DUAN e CHEN (1990).

O pilar birrotulado, com esbeltez $l/r = 1,0$, constituído pelo perfil laminado $W 360 \times 79,0$, foi dividido em 10 elementos e sua seção transversal em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma. O aço escolhido foi o *ASTM A36*, cujo módulo de elasticidade $E = 200000 \text{ MPa}$ e resistência ao escoamento $f_y = 250 \text{ MPa}$, com comportamento elastoplástico perfeito. O carregamento foi incrementado gradativamente de 0,5% até atingir a força de escoamento.

O pilar apresenta uma força de escoamento $N_y = 2475 \text{ kN}$ e momentos plásticos iguais a $M_{pl,x} = 35064 \text{ kNcm}$ e $M_{pl,y} = 9002 \text{ kNcm}$, para a flexão segundo os eixos de maior e menor inércia, respectivamente.

DUAN, L. e CHEN, W. F. (1990) *A Yield Surface Equation for Doubly Symmetrical Sections*. Structural Engineering Report nº83, Edmonton, Alberta.

As Figuras 5.22 e 5.23 apresentam as superfícies de resistência plástica para o pilar, analisado através da formulação do presente trabalho, submetidos à flexão segundo os eixos de maior e menor inércia, respectivamente. A curva pontilhada representa as curvas de interação da ABNT NBR 8800: 2008, conforme as Eqs. (5.25) e (5.26) e a curva tracejada representa as curvas propostas por DUAN e CHEN apud CHEN et al. (1996), conforme as Eqs. (5.27) e (5.28).

Pode-se observar que as curvas de interação da ABNT NBR 8800: 2008 dadas pelas Eqs. (5.25) e (5.26), as quais são aplicadas, tanto para a resistência em relação ao eixo de maior inércia quanto em relação ao eixo de menor inércia, fornecem um bom ajuste para o limite inferior da resistência segundo o eixo de maior inércia. Entretanto, elas são bastante conservadoras para a resistência segundo o eixo de menor inércia.

As curvas de DUAN e CHEN apud CHEN et al. (1996), descritas pelas Eqs. (5.27) e (5.28), representam uma curva única de fácil aplicação nos cálculos em geral e fornecem um bom ajuste para o limite inferior da resistência última para ambos os eixos, de maior e menor inércia, quando comparadas com os resultados do programa.

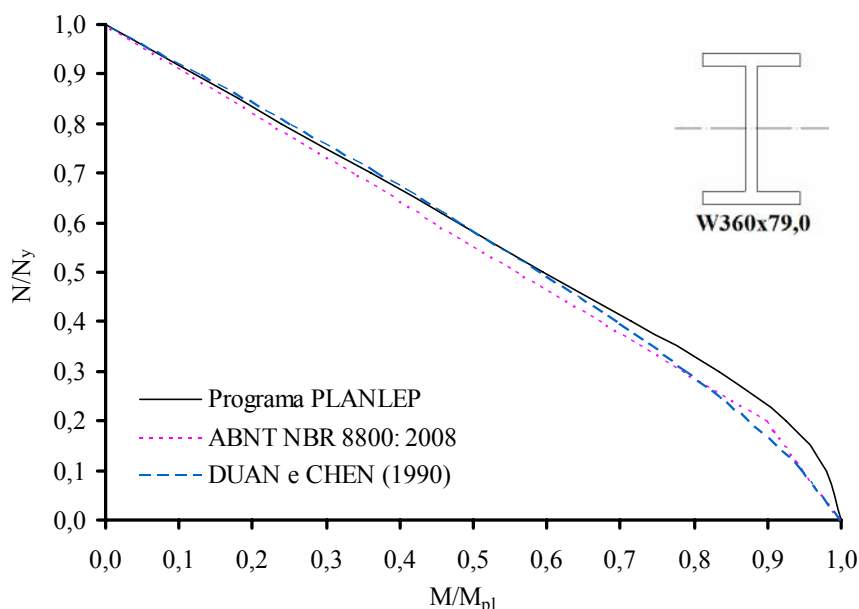


FIGURA 5.22 – Superfície de resistência plástica para perfil laminado fletido segundo o eixo de maior inércia

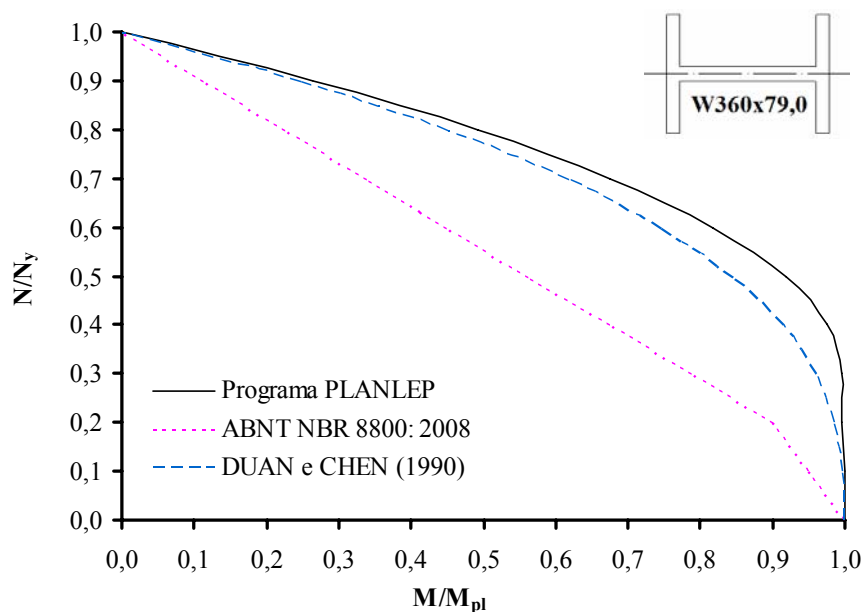


FIGURA 5.23 – Superfície de resistência plástica para perfil laminado fletido segundo o eixo de menor inércia

A Figura 5.24 mostra as superfícies de resistência plástica para o perfil compacto $W 360x79,0$ considerando-se valores característicos e de cálculo, submetido à combinação de força normal de compressão ou tração e momento fletor segundo o eixo de maior inércia. O aço adotado é o *ASTM A36* apresentando comportamento elastoplástico perfeito.

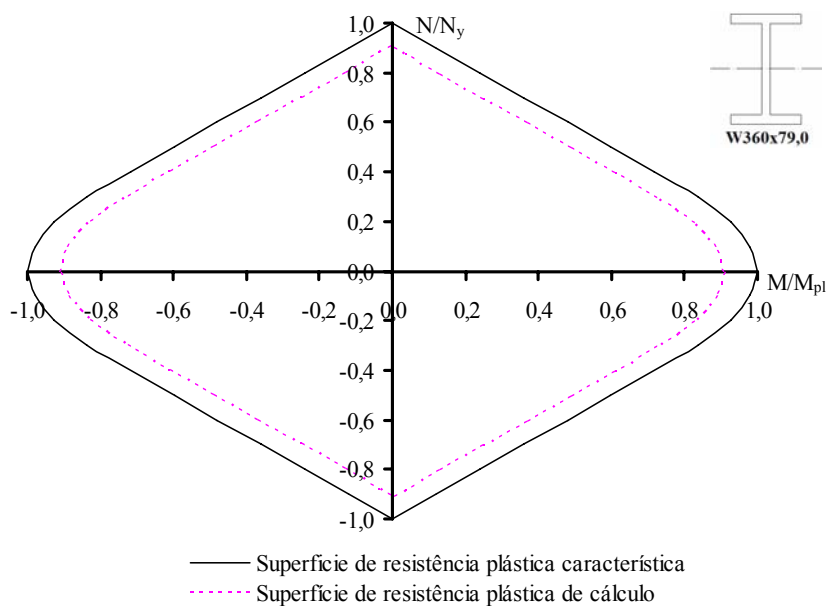


FIGURA 5.24 – Superfícies de resistência plástica, característica e de cálculo, para a seção transversal de perfis I laminados, segundo o eixo de maior inércia

Observa-se que, a superfície de resistência plástica de cálculo, representada pela curva pontilhada, situa-se numa região de segurança, localizada no interior da superfície de resistência plástica característica.

5.6.3 Comparação entre as Curvas de Interação da Análise Avançada e da NBR 8800: 2008

Nesta seção comparam-se as curvas de interação obtidas pela análise avançada, levando-se em conta as calibrações anteriormente realizadas, com as curvas obtidas usando-se as equações de interação da ABNT NBR 8800: 2008. Para isso, é analisado um pilar birrotulado submetido à ação combinada de força normal e momento fletor, segundo os eixos de maior e menor inércia.

Quando contenções laterais apropriadas e perfis de seção compacta são empregados, as equações de interação, Eqs. (5.23) e (5.24), podem ser reescritas de forma simplificada, conforme abaixo:

$$\frac{N_{Sk}}{N_{Rk}} + \frac{8M_{Sk}}{9M_{Rk}} = 1,0 \quad \text{para} \quad \frac{N_{Sk}}{N_{Rk}} \geq 0,2 \quad (5.29)$$

$$\frac{N_{Sk}}{2N_{Rk}} + \frac{M_{Sk}}{M_{Rk}} = 1,0 \quad \text{para} \quad \frac{N_{Sk}}{N_{Rk}} < 0,2 \quad (5.30)$$

onde,

N_{Sk} é a força axial solicitante característica de compressão;

$N_{Rk} = \chi N_y$ é a força axial resistente nominal;

$M_{Sk} = B_1 M$ é o momento fletor solicitante característico em teoria de segunda ordem;

$M_{Rk} = M_{pl}$ é o momento fletor resistente nominal, neste caso igual ao momento fletor plástico.

Por se tratar de um pilar isolado, sujeito à momentos fletores iguais que causam curvatura simples, o fator de amplificação B_1 , de acordo com o *anexo D* da ABNT NBR 8800: 2008, é dado por:

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \frac{N_{sd1}}{N_e}} \geq 1,0 \quad (5.31)$$

onde $C_m = 1,0$ é o coeficiente de equivalência de momentos, N_{sd1} é a força axial de compressão solicitante, em análise de primeira ordem e N_e é a carga de flambagem elástica de Euler.

Para a análise numérica, o pilar com índices de esbeltez $\lambda = l/r$ iguais a 40, 80 e 140 foi dividido em 10 elementos e a seção transversal do perfil *W 200x46,1* em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma. O aço estrutural adotado é o *ASTM A36* com comportamento e propriedades físicas apresentados na Fig. 5.1 e Tab. 5.1. Adotou-se uma imperfeição geométrica inicial linear e para as tensões residuais, a distribuição linear nas mesas e comportamento constante na alma, sendo $\sigma_{rc} = -0,5f_y$.

As Figuras 5.25 e 5.26 apresentam as curvas de interação para o pilar ideal (livre de imperfeições), para a análise avançada (considerando-se a combinação de tensões residuais e imperfeições geométricas iniciais de $L/1500$) e para ABNT NBR 8800: 2008 (Eqs. (5.29) e (5.30)), segundo os eixos de maior e menor inércia, respectivamente. Além disso, na Fig. 5.26 apresentam-se também as curvas de interação obtidas ao se considerar a Eq. (5.18) no cálculo da força axial resistente nominal.

Considerando-se, primeiramente, a Fig. 5.25, onde se estuda a flexão segundo o eixo de maior inércia, observa-se um comportamento similar entre as curvas da análise avançada e da ABNT NBR 8800: 2008, para os índices de esbeltez estudados. Entretanto, os resultados da norma brasileira são geralmente maiores do que aqueles obtidos pela análise avançada, porém acredita-se que estejam dentro dos limites considerados aceitáveis com relação à confiabilidade estrutural. Os resultados para o

pilar ideal representam um limite superior em relação aqueles da análise avançada, como esperado.

Analisando-se a Fig. 5.26 para a flexão segundo o eixo de menor inércia, pode-se observar um comportamento distinto entre as curvas da análise avançada e da ABNT NBR 8800: 2008 para os índices de esbeltez intermediários e altos. Os resultados da norma brasileira são, geralmente, muito maiores do que aqueles obtidos pela análise avançada, sugerindo que, ao se aplicar as curvas de interação da ABNT NBR 8800: 2008 em relação ao eixo de menor inércia, tem-se uma redução no índice de confiabilidade em comparação ao eixo de maior inércia.

Quando os resultados da análise avançada são comparados com aqueles obtidos pela Eq. (5.18) observa-se uma melhor correlação entre essas curvas para os índices de esbeltez intermediários e altos.

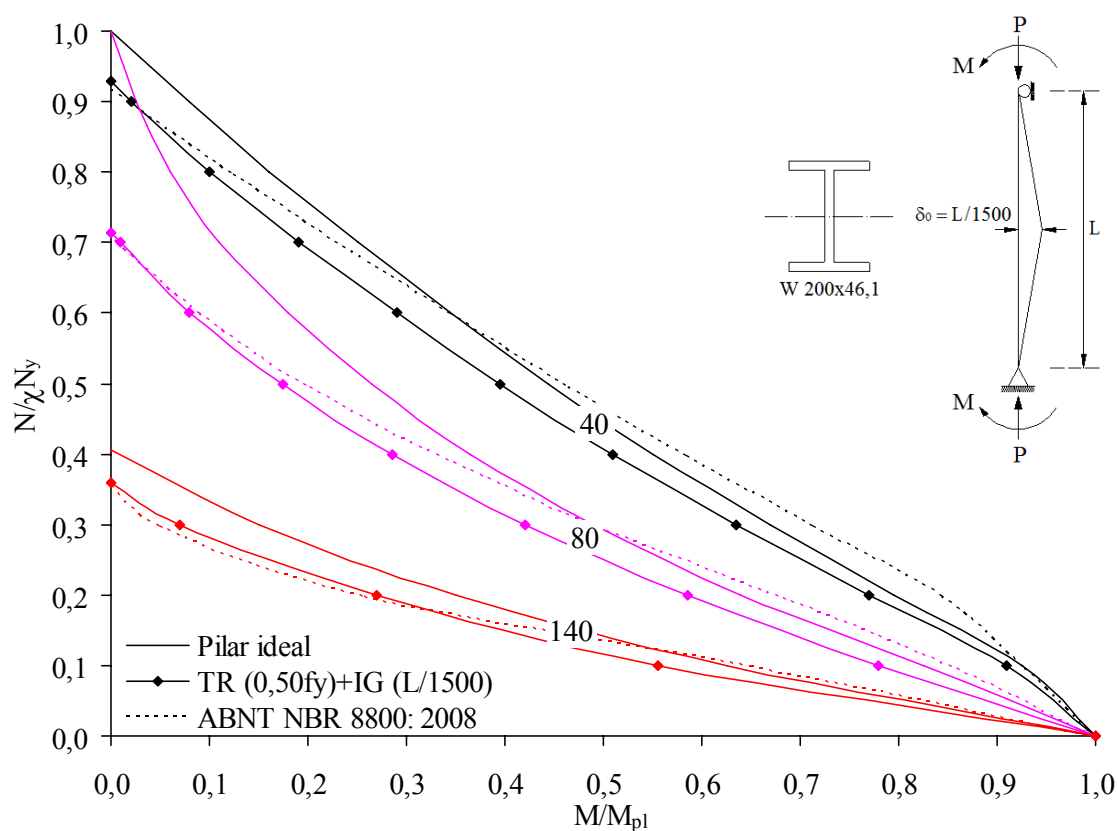


FIGURA 5.25 – Comparação de curvas de interação para o eixo de maior inércia

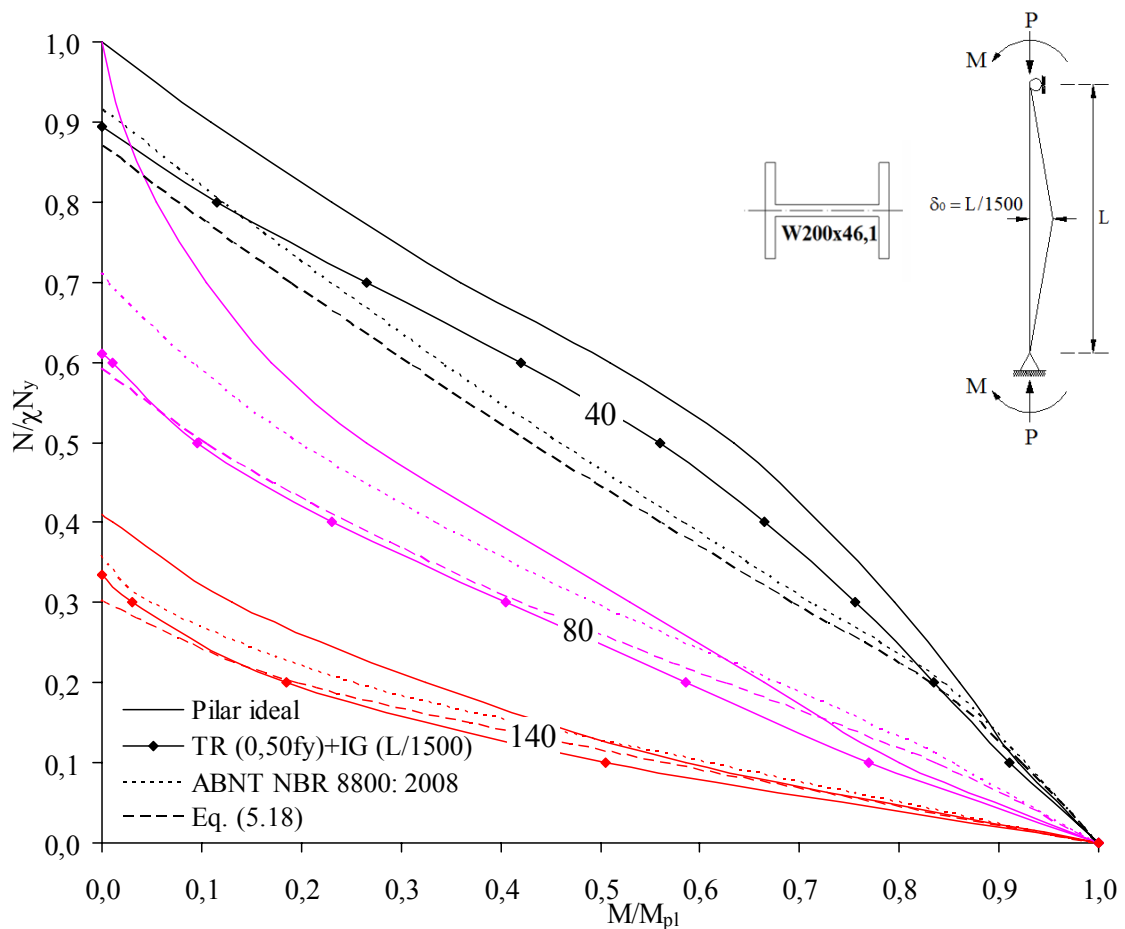


FIGURA 5.26 – Comparação de curvas de interação para o eixo de menor inércia

5.6.4 Exemplo Numérico para Dimensionamento ao Esforço Combinado de Força Normal e Momento Fletor

O exemplo a seguir, adaptado de FAKURY (2009), tem como objetivo verificar se a viga flexo-comprimida atende aos estados-limites últimos e de serviço reversível. Os resultados obtidos pela análise avançada deste trabalho são comparados com aqueles obtidos pela ABNT NBR 8800: 2008.

A Figura 5.27 mostra uma viga biapoiada em perfil compacto $W 360 \times 101$, fabricado em aço $ASTM A572$ -Grau 50, submetida a um carregamento uniformemente distribuído composto por $0,18 \text{ kN/cm}$ devido ao peso próprio de elementos construtivos, industrializados com adições “in loco” e por $0,54 \text{ kN/cm}$ devido à sobrecarga de cobertura, e uma força axial de compressão igual a 800 kN decorrente do vento (valores

característicos). A viga possui 600 cm de comprimento e é totalmente impedida de se deslocar lateralmente. A flexão ocorre em relação ao eixo de maior inércia.

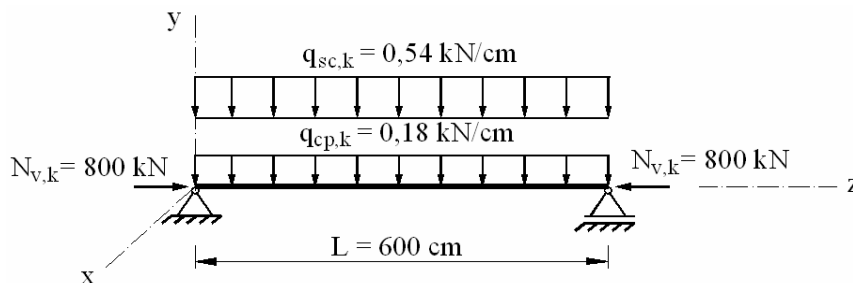


FIGURA 5.27 – Viga biapoiada flexo-comprimida

A viga é verificada quanto aos estados-limites últimos e de serviço, seguindo os procedimentos da ABNT NBR 8800: 2008 e, posteriormente, os resultados são comparados com aqueles obtidos pela análise avançada.

1A) Verificações para Estado-limite Último (ELU) segundo a NBR 8800: 2008 (ver Anexo B3 - Dimensionamento ao Esforço Combinado de Força Normal e Momento Fletor):

Hipótese 1: Sobrecarga como ação variável principal

$$\frac{N_{c,Sd}}{2N_{c,Rd}} + \frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} = \frac{672}{2 \times 3627} + \frac{49797}{59243} = 0,93 \leq 1,0 \Rightarrow OK$$

Hipótese 2: Vento como ação variável principal

$$\frac{N_{c,Sd}}{N_{c,Rd}} + \frac{8M_{x,Sd}}{9M_{x,Rd}} = \frac{1120}{3627} + \frac{8 \cdot 43416}{9 \cdot 59243} = 0,96 \leq 1,0 \Rightarrow OK$$

1B) Verificações para Estado-limite de Serviço (ELS) segundo a NBR 8800: 2008 (ver Anexo B3 - Dimensionamento ao Esforço Combinado de Força Normal e Momento Fletor):

Hipótese 1:

$$q_{ser} = 0,558 \text{ kN/cm} \text{ e } N_{ser} = 0$$

$$y_{m\acute{a}x} = 1,55 \text{ cm} < 2,40 \text{ cm} \rightarrow \text{OK}.$$

Hipótese 2:

$$q_{ser} = 0,504 \text{ kN/cm} \text{ e } N_{ser} = 240 \text{ kN}$$

$$y_{m\acute{a}x} = 1,40 \text{ cm} < 2,40 \text{ cm}$$

2A) Resultados da Análise Avançada para Estado-limite Último (ELU)

Para a implementação dos dados do programa a viga foi discretizada em 10 elementos iguais e a seção transversal em 50 fatias, sendo 20 para cada mesa e 10 para a alma. O aço *ASTM A572-Grau 50* apresenta um comportamento conforme mostrado na Fig. 5.5 e Tab. 5.4. Uma distribuição de tensão residual linear nas mesas e constante na alma, com $\sigma_{rc} = 0,5f_y$, foi considerada, assim como uma imperfeição geométrica linear, com amplitude máxima da imperfeição de $L/1500$ no meio do vão da viga.

De acordo com os resultados da análise numérica, a viga submetida à combinação de esforços dada pela *hipótese 1*, suporta 1,8% acima do carregamento total majorado, enquanto que o dimensionamento através da equação de interação da norma apresenta uma folga de 7%.

Considerando-se a *hipótese 2*, a análise numérica mostra que a viga entra em colapso com 98,3% da carga total aplicada, ou seja, a viga não suporta o carregamento de cálculo previsto, devendo ser redimensionada. O dimensionamento através da equação de interação da norma apresenta uma folga de 4%.

2B) Resultados da Análise Avançada para Estado-limite de Serviço (ELS)

Considerando-se o *ELS*, ambas as hipóteses satisfazem os limites prescritos pela norma, com flechas iguais a:

Hipótese 1: $y_{m\acute{a}x} = 1,58 \text{ cm} < 2,40 \text{ cm} \rightarrow \text{OK}.$

Hipótese 2: $y_{m\acute{a}x} = 1,42 \text{ cm} < 2,40 \text{ cm} \rightarrow \text{OK}.$

5.7 Ligações Semirrígidas

Como visto no capítulo 4, o comportamento da curva momento \times rotação para qualquer tipo de ligação é não linear para toda a variação do carregamento. Neste trabalho as curvas características das ligações são modeladas usando-se curvas multilinearizadas, capazes de descrever com adequada precisão o comportamento real $M-\theta_r$ da ligação.

Para efeito de projeto, o valor da resistência de cálculo ao momento fletor de uma ligação ($M_{u,Rd}$) é dado pela razão entre o momento fletor último característico (M_{uk}) e o coeficiente de ponderação (γ_{af}) igual a 1,10. Esta proposta é válida para as curvas $M-\theta_r$ obtidas por modelos analíticos e mecânicos que não incluam fatores de ponderação de resistência em sua formulação.

5.8 Exemplos de Projeto

No dimensionamento dos pórticos semirrígidos devem ser considerados os seguintes fatores que certamente afetam o comportamento do sistema estrutural:

- *A rigidez, a resistência e a capacidade rotacional das ligações* são fatores considerados críticos para muitas estruturas;
- *A resistência e estabilidade do pórtico e de seus componentes.* Os efeitos das ligações parcialmente restringidas na resistência última das barras e do pórtico devem ser considerados;
- *O estado-limite de serviço da estrutura e das suas ligações.* As deformações das ligações e seus efeitos na estrutura, sob cargas de serviço, devem ser consideradas.

Os exemplos a seguir têm como objetivos realizar a análise e o dimensionamento de pórticos semirrígidos de aço através do programa desenvolvido considerando todos os atributos não lineares apresentados neste trabalho. Em seguida, os resultados obtidos com os procedimentos da ABNT NBR 8800: 2008 são comparados com aqueles obtidos pela análise avançada.

5.8.1 Pórtico de Dois Andares e Um Vão

O pórtico semirrígido de dois andares e um vão de CHEN et al. (1996), estudado na seção 4.6.2.2, é agora dimensionado para a geometria, dimensões e o carregamento característico mostrados na Fig. 5.28. O carregamento vertical é composto pelas contribuições de peso próprio e de sobrecarga, na mesma proporção. O carregamento permanente se deve ao peso próprio de elementos construtivos industrializados com adições “in loco” e a sobrecarga é devida a elevadas concentrações de pessoas. A força horizontal aplicada no topo de cada andar é decorrente do vento.

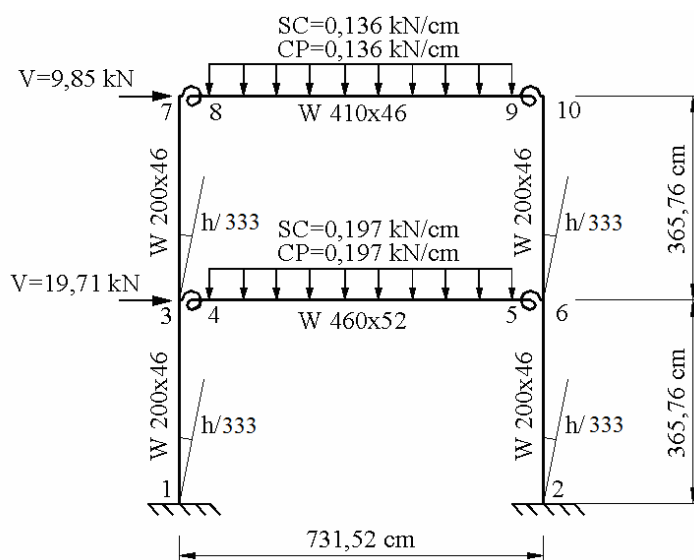


FIGURA 5.28 – Pórtico de dois andares e um vão adaptado de CHEN et al. (1996)

Todas as seções transversais são compactas, de modo a garantir que flambagem local não limite a capacidade de rotação das barras e as barras do pórtico são adequadamente contidas fora do plano. As vigas são conectadas aos pilares, com suas almas no plano do pórtico por ligações com cantoneiras de topo e de assento e duplas cantoneiras na alma. Todas as barras são constituídas de aço *ASTM A36*, cuja lei constitutiva e principais propriedades de cálculo são aquelas apresentadas na Fig. 5.5 e na Tab. 5.4, respectivamente. A deformação por cisalhamento é considerada através da teoria de Timoshenko. As imperfeições geométricas são consideradas explicitamente na análise, onde se assume que todos os pilares do pórtico apresentam uma inclinação de $h/333$, sendo h a altura do andar. A distribuição linear nas mesas e constante na alma para representar as tensões residuais, com $\sigma_{rc}=0,50f_y$, é considerada na análise.

Para implementação dos dados do programa as vigas foram divididas em 4 elementos e os pilares em 2 elementos iguais. As seções transversais foram divididas em 50 fatias para considerar as tensões residuais, sendo 20 fatias em cada mesa e 10 fatias na alma.

Ligações semirrígidas:

O modelo de três parâmetros é usado para construir as curvas multilíneas de projeto das ligações. Cinco tipos de ligações são avaliadas, variando-se apenas a espessura das cantoneiras de topo e de assento, definidas como *C-3/8*, *C-1/2*, *C-9/16*, *C-5/8* e *C-3/4*. O comportamento $M-\theta_r$ das ligações é mostrado na Fig. 5.29, onde as retas pontilhadas representam os limites de classificação das ligações quanto à rigidez, segundo a ABNT NBR 8800: 2008, indicando que todas são semirrígidas.

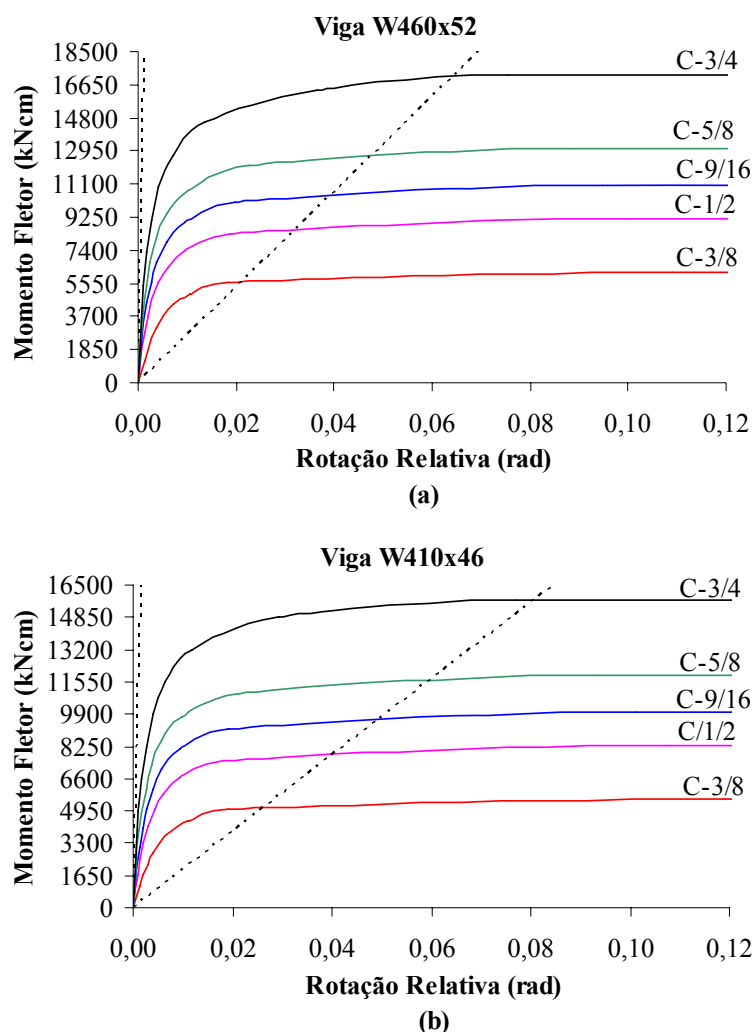


FIGURA 5.29 – Comportamento e classificação das ligações: (a) viga inferior, (b) viga superior

Os parâmetros de cálculo dessas ligações são apresentados na Tab. 5.12 a seguir.

TABELA 5.12 – Parâmetros de cálculo das ligações para o modelo de três parâmetros

Tipo de ligação	W 460x52			W 410x46		
	$M_{u,Rd}$ (kNcm)	$k_{i,Rd}$ (kNcm/rad)	n	$M_{u,Rd}$ (kNcm)	$k_{i,Rd}$ (kNcm/rad)	n
C-3/8	6224	1104663	1,49	5577	893402	1,55
C-1/2	9275	2611254	1,20	8361	2115117	1,27
C-9/16	11268	3796239	1,10	10169	3077286	1,16
C-5/8	13486	5346524	1,00	12182	4337251	1,06
C-3/4	18211	9799010	0,81	16496	7961116	0,88

A Fig. 5.30 e a Tab. 5.13 apresentam os pares momento fletor e rotação relativa, para o comportamento multilinear, onde θ_f representa a capacidade de rotação máxima da ligação, obtida pela Eq. (4.10), de BJORHOVDE et al. (1990).

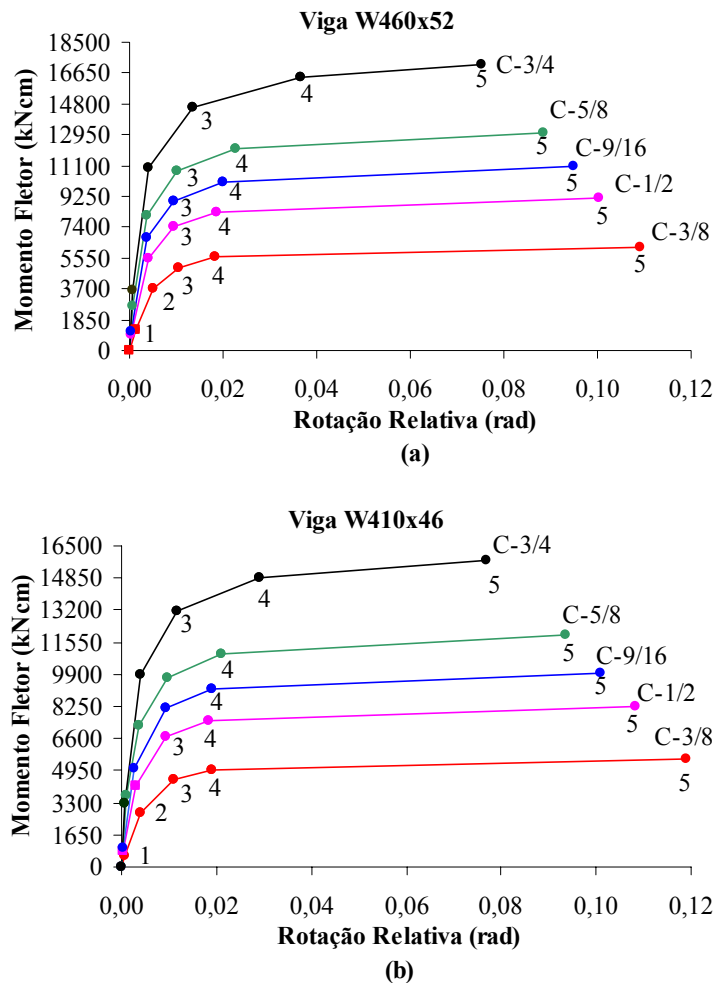


FIGURA 5.30 – Comportamento das ligações pelo modelo multilinear: (a) viga inferior, (b) viga superior

TABELA 5.13 – Parâmetros das ligações para o modelo multilinear

Viga	Ligação	Momento Fletor (kNcm)					Rotação Relativa (rad)				
		M ₁	M ₂	M ₃	M ₄	M ₅	θ ₁	θ ₂	θ ₃	θ ₄	θ ₅
W 460x52	C-3/8	1244	3732	4976	5598	6174	0,0012	0,0052	0,0105	0,0184	0,1091
	C-1/2	927	5562	7416	8343	9137	0,0004	0,0041	0,0095	0,0188	0,1003
	C-9/16	1126	6756	9008	10134	11046	0,0003	0,0038	0,0095	0,0198	0,0949
	C-5/8	2696	8088	10784	12132	13112	0,0006	0,0038	0,0101	0,0226	0,0884
	C-3/4	3640	10920	14560	16380	17150	0,0005	0,0042	0,0137	0,0365	0,0754
W 410x46	C-3/8	558	2788	4462	5019	5540	0,0006	0,0041	0,0110	0,0190	0,1190
	C-1/2	836	4180	6688	7524	8264	0,0004	0,0030	0,0095	0,0183	0,1083
	C-9/16	1017	5084	8134	9151	10006	0,0004	0,0028	0,0094	0,0192	0,1010
	C-5/8	3654	7307	9743	10961	11909	0,0011	0,0038	0,0098	0,0210	0,0936
	C-3/4	3297	9891	13188	14837	15750	0,0006	0,0039	0,0117	0,0291	0,0769

Em cada avaliação apenas um tipo de ligação é usado para todas as conexões entre viga e pilar do pórtico. O tipo de ligação mais econômico que satisfaça a todas as exigências de cálculo é selecionado. As combinações de ações para verificação dos ELU e ELS são detalhadas a seguir.

Estado-limite Último: O pórtico é calculado usando as seguintes combinações de ações:

Hipótese 1: $1,4CP + 1,5SC + 0,6 \times 1,4V$

Hipótese 2: $1,4CP + 1,5 \times 0,7SC + 1,4V$

onde, CP corresponde à carga permanente, SC à sobrecarga e V ao vento.

Estado-limite de Serviço considerando-se as combinações frequentes de carga:

A combinação de ações usada para o cálculo do deslocamento vertical máximo das vigas é dada por: $1,0CP + 0,6SC$, sendo que as vigas de cobertura e de piso devem possuir deslocamentos verticais máximos de $L/250$ e $L/350$, respectivamente.

A combinação de ações usada para o cálculo do deslocamento horizontal é dada por: $1,0CP + 0,4SC + 0,3V$. O deslocamento horizontal no topo do pórtico em relação à base não pode ser maior que $H/400$, onde H é a altura total do pórtico. Além disso, o deslocamento horizontal relativo entre dois pisos consecutivos não pode superar a $h/500$, onde h é a altura do andar.

Análise dos resultados obtidos pela Análise Avançada:

Resistência máxima do pórtico

A Tabela 5.14 mostra o resultado do fator da carga limite de resistência do pórtico com ligações rotuladas, semirrígidas e totalmente rígidas. O fator de carga corresponde à relação entre a carga aplicada e a carga de cálculo majorada da estrutura. Para o fator de carga igual a unidade tem-se a aplicação total do carregamento de cálculo. Para esta estrutura em particular, a combinação de carga dada pela hipótese 1 é mais desfavorável controlando a resistência limite do pórtico, com exceção do pórtico com ligações rotuladas. Neste caso, a hipótese 2, que considera o vento como ação variável principal, é a que governa a resistência do pórtico.

Como esperado, a carga limite do pórtico com ligações totalmente rígidas é maior do que aquelas com ligações semirrígidas. Para os pórticos semirrígidos submetidos à combinação de carga da hipótese 1, que considera a sobrecarga como ação variável principal, verifica-se que, somente o pórtico com as ligações semirrígidas C-3/4, alcança a resistência máxima, para uma relação de carga superior a 1. O pórtico com as outras ligações semirrígidas entraram em colapso antes de atingirem o carregamento total da estrutura.

Observa-se que, a resistência máxima do pórtico com ligações totalmente rígidas é aproximadamente 47% maior do que aquela do pórtico com ligações rotuladas e as relações de carga para os pórticos semirrígidos variaram de 72% a 92% em relação ao pórtico totalmente rígido.

TABELA 5.14 – Fator de carga para o limite de resistência do pórtico com ligações rotuladas, semirrígidas e rígidas

Tipo de ligação	Fator da carga limite	
	Hipótese 1	Hipótese 2
Rotulada	0,75	0,69
C-3/8	0,79	0,92
C-1/2	0,85	0,98
C-9/16	0,90	1,03
C-5/8	0,97	1,09
C-3/4	1,01	1,16
Rígida	1,10	1,25

Flechas máximas nas vigas

Os resultados das flechas máximas nas vigas sob a combinação de ações de serviço apropriada são mostrados na Tab. 5.15. Observa-se que a flecha máxima da viga inferior (viga 45), para os pórticos com ligações semi-rígidas $C-3/8$ e $C-1/2$, foi superior ao valor limite estipulado pela ABNT BR 8800: 2008, dado por $L/350 = 2,09$ cm. A flecha máxima da viga superior (viga 89), para todos os casos, foi significativamente menor que o valor limite de $L/250 = 2,93$ cm. Portanto, conclui-se que o deslocamento vertical da viga não é um fator limitante no dimensionamento dos pórticos com ligações $C-9/16$, $C-5/8$ e $C-3/4$.

TABELA 5.15 – Flecha máxima nas vigas sob carga de serviço

Tipo de ligação	Combinação de ações: 1,0 CP + 0,6 SC		
	Tipo de viga	Seção transversal	Flecha máxima (cm)
Rotulada	Viga 45	W 460 x 52	-
	Viga 89	W 410 x 46	-
C-3/8	Viga 45	W 460 x 52	2,44
	Viga 89	W 410 x 46	2,25
C-1/2	Viga 45	W 460 x 52	2,13
	Viga 89	W 410 x 46	1,98
C-9/16	Viga 45	W 460 x 52	2,00
	Viga 89	W 410 x 46	1,91
C-5/8	Viga 45	W 460 x 52	1,93
	Viga 89	W 410 x 46	1,85
C-3/4	Viga 45	W 460 x 52	1,84
	Viga 89	W 410 x 46	1,80
Rígida	Viga 45	W 460 x 52	1,56
	Viga 89	W 410 x 46	1,63

Deslocamentos laterais máximos do pórtico

Os resultados dos deslocamentos laterais máximos no topo e dos deslocamentos relativos entre os andares do pórtico sob a combinação de ações de serviço apropriada são apresentados na Tab. 5.16. Os resultados indicam que os pórticos com ligações semirrígidas apresentam deslocamentos laterais máximos no topo da ordem de 1,37 a 2,65 vezes o deslocamento do pórtico com ligações totalmente rígidas. Esses deslocamentos, assim como os deslocamentos relativos entre andares, aumentam

quando as espessuras das cantoneiras de topo e de assento das ligações são reduzidas de 3/4” para 3/8”.

TABELA 5.16 – Deslocamento lateral no topo e relativo entre andares do pórtico sob a carga de serviço

Tipo de ligação	Combinação de ações: 1,0 CP + 0,4 SC + 0,3 V		
	Deslocamento no topo (cm)	Deslocamento relativo entre andares (cm)	
		Base - 1º andar	1º andar - 2º andar
Rotulada	-	-	-
C-3/8	1,442	0,678	0,764
C-1/2	0,953	0,512	0,441
C-9/16	0,790	0,442	0,348
C-5/8	0,790	0,437	0,353
C-3/4	0,749	0,424	0,325
Rígida	0,545	0,339	0,206

Segundo critérios da ABNT NBR 8800: 2008 os deslocamentos laterais máximos não podem ultrapassar $H/400 = 1,83 \text{ cm}$ no topo e nem $h/500 = 0,73 \text{ cm}$ entre andares da estrutura. Dessa forma, com exceção dos pórticos com ligações rotuladas e com a ligação C-3/8, todos os outros pórticos, com ligações semirrígidas e totalmente rígidas satisfazem aos limites da norma.

Rotação relativa necessária da ligação

Na Tabela 5.17 comparam-se os resultados da rotação relativa necessária obtidos pelo programa, com a capacidade de rotação disponível da ligação, calculada com base na expressão de BJORHOVDE et al. (1990). Observa-se que as rotações relativas das ligações diminuem quando a rigidez da ligação aumenta. Para todos os casos, a capacidade máxima disponível da ligação não foi atingida, não havendo, portanto, falha nas ligações consideradas. Conclui-se que a rotação relativa da ligação não é um fator limitante no dimensionamento do pórtico.

TABELA 5.17 – Rotação relativa necessária e capacidade de rotação disponível da ligação sob carga majorada

Combinação de ações: 1,4 CP + 1,5 SC + 0,84 V		
Ligação	Rotação necessária (rad)	Rotação disponível (rad)
Ligação C-3/8		
C 3-4	0,0217	0,1090
C 5-6	0,0463	0,1090
C 7-8	0,0032	0,1187
C 9-10	0,0204	0,1187
Ligação C-1/2		
C 3-4	0,0148	0,1000
C 5-6	0,0358	0,1000
C 7-8	0,0024	0,1080
C 9-10	0,0144	0,1080
Ligação C-9/16		
C 3-4	0,0147	0,9480
C 5-6	0,0359	0,9480
C 7-8	0,0025	0,1010
C 9-10	0,0119	0,1010
Ligação C-5/8		
C 3-4	0,0144	0,0885
C 5-6	0,0347	0,0885
C 7-8	0,0024	0,0933
C 9-10	0,0093	0,0933
Ligação C-3/4		
C 3-4	0,0097	0,0752
C 5-6	0,0264	0,0752
C 7-8	0,0024	0,0767
C 9-10	0,0054	0,0767

Análise final e dimensionamento:

De acordo com as análises e verificações realizadas, entre as ligações semirrígidas, a ligação C-3/4 é a única que satisfaz a todas as exigências de projeto, sendo, portanto adotada para ambos os andares do pórtico.

Os gráficos da Fig. 5.31 mostram, respectivamente, as curvas fator de carga versus deslocamento lateral no 1º e 2º andares do pórtico (Fig. 5.31-a) e, também, as curvas fator de carga versus flecha no meio do vão das vigas desse pórtico (Fig. 5.31-b). Como os estudos mostraram, o projeto final é controlado pelo tipo de carregamento dado pela

hipótese I (1,4 CP + 1,5 SC + 0,84 V). Portanto, somente os resultados detalhados para esta combinação de ações serão apresentados.

A resposta altamente não linear do pórtico, quando o carregamento majorado é aplicado de forma incremental até o colapso (101%), é causada por diversos fatores considerados nesta análise, como: os efeitos não lineares geométricos, $P-\Delta$ e $P-\delta$, as imperfeições geométricas, a consideração da plasticidade distribuída na seção transversal e no comprimento das barras, as tensões residuais, a deformação por cisalhamento e o comportamento não linear das ligações semirrígidas.

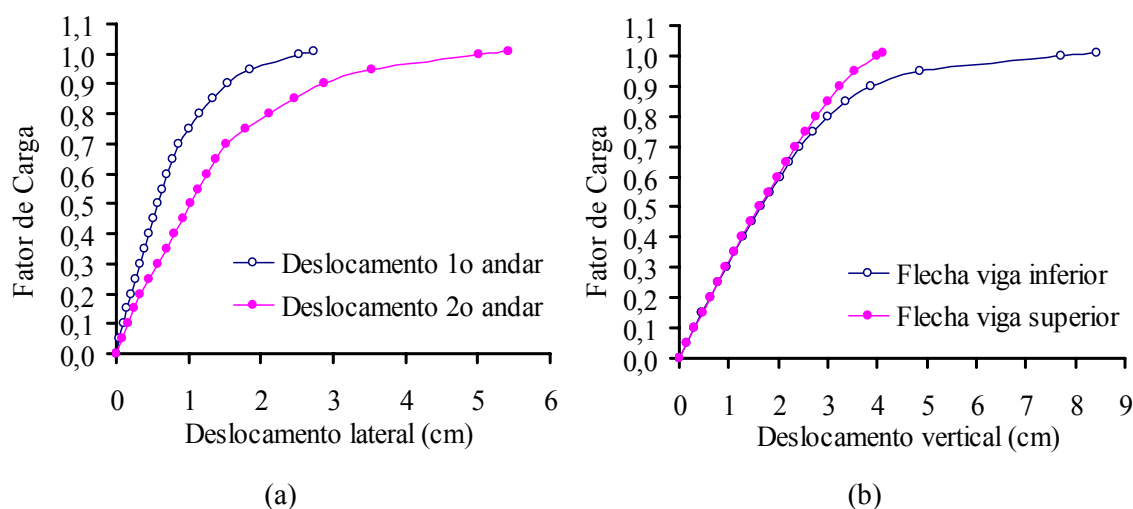


FIGURA 5.31 – Curvas fator de carga-deslocamento: (a) Deslocamento lateral no 1º e 2º andares e (b) Flecha no meio do vão das vigas inferior e superior do pórtico

Conforme mostra o gráfico da Fig. 5.31-a, o deslocamento lateral no topo do pórtico para a carga de colapso foi aproximadamente duas vezes maior do que o deslocamento do primeiro andar e igual a 5,43 cm. Pode-se observar na Fig. 5.31-b um aumento excessivo da flecha no meio do vão da viga do 1º andar, no colapso, igual a 8,42 cm, sendo aproximadamente o dobro da flecha no meio do vão da viga superior.

A Figura 5.32 mostra o percentual de sollicitação em relação à superfície de plastificação nas extremidades dos pilares e nas extremidades e no meio do vão das vigas, além do percentual do momento último nas ligações semirrígidas, para a carga de colapso da estrutura.

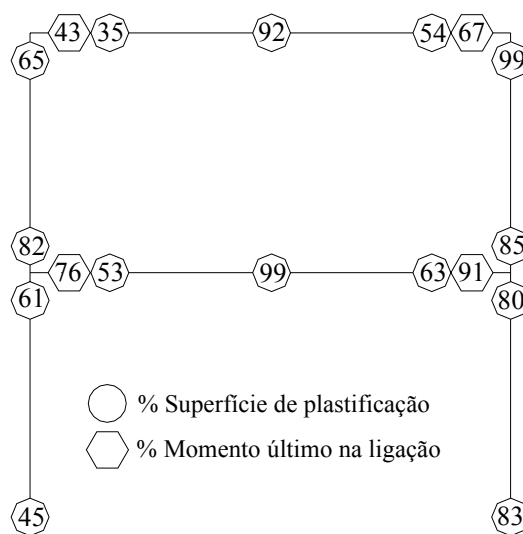


FIGURA 5.32 – Percentuais de solicitação em relação à superfície de plastificação das barras e nas ligações semirrígidas para 101% do carregamento majorado

Observando-se os excessivos deslocamentos laterais no topo do 2º andar do pórtico, conforme mostrado na Fig. 5.31-a e os elevados percentuais de solicitação em relação à superfície de plastificação nos pilares e viga do 2º andar, conforme indicados na Fig. 5.32, conclui-se que, o pórtico semirrígido falha por instabilidade inelástica associada ao mecanismo combinado de viga e de andar no 2º pavimento. Observa-se também que, no nó do topo do lado direito do 1º andar, pode-se caracterizar um mecanismo de nó, devido aos percentuais elevados de solicitação nas extremidades dos pilares (85 % e 80%) e na ligação C₅₋₆ (91%), conforme também mostra a Fig. 5.32.

A máxima carga desse pórtico ocorre para a hipótese I com um fator de carga limite de 1,01, ou seja, 1% maior do que a carga majorada, conforme mostrado na Tab. 5.14. O pórtico satisfaz todas as exigências de serviço. As vigas do 1º e 2º andares apresentam flechas máximas de 1,84 cm e 1,80 cm, respectivamente, para a combinação de ações de serviço (1,0 CP + 0,6 SC), conforme indicado na Tab. 5.15. Essas flechas são menores do que os valores máximos de norma, dados por $L/350=2,09$ cm e $L/250=2,93$ cm, para as vigas do 1º e 2º andar, respectivamente. Para a combinação de ações de serviço 1,0 CP + 0,4 SC + 0,3 V, o máximo deslocamento lateral no topo do pórtico é 0,749 cm e os deslocamentos entre andares são 0,424 cm (base - 1º andar) e 0,325 cm (1º andar - 2º andar). Esses deslocamentos laterais são menores do que os valores máximos permitidos pela norma, $H/400=1,829$ cm e $h/500=0,732$ cm, para o topo do pórtico e

entre andares, respectivamente, conforme mostrado na Tab. 5.16. As capacidades de rotação necessárias das ligações estão bem abaixo das capacidades disponíveis previstas pela equação de BJORHOVDE et al. (1990), como indicado na Tab. 5.17.

A Figura 5.33 mostra os diagramas de momento fletor e força normal para 100% do carregamento majorado considerando-se a hipótese 1 de combinação de carga. Os valores no interior dos retângulos referem-se à força normal em cada barra, as quais são aproximadamente iguais em cada andar. Os momentos fletores máximos, no meio do vão das vigas e nas extremidades dos pilares do 2º andar, são responsáveis pela formação das possíveis rótulas plásticas.

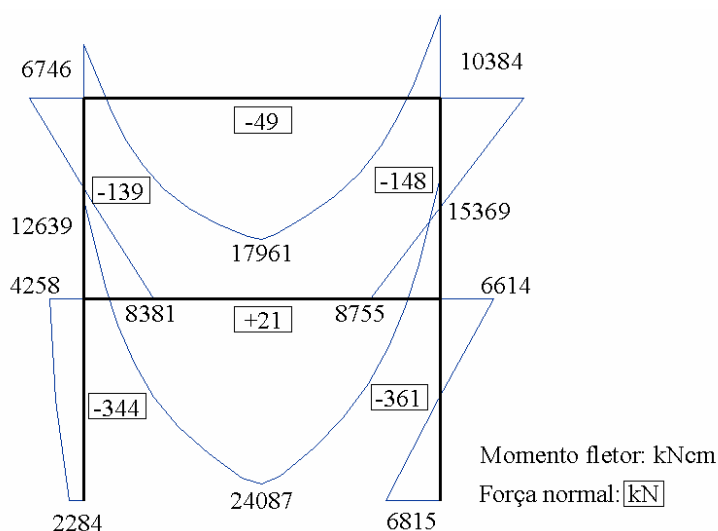


FIGURA 5.33 – Diagrama do momento fletor e da força normal para 100% do carregamento majorado (Análise Avançada)

Comparação com os procedimentos da ABNT NBR 8800: 2008:

Segundo as recomendações da ABNT NBR 8800: 2008, o pórtico com ligações rígidas convencionais foi classificado como de pequena deslocabilidade, uma vez que a relação entre o deslocamento lateral relativo à base do pórtico em teoria de 2ª ordem e aquele em teoria de 1ª ordem foi menor que 1,10, em todos os andares. Portanto, para a determinação dos esforços solicitantes para os estados-limites últimos foi realizada uma análise elástica em teoria de 2ª ordem considerando-se a ligação semirrígida com rigidez inicial constante durante todo o carregamento. A Figura 5.34 mostra os diagramas de momento fletor e força normal para 100% do carregamento majorado considerando-se a

hipótese 1 de combinação de carga. Os valores no interior dos retângulos referem-se à força normal em cada barra, as quais são aproximadamente iguais em cada andar, levando-se a uma relação máxima $P/P_y \cong 0,25$ no primeiro andar.

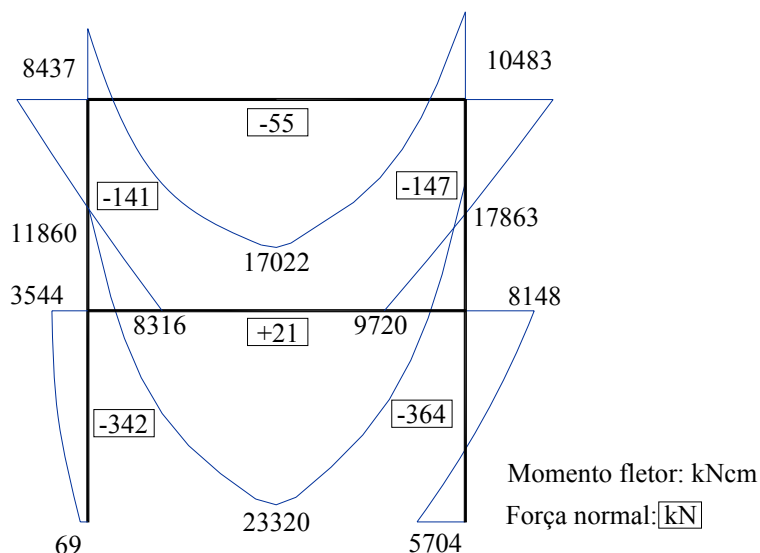


FIGURA 5.34 – Diagrama do momento fletor e da força normal para 100% do carregamento majorado (Análise Elástica em 2ª Ordem)

A Tabela 5.18 mostra os resultados das equações de interação para a verificação aos estados-limites últimos das barras do pórtico, submetidas à combinação de força normal e momento fletor, obtidas dos diagramas das Figs. 5.33 e 5.34. Considerando-se a análise elástica de 2ª ordem pode-se observar que todas as barras do pórtico passam na verificação, com resultados inferiores a limitação fornecida pelas Eqs. (5.23) e (5.24). Pode-se dizer que, pelo dimensionamento segundo os critérios da norma, existe uma folga adicional de 1%, tendo em vista o pilar (6-10), indicando uma excelente correlação com o dimensionamento através da Análise Avançada deste trabalho, que também alcança uma folga adicional de 1%, conforme mostrado na Tab. 5.14.

Considerando-se os resultados da análise avançada para 100% do carregamento, aplicados nas equações de interação, observa-se uma folga adicional de 2%, tendo-se em vista o mesmo pilar 6-10, indicando uma boa correlação com as equações da ABNT NBR 8800: 2008. Entretanto, ao se comparar as duas análises, observa-se claramente a diferença entre a distribuição final dos momentos fletores nas barras do pórtico, indicando, certamente, uma distribuição mais precisa da análise avançada.

TABELA 5.18 – Resultados das equações de interação para verificação ao ELU

Barra	Equação de interação	Análise Elástica de 2ª ordem (Fig. 5.34)	Análise Avançada (Fig. 5.33)
Pilar 1-3	Eq. (5.23)	0,56	0,62
Pilar 3-7	Eq. (5.24)	0,81	0,80
Pilar 2-6	Eq. (5.23)	0,94	0,84
Pilar 6-10	Eq. (5.24)	0,99	0,98
Viga 4-5	Eq. (5.24)	0,94	0,97
Viga 8-9	Eq. (5.24)	0,86	0,91

5.8.2 Pórtico de Onze Andares e Dois Vãos

A Figura 5.35 mostra um pórtico de onze andares e dois vãos de um edifício comercial, onde são também indicados os comprimentos dos vãos das vigas, as alturas dos andares e a numeração dos nós.

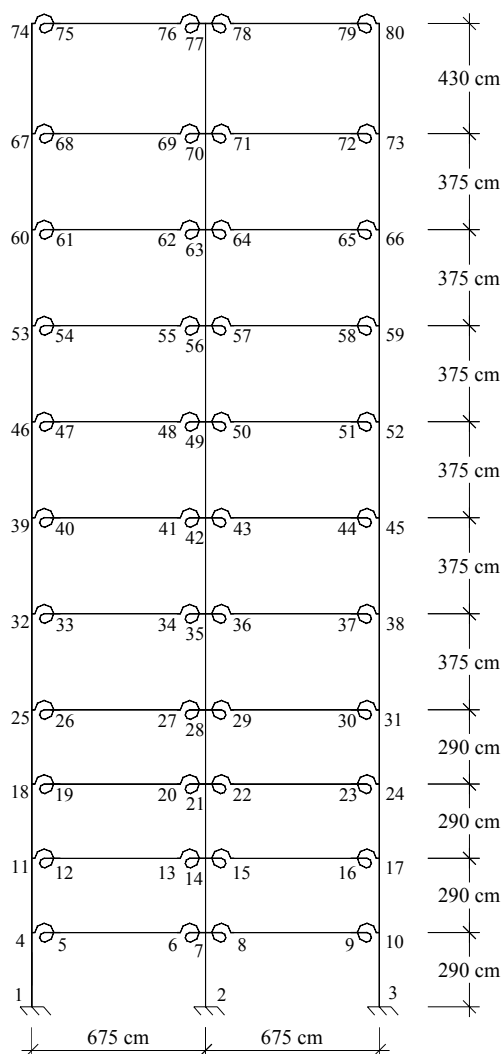


FIGURA 5.35 – Pórtico de 11 andares e 2 vãos adaptada de SILVA (2004)

O modelo é modificado do original estudado por SILVA (2004), substituindo-se a concepção de nós perfeitamente rígidos por ligações utilizando-se placa de extremidade estendida, dimensionadas por AVAKIAN (2007). Para viabilizar a adoção de apenas uma ligação, alteraram-se todos os perfis dos pilares do modelo para *CVS 500x259*. O perfil para todas as vigas foi mantido do pórtico original, dado pelo perfil *W 530x66*.

A Figura 5.36 mostra o carregamento vertical característico constituído pela carga permanente e pela sobrecarga, e o carregamento horizontal nominal devido à ação do vento distribuído ao longo da altura do pórtico. O carregamento permanente se deve ao peso próprio de elementos construtivos industrializados com adições “in loco” e a sobrecarga devida ao uso e ocupação.

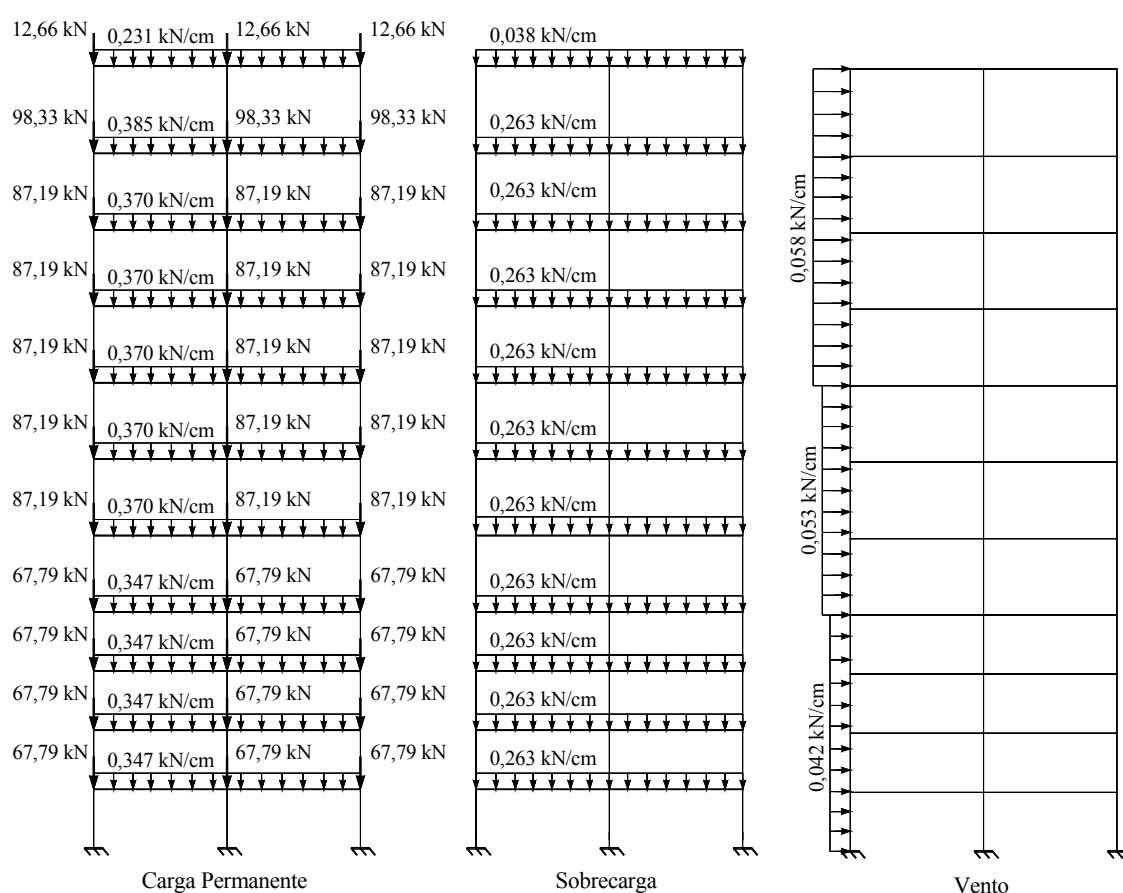


FIGURA 5.36 – Ações nominais do pórtico: permanente, sobrecarga e vento

Os pilares e as vigas são constituídos, respectivamente, pelos aços *USI CIVIL 300* e *ASTM A572-Grau 50*, com comportamento e principais propriedades de cálculo

apresentados na Fig. 5.5 e na Tab. 5.4. A deformação por cisalhamento é considerada através da teoria de Timoshenko. Uma distribuição linear nas mesas e constante na alma para representar as tensões residuais, com $\sigma_r = 0,50f_y$, é considerada na análise. O pórtico é contido fora do plano e as seções transversais das barras são compactas.

Para implementação dos dados do programa as vigas foram divididas em 4 elementos e os pilares em 2 elementos iguais. As seções transversais foram divididas em 50 fatias para considerar as tensões residuais, sendo 20 fatias em cada mesa e 10 fatias na alma.

Ligações semirrígidas:

A ligação com placa de extremidade estendida, mostrada na Fig. 5.37, foi dimensionada por AVAKIAN (2007) com base no método dos componentes, proposto pelo EN 1993-1-8: 2005. O comportamento $M-\theta_r$ da ligação é mostrado na Fig. 5.38, com os pares de rotação relativa e momento fletor de cálculo apresentados entre parênteses e incorporados na análise pelo modelo multilinear desenvolvido. As retas tracejadas representam os limites de classificação das ligações quanto à rigidez, segundo a ABNT NBR 8800: 2008, indicando que a ligação é classificada como rígida.

Os resultados obtidos pela análise avançada, dos esforços solicitantes e deslocamentos do pórtico com ligações com placa de extremidade estendida, são comparados com aqueles obtidos do pórtico rígido convencional.

Posteriormente serão feitas verificações para os pilares do 1º andar, 2-7 e 3-10, e para a viga 36-37 do 5º andar do pórtico, com base nos procedimentos da ABNT NBR 8800: 2008 e os resultados obtidos são comparados com aqueles da análise avançada.

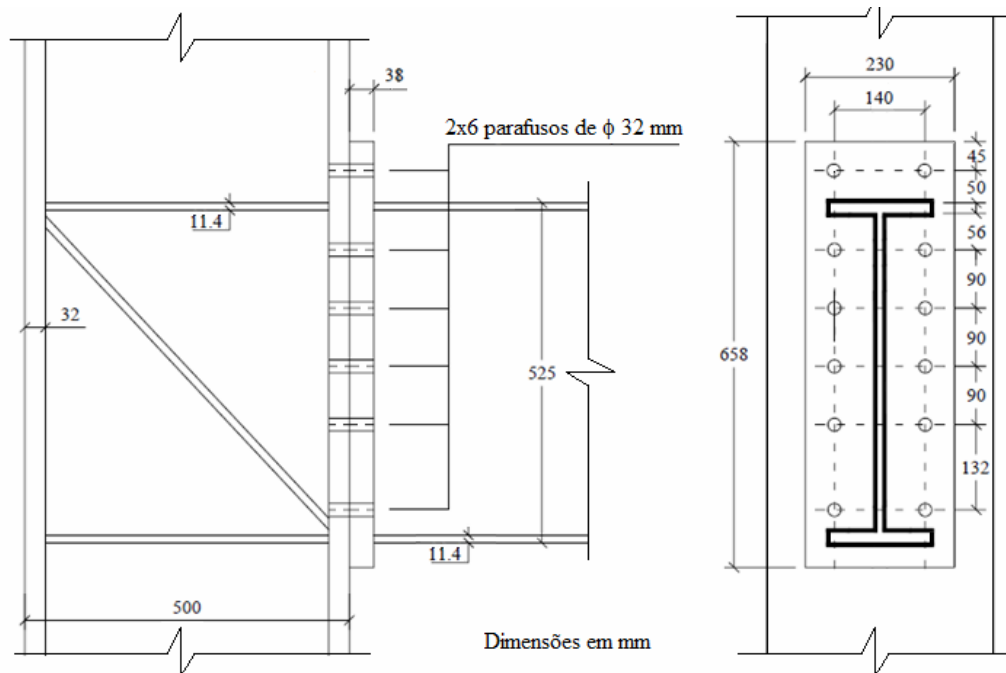


FIGURA 5.37 – Ligação com placa de extremidade estendida de AVAKIAN (2007)

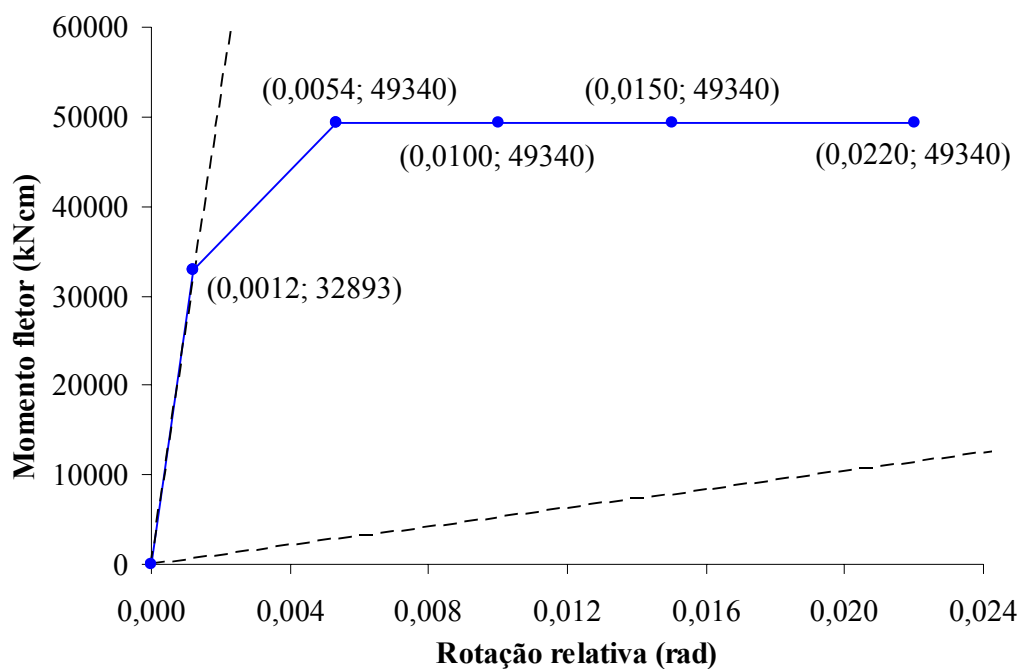


FIGURA 5.38 – Curva momento fletor x rotação relativa da ligação

Análise dos resultados obtidos pela Análise Avançada:

Estado-limite último:

A resistência máxima do pórtico com ligação com placa da extremidade estendida, obtida ao se aplicar a combinação de carga mais desfavorável, na qual a sobrecarga atua como ação variável principal (1,4 CP + 1,5 SC + 0,84 V), é igual a 122% da carga total majorada. A mesma resistência última é obtida para o pórtico rígido convencional, como esperado, uma vez que a ligação adotada é classificada como rígida.

A Figura 5.39 mostra o comportamento carga-deslocamento lateral no topo do pórtico (nó 74) para a combinação do carregamento mais desfavorável (1,4 CP+1,5 SC+0,84 V). Pode-se observar que o modelo com ligação com placa de extremidade estendida apresenta um deslocamento lateral maior do que o modelo tradicional, mas ambos atingem a mesma carga de colapso. Dessa forma, pode-se concluir que, em termos práticos, os nós podem ser modelados como rígidos seguindo os métodos convencionais de análise, quando a ligação é classificada como rígida.

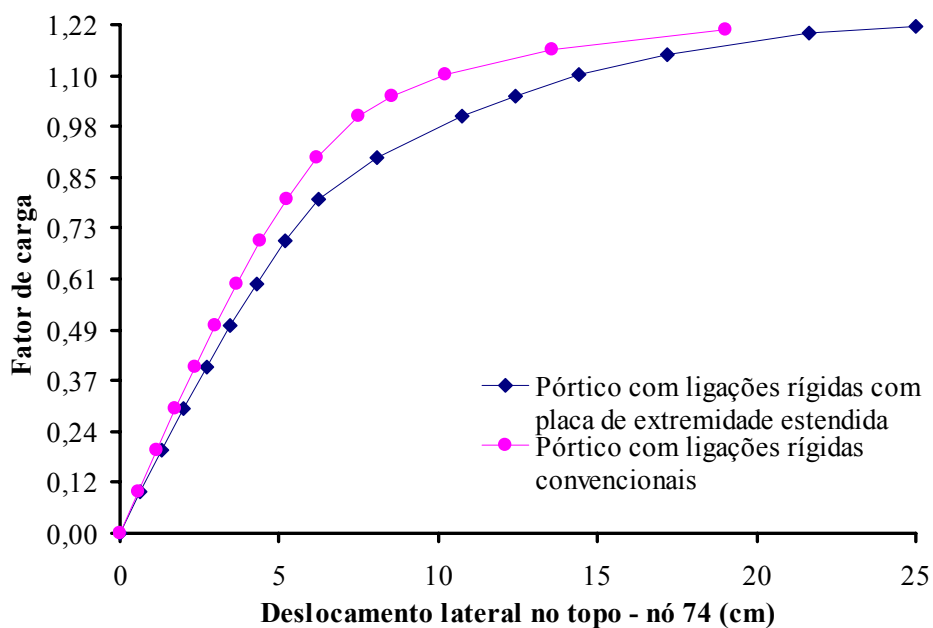


FIGURA 5.39 – Curva fator de carga x deslocamento lateral no topo do pórtico

A Figura 5.40 mostra a similaridade entre o comportamento carga-deslocamento no topo do primeiro andar (nós 4, 7 e 10) para os casos de ligação com placa de extremidade estendida e o convencional. Analogamente ao estudo do deslocamento no topo do pórtico, pode-se observar um aumento excessivo no deslocamento horizontal para um pequeno incremento de carga no instante do colapso, indicando uma possível instabilidade lateral do pórtico no 1º andar.

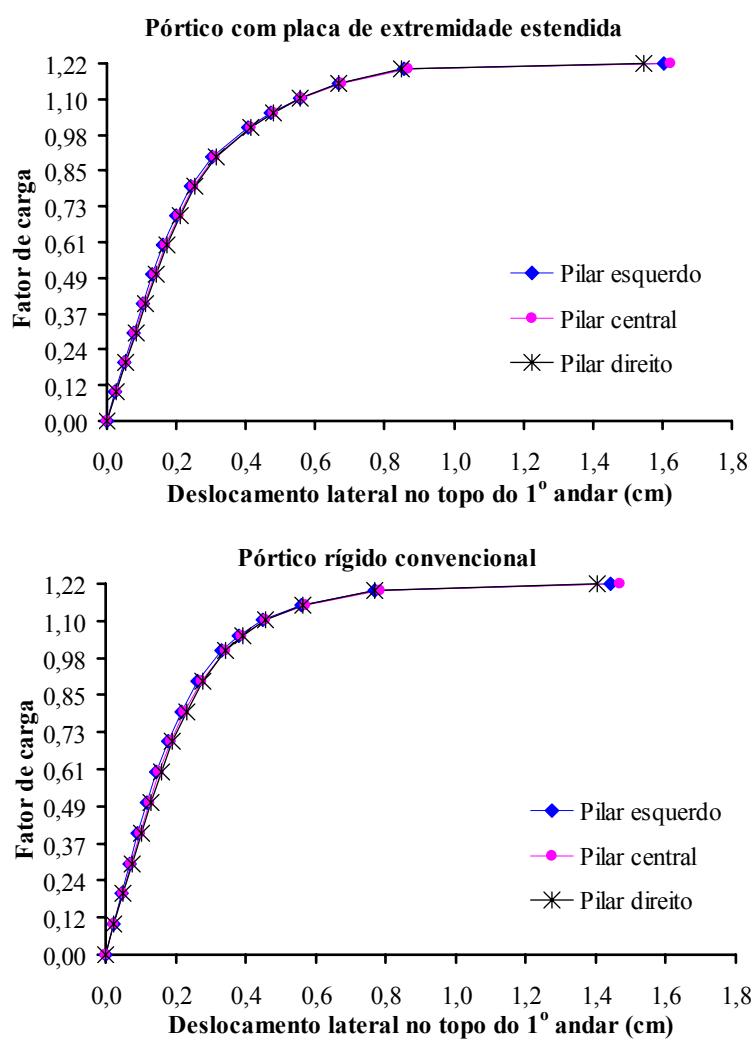


FIGURA 5.40 – Curva fator de carga-deslocamento lateral no topo do 1º andar do pórtico

O diagrama de momento fletor da viga do 5º andar do edifício é mostrado na Fig. 5.41, considerando-se os resultados da análise inelástica avançada para o carregamento anterior ao colapso, para ambos os casos. Pode-se observar a pequena redistribuição de

momentos fletores entre o modelo convencional e o modelo com placa de extremidade estendida, mostrando, novamente, que o modelo tradicional de análise pode ser adotado em situações práticas de projeto e dimensionamento.

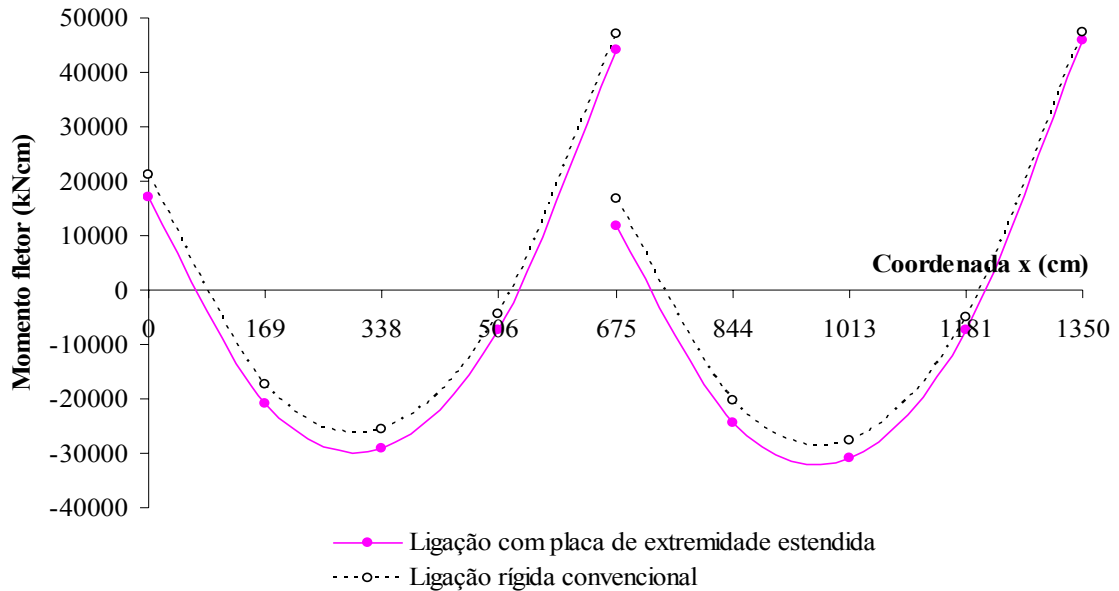


FIGURA 5.41 – Diagrama de momento fletor para a viga do 5º andar para $P/P_w=121\%$

As Figuras 5.42-a, b mostram, respectivamente, os percentuais da sollicitação em relação à superfície de plastificação nas extremidades dos pilares e nas extremidades e no meio do vão das vigas para os pórticos com ligação com placa de extremidade estendida e o convencional, para a carga de colapso. Os percentuais de momento último nas ligações semirrígidas também são apresentados na Fig. 5.42-a.

Pode-se observar na Fig. 5.42 que os pilares do 1º andar estão bastante solicitados, sendo que as extremidades das bases já se encontram praticamente rotuladas. O pilar central é o mais carregado, principalmente até o 4º andar, sendo que, no 1º andar, ele se encontra completamente plastificado. Esta plastificação se deve principalmente à força de compressão atuante. Observa-se também, a formação de rótulas plásticas nas extremidades da direita em praticamente todas as vigas do pórtico, exceto aquelas da cobertura. Dessa forma, de acordo com os resultados apresentados, dos deslocamentos laterais (Figs. 5.39 e 5.40) e da plastificação nas seções transversais das barras

(Fig. 5.42), conclui-se que o pórtico falha devido a instabilidade inelástica associada ao mecanismo lateral do 1º andar.

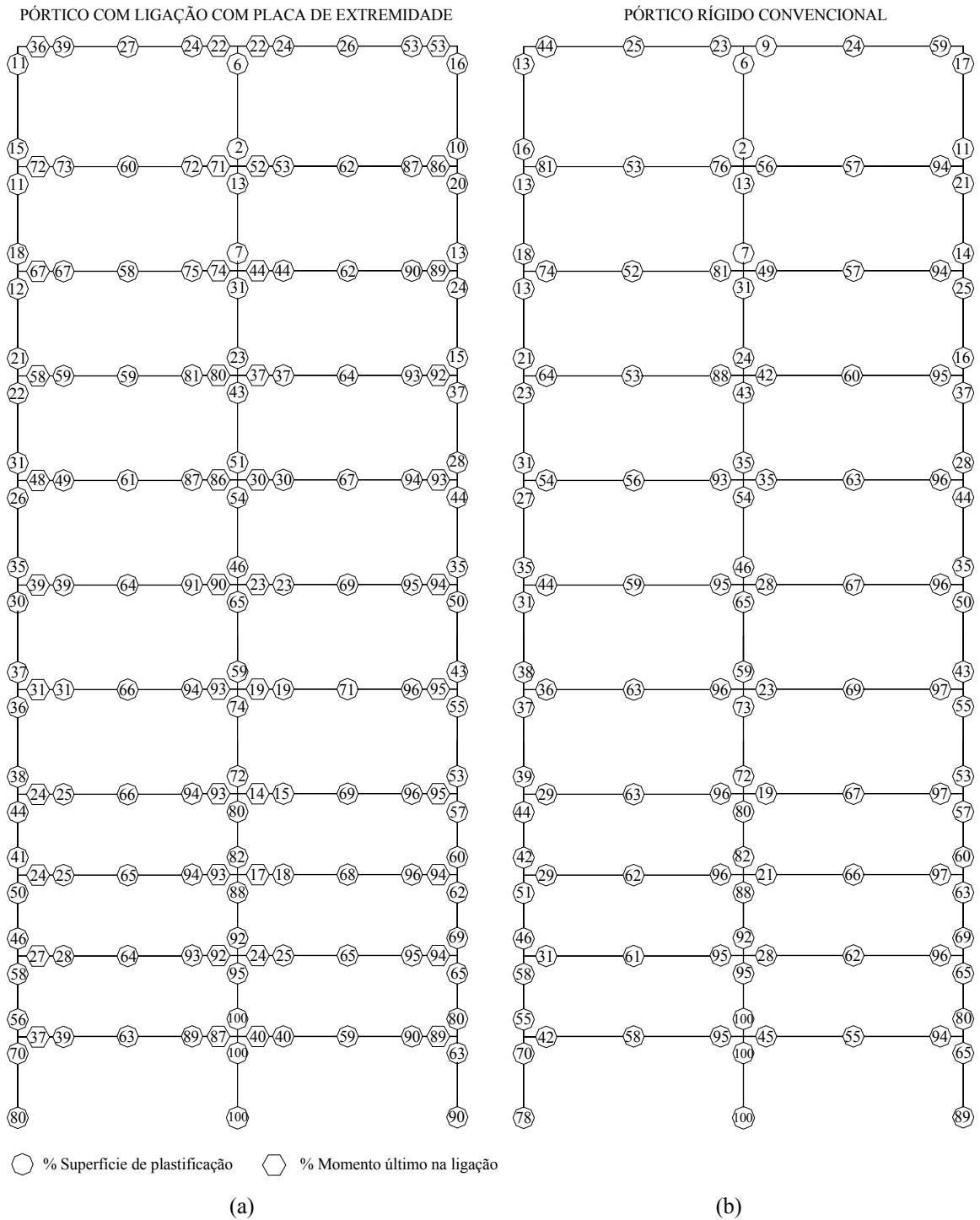


FIGURA 5.42 – Percentuais da superfície de plastificação nas barras e de momento nas ligações do pórtico

Estado-limite de Serviço considerando as combinações frequentes de carga:

As vigas de cobertura e de piso do pórtico apresentaram flechas inferiores aos limites apresentados pela ABNT NBR 8800: 2008, respectivamente, iguais a $L/250 = 2,70 \text{ cm}$ e $L/350 = 1,93 \text{ cm}$. Para a combinação de carga de serviço dada por $1,0 CP + 0,6 SC$, o resultado da flecha no meio do vão das vigas é apresentado na terceira coluna da Tab. 5.19.

O deslocamento lateral no topo do pórtico, considerando-se a combinação de carga de serviço mais desfavorável, $1,0 CP + 0,4 SC + 0,3 V$, foi igual a $2,52 \text{ cm}$, muito menor que o limite estabelecido pela norma brasileira, dado por $H/400 = 9,60 \text{ cm}$. Os resultados dos deslocamentos entre andares, apresentados na quinta coluna da Tab. 5.19, para a mesma combinação de carga, também foram inferiores ao limite estabelecido pela norma, não superando a $h/500$, onde h é a altura do andar.

TABELA 5.19 – Flecha no meio do vão das vigas e deslocamento relativo entre andares do pórtico

Andar	Vigas	Flecha no meio do vão (cm) (1,0 CP + 0,6 SC)	Pilares	Deslocamento relativo (cm) (1,0 CP + 0,4 SC + 0,3 V)
1°	5-6 e 8-9	0,829	1-4	0,097
2°	12-13 e 15-16	0,984	4-11	0,222
3°	19-20 e 22-23	1,125	11-18	0,262
4°	26-27 e 29-30	1,251	18-25	0,281
5°	33-34 e 36-37	1,423	25-32	0,365
6°	40-41 e 43-44	1,544	32-39	0,343
7°	47-48 e 50-51	1,641	39-46	0,295
8°	54-55 e 57-58	1,717	46-53	0,237
9°	61-62 e 64-65	1,771	53-60	0,179
10°	68-69 e 71-72	1,825	60-67	0,128
11°	75-76 e 78-79	1,476	67-74	0,110

Comparação com os procedimentos da ABNT NBR 8800: 2008

Segundo as recomendações da ABNT NBR 8800: 2008, o pórtico com ligações rígidas convencionais foi classificado como de média deslocabilidade, uma vez que a relação entre o deslocamento lateral de cada andar relativo à base do pórtico em teoria de 2ª

ordem e aquele em teoria de 1ª ordem ficou entre os valores limites de 1,10 e 1,40. Portanto, para a determinação dos esforços solicitantes para os estados-limites últimos, foi realizada uma análise elástica em teoria de 2ª ordem. Os efeitos das imperfeições iniciais do material foram levados em conta na análise reduzindo-se a rigidez à flexão e a rigidez axial das barras para 80% dos valores originais. A ligação semirrígida com rigidez inicial constante durante todo o carregamento foi considerada na análise.

Os pilares do 1º andar (2-7 e 3-10) e a viga do 5º andar (36-37) do pórtico com ligações com placa de extremidade estendida são verificados ao estado-limite último, com base nos procedimentos da ABNT NBR 8800: 2008, para 100% do carregamento majorado aplicado na estrutura (ver Anexo B4 – Dimensionamento ao Esforço Combinado de Força Normal e Momento Fletor para o Pórtico de Projeto), cujos resultados são comparados com os da análise avançada.

A Tabela 5.20 mostra os resultados das equações de interação para a verificação aos estados-limites últimos dos pilares 2-7 e 3-10 e da viga 36-37, para a análise avançada considerando 100% e 122% do carregamento e para a análise elástica de 2ª ordem, considerando 100% do carregamento.

Considerando-se os resultados da análise avançada para 100% do carregamento, aplicados nas equações de interação, observa-se que os elementos estruturais passam na verificação ao dimensionamento aos ELU, sugerindo uma folga de 9,0% tendo-se em vista o pilar 2-7. Entretanto, através da análise avançada pode-se alcançar um aumento de aproximadamente 22% no carregamento até a estrutura atingir o colapso. Esse aumento no carregamento se deve à redistribuição plástica que ocorre na análise inelástica. Observa-se que o pilar 3-10 absorve, proporcionalmente, maiores esforços do que o pilar 2-7 durante o incremento de 100% a 122% do carregamento.

TABELA 5.20 – Resultados das equações de interação para verificação ao ELU

Barra	Equação de interação	Análise Avançada		Análise Elástica de 2ª ordem
		100% da carga	122% da carga	100% da carga
Pilar 2-7	Eq. (5.23)	0,91	1,01	1,04
Pilar 3-10	Eq. (5.23)	0,69	0,93	0,80
Viga 36-37	Eq. (5.24)	0,85	0,96	1,11

Considerando-se a análise elástica de 2ª ordem pode-se observar que a estrutura não suporta o carregamento total aplicado, mostrando-se, nesse caso, bastante conservadora em relação à análise avançada. Tendo-se em vista a viga 36-37, a estrutura suporta, aproximadamente, apenas 90% do carregamento total aplicado, indicando que as aproximações adotadas pela ABNT NBR 8800: 2008 na realização da análise elástica em 2ª ordem podem levar à imprecisão dos resultados.

CAPÍTULO

6

CONCLUSÕES

Neste capítulo são descritas as considerações finais, as conclusões obtidas do estudo desenvolvido e sugestões para trabalhos futuros, visando-se à continuidade da pesquisa.

6.1 Considerações Finais

Conforme demonstrado ao longo deste trabalho, a *Análise Inelástica Avançada* refere-se a qualquer método de análise que, de forma adequada, avalie simultaneamente a resistência e a estabilidade de um sistema estrutural como um todo, de tal forma que as verificações posteriores de cada elemento separadamente, conforme fazem as normas técnicas, possam ser dispensadas. Essa análise pode prever com bastante precisão os possíveis modos de falha de uma estrutura, apresentar um nível mais uniforme de segurança e proporcionar um maior índice de confiabilidade na análise e dimensionamento, ao se utilizar adequadamente os fatores de combinação das ações e os coeficientes de ponderação das resistências.

O objetivo deste trabalho foi, portanto, descrever uma formulação geometricamente exata para análise não linear geométrica e do material de pórticos planos de aço, via Método dos Elementos Finitos, utilizando elementos de barra, visando sua aplicação como um método de *Análise Avançada*. A formulação apresentada é bastante geral, permitindo-se que os nós sofram grandes deslocamentos e rotações e as barras sofram grandes alongamentos e curvaturas e, além disso, elas podem ser não-homogêneas, não-

prismáticas e constituídas de material elastoplástico. O modelo desenvolvido é capaz de considerar os efeitos $P-\Delta$ e $P-\delta$ nas análises, avaliar a estabilidade e a resistência das barras da estrutura individualmente e como parte dela, descrever os efeitos da *distribuição da plastificação ao longo das barras e das seções transversais*, introduzir os efeitos das *tensões residuais*, das *imperfeições geométricas iniciais* e das *deformações por cisalhamento*, assim como a influência das *ligações semirrígidas* no comportamento global dos pórticos, apresentando resultados consistentes com aqueles obtidos pelos modelos clássicos e pela literatura técnica disponível.

Dessa forma, as contribuições relevantes deste trabalho são:

- 1) A dedução consistente das matrizes de rigidez tangente, elástica e elastoplástica, para elementos com ambas as extremidades rígidas e com uma extremidade rotulada e outra rígida, considerando-se a influência das deformações por cisalhamento através da teoria de Timoshenko, explicitando-as analiticamente, de forma simples;
- 2) O desenvolvimento de um algoritmo para um modelo multilinear da curva momento \times rotação de uma ligação e sua implementação através de elementos de mola, no programa computacional PPLANLEP apresentado por LAVALL (1996), visando analisar problemas com ligações semirrígidas entre as barras da estrutura, para diferentes carregamentos nodais aplicados de forma incremental;
- 3) A demonstração da potencialidade da formulação na solução de problemas que consideram ambas as não linearidades, geométrica e do material, levando-se em conta todos os efeitos não lineares citados anteriormente, destacando-se principalmente, neste trabalho, os efeitos das deformações por cisalhamento através da teoria de Timoshenko e das ligações semirrígidas através de curvas multilinearizadas;
- 4) A adequação dos coeficientes de ponderação das resistências e calibração das tensões residuais estabelecidos pela ABNT NBR 8800: 2008, assegurando, na análise proposta, o nível de confiabilidade adotado pela norma brasileira, consolidando a formulação desenvolvida como um método de *Análise Inelástica Avançada*.

6.2 Conclusões

O programa desenvolvido neste trabalho mostrou-se bastante eficiente na análise dos vários exemplos apresentados, confirmando a expectativa da grande potencialidade da formulação adotada. No estudo desenvolvido no *capítulo 3*, a formulação do elemento finito proposto considera o deslocamento transversal englobando a parcela proveniente da flexão acrescida da parcela proveniente do cisalhamento, sendo seu campo interpolado por um polinômio cúbico, enquanto que para a rotação da seção utiliza-se um polinômio interpolador quadrático independente. Dessa forma, devido à consistência da ordem das funções de interpolação utilizadas, o modelo não apresenta o efeito “shear locking”, não ocorrendo o bloqueio ou travamento da solução.

Os exemplos confirmaram que a influência do cisalhamento sobre os deslocamentos transversais é de grande importância na análise de barras carregadas transversalmente com baixa relação largura/altura (L/h), principalmente nos casos de perfis I com $L/h \leq 10$. Nesses casos, os resultados obtidos considerando-se a hipótese de Timoshenko são mais precisos em relação à teoria clássica de Bernoulli-Euler. Confirmou-se também que o efeito do cisalhamento na redução da resistência à compressão de pilares axialmente comprimidos foi menor que 0,3%, podendo ser, seguramente, desprezado nas análises. Finalmente, os exemplos apresentados comprovaram a precisão da formulação no estudo de vários efeitos da deformação por cisalhamento ao se comparar os resultados numéricos com os resultados analíticos da teoria clássica.

No *capítulo 4* foi analisada a influência das ligações na resistência, na deslocabilidade lateral e na distribuição das forças internas, em vigas, pilares e pórticos planos de aço. O comportamento momento *versus* rotação relativa ($M - \theta_r$) para ligações semirrígidas é tipicamente não linear desde o início do carregamento, com redução da rigidez conforme a rotação aumenta.

Neste trabalho, curvas momento \times rotação multilineares, capazes de descrever com precisão o comportamento $M - \theta_r$ das ligações semirrígidas, foram usadas juntamente com a formulação para a análise avançada no estudo do comportamento inelástico de

pórticos semirrígidos de aço. Essa forma de representação mostrou-se bastante prática e eficiente na representação de qualquer curva advinda de estudos analíticos, experimentais ou numéricos.

Os diversos exemplos apresentados, mostrando a influência das ligações na redistribuição de momentos fletores, nos deslocamentos e na resistência última de estruturas, abordando-se desde o comportamento flexível até o comportamento rígido das ligações, passando pelo semirrígido, considerando-se o comportamento das ligações em carga, descarga e recarga, tanto em análises elásticas quanto inelásticas, forneceram uma excelente correlação com as respostas encontradas na literatura, mostrando a grande potencialidade da formulação desenvolvida.

Indubitavelmente, conclui-se que o comportamento das ligações semirrígidas deve ser considerado nas análises estruturais, pois mostrou ser um dos fatores que mais afetam a resistência e a estabilidade global dos pórticos estudados, conduzindo a resultados mais consistentes, precisos e confiáveis, aproximando daqueles que realmente poderão ocorrer na estrutura.

Visando adequar a *Análise Inelástica Avançada* proposta neste trabalho de modo a assegurar o nível de confiabilidade adotado pela ABNT NBR 8800: 2008, no capítulo 5 foram utilizados os coeficientes de ponderação das resistências prescritos e calibradas as tensões residuais segundo a curva de resistência à compressão, visando ao projeto de pórticos semirrígidos de aço. Inicialmente, alguns aspectos de projeto da ABNT NBR 8800: 2008 e regras para a análise avançada foram estabelecidos, como por exemplo, o comportamento trilinear da lei constitutiva para os aços estruturais, a consideração de seções compactas e de contraventamentos fora do plano apropriados, de modo a garantir uma adequada capacidade de rotação das barras, tendo em vista a análise inelástica.

A lei constitutiva para projeto foi obtida dividindo-se a resistência ao escoamento f_y pelo coeficiente de ponderação $\gamma_{a1}=1,1$ e mantendo-se inalterados os valores das deformações referentes ao início do escoamento, ε_y , ao início do encruamento, ε_e , e à deformação limite, ε_{lim} . Os estudos realizados na seção 5.3 mostraram que a curva de

projeto trilinear proposta foi adequada para a análise de elementos estruturais submetidos a forças normais de tração.

No dimensionamento das barras prismáticas submetidas à força axial de compressão, a ABNT NBR 8800: 2008 passou a adotar uma curva única de resistência para pilares com curvatura inicial de $L/1500$, para ambos os eixos, de maior e de menor inércia.

A partir dos resultados dos estudos de calibração para o dimensionamento à compressão, foi proposto neste trabalho adotar uma tensão residual igual a $0,5 f_y$, com distribuição linear nas mesas e constante na alma, além da imperfeição geométrica inicial igual a $L/1500$, para o dimensionamento de pilares em relação ao eixo de maior e menor inércia.

Entretanto, os estudos demonstraram que a utilização da curva única de resistência à compressão da ABNT NBR 8800: 2008, segundo o eixo de menor inércia para perfis I, apresentava resultados discrepantes em relação à análise avançada. Esses estudos mostraram que a curva “c” prescrita pelo EN 1993-1-1:2005, mantendo-se o coeficiente de ponderação da resistência igual a $1,10$, descrevia um comportamento similar ao da análise avançada em toda a faixa de esbeltez. A resistência de pilares fica mais bem representada por duas curvas de resistências, sendo uma para cada eixo de flexão.

A superfície de resistência plástica de um elemento de viga-pilar, submetido à combinação de força normal e momento fletor, mostrou que as curvas de interação da ABNT NBR 8800: 2008, determinadas pelas Eqs. (5.25) e (5.26), forneceram um bom ajuste para o limite inferior da resistência segundo o eixo de maior inércia, mas foram bastante conservadoras quando empregadas para o eixo de menor inércia.

As curvas de interação da norma brasileira determinadas pelas Eqs. (5.29) e (5.30), com relação ao eixo de maior inércia, apresentaram um comportamento similar às curvas da análise avançada, para os índices de esbeltez estudados. Os resultados da norma brasileira foram geralmente maiores do que aqueles obtidos pela análise avançada, porém acredita-se que estejam dentro dos limites considerados aceitáveis com relação à confiabilidade estrutural. Para a flexão segundo o eixo de menor inércia, observou-se

que o comportamento entre as curvas da análise avançada e da ABNT NBR 8800: 2008, para os índices de esbeltez intermediários e altos, era bastante distinto. Os resultados obtidos pela norma foram muito maiores do que aqueles obtidos pela análise avançada, sugerindo que, ao se aplicar as curvas de interação da ABNT NBR 8800: 2008 em relação ao eixo de menor inércia, tem-se uma redução no índice de confiabilidade em comparação ao eixo de maior inércia. Quando os resultados da análise avançada foram comparados com aqueles obtidos pela Eq. (5.18) observou-se uma melhor correlação entre essas curvas para os índices de esbeltez intermediários e altos.

Na seção 5.8 um pórtico de dois andares e um vão e um pórtico de edifício alto com onze andares e dois vãos foram analisados com o objetivo de demonstrar como a *Análise Inelástica Avançada* proposta, considerando todos os atributos não lineares apresentados neste trabalho, pode ser usada no dimensionamento de estruturas de pórticos semirrígidos.

Os pórticos foram verificados quanto aos estados-limites últimos considerando-se as combinações de cargas majoradas e quanto aos estados-limites de serviço com as combinações de cargas apropriadas. As ligações foram dimensionadas de tal forma que apresentassem capacidade de rotação suficiente para satisfazer aos requisitos de deformação no estado-limite último. O método da análise inelástica avançada permitiu acompanhar todo o processo de plastificação das barras e definir com precisão os possíveis mecanismos de colapso das estruturas.

Considerando-se que as normas técnicas classificam as ligações em três tipos principais, a saber, rígidas, semirrígidas e flexíveis, os estudos realizados permitiram concluir que, para efeitos práticos, somente os pórticos com ligações classificadas como semirrígidas precisam ser analisados num programa de análise avançada que modela explicitamente o comportamento semirrígido da ligação. Por outro lado, os pórticos com ligações classificadas como rígidas ou flexíveis podem ser analisados seguindo os métodos de análise convencionais, que consideram os nós idealmente rígidos ou flexíveis.

Finalmente, conclui-se que a formulação desenvolvida neste trabalho incorporando as ligações semirrígidas conduz a resultados consistentes e precisos, podendo, ser

considerada um método de *Análise Inelástica Avançada*. A sua aplicação pode ser estendida a estudos detalhados do comportamento de estruturas mais complexas, na verificação da precisão de métodos simplificados de análise, na comparação com resultados experimentais e na obtenção de curvas e ábacos de uso prático.

6.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Ao final deste trabalho, considerando a consistência dos resultados alcançados pela *Análise Inelástica Avançada* aplicada aos pórticos planos de aço, surge a necessidade de ampliar a formulação visando dar continuidade à pesquisa em desenvolvimento. Assim, os trabalhos de pesquisa poderão ser estendidos para se considerar:

- O desenvolvimento da formulação para o caso tridimensional dos elementos de barras visando ao estudo da flambagem lateral com torção;
- O dimensionamento de barras sob atuação de forças cortantes;
- A consideração do efeito do cisalhamento em ligações de nós finitos;
- A aplicação em sistemas estruturais mistos aço/concreto;
- A aplicação em sistemas estruturais sob condições de incêndio;
- A aplicação em sistemas estruturais em edifícios altos;
- A ampliação da formulação para considerar a análise dinâmica.

Para o aprimoramento do programa computacional, pode-se sugerir:

- A atualização do pré-processador existente e a criação de pós-processadores com a inclusão de recursos gráficos, aumentando a eficiência prática de utilização do programa;
- A implementação de outros algoritmos de solução numérica e métodos automáticos de incremento de cargas podem também ser medidas eficazes para a melhoria da eficiência do programa.

Introduzindo-se estas modificações, acredita-se que o programa desenvolvido para a formulação deste trabalho tornar-se-á um instrumento ainda mais eficiente, tanto para as análises teóricas, acadêmicas, quanto para os cálculos práticos dos escritórios de projeto.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

ABNT NBR 6118: 2003. *Projeto de Estruturas de Concreto*. ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro.

ABNT NBR 8800: 1986. *Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios. Método dos Estados-limites* - ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro.

ABNT NBR 8800: 2008. *Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios*, ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. Rio de Janeiro.

ACKROYD, M. H. E GERSTLE, K. H. (1982) *Behavior of Type 2 Steel Frames*. Journal of the Structural Division, v. 108, n. ST7, pp. 1541-1555.

AISC (1980). *Manual of Steel Construction*. American Institute of Steel Construction, Chicago.

ALMEIDA, A. C. B. (2006) *Análise Inelástica de Pórticos Planos Considerando a Plasticidade Distribuída e o Efeito das Tensões Residuais nos Perfis Estruturais de Aço*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 165.

AMARAL, O. C. (2002). *Curso Básico de Resistência dos Materiais*. Ed. do Autor. Belo Horizonte.

ANSI/AISC 360-05. *Specification for Structural Steel Buildings*. American Institute of Steel Construction.

ARAÚJO, R. E. (2010) *Estudo da Influência do Encruamento do Aço e das Tensões Residuais no Comportamento Inelástico de Pórticos Planos via Análise Avançada*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 121.

AVAKIAN, A. C. (2007) *Estruturas Aporticadas Mistas Aço-concreto: Avaliação de Metodologias de Análise*. Dissertação de Mestrado. COPPE/UFRJ, p. 158.

BATHE, K. J. (1996) *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall.

BJORHOVDE, R.; COLSON, A.; BROZZETTI, J. (1990) *Classification System for Beam-to-column Connections*. Journal of Structural Engineering, v. 116, n. 11, pp. 3059-3077.

BORGES, L., SILVA, L. S., LIMA, L., RAMIRES, F. E VELLASCO, P. (2003) *NASCON: Uma Ferramenta para Análise Avançada de Ligações Metálicas e Mistas*. In: IV Congresso de Construção Metálica e Mista, Lisboa, Portugal.

BRANCO, A. L. L. V. (2002) *Análise Não linear de Pórticos Planos, Considerando os Efeitos do Cisalhamento no Cálculo de Esforços e Deslocamentos*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 87.

CALDAS, R. B. (2008) *Análise Numérica de Estruturas de Aço, Concreto e Mistas em Situação de Incêndio*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 226.

CASTRO, R. A. (2006) *Modelagem Computacional de Ligações Semirrígidas e sua Influência na Resposta Dinâmica Não linear de Pórticos de Aço*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia da UERJ, p. 117.

CHEN, W.F. E LUI, E.M. (1986) *Structural Stability – Theory and Implementation*, New York, Elsevier.

CHEN, W.F E KISHI, N. (1989) *Semi-Rigid Steel Beam-to-Column Connections: Data Base and Modeling*. Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 115, No. 7, pp. 105-119.

CHEN, W. F. E TOMA, S. (1994) *Advanced Analysis of Steel Frames: Theory, Software, and Applications*. Boca Raton: CRC-Press, p. 384.

CHEN, W. F., GOTO, Y. E LIEW, J. Y. R. (1996) *Stability Design of Semi-Rigid Frames*. New York: John Wiley e Sons, Inc., p. 468.

CHEN, W. F.; KIM, S-E.; CHOI S-H (2001) *Practical Second-Order Inelastic Analysis for Three-Dimensional Steel Frames*. Steel Structures, pp. 213-223.

CHOI, S. e KIM, S. E. (2006) *Optimal Design of Semi-Rigid Steel Frames using Practical Nonlinear Inelastic Analysis*. Steel Structures. V. 6, pp. 141-152.

CHRISTOPHER, J. E.; BJORHOVDE, R. (1999) *Semi-rigid Frame Design Methods for Practicing Engineers*. Engineering Journal, First Quarter, pp. 12-28.

CLARKE, M. J.; BRIDGE, R. Q.; HANCOCK, G. J.; TRAHAIR, N. J. (1992) *Advanced Analysis of Steel Building Frames*. Journal of Constructional Steel Research; Vol. 23, N° 3, pp.1-29.

CRISFIELD, M. A. (1991) *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. New York, Wiley. Vol. 1

COWPER, G. R. (1966) *The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory*. Journal of applied Mechanics, pp.335-340.

CUNNINGHAM, R., (1990) *Some Aspects of Semi-rigid Connections in Structural Steelwork*. Structures Engineering. v. 68, pp. 85-92.

DÓRIA, A.S. (2007) *Análise da Estabilidade de Pórticos Planos de Aço com Base no Conceito de Forças Horizontais Fictícias*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 107

EL-ZANATY, M. H., MURRAY, D. W. AND BJORHOVDE, R. (1980): *Inelastic Behavior of Multistory Steel Frames*. Department of Civil Engineering, University of Alberta.

EN 1993-1-1: 2005 *Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings*. European Committee for Standardization.

EN 1993-1-8: 2005 *Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1.8: Design of Joints*. European Committee for Standardization.

FAKURY, R. H. (2009) *Dimensionamento Básico de Elementos de Estruturas de Aço*. Notas de aula. Escola de Engenharia da UFMG.

FOLEY, C. M. E VINNAKOTA, S. (1997) *Inelastic Analysis of Partially Restrained Unbraced Steel Frames*. *Engineering Structures*, v. 19 (11), pp. 891-902.

FOLEY, C. M. E VINNAKOTA, S. (1999-a) *Inelastic Behavior of Multistory Partially Restrained Steel Frames. Part I*. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, v. 125 (8), pp. 854-861.

FOLEY, C. M. E VINNAKOTA, S. (1999-b) *Inelastic Behavior of Multistory Partially Restrained Steel Frames. Part II*. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, v. 125 (8), pp. 862-869.

GALAMBOS, T. V. (1988) *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*, 4th Edition, John Willey & Sons.

GALVÃO, A.S. (2004) *Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semirrígidas*. Tese de Doutorado. PUC-RIO, p. 245.

GERE, J. M. (1965) *Distribucion de Momentos*. Compañia Editorial Continental S.A. México, pp. 412.

GIZEJOWSKI, M. A., BARSZCZ, A. M., BRANICKI, C. J. E UZOEGBO, H. C. (2006) *Review of analysis methods for inelastic design of steel semi-continuous frames*. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 62, pp. 81-92.

HASAN, R., KISHI, N. E CHEN, W.F. (1998) *A New Nonlinear Connection Classification System*. *Journal of Constructional Steel Research*, V. 11, pp. 119-140.

JONES, S. W., KIRBY, P. A., NETHERCOT, D. A. (1980) *Effect of Semi-rigid Connections on Steel Column Strength*. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 1, n. 1, pp. 38-46.

- JONES, S. W., KIRBY, P. A., NETHERCOT, D. A. (1983) *The Analysis of Frames with Semirigid Connections - A State-of-the-Art-Report*. Journal of Constructional Steel Research, v. 3, n. 2, pp. 2-13.
- KANCHANALAI T. (1977) *The Design and Behavior of Beam-columns in Unbraced Steel Frames*. AISI Project N°. 189, Report N°. 2, Civil Engineering/Structures Research Laboratory, University of Texas, Austin (TX), p. 300.
- KIM, S. E. e CHEN, W. F. (1996) *Practical Advanced Analysis for Semi-rigid Frame Design*. Journal Engineering. Fourth Quarter, pp. 129-141
- KIM, S. E. AND CHEN, W. F. (1996-a) *Practical Advanced Analysis for Braced Steel Frame Design*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 122(11), pp. 1266-1274.
- KIM, S. E. AND CHEN, W. F. (1996-b) *Practical Advanced Analysis for Unbraced Steel Frame Design*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 122(11), pp. 1259-1265.
- KIM, S. E. e CHOI, S. (2001) *Practical Advanced Analysis for Semi-rigid Space Frames*. International Journal of Solids and Structures, v. 38, pp. 9111-9131.
- KING, W. S. e CHEN, W. F (1993) *LRFD Analysis for Semi-Rigid Frames Design*. Journal Engineering, AISC, Fourth Quarter, pp. 130-140.
- KING, W. S. (1994) *The Limit Loads of Steel Semi-rigid Frames Analyzed with Different Methods*. Computers and Structures, v. 51(5), pp. 475-487.
- KISHI N., AHMED A., YABUKI, N. e CHEN W. F. (2001) *Nonlinear Finite Element Analysis of Top-and Seat-Angle with Double Web-Angle Connections*. Journal of Structural Engineering and Mechanics, v. 12, n° 2, pp 201-214.
- KISHI N., KOMURO M. e CHEN W. F. (2004) *Four-parameter Power Model for $M-\theta$ Curves of End-plate Connections*. ECCS/AISC workshop connections in steel structures V: Innovative steel connections.

KRUGER, T. S., VAN RENSBURG, B. W. J., DU PLESSIS, G. M. (1995) *Non-linear Analysis of Structural Steel Frames*. Journal of Constructional Steel Research; V. 34, pp. 285-306.

LANDESMANN, A. (2003) *Modelo Não linear Inelástico para Análise de Estruturas Metálicas Apertadas em Condições de Incêndio*. Tese de Doutorado. COPPE/UFRJ, p. 295.

LANDESMANN, A E BATISTA, E. M (2005) *Advanced Analysis of Steel Framed Buildings Using the Brazilian Standard and Eurocode-3*. Journal Constructional Steel Research. v. 61, pp. 1051–1074.

LAVALL, A. C. C. (1996): *Uma Formulação Teórica Consistente para a Análise Não linear de Pórticos Planos pelo Método dos Elementos Finitos Considerando Barras com Imperfeições Iniciais e Tensões Residuais nas Seções Transversais*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 265.

LI, T. Q., CHOO, B. S., NETHERCOT, D. A. (1995) *Connection Element Method for the Analysis of Semi-rigid Frames*. Journal Constructional Steel Research. v. 32, pp. 143-171.

LIEW, J. Y.R., WHITE, D. W. E CHEN, W. F. (1993-a) *Second-Order Refined Plastic-Hinge Analysis for Frame Design – Part I*. Journal of Structural Engineering. Vol. 119, Nº 11, pp. 3196-3216.

LIEW, J. Y.R., WHITE, D. W. E CHEN, W. F. (1993-b) *Second-Order Refined Plastic-Hinge Analysis for Frame Design – Part II*. Journal of Structural Engineering. Vol. 119, Nº 11, pp. 3217-3237.

LIMA, L. R. O. (2003) *Comportamento de Ligações com Placa de Extremidade em Estruturas de Aço Submetidas a Momento Fletor e Força Axial*. Tese de Doutorado. PUC-RIO , p. 268.

- LIU, Y. (2007) *Progressive-Failure Analysis of Steel Building Structures Under Abnormal Loads*. Ph. D Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada, p. 215.
- LIU, Y., XU, L. E GRIERSON, D. E. (2008) *Compound-Element Modeling Accounting for Semi-rigid Connections and Member Plasticity*. *Engineering Structures*, v. 30, pp. 1292–1307.
- LUI, E. M., E CHEN, W. F. (1986). *Analysis and Behavior of Flexibly Jointed Frames*. *Engineering Structures*, v. 8(2), pp. 107-118.
- MACHADO, F. C. S. E SILVEIRA, R. A. M. (2005) *Formulação Inelástica de Segunda Ordem para Sistemas Estruturados em Aço Rem*: *Revista Escola de Minas*, v.58, no.3, Ouro Preto.
- MAGGI, Y. I. (2004) *Análise do Comportamento Estrutural de Ligações parafusadas Viga-Pilar com Chapa de Topo Estendida*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 269.
- MATA, L. A. (2005) *Método de Análise de Sistemas Deslocáveis com Ligações Mistas de Aço e Concreto, Fundamentado Teórica e Experimentalmente*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia da UFMG, p. 277.
- MELLO, W. L. (1999) *Análise de Pórticos Metálicos Planos com Conexões Semirrígidas Considerando a Não linearidade Física e Geométrica*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP, p. 177.
- MONTEIRO, R. C. (1997) *Análise de Estruturas de Aço com Ligações Semirrígidas*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 193.
- NEAL, B. G. (1977) *The Plastic Methods of Structural Analysis*. Chapman e Hall. London, New York, p. 204.

NETO, J. D. F E PIMENTA, P. M. (2004) *Análise Não linear Inelástica de Edifícios com estruturas de Aço ou Mista e Núcleo de Concreto*. Engenharia de Estudo e Pesquisa/ Universidade Federal de Juiz de Fora, v. 7, nº 2, pp. 21-29.

NEVES, R.A. (2000). *Cálculo de Esforços e Deslocamentos em Estruturas de Pisos de Edifícios Considerando-se a Influência das Tensões Cisalhantes*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 113.

OLIVEIRA, T. J. L. (2003) *Análise de Pisos Mistos com Ligações Semirrígidas*. Dissertação de Mestrado. COPPE/UFRJ, p. 106.

OWEN, D. R. J. AND HINTON, E. (1980): *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*. Swansea, U. K. Pineridge Press Ltd.

PIMENTA, P. M. (1986): *Análise Não linear de Pórticos Planos*. Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8611. São Paulo, EPUSP.

PIMENTA, P. M. (1989): *Derivation of Tangent Stiffness Matrices of Simple Finite Elements – I. Straight Bar Elements*. Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, 8912. São Paulo, EPUSP.

PINHEIRO, L E SILVEIRA, R. A. M. (2004) *Procedimentos Computacionais para Análise Não linear de Pórticos com Ligações Semirrígidas*. In: XXV CILAMCE - Iberian Latin American Congress of Computational Methods in Engineering, Anais do XXV CILAMCE, Recife-PE, v. 1, pp. 1-15.

PINHEIRO, L E SILVEIRA, R. A. M. (2005) *Computational Procedures for Nonlinear Analysis of Frames with Semi-rigid Connections*. Latin American Journal of Solids and Structures, v. 2, pp. 339-367.

PLAIS, W. (1998) *Análise Não linear de Estruturas de Barras Via Elementos Finitos Utilizando uma Teoria de Alta-Ordem*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 125.

PRELOURENTZOU, P. A. (1991) *Um Estudo Sobre Ligações Viga-coluna em Estruturas de Aço*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 221.

QUEIROZ, G. (1992) *Estudo do Comportamento e Sistematização do Projeto de Ligações Rígidas Entre Perfis I com Almas Coplanares*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p.159.

QUEIROZ, G. (1995) *Análise Experimental e Análise Não linear de Nós Soldados Semirrígidos*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia da UFMG, p.285.

RIBEIRO, L. F. L. (1998) *Estudo do Comportamento Estrutural de Ligações Parafusadas Viga-Coluna com Chapa de Topo: Análise Teórico-Experimental*. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 524.

RIBEIRO, J. C. L. (2009) *Desenvolvimento e Aplicação de Sistema Computacional para Simulação Via Método dos Elementos Finitos do Comportamento de Estruturas de Aço e Mistas em Situação de Incêndio*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia da UFMG, p. 260.

ROMANHOLO, G. A. (2001) *Análise das Ligações Semirrígida em Estruturas Planas*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, p. 160.

SALMON, C. G. E JOHNSON, J. E. (1996) *Steel Structures – Design and Behavior*. 4th Edition, Harper Collins Publishers Inc.

SALMON, C. G., JOHNSON, J. E. E MALHAS, F. A. (2008) *Steel Structures – Design and Behavior. Emphasizing Load and Resistance Factor Design*. 5th Edition, Pearson Prentice Hall Inc.

SANTANA, C. L. O. (2002) *Análise Não linear de Pórticos Planos de Madeira com Ligações Semirrígidas*. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas, p. 214.

SANTOS, L. B. (1998) *Influência da Rrigidez das Ligações em Estruturas de Aço*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, USP, p. 159.

SEKULOVIC, M., E SALATIC, R. (2001). *Nonlinear Analysis of Frames with Flexible Connections*. Computers and Structures, v. 79(11), pp. 1097-1107.

SILVA, R.G.L. (2004) *Avaliação dos Efeitos de Segunda Ordem em Edifícios de Aço Utilizando Métodos Aproximados e Análise Rigorosa*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 140.

SILVA, R. G. L. E LAVALL, A. C. C. (2005): *Formulação Geral para Análise Avançada de Pórticos de Aço considerando a Plasticidade Distribuída*. In: XXVI CILAMCE – Iberian Latin American Congress in Computational Methods in Engineering, 2005, Guarapari – ES. Anais do XXVI CILAMCE – v.1, pp. 1-15.

SILVA, R. G. L. e LAVALL, A. C. C. (2008). *Formulação para Análise Avançada de Pórticos Planos de Aço Considerando a Plasticidade Distribuída e a Teoria de Timoshenko*. In: XXIX CILAMCE – Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Maceió-AL, Anais do XXIX CILAMCE v.1, pp. 1-20.

SILVA, R. G. L. e LAVALL, A. C. C. (2009). *Análise Inelástica de Pórticos de Aço Parcialmente Restringidos* In: XXX CILAMCE – Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Búzios-RJ, Anais do XXX CILAMCE v.1, pp 1-20.

SILVEIRA, R. A. M. (1995) *Análise de Elementos Estruturais Esbeltos com Restrições Unilaterais de Contato*. Tese de Doutorado. PUC-RIO.

SOUZA, M. L. (1999) *Análise de Estruturas de Aço com Ligações Semirrígidas em Teoria de 2ª Ordem*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia da UFMG, p. 225.

TIMOSHENKO, S.P. E GERE, J.E. (1983). *Mecânica dos Sólidos*, v.1, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora.

TIMOSHENKO, S.P. E GERE, J.E. (1984). *Mecânica dos Sólidos*, v.2, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora.

VOGEL, U (1985) *Calibrating Frames*. Stahlbau, v. 10, pp. 295-301

WANG, C.M. (1995). *Timoshenko Beam-bending Solutions in Terms of Euler-Bernoulli Solutions*. Journal of Engineering Mechanics, v. 121, pp 763-765.

WEAVER, W. JR E GERE, J.M. (1990) *Matrix Analysis of Framed Structures*. Third Edition, New York, Van Nostrand.

WHITE, D. W. (1993) *Plastic Hinge Methods for Advanced Analysis of Steel Frames*. Journal of Constructional Steel Research, v. 24, pp. 124-152.

WHITE, D. W.; HAJJAR, J. F. (2000) *Stability of Steel Frames: The Cases for Simple Elastic and Rigorous Inelastic Analysis /Design Procedures*. Engineering Structures, V. 22, N° 2, pp. 155-167.

XU, L. (2001). *Second-order Analysis for Semi-rigid Steel Frame Design*. Canadian Journal of Civil Engineering, v. 28, pp. 59-76.

ZHOU, F. (2005). *Model-Based Simulation of Steel Frames with Endplate Connections*. Ph. D Thesis, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Cincinnati, p. 133.

ZIEMIAN, R., MCGUIRE, W. E DEIERLEIN, G. G. (1992) *Inelastic Limit States Design. Part I: Planar Frames Studies*. Journal of Structural Engineering, ASCE, vol. 118, n°9, pp. 2532-2549.

ANEXO

A

ESTUDO ANALÍTICO DE BARRAS CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DO CISALHAMENTO ATRAVÉS DA TEORIA DE TIMOSHENKO

Os elementos de pórticos, considerando-se a teoria clássica de Bernoulli-Euler, diferenciam dos elementos considerando-se a teoria de Timoshenko pelo fato de, em sua formulação, este último levar em conta o efeito da distorção que aparece em uma seção genérica provocada pela atuação da tensão de cisalhamento. Dessa forma, o deslocamento transversal engloba a parcela proveniente da flexão, acrescida da parcela proveniente do cisalhamento, sendo seu campo interpolado por um polinômio cúbico, enquanto que para a rotação da seção utiliza-se um polinômio interpolador quadrático independente.

A teoria de viga de Timoshenko, a princípio, baseia sua formulação na teoria de Bernoulli-Euler, uma vez que, a hipótese de que as seções planas permanecem planas após as deformações continua válida, entretanto, não são mais perpendiculares ao eixo deformado, devido ao efeito da deformação pela força cortante.

A Figura A.1 mostra a distorção das seções transversais de uma viga devido à força cortante. Na realidade, a distorção não é constante, variando-se parabolicamente ao longo da altura da viga. Consequentemente, as seções transversais que originalmente eram planas, tornam-se curvas. O modelo de Timoshenko considera que as seções permanecem planas após a deformação, assumindo, portanto, que toda a seção transversal sofre uma distorção constante.

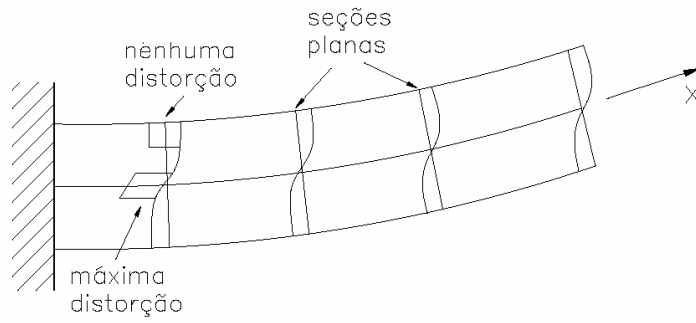


FIGURA A.1 – Distorção das seções transversais de uma viga devido à força cortante

A Figura A.2 mostra a configuração do elemento após as deformações de flexão e cisalhamento. O elemento sofre um deslocamento vertical v_f e uma rotação α , devidos à flexão, atingindo uma posição intermediária. Conforme mostra a figura, o elemento também apresenta um deslocamento vertical v_c e uma rotação γ , devidos ao cisalhamento, atingindo a posição final. Pode-se então, escrever o deslocamento vertical total v_t como a soma do deslocamento vertical devido à flexão v_f e do deslocamento vertical devido ao cisalhamento v_c :

$$v_t = v_f + v_c \quad (\text{A.1})$$

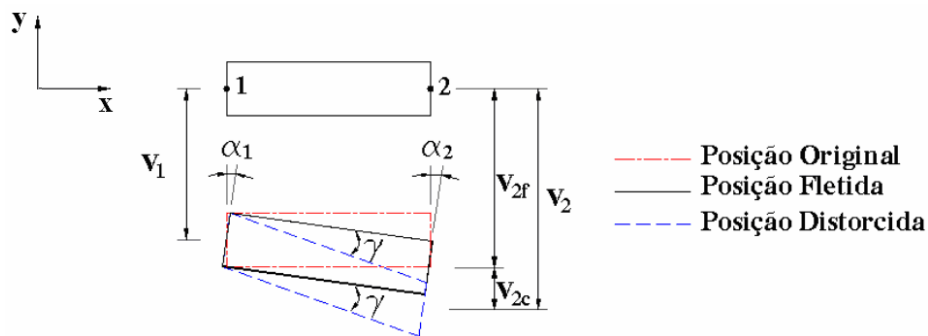


FIGURA A.2 – Configuração do elemento após as deformações adaptada de BRANCO (2002)

A rotação da seção é obtida derivando-se uma vez a Eq. (A.1):

$$\frac{d}{dx} v_t = \frac{d}{dx} v_f + \frac{d}{dx} v_c \quad \therefore \quad \theta = \alpha + \gamma \quad (\text{A.2})$$

Derivando-se novamente, tem-se:

$$\frac{d^2}{dx^2} v_t = \frac{d^2}{dx^2} v_f + \frac{d^2}{dx^2} v_c \quad \therefore \quad v_t'' = \frac{d}{dx} \theta = \frac{d}{dx} \alpha + \frac{d}{dx} \gamma \quad (\text{A.3})$$

Tomando-se as equações de equilíbrio para um elemento isolado submetido a um carregamento distribuído, têm-se as seguintes relações provenientes da Resistência dos Materiais:

$$\frac{d}{dx} V = -q \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{d}{dx} M = V \quad (\text{A.5})$$

onde V é a força cortante, q a carga distribuída ao longo do elemento e M o momento fletor.

A equação da linha elástica contendo as parcelas de flexão e de cisalhamento é dada por:

$$v_t'' = \frac{M}{EI} + \frac{V'}{k_c GA} \quad (\text{A.6})$$

onde I/k_c é o fator de forma para o cisalhamento.

Porém, no método dos elementos finitos, a carga distribuída ao longo do elemento é convertida em um carregamento nodal equivalente, sem perda de precisão da solução. Portanto, a Eq. (A.4) fica:

$$\frac{d}{dx} V = V' = 0 \quad (\text{A.7})$$

E a equação da linha elástica, Eq. (A.6), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$M = EI v_t'' \quad (\text{A.8})$$

Substituindo-se a Eq. (A.3) na expressão da linha elástica e com o auxílio da Eq. (A.5) e Eq. (A.2), têm-se as seguintes expressões:

$$M = EI \left(\frac{d}{dx} \alpha + \frac{d}{dx} \gamma \right) \quad (\text{A.9})$$

$$V = EI \left(\frac{d^2}{dx^2} \alpha + \frac{d^2}{dx^2} \gamma \right) \quad (\text{A.10})$$

$$V = k_c GA \gamma = k_c GA \left(\frac{d}{dx} v_t - \alpha \right) \quad (\text{A.11})$$

Substituindo-se a Eq. (A.11) na Eq. (A.7), resulta:

$$\frac{d}{dx} V = k_c GA \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} v_t - \alpha \right) = 0 \quad \therefore \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} v_t - \alpha \right) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Logo, com o auxílio das Eqs. (A.2) e (A.3):

$$\frac{d}{dx} \gamma = \frac{d^2}{dx^2} v_c = 0 \quad (\text{A.13})$$

Levando-se a Eq. (A.13) nas equações constitutivas, Eqs. (A.9) e (A.10), obtém-se:

$$M = EI \frac{d}{dx} \alpha \quad (\text{A.14})$$

$$V = EI \frac{d^2}{dx^2} \alpha \quad (\text{A.15})$$

Substituindo-se na Eq. (A.5) as Eqs. (A.14) e (A.11) obtidas acima, tem-se:

$$EI \frac{d^2}{dx^2} \alpha - k_c GA \left(\frac{d}{dx} v_t - \alpha \right) = 0 \quad (\text{A.16})$$

Aplicando-se a Eq. (A.15) na Eq. (A.7) conclui-se que a derivada terceira da rotação é nula. Portanto, escolhe-se uma função interpoladora para as rotações, dada por:

$$\alpha = ax^2 + bx + c \quad (\text{A.17})$$

Substituindo-se as Eqs. (A.17) e (A.11) na Eq. (A.16) tem-se:

$$EI \frac{d^2}{dx^2} (ax^2 + bx + c) - k_c GA \gamma = 0 \quad \therefore \quad EI(2a) - k_c GA \gamma = 0 \quad (\text{A.18})$$

resultando-se numa expressão para a rotação por cisalhamento, em função dos parâmetros gerais e das características físicas e geométricas da seção, dada por:

$$\gamma = \frac{2a EI}{k_c GA} \quad (\text{A.19})$$

A rotação total, dada pela Eq. (A.2) torna-se, com o auxílio das Eqs. (A.17) e (A.19):

$$\frac{d}{dx} v_i = \theta = ax^2 + bx + c + \frac{a}{6} \beta L^2 \quad (\text{A.20})$$

onde o fator de cisalhamento β é dado por:

$$\beta = \frac{12EI}{k_c GAL^2} \quad (\text{A.21})$$

O deslocamento transversal total, contendo as parcelas de flexão e de cisalhamento, é determinado integrando-se a Eq. (A.20):

$$v_i = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + d + \frac{a}{6} \beta L^2 x \quad (\text{A.22})$$

O deslocamento contendo apenas a parcela de flexão é obtido integrando-se a Eq. (A.17):

$$v_f = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + d \quad (\text{A.23})$$

A Eq. (A.23) representa o polinômio aproximador dos deslocamentos, contendo somente a parcela de flexão, enquanto que a Eq. (A.20) representa o polinômio aproximador das rotações, contendo as parcelas de flexão e de cisalhamento. Esses polinômios, expressos em função dos parâmetros generalizados, são reescritos em função dos parâmetros nodais do elemento e usados como funções de interpolação para o cálculo das deformações ε_{xx} e γ_{xy} do elemento.

ANEXO

B

DIMENSIONAMENTO DAS ESTRUTURAS

B.1 Dimensionamento à Tração e à Compressão

Este anexo apresenta o dimensionamento à tração e à compressão das barras do exemplo do subitem 5.4.4, considerando-se os procedimentos da ABNT NBR 8800: 2008 e a Eq. (5.18). Três casos são analisados considerando-se os perfis indicados na Tab. 5.10.

CASO 1

Barra comprimida AB:

- Flambagem por flexão e esbeltez da barra no plano da treliça:

$$N_{ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L_y)} = \frac{\pi^2 \times 20000 \times 178}{125^2} = 2249 \text{ kN}$$

$$\lambda_y = \frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{125}{2,2} = 56,82 < 200$$

- Flambagem por flexão e esbeltez da barra fora do plano da treliça:

A barra *AB* é contida lateralmente nos nós *A*, *B* e *D*.

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 EI_x}{(K_x L_x)} = \frac{\pi^2 \times 20000 \times 4046}{125^2} = 51114 \text{ kN}$$

$$\lambda_x = \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{125}{10,51} = 11,89 < 200$$

- Não há a necessidade de verificar a flambagem por torção pura.
- Valores do índice de esbeltez reduzido λ_0 e do fator de redução χ :

$$N_e = N_{ey} = 2249 \text{ kN}$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{Q A_g f_y}{N_e}} = \sqrt{\frac{1,0 \times 36,6 \times 30}{2249}} = 0,70$$

$$\lambda_0 = 0,70 \rightarrow \begin{cases} \text{Curva única (ABNT NBR 8800: 2008)} \rightarrow \chi = 0,815 \\ \text{Eq.(5.18)} \rightarrow \chi = 0,725 \end{cases}$$

- Força axial de compressão resistente de cálculo e força máxima $P_{m\acute{a}x}$:

ABNT NBR 8800: 2008

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{0,815 \times 1,0 \times 36,6 \times 30}{1,10} = 814 \text{ kN} \therefore P_{m\acute{a}x} = 470 \text{ kN}$$

Utilizando a Eq. (5.18)

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{0,725 \times 1,0 \times 36,6 \times 30}{1,10} = 724 \text{ kN} \therefore P_{m\acute{a}x} = 418 \text{ kN}$$

Barra tracionada BC:

A barra *BC* é contida lateralmente apenas nos nós *B* e *C*:

- Esbeltez máxima da barra *BC*:

$$\lambda = \frac{L}{r_{min}} = \frac{L}{r_y} = \frac{288,68}{3,5} = 82,48 < 300$$

- Força axial de tração resistente de cálculo e força máxima $P_{m\acute{a}x}$:

$$N_{t,Rd} = \frac{A_g f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{57,6 \times 30}{1,10} = 1571 \text{ kN} \therefore P_{m\acute{a}x} = 785 \text{ kN}$$

Conforme os resultados apresentados, a estrutura do CASO 1, para ambos os procedimentos, falha por instabilidade inelástica da barra AB .

CASO 2

Barra comprimida AB :

- Flambagem por flexão e esbeltez da barra no plano da treliça:

$$N_{ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L_y)} = \frac{\pi^2 \times 20000 \times 704}{125^2} = 8894 \text{ kN}$$

$$\lambda_y = \frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{125}{3,5} = 35,71 < 200$$

- Flambagem por flexão e esbeltez da barra fora do plano da treliça:

A barra AB é contida lateralmente nos nós A , B e D .

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 EI_x}{(K_x L_x)} = \frac{\pi^2 \times 20000 \times 7158}{125^2} = 90428 \text{ kN}$$

$$\lambda_x = \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{125}{11,15} = 11,21 < 200$$

- Não há a necessidade de verificar a flambagem por torção pura.

- Valores do índice de esbeltez reduzido λ_0 e do fator de redução χ :

$$N_e = N_{ey} = 8894 \text{ kN}$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{Q A_g f_y}{N_e}} = \sqrt{\frac{1,0 \times 57,6 \times 30}{8894}} = 0,44$$

$$\lambda_0 = 0,44 \rightarrow \begin{cases} \text{Curva única (ABNT NBR 8800: 2008)} \rightarrow \chi = 0,922 \\ \text{Eq.(5.18)} \rightarrow \chi = 0,876 \end{cases}$$

- Força axial de compressão resistente de cálculo e força máxima $P_{m\acute{a}x}$:

ABNT NBR 8800: 2008

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{0,922 \times 1,0 \times 57,6 \times 30}{1,10} = 1448 \text{ kN} \therefore P_{m\acute{a}x} = 836 \text{ kN}$$

Utilizando a Eq. (5.18)

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{0,876 \times 1,0 \times 57,6 \times 30}{1,10} = 1376 \text{ kN} \therefore P_{m\acute{a}x} = 795 \text{ kN}$$

Barra tracionada BC:

A barra BC é contida lateralmente apenas nos nós B e C:

- Esbeltez máxima da barra BC da treliça:

$$\lambda = \frac{L}{r_{min}} = \frac{L}{r_y} = \frac{288,68}{2,2} = 131,22 < 300$$

- Força axial de tração resistente de cálculo e força máxima $P_{m\acute{a}x}$:

$$N_{t,Rd} = \frac{A_g f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{36,6 \cdot 30}{1,10} = 998 \text{ kN} \therefore P_{m\acute{a}x} = 499 \text{ kN}$$

Conforme os resultados apresentados, a estrutura do CASO 2, para ambos os procedimentos, falha por tração devido ao escoamento da seção transversal da barra BC .

CASO 3

Barra comprimida AB :

- Flambagem por flexão e esbeltez da barra no plano da treliça:

$$N_{ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{(K_y L_y)} = \frac{\pi^2 \times 20000 \times 178}{250^2} = 562 \text{ kN}$$

$$\lambda_y = \frac{K_y L_y}{r_y} = \frac{250}{2,2} = 113,6 < 200$$

- Flambagem por flexão e esbeltez da barra fora do plano da treliça:

A barra AB é contida lateralmente apenas nos nós A e B .

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 EI_x}{(K_x L_x)} = \frac{\pi^2 \times 20000 \times 4046}{250^2} = 12779 \text{ kN}$$

$$\lambda_x = \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{250}{10,51} = 23,79 < 200$$

- Não há a necessidade de verificar a flambagem por torção pura.
- Valores do índice de esbeltez reduzido λ_0 e do fator de redução χ :

$$N_e = N_{ey} = 562 \text{ kN}$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{QA_g f_y}{N_e}} = \sqrt{\frac{1,0 \times 36,6 \times 30}{562}} = 1,40$$

$$\lambda_0 = 1,40 \rightarrow \begin{cases} \text{Curva \acute{u}nica (ABNT NBR 8800: 2008)} \rightarrow \chi = 0,440 \\ \text{Eq.(5.18)} \rightarrow \chi = 0,349 \end{cases}$$

- Força axial de compressão resistente de cálculo e força máxima $P_{m\acute{a}x}$:

ABNT NBR 8800: 2008

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{0,440 \times 1,0 \times 36,6 \times 30}{1,10} = 439 \text{ kN} \therefore P_{m\acute{a}x} = 254 \text{ kN}$$

Utilizando a Eq. (5.18)

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{0,349 \times 1,0 \times 36,6 \times 30}{1,10} = 348 \text{ kN} \therefore P_{m\acute{a}x} = 201 \text{ kN}$$

Barra tracionada BC:

A barra BC é contida lateralmente nos nós B e C :

- Esbeltez máxima da barra BC da treliça:

$$\lambda = \frac{L}{r_{min}} = \frac{L}{r_y} = \frac{288,68}{3,5} = 82,48 < 300$$

- Força axial de tração resistente de cálculo e força máxima $P_{m\acute{a}x}$:

$$N_{t,Rd} = \frac{A_g f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{57,6 \times 30}{1,10} = 1571 \text{ kN} \therefore P_{m\acute{a}x} = 785 \text{ kN}$$

Conforme os resultados apresentados, a estrutura do CASO 3, para ambos os procedimentos, falha por instabilidade inelástica da barra AB .

B.2 Dimensionamento à Flexão

Este anexo apresenta o dimensionamento à flexão da viga biapoada com cargas concentradas, simetricamente aplicadas, analisado no subitem 5.5.3, conforme os procedimentos estabelecidos pela ABNT NBR 8800: 2008.

Verificações para Estado-limite Último (ELU) segundo a ABNT NBR 8800: 2008

A seção transversal é compacta de modo a evitar a flambagem local das mesas (FLM) e da alma (FLA) do perfil.

$$\text{FLM e FLA: } \lambda < \lambda_p \rightarrow M_{Rd} = \frac{M_{pl}}{\gamma_{a1}}$$

FLT: Comprimento destravado $AB=BC=CD$: $L_b = 300 \text{ cm}$

$$\lambda = \frac{L_b}{r_y} = \frac{300}{7,49} = 40,05; \quad \lambda_p = 1,76 \sqrt{\frac{E}{f_y}} = 1,76 \sqrt{\frac{20000}{25}} = 49,78$$

$$\lambda < \lambda_p \rightarrow M_{Rd} = \frac{M_{pl}}{\gamma_{a1}}$$

$$M_{pl} = Z_x f_y = 5321 \times 25 = 133025 \text{ kNcm} < 1,5 W_x f_y = 1,5 \times 4739,4 \times 25 = 177728 \text{ kNcm}$$

$$M_{Rd} = \frac{M_{pl}}{\gamma_{a1}} = \frac{133025}{1,10} = 120932 \text{ kNcm}$$

$$M_{Rd} = 120932 \text{ kNcm} \rightarrow P_{m\acute{a}x} = 403 \text{ kN}$$

Verificações para Estado-limite de Serviço (ELS) segundo a ABNT NBR 8800: 2008

A carga máxima P da viga residencial calculada anteriormente é constituída por 40% de ação permanente e 60% é decorrente de ação variável devido à sobrecarga. O peso próprio da viga principal é desprezado. Verifica-se apenas a aparência da estrutura dentro dos limites aceitáveis pela ABNT NBR 8800: 2008, admitindo-se que o estado-limite não causa danos temporários ou permanentes à estrutura.

Combinação de ações de serviço \rightarrow Quase permanente \rightarrow Eq.(5.6)

Viga de piso \rightarrow Flecha máxima $< L/350 = 900/350 = 2,57 \text{ cm}$.

A carga característica correspondente à carga de cálculo $P_{máx}$ vale aproximadamente:

$$P_{k,máx} = \frac{0,40P_{máx}}{1,4} + \frac{0,60P_{máx}}{1,5} = 115,1 + 161,2 = 276,3 \text{ kN}$$

$$\sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + \sum_{j=1}^n (\psi_{2j} F_{Qj,k}) = 115,1 \text{ kN} + 0,3 \times 161,2 \text{ kN} = 163,5 \text{ kN}$$

Flecha máxima:

$$y_{máx} = \frac{Pa}{6EI} \left(\frac{3}{4} L^2 - a^2 \right) = \frac{163,5 \times 300}{6 \times 20000 \times 145973} \left(\frac{3}{4} 900^2 - 300^2 \right) = 1,45 \text{ cm} < 2,57 \text{ cm}$$

B.3 Dimensionamento ao Esforço Combinado de Força Normal e Momento Fletor

Este anexo apresenta o dimensionamento da viga biapoiada flexo-comprimida do exemplo 5.6.4 com relação aos estados-limites últimos e de serviço reversível, conforme os procedimentos estabelecidos pela ABNT NBR 8800: 2008.

Verificações para Estado-limite Último (ELU) segundo a NBR 8800: 2008

- Esforços solicitantes de cálculo

As combinações últimas de ações possíveis são:

Hipótese 1: Sobrecarga como ação variável principal

$$q_d = 1,4 \times 0,18 + 1,5 \times 0,54 = 1,062 \text{ kN / cm}$$

$$N_{c,Sd} = 1,4 \times 0,6 \times 800 = 672 \text{ kN}$$

$$M_{nt} = \frac{1,062 \times 600^2}{8} = 47790 \text{ kNcm}$$

$$N_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 20000 \times 30279}{600^2} = 16602 \text{ kN}$$

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \frac{N_{sd1}}{N_e}} = \frac{1}{1 - \frac{672}{16602}} = 1,042$$

$$M_{sd} = B_1 M_{nt} = 1,042 \times 47790 = 49797 \text{ kNcm}$$

Hipótese 2: Vento como ação variável principal

$$q_d = 1,4 \times 0,18 + 1,5 \times 0,8 \times 0,54 = 0,90 \text{ kN/cm}$$

$$N_{c,sd} = 1,4 \times 800 = 1120 \text{ kN}$$

$$M_{nt} = \frac{0,90 \times 600^2}{8} = 40500 \text{ kNcm}$$

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \frac{N_{sd1}}{N_e}} = \frac{1}{1 - \frac{1120}{16602}} = 1,072$$

$$M_{sd} = B_1 M_{nt} = 1,072 \times 40500 = 43416 \text{ kNcm}$$

- Determinação da força axial de compressão resistente de cálculo

Flambagem local:

A seção transversal é compacta de modo a evitar a flambagem local de mesas (FLM) e alma (FLA) do perfil: $Q=1,0$.

Instabilidade global:

- Força axial de flambagem por flexão em relação ao eixo de maior inércia:

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 EI_x}{(K_x L_x)^2} = \frac{\pi^2 \times 20000 \times 30279}{600^2} = 16602 \text{ kN}$$

$$\lambda_x = \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{600}{15,29} = 39,24 < 200 \Rightarrow OK$$

- Força axial de flambagem por flexão em relação ao eixo de menor inércia:

Não ocorre flambagem em relação ao eixo de menor inércia, pois $K_y L_y = 0$.

- Força axial de flambagem por torção:

Não ocorre flambagem por torção, pois $K_z L_z = 0$.

- Valores da força axial de flambagem N_e , do índice de esbelteza reduzido λ_0 e do fator de redução χ :

$$N_e = N_{ex} = 16602 \text{ kN}$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{Q A_g f_y}{N_e}} = \sqrt{\frac{1,0 \times 129,5 \times 34,5}{16602}} = 0,52 \Rightarrow \chi = 0,893$$

- Valor de $N_{c,Rd}$:

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi Q A_g f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{0,893 \times 1,0 \times 129,5 \times 34,5}{1,10} = 3627 \text{ kN}$$

• Determinação do momento fletor resistente de cálculo

FLM, FLA e FLT: $\lambda < \lambda_p \rightarrow M_{x,Rk} = M_{x,pl}$

$$M_{x,Rk} = M_{x,pl} = Z_x f_y = 1888,9 \times 34,5 = 65167 \text{ kNcm}$$
$$(1,5 W_x f_y = 1,5 \times 1696,3 \times 34,5 = 87784 \text{ kNcm})$$

- Valor de $M_{x,Rd}$:

$$M_{x,Rd} = \frac{M_{x,Rk}}{\gamma_{a1}} = \frac{65167}{1,10} = 59243 \text{ kNcm}$$

- Efeitos combinados de $N_{c,Rd}$ e $M_{x,Rd}$

Hipótese 1:

$$\frac{N_{c,Sd}}{N_{c,Rd}} = \frac{672}{3627} = 0,19 < 0,20 \Rightarrow \frac{N_{c,Sd}}{2N_{c,Rd}} + \frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} \leq 1,0$$

$$\frac{672}{2 \times 3627} + \frac{49797}{59243} = 0,93 \leq 1,0 \Rightarrow OK$$

Hipótese 2:

$$\frac{N_{c,Sd}}{N_{c,Rd}} = \frac{1120}{3627} = 0,31 > 0,20 \Rightarrow \frac{N_{c,Sd}}{N_{c,Rd}} + \frac{8M_{x,Sd}}{9M_{x,Rd}} \leq 1,0$$

$$\frac{1120}{3627} + \frac{8 \cdot 43416}{9 \cdot 59243} = 0,96 \leq 1,0 \Rightarrow OK$$

Verificações para Estado-limite de Serviço (ELS) segundo a NBR 8800: 2008

Combinação de ações de serviço \rightarrow Combinação frequente \rightarrow Eq.(5.7)

Viga de cobertura \rightarrow Flecha máxima $< L/250 = 600/250 = 2,40 \text{ cm}$.

Hipótese 1:

$$q_{ser} = 0,18 + 0,7 \times 0,54 = 0,558 \text{ kN / cm}$$

$$N_{ser} = 0$$

Flecha máxima:

$$y_{máx} = \frac{5q_{ser}L^4}{384EI} = \frac{5 \times 0,558 \times 600^4}{384 \times 20000 \times 30279} = 1,55 \text{ cm}$$

$$y_{máx} = 1,55 \text{ cm} < 2,40 \text{ cm} \rightarrow OK.$$

Hipótese 2:

$$q_{ser} = 0,18 + 0,6 \times 0,54 = 0,504 \text{ kN / cm}$$

$$N_{ser} = 0,3 \times 800 = 240 \text{ kN}$$

Flecha máxima:

$$y_{m\acute{a}x} = \frac{5q_{ser}L^4}{384EI} = \frac{5 \times 0,504 \times 600^4}{384 \times 20000 \times 30279} = 1,40 \text{ cm}$$

$$y_{m\acute{a}x} = 1,40 \text{ cm} < 2,40 \text{ cm}$$

B.4 Dimensionamento ao Esforço Combinado de Força Normal e Momento Fletor para Pórtico de Projeto

Este anexo apresenta o dimensionamento dos pilares do 1º andar, 2-7 e 3-10, e da viga 36-37 do 5º andar do pórtico de onze andares e dois vãos de um edifício comercial apresentado no subitem 5.8.2, com base nos procedimentos da ABNT NBR 8800: 2008.

Pilar 2-7: $N_{c,Sd}=7276 \text{ kN}$; $M_{x,Sd}=43517 \text{ kN.cm}$ (esforços solicitantes da análise elástica de 2ª ordem)

Determinação da força axial de compressão resistente de cálculo

Flambagem local:

$$\text{FLM: } \frac{b}{2t_f} = 5,55 < \left(\frac{b}{t}\right)_{\text{lim}} = 16,16 \rightarrow Q_s = 1,0$$

$$\text{FLA: } \frac{h}{t_w} = 17,48 < \left(\frac{b}{t}\right)_{\text{lim}} = 38,47 \rightarrow Q_a = 1,0$$

$$Q = Q_s Q_a = 1,0$$

Instabilidade global:

Força de flambagem por flexão em relação ao eixo de maior inércia:

$$N_{ex} = \frac{\pi^2 EI_x}{(K_x L_x)^2} = \frac{\pi^2 \times 20000 \times 138564}{290^2} = 325225 \text{ kN}$$

$$\lambda_x = \frac{K_x L_x}{r_x} = \frac{290}{20,5} = 14,15 < 200 \Rightarrow OK$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{QA_g f_y}{N_e}} = 0,174 \Rightarrow \chi = 0,988$$

Valor de $N_{c,Rd}$:

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi QA_g f_y}{\gamma_{a1}} = \frac{0,988 \times 1,0 \times 329,8 \times 30}{1,10} = 8887 \text{ kN}$$

Determinação do momento fletor resistente de cálculo

Flambagem local:

$$\text{FLM: } \frac{b}{2t_f} = 5,55 < \lambda_p = 9,81 \rightarrow M_{x,Rk} = M_{x,pl}$$

$$\text{FLA: } \frac{h}{t_w} = 17,48 < \lambda_p = 97,08 \rightarrow M_{x,Rk} = M_{x,pl}$$

$$\text{FLT: } L_b = 0 < \lambda_p = 45,44 \rightarrow M_{x,Rk} = M_{x,pl}$$

$$M_{x,Rk} = M_{x,pl} = Z_x f_y = 6359 \times 30 = 190770 \text{ kNcm}$$

$$(M_{x,Rk} < 1,5W_x f_y = 1,5 \times 5543 \times 30 = 249435 \text{ kNcm})$$

$$\text{Valor de } M_{x,Rd}: M_{x,Rd} = \frac{M_{x,Rk}}{\gamma_{a1}} = \frac{190770}{1,10} = 173427 \text{ kNcm}$$

Efeitos combinados de $N_{c,Rd}$ e $M_{x,Rd}$:

$$\frac{N_{c,Sd}}{N_{c,Rd}} = \frac{7276}{8887} = 0,82 > 0,20 \Rightarrow \frac{N_{c,Sd}}{N_{c,Rd}} + \frac{8M_{x,Sd}}{9M_{x,Rd}} = \frac{7276}{8887} + \frac{8 \cdot 43517}{9 \cdot 173427} = 1,04 > 1,0 \quad \text{Não OK.}$$

Pilar 3-10: $N_{c,Sd}=4875 \text{ kN}$; $M_{x,Sd}=48373 \text{ kN.cm}$ (esforços solicitantes da análise elástica de 2ª ordem)

Força axial de compressão e momento fletor resistentes de cálculo:

$$N_{c,Rd} = 8887 \text{ kN} ; M_{x,Rd} = 173427 \text{ kNcm}$$

Efeitos combinados de $N_{c,Rd}$ e $M_{x,Rd}$:

$$\frac{N_{c,Sd}}{N_{c,Rd}} = \frac{4875}{8887} = 0,55 > 0,20 \Rightarrow \frac{N_{c,Sd}}{N_{c,Rd}} + \frac{8M_{x,Sd}}{9M_{x,Rd}} = \frac{4875}{8887} + \frac{8}{9} \frac{48373}{173427} = 0,80 < 1,0 \quad \text{OK.}$$

Viga 36-37: $N_{c,Sd} \cong 0$; $M_{x,Sd}=54315 \text{ kN.cm}$ (esforços solicitantes da análise elástica de 2ª ordem)

Determinação do momento fletor resistente de cálculo

Flambagem local:

$$\text{FLM: } \frac{b}{2t_f} = 7,23 < \lambda_p = 9,15 \rightarrow M_{x,Rk} = M_{x,pl}$$

$$\text{FLA: } \frac{h}{t_w} = 56,43 < \lambda_p = 90,53 \rightarrow M_{x,Rk} = M_{x,pl}$$

$$\text{FLT: } L_b = 0 < \lambda_p = 42,38 \rightarrow M_{x,Rk} = M_{x,pl}$$

$$M_{x,Rk} = M_{x,pl} = Z_x f_y = 1558 \times 34,5 = 53751 \text{ kNcm}$$

$$(M_{x,Rk} < 1,5W_x f_y = 1,5 \times 1332,2 \times 34,5 = 68941 \text{ kNcm})$$

$$\text{Valor de } M_{x,Rd}: M_{x,Rd} = \frac{M_{x,Rk}}{\gamma_{a1}} = \frac{53751}{1,10} = 48865 \text{ kNcm}$$

Verificação:

$$\frac{M_{x,Sd}}{M_{x,Rd}} = \frac{54315}{48865} = 1,11 > 1,0 \quad \text{Não OK.}$$