

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Departamento de Engenharia de Estruturas
Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

**FORMULAÇÃO MULTIPOTENCIAL PARA MODELOS DE
DEGRADAÇÃO ELÁSTICA: UNIFICAÇÃO TEÓRICA, PROPOSTA
DE NOVO MODELO, IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL E
MODELAGEM DE ESTRUTURAS DE CONCRETO**

Samuel Silva Penna

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, como parte dos requisitos para obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS.

Orientador: Prof. Roque Luiz da Silva Pitanguera

Belo Horizonte
Novembro de 2011

“Toda a nossa ciência, comparada com a realidade, é primitiva e infantil — e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos”.

Albert Einstein

Agradecimentos

Aos meus pais, que me apoiarem em todos os momentos, possibilitando a realização deste trabalho.

Ao meu orientador e professor Roque Luiz da Silva Pitangueira, que, mais uma vez, me orientou com o mesmo entusiasmo, dedicação e amizade, neste longo trabalho.

Aos muitos companheiros do projeto INSANE pela amizade ao longo de tantos anos.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG pela disponibilidade e atenção.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas, em especial à Inês, Patrícia e Fátima, sempre muito atenciosas e disponíveis.

À FAPEMIG e CAPES pelo apoio financeiro.

Índice

Agradecimentos	iv
Índice	v
Lista de Tabelas	x
Lista de Figuras	xi
Lista de Abreviaturas e Siglas	xx
Lista de Símbolos	xxii
Resumo	xxxv
Abstract	xxxvi
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Organização do Texto	3
2 Modelos Constitutivos Para o Concreto	5
2.1 Breve Histórico	5
2.2 Modelos Unidimensionais	10
2.3 Modelos de Fissuração Distribuída	16
2.3.1 Bases dos Modelos de Fissuração Distribuída	18
2.3.2 Generalização dos Modelos de Fissuração Distribuída	21
2.4 Modelos de Dano	29
2.4.1 Conceitos Fundamentais da Mecânica do Dano	30
2.4.2 Formulação de Modelos de Fissuração Distribuída Segundo a Teoria de Dano	34
2.5 Modelos de Microplanos	38
2.5.1 Formulação de Modelos de Microplanos	41
2.5.2 Modelos de Microplanos Baseados no Princípio dos Trabalhos Virtuais	43
2.5.3 Modelos de Microplanos Termodinamicamente Consistentes	45
2.6 Plasticidade Clássica	48
2.6.1 Decomposição Aditiva do Tensor de Deformação	48

2.6.2	Energia Potencial Livre e a Lei Elástica	49
2.6.3	Critério e Superfície de Escoamento	50
2.6.4	Regra do Fluxo Plástico e Lei de Endurecimento	51
2.6.5	Obtenção da Regra de Fluxo Partindo de um Potencial de Fluxo	52
2.6.6	Regra de Fluxo Associada	52
2.6.7	Multiplicador Plástico	53
2.6.8	Operador Tangente Elastoplástico	54
3	Estrutura Teórica Unificada para Modelos Constitutivos	56
3.1	Tentativas de Unificação	58
3.2	Proposta de Unificação Teórica para Modelos Constitutivos com Múltiplas Funções de Carregamento	61
3.2.1	Formulação Baseada em Tensão	65
3.2.2	Formulação Baseada em Deformação	67
3.3	Regra de Degradação Generalizada	73
3.4	Considerações Termodinâmicas: Energia Livre, Dissipação por Degradação e Forças Termodinâmicas	76
3.4.1	Irreversibilidade da Dissipação por Degradação	78
3.5	Variáveis de Dano em Modelos de Degradação Elástica	81
3.5.1	Variação da Flexibilidade	81
3.5.2	Variação da Rigidez	83
3.6	Resumo das Equações	86
3.6.1	Formulação Baseada em Tensão	86
3.6.2	Formulação Baseada em Deformação	87
4	Formulação dos Modelos Constitutivos	90
4.1	Modelos Elastoplásticos	90
4.1.1	Critério de von Mises	92
4.2	Modelos de Dano Isotrópico	93
4.2.1	Modelo de Mazars e Lemaitre (1984)	95
4.2.2	Modelo de Simo e Ju (1987)	95
4.2.3	Modelo de Ju (1989)	98
4.2.4	Modelo de Lemaitre e Chaboche (1990)	98
4.2.5	Modelo de de Vree et al. (1995)	99
4.2.6	Modelo de Mazars (1984)	100
4.3	Modelos de Dano Ortotrópico	102
4.3.1	Modelos de Fissuração Distribuída	108
4.3.2	Modelos de Dano Distribuído por de Borst e Gutiérrez (1999)	111
4.4	Modelos Anisotrópicos	113
4.4.1	Modelos de Microplanos	114
5	Proposta de um Modelo de Dano com Múltiplas Funções de Carregamento	117
5.1	Formulação Básica	117
5.2	Representação do Modelo Segundo a Estrutura Teórica Unificada . .	122

5.3	Uma Variação do Modelo	125
6	Implementação Computacional	128
6.1	Organização do Núcleo Numérico	129
6.2	Análise Estática Fisicamente Não Linear	131
6.3	Implementação da Estrutura Teórica Unificada	136
6.3.1	Classe <code>Material</code>	142
6.3.2	Classe <code>Degeneration</code>	144
6.3.3	Classe <code>AnalysisModel</code>	145
7	Exemplos de Aplicação dos Modelos Implementados	148
7.1	Modelos Constitutivos Implementados	149
7.1.1	Variação da Função de Dano	157
7.2	Diferentes Modelos de Análise	162
7.2.1	Modelo de Estado Plano de Tensão	162
7.2.2	Modelo de Estado Plano de Deformação	163
7.2.3	Modelo Axissimétrico	164
7.2.4	Modelo de Placa de Kirchhoff	165
7.2.5	Modelo de Placa de Reissner-Mindlin	167
7.2.6	Modelo Sólido	168
7.2.7	Modelo de Pórtico de Bernoulli-Euler	170
7.2.8	Modelo de Viga de Timoshenko	172
7.2.9	Modelo de Treliça Plana	173
7.3	Considerações Sobre o Emprego de Diferentes Tipos de Elementos e Modelos de Análise	176
8	Estudos de Caso	178
8.1	Flexão com Pré Tensão	178
8.2	Estrutura de Ancoragem	181
8.3	Efeito de Tamanho na Flexão	183
8.4	Propagação de Trinca na Flexão	187
8.5	Efeito de Tamanho na Compressão Diametral	190
9	Exemplos de Validação do Modelo Constitutivo de Dano Volumétrico	203
9.1	Flexão em 3 Pontos – Petersson (1981)	203
9.2	Painel em L – Winkler et al. (2004)	209
9.3	Cisalhamento em 4 Pontos – Arrea e Ingrassia (1982)	212
9.4	Viga de Concreto Armado – Mazars e Pijaudier-Cabot (1989)	218
9.5	Viga de Concreto Armado – Álvares (1993)	220
9.6	Viga de Concreto Armado – de Borst e Nauta (1985)	225
9.7	Viga de Concreto com Fibras – Guetti et al. (2010)	228

10	Considerações Finais	230
10.1	Sobre a Unificação Teórica Proposta	231
10.2	Sobre a Modelagem Constitutiva	232
10.3	Sobre o Modelo de Dano Volumétrico	234
10.4	Sobre a Implementação Computacional	236
10.5	Continuidade da Linha de Pesquisa	237
	Bibliografia	239
A	Condições de Carregamento, Descarregamento e Recarregamento	258
B	Conceitos da Mecânica do Dano Contínuo, Relações Secantes e Variáveis de Dano	265
B.1	Tensão e Deformação Efetivas e Equivalência de Energia	266
B.1.1	Dano Isotrópico	267
B.1.2	Tensores de Dano de Segunda Ordem	267
B.1.3	Formulação Anisotrópica Para as Relações Secantes com Tensores de Dano	268
C	Solução das Equações Não Lineares do Método dos Elementos Finitos	272
C.1	Métodos Incrementais-Iterativos	274
D	Modelos de Análise Aplicados aos Modelos Constitutivos	281
D.1	Composição Tensorial Geral	281
D.2	Modelo de Fissuração Distribuída	285
D.2.1	Modelo de Análise Sólido Tridimensional	286
D.2.2	Modelo de Análise Axissimétrico Plano	287
D.2.3	Modelo de Análise Estado Plano de Deformação	288
D.2.4	Modelo de Análise Estado Plano de Tensão	289
D.2.5	Modelo de Análise para Flexão de Placas	290
D.3	Modelos de Degradação Isotrópicos	296
E	Relações Tensão-Deformação e Equações de Evolução do Dano	297
E.1	Relações Tensão-Deformação	297
E.1.1	Proposta de Boone e Ingraffea (1987)	298
E.1.2	Proposta de Carreira e Chu (1985, 1986)	299
E.1.3	Aproximação Bilinear	301
E.1.4	Aproximação Trilinear	303
E.2	Equações de Evolução do Dano	306
E.2.1	Função de Evolução do Dano com Variação Exponencial	306
E.2.2	Função de Evolução do Dano com Variação Polinomial	307
E.2.3	Função de Evolução do Dano com Variação Linear	308

F	Complemento do Projeto Orientado a Objetos do Núcleo Numérico do Sistema INSANE	309
F.1	Detalhes das Classes do Núcleo Numérico do INSANE	309
F.1.1	Interface Assembler	309
F.1.2	A Classe Abstrata Solution	310
F.1.3	A Interface Model	313
F.2	Complemento: Projeto Orientado a Objetos da Implementação Realizada	318
G	Obtenção dos Parâmetros dos Modelos de Dano	324

Lista de Tabelas

7.1	Parâmetros das funções dano para a tração.	157
8.1	Variação da Resistência	186
8.2	Variação da Resistência	190
8.3	Variação da Resistência	201
9.1	Parâmetros das leis de dano.	204
9.2	Parâmetros das leis tensão-deformação.	205
9.3	Parâmetros das leis de dano.	210
9.4	Parâmetros das leis tensão-deformação.	210
9.5	Parâmetros das leis de dano.	214
9.6	Parâmetros das leis tensão-deformação.	214
9.7	Parâmetros dos modelos constitutivos.	219
9.8	Parâmetros dos modelos constitutivos.	222
9.9	Parâmetros dos modelos constitutivos.	226
9.10	Parâmetros do modelo de dano volumétrico.	229
E.1	Parâmetros do material	298

Lista de Figuras

2.1	Seção transversal de concreto armado antes da fissuração	12
2.2	Divisão em faixas e armadura pontual.	12
2.3	Subdivisão composta por diversos materiais.	13
2.4	Leis constitutivas.	14
2.5	Decomposição da seção transversal.	15
2.6	Propagação de fissuras em modelos distribuídos	17
2.7	Propagação da trinca em modelos discretos.	18
2.8	Sistema de coordenadas da trinca.	19
2.9	Eixos locais e globais.	22
2.10	Transformações de deformações e tensões.	26
2.11	Lei tensão-deformação.	29
2.12	Caracterização do dano.	31
2.13	Sistema de coordenadas global (X-Y) e local (n-s).	36
2.14	Representação da estrutura constituinte do concreto.	40
2.15	Microplanos em um ponto material.	41
2.16	Resumo esquemático da teoria de microplanos.	42
2.17	Decomposição adotada por Carol et al. (1992).	43
2.18	Possibilidades da evolução das variáveis internas.	52
3.1	Comportamento típico de modelos materiais:(a) Material com degradação elástica;(b) Material elastoplástico;(c) Comportamento observado experimentalmente.	57
3.2	Descarregamento secante com dano irreversível.	57
3.3	Decomposição dos incrementos de deformações em modelos de degradação elástica.	62
3.4	Deformação recuperada em modelos de degradação elástica.	63

3.5	Incremento de deformações. (a) Degradação elástica; (b) Plasticidade.	63
3.6	Incremento de tensão associados às deformações de degradação e deformações plásticas. (a) Degradação elástica; (b) Plasticidade.	64
3.7	Incremento de deformação associados à variação da flexibilidade.	68
3.8	Dissipação de energia por degradação da rigidez.	77
4.1	Relações tensão-deformação diferentes para as direções principais.	109
6.1	Notação UML usada na descrição do projeto de classes.	129
6.2	Organização do núcleo numérico.	129
6.3	Classes da solução com a implementação do método de Newton-Rapshon.	132
6.4	Início do processo de execução do método de Newton-Rapshon.	133
6.5	Obtenção da rigidez incremental.	133
6.6	Integração da rigidez tangente de um elemento.	134
6.7	Obtenção da matriz constitutiva tangente para a integração da rigidez incremental.	134
6.8	Atividades de obtenção do vetor de forças internas.	135
6.9	Cálculo das tensões: relação entre degeneração e modelo constitutivo.	136
6.10	Hierarquia de classes de <code>ConstitutiveModel</code>	139
6.11	Hierarquia de classes de <code>ConstitutiveModelFilter</code>	139
6.12	Modelo constitutivo unificado: obtenção dos tensores de rigidez elástico e secante e atualização das variáveis.	140
6.13	Modelo constitutivo unificado: obtenção do operador tangente e cálculo das tensões.	141
6.14	Modelo constitutivo unificado: obtenção operador tangente.	142
6.15	Modelo constitutivo unificado: cálculo das tensões.	142
6.16	Hierarquia de classes de <code>Material</code>	143
6.17	Hierarquia de classes de <code>DamageLaw</code>	144
6.18	Hierarquia de classes de <code>Degeneration</code>	145
6.19	Hierarquia de classes de <code>MaterialPoint</code>	145
6.20	Hierarquia de classes de <code>AnalysisModel</code>	146
6.21	Hierarquia de classes de <code>ContinuousPointModel</code>	147

7.1	Modelos de tração direta.	149
7.2	Trajectoria de equilíbrio: Fator de carga × Deslocamento horizontal da extremidade.	151
7.3	Trajectoria de equilíbrio: Fator de carga × Deslocamento horizontal da extremidade.	152
7.4	Varição do Dano e da Integridade: Dano × Deformação axial (ε_x); Integridade × Deformação axial (ε_x)	153
7.5	Varição do Dano e da Integridade: Dano × Deformação axial (ε_x); Integridade × Deformação axial (ε_x)	154
7.6	Varição do Dano e da Integridade: Dano × Deformação axial (ε_x); Integridade × Deformação axial (ε_x)	155
7.7	Varição do Dano e da Integridade: Dano × Deformação axial (ε_x); Integridade × Deformação axial (ε_x)	156
7.8	Trajectorias de equilíbrio com diferentes funções de dano.	158
7.9	Comparação entre as diferentes funções evolução do dano.	159
7.10	Varição do Dano e da Integridade: Dano × Deformação axial (ε_x); Integridade × Deformação axial (ε_x).	159
7.11	Varição do Dano e da Integridade: Dano × Deformação axial (ε_x); Integridade × Deformação axial (ε_x).	160
7.12	Varição do Dano: Dano × Deformação axial (ε_x).	161
7.13	Varição da Integridade: Integridade × Deformação axial (ε_x)	161
7.14	Modelo de estado plano de tensões.	162
7.15	Trajectoria de equilíbrio: Fator de carga × Deslocamento.	163
7.16	Detalhes da geométricos e malha de elementos finitos.	163
7.17	Trajectoria de equilíbrio: Fator de carga × Deslocamento.	164
7.18	Modelo axissimétrico.	165
7.19	Trajectoria de equilíbrio: Fator de carga × Deslocamento.	165
7.20	Modelo de placa de Kirchhoff.	166
7.21	Trajectoria de equilíbrio: Fator de carga × Deslocamento.	166
7.22	Modelo de placa de Reissner-Mindlin.	167
7.23	Trajectorias de equilíbrio: Deslocamento vertical × Fator de carga.	168
7.24	Modelo sólido.	168

7.25	Trajatória de equilíbrio: Deslocamento horizontal \times Fator de carga.	169
7.26	Tensão (σ_{xx}) \times Deformação (ε_{xx}) para $c = 0,5 m$	170
7.27	Localização de deformações axiais ε_{xx}	170
7.28	Detalhes da geométricos do pórtico espacial.	171
7.29	Modelo de elementos finitos e deformada.	171
7.30	Trajatória de equilíbrio: Deslocamento horizontal \times Fator de carga.	172
7.31	Detalhes geométricos e das malhas de elementos finitos.	172
7.32	Trajórias de equilíbrio da extremidade do balanço.	173
7.33	Detalhes da geométricos e modelo de elementos finitos.	174
7.34	Trajórias de equilíbrio: Deslocamento vertical \times Fator de carga.	174
7.35	Variação das deformações no regime elástico, para o modelo de plasticidade.	175
7.36	Variação das deformações no trecho I do regime inelástico, para o modelo de plasticidade.	175
7.37	Variação das deformações no trecho II do regime inelástico, para o modelo de plasticidade.	175
7.38	Variação das deformações no regime elástico, para o modelo de dano.	175
7.39	Variação das deformações no trecho I do regime inelástico, para o modelo de dano.	176
7.40	Variação das deformações no trecho II do regime inelástico, trecho para o modelo de dano.	176
7.41	Tipos de Degenerações.	177
8.1	Geometria e modelo de elementos finitos	179
8.2	Trajórias de equilíbrio: Carga \times Deslocamento vertical.	179
8.3	Variação do dano para $\sigma < 0$, $\sigma = 0$, $\sigma > 0$	180
8.4	Detalhes geométricos e de carregamento do ensaio de ancoragem.	181
8.5	Malha de elementos finitos.	182
8.6	Trajórias de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.	182
8.7	Trajórias de equilíbrio: Carga \times Deslocamento vertical no topo.	183
8.8	Configuração geométrica.	184
8.9	Trajórias de equilíbrio do deslocamento vertical da ponta da trinca.	185

8.10	Ductilidade estrutural: comportamento pós pico normalizado.	185
8.11	Variação da resistência efetiva.	186
8.12	Configuração geométrica.	187
8.13	Malhas de elementos finitos utilizada.	187
8.14	Trajatórias de equilíbrio para o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.	188
8.15	Comportamentos pós-críticos normalizados.	189
8.16	Deformadas.	189
8.17	Variação da resistência com a altura efetiva.	190
8.18	Configuração geométrica e malha de elementos finitos do modelo de compressão diametral.	191
8.19	Trajatórias de equilíbrio para o deslocamento horizontal de controle. .	192
8.20	Trajatórias de equilíbrio para o deslocamento vertical do contato da chapa com o cilindro.	192
8.21	Trajatórias de equilíbrio normalizadas: deslocamento horizontal. . . .	193
8.22	Trajatórias de equilíbrio normalizadas: deslocamento vertical.	193
8.23	Trinca 4 mm: (a) ε_1 ; (b) ε_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.	194
8.24	Trinca 8 mm: (a) ε_1 ; (b) ε_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.	195
8.25	Trinca 12 mm: (a) ε_1 ; (b) ε_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.	196
8.26	Trinca 16 mm: (a) ε_1 ; (b) ε_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.	197
8.27	Trinca 20 mm: (a) ε_1 ; (b) ε_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.	198
8.28	Trinca 24 mm: (a) ε_1 ; (b) ε_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.	199
8.29	Trinca 28 mm: (a) ε_1 ; (b) ε_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.	200
8.30	Variação da Resistência.	202
9.1	Geometria e malha de elementos finitos para a viga submetida a flexão em três pontos.	204
9.2	Trajatórias de equilíbrio para o modelo de dano volumétrico.	205
9.3	Trajatórias de equilíbrio para o modelo de fissuração distribuída. . . .	206

9.4	Comparação entre os modelos de dano volumétrico, com lei de dano polinomial, de fissuração distribuída, com leis de Carreira e Chu (1985, 1986) e Boone e Ingraffea (1987), e os resultados obtidos por Rots et al. (1985), com modelo de fissuração distribuída usando lei trilinear.	207
9.5	Comparação entre o modelo de dano volumétrico, com lei de dano linear, e os resultados obtidos por Fang et al. (2008), com modelo de trinca coesiva usando lei exponencial.	207
9.6	Variação das deformações obtidas com o modelo de fissuração distribuída.	208
9.7	Variação das deformações obtidas com o modelo de dano volumétrico.	208
9.8	Painel em “L”: geometria e malha do modelo de elementos finitos. . .	209
9.9	Trajetórias de equilíbrio obtidos com o modelo de dano volumétrico. .	210
9.10	Trajetórias de equilíbrio obtidos com o modelo de fissuração distribuída.	211
9.11	Isofaixas de evolução do dano por tração obtidas com o modelo de dano volumétrico.	212
9.12	Padrão de dano observado por Winkler et al. (2004).	212
9.13	Geometria do modelo.	213
9.14	Malha de elementos finitos.	213
9.15	Resposta carga \times CMSD obtidos com o modelo de dano volumétrico.	215
9.16	Resposta carga \times CMSD obtidos com o modelo de modelo de fissuração distribuída.	215
9.17	Comparação dos modelos de dano volumétrico e de fissuração distribuída com os resultados obtidos por Fang et al. (2008).	216
9.18	Deformada e distribuição de tensões de cisalhamento da viga correspondentes ao máximo valor de carga para o modelo de fissuração distribuída.	216
9.19	Deformada e distribuição de tensões de cisalhamento da viga correspondentes ao máximo valor de carga para o modelo de dano volumétrico.	217

9.20	Comparação das trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga central, obtidos com os modelos de fissuração distribuída e de dano volumétrico, com os resultados obtidos por Most e Bucher (2007).	217
9.21	Flexão em 3 pontos em concreto armado: geometria e modelo de elementos finitos.	218
9.22	Trajетórias de equilíbrio do deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga.	220
9.23	Detalhes geométricos e da armadura das vigas.	220
9.24	Modelo de elementos finitos:(a) Malha adotada para as vigas subarmada e normalmente armada;(b) Malha adotada para a viga superarmada.	221
9.25	Trajетórias de equilíbrio carga \times Deslocamento vertical, para a viga subarmada.	223
9.26	Trajетórias de equilíbrio carga \times Deslocamento vertical, para a normalmente armada.	223
9.27	Trajетórias de equilíbrio carga \times Deslocamento vertical, para a viga super armada.	224
9.28	Isofaixas de Dano: (a)Barros (2002)- MEF; (b)Barros (2002)- MEEG; (c) Modelo de dano volumétrico; (d) Modelo Mazars (1984).	225
9.29	Detalhes geométricos e malha de elementos finitos.	226
9.30	Trajетórias de equilíbrio carga \times Deslocamento vertical.	227
9.31	Configuração geométrica e malha de elementos finitos do modelo.	228
9.32	Resposta carga \times CMOD obtidas com o modelo de dano volumétrico.	229
A.1	Regime de carregamento elástico	260
A.2	Regime inelástico de carregamento com dano	261
A.3	Regime de Descarregamento	262
A.4	Regime de Recarregamento	263
B.1	Dano \times Integridade.	268
C.1	Trajетória de equilíbrio típica em problemas não lineares	273
C.2	Obtenção de pontos de equilíbrio.	274

C.3	Formulações dos métodos incrementais-iterativos: (a) secante; (b) tangente.	275
C.4	Processo incremental-iterativo com controle de carga	276
C.5	Diagrama de atividades do algoritmo genérico para métodos de controle	279
C.6	Detalhamento do diagrama de atividades da figura C.5	280
D.1	Representação do deslocamento de ponto qualquer.	291
D.2	Representação do deslocamento de ponto qualquer.	293
D.3	Decomposição da espessura da placa em camadas.	295
E.1	Lei de Boone e Ingraffea (1987).	298
E.2	Simulações com a lei proposta por Boone e Ingraffea (1987).	299
E.3	Lei de Carreira e Chu (1985, 1986).	300
E.4	Simulações com a lei proposta por Carreira e Chu (1985, 1986) para à tração.	301
E.5	Lei bilinear.	302
E.6	Simulações com a lei bilinear para à tração.	303
E.7	Lei trilinear.	304
E.8	Simulações com a lei trilinear para à tração.	305
F.1	Herança de classe de <code>Assembler</code>	310
F.2	Herança de classe de <code>Solution</code>	311
F.3	Herança de classe de <code>Step</code>	312
F.4	Especializações da interface de <code>IterativeStrategy</code>	313
F.5	Hierarquia da interface de <code>Model</code>	313
F.6	Associação de instâncias da classe <code>FemModel</code>	314
F.7	Diagramas de classe para <code>Node</code>	314
F.8	Diagramas de classe para <code>Element</code>	315
F.9	Especializações da interface <code>ProblemDriver</code>	316
F.10	Diagramas de classe para <code>Shape</code>	317
F.11	Diagramas de classe para <code>ConstitutiveModel</code>	318
F.12	Diagramas de classe para <code>ConstitutiveModelFilter</code>	319
F.13	Diagramas de classe para <code>Material</code>	320
F.14	Diagramas de classe para <code>Degeneration</code>	321

F.15	Diagramas de classe para <code>AnalysisModel</code>	322
F.16	Diagramas de classe para <code>ContinuousPointModel</code>	323
G.1	Trajétórias de equilíbrio tensão \times Deformação na tração	325
G.2	Trajétórias de equilíbrio tensão \times Deformação na compressão	325

Lista de Abreviaturas e Siglas

AIAA *American Institute of Aeronautics and Astronautics*

ASCE *American Society of Civil Engineers*

CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CILAMCE Congresso Ibero Latino Americano de Mecânica Computacional

CMOD *Crack Mouth Opening Displacement*

CMSD *Crack Mouth Sliding Displacement*

DEES Departamento de Engenharia de Estruturas

EPD Estado Plano de Deformação

EPT Estado Plano de Tensão

EVR Elemento Volumétrico Representativo

FAPEMIG Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais

FEMOOP *Finite Element Method Oriented Object Program*

INSANE *Interactive Structural Analysis Environment*

MDC Mecânica do Dano Contínuo

MEC Método dos Elementos de Contorno

MEF Método dos Elementos Finitos

MEFG Método dos Elementos Finitos Generalizados

MSM Método Sem Malha

POO Programação Orientada a Objetos

SIMMEC Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional

UFMG Universidade Federal de Minas Gerais

UML *Unified Modeling Language*

XML *Extensible Markup Language*

Lista de Símbolos

Capítulo 2: Modelos Constitutivos Para o Concreto

Modelos Unidimensionais

σ_{xx}	Tensão normal na direção x .
τ_{xy}	Tensão de cisalhamento no plano xy .
τ_{xz}	Tensão de cisalhamento no plano xz .
ε_{xx}	Deformação normal na direção x .
γ_{xy}	Deformação de cisalhamento no plano xy .
γ_{xz}	Deformação de cisalhamento no plano xz .
E^s	Módulo de elasticidade longitudinal secante.
E^t	Módulo de elasticidade longitudinal tangente.
G^s	Módulo de elasticidade transversal secante.
G^t	Módulo de elasticidade transversal tangente.
N	Força axial.
V_y	Força cortante na direção y .
V_z	Força cortante na direção z .
T	Momento de torção.
M_z	Momento fletor em torno do eixo z .
y_i	Coordenada y do centróide de um ponto material.
z_i	Coordenada z do centróide de um ponto material.

A_i Área de um ponto material.

Modelos de Fissuração Distribuída

$\{\sigma_\ell\}$ Vetor de tensões no sistema local.

$\{\varepsilon_\ell\}$ Vetor de deformações no sistema local.

$[\ell^s D]$ Matriz constitutiva secante local.

n Direção normal à fissura.

s, t Direções tangenciais à fissura.

β_r Fator de retenção ao cisalhamento.

α_r Fator de redução do módulo de elasticidade na direção normal à fissura.

ν Coeficiente de Poisson.

$[\ell^s C]$ Matriz de flexibilidade secante local.

ε_{11} Primeira componente de deformação principal.

ε_{22} Segunda componente de deformação principal.

ε_{33} Terceira componente de deformação principal.

γ_{12} Componente de deformação de cisalhamento relacionada à tensão de cisalhamento no estado de deformações principais.

E_1 Módulo de elasticidade longitudinal na direção da primeira deformação principal.

E_2 Módulo de elasticidade longitudinal na direção da segunda deformação principal.

G_{12} Módulo de elasticidade transversal relacionada as direções principais de deformação.

$\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{13}, \nu_{31}, \nu_{23}, \nu_{32}$ Influência da deformação normal na direção tangencial.

E_0 Módulo de elasticidade inicial.

ν Coeficiente de Poisson.

G_0 Módulo de elasticidade transversal inicial.

$[T_\sigma]$ Matriz de transformação de tensões.

$\{\sigma_g\}$ Vetor de tensões no sistema global.

- θ Ângulo de rotação do sistema de coordenadas.
- $[T_\varepsilon]$ Matriz de transformação de deformações.
- $\{\sigma_g\}$ Vetor de deformações no sistema global.
- $[_g^s D]$ Matriz constitutiva secante global.

Modelos de Dano

- $D(\vec{n})$ Variável de dano na direção \vec{n} .
- δS Plano de interseção entre um plano qualquer e o elemento volumétrico representativo.
- δS_D Área de microfissuras e microvazios contidos em δS
- \vec{n} Vetor de direção de propagação do dano.
- E Módulo de elasticidade do material virgem.
- E_D Módulo de elasticidade do material degradado.
- D Variável de dano.
- σ^{ef} Tensão efetiva.
- ε^{ef} Deformação efetiva.
- $\bar{\alpha}$ Tensor efeito de dano sobre as tensões.
- α Tensor efeito de dano sobre as deformações.
- E^0 Módulo de elasticidade do material virgem.
- σ_{ij} Tensor de tensões.
- ε_{kl} Tensor de deformações.
- $D_{ijkl}^s[\dots]$ Tensor constitutivo secante em função de variáveis internas.
- w Variável de dano escalar.
- δ Delta de Kronecker.
- D_{ijkl}^e Tensor de rigidez elástico.
- K Módulo volumétrico.
- f Função de carregamento.

$\tilde{\varepsilon}$	Valor escalar de deformação equivalente.
$\tilde{\sigma}$	Valor escalar de tensão equivalente.
κ	Variável histórica.
$\dot{\kappa}$	Taxa de variação da variável histórica.
$[\sigma_{ns}]$	Tensor de tensões no sistema local.
$[D_{ns}^s]$	Tensor de rigidez secante local.
$[\varepsilon_{ns}]$	Tensor de deformações no sistema local.
$[T^\sigma]$	Matriz de transformação de tensões.
$[T^\varepsilon]$	Matriz de transformação de deformações.

Modelos de Microplanos

\vec{n}	Vetor normal de um microplano.
n_i	Componente do vetor normal de um microplano.
ε_N	Componente normal de deformação no microplano.
ε_T	Vetor de deformações tangenciais no microplano.
δ	Delta de Kronecker.
ε_V	Parcela volumétrica da componente normal de deformação no microplano.
ε_D	Parcela desviadora da componente normal de deformação no microplano.
σ_V	Tensão volumétrica no microplano.
E_V^0	Módulo de elasticidade inicial volumétrico.
σ_D	Tensão desviadora.
E_D^0	Módulo de elasticidade inicial desviador.
σ_{Ti}	Vetor de tensões tangenciais no microplano.
τ	Tensão tangencial no microplano.
γ	Deformação tangencial no microplano.
E_T^0	Módulo de elasticidade inicial tangencial.
Ω	Domínio da integral equivalente à metade superior do ponto material.

- D_{ijkl}^t Tensor constitutivo tangente macroscópico.
- E_V^t Módulo tangente volumétrico.
- H_{rs}^t Matriz que relaciona incrementos de tensão e deformações tangenciais.
- ψ Função de descontinuidade. Considerada para contabilizar a influência das descontinuidade geradas pelas microfissuras de tração.
- \mathcal{D}^{mac} Dissipação Macroscópica.
- $\boldsymbol{\sigma}$ Tensor de tensões macroscópicas.
- $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ Taxa de deformações Macroscópicas.
- Ψ^{mac} Energia livre macroscópica.
- $\dot{\Psi}^{mac}$ Evolução da energia livre macroscópica.
- Ψ^{mic} Energia livre microscópica.
- q Vetor de variáveis internas.
- ε_V Componente volumétrica de deformação.
- ε_D Componente Desviadora de deformação.
- ε_T Componentes Tangenciais de deformação.
- \mathbf{V} Tensor de projeção volumétrica.
- \mathbf{D} Tensor de projeção desviadora.
- \mathbf{T} Tensor de projeção tangencial.
- n Vetor unitário em cada microplano.
- \mathcal{D}^{mic} Dissipação nos microplanos.
- \mathbf{E}_t Tensor constitutivo tangente.
- $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ Incremento do tensor de tensões.
- $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ Incremento do tensor de deformações.
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{vol}$ Parcela volumétrica da decomposição aditiva do tensor de deformações macroscópicas.
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{dev}$ Parcela desviadora da decomposição aditiva do tensor de deformações macroscópicas.
- \mathbf{t}_ε Vetor de deformações.
- \mathbf{V} Tensor de projeção volumétrica individual de cada microplano.

Plasticidade Clássica

$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tensor de deformações.
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Parcela elástica do tensor de deformações.
$\boldsymbol{\varepsilon}^p$	Parcela plástica do tensor de deformações.
ψ	Energia livre.
$\boldsymbol{\alpha}$	Conjunto de variáveis internas associadas ao regime inelástico.
Υ^p	Função de dissipação plástica.
Φ	Função da superfície de escoamento.
\boldsymbol{D}^e	Tensor de rigidez elástico.
\mathcal{E}	Definição do domínio elástico.
$\bar{\mathcal{E}}$	Definição do domínio plástico admissível.
\mathcal{Y}	Definição do domínio da superfície de escoamento.
\boldsymbol{N}	Tensor de fluxo plástico.
\boldsymbol{H}	Módulo plástico generalizado.
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico.
Ψ	Potencial plástico.
\boldsymbol{D}^{ep}	Operador tangente elastoplástico.

Capítulo 3: Estrutura Teórica Unificada para Modelos Constitutivos

σ_{ij}	Componentes do tensor de tensão.
E_{ijkl}	Componentes do tensor de rigidez secante.
ε_{kl}	Componentes do tensor de deformação.
C_{ijkl}	Componentes do tensor de flexibilidade secante.
$\dot{\sigma}$	Incremento das tensões.
$\dot{\varepsilon}$	Incremento das deformações.
$\dot{\varepsilon}^s$	Incremento das deformações associadas à rigidez secante.

$\dot{\varepsilon}^d$	Incremento das deformações associadas à degradação da rigidez.
$\dot{\varepsilon}^r$	Incremento das deformações recuperadas sob descarregamento.
$\dot{\varepsilon}^p$	Incremento das deformações plásticas.
$\dot{\sigma}_{ij}^{inc}$	Componentes do tensor de tensão incremental associadas à rigidez elástica.
$\dot{\sigma}^d$	Incremento das tensões associadas à degradação da rigidez.
$\dot{\lambda}$	Vetor de multiplicadores inelásticos.
F_n	Funções de carregamento.
\mathbf{n}	Tensor das direções das funções de carregamento no domínio das tensões.
\mathbf{m}	Tensor das direções da degradação no domínio das tensões.
\mathbf{H}	Tensor pós-crítico no domínio das tensões.
$\bar{\mathbf{n}}$	Tensor das direções das funções de carregamento no domínio das deformações.
$\bar{\mathbf{m}}$	Tensor das direções da degradação no domínio das deformações.
$\bar{\mathbf{H}}$	Tensor pós-crítico no domínio das deformações.
m_{mkl}	Componentes do tensor das direções da degradação no domínio das tensões.
n_{nij}	Componentes do tensor dos gradientes das funções de carregamento no domínio das tensões.
H_{nm}	Componentes do tensor pós-crítico no domínio das tensões.
p_k	Conjunto de variáveis internas que controlam o processo de degradação no domínio das tensões.
\bar{m}_{mkl}	Componentes do tensor das direções da degradação no domínio das deformações.
\bar{n}_{nij}	Componentes do tensor dos gradientes das funções de carregamento no domínio das deformações.
\bar{H}_{nm}	Componentes do tensor pós-crítico no domínio das deformações.
\bar{p}_k	Conjunto de variáveis internas que controlam o processo de degradação no domínio das deformações.
E_{ijkl}^t	Operador tangente escrito em termos do tensor de rigidez.
C_{ijkl}^t	Operador tangente escrito em termos do tensor de flexibilidade.
\bar{M}_{mijkl}	Componentes do tensor das direções da variação do tensor de rigidez.

- M_{mijkl} Componentes do tensor das direções da variação do tensor de flexibilidade.
- w Energia elástica.
- \dot{d} Taxa de dissipação por degradação.
- $-Y_{ijkl}$ Força termodinâmica conjugada ao tensor de flexibilidade.
- $-\bar{Y}_{ijkl}$ Força termodinâmica conjugada ao tensor de rigidez.
- N_{nijkl} Componentes do tensor das derivadas das funções de carregamento em relação às força termodinâmica conjugada ao tensor de flexibilidade.
- \bar{N}_{nijkl} Componentes do tensor das derivadas das funções de carregamento em relação às força termodinâmica conjugada ao tensor de rigidez.
- \mathcal{D}_* Conjunto das variáveis de dano no domínio da flexibilidade.
- $\bar{\mathcal{D}}_*$ Conjunto das variáveis de dano no domínio da rigidez.
- \mathcal{M}_{m*} Direção da taxa de mudança das variáveis de dano no domínio da flexibilidade.
- $-\mathcal{Y}_*$ Forças termodinâmicas conjugada às variáveis de dano no domínio da flexibilidade.
- $\bar{\mathcal{M}}_{m*}$ Direção da taxa de mudança das variáveis de dano no domínio da rigidez.
- $-\bar{\mathcal{Y}}_*$ Forças termodinâmicas conjugada às variáveis de dano no domínio da rigidez.
- $-\mathcal{N}_{n*}$ Componentes do tensor das derivadas das funções de carregamento em relação às força termodinâmica conjugada ao dano no domínio da flexibilidade.
- $-\bar{\mathcal{N}}_{n*}$ Componentes do tensor das derivadas das funções de carregamento em relação às força termodinâmica conjugada ao dano no domínio da rigidez.
- C_{ijkl}^D Componentes do tensor de flexibilidade escrito em função das variáveis de dano.
- E_{ijkl}^D Componentes do tensor de rigidez escrito em função das variáveis de dano.

Capítulo 4: Formulação dos Modelos Constitutivos

- $J_2(s)$ Segundo invariante do tensor de tensões desviadoras.
- \mathbf{s} Tensor de tensões desviadoras.
- \mathcal{H} Módulo plástico.
- $f(\mathcal{A})$ Função de carregamento genérica.

- \mathcal{A} Conjunto de variáveis que definem uma função de carregamento.
- $h(\kappa)$ Função do parâmetro histórico.
- $D(\kappa)$ Função de dano para avaliar o estado de degradação do meio.
- $\bar{\varepsilon}$ Deformação equivalente de Mazars e Lemaitre (1984).
- $\bar{\tau}$ Medida de dano de Simo e Ju (1987) definida no domínio das deformações.
- τ Medida de dano de Simo e Ju (1987) definida no domínio das tensões.
- \bar{w}^0 Medida de dano de Ju (1989).
- k Parâmetro do material que relaciona a diferença entre comportamentos à tração e à compressão para a deformação equivalente de de Vree et al. (1995).
- I_1^ε Primeiro invariante do tensor de deformações.
- J_2^ε Segundo invariante do tensor de deformações.
- D_t Dano por tração para o modelo de Mazars (1984).
- D_c Dano por compressão para o modelo de Mazars (1984).
- α_t Função peso usadas para contabilizar o comportamento do material ao dano por tração.
- α_c Função peso usadas para contabilizar o comportamento do material ao dano por compressão.
- σ^+ Parte positiva do tensor de tensões principais.
- σ^- Parte negativa do tensor de tensões principais.
- ε^t Deformações obtidas com a parte positiva do tensor de tensões σ^+ .
- ε^c Deformações obtidas com a parte negativa do tensor de tensões σ^- .
- ϕ_{ij} Componentes do tensor de integridade.
- ϕ Tensor de integridade.
- ε^α Tensor de deformações em um microplano α .
- $\mathbf{T}_\varepsilon^\alpha$ Tensor de projeção das deformações macroscópicas em um microplano α .
- E_N Módulo de elasticidade na direção normal de um microplano.
- E_T Módulo de elasticidade na direção transversal de um microplano.
- D_N^α Dano na direção normal ao microplano α .
- D_T^α Dano na direção transversal ao microplano α .

κ_N^α	Variável histórica na direção normal ao microplano α .
κ_T^α	Variável histórica na direção transversal ao microplano α .
ε_{nm}^α	Deformações normais ao microplano α .
γ_{nt}^α	Deformações transversal ao microplano α .
f_N^α	Função de carregamento na direção normal de um microplano α .
f_T^α	Função de carregamento na direção transversal de um microplano α .

Capítulo 5: Proposta de um Modelo de Dano com Múltiplas Funções de Carregamento

D^d	Dano desviador.
D^v	Dano volumétrico.
μ^0	Módulo de elasticidade transversal.
K^0	Módulo volumétrico.
$tr^+ \varepsilon$	Parcela volumétrica positiva do tensor de deformações.
$tr^- \varepsilon$	Parcela volumétrica negativa do tensor de deformações.
J_ε	Segundo invariante do tensor de deformações.
$\bar{\varepsilon}_t^v$	Deformação equivalente volumétrica de tração.
$\bar{\varepsilon}_c^v$	Deformação equivalente volumétrica de compressão.
$\tilde{\varepsilon}^d$	Deformação equivalente desviadora.
\mathbf{E}^s	Tensor de rigidez secante.
E_{ijkl}^s	Componentes do tensor de rigidez secante.
μ	Módulo de elasticidade transversal degradado.
K_+	Módulo volumétrico degradado devido ao dano por tração.
K_-	Módulo volumétrico degradado devido ao dano por compressão.
F_t^v	Função de carregamento para controlar o comportamento volumétrico de tração.
F_c^v	Função de carregamento para controlar o comportamento volumétrico de compressão.

- F^d Função de carregamento para controlar o comportamento desviador.
- $\kappa_+^v(D_t^v)$ Variável histórica para a tração em função do dano por tração.
- $\kappa_-^v(D_c^v)$ Variável histórica para a compressão em função do dano por compressão.
- $\kappa^d(D^d)$ Variável histórica para as componentes desviadoras em função do dano desviador.

Capítulo 6: Implementação Computacional

- X Variáveis de estado do problema.
- \dot{X} Primeira variação temporal da variável de estado.
- \ddot{X} Segunda variação temporal da variável de estado.
- A Matriz dos coeficientes associados à segunda variação temporal da variável de estado.
- B Matriz dos coeficientes associados à primeira variação temporal da variável de estado.
- C Matriz dos coeficientes associados à variável de estado.
- D Vetor de variáveis de estado duais.
- K_t Matriz de rigidez tangente.
- δU Vetor de incrementos de deslocamentos.
- λ Fator de carga.
- P Vetor de cargas de referência.
- Q Vetor de cargas de residuais.
- k_t^e Matriz de rigidez de um elemento finito.
- B Matriz das relações entre deformações e deslocamentos.
- E_t Matriz constitutiva tangente.
- V_e Volume de um elemento finito.
- F_i^e Vetor das forças nodais equivalentes a um estado de tensão interno de um elemento finito.
- σ Vetor de tensões.

Apêndice E: Relações Tensão-Deformação e Equações de Evolução do Dano

σ	Tensão relativa à deformação corrente.
f_t	Tensão limite de resistência à tração.
ε	Deformação corrente.
ε_t	Deformação relativa ao limite elástico na tração.
h	comprimento característico.
G_f	Energia de fratura por comprimento de trinca.
g_f	Energia de fratura específica.
σ_i	Tensão de tração ou compressão relativa à deformação corrente para a lei de Carreira e Chu (1985, 1986).
f_i	Tensão relativa ao limite de resistência à tração ou compressão.
ε_i	Deformação relativa ao limite elástico na tração ou compressão.
E_0	Módulo de elasticidade elástico.
$\varepsilon_{t,u}$	Deformação última admissível na tração.
$\varepsilon_{c,u}$	Deformação última admissível na compressão.
E_2	Módulo tangente do ramo descendente da lei bilinear.
$f_{t,u}$	Tensão última admissível de tração.
$f_{t,cr}$	Tensão crítica de tração.
$\varepsilon_{t,cr}$	Deformação relativa à tensão crítica de tração.
$\tilde{\varepsilon}$	Medida de deformação equivalente.
κ_0	Valor da deformação equivalente a partir do qual o processo de dano se inicia.
α	Valor máximo de dano admissível para o material.
β	Intensidade de evolução do dano
f_e	Limite de resistência equivalente.
\tilde{E}	Módulo de elasticidade equivalente.
f_u	Tensão última admissível.
ε_u	Deformação última admissível.

Operadores

(\cdot) Produto interno.

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}$ Produto interno com contração simples.

$\mathbf{T} : \mathbf{S}$ Produto interno com contração dupla.

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ Produto vetorial.

$\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}$ Produto tensorial.

$\mathbf{T} \boxtimes \mathbf{S}$ Produto tensorial com simetrização do tipo produto (sendo $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{w} \boxtimes \mathbf{w}$, tem-se: $\alpha_{ijkl} = \frac{1}{2}(w_{ik}w_{jl} + w_{il}w_{jk})$).

$\mathcal{T} * \mathcal{S}$ Produto apropriado ente duas entidades genéricas, \mathcal{T} e \mathcal{S} em um dado contexto.

$\dot{(\cdot)}$ Derivação de (\cdot) no tempo.

$(\cdot)^T$ Transposta de (\cdot) .

$d(\cdot)$ Incremento de (\cdot) .

$\partial(\cdot)$ Diferencial de (\cdot) .

$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$ Derivada de (\cdot) em relação a x , sendo x uma variável qualquer.

$|(\cdot)|$ Módulo (valor absoluto) de um escalar (\cdot) .

$\|(\cdot)\|$ Norma Euclideana de tensores e vetores ($\|\mathbf{T}\| \equiv \sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{T}}$ e $\|\mathbf{v}\| \equiv \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$).

$\mathcal{H}(\cdot)$ Função de Heavyside ($\mathcal{H}(x) = 1$ para $x > 0$ e $\mathcal{H}(x) = 0$ para $x < 0$).

$\langle \cdot \rangle_+$ Parte positiva de (\cdot) .

$\langle \cdot \rangle_-$ Parte negativa de (\cdot) .

$tr(\cdot)$ Traço de um tensor.

Resumo

Esta tese apresenta um arcabouço teórico e computacional para modelos constitutivos baseados em degradação elástica.

Modelos clássicos para tratar a degradação do meio material são abordados no contexto da estrutura teórica e computacional proposta. Além disso, modelos de fissuração distribuída são reformulados, considerando-se múltiplas funções de carregamento desacopladas e uma regra de degradação generalizada. Para ilustrar a potencialidade do arcabouço teórico e computacional criado, alguns modelos de dano encontrados na literatura são implementados bem como um modelo de plasticidade clássica. Também é proposto um novo modelo de dano com múltiplas funções de carregamento.

O sistema computacional criado toma partido do paradigma de programação orientada a objetos, possibilitando implementar a unificação teórica proposta, independentemente do método numérico aplicado. Contudo, apenas o Método dos Elementos Finitos (MEF) é usado na validação desta estrutura teórica e dos modelos constitutivos nela inseridos.

Vários exemplos de aplicação são apresentados, visando ilustrar as possibilidades de modelagem proporcionada pela biblioteca de modelos constitutivos reunida neste trabalho. O novo modelo de dano proposto é validado por meio de exemplos que comparam os resultados do mesmo com resultados experimentais ou obtidos com outros modelos, disponíveis na literatura.

Abstract

This thesis presents a theoretical and computational framework for constitutive models based on elastic degradation.

Classical models to deal with material's media degradation are addressed in the context of the theoretical and computational proposal. In addition, smeared cracking model's are reformulated, considering multiple uncoupled loading functions and a generalized degradation rule. To illustrate the potentiality of the created theoretical and computational framework, some damage models, founded in the literature, are implemented as well as a classical plasticity model. Also is proposed a new damage model with multiple loading functions.

The created computational system takes advantage of the object-oriented programming paradigm, enabling to implement the proposal unified theoretical framework, independently of the applied numerical method. However, only the Finite Element Method (FEM) is used in the validation of this unified theory and the constitutive models inserted on it.

Several application examples are presented, in order to illustrate the modeling possibilities provided by the constitutive models library gathered in this work. The new proposed damage model is validated by examples that compare their results with experimental results or obtained with other models, available in the literature.

Capítulo 1

Introdução

O comportamento das estruturas de concreto simples e armado vem sendo assunto de intenso estudo desde o início do século passado. A complexidade intrínseca deste material dificulta o desenvolvimento de modelos analíticos que, quando concebidos, são limitados a casos simples e específicos.

Modelos mais elaborados e gerais surgiram com o advento do Método dos Elementos Finitos (MEF). Fenômenos como fissuração do concreto, escoamento da armadura, rigidez residual pós crítica, fluência, retração, perda de aderência aço-concreto, entre outros, puderam ser intensamente explorados por meio de modelos baseados nesse método numérico.

Os avanços tecnológicos e computacionais ampliaram as possibilidades da modelagem numérica como um todo. O MEF se consolidou e outros métodos foram desenvolvidos, como o Método dos Elementos de Contorno (MEC), o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e os Métodos Sem Malha (MSM).

Nesse cenário, os métodos numéricos se tornaram fundamentais para estudar problemas de engenharia e, particularmente, o complexo comportamento do concreto e do concreto armado. Assim, para a representação do comportamento fisicamente não linear destes materiais, em qualquer método numérico, modelos constitutivos

adequados são obrigatoriamente empregados. Inúmeros estudos vêm sendo desenvolvidos, sob diversas perspectivas, por meio da formulação de novos modelos constitutivos ou do aprimoramento de modelos existentes.

Analisando as principais vertentes sobre a modelagem do concreto, verifica-se uma tendência: a unificação dos modelos de degradação elástica em uma única estrutura teórica capaz de tratar de forma genérica a constituição do meio. Entretanto, as diversas tentativas de unificação disponíveis na literatura ainda possuem limitações, que precisam ser vencidas para garantia de inclusão de modelos multipotenciais e de independência do método numérico empregado.

Verifica-se também a falta de um sistema computacional que disponibilize vários modelos já concebidos e permita a fácil inclusão de novos modelos.

Modelos constitutivos tradicionais estão implementados em sistemas computacionais avançados, promovendo a simulação, modelagem e o estudo do comportamento das estruturas de concreto. Tais sistemas computacionais são capazes de modelar estruturas em concreto submetidas a diversas ações, com precisão nos resultados, além de possuírem recursos sofisticados para pré e pós-processamento. Entretanto, estes programas disponibilizam apenas alguns poucos modelos consagrados. Além disso as principais contribuições científicas não podem ser neles inseridas, pois são programas proprietários, de código fechado que, portanto, não permitem a expansão e aprimoramento dos modelos neles implementados, nem a inserção de novos modelos.

1.1 Objetivos

Esta tese tem como objetivo apresentar uma estrutura teórica e computacional capaz de contemplar diversos modelos constitutivos, ampliando as possibilidades da análise fisicamente não linear de estruturas de concreto.

Procurou-se obter uma base teórica e computacional para a modelagem constitutiva em geral, com independência do método numérico e aplicável a diferentes

tipos de análise.

Criou-se um sistema computacional de código aberto e de fácil expansão, proporcionando um ambiente propício ao desenvolvimento colaborativo de modelos para a análise fisicamente não linear.

Vários modelos constitutivos tradicionais foram inseridos no arcabouço teórico e computacional criado, corroborando a capacidade de generalização do mesmo.

Formulou-se um novo modelo constitutivo de dano para o concreto e o mesmo foi inserido no sistema computacional criado.

1.2 Organização do Texto

Esta tese é organizada em 10 capítulos e 7 apêndices.

No capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica cronologicamente organizada, descrevendo os principais modelos constitutivos para concreto.

Após analisar as diversas tentativas de unificação, disponíveis na literatura, o capítulo 3 apresenta a proposta de unificação teórica desta tese, que incluem modelos constitutivos multipotenciais e a independência de método numérico.

Uma vez estabelecidas as bases da unificação teórica, no capítulo 4, são apresentadas as formulações de diversos modelos constitutivos tradicionais, no contexto do arcabouço teórico proposto.

No capítulo 5, é proposto um novo modelo de dano, baseado em múltiplas funções de carregamento e nas parcelas volumétrica e desviadoras do tensor de deformações. É apresentada a formulação e sua representação na estrutura teórica apresentada.

O capítulo 6 apresenta o sistema computacional criado, resultante da implementação computacional, segundo um projeto orientado a objetos adequado, da estrutura teórica formulada e de vários modelos constitutivos.

A estrutura teórica e computacional é validada nos capítulos 7, 8 e 9. No capítulo 7, simulações numéricas exemplificam os diversos modelos constitutivos implementados, e as diversas possibilidades, proporcionadas pelo ambiente computacional, para

a análise fisicamente não linear.

No capítulo 8, são apresentados alguns estudos de caso, que destacam a formulação multipotencial de um modelo de fissuração.

No capítulo 9, são apresentados exemplos de validação do novo modelo de dano proposto, onde os resultados obtidos com o modelo são confrontados com resultados experimentais e numéricos obtidos por outros autores.

Por fim, no capítulo 10, conclui-se o texto da tese, analisando-se as principais contribuições do trabalho e apresentando-se sugestões para continuação da pesquisa.

Adicionalmente, são apresentados sete apêndices que tratam de temas secundários, mas extremamente relevantes para o entendimento do texto.

Capítulo 2

Modelos Constitutivos Para o Concreto

2.1 Breve Histórico

A ocorrência, isolada ou combinada, de diferentes fenômenos tornam o comportamento mecânico do concreto de difícil descrição analítica. Tal comportamento é fonte de estudos e pesquisa desde o início do século XX, quando surgiram os primeiros fundamentos teóricos.

Inicialmente, o estudo do concreto armado era baseado em aproximações empíricas e as teorias eram estabelecidas com base em simplificações, que contornavam dificuldades de formulação de uma estrutura teórica mais elaborada.

Nesse contexto, o método dos elementos finitos surgiu como um recurso geral que ampliou as possibilidades de estudo. Hipóteses, antes simplificadas para serem incorporadas na teoria analítica, passaram a ser inseridas em modelos cada vez mais sofisticados com o objetivo de descrever o comportamento do concreto de forma mais realista possível.

Vários aspectos do método dos elementos finitos, quando este é empregado para caracterizar o comportamento não linear do concreto, são estudados desde os primeiros modelos. Um dos primeiros trabalhos nesta área foi o de Ngo e Scordelis (1967) que, considerando os materiais como elásticos-lineares, incluía representações para

as armaduras e fissuras, sendo as trincas inseridas na malha de elementos finitos de forma discreta, assumindo padrões já constatados empiricamente.

O trabalho de Nilson (1968) era semelhante, sendo as trincas inseridas na malha de forma discreta, entretanto, já se considerava o comportamento não linear do material. Até então, nestes modelos iniciais, a idealização de um meio contínuo fissurado, em substituição ao meio contínuo intacto inicial, não havia sido concebida.

A representação do processo de fissuração em modelos planos foi inicialmente tratada por Rashid (1968), que introduzia trincas paralelas distribuídas em regiões internas aos elementos finitos, em contraposição à inserção das fissuras nas interfaces entre elementos. O material atingia um limite de resistência e, neste ponto, a rigidez da região decaía devido ao início da degradação. Embora limitado, o modelo proposto apresentava facilidade de implementação e já trazia a hipótese fundamental dos modelos de fissuração distribuída: a substituição do meio contínuo inicial por um meio, também contínuo, cujas propriedades mecânicas representem uma região com fissuras uniformemente distribuídas.

Modelos subsequentes (Suidan e Schnobrich, 1973) mantiveram a rigidez residual transversal como função do módulo de elasticidade transversal inicial, através de um fator de redução denominado fator de retenção ao cisalhamento.

Modelos unidimensionais para tratar o concreto, através de relações momento-curvatura, também já eram usados. No trabalho de Monnier (1970), por meio de estudos teóricos e experimentais em vigas de concreto, leis não lineares para a relação momento-curvatura foram desenvolvidas. Uma abordagem computacional sobre o assunto foi feita por Blaauwendraad (1972), que revisou os conceitos adotados até aquele momento e apresentou um modelo unidimensional que considerava efeitos de segunda ordem combinados com relações momento-curvatura.

O uso de parâmetros da mecânica da fratura para modelagem de estruturas de concreto foi iniciado por Hillerborg et al. (1976). Neste trabalho, o concreto é descrito com um comportamento crescente de tensão até um limite máximo. A

partir deste limite, o material entra em regime de amolecimento — diminuição de tensão acompanhada de aumento de deformação — que é regido por uma lei não linear baseada na energia de fratura.

No mesmo ano, Bažant (1976) estudou o amolecimento do concreto e o surgimento de uma banda de fissuração, descrita através da variação da flexibilidade. O monitoramento da flexibilidade também foi estudado por Swartz et al. (1978), sendo feita uma análise de sua variação em vigas de concreto submetidas à flexão. A partir de então, os modelos de fissuração distribuída baseados em flexibilidade foram desenvolvidos.

Darwin e Pecknold (1976) apresentaram a modelagem de painéis de concreto armado submetido a cargas cíclicas, usando leis tensão-deformação biaxiais que admittam degradação tanto em tração como em compressão. Este trabalho foi de grande relevância, pois, até o momento, apenas a degradação do concreto por tração era considerada.

Inspirados em Bažant (1976), muitos trabalhos (Bažant e Cedolin, 1979, 1980, 1983) foram publicados abordando o mesmo tema: o surgimento de uma região fissurada designada como banda de fissuração ou zona de processamento de fissuras. Mas, somente no trabalho de Bažant e Oh (1983), a teoria foi elaborada admitindo um amolecimento gradual. O modelo considerava a relação constitutiva com amolecimento (como proposto por Hillerborg et al. (1976)) associada a um certo comprimento de banda de fissuração, que era tratado como uma propriedade do material.

A partir destes primeiros modelos, os conceitos de fissuração distribuída se sedimentaram e diversos trabalhos surgiram (de Borst e Nauta (1985), Rots et al. (1985) e Rots e de Borst (1987)), aprimorando as teorias existentes, resultando nos modelos de fissuração fixa e rotacional como conhecidos hoje.

A demanda dos modelos de fissuração distribuída por leis tensão-deformação representativas das regiões degradadas motivou muitos trabalhos, como os de Carreira

e Chu (1985), Carreira e Chu (1986), Boone et al. (1986) e Boone e Ingraffea (1987), que definem leis tensão-deformação representativas do concreto.

Rots (1988) apresentou um amplo estudo sobre os modelos de fissuração distribuída, empregando estes modelos para descrever o processo de fraturamento do concreto. No mesmo ano, um outro amplo estudo sobre o comportamento não linear do concreto foi apresentado por Proença (1988). Neste trabalho após descrever modelos elastoplásticos e modelos baseados na mecânica da fratura Proença apresenta uma formulação variacional para a modelagem constitutiva.

Em paralelo aos modelos de fissuração, a mecânica do dano contínuo (Lemaitre e Dufailly, 1987; Lemaitre, 1992; Lemaitre e Desmorat, 2005) passa a ser usada na modelagem de materiais parcialmente frágeis. O trabalho de Lemaitre e Dufailly (1987) apresenta várias medidas de dano e conclui que a forma mais eficiente de se medir o dano de um material é por meio da quantificação da densidade de defeitos. Entretanto, tal processo é difícil e incerto para os casos em que não se tem uma uniformidade dos defeitos. Além disso, questões relativas ao tamanho e posição da região de observação do dano ainda são muito subjetivas.

Neste cenário, surgem os modelos de dano baseados em deformação equivalente. Mazars (1984) apresentou um modelo bastante simples, mas eficiente. O denominado modelo de dano escalar admite que o dano é medido por uma variável escalar, definida como deformação equivalente e calculada com base nas deformações principais positivas.

Na mesma linha de Mazars (1984), anos mais tarde, outro modelo de dano escalar baseado em deformação equivalente foi proposto por Brekelmans et al. (1992). O modelo previa que o material poderia apresentar comportamentos distintos em tração e em compressão, o que é essencial para a modelagem do concreto. A proposta associava a tração e a compressão em uma constante usada no cálculo da deformação equivalente.

Os modelos de dano escalar foram a base de muitos trabalhos, podendo ser

citados: Chow e Wang (1987), Bažant e Pijaudier-Cabot (1987), Bažant e Pijaudier-Cabot (1988), de Vree et al. (1995), Ghrib e Tinawi (1995), Petrangeli e Ožbolt (1996), Lee et al. (1997), Jirásek e Zimmermann (1998), Pituba (1998), Cauvin e Testa (1999), de Borst e Gutiérrez (1999), de Borst (2002), Pituba (2003), Junior e Venturini (2007), Alves et al. (2000), Scotta et al. (2002), Jirásek e Patzák (2002), Xiang et al. (2002) e Lee et al. (2004), além de inúmeros trabalhos e aplicações encontrados na literatura.

Para uma melhor descrição da anisotropia existente no concreto, uma nova proposta, baseada na teoria de microplanos (Taylor, 1938), foi apresentada por Bažant e Gambarova (1984) e Bažant e Oh (1985). Nesta proposta, o ponto material é tratado como um conjunto de microplanos, orientados em diversas direções e posicionados na superfície de uma esfera de raio unitário centrada no referido ponto. As deformações nestes microplanos correspondem à aplicação de uma restrição cinemática e/ou estática ao tensor macroscópico de deformações. Através de relações tensão-deformação, válidas para os microplanos, calculam-se as tensões em cada microplano. Por fim, impondo-se condições de equivalência de energia, obtém-se o estado macroscópico de tensões e uma avaliação da degradação da rigidez.

Uma primeira evolução deste modelo foi proposta por Carol et al. (1992), que apresentavam a teoria pela primeira vez usando somente restrição cinemática, abandonando assim os modelos de restrição mista. Embora o modelo marcasse uma evolução, apresentava inconsistências que foram corrigidas e apresentadas por Ožbolt et al. (2001). Os modelos de microplanos até então formulados usavam o princípio dos trabalhos virtuais para a equivalência de energia. Mas foi constatado que as leis termodinâmicas não eram plenamente atendidas. Desta forma, Carol et al. (2001a) e Kuhl et al. (2001) apresentaram uma nova estrutura teórica consistente com os princípios termodinâmicos.

Mais recentemente, Leukart e Ramm (2002, 2006) adotaram uma nova decomposição das deformações macroscópicas, propondo assim uma nova formulação da

teoria de microplanos baseada nos princípios da termodinâmica.

O desenvolvimento de modelos seguindo a teoria da plasticidade compreendem uma grande parte da modelagem constitutiva de materiais em geral. A teoria da plasticidade, amplamente difundida e empregada, constitui um formato teórico consagrado. Para aplicação deste formato, critérios de resistência são adotados de acordo com as características do material que se deseja representar. Assim, além de todos os modelos desenvolvidos especificamente para o concreto, que tentam representar os fenômenos característicos deste material, foram desenvolvidos ainda modelos baseados na teoria clássica da plasticidade. Os fundamentos da teoria da plasticidade para o concreto podem ser visto em obras clássicas como a de Chen (1982).

Ao longo dos anos, os modelos para o concreto foram se modificando e evoluindo, mas isso não significou que as primeiras formulações caíram em desuso. Nos últimos anos, diversos estudos foram desenvolvidos a partir destes modelos, podendo ser citados: Petrangeli e Ožbolt (1996), Shayanfar et al. (1997), Mosalam e Paulino (1997), Weihe et al. (1998), Pitangueira (1998), Li e Zimmermann (1998), de Borst (2002), Silva (2002), Simão (2003), Comi e Perego (2004), Borges e Bittencourt (2005), Belnoue et al. (2007), Paliga et al. (2007), Junior e Venturini (2007), Barain e Mari (2007), Pi et al. (2007), Mata et al. (2007), Desmorat et al. (2007a), Srikanth et al. (2007), Faleiro et al. (2008), Dundar et al. (2008), Proença e Pituba (2008), Manzoli et al. (2008), He et al. (2008), Voyiadjis et al. (2008), Pavan et al. (2009), Menin et al. (2009), dentre outros.

2.2 Modelos Unidimensionais

A simplicidade dos modelos unidimensionais e os bons resultados obtidos numericamente motivaram o desenvolvimento desses modelos para análise física e geometricamente não linear.

Diversas possibilidades para tratar o comportamento constitutivo não linear de

estruturas de concreto com modelos unidimensionais tem sido estudadas e desenvolvidas, segundo duas vertentes principais: os modelos que usam relações momento-curvatura, considerando seções transversais homogêneas, e os modelos que usam leis tensão-deformação, decompondo as seções transversais.

Nos modelos da primeira vertente, a análise não linear pode ser conduzida por meio de relações momento-curvatura, válidas para as seções transversais, assim consideradas homogêneas. A necessidade de prescrição de relações momento-curvatura representativas das diversas seções transversais do modelo é uma desvantagem considerável deste enfoque.

A análise não linear de estruturas de concreto armado, usando-se elementos unidimensionais, também pode ser feita pela decomposição do domínio da seção transversal. Esta técnica apresenta diversas variações, entretanto, partem do mesmo princípio: decompor a seção transversal da barra em subdomínios e computar a contribuição de cada subdomínio na rigidez do elemento finito (Figuras 2.1(a) e 2.1(b)). Esta estratégia permite uma generalização na formulação, de forma que seções transversais de geometrias diversas possam ser representadas, sem a necessidade de uma formulação específica para cada tipo, o que não acontece ao se utilizar as relações momento-curvatura. Além da generalidade geométrica, a decomposição da seção permite atribuir materiais diferentes para cada subdomínio e avaliar separadamente o comportamento de cada material, podendo-se, assim, calcular a deterioração da seção transversal (Figura 2.1(c)).

Dentre os trabalhos que tratam da análise da seção transversal por decomposição pode-se citar os de Chaisomphob e Hansapinyo (1999), Izzuddin e Smith (2000), Izzuddin et al. (2002), Romero et al. (2002), Bratina et al. (2004), Fonseca (2006), Pi et al. (2007) e Dundar et al. (2008), que investigam as características dos materiais (aço e concreto) através de leis tensão-deformação. Pode-se também investigar a deterioração do material utilizando-se de funções de dano, como adotado nos trabalhos de Barbat et al. (1997) e Mata et al. (2007).

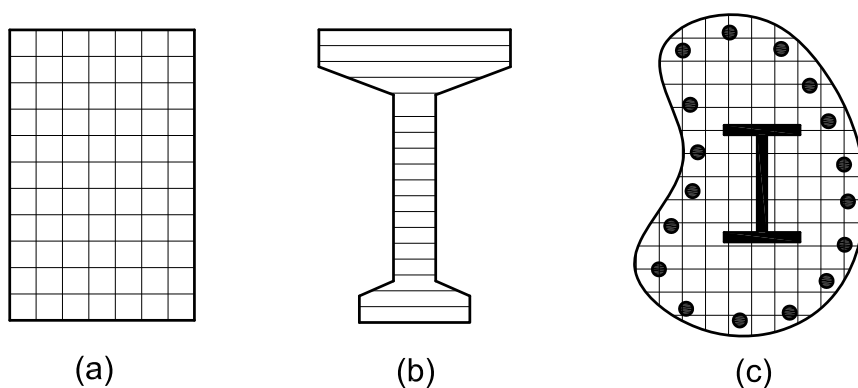


Figura 2.1: Seção transversal de concreto armado antes da fissuração

Várias formas de decomposição da seção transversal são encontradas na literatura. Cada técnica apresenta um conjunto de hipóteses segundo as quais o modelo é formulado.

A decomposição da seção transversal por pequenas áreas (Figura 2.1), como proposto por Chaisomphob e Hansapinyo (1999), Izzuddin e Smith (2000), Izzuddin et al. (2002), Romero et al. (2002) e Pi et al. (2007), trata cada subdivisão como pontos de monitoramento da seção. Nestes pontos, podem ser controladas as deformações, tensões, deterioração do material e as propriedades geométricas atribuídas a cada pequeno subdomínio. A contribuição de cada área no comportamento da seção depende das premissas de cada formulação.

Bratina et al. (2004) utilizam uma subdivisão em camadas trapezoidais (Figura 2.2) para representar o concreto e as barras de aço são tratadas como pequenas áreas distribuídas pela seção.

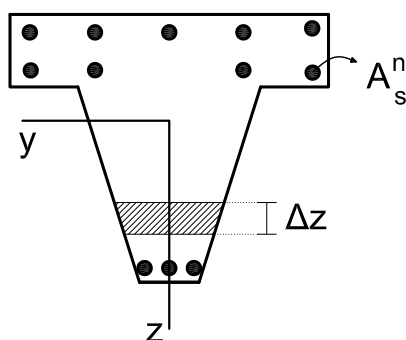


Figura 2.2: Divisão em faixas e armadura pontual.

Já Dundar et al. (2008) subdividem a seção em faixas paralelas à linha neutra e considera o concreto como resistente somente à compressão enquanto o aço assume propriedades resistentes na tração e compressão. O processo de divisão da seção em segmentos é feito de forma iterativa para se otimizar o número de divisões.

Uma forma mais sofisticada, embora mais custosa, de tratamento da seção decomposta é proposta por Barbat et al. (1997) e Mata et al. (2007). Neste caso, a seção é dividida em faixas ou em áreas, sendo que cada subdivisão é integrada segundo uma quadratura de Gauss, podendo-se variar o número de pontos de integração em cada subdomínio de modo que cada um destes pontos assuma propriedades de um material diferente (Figura 2.3). Com este procedimento é possível representar a heterogeneidade de cada subdomínio de monitoramento.

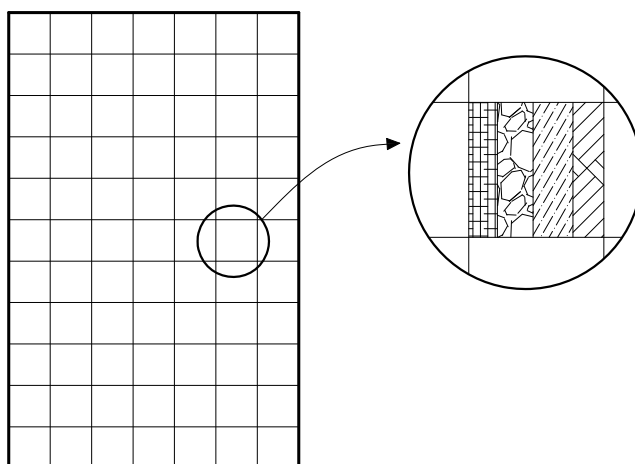


Figura 2.3: Subdivisão composta por diversos materiais.

Como em muitos trabalhos, usando a abordagem de decomposição da seção transversal, Fonseca (2006) apresentou um modelo para elementos finitos unidimensionais de pórtico espacial, segundo as teorias de Euler-Benoulli e Timoshenko.

O modelo considera que a aderência é perfeita entre o aço e o concreto e que cada material possui uma lei tensão-deformação não linear, independentemente atribuída a cada subdivisão da seção. Partindo das relações tensão-deformação normais e

tangenciais, pode-se escrever as equações

$$\sigma_{xx} = E^s(\varepsilon_{xx})\varepsilon_{xx} , \quad \tau_{xy} = G^s(\gamma_{xy})\gamma_{xy} \quad \text{e} \quad \tau_{xz} = G^s(\gamma_{xz})\gamma_{xz} , \quad (2.1a,b,c)$$

para relações secantes totais, e

$$d\sigma_{xx} = E^t(\varepsilon_{xx})d\varepsilon_{xx}, \quad d\tau_{xy} = G^t(\gamma_{xy})d\gamma_{xy} \quad \text{e} \quad d\tau_{xz} = G^t(\gamma_{xz})d\gamma_{xz}, \quad (2.2a,b,c)$$

para as relações incrementais, sendo E^s e E^t os módulos de elasticidade longitudinais secante e tangente, respectivamente, e G^s e G^t os módulos de elasticidade transversais secante e tangente, respectivamente. É importante lembrar que tanto os módulos secantes quanto os tangentes são funções das deformações, como mostrado nas equações 2.1 e 2.2, e obtidos por leis constitutivas dos materiais, como mostrado na figura 2.4.

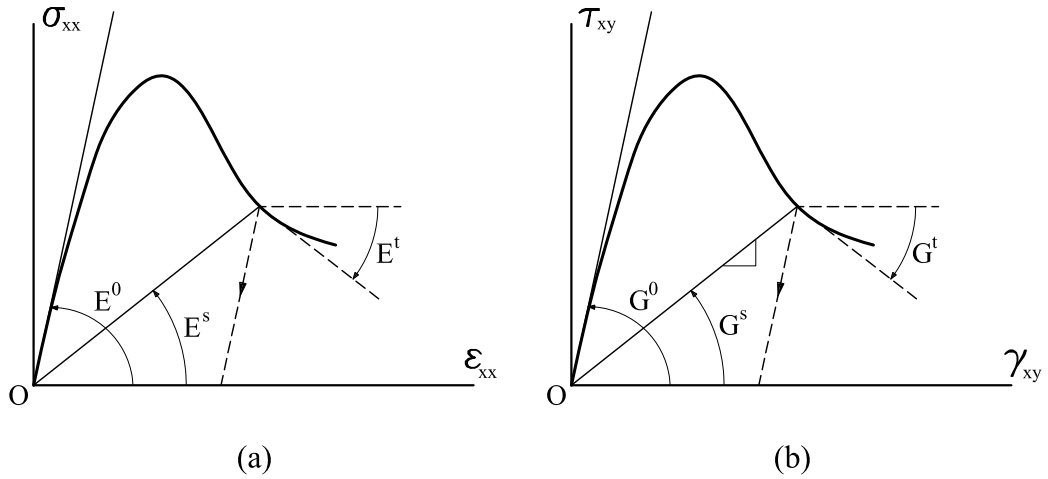


Figura 2.4: Leis constitutivas.

No processo incremental-iterativo de uma análise não linear, a convergência é atingida quando há equilíbrio entre as forças externas e as forças internas. Para tanto, os esforços internos devem ser calculados. Conhecendo-se a distribuição das deformações em cada seção transversal, as propriedades secantes e tangentes dos materiais podem ser obtidas (Figura 2.4). De posse das propriedades dos materiais, os esforços internos podem ser calculados pela integração das tensões ao longo da seção transversal, logo

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA ; \quad (2.3a)$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA ; \quad (2.3b)$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} dA ; \quad (2.3c)$$

$$T = \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dA ; \quad (2.3d)$$

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} \cdot z dA ; \quad (2.3e)$$

$$M_z = \int_A -\sigma_{xx} \cdot y dA , \quad (2.3f)$$

onde N é a força axial, V_y e V_z são os esforços cortantes, T é o momento de torção e M_y e M_z são os momentos fletores.

Para a seção decomposta em pequenas partes, o cálculo dos esforços internos podem ser simplificados por um somatório. A figura 2.5 mostra a decomposição da seção transversal em pequenos quadrados de áreas conhecidas, podendo cada um deles ser composto por um tipo de material diferente.

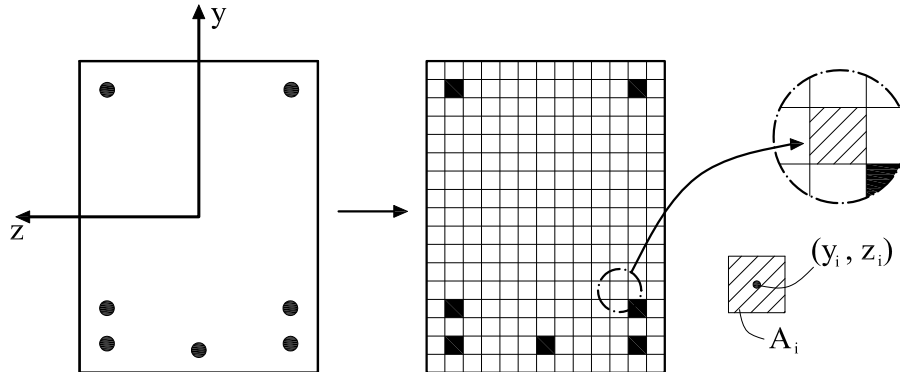


Figura 2.5: Decomposição da seção transversal.

O comportamento dos materiais que compõem a seção é importante na discretização, pois irá influenciar diretamente na contabilização dos esforços internos.

Diversas leis tensão-deformação são adotadas para a caracterização do comportamento não linear de cada material. Uma forma geral de tratamento é considerar tanto o concreto quanto o aço resistentes à tração e à compressão. Assim, efeitos como a fissuração e esmagamento do concreto e o escoamento do aço são detectados

durante a análise (Pi et al., 2007). Entretanto, nem todos os modelos consideram o aço e o concreto na tração e compressão.

Izzuddin e Smith (2000) e Izzuddin et al. (2002) usam uma lei parabólica conjugada a uma lei elastoplástica para o concreto à compressão, omitindo a resistência à tração. Para o aço, é adotada uma lei linear-elástica.

A tração do concreto também é desprezada por Dundar et al. (2008), que usam várias relações para descrever o comportamento deste à compressão. O aço é tratado na tração e compressão por uma lei não linear composta por segmentos de reta.

No trabalho de Fonseca (2006), foram usadas leis tensão-deformação propostas por Carreira e Chu (1985, 1986) e Boone e Ingraffea (1987).

Além da descrição dos materiais através de leis tensão-deformação, alguns autores tratam o comportamento do material usando a teoria de dano (Faleiro et al. (2008), Mata et al. (2007), Barbat et al. (1997), Junior e Venturini (2007), dentre outros).

2.3 Modelos de Fissuração Distribuída

Modelos para representar o processo de fraturamento do concreto é tema de estudo desde o advento do método dos elementos finitos. Em todos estes estudos, discutem-se os critérios de resistência e o comportamento do concreto após o surgimento de trincas. Dentre as várias propostas, duas vertentes se destacam: a modelagem discreta da trinca e os modelos de fissuração distribuída.

Nestes dois contextos, a modelagem da iniciação e da propagação de trincas e fissuras necessitam de uma descrição do meio material. Para tanto, o uso de parâmetros do material baseados na mecânica da fratura é bem difundido, tanto na modelagem discreta quanto na distribuída.

Os modelos de fissuras distribuídas baseiam-se no monitoramento da deterioração das propriedades físicas do material, sendo o processo de evolução das fissuras descrito pelo decaimento gradual de tensões com aumento de deformações, como ilustrado na figura 2.6.

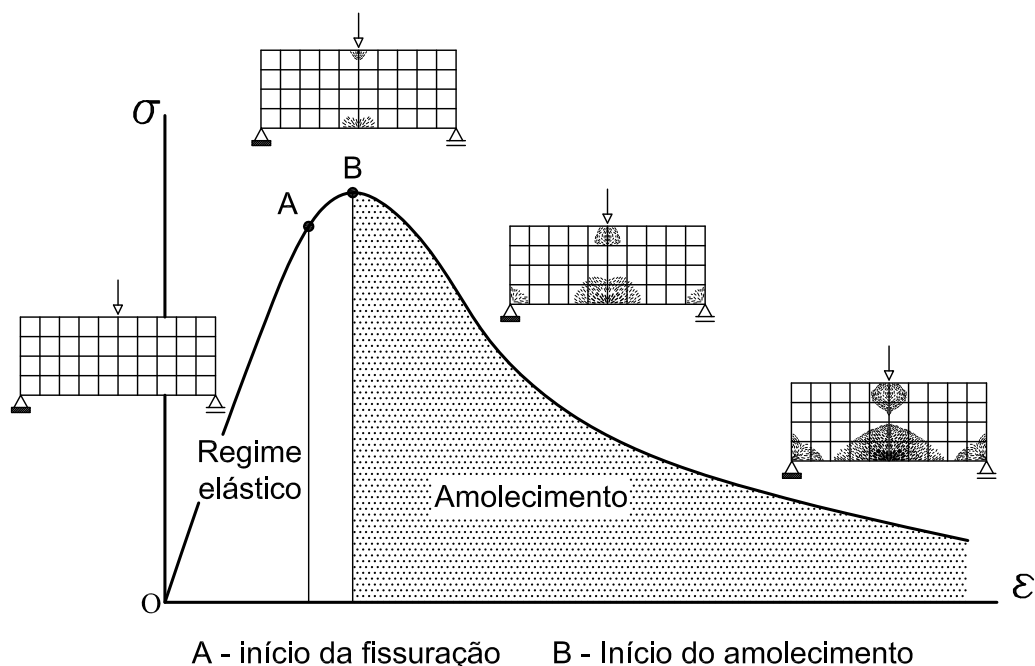


Figura 2.6: Propagação de fissuras em modelos distribuídos

Já os modelos discretos assumem que a resistência última do material (avaliada pelas tensões na ponta da trinca, ou pelo fator intensidade de tensão, ou pela energia de fratura, dentre outras grandezas) determina a propagação da trinca. Desta forma, em um modelo de elementos finitos é necessário redefinir a malha para representar a descontinuidade geométrica nela introduzida pela trinca e, assim, descrever o comportamento pós-crítico, como mostrado na figura 2.7. Modelos com descontinuidade forte embutida (Oliver, 1996a,b) superaram as dificuldades impostas pelo processo de redefinição de malha dos modelos discretos além de incorporarem a modelagem constitutiva em sua formulação.

Os modelos de fissuração distribuída têm como vantagens: geração automática de trincas sem redefinição de malha, propagação de fissuras no interior dos elementos e representação da degradação da rigidez através de um relação constitutiva.

A seguir, serão discutidas as principais características dos modelos de fissuração distribuída e apresentada a formulação geral dos mesmos.

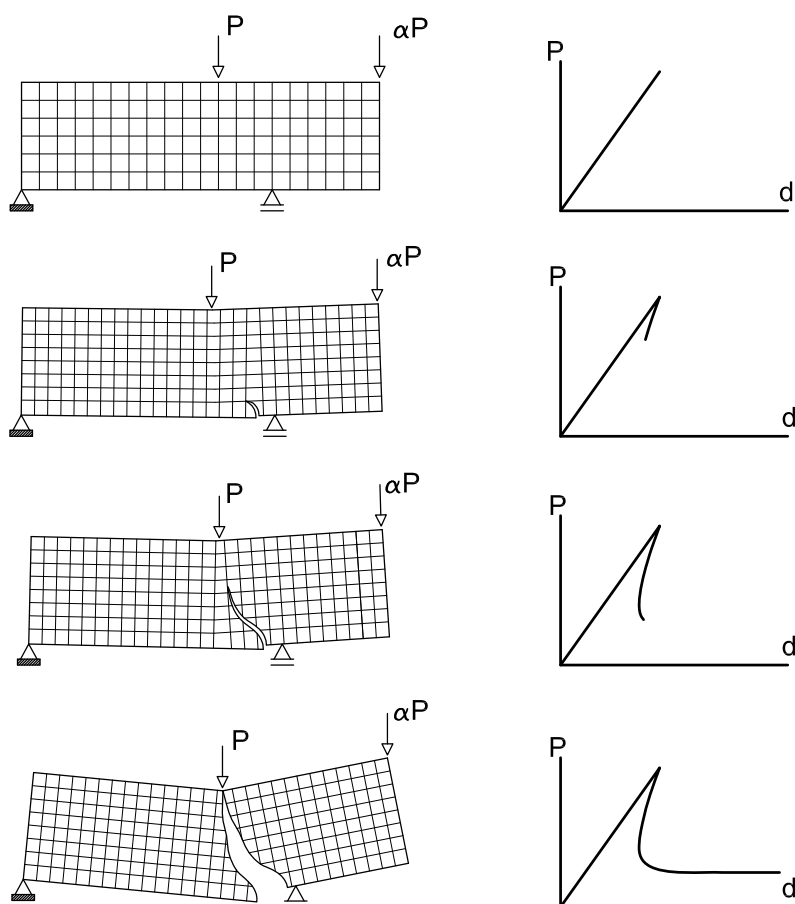


Figura 2.7: Propagação da trinca em modelos discretos.

2.3.1 Bases dos Modelos de Fissuração Distribuída

Os modelos de fissuração distribuída baseiam-se na idealização de um meio contínuo durante todo o processo de análise. Partindo deste meio contínuo, relações entre tensões e deformações são adotadas para acompanhar o processo de fissuração, sendo os limites de resistência do concreto e parâmetros da mecânica da fratura as bases da formulação.

Os modelos tradicionais de fissuração para o concreto tratam o meio material como inicialmente isotrópico e homogêneo e, a medida que o estado de sollicitação no material aumenta, seu comportamento é alterado devido ao surgimento de fissuras, que no decorrer da análise se propagam por todo o meio. A partir do início da fissuração, o material passa a ser tratado como ortotrópico e os eixos de ortotropia determinados de acordo com a direção das fissuras.

Os modelos de fissuração distribuída podem ser classificados em duas categorias: modelo de direção de fissuração fixa ou variável. O modelo com direção fixa considera que, uma vez iniciada, a fissura tem orientação fixa durante todo o processo de propagação. Já o modelo com direção variável admite que as fissuras podem rotacionar de acordo com a orientação das deformações principais.

Nos modelos de fissuração distribuída, tradicionalmente, leis tensão deformação são escritas relativamente aos eixos principais n, s, t de ortotropia, na forma

$$\{\sigma_\ell\} = [{}^s_\ell D]\{\varepsilon_\ell\}, \quad (2.4)$$

onde $\{\sigma_\ell\}$ é o vetor de tensões no sistema local, $[{}^s_\ell D]$ é a matriz constitutiva secante local e $\{\varepsilon_\ell\}$ é o vetor de deformações no sistema local. Portanto, para o caso tridimensional, são necessárias nove componentes de rigidez para caracterização do meio fissurado

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{tt} \\ \sigma_{ns} \\ \sigma_{st} \\ \sigma_{nt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_{nn} & E_{ns} & E_{nt} & 0 & 0 & 0 \\ E_{ns} & E_{ss} & E_{st} & 0 & 0 & 0 \\ E_{nt} & E_{st} & E_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{ns} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{st} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{nt} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{tt} \\ \gamma_{ns} \\ \gamma_{st} \\ \gamma_{nt} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Na equação 2.5, n é a direção normal à fissura e s, t são direções tangenciais à fissura, como ilustrado na figura 2.8.

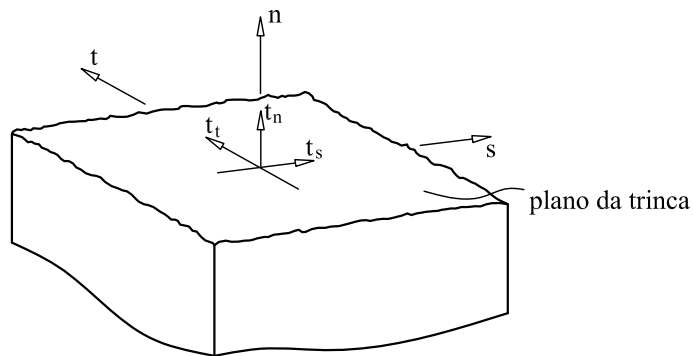


Figura 2.8: Sistema de coordenadas da trinca.

Os modelos iniciais (Rashid, 1968) tratavam as direções normais às fissuras com rigidez nula ($E_{nn} = E_{ns} = E_{nt} = G_{ns} = G_{nt} = 0$). Desta forma, as tensões associadas a estas componentes de rigidez ($\sigma_{nn}, \sigma_{ns}, \sigma_{nt}$), no momento da abertura da trinca, decaíam de um valor limite para zero. Logo, para o caso bidimensional, tinha-se

$$\{\sigma_\ell\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{nn} \\ \sigma_{ss} \\ \sigma_{ns} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon_\ell\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{nn} \\ \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{ns} \end{Bmatrix}; \quad [{}^s_\ell D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6a,b,c)$$

Estas primeiras aproximações não exprimiam a realidade observada, de que mesmo depois de fissurada, uma peça estrutural ainda era capaz de transmitir esforços normais e tangenciais. A transformação do meio material, inicialmente linear-elástico e isotrópico, em um meio ortotrópico com rigidez nula implicava em fortes descontinuidades, que acarretavam em instabilidades numéricas dos modelos.

Modelos subsequentes (Suidan e Schnobrich, 1973) mantiveram a rigidez residual transversal G_{ns} e G_{nt} como função do módulo de elasticidade transversal inicial G , através de um fator de redução denominado fator de retenção ao cisalhamento, designado por β_r . Portanto, para o caso plano, tem-se

$$[{}^s_\ell D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta_r G \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

com β_r variando de zero a 1,0.

Analogamente, uma evolução do modelo considerava também um fator de redução do módulo de elasticidade nas direções normais à fissura, alterando 2.7 para

$$[{}^s_\ell D] = \begin{bmatrix} \alpha_r E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \beta_r G \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

com α_r sendo um fator de redução variando de zero a 1,0.

Bažant e Oh (1983), usando as mesmas ideias, mantiveram a redução do módulo de rigidez normal à fissura (E_{nn}), além de introduzirem também os módulos de rigidez fora da diagonal da matriz constitutiva, considerando assim o efeito de Poisson

após a abertura da trinca. A formulação baseia-se na inversão de uma relação de flexibilidade e considera somente degradação por tração.

O modelo de Hillerborg et al. (1976) também considerava somente a degradação por tração e a propagação de fissuras era estudada em função das tensões principais, que iam do regime elástico até a ruptura.

Baseando-se no trabalho de Bažant e Oh (1983), Rots et al. (1985) desenvolveram um modelo que considerava, não somente a degradação na direção normal à fissura, mas também na direção tangente ao plano de fissuração, de tal modo que a relação tensão-deformação na direção das fissuras era dada por:

$$[{}^s_\ell D] = \frac{1}{(1 - \nu^2 \alpha_r)} \begin{bmatrix} \alpha_r E & \nu \alpha_r E & 0 \\ \nu \alpha_r E & E & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu^2 \alpha_r) \frac{\beta_r G}{2(1 + \nu)} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

A ideia da inversão da flexibilidade já estava consolidada e inúmeros trabalhos desde então foram desenvolvidos (Rots et al. (1985), Rots e de Borst (1987), Bažant e Pijaudier-Cabot (1988), Bažant e Lin (1988), Rots e Blaauwendraad (1989), Petrangeli e Ožbolt (1996), dentre outros). A seguir, será descrita uma generalização dos modelos de fissuração distribuída baseados em inversão de flexibilidade, apresentada no trabalho de Pitangueira (1998).

2.3.2 Generalização dos Modelos de Fissuração Distribuída

Partindo da relação entre tensões ($\{\sigma_\ell\}$) e deformações ($\{\varepsilon_\ell\}$) em um sistema de coordenadas local, orientado na direção de fissuração (Figura 2.9), em termos da flexibilidade ($[{}^s_\ell C]$), dada por

$$\{\varepsilon_\ell\} = [{}^s_\ell C] \{\sigma_\ell\}, \quad (2.10)$$

pode-se desenvolver as equações que permitem obter o tensor constitutivo secante local.

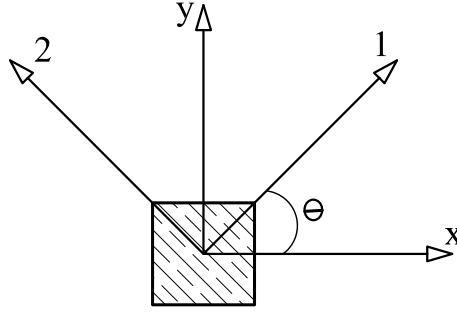


Figura 2.9: Eixos locais e globais.

Admitindo que o material é ortotrópico nas direções principais de deformação, para o caso bidimensional de estado plano de tensão, tem-se

$$[{}_{\ell}^s C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Invertendo $[{}_{\ell}^s C]$, tem-se o tensor constitutivo secante local dado por

$$[{}_{\ell}^s D] = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12}E_1 & 0 \\ \nu_{21}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_{12}\nu_{21})G_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Para o caso bidimensional de estado plano de deformação, tem-se

$$[{}_{\ell}^s C] = \begin{bmatrix} \frac{d}{E_1} & -\frac{b}{E_2} & 0 \\ -\frac{c}{E_1} & \frac{a}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

onde

$$a = (1 - \nu_{23}\nu_{32}); \quad (2.14a)$$

$$b = (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}); \quad (2.14b)$$

$$c = (\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}); \quad (2.14c)$$

$$d = (1 - \nu_{13}\nu_{31}). \quad (2.14d)$$

Logo, o tensor constitutivo secante local (obtido pela inversão de $[\ell^s C]$) é

$$[\ell^s D] = \frac{1}{(ad - bc)} \begin{bmatrix} aE_1 & bE_1 & 0 \\ cE_2 & dE_2 & 0 \\ 0 & 0 & (ad - bc)G_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Supondo que os módulos de elasticidade nas direções locais são obtidos de forma independente e de acordo com o estado de deformação corrente, o modelo obtido permite considerar a degradação tanto em tração quanto em compressão. Entretanto, verifica-se que as matrizes, dadas em 2.12 e 2.15, são assimétricas e, portanto, um processo de simetrização, como sugerido por Bažant e Oh (1983), é adotado.

A matriz de flexibilidade simétrica pode ser obtida tomando as componentes do acoplamento, devido ao efeito de Poisson, como um único valor. Este passa a ser uma função do módulo de elasticidade inicial (E_0) e de um coeficiente de Poisson igual para todas as direções do material (ν). Logo, em estado plano de tensão, adota-se

$$\frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu}{E_0}, \quad (2.16)$$

resultando em uma matriz de flexibilidade igual a

$$[\ell^s C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu}{E_0} & 0 \\ -\frac{\nu}{E_0} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Invertendo 2.17 tem-se a matriz constitutiva secante local dada por

$$[\ell^s D] = \frac{1}{1 - \frac{E_1 E_2}{E_0^2} \nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \frac{\nu E_1 E_2}{E_0} & 0 \\ \frac{\nu E_1 E_2}{E_0} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{E_1 E_2}{E_0^2} \nu^2\right) G_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Em estado plano de deformações, tem-se

$$\frac{b}{E_1} = \frac{c}{E_2} = \frac{b}{E_0}, \quad (2.19)$$

resultando em uma matriz de flexibilidade igual a

$$[{}^s_{\ell}C] = \begin{bmatrix} \frac{d}{E_1} & -\frac{b}{E_0} & 0 \\ -\frac{b}{E_0} & \frac{a}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

sendo

$$a = \left(1 - \frac{E_2}{E_0}\nu^2\right); \quad (2.21a)$$

$$b = c = (\nu + \nu^2); \quad (2.21b)$$

$$d = \left(1 - \frac{E_1}{E_0}\nu^2\right). \quad (2.21c)$$

Invertendo 2.20 tem-se a matriz constitutiva secante local dada por

$$[{}^s_{\ell}D] = \frac{1}{1 - \frac{E_1 E_2}{E_0^2} \frac{b^2}{ad}} \begin{bmatrix} \frac{E_1}{d} & \frac{b}{da} \frac{E_1 E_2}{E_0} & 0 \\ \frac{b}{da} \frac{E_1 E_2}{E_0} & \frac{E_2}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{E_1 E_2}{E_0^2} \frac{b}{ad}\right) G_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

O módulo de elasticidade transversal, segundo a hipótese da simetrização, fica

$$G_{12} = \frac{E_0 E_1 E_2}{E_0 E_1 + E_0 E_2 + 2\nu E_1 E_2}. \quad (2.23)$$

A limitação do valor mínimo do módulo de elasticidade transversal, para considerar a rugosidade entre as faces da fissura, pode ser feita em função do módulo original, por

$$G_{12} \geq \beta_r G_0, \quad (2.24)$$

onde

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu)} \quad (2.25)$$

e β_r é um valor entre zero e 1,0.

Outras hipóteses de simetrização podem ser adotadas, como, por exemplo, a usada por Darwin e Pecknold (1976), que consideram

$$\frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1} = \frac{\nu}{\sqrt{E_1 E_2}}, \quad (2.26)$$

para estado plano de tensão, e

$$\frac{b}{E_2} = \frac{c}{E_1} = \frac{b}{\sqrt{E_1 E_2}}, \quad (2.27)$$

para estado plano de deformação, sendo b e c dados pela equação 2.21b.

As matrizes de flexibilidade e as matrizes constitutivas secantes dados acima foram obtidos para o sistema local que, como já admitido, está alinhado com as direções das deformações principais. Entretanto, os tensores constitutivos também devem ser obtidos no sistema global.

Para transformar tensões entre os sistemas (local e global), ilustrados na figura 2.9, usa-se

$$\{\sigma_\ell\} = [T_\sigma]\{\sigma_g\}, \quad (2.28)$$

onde $\{\sigma_g\}$ são as tensões no sistema global e $[T_\sigma]$ é a matriz de transformação de tensões. Invertendo e transpondo $[T_\sigma]$, obtém-se a matriz que permite transformar deformações entre sistemas, usando

$$[T_\varepsilon] = [T_\sigma]^{-T}, \quad (2.29)$$

onde

$$\{\varepsilon_\ell\} = [T_\varepsilon]\{\varepsilon_g\}. \quad (2.30)$$

Substituindo as matrizes de transformação na relação entre tensões e deformações locais, tem-se

$$[T_\sigma]\{\sigma_g\} = [{}^s D] [T_\varepsilon]\{\varepsilon_g\}. \quad (2.31)$$

Logo, tem-se

$$\{\sigma_g\} = [T_\varepsilon]^T [{}^s D] [T_\varepsilon]\{\varepsilon_g\}. \quad (2.32)$$

Reescrevendo 2.32, tem-se

$$\{\sigma_g\} = [{}^sD] \{\varepsilon_g\}, \quad (2.33)$$

sendo que

$$[{}^sD] = [T_\varepsilon]^T [{}^\ell D] [T_\varepsilon] \quad (2.34)$$

é a matriz constitutiva secante global.

A figura 2.10 apresenta a sequência do processo de transformações de deformações e tensões ao longo da análise.

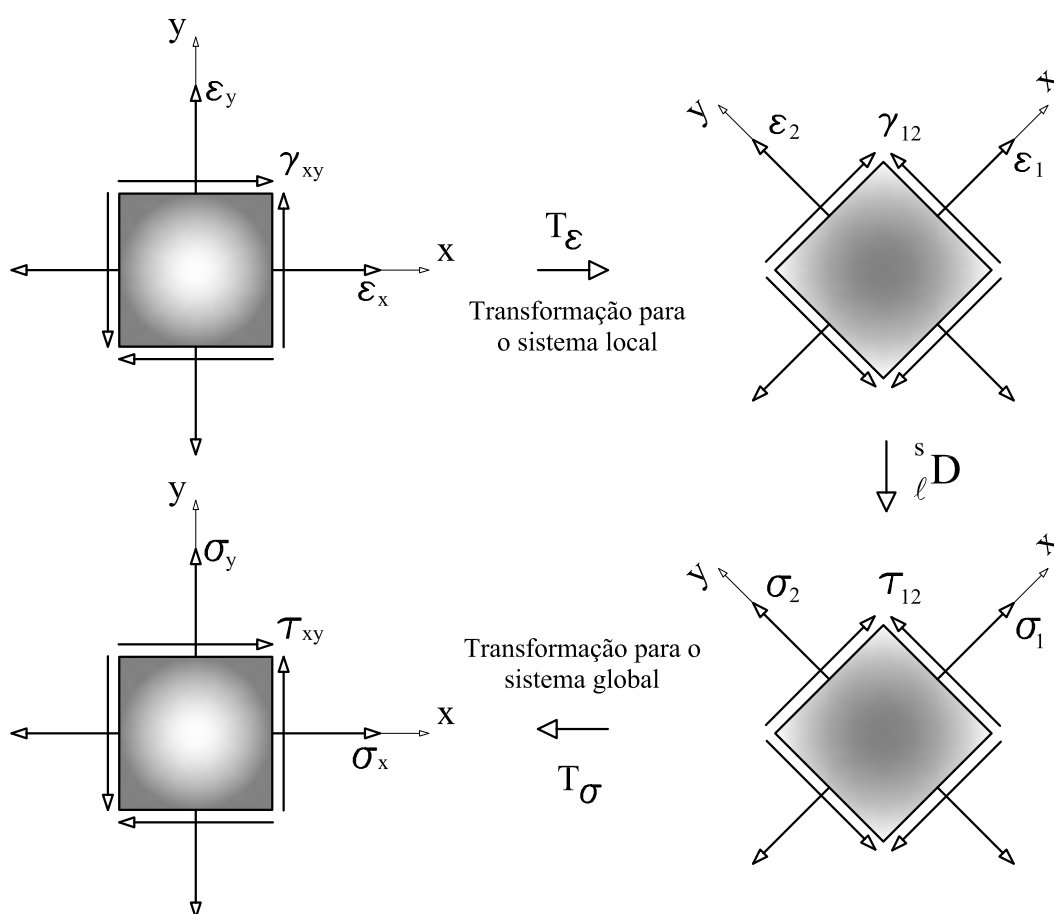


Figura 2.10: Transformações de deformações e tensões.

Em um processo incremental-iterativo de análise não linear baseado em formulação secante, as equações acima são suficientes. Entretanto, para o caso da formulação tangente desse processo, que requer o cálculo de rigidez tangente incremental, uma relação diferencial entre tensões e deformações deve ser obtida. Assim sendo,

partindo da relação de transformação de tensões (equação 2.28), tem-se

$$\{\sigma_g\} = [T_\sigma]^{-1} \{\sigma_\ell\} , \quad (2.35)$$

substituindo a relação 2.29 na equação 2.35, tem-se

$$\{\sigma_g\} = [T_\varepsilon]^T \{\sigma_\ell\} . \quad (2.36)$$

Diferenciando 2.36 em relação a $\{\varepsilon_g\}$, tem-se

$$d\{\sigma_g\} = \frac{\partial}{\partial\{\varepsilon_g\}} ([T_\varepsilon]^T \{\sigma_\ell\}) d\{\varepsilon_g\} \quad (2.37)$$

ou

$$d\{\sigma_g\} = \left[[T_\varepsilon]^T \frac{\partial\{\sigma_\ell\}}{\partial\{\varepsilon_g\}} + \frac{\partial[T_\varepsilon]^T}{\partial\{\varepsilon_g\}} \{\sigma_\ell\} \right] d\{\varepsilon_g\} , \quad (2.38)$$

que pode ser escrito como

$$d\{\sigma_g\} = \left[[T_\varepsilon]^T \frac{\partial\{\sigma_\ell\}}{\partial\{\varepsilon_\ell\}} [T_\varepsilon] + \frac{\partial[T_\varepsilon]^T}{\partial\{\varepsilon_g\}} \{\sigma_\ell\} \right] d\{\varepsilon_g\} \quad (2.39)$$

ou

$$d\{\sigma_g\} = \left[[T_\varepsilon]^T [{}^t_\ell D] [T_\varepsilon] + \frac{\partial[T_\varepsilon]^T}{\partial\{\varepsilon_g\}} \{\sigma_\ell\} \right] d\{\varepsilon_g\} , \quad (2.40)$$

em que

$$[{}^t_\ell D] = \frac{\partial\{\sigma_\ell\}}{\partial\{\varepsilon_\ell\}} \quad (2.41)$$

é o tensor constitutivo tangente no sistema local de coordenadas, e a parcela $\frac{\partial[T_\varepsilon]^T}{\partial\{\varepsilon_g\}} \{\sigma_\ell\}$ representa a influência de possíveis mudanças na matriz de transformação durante o processo incremental-iterativo.

Para melhor entendimento do tensor constitutivo tangente local, toma-se o diferencial da relação tensão-deformação local, dado por

$$d\{\sigma_\ell\} = \frac{\partial\{\sigma_\ell\}}{\partial\{\varepsilon_\ell\}} d\{\varepsilon_\ell\} , \quad (2.42)$$

sendo $\frac{\partial\{\sigma_\ell\}}{\partial\{\varepsilon_\ell\}}$ obtido pela derivação da equação 2.4, logo

$$\frac{\partial\{\sigma_\ell\}}{\partial\{\varepsilon_\ell\}} = \frac{\partial}{\partial\{\varepsilon_\ell\}} ([{}^s_\ell D] \{\varepsilon_\ell\}) = [{}^s_\ell D] + \frac{\partial[{}^s_\ell D]}{\partial\{\varepsilon_\ell\}} \{\varepsilon_\ell\} , \quad (2.43)$$

onde $[\ell^s D]$ é o tensor constitutivo secante local simétrico. Entretanto, a parcela $\frac{\partial[\ell^s D]}{\partial\{\varepsilon_\ell\}}\{\varepsilon_\ell\}$ é não simétrica sendo, para o caso bidimensional, dada por

$$\frac{\partial[\ell^s D]}{\partial\{\varepsilon_\ell\}}\{\varepsilon_\ell\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_\ell^s D_{11}}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial_\ell^s D_{12}}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon_2 & \frac{\partial_\ell^s D_{11}}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon_1 + \frac{\partial_\ell^s D_{12}}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon_2 & 0 \\ \frac{\partial_\ell^s D_{12}}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial_\ell^s D_{22}}{\partial\varepsilon_1}\varepsilon_2 & \frac{\partial_\ell^s D_{12}}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon_1 + \frac{\partial_\ell^s D_{22}}{\partial\varepsilon_2}\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Na equação 2.40, o termo dependente da variação da direção do sistema local, no caso bidimensional, varia de acordo com um ângulo θ (Figura 2.9), logo, tem-se

$$\frac{\partial[T_\varepsilon]^T}{\partial\{\varepsilon_g\}}\{\sigma_\ell\} = \frac{\partial[T_\varepsilon]^T}{\partial\theta}\{\sigma_\ell\} \left(\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon_g} \right)^T, \quad (2.45)$$

que é simétrico se houver coaxialidade entre tensões e deformações principais ao longo do processo.

A equação 2.40 pode agora ser reescrita em termos da equação 2.45, portanto, tem-se

$$d\{\sigma_g\} = \left[[T_\varepsilon]^T [\ell^t D] [T_\varepsilon] + \frac{\partial[T_\varepsilon]^T}{\partial\theta}\{\sigma_\ell\} \left(\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon_g} \right)^T \right] d\{\varepsilon_g\}. \quad (2.46)$$

Para o caso do modelo com direção de fissuração fixa, a parcela dependente da variação da direção, na equação 2.46, se anula, uma vez que a direção de propagação, no instante do surgimento da fissura, é tomada como constante até o fim da análise. Portanto, neste caso, a relação constitutiva tangente global é dada por

$$d\{\sigma_g\} = [T_\varepsilon]^T [\ell^t D] [T_\varepsilon] d\{\varepsilon_g\}. \quad (2.47)$$

Os modelos rotacionais admitem que a direção principal de deformação continua mudando após o surgimento das primeiras trincas. Desta forma, a parcela dependente da variação da direção, dada na equação 2.45, deve ser contabilizada. Para o caso bidimensional, impondo condição de coaxialidade entre deformações (ε_1 e ε_2) e tensões principais (σ_1 e σ_2), tem-se

$$\frac{\partial[T_\varepsilon]^T}{\partial\theta}\{\sigma_\ell\} \left(\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon_g} \right)^T = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{xy}(\sigma_1\sigma_2)\text{sen}2\theta}{2(\varepsilon_x\varepsilon_y) + \gamma_{xy}^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -ctg2\theta \\ -1 & 1 & ctg2\theta \\ -ctg2\theta & ctg2\theta & -ctg^22\theta \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Na generalização acima discutida, o acompanhamento do processo de degradação depende dos valores dos módulos de elasticidade secantes (E_i^s) e tangentes (E_i^t) nas direções i de ortotropia. Estes valores dependem do estado corrente de deformações ($E_i^s = E_i^s(\varepsilon_i)$, $E_i^t = E_i^t(\varepsilon_i)$) e, portanto, podem ser obtidos a partir de leis tensão-deformação escalares, como ilustra a figura 2.11.

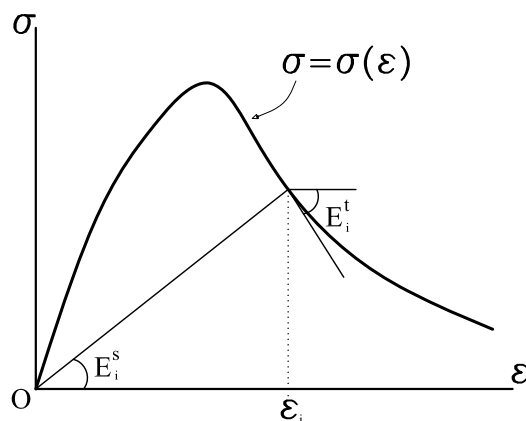


Figura 2.11: Lei tensão-deformação.

Estudando os sinais das deformações nas direções de ortotropia, pode-se investigar a degradação tanto em tração quanto em compressão, sendo necessário somente leis específicas para regiões de tração e de compressão.

2.4 Modelos de Dano

Dano pode ser definido como o processo de surgimento ou “nucleação” e de avanço de microfissuras e microvazios até a falha do material. Ou seja, um dado material intacto, quando submetido a solitações, evolui para um estado de microfissuras até a falha macroscópica. No âmbito da microestrutura o dano é visto como uma descontinuidade do material, já em escalas maiores, pode-se tratar o material de forma contínua.

A mecânica do dano contínuo estuda o comportamento macroscópico de um material, tratando-o como homogêneo. A consideração de um meio contínuo é feita através da definição de um “*Elemento Volumétrico Representativo*” (EVR), cuja

magnitude deve ser tal que o meio material deteriorado possa ser tratado como homogêneo. A ordem de grandeza do EVR está em torno de $0,1 \text{ mm}^3$, em metais, e 100 mm^3 , para o concreto (Lemaitre, 1992; Lemaitre e Desmorat, 2005).

Fisicamente, o dano pode ser visto como as deformações plásticas ou deformações permanentes, originadas pela deterioração das propriedades físicas do material.

Na engenharia de estruturas é de extrema importância conhecer o início, a propagação e as causas do dano para controlá-lo, estimando assim a vida útil e evitando o colapso de uma estrutura.

O estudo empírico do dano em diferentes materiais levou ao desenvolvimento de diversos modelos constitutivos capazes de descrever o comportamento dos mesmos.

2.4.1 Conceitos Fundamentais da Mecânica do Dano

Os primeiros modelos de dano contínuo tratavam da redução da área de uma seção transversal, a partir de modelos uniaxiais, devido ao surgimento de microfissuras, sendo estas tomadas como a variável de estado interna para a caracterização do dano.

Como mostra a figura 2.12, partindo da existência de microfissuras e microvazios, pode-se definir a variável de dano, de forma mais genérica, como sendo a densidade das microfissuras que estão na interseção do EVR com uma dada seção transversal. Portanto, tem-se

$$D_{(\vec{n})} = \frac{\delta S_D}{\delta S}, \quad (2.49)$$

onde δS é a área da interseção do EVR com uma dada seção transversal, δS_D é a área de microfissuras e microvazios contidos em δS e \vec{n} é uma direção de propagação do dano (Lemaitre e Desmorat, 2005).

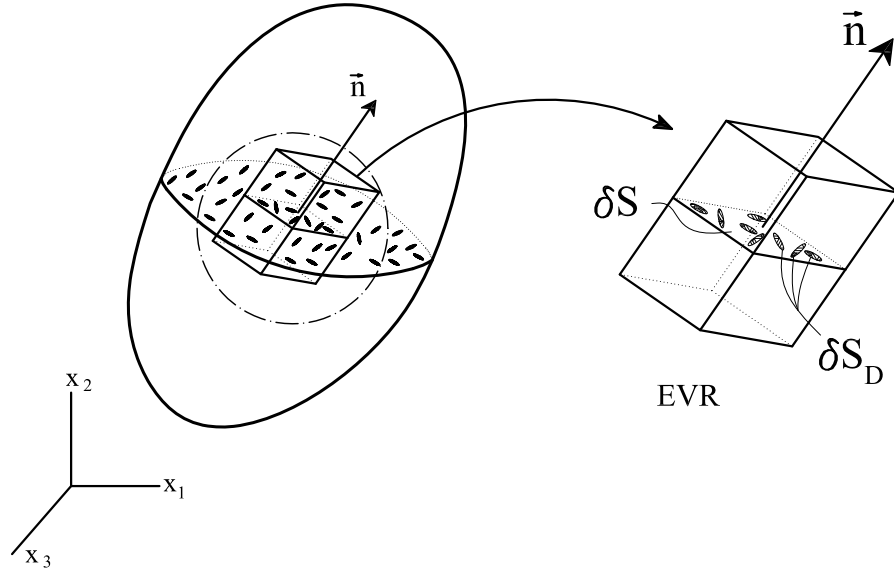


Figura 2.12: Caracterização do dano.

Mais recentemente, muitos outros trabalhos (Scotta et al., 2002; Jirásek e Patzák, 2002; Xiang et al., 2002; Lee et al., 2004) desenvolveram modelos de materiais para representar a degradação das propriedades elásticas, ou da rigidez inicial do material em regime de pequenas deformações. Estes modelos procuram representar a degradação progressiva do módulo de elasticidade, quando o material é submetido a estados de tensões e/ou deformações acima de seu limite de resistência. Portanto, tem-se

$$D = 1 - \frac{E^D}{E^0} \quad (2.50)$$

ou

$$E^D = (1 - D)E^0, \quad (2.51)$$

onde E^0 é o módulo de elasticidade do material intacto e E^D é o módulo de elasticidade do material danificado.

Para o entendimento das variáveis de dano, é válido separar os modelos de dano contínuo em duas categorias: os modelos micromecânicos e os modelos fenomenológicos.

Nos modelos micromecânicos, as variáveis de dano devem representar a média dos defeitos microscópicos que caracterizam o estado de deterioração interna. Apesar

de grande apelo físico, os modelos micromecânicos apresentam dificuldades experimentais de identificação de leis de evolução do dano, o que tornam estes modelos de difícil utilização, principalmente em um contexto mais abrangente, como em uma modelagem de problemas de engenharia.

Já as variáveis de dano fenomenológicas constituem a base da degradação interna de um material e refletem o comportamento macroscópico do mesmo. Propriedades como o módulo de elasticidade, tensão de escoamento, densidade, dentre outras, sofrem alterações consideráveis devido ao dano oriundo de microfissuras em um dado material. É válido dizer que medir estas propriedades é mais fácil do que determinar a distribuição geométrica dos microdefeitos que possam surgir em um meio material.

O trabalho de Lemaitre e Dufailly (1987) apresenta várias medidas de dano, tanto micromecânicas quanto fenomenológicas, e conclui que a forma mais eficiente de se medir o dano de um material é através da densidade de defeitos em uma superfície. Entretanto, o processo pode se tornar muito difícil e incerto para os casos em que não se tem uma uniformidade dos defeitos. Além destas dificuldades, questões como a magnitude do elemento volumétrico representativo e a escala das medidas físicas de dano ainda são muito subjetivas. Uma tentativa de determinação da densidade de defeitos foi apresentada por Krajcinovic e Lubarda (1993), com a proposta de um modelo teórico baseado em uma dada distribuição estatística das microfissuras do meio material.

Alguns modelos fenomenológicos usam a abordagem da *equivalência de deformações* ou *equivalência de tensões*. Esta abordagem assume que o comportamento de um material danificado é representado por leis constitutivas do material original com as tensões e/ou deformações reais substituídas por tensões e/ou deformações efetivas. As tensões e deformações efetivas são definidas como sendo as tensões e deformações na matriz do meio material descontando-se as microfissuras que surgirão ao longo do processo de dano. Ou seja,

$$\sigma = E^0 \varepsilon , \quad (2.52)$$

para o material original, e

$$\sigma^{ef} = E^0 \varepsilon^{ef} , \quad (2.53)$$

para o material danificado. Onde E^0 é o módulo de elasticidade do material original, σ são as tensões reais, ε são as deformações reais e σ^{ef} e ε^{ef} são as tensões e deformações efetivas, respectivamente.

Alternativamente, pode-se estabelecer uma relação entre tensões reais e efetivas, e, de forma análoga, uma relação entre deformações reais e efetivas, na forma

$$\sigma = \bar{\alpha} \sigma^{ef} \quad e \quad \varepsilon = \alpha \varepsilon^{ef} , \quad (2.54a,b)$$

onde α e $\bar{\alpha}$ representa o efeito do dano sobre as tensões e sobre as deformações respectivamente que guardam entre si a relação $\bar{\alpha}\alpha = 1$. No apêndice B são apresentadas as relações nominais e efetivas segundo os conceitos da mecânica do dano.

Os conceitos da mecânica do dano contínuo podem ser vistos com detalhes em Lemaitre (1992) e Lemaitre e Desmorat (2005).

Dentre diversas propostas a evolução do dano pode-se destacar as funções escalares de evolução e as superfícies limites de dano. As funções de evolução são definidas em termos de variáveis capazes de medir o estado de tensão e/ou deformação do material computando assim o estado de degradação correspondente. Diversas formas destas funções de evolução do dano podem ser vistas no apêndice E.

Admitindo-se que o domínio elástico do material pode ser delimitado por uma superfície, escrita em termos de parâmetros físicos do meio e de medidas de tensão e/ou deformação, o valor do dano pode ser obtido usando-se algoritmos de retorno, análogo aos modelos de plasticidade, contudo em termos de variáveis de dano. Muitos trabalhos, podendo citar Comi (2001), Wu et al. (2006), Nguyen (2005), Matallah e La Borderie (2009) etc, adotam superfícies de dano para a descrição dos modelos.

2.4.2 Formulação de Modelos de Fissuração Distribuída Segundo a Teoria de Dano

Os modelos de fissuração distribuída serão agora formulados segundo a mecânica do dano contínuo, como mostrado por de Borst e Gutiérrez (1999) e de Borst (2002).

Como mostra a equação 2.55, os modelos constitutivos podem ser formulados com base em relações entre tensões e deformações totais, dadas por

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}^s(q_m, \omega_{mn}, \Omega_{mnop}, \dots)\varepsilon_{kl} \quad (2.55)$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões, ε_{kl} é o tensor de deformações e D_{ijkl}^s é o tensor constitutivo secante, que é função de variáveis internas de dano ($q_m, \omega_{mn}, \Omega_{mnop}$), sejam elas escalares ou tensoriais. A equação 2.55 difere da elasticidade linear clássica pela dependência de uma variável histórica, que é incorporada por meio de uma função de carregamento e descarregamento. Complementando a teoria, é necessário a introdução de equações de evolução para as variáveis internas.

Simplificando a equação 2.55, segundo Ladevèze (1983), tem-se

$$\sigma_{ij} = [(1 - \omega_1)G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}) + (1 - \omega_2)K\delta_{ij}\delta_{kl}]\varepsilon_{kl} , \quad (2.56)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal e K é o módulo volumétrico. Estas propriedades são alteradas por variáveis de dano escalar ω_1 e ω_2 . Outra simplificação consiste em assumir que o material se degrada igualmente, logo

$$\sigma_{ij} = (1 - \omega)D_{ijkl}^e\varepsilon_{kl} , \quad (2.57)$$

onde ω é a medida de dano que varia de zero (material intacto) a 1,0 (máxima degradação) e D_{ijkl}^e é o tensor de rigidez elástico. A relação é complementada por uma função de carregamento

$$f = f(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma}, \kappa) , \quad (2.58)$$

onde $\tilde{\varepsilon}$ e $\tilde{\sigma}$ são equivalentes escalares de deformações e tensões, respectivamente, e κ é uma variável histórica (κ pode ser, por exemplo, a máxima deformação atingida

durante a história de carregamento). A função de carregamento e a taxa da variável histórica, dada por $\dot{\kappa}$ ($\dot{\kappa} = \kappa_i - \kappa_{i-1}$), devem satisfazer às condições de Kuhn-Tucker para o carregamento e descarregamento e as condições de complementaridade e consistência. Estas condições são dadas por

$$f \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\kappa} = 0 \quad \text{com} \quad \kappa = \kappa_0 , \quad (2.59)$$

em regime elástico, onde κ_0 é o valor inicial de κ ,

$$f = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\kappa} \geq 0 , \quad (2.60)$$

em regime de carregamento com ocorrência de dano,

$$f \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\kappa} = 0 , \quad (2.61)$$

em processo de descarregamento, e

$$f \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{\kappa} = 0 \quad \text{com} \quad \kappa = \kappa_{max} , \quad (2.62)$$

em processo de recarregamento, onde κ_{max} é o maior valor de κ já atingido durante a análise. Sendo as condições de complementaridade e consistência, respectivamente, dadas por

$$f \dot{\kappa} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{f} \dot{\kappa} = 0 . \quad (2.63)$$

Várias medidas para o escalar equivalente de deformações ($\tilde{\varepsilon}$) foram propostas (Mazars, 1984; Mazars e Lemaitre, 1984; Simo e Ju, 1987; Lemaitre e Chaboche, 1990; Ju, 1990; Brekelmans et al., 1992).

Incorporando a dependência da direção na avaliação do dano, pode-se conceber modelos para representar o comportamento anisotrópico do meio material. Assumindo ortotropia em estado plano de tensões e substituindo o sistema de coordenadas globais X-Y por um sistema local n-s (Figura 2.13), em relação ao qual a evolução do dano será acompanhada, pode-se definir a função de carregamento como

$$f(\varepsilon_{nn}, \kappa) = \varepsilon_{nn} - \kappa , \quad (2.64)$$

com ε_{nn} sendo as deformações normais no sistema de coordenadas local.

A relação secante entre tensões e deformações é, então, reescrita na forma

$$\{\sigma_{ns}\} = [D_{ns}^s] \{\varepsilon_{ns}\}, \quad (2.65)$$

com $\{\sigma_{ns}\} = [\sigma_{nn}, \sigma_{ss}, \tau_{ns}]^T$, $\{\varepsilon_{ns}\} = [\varepsilon_{nn}, \varepsilon_{ss}, \gamma_{ns}]^T$ e $[D_{ns}^s]$ definido como

$$[D_{ns}^s] = \begin{bmatrix} \frac{(1-\omega_1)E}{1-(1-\omega_1)\nu^2} & \frac{(1-\omega_1)E}{1-(1-\omega_1)\nu^2} & 0 \\ \frac{(1-\omega_1)E}{1-(1-\omega_1)\nu^2} & \frac{E}{1-(1-\omega_1)\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & (1-\omega_2)G \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

onde $\omega_1 = \omega_1(\kappa)$ e $\omega_2 = \omega_2(\kappa)$. O fator $1 - \omega_2$ representa a degradação da rigidez ao cisalhamento, conhecido também como fator de retenção de cisalhamento.

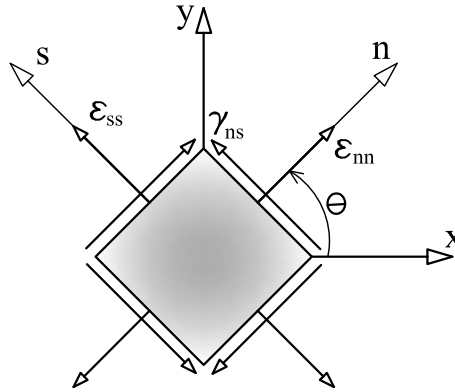


Figura 2.13: Sistema de coordenadas global (X-Y) e local (n-s).

Rotacionando o sistema de coordenadas globais de um ângulo θ a partir do eixo X até o eixo n (Figura 2.13), pode-se relacionar as componentes de $\{\sigma_{ns}\}$ e $\{\varepsilon_{ns}\}$, no sistema local, às suas correspondentes no sistema global, pelas matrizes de transformação de deformações $[T^\varepsilon]$ e de tensões $[T^\sigma]$. Desta forma, tem-se

$$\{\sigma_{ns}\} = [T^\sigma(\theta)] \{\sigma_{xy}\} \quad (2.67)$$

e

$$\{\varepsilon_{ns}\} = [T^\varepsilon(\theta)] \{\varepsilon_{xy}\}. \quad (2.68)$$

Substituindo as equações 2.67 e 2.68 na equação 2.65 obtém-se a relação tensão-deformação secante relativa ao sistema global de coordenadas

$$\{\sigma_{xy}\} = [T^\sigma(\theta)]^{-1} [D_{ns}^s] [T^\varepsilon(\theta)] \{\varepsilon_{xy}\} . \quad (2.69)$$

A equação 2.69 é válida tanto para modelo com direção de dano fixa quanto para dano com direção variável. Para o modelo com direção fixa, a relação tensão-deformação tangente pode ser obtida pela derivação da equação 2.69, sendo esta relação necessária em processos incrementais-iterativos que utilizam o método de Newton-Raphson. Portanto, tem-se

$$\{\dot{\sigma}_{xy}\} = [T^\sigma(\theta_0)]^{-1} ([D_{ns}^s] - [\Delta D_{ns}]) [T^\varepsilon(\theta_0)] \{\dot{\varepsilon}_{xy}\} , \quad (2.70)$$

onde θ_0 é o ângulo fixo da direção do dano e

$$[\Delta D_{ns}] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ \nu d_{11} & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad (2.71)$$

sendo

$$d_{11} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{nn}} \frac{E(\varepsilon_{nn} + \nu \varepsilon_{ss})}{(1 - (1 - \omega_1)\nu^2)^2} \quad (2.72)$$

e

$$d_{31} = \frac{\partial \omega_2}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{nn}} G \gamma_{ns} , \quad (2.73)$$

com $\frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{nn}} = 1$ em carregamento e 0 nas demais situações. Verifica-se que a rigidez tangente é geralmente não simétrica.

Modelos mais elaborados podem ser obtidos ao se considerar a evolução do dano nas duas direções principais e não somente na direção principal de tração. Nestes casos, a rigidez tangente deve ser novamente calculada.

Nos modelos de dano variável, o sistema de coordenadas do dano coincide com os eixos das deformações principais e a rigidez $[D_{ns}^s]$ relaciona tensões e deformações

principais, sendo a rigidez ao cisalhamento desconsiderada, logo

$$[D_{ns}^s] = \begin{bmatrix} \frac{(1-\omega)E}{1-(1-\omega)\nu^2} & \frac{(1-\omega)E}{1-(1-\omega)\nu^2} & 0 \\ \frac{(1-\omega)E}{1-(1-\omega)\nu^2} & \frac{E}{1-(1-\omega)\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Neste caso, apenas um único parâmetro de dano (ω) é necessário e a relação tangente é dada por

$$\{\dot{\sigma}_{xy}\} = [T^\sigma(\theta)]^{-1}([D_{ns}^s] - [\Delta D_{ns}])[T^\varepsilon(\theta)]\{\dot{\varepsilon}_{xy}\}, \quad (2.75)$$

onde θ é o ângulo da direção do dano atualizado e

$$[\Delta D_{ns}] = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ \nu d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.76)$$

sendo

$$d_{11} = \frac{\partial\omega}{\partial\kappa} \frac{\partial\kappa}{\partial\varepsilon_{nn}} \frac{E(\varepsilon_{nn} + \nu\varepsilon_{ss})}{(1-(1-\omega)\nu^2)^2} \quad (2.77)$$

e

$$d_{33} = -\frac{\sigma_{nn} - \sigma_{ss}}{2(\varepsilon_{nn} - \varepsilon_{ss})}, \quad (2.78)$$

onde d_{33} é originário da relação de coaxialidade entre tensões e deformações principais.

A formulação de dano foi a base de muitos trabalhos, podendo ser citados: Chow e Wang (1987), Bažant e Pijaudier-Cabot (1988), de Vree et al. (1995), Ghrib e Tinawi (1995), Petrangeli e Ožbolt (1996), Lee et al. (1997), Jirásek e Zimmermann (1998), Cauvin e Testa (1999), de Borst (2002) e Junior e Venturini (2007).

Modelos de microplanos, classificados como modelos de dano anisotrópico, também podem ser formulados, usando o enfoque aqui discutido.

2.5 Modelos de Microplanos

O comportamento inelástico observado em muitos materiais, em especial naqueles que desenvolvem microfissuras e microvazios causados por um processo de dano,

exibe uma resposta anisotrópica diretamente ligada à deterioração do meio. Para que um modelo descreva de forma realista o fenômeno de degradação, a anisotropia também deve ser representada.

Modelos tradicionais de dano apresentam soluções satisfatórias para um comportamento ortotrópico. Entretanto, ao sofisticar a análise visando a representação da anisotropia, a complexidade inserida nos modelos de dano inviabilizam sua utilização. A solução para a representação da anisotropia de forma mais simples é apresentada pelos modelos de microplanos.

A ideia dos modelos de microplanos surgiu da generalização do modelo de Taylor (1938), que propunha um comportamento constitutivo, para metais policristalinos, em que as tensões e deformações fossem avaliadas em muitos planos de orientações arbitrárias. Partindo desta premissa, a proposta preconizava que as tensões e deformações macroscópicas fossem obtidas pela resultante de todos os planos, através da imposição de condições estáticas e cinemáticas relacionando as grandezas em macro e micro escalas.

Diversos trabalhos foram desenvolvidos a partir desta ideia, mas apenas muitos anos mais tarde, com os trabalhos propostos por Bažant e Gambarova (1984) e Bažant e Oh (1985), que um significado simples e de fácil interpretação física foi apresentado.

A ideia de usar o conceito de microplanos para o estudo de materiais heterogêneos surgiu pela observação da microestrutura destes materiais, em que se verifica planos de descontinuidades nas interfaces dos grãos. Para o concreto, que é formado por uma matriz cimentícia e agregados, a associação dos planos nas interfaces dos grãos, como ilustra a figura 2.14, com o conceito de microplanos é imediata.

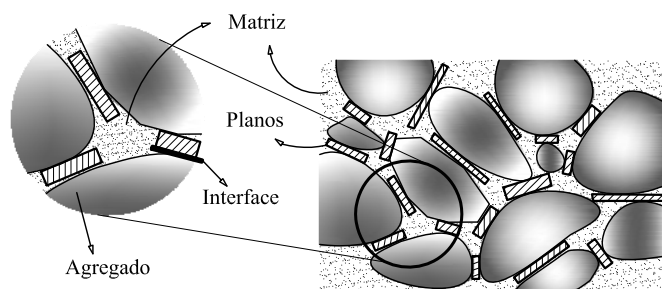


Figura 2.14: Representação da estrutura constituinte do concreto.

A região mais crítica do concreto localiza-se nas interfaces entre matriz e agregado, sendo esta região responsável pela origem, propagação e coalescência de microfissuras, causando assim um comportamento inelástico do material. Para representar este comportamento, Bažant e Gambarova (1984) propuseram descrever o material em microplanos orientados em várias direções e relacionar as tensões e deformações macroscópicas com as dos microplanos. Para este modelo, o material é descrito em escala mesoscópica e o comportamento constitutivo, para cada componente de tensão e deformação, é descrito individual e independentemente em cada microplano. Outros trabalhos seguiram a mesma linha, podendo-se citar: Bažant e Prat (1988a,b), Bažant e Ožbolt (1990), Ožbolt e Bažant (1992), Carol et al. (1992), dentre outros. Os modelos propostos passaram a ser classificados como modelos de restrição estática, de restrição cinemática e de restrição mista, conforme a natureza das variáveis decompostas nos microplanos. Ao se decompor uma variável macroscópica sobre os microplanos diz-se aplicar uma restrição à mesma. Se somente tensões são decompostas nos microplanos, o modelo é dito de restrição estática. Modelos, cujo processo de decomposição envolve somente deformações, são denominados de restrição cinemática. Se tanto tensões quanto deformações são usadas para a decomposição da variável macroscópica nos microplanos, o modelo é classificado como de restrição mista.

Somente com o trabalho de Carol et al. (1992), foi proposta uma estrutura teórica considerando apenas restrições cinemáticas. É válido ressaltar ainda que, apesar do significado físico, a descrição do meio ainda é tomada como inicialmente homogênea

uma vez que a distribuição espacial dos agregados e a característica aleatória da mistura do concreto não é levada em consideração.

A seguir, serão apresentadas as formulações mais usadas para os modelos de microplanos.

2.5.1 Formulação de Modelos de Microplanos

Os modelos de microplanos com restrição cinemática podem ser formulados seguindo três passos principais: a projeção das deformações nos microplanos, a definição de leis constitutivas e a homogeneização. O processo supõe o conhecimento das deformações em um ponto material, denominadas deformações macroscópicas, e, sobre a superfície de uma esfera centrada neste ponto, descreve-se um conjunto de microplanos, com direções normais à referida superfície, como mostrado na figura 2.15.

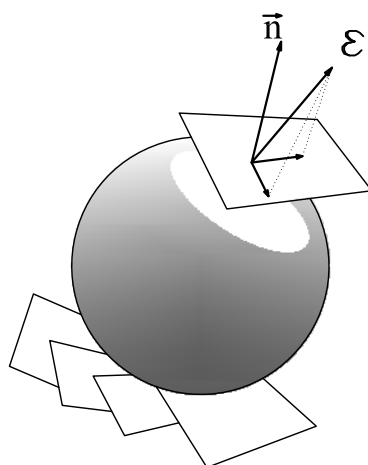


Figura 2.15: Microplanos em um ponto material.

O primeiro passo consiste em projetar as deformações macroscópicas em cada microplano, decompondo-as em parcelas normal e tangencial. Várias formas de divisão podem ser adotadas. Por exemplo, a componente normal pode ser dividida em parcelas volumétrica e desviadora. Esta divisão permite uma análise mais específica de cada direção do material, fazendo com que a anisotropia seja captada com mais

precisão. As normais, que estabelecem a orientação de cada microplano, são usadas como base para a projeção, sendo estes vetores normais unitários previamente definidos. Bažant e Oh (1985) mostram que 21 microplanos distribuídos sobre a superfície de uma semi-esfera são suficientes para a obtenção de bons resultados.

Uma vez definidas as deformações, o segundo passo consiste em assumir leis constitutivas para cada componente de deformação nos microplanos, para, assim, obter as respectivas tensões. As leis constitutivas são dadas por expressões matemáticas, podendo ser ajustadas a partir de ensaios experimentais.

O terceiro passo usa princípios de equivalência de energia para, a partir das tensões nos microplanos, obter as tensões macroscópicas. A figura 2.16 resume os passos fundamentais da teoria.

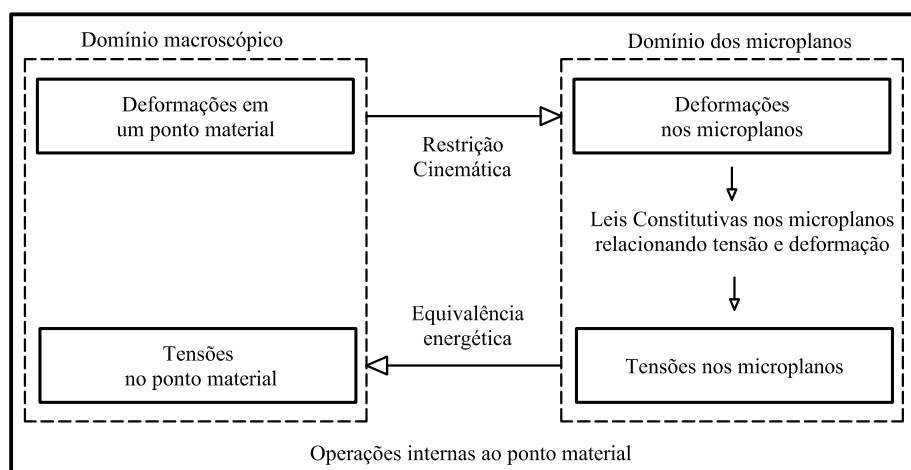


Figura 2.16: Resumo esquemático da teoria de microplanos.

Uma descrição detalhada destes passos, para formas diferentes de decomposição das deformações, são descritas por Leukart e Ramm (2002). A seguir, formulações que usam o Princípio dos Trabalhos Virtuais e as que usam as Leis da Termodinâmica serão apresentadas.

2.5.2 Modelos de Microplanos Baseados no Princípio dos Trabalhos Virtuais

No trabalho de Carol et al. (1992) foi apresentado um modelo de microplanos com restrição cinemática que, devido a este fato, foi denominado Modelo Explícito de Microplanos. Além da nova formulação, a teoria recebeu também um tratamento voltado para a implementação computacional do modelo. Por estas razões, este modelo tornou-se a base teórica dos modelos atuais.

Em cada microplano, as deformações macroscópicas, dadas pelo tensor ε_{ij} , são decompostas em uma parcela normal e uma parcela tangencial. Portanto, tem-se

$$\varepsilon_N = \varepsilon_{ij}n_i n_j \quad (2.79)$$

e

$$\varepsilon_{Ti} = \varepsilon_{ij}n_j - \varepsilon_N n_i = (\delta_{ij} - n_i n_j)n_k \varepsilon_{jk} , \quad (2.80)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, n_i representa as componentes do vetor normal ao microplano, ε_N é a componente normal de deformação e ε_{Ti} é um vetor contido no microplano. A figura 2.17 ilustra a decomposição.

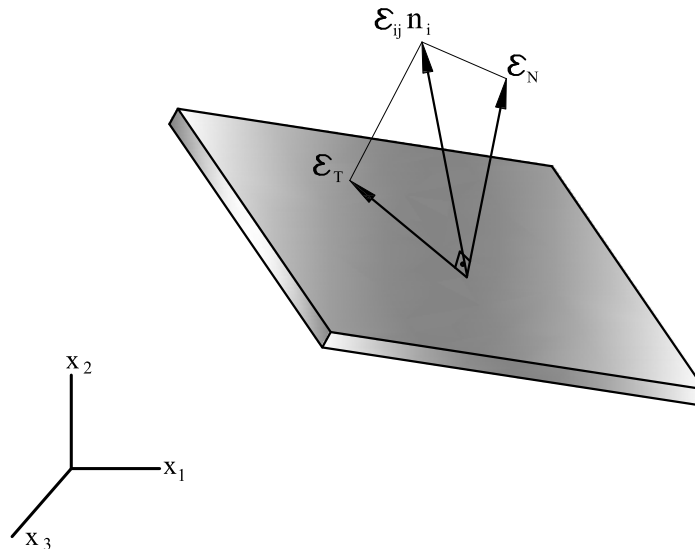


Figura 2.17: Decomposição adotada por Carol et al. (1992).

A componente de deformação normal (ε_N) no microplano é dividida em duas parcelas, uma volumétrica e uma desviadora, representadas, respectivamente, por

ε_V e ε_D , sendo dadas por

$$\varepsilon_V = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk} \quad (2.81)$$

e

$$\varepsilon_D = \varepsilon_N - \varepsilon_V . \quad (2.82)$$

Obtidas as deformações nos microplanos, pode-se determinar as tensões em cada microplano através de leis tensão-deformação para cada componente (volumétrica, desviadora e tangencial). Carol et al. (1992) usaram uma lei polinomial para as tensões volumétricas e lei exponencial para as componentes desviadoras e tangenciais.

Por fim, tem-se o processo de homogeneização, ou seja, obtidas as tensões nos microplanos, deve-se relacioná-las às tensões macroscópicas. Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, obtém-se a seguinte expressão para as tensões macroscópicas:

$$\sigma_{ij} = \sigma_V \delta_{ij} + \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \sigma_D n_i n_j d\Omega + \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\sigma_{T_r}}{2} (n_i \delta_{rj} + n_j \delta_{ri} - 2n_i n_j n_r) d\Omega , \quad (2.83)$$

onde Ω é o domínio da integral e equivale à metade superior da esfera unitária no ponto material.

Em um processo incremental-iterativo deve-se obter a rigidez tangente macroscópica. Diferenciando 2.83, obtém-se

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^t d\varepsilon_{kl} , \quad (2.84)$$

onde D_{ijkl}^{tan} é o tensor constitutivo tangente macroscópico, dado por

$$\begin{aligned} D_{ijkl}^t &= \frac{E_V^t}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} E_D^t n_i n_j (n_k n_l - \frac{1}{3} \delta_{kl}) d\Omega \\ &+ \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{H_{rs}^t}{4} (n_i \delta_{rj} + n_j \delta_{ri} - 2n_i n_j n_r) (n_k \delta_{sl} + n_l \delta_{sk} - 2n_k n_l n_s) d\Omega , \end{aligned} \quad (2.85)$$

onde $E_V^t = \frac{d\sigma_V}{d\varepsilon_V}$ é o módulo de elasticidade tangente da lei volumétrica, $E_D^t = \frac{d\sigma_D}{d\varepsilon_D}$ é o módulo de elasticidade tangente da lei desviadora e H_{rs}^t é uma matriz que relaciona os incrementos de tensão e deformação cisalhantes e é dada por

$$H_{rs}^t = \frac{\tau}{\gamma} \delta_{rs} + \left(E_T^t - \frac{\tau}{\gamma} \right) \frac{\varepsilon_{T_r} \varepsilon_{T_s}}{\gamma^2} , \quad (2.86)$$

onde $E_T^t = \frac{d\tau}{d\gamma}$ é o módulo de elasticidade tangente da relação entre o módulo das tensões (τ) e deformações cisalhantes (γ).

As demonstrações das expressões 2.83 e 2.85, obtidas pelo princípio dos trabalhos virtuais, podem ser vistas nos trabalhos de Bažant e Prat (1988a,b) e Carol et al. (1992).

Carol et al. (1992) inspiraram muitos trabalhos subsequentes. Ožbolt et al. (2001), por exemplo, aprimoraram o modelo, inserindo uma função de descontinuidade causada pelas fissuras de tração e admitiram uma nova decomposição para a parcela da deformação por cisalhamento.

2.5.3 Modelos de Microplanos Termodinamicamente Consistentes

Os modelos de microplanos iniciais empregavam o princípio dos trabalhos virtuais para a equivalência de energia, como mostrado anteriormente. Mas, embora os resultados obtidos fossem satisfatórios, foi mostrado por Carol et al. (2001a) que a segunda lei da termodinâmica, sob circunstâncias de carregamento distintas, não era satisfeita. Assim, Carol et al. (2001a) desenvolveram uma estrutura teórica completa baseada nas leis da termodinâmica. Na continuação deste trabalho, Kuhl et al. (2001) apresentaram leis constitutivas para a teoria de microplanos termodinamicamente consistente. Trabalhos seguintes, como os de Leukart e Ramm (2002), Ramm et al. (2004) e Leukart e Ramm (2006), influenciados por estes, também tratam os modelos de microplanos com a equivalência energética segundo as leis termodinâmicas.

A restrição cinemática é a mesma dos modelos explícitos de microplanos proposta por Carol et al. (2001a). A fim de preservar a generalidade desta formulação, parte-se da inequação de Clausius-Duhem para processos isotérmicos dada por:

$$\mathcal{D}^{mac} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\Psi}^{mac} \geq 0, \quad (2.87)$$

onde \mathcal{D}^{mac} é a dissipação macroscópica, $\boldsymbol{\sigma}$ contém as tensões macroscópicas, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ contém as taxas de deformações macroscópicas e $\dot{\Psi}^{mac}$ é a evolução da energia livre macroscópica.

De acordo com Carol et al. (2001a), para uma formulação de microplanos termodinamicamente consistente, a energia livre macroscópica, denotada por Ψ^{mac} , deve ser escrita como a integral da energia livre definida no domínio dos microplanos (Ψ^{mic}), sendo assim, tem-se

$$\Psi^{mac} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \Psi^{mic} d\Omega , \quad (2.88)$$

onde Ω é o domínio de integração, que corresponde à metade superior de uma esfera de raio unitário.

Em sua forma geral, a energia livre nos microplanos depende das componentes volumétrica (ε_V), desviadora (ε_D) e tangenciais (ε_T) de deformações, e de um conjunto de variáveis internas dadas por um vetor \mathbf{q} , logo,

$$\Psi^{mic} = \Psi^{mic}(\varepsilon_V, \varepsilon_D, \varepsilon_T, \mathbf{q}) . \quad (2.89)$$

Segundo a restrição cinemática, que é a mesma adotada por Carol et al. (1992), tem-se:

$$\varepsilon_V = \mathbf{V} : \boldsymbol{\varepsilon} ; \quad (2.90a)$$

$$\varepsilon_D = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} ; \quad (2.90b)$$

$$\varepsilon_T = \mathbf{T} : \boldsymbol{\varepsilon} , \quad (2.90c)$$

sendo \mathbf{V} , \mathbf{D} e \mathbf{T} tensores de projeção para cada microplano, dados por:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{3} \mathbf{I} ; \quad (2.91a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{I} ; \quad (2.91b)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{n} \cdot \mathcal{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} , \quad (2.91c)$$

onde $\mathbf{I} = \delta_{ij}$, \mathbf{n} é o vetor unitário de cada microplano e $\mathcal{I} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$.

As equações 2.90 são usadas para a obtenção da evolução da energia livre nos microplanos, dada por

$$\dot{\Psi}^{mic} = [\mathbf{V}\sigma_V + \mathbf{D}\sigma_D + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_T] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathcal{D}^{mic} , \quad (2.92)$$

onde as tensões nos microplanos são definidas por

$$\sigma_V = \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_V} , \quad \sigma_D = \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \varepsilon_D} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_T = \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_T} . \quad (2.93)$$

E a dissipação nos microplanos é dada pelo produto escalar

$$\mathcal{D}^{mic} = -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} . \quad (2.94)$$

Substituindo a equação 2.92 na equação 2.88, obtém-se a equação para a evolução da energia livre macroscópica. Desta forma, tem-se

$$\dot{\Psi}^{mac} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} [\mathbf{V}\sigma_V + \mathbf{D}\sigma_D + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_T] d\Omega : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \mathcal{D}^{mic} d\Omega . \quad (2.95)$$

Comparando a equação 2.95 com a equação 2.87 pode-se obter as expressões para a dissipação de energia e o tensor de tensões no domínio macroscópico. Desta forma,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} [\mathbf{V}\sigma_V + \mathbf{D}\sigma_D + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_T] d\Omega \quad (2.96)$$

e

$$\mathcal{D}^{mac} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \mathcal{D}^{mic} d\Omega \geq 0 . \quad (2.97)$$

A integral em 2.97 mostra que a dissipação de energia não-negativa em cada microplano ($\mathcal{D}^{mic} \geq 0$) é uma condição suficiente para que a segunda lei da termodinâmica seja válida.

A equação 2.92 pode ser interpretada como a versão da inequação de Clausius-Duhem no domínio dos microplanos, tal que

$$\mathcal{D}^{mic} = \mathcal{P}^{mic} - \dot{\Psi}^{mic} \geq 0 \quad \text{com} \quad \mathcal{P}^{mic} = \sigma_V \dot{\varepsilon}_V + \sigma_D \dot{\varepsilon}_D + \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_T . \quad (2.98)$$

A relação incremental $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_t : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ relaciona-se ao tensor constitutivo tangente (\mathbf{E}_t), que pode ser calculado por

$$\mathbf{E}_t = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \left[\mathbf{V} \otimes \frac{\partial \sigma_V}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{D} \otimes \frac{\partial \sigma_D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{T}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_T}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right] d\Omega , \quad (2.99)$$

resultando em um tensor simétrico, pois foi obtido a partir de um potencial de tensão.

Os resultados obtidos seguiram as mesmas hipóteses de projeção já adotadas anteriormente (Carol et al., 2001b,c). Entretanto, a contextualização da teoria de microplanos com consistência termodinâmica possibilitou o desenvolvimento de outros trabalhos com a mesma estrutura teórica, como os de Leukart e Ramm (2002, 2006).

2.6 Plasticidade Clássica

A teoria da plasticidade descreve o comportamento de materiais que ao serem submetidos a carregamentos mantém deformações permanentes caso o limite elástico seja superado. Materiais com este comportamento são conhecidos como materiais elastoplásticos.

Conforme Neto et al. (2006), para formular um modelo constitutivo de elastoplástico deve-se descrever: a decomposição de deformações elásticas e plásticas, uma lei elástica, um critério de escoamento, uma regra para o fluxo plástico e uma lei de endurecimento ou amolecimento do material.

2.6.1 Decomposição Aditiva do Tensor de Deformação

Uma das principais características na teoria da plasticidade, em regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, é a decomposição do tensor de deformações totais, $\boldsymbol{\varepsilon}$, em uma soma composta por uma parcela elástica (ou reversível), $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, e uma parcela plástica (ou permanente), $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad (2.100)$$

ou indicialmente

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (2.101)$$

Os tensores $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ são conhecidos como o tensor de deformações elásticas e tensor de deformações plásticas, respectivamente. As taxas correspondentes, na forma da

decomposição aditiva, são dadas por

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p . \quad (2.102)$$

2.6.2 Energia Potencial Livre e a Lei Elástica

A energia livre, $\psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^p, \boldsymbol{\alpha})$, é dada como função das deformações totais, das deformações plásticas (tratada como uma variável interna) e um conjunto de variáveis internas, $\boldsymbol{\alpha}$, associadas ao comportamento plástico do material. Usualmente assume-se uma decomposição da energia livre dada por:

$$\psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^p, \boldsymbol{\alpha}) = \psi^e(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) + \psi^p(\boldsymbol{\alpha}) \quad (2.103a)$$

$$= \psi^e(\boldsymbol{\epsilon}^e) + \psi^p(\boldsymbol{\alpha}) , \quad (2.103b)$$

com uma parcela de contribuição da energia elástica, $\psi^e(\boldsymbol{\epsilon}^e)$, e uma parcela de contribuição relativa ao comportamento plástico, $\psi^p(\boldsymbol{\alpha})$. Da equação da energia livre pode-se expressar a segunda lei da termodinâmica, que estabelece a irreversibilidade de processos dissipativos, pela inequação de Clausius-Duhem que é dada por:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \bar{\rho} \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \mathbf{A} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 , \quad (2.104)$$

onde

$$\mathbf{A} \equiv \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^e} \quad (2.105)$$

são as forças termodinâmicas associadas ao endurecimento do material e $-\boldsymbol{\sigma}$ é a força termodinâmica associada com as deformações plásticas, sendo que o símbolo $*$ denota um produto adequado entre \mathbf{A} e $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, definido em função das ordens dos tensores envolvidos. A inequação 2.104 implica na lei elástica geral sob a forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} , \quad (2.106)$$

tal que requer uma dissipação não negativa,

$$\Upsilon^p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \geq 0 , \quad (2.107)$$

onde a função Υ^p é definida por

$$\Upsilon^p(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \equiv \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{A} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.108)$$

e é a chamada função de dissipação plástica.

Para um material homogêneo com comportamento linear elástico isotrópico a contribuição da energia livre é dada por

$$\bar{\rho}\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.109a)$$

$$= G \boldsymbol{\varepsilon}_d^e : \boldsymbol{\varepsilon}_d^e + \frac{1}{2}K (\boldsymbol{\varepsilon}_v^e)^2, \quad (2.109b)$$

onde \mathbf{D}^e é o tensor elástico isotrópico padrão e G e K são os módulos de cisalhamento e volumétrico respectivamente. O tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_d^e$ é parcela desviadora do tensor de deformação elástico e o tensor $\boldsymbol{\varepsilon}_v^e$ é a parcela volumétrica. Portanto,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.110a)$$

$$= 2G\boldsymbol{\varepsilon}_d^e + K\boldsymbol{\varepsilon}_v^e\mathbf{I}. \quad (2.110b)$$

2.6.3 Critério e Superfície de Escoamento

O fluxo plástico ocorre quando o estado de tensão atinge certos valores críticos. Este princípio pode ser representado por uma função de escoamento que é não negativa na ocorrência de deformações elásticas e é zero na iminência do fluxo plástico. Portanto, o fluxo plástico pode ocorrer quando

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0, \quad (2.111)$$

em que o campo escalar Φ é função do tensor de tensões ($\boldsymbol{\sigma}$) e das forças termodinâmicas associadas (\mathbf{A}).

A função de escoamento, que define o domínio elástico como o conjunto de tensões para que o escoamento plástico não seja possível, é dada por:

$$\mathcal{E} = \{ \boldsymbol{\sigma} \mid \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) < 0 \}. \quad (2.112)$$

Qualquer estado de tensão no domínio elástico ou na região limite de $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0$ é denominado plasticamente admissível. Portanto, o conjunto das tensões plasticamente admissíveis (ou domínio plasticamente admissível) é dado por:

$$\bar{\mathcal{E}} = \{ \boldsymbol{\sigma} \mid \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) \leq 0 \} . \quad (2.113)$$

O escoamento pode ocorrer no contorno de uma superfície em que $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0$. Desta forma, uma região em que o escoamento inicia-se é limitado por uma hipersuperfície no espaço de tensões. Esta superfície é denominada superfície de escoamento e é definida por:

$$\mathcal{Y} = \{ \boldsymbol{\sigma} \mid \Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) = 0 \} . \quad (2.114)$$

2.6.4 Regra do Fluxo Plástico e Lei de Endurecimento

A completa caracterização do modelo de plasticidade geral requer a definição de uma lei de evolução para as variáveis internas (por exemplo as variáveis associadas aos fenômenos dissipativos). Portanto, as variáveis internas são o tensor de deformações plásticas e o conjunto de variáveis inelásticas, denotado por $\boldsymbol{\alpha}$, e a regra de fluxo. A lei de endurecimento pode ser postulada por

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} \quad (2.115)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \dot{\gamma} \mathbf{H} , \quad (2.116)$$

onde $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ é o tensor de fluxo e a função $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A})$ é o módulo elasto-plástico generalizado que define a evolução das variáveis relativas ao endurecimento. A evolução das equações são complementadas pelas condições de carregamento e descarregamento (detalhadas no capítulo 3), dadas por

$$\Phi \leq 0 , \quad \dot{\gamma} \geq 0 , \quad \text{e} \quad \Phi \dot{\gamma} = 0 , \quad (2.117)$$

que definem quando as deformações plásticas e as variáveis internas podem ocorrer.

A consideração do endurecimento e amolecimento do material é uma generalização do comportamento elastoplástico. A figura 2.18 ilustra o caso unidimensional para o endurecimento, o amolecimento e a plasticidade perfeita, que ditam a evolução das variáveis internas do modelo de plasticidade.

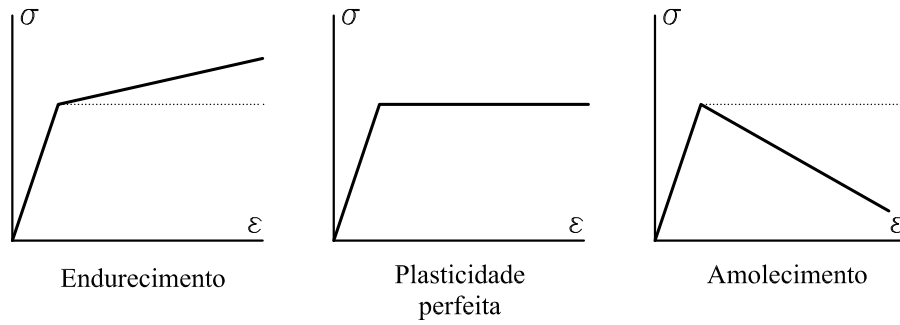


Figura 2.18: Possibilidades da evolução das variáveis internas.

2.6.5 Obtenção da Regra de Fluxo Partindo de um Potencial de Fluxo

Na formulação multidimensional de modelos de plasticidade é conveniente definir uma regra de fluxo (e possivelmente a lei de endurecimento) a partir de um potencial plástico (ou potencial de fluxo). Portanto, parte-se da ideia da existência de um potencial de fluxo com forma geral

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}) , \quad (2.118)$$

a partir do qual o vetor de fluxo, \mathbf{N} , é obtido como

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} . \quad (2.119)$$

Se a lei de endurecimento também for obtida deste potencial, tem-se

$$\mathbf{H} \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{A}} . \quad (2.120)$$

2.6.6 Regra de Fluxo Associada

Modelos associados são aqueles modelos em que a função de escoamento, Φ , é o próprio potencial de fluxo, ou seja,

$$\Psi = \Phi . \quad (2.121)$$

Nestes casos, a evolução das equações para as deformações plásticas e as variáveis inelásticas são dadas por

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.122)$$

e

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^p = -\dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}} . \quad (2.123)$$

A associatividade implica que a taxa de deformação plástica é um vetor normal à superfície de escoamento no espaço de tensões. No caso generalizado de uma superfície de escoamento não suave, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ é um subgradiente de Φ (ex.: $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \partial_\sigma \Phi$). Em modelos não associados o vetor taxa de deformações plásticas geralmente não é normal à superfície de escoamento.

2.6.7 Multiplicador Plástico

Para a determinação do multiplicador plástico $\dot{\gamma}$ considera-se uma equação adicional de complementaridade dada por

$$\dot{\Phi} \dot{\gamma} = 0 , \quad (2.124)$$

que implica na condição de consistência $\dot{\Phi} = 0$ sob escoamento plástico (quando $\dot{\gamma} \neq 0$). Diferenciando a função de escoamento, tem-se

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}} * \dot{\mathbf{A}} . \quad (2.125)$$

Levando em conta a decomposição aditiva do tensor de deformação, a lei elástica e a regra do fluxo plástico, pode-se escrever

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \mathbf{D}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{N}) . \quad (2.126)$$

Utilizando a definição de \mathbf{A} em termos da energia potencial livre e a lei de evolução, a derivada dada pela equação 2.125 pode ser reescrita como

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}} * \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} * \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (2.127a)$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{D}^e : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{N}) + \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{A}} * \frac{\partial^2 \psi^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}^2} * \mathbf{H} . \quad (2.127b)$$

Por fim, a expressão 2.127, juntamente com a condição de consistência, leva a uma fórmula para o multiplicador plástico:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^e : \mathbf{N} - \partial\Phi/\partial\mathbf{A} * \partial^2\psi^p/\partial\boldsymbol{\alpha}^2 * \mathbf{H}} . \quad (2.128)$$

2.6.8 Operador Tangente Elastoplástico

No regime elástico as equações constitutivas para as variações das tensões são dadas por

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} . \quad (2.129)$$

Na ocorrência de fluxo plástico, a relação de variação correspondente pode ser obtida substituindo a equação 2.128 na equação 2.126. Desta forma, tem-se

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (2.130)$$

sendo \mathbf{D}^{ep} o operador tangente elastoplástico, dado por

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^e - \frac{(\mathbf{D}^e : \mathbf{N}) \otimes (\mathbf{D}^e : \partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma})}{\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^e : \mathbf{N} - \partial\Phi/\partial\mathbf{A} * \partial^2\psi^p/\partial\boldsymbol{\alpha}^2 * \mathbf{H}} . \quad (2.131)$$

Na obtenção do operador tangente elastoplástico faz-se o uso da simetria do tensor elástico, \mathbf{D}^e . Portanto,

$$\partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^e : \partial\Phi/\partial\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} . \quad (2.132)$$

Em plasticidade computacional \mathbf{D}^{ep} é frequentemente referido como operador tangente elastoplástico numericamente consistente.

Cada um destes estudos, com seus respectivos objetivos, formulam o problema de forma diferente com suas particularidades, hipóteses e notações sem uma legítima preocupação em unificar as teorias em um único formato. Entretanto, analisando as principais referências, verifica-se a tendência de unificação dos modelos em uma única estrutura teórica capaz de tratar de forma genérica a modelagem constitutiva. Esta é a principal motivação do trabalho de Carol et al. (1994) (Rizzi et al., 1995; Carol, 1999; Carol et al., 2001b,c) que, visando criar uma teoria unificada, desenvolveram

uma estrutura para modelos constitutivos baseada na degradação elástica da rigidez utilizando os conceitos de superfícies de carregamento e de degradação, e dos seus respectivos gradientes. A estrutura teórica concebida parece contemplar diversos modelos constitutivos.

Capítulo 3

Estrutura Teórica Unificada para Modelos Constitutivos

Conforme Carol et al. (1994), em modelos de degradação elástica, o comportamento do material é tal que, após um processo de descarregamento completo, a rigidez é deteriorada permanentemente e não há deformações residuais. Assim, o descarregamento é dito secante (Figura 3.1-a). Em modelos elastoplásticos, a rigidez não é deteriorada ao longo do processo e o descarregamento é tal que gera deformações residuais. Neste caso, o descarregamento é dito elástico (Figura 3.1-b). As duas aproximações geram bons resultados e são amplamente usadas. Entretanto, observa-se experimentalmente uma composição dos dois comportamentos. Assim, em materiais reais, ocorre uma degradação da rigidez inicial, não tão acentuada quanto as previstas pelos modelos de degradação elástica, e também são verificadas deformações permanentes (Figura 3.1-c).

Há duas diferenças básicas entre estes modelos e os de plasticidade clássica. Na degradação elástica a rigidez (ou flexibilidade) assume valores que variam durante o processo de carregamento ao passo que na plasticidade a rigidez (ou flexibilidade) é a elástica linear. Também nos modelos de degradação elásticas, os processos de descarregamento ou recarregamento ocorrem com valores constantes da rigidez secante,

sendo esta associada ao valor da variável histórica corrente (neste caso entende-se por variável histórica o maior valor de deformação alcançado pelo material no decorrer do processo de carregamento), podendo o material descarregar-se totalmente, recuperando toda a deformação, entretanto, com dano permanente irreversível (Figura 3.2). Ao passo que modelos elastoplásticos, que assumem a rigidez elástica em descarregamento ou recarregamento, apresentam deformações permanentes.

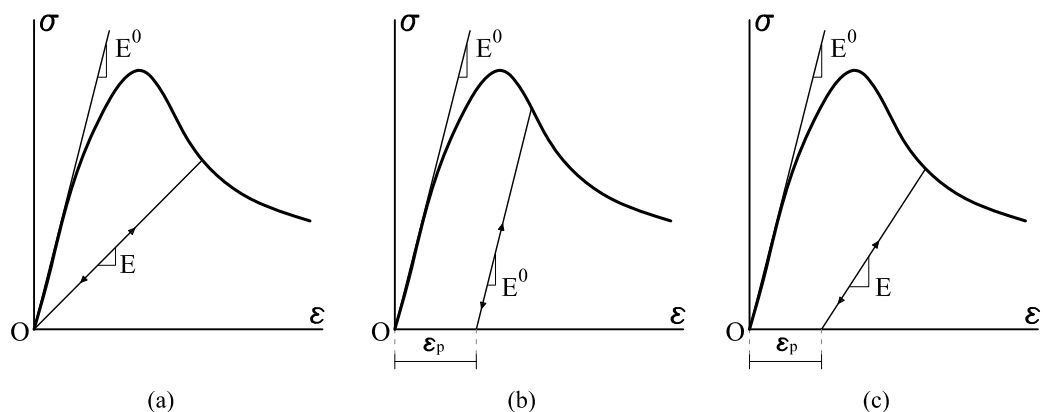


Figura 3.1: Comportamento típico de modelos materiais:(a) Material com degradação elástica;(b) Material elastoplástico;(c) Comportamento observado experimentalmente.

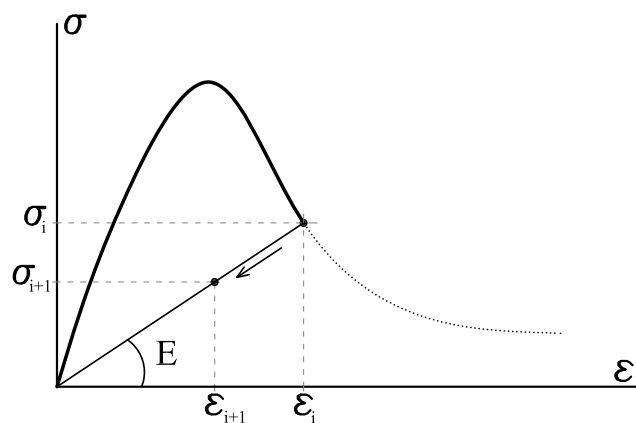


Figura 3.2: Descarregamento secante com dano irreversível.

O fato da rigidez permanecer constante durante o processo de descarregamento e recarregamento resulta na não consideração dos efeitos de fechamento e reabertura de microfissuras no meio, o que não corresponde a um comportamento realista do material, como ilustrado na figura 3.1c. Muitos trabalhos já propuseram formas

diferentes de tratar a questão, como por exemplo Matallah e La Borderie (2009), Desmorat et al. (2007b), Desmorat e Cantournet (2009). A diminuição da rigidez é em decorrência da formação e propagação de trincas e microfissuras. O processo de carregamento, descarregamento e recarregamento é de muita importância no decorrer da análise não linear, maiores detalhes são apresentados no apêndice A.

As características dos modelos elastoplásticos e de degradação elástica devem ser compreendidas individualmente, explorando as potencialidades das duas vertentes.

Após o desenvolvimento de um grande número de modelos, segundo ambas as vertentes, observa-se tentativas de unificação, para que as várias descrições do comportamento do material sejam representadas em uma mesma estrutura teórica.

3.1 Tentativas de Unificação

Muitas vertentes da modelagem constitutiva são fundamentadas em estruturas teóricas capazes de representar as principais características do meio material, captando os comportamentos observados experimentalmente e propiciando um modelo mais realista.

A mecânica da fratura, a mecânica do dano contínuo e a teoria da plasticidade são as principais estruturas teóricas usadas para a formulação constitutiva em geral, sendo, muitas vezes, usadas em conjunto para maior fidelidade de representação.

Uma base teórica comum a estes modelos é a termodinâmica que, em sua generalidade, descreve os processos energéticos envolvidos no comportamento do material. Lemaitre e Desmorat (2005) afirmam que, partindo-se de três passos básicos, é possível descrever o comportamento dos diferentes materiais por meio dos processos termodinâmicos irreversíveis envolvidos. Para tanto deve-se definir:

1. as variáveis de estado, cujos valores correntes caracterizam o mecanismo termodinâmico correspondente;
2. o estado potencial a partir do qual pode-se obter as leis de estado e a definição das variáveis internas ao processo;

3. o potencial de dissipação e por conseguinte as leis de evolução das variáveis de estado associadas com os mecanismos dissipativos.

Maiores detalhes do uso das equações da termodinâmica, como base para a modelagem constitutiva, podem ser vistas em Neto et al. (2006).

Embora geral, a termodinâmica é pouco prática no que tange a implementação computacional de modelos em um contexto unificado. Vários autores desenvolveram propostas teóricas para tratar de forma geral a formulação constitutiva. Em muitos trabalhos, a consistência energética é apresentada. Em outros, o foco principal é estabelecer regras gerais diretamente aplicadas à modelagem computacional.

Uma das primeiras propostas de abordagem unificada é apresentada por de Borst (1987) que ressalta as propriedades dos modelos de fissuração distribuída de modo a generalizar os conceitos de sistema local e global, considerando o critério de surgimento de trincas no sistema local, para em seguida correlacioná-los à plasticidade.

Resumindo uma grande quantidade de trabalhos devotados à modelagem da degradação dos meios materiais, Carol et al. (1994) propõem uma unificação teórica de modelos de degradação elástica baseados em uma única superfície de carregamento. Neste trabalho os autores desenvolvem um arcabouço teórico genérico compreendendo uma grande parte dos modelos de dano em analogia com os conceitos e notações da teoria da plasticidade clássica. As equações constitutivas são postas de forma lógica e estruturada, indicando uma unicidade na formulação de modelos constitutivos, sejam estes baseados em tensão, deformação, forças termodinâmicas conjugadas ou dano. A proposta é ilustrada somente para modelos isotrópicos com uma única superfície de carregamento. Os autores aplicam a estrutura teórica por eles proposto em trabalhos subsequentes (Rizzi et al. (1995), Rizzi (1995), Carol (1996), Carol e Willam (1996), Carol (1999), Hansen et al. (2001)), que visam o estudo de problemas específicos. Nestes trabalhos, o prometido potencial da estrutura teórica não é explorado e as limitações não são superadas. Dentre estes trabalhos destaca-se o

de Rizzi (1995), que, embora tenha abordado uma formulação aplicada a materiais multi dissipativos, baseado na teoria da plasticidade com múltiplas superfícies, apresentada por Simo e Hughes (1988), não há uma preocupação em generalizar a formulação visando uma estrutura teórica/computacional aplicada à modelagem constitutiva.

Com uma abordagem mais prática, de Borst e Gutiérrez (1999), partindo da derivação da relação total da matriz de rigidez e empregando diferentes propostas de deformações equivalentes, generalizam modelos de dano isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos. Anos mais tarde, de Borst (2002) faz uma breve revisão de modelos para meios parcialmente frágeis baseados na mecânica da fratura, usando, para tanto, a proposta de seu trabalho anterior (de Borst e Gutiérrez, 1999). Mesmo generalizando a derivação das equações e usando uma única notação, a falta de abstração limita a proposta a modelos de dano escalar.

Armero e Oller (2000a) apresentam uma estrutura teórica para o acoplamento da mecânica do dano com plasticidade. A formulação apresentada baseia-se em tensão e indica uma forma generalizada para algoritmos de retorno. Na continuação deste trabalho (Armero e Oller, 2000b), são apresentadas aplicações das ideias propostas na primeira parte. Modelos de plasticidade com dano, empregados à metais com efeitos de abertura e fechamento de trincas, são explorados. Os próprios autores indicam a limitação da proposta à modelos de dano acoplados à plasticidade, ressaltando que modelos de dano distribuído, como os modelos clássicos de fissuração, não são contemplados pela proposta.

Voltando ao tema de 1994, Carol et al. (2001b) desenvolvem as equações do trabalho anterior com tensores de dano de segunda ordem. Os tensores de rigidez e flexibilidade bem como suas respectivas derivadas são apresentados. Na segunda parte do trabalho (Carol et al., 2001c) um novo modelo de dano ortotrópico é demonstrado. O modelo é ilustrado apenas com soluções analíticas de alguns poucos exemplos teóricos simples. O trabalho, portanto, carece de uma abordagem

numérica-computacional aplicada a métodos consagrados, como o método dos elementos finitos. Além disso, a impossibilidade de uso de múltiplas superfícies de carregamento não é superada.

Recentemente, muitos autores se beneficiaram das propostas de generalização e unificação, dadas nos trabalhos Carol et al. (1994, 2001b,c). Sem preocupação de superar as limitações da proposta, estes autores desenvolveram, seus próprios modelos constitutivos e propuseram diversas aplicações da estrutura unificada. Podem ser citados os trabalhos de Wu et al. (2006), Wu e Li (2006a,b), Wu (2007a,b), Pröchtel e Häußler-Combe (2008) e Matallah e La Borderie (2009).

Este trabalho apresenta uma expansão da estrutura teórica proposta por Carol et al. (1994). A proposta é capaz de contemplar vários modelos constitutivos — elastoplásticos ou de degradação elástica; isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico —, formulados com uma ou várias funções de carregamento.

Ressalta-se que a expressão função de carregamento é aqui empregada para denominar um critério de evolução do processo de degradação do material.

3.2 Proposta de Unificação Teórica para Modelos Constitutivos com Múltiplas Funções de Carregamento

A teoria clássica da plasticidade apresenta uma formulação amplamente conhecida (Kachanov (1971), Chen e Han (1988), Lubliner (1990)) e é empregada por muitos autores na concepção de diversos modelos da mecânica do sólidos computacional (Simo e Hughes (1998), Neto et al. (2006), Owen e Hinton (1980), Dunne e Petrinic (2005)). Assim como fizeram Carol et al. (1994), Carol et al. (2001b) e Carol et al. (2001c) o arcabouço teórico e a notação da teoria da plasticidade formam a base da expansão que aqui se apresenta.

A principal característica dos modelos baseados em degradação elástica é a existência de uma relação total entre as tensões e deformações. Logo,

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (3.1)$$

e

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl} , \quad (3.2)$$

sendo E_{ijkl} e C_{ijkl} as componentes dos tensores de rigidez e flexibilidade secantes, respectivamente. A forma diferencial das relações acima são dadas por

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (3.3)$$

e

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \dot{C}_{ijkl}\sigma_{kl} . \quad (3.4)$$

A figura 3.3 apresenta as principais variáveis envolvidas no processo incremental a partir do diagrama tensão-deformação para o caso unidimensional.

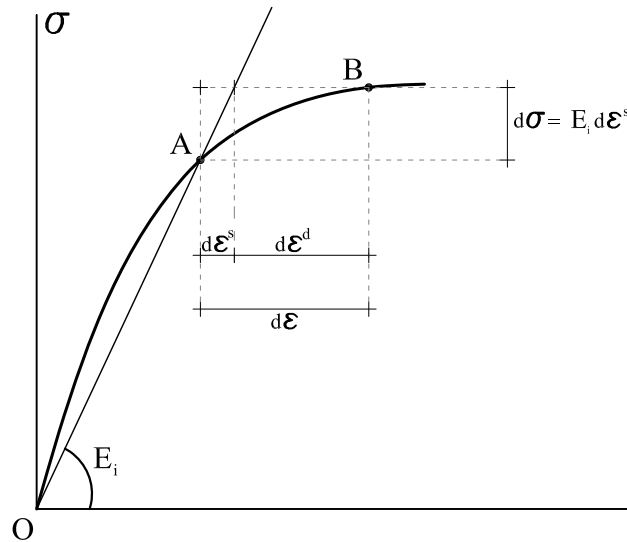


Figura 3.3: Decomposição dos incrementos de deformações em modelos de degradação elástica.

Pode-se observar que os incrementos de deformações e tensões totais são dados por $d\varepsilon$ e $d\sigma$, sendo a deformação decomposta em uma parcela associada à rigidez secante corrente, denotada por $d\varepsilon^s$, e uma parcela inelástica, devido à degradação da rigidez, denotada por $d\varepsilon^d$. A figura 3.4 ilustra que, na degradação elástica, em caso de descarregamento, a deformação recuperada $d\varepsilon^r$ é diferente de $d\varepsilon^s$, pois o descarregamento é calculado com a rigidez secante corrente (E_{i+1}) e não com a usada no cálculo de $d\varepsilon^s$ (E_i).

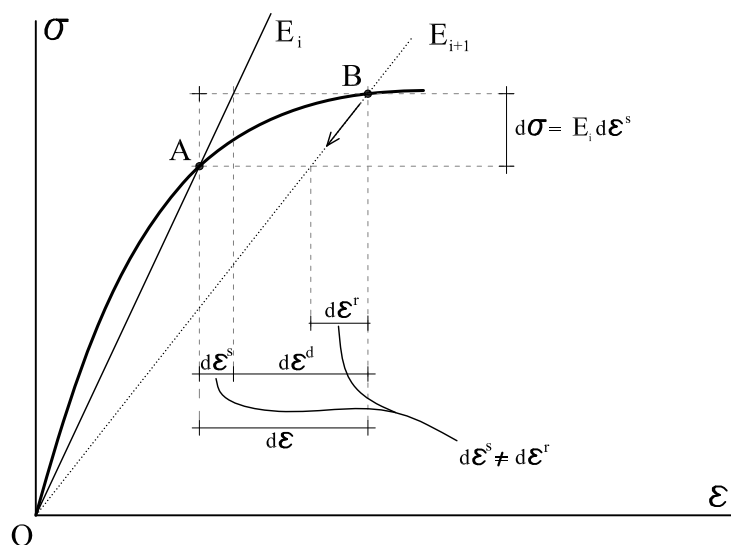


Figura 3.4: Deformação recuperada em modelos de degradação elástica.

É válido fazer uma comparação entre o processo incremental da degradação elástica com aquele da plasticidade clássica, visando esclarecer as diferenças entre os modelos e as analogias usadas na definição das equações. Na figura 3.5, observa-se que, na plasticidade clássica (Figura 3.5b), a deformação elástica (associado ao tensor de rigidez elástico inicial, E^0) gera o incremento de tensão e que, na degradação elástica (Figura 3.5a), este incremento é devido à deformação $d\varepsilon^s$ (associado ao tensor de rigidez secante corrente, E_i).

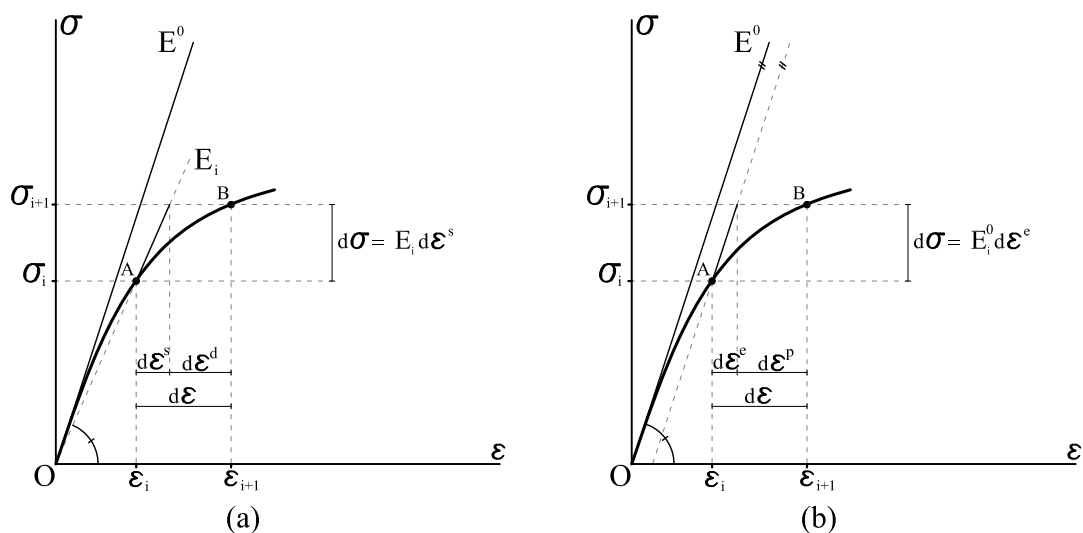


Figura 3.5: Incremento de deformações. (a) Degradação elástica; (b) Plasticidade.

Como mostra a figura 3.6, os incrementos de tensão ($d\sigma^d$ e $d\sigma^p$), associados, respectivamente, à deformação devido à degradação ($d\varepsilon^d$) e à deformação plástica ($d\varepsilon^p$), se calculados, resultarão em parcelas adicionais aos incrementos de tensão ($d\sigma$).

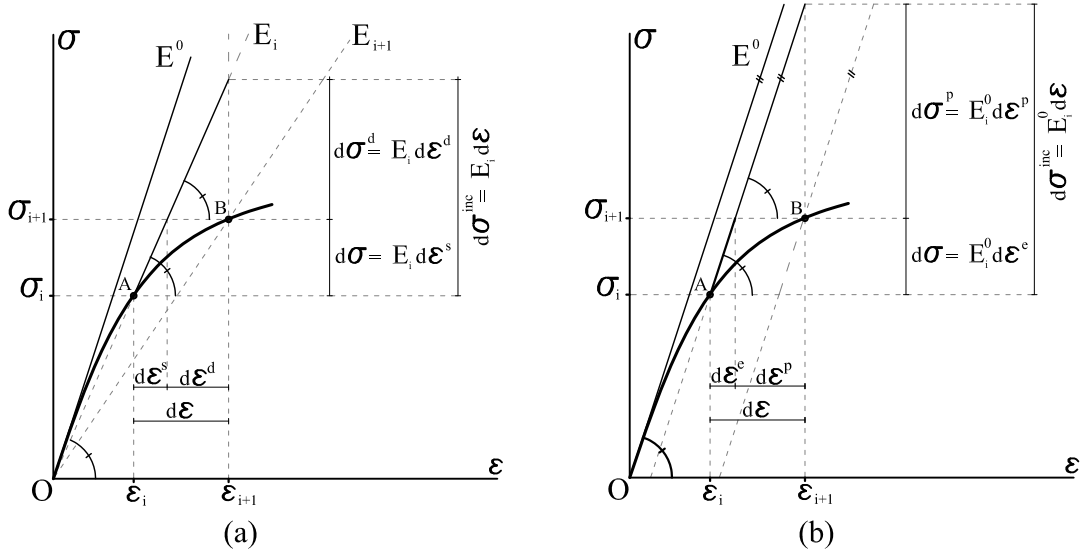


Figura 3.6: Incremento de tensão associados às deformações de degradação e deformações plásticas. (a) Degradação elástica; (b) Plasticidade.

A figura 3.6 também mostra que o incremento de tensão $d\sigma^{inc}$, associado ao incremento de deformação ($d\varepsilon$), é subtraído da tensão $d\sigma^p$, na plasticidade, e $d\sigma^d$, na degradação elástica, resultando no incremento de tensão $d\sigma$.

Sob condições de descarregamento, também verificam-se diferenças entre os modelos. Na plasticidade, a rigidez elástica governa o processo de descarregamento, ao passo que a rigidez secante corrente é quem rege este processo, em modelos de degradação elástica. Nota-se que em modelos de degradação elástica, devido à degradação da rigidez, os valores recuperados são maiores que em modelos de plasticidade.

A parcela $d\varepsilon^s$ é definida como sendo o incremento de deformação capaz de gerar o incremento de tensão $d\sigma$, conforme à rigidez secante corrente. A parcela inelástica é conhecida como incremento de deformações de degradação $d\varepsilon^d$, definida como $d\varepsilon^d = d\varepsilon - d\varepsilon^s$, e pode ser vista como um acréscimo de deformação devido à degradação do material.

3.2.1 Formulação Baseada em Tensão

Os gráficos das figuras 3.5a e 3.6a apresentam a forma incremental da degradação elásticas, logo, pode-se escrever as equações relativas ao processo incremental. Portanto, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij} &= \dot{\sigma}_{ij}^{inc} - \dot{\sigma}_{ij}^d \\ \dot{\sigma}_{ij} &= E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} - E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}^d \\ \dot{\sigma}_{ij} &= E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^d)\end{aligned}\quad (3.5)$$

com

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \dot{\lambda}_m m_{mkl} , \quad (3.6)$$

onde E_{ijkl} são as componentes do tensor de rigidez secante, $\dot{\lambda}_m$ são as componentes do vetor de multiplicadores inelásticos, dando a magnitude do processo de degradação, e m_{mkl} são as componentes do tensor das direções da degradação.

Considerando que, durante o processo de carregamento com degradação, o estado de tensão ou deformação está contido no domínio da respectiva função de carregamento, dada por $F_n(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p})$, tem-se que a forma linearizada da condição de consistência para múltiplas funções de carregamento se escreve na forma

$$\dot{F}_n = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} \right|_p \dot{\sigma}_{ij} + \left. \frac{\partial F_n}{\partial p_q} \right|_\sigma \dot{p}_q = 0 , \quad (3.7)$$

onde p_q são grandezas internas que controlam o processo de degradação. Estas grandezas internas são funções das deformações de degradação ε_{kl}^d e sua variação (\dot{p}_q) pode ser escrita na forma:

$$\dot{p}_q = \frac{\partial p_q}{\partial \varepsilon_{kl}^d} \dot{\varepsilon}_{kl}^d . \quad (3.8)$$

Da equação 3.7, pode-se definir:

$$n_{nij} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} \right|_p \quad (3.9)$$

e

$$H_{nm} = - \left. \frac{\partial F_n}{\partial \lambda_m} \right|_{\sigma} = - \left. \frac{\partial F_n}{\partial p_q} \right|_{\sigma} \frac{\partial p_q}{\partial \varepsilon_{kl}^d} m_{mkl} , \quad (3.10)$$

reescrevendo a condição de consistência na forma

$$n_{nij} \dot{\sigma}_{ij} - H_{nm} \dot{\lambda}_m = 0 . \quad (3.11)$$

Nas equações 3.6, 3.9 e 3.10 identificam-se os tensores \mathbf{m} , \mathbf{n} e \mathbf{H} que indicam as direções da propagação das deformações de degradação, as direções das funções de carregamento e os módulos pós-crítico (ou módulos de “*Hardening-Softening*”) do material, respectivamente. Portanto, definidas as direções e combinando as equações 3.5, 3.6 e 3.8, obtém-se o formato do multiplicador inelástico. Substituindo 3.6 em 3.5, tem-se

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda}_m m_{mkl}) . \quad (3.12)$$

Substituindo agora 3.12 em 3.11, resulta em

$$n_{nij} E_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda}_m m_{mkl}) - H_{nm} \dot{\lambda}_m = 0 . \quad (3.13)$$

Desenvolvendo a equação 3.13, tem-se

$$\begin{aligned} n_{nij} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - n_{nij} E_{ijkl} \dot{\lambda}_m m_{mkl} - H_{nm} \dot{\lambda}_m &= 0 \\ n_{nij} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} - (n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl} - H_{nm}) \dot{\lambda}_m &= 0 . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Isolando $\dot{\lambda}_m$, na equação 3.14, obtém-se a expressão para o multiplicador inelástico:

$$\dot{\lambda}_m = \frac{n_{nij} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{H_{nm} + n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl}} . \quad (3.15)$$

Substituindo a equação 3.15 na equação 3.6, tem-se

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \frac{n_{nij} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{H_{nm} + n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl}} m_{mkl} . \quad (3.16)$$

Substituindo este resultado na equação 3.5, obtém-se

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{n_{nij} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{H_{nm} + n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl}} m_{mkl} \right) \quad (3.17)$$

que, após algumas multiplicações, pode ser escrita na forma

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl} - \frac{E_{ijab}m_{mab}n_{ncd}E_{cdkl}}{H_{nm} + n_{npq}E_{pqrs}m_{mrs}}\dot{\epsilon}_{kl} , \quad (3.18)$$

ou na forma

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} , \quad (3.19)$$

onde

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} - \frac{E_{ijab}m_{mab}n_{ncd}E_{cdkl}}{H_{nm} + n_{npq}E_{pqrs}m_{mrs}} \quad (3.20)$$

é o operador tangente em termos da rigidez.

Isolando-se o multiplicador inelástico na equação 3.11, tem-se

$$\dot{\lambda}_m = \frac{1}{H_{nm}} n_{nij} \dot{\sigma}_{ij} . \quad (3.21)$$

Substituindo a equação 3.21 em 3.6, tem-se

$$\dot{\epsilon}_{kl}^d = \frac{1}{H_{nm}} n_{nij} \dot{\sigma}_{ij} m_{mkl} . \quad (3.22)$$

Substituindo 3.22 em 3.5 e isolando-se $\dot{\epsilon}$, tem-se

$$\dot{\epsilon}_{kl} = \left(C_{ijkl} + \frac{n_{nij} m_{mkl}}{H_{nm}} \right) \dot{\sigma}_{ij} , \quad (3.23)$$

sendo

$$\dot{\epsilon}_{kl} = C_{ijkl}^t \dot{\sigma}_{ij} , \quad (3.24)$$

onde

$$C_{ijkl}^t = C_{ijkl} + \frac{1}{H_{nm}} n_{nij} m_{mkl} \quad (3.25)$$

é o operador tangente em termos do tensor de flexibilidade.

3.2.2 Formulação Baseada em Deformação

Na formulação baseada em deformação, a função de carregamento é escrita em termos das deformações e das variáveis internas do modelo, dada por $F_n(\boldsymbol{\epsilon}, \bar{\mathbf{p}})$, onde

\bar{p} é o conjunto de variáveis internas do modelo definidas no domínio das deformações.

Da figura 3.7, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^{inc} - \dot{\varepsilon}_{ij}^d \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} - C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}^d \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= C_{ijkl}(\dot{\sigma}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl}^d)\end{aligned}\quad (3.26)$$

com

$$\dot{\sigma}_{kl}^d = \dot{\lambda}_m \bar{m}_{mkl} . \quad (3.27)$$

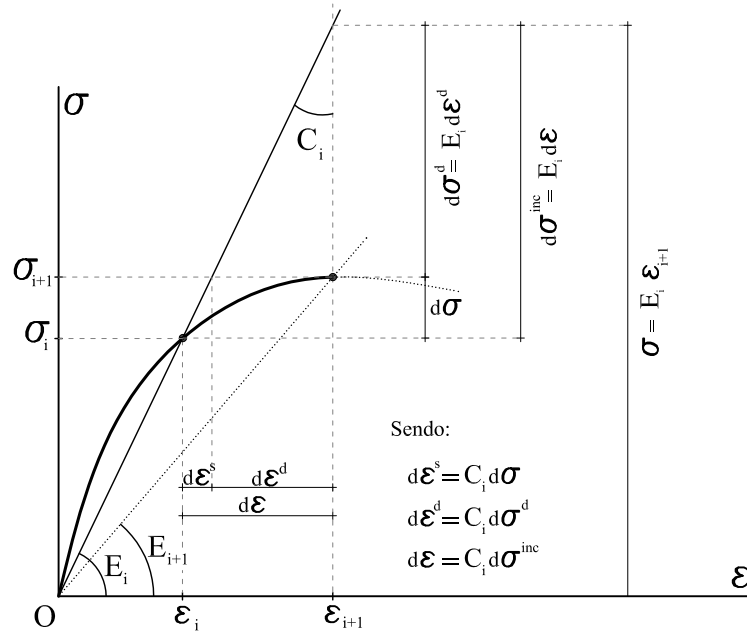


Figura 3.7: Incremento de deformação associados à variação da flexibilidade.

Da condição de consistência, em sua forma linearizada, tem-se

$$\dot{F}_n = \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{ij}} \Big|_{\bar{p}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial F_n}{\partial \bar{p}_q} \Big|_{\varepsilon} \dot{\bar{p}}_q = 0 . \quad (3.28)$$

Por definição

$$\bar{n}_{nij} = \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{ij}} \Big|_{\bar{p}} \quad (3.29)$$

e

$$\bar{H}_{nm} = - \frac{\partial F_n}{\partial \lambda_m} \Big|_{\varepsilon} = - \frac{\partial F_n}{\partial \bar{p}_q} \Big|_{\varepsilon} \frac{\partial \bar{p}_q}{\partial \varepsilon_{kl}^d} \bar{m}_{mkl} . \quad (3.30)$$

Reescrevendo a condição de consistência, tem-se

$$\bar{n}_{nij}\dot{\epsilon}_{ij} - \bar{H}_{nm}\dot{\lambda}_m = 0 . \quad (3.31)$$

Substituindo a equação 3.27 em 3.26, tem-se

$$\dot{\epsilon}_{ij} = C_{ijkl}(\dot{\sigma}_{kl} - \dot{\lambda}_m \bar{m}_{mkl}) . \quad (3.32)$$

Substituindo agora 3.32 em 3.31, resulta em

$$\bar{n}_{nij}C_{ijkl}(\dot{\sigma}_{kl} - \dot{\lambda}_m \bar{m}_{mkl}) - \bar{H}_{nm}\dot{\lambda}_m = 0 . \quad (3.33)$$

Desenvolvendo a equação 3.33, tem-se

$$\begin{aligned} \bar{n}_{nij}C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} - \bar{n}_{nij}C_{ijkl}\dot{\lambda}_m \bar{m}_{mkl} - \bar{H}_{nm}\dot{\lambda}_m &= 0 \\ \bar{n}_{nij}C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} - (\bar{n}_{nij}C_{ijkl}\bar{m}_{mkl} - \bar{H}_{nm})\dot{\lambda}_m &= 0 . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Isolando $\dot{\lambda}_m$ na equação 3.34, obtém-se

$$\dot{\lambda}_m = \frac{\bar{n}_{ncd}C_{cdkl}\dot{\sigma}_{kl}}{\bar{H}_{nm} + \bar{n}_{npq}C_{pqrs}\bar{m}_{mrs}} . \quad (3.35)$$

Substituindo a equação 3.35 na equação 3.27, tem-se

$$\dot{\sigma}_{kl}^d = \frac{\bar{n}_{ncd}C_{cdkl}\dot{\sigma}_{kl}}{\bar{H}_{nm} + \bar{n}_{npq}C_{pqrs}\bar{m}_{mrs}} \bar{m}_{mkl} . \quad (3.36)$$

Substituindo este resultado na equação 3.26, obtém-se

$$\dot{\epsilon}_{ij} = C_{ijkl} \left(\dot{\sigma}_{kl} - \frac{\bar{n}_{ncd}C_{cdkl}\dot{\sigma}_{kl}}{\bar{H}_{nm} + \bar{n}_{npq}C_{pqrs}\bar{m}_{mrs}} \bar{m}_{mkl} \right) \quad (3.37)$$

que, após algumas multiplicações, pode ser escrita na forma

$$\dot{\epsilon}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} - \frac{C_{ijab}\bar{m}_{mab}\bar{n}_{ncd}C_{cdkl}}{\bar{H}_{nm} + \bar{n}_{npq}C_{pqrs}\bar{m}_{mrs}}\dot{\sigma}_{kl} , \quad (3.38)$$

ou na forma

$$\dot{\epsilon}_{ij} = C_{ijkl}^t \dot{\sigma}_{kl} , \quad (3.39)$$

onde

$$C_{ijkl}^t = C_{ijkl} - \frac{C_{ijab}\bar{m}_{mab}\bar{n}_{ncd}C_{cdkl}}{\bar{H}_{nm} + \bar{n}_{npq}C_{pqrs}\bar{m}_{mrs}} \quad (3.40)$$

é o operador tangente.

Existem duas possibilidades para representação do operador tangente: uma pelo tensor de flexibilidade e outra pelo tensor de rigidez. Devido às vantagens no controle do processo inelástico, em especial do “*softening*”, as expressões em termos do tensor de rigidez serão obtidas. A partir da equação 3.31 obtém-se o multiplicador inelástico

$$\dot{\lambda}_m = \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{nij} \dot{\epsilon}_{ij} . \quad (3.41)$$

Substituindo a equação 3.41 em 3.27, tem-se

$$\dot{\sigma}_{kl}^d = \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{nij} \dot{\epsilon}_{ij} \bar{m}_{mkl} . \quad (3.42)$$

Substituindo a equação 3.42 em 3.26 e isolando o termo em $\dot{\sigma}_{kl}$, tem-se

$$C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} = \dot{\epsilon}_{ij} + C_{ijkl} \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{nij} \dot{\epsilon}_{ij} \bar{m}_{mkl} . \quad (3.43)$$

Trocando os índices ij por pq em 3.43, tem-se

$$C_{pqkl} \dot{\sigma}_{kl} = \dot{\epsilon}_{pq} + C_{pqkl} \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{npq} \dot{\epsilon}_{pq} \bar{m}_{mkl} . \quad (3.44)$$

Multiplicando 3.44 por E_{ijpq} , tem-se

$$E_{ijpq} C_{pqkl} \dot{\sigma}_{kl} = E_{ijpq} \dot{\epsilon}_{pq} + E_{ijpq} C_{pqkl} \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{npq} \dot{\epsilon}_{pq} \bar{m}_{mkl} \quad (3.45)$$

ou

$$I_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} = E_{ijpq} \dot{\epsilon}_{pq} + I_{ijkl} \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{npq} \dot{\epsilon}_{pq} \bar{m}_{mkl} , \quad (3.46)$$

onde I_{ijkl} é o tensor de identidade de quarta ordem. Isolando $\dot{\epsilon}_{pq}$ em 3.46, tem-se

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(E_{ijpq} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{npq} \bar{m}_{mij} \right) \dot{\epsilon}_{pq} . \quad (3.47)$$

Trocando os índices pq por kl , tem-se

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl} \right) \dot{\epsilon}_{kl} . \quad (3.48)$$

A equação pode ser reescrita na forma

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} , \quad (3.49)$$

onde

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl} \quad (3.50)$$

é o operador tangente.

As formulações baseadas em tensão e deformação são ditas formulações duais. As funções de carregamento escritas em tensão ou deformação geram expressões matemáticas com termos diferentes, entretanto, para um mesmo estado de tensão ou o correspondente estado de deformação, apresentam o mesmo resultado. Portanto, as componentes tensoriais dos gradientes das formulações baseadas em tensão e deformação podem se relacionar de modo que um modelo baseado em tensão possa ser escrito em termos de deformação e vice versa.

Portanto, pode-se relacionar os tensores \mathbf{n} e $\bar{\mathbf{n}}$ reescrevendo a definição 3.9 na forma

$$n_{nij} = \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}}, \quad (3.51)$$

sendo

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = C_{ijkl}. \quad (3.52)$$

Substituindo a equação 3.29 e a equação 3.52 na equação 3.51, tem-se

$$n_{nij} = C_{ijkl} \bar{n}_{nkl}. \quad (3.53)$$

Analogamente, reescrevendo a definição 3.29 na forma

$$\bar{n}_{nij} = \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}}, \quad (3.54)$$

sendo

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = E_{ijkl}. \quad (3.55)$$

Substituindo a equação 3.9 e a equação 3.55 na equação 3.53, tem-se

$$\bar{n}_{nij} = E_{ijkl} n_{nkl}. \quad (3.56)$$

Da equação 3.26 pode-se escrever que

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^d = -C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}^d. \quad (3.57)$$

Logo, pode-se escrever \mathbf{m} em função de $\bar{\mathbf{m}}$ substituindo as equações 3.6 e 3.27 na equação 3.57. Portanto,

$$\dot{\lambda}_m m_{mij} = -C_{ijkl} \dot{\lambda}_m \bar{m}_{mkl} , \quad (3.58)$$

dividindo por $\dot{\lambda}_m$, tem-se

$$m_{mij} = -C_{ijkl} \bar{m}_{mkl} . \quad (3.59)$$

A relação inversa pode-se ser obtida de forma análoga. Logo, da equação 3.5, tem-se

$$\dot{\sigma}_{ij}^d = -E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^d . \quad (3.60)$$

Substituindo as equações 3.6 e 3.27 na equação 3.60, tem-se

$$\dot{\lambda}_m \bar{m}_{mkl} = -E_{ijkl} \dot{\lambda}_m m_{mkl} , \quad (3.61)$$

dividindo por $\dot{\lambda}_m$, tem-se

$$\bar{m}_{mij} = -E_{ijkl} m_{mkl} . \quad (3.62)$$

Por fim, é obtida a relação entre os tensores \mathbf{H} e $\bar{\mathbf{H}}$. Igualando-se a equação 3.15 com a equação 3.41, tem-se

$$\frac{n_{nij} E_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{H_{nm} + n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl}} = \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{nkl} \dot{\epsilon}_{kl} . \quad (3.63)$$

Simplificando a equação por $\dot{\epsilon}_{kl}$, tem-se

$$\frac{n_{nij} E_{ijkl}}{H_{nm} + n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl}} = \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{nkl} . \quad (3.64)$$

Substituindo $n_{nij} E_{ijkl}$ por \bar{n}_{nkl} , conforme a relação 3.56, tem-se

$$\frac{\bar{n}_{nkl}}{H_{nm} + n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl}} = \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{nkl} . \quad (3.65)$$

Isolando \bar{H}_{nm} e simplificando a equação por \bar{n}_{nkl} , tem-se

$$\bar{H}_{nm} = H_{nm} + n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl} . \quad (3.66)$$

Para se obter a relação inversa, a equação 3.66 é reescrita como

$$H_{nm} = \bar{H}_{nm} - n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl} . \quad (3.67)$$

Substituindo as relações 3.56 e 3.59 na equação 3.67, tem-se

$$H_{nm} = \bar{H}_{nm} + \bar{n}_{nij} C_{ijkl} \bar{m}_{mkl} . \quad (3.68)$$

Portanto, resumindo as relações, tem-se

$$\bar{m}_{mij} = -E_{ijkl} m_{mkl} \quad \text{ou} \quad m_{mij} = -C_{ijkl} \bar{m}_{mkl} ; \quad (3.69a,b)$$

$$\bar{n}_{nij} = E_{ijkl} n_{nkl} \quad \text{ou} \quad n_{nij} = C_{ijkl} \bar{n}_{nkl} ; \quad (3.69c,d)$$

$$\bar{H}_{nm} = H_{nm} + n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl} \quad \text{ou} \quad H_{nm} = \bar{H}_{nm} + \bar{n}_{nij} C_{ijkl} \bar{m}_{mkl} . \quad (3.69e,f)$$

3.3 Regra de Degradação Generalizada

Pode-se observar grandes semelhanças entre as equações definidas e aquelas da plasticidade clássica. Entretanto, algumas diferenças devem ser enfatizadas. Nos modelos de degradação elástica são adotadas variáveis secantes para a rigidez e para a flexibilidade. Assim as funções de carregamento, o tensor com os módulos pós-crítico e a regra de fluxo não são suficientes para definir a evolução do modelo de degradação. Para tanto, é necessário representar a variação das deformações de degradação ($\dot{\varepsilon}_{kl}^d$) em função da variação da rigidez ou da flexibilidade. Comparando as equações 3.3 e 3.5 obtém-se

$$E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^d = -\dot{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl} . \quad (3.70)$$

Como $\mathbf{E} : \mathbf{C} = \mathbf{I}_4$, tem-se a diferencial dada por

$$\dot{C}_{ijpq} E_{pqkl} + C_{ijpq} \dot{E}_{pqkl} = 0 . \quad (3.71)$$

Isolando $\dot{\mathbf{E}}$ e $\dot{\mathbf{C}}$, tem-se

$$\dot{E}_{ijkl} = -E_{ijpq} \dot{C}_{pqrs} E_{rskl} ; \quad (3.72a)$$

$$\dot{C}_{ijkl} = -C_{ijpq} \dot{E}_{pqrs} C_{rskl} . \quad (3.72b)$$

Substituindo a equação 3.72a na equação 3.70 e multiplicando os dois lados por C_{pqij} , tem-se

$$C_{pqij} E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^d = C_{pqij} E_{ijpq} \dot{C}_{pqrs} E_{rskl} \varepsilon_{kl} \quad (3.73)$$

e, portanto, tem-se

$$\dot{\varepsilon}_{pq}^d = \dot{C}_{pqrs} E_{rskl} \varepsilon_{kl} . \quad (3.74)$$

Usando a relação total dada na equação 3.1 em 3.74 e trocando os índices pq por ij e rs por kl , tem-se

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^d = \dot{C}_{ijkl} \sigma_{kl} . \quad (3.75)$$

A equação 3.75 indica uma relação entre o incremento do tensor de flexibilidade secante e os incrementos de deformações de degradação. Desta forma, pode-se definir a regra de fluxo generalizada ou, como também conhecida, *regra de degradação generalizada*. Logo, define-se que a variação do tensor de flexibilidade é escrita na forma

$$\dot{C}_{ijkl} = \dot{\lambda}_m M_{mijkl} , \quad (3.76)$$

onde $\dot{\lambda}_m$ é a magnitude e M_{mijkl} é direção da variação da flexibilidade. Substituindo a equação 3.76 em 3.75, tem-se

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^d = \dot{\lambda}_m M_{mijkl} \sigma_{kl} . \quad (3.77)$$

Substituindo a equação 3.6 em 3.77 e simplificando por $\dot{\lambda}_m$, obtém-se

$$m_{mij} = M_{mijkl} \sigma_{kl} \quad (3.78)$$

Por fim, pode-se reescrever a equação 3.20 como

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} - \frac{E_{ijab} M_{mabxy} \sigma_{xy} n_{ncd} E_{cdkl}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs} M_{mrsuv} \sigma_{uv}} . \quad (3.79)$$

A variação da flexibilidade pode ser reescrita combinando as equações 3.15 e 3.78 e substituindo na equação 3.76. Logo, tem-se

$$\dot{C}_{ijkl} = M_{mijkl} \frac{n_{nab} E_{abcd} \dot{\varepsilon}_{cd}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs} M_{mrsuv} \sigma_{uv}} . \quad (3.80)$$

Analogamente, pode-se obter a regra de degradação da rigidez. Comparando as equações 3.4 e 3.26, tem-se

$$C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}^d = -\dot{C}_{ijkl} \sigma_{kl} . \quad (3.81)$$

Substituindo a equação 3.72b e multiplicando os dois lados por E_{pqij} , tem-se

$$E_{pqij}C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}^d = E_{pqij}C_{ijpq}\dot{E}_{pqrs}C_{rskl}\sigma_{kl} \quad (3.82)$$

e, portanto, tem-se

$$\dot{\sigma}_{pq}^d = \dot{E}_{pqrs}C_{rskl}\sigma_{kl} . \quad (3.83)$$

Usando a relação total dada pela equação 3.2 em 3.83 e trocando os índices pq por ij e rs por kl , tem-se

$$\dot{\sigma}_{ij}^d = \dot{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl} . \quad (3.84)$$

A variação da rigidez pode ser escrita como

$$\dot{E}_{ijkl} = \dot{\lambda}_m \bar{M}_{mijkl} . \quad (3.85)$$

Substituindo a equação 3.85 na equação 3.84, tem-se

$$\dot{\sigma}_{ij}^d = \dot{\lambda}_m \bar{M}_{mijkl}\varepsilon_{kl} \quad (3.86)$$

e substituindo a equação 3.27 em 3.86, tem-se

$$\dot{\lambda}_m \bar{m}_{mij} = \dot{\lambda}_m \bar{M}_{mijkl}\varepsilon_{kl} . \quad (3.87)$$

Simplificando a equação 3.87 por $\dot{\lambda}_m$, obtém-se

$$\bar{m}_{mij} = \bar{M}_{mijkl}\varepsilon_{kl} . \quad (3.88)$$

Portanto, pode-se escrever a relação 3.40 como

$$C_{ijkl}^t = C_{ijkl} - \frac{C_{ijab}\bar{M}_{mabxy}\varepsilon_{xy}\bar{n}_{ncd}C_{cdkl}}{\bar{H}_{nm} + \bar{n}_{npq}C_{pqrs}\bar{M}_{mrsuv}\varepsilon_{uv}} \quad (3.89)$$

ou a relação 3.50 como

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}}\bar{M}_{mijpq}\varepsilon_{pq}\bar{n}_{nkl} . \quad (3.90)$$

Por fim, a variação da rigidez pode ser reescrita combinando as equações 3.35 e 3.88 e substituindo na equação 3.85. Logo, tem-se

$$\dot{E}_{ijkl} = \bar{M}_{mijkl} \frac{\bar{n}_{ncd}C_{cdkl}\dot{\sigma}_{kl}}{\bar{H}_{nm} + \bar{n}_{npq}C_{pqrs}\bar{M}_{mrsuv}\varepsilon_{uv}} \quad (3.91)$$

ou, substituindo a equação 3.41 na equação 3.85, tem-se

$$\dot{E}_{ijkl} = \bar{M}_{mijkl} \frac{\bar{n}_{nab} \dot{\varepsilon}_{ab}}{\bar{H}_{nm}} . \quad (3.92)$$

Pode-se relacionar M_{mijkl} com \bar{M}_{mijkl} substituindo as equações 3.76 e 3.85 em 3.72a, portanto, tem-se

$$\bar{M}_{mijkl} = -E_{ijpq} M_{mpqrs} E_{rskl} . \quad (3.93)$$

A relação inversa é obtida substituindo as equações 3.76 e 3.85 em 3.72b, portanto, tem-se

$$M_{mijkl} = -C_{ijpq} \bar{M}_{mpqrs} C_{rskl} . \quad (3.94)$$

3.4 Considerações Termodinâmicas: Energia Livre, Dissipação por Degradação e Forças Termodinâmicas

A expressão mais fundamental da termodinâmica é a equação da energia mecânica livre do sistema. Esta energia pode ser entendida como sendo a energia armazenada no material e que pode ser recuperada sob descarregamento na ausência de forças dissipativas. Em modelos de degradação elástica, esta grandeza é dada pela energia elástica correspondente à rigidez (ou flexibilidade) secante e pode ser expressa por

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} ; \quad (3.95a)$$

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} C_{ijkl} \sigma_{kl} . \quad (3.95b)$$

A variação da energia livre devido à variação da rigidez e das deformações é dada por

$$\dot{\mathbf{w}} = \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_E \dot{\varepsilon}_{kl} + \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial E_{ijkl}} \right|_{\varepsilon} \dot{E}_{ijkl} , \quad (3.96)$$

desenvolvendo, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\varepsilon_{ij} E_{ijkl} \varepsilon_{kl})}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\varepsilon_{ij} E_{ijkl} \varepsilon_{kl})}{\partial E_{ijkl}} \dot{E}_{ijkl} \\ \dot{\mathbf{w}} &= \sigma_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \dot{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl} . \end{aligned} \quad (3.97)$$

O primeiro termo da equação 3.97 tem sentido de trabalho externo realizado pelas tensões aplicadas (com rigidez constante). O segundo termo corresponde à dissipação de energia devida à degradação da rigidez, para um estado constante de deformação. A dissipação é uma grandeza intrinsecamente negativa e o segundo termo da equação é conhecido como “*taxa de dissipação por degradação*”, denotada por \dot{d} . Na ausência de transferência de calor, a equação 3.97 representa o balanço energético. Desta forma, tem-se que a energia elástica acumulada é igual ao trabalho externo fornecido menos a dissipação devido ao processo de degradação elástica. Logo,

$$\dot{d} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\dot{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl} . \quad (3.98)$$

A figura 3.8 ilustra a degradação da rigidez, justificando sua natureza negativa.

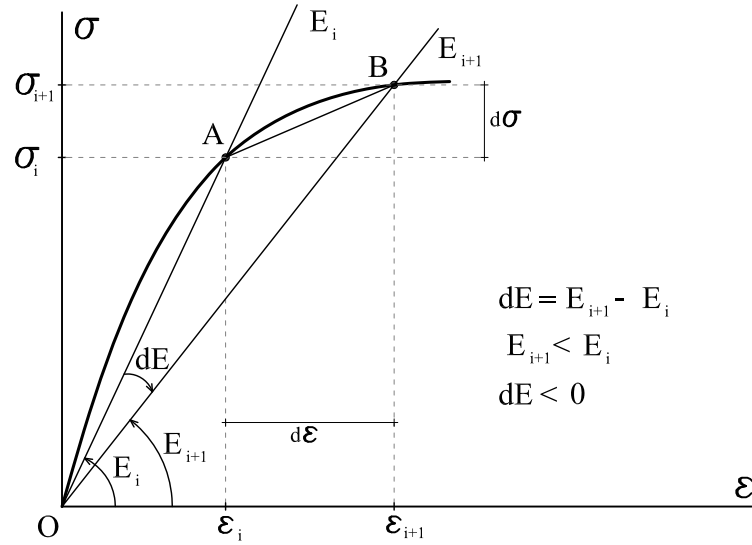


Figura 3.8: Dissipação de energia por degradação da rigidez.

Pode-se agora introduzir o conceito de *força termodinâmica conjugada* ou *força generalizada* \bar{Y}_{ijkl} , conjugada à rigidez, como sendo a grandeza que irá gerar a taxa de dissipação de degradação quando multiplicada pela taxa \dot{E}_{ijkl} . Logo,

$$(-\bar{Y}_{ijkl})\dot{E}_{ijkl} = \dot{d} , \quad (3.99)$$

assim sendo, tem-se

$$-\bar{Y}_{ijkl} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} . \quad (3.100)$$

As forças termodinâmicas conjugadas podem ser obtidas diretamente das equações de energia potencial do sistema $w(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E})$ ou $w(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C})$. A definição de $-\bar{Y}_{ijkl}$ é equivalente a

$$-\bar{Y}_{ijkl} = \left. \frac{\partial w}{\partial E_{ijkl}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}} . \quad (3.101)$$

De forma análoga, pode-se desenvolver as equações termodinâmicas no domínio do tensor de flexibilidade. Logo, substituindo a equação 3.72a na equação 3.98, tem-se

$$\dot{d} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_{ijpq} \dot{C}_{pqrs} E_{rskl} \varepsilon_{kl} , \quad (3.102)$$

como $\sigma_{pq} = \varepsilon_{ij} E_{ijpq}$ e $\sigma_{rs} = E_{rskl} \varepsilon_{kl}$, trocando os índices pq por ij e rs por kl , tem-se

$$\dot{d} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{C}_{ijkl} \sigma_{kl} . \quad (3.103)$$

Desta forma, a *força termodinâmica conjugada* à flexibilidade, denotada por Y_{ijkl} , que gera a taxa de dissipação é dada por

$$(-Y_{ijkl}) \dot{C}_{ijkl} = \dot{d} , \quad (3.104)$$

portanto, tem-se

$$-Y_{ijkl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{kl} . \quad (3.105)$$

A *força termodinâmica conjugada* à flexibilidade pode, também, ser definida como

$$-Y_{ijkl} = - \left. \frac{\partial w}{\partial C_{ijkl}} \right|_{\boldsymbol{\sigma}} . \quad (3.106)$$

3.4.1 Irreversibilidade da Dissipação por Degradação

O processo de dissipação é um fenômeno irreversível, isto é, uma vez que o material inicie o processo de degradação não há reconstituição do meio tornando-o íntegro novamente. Portanto, a taxa de dissipação por degradação é uma grandeza não negativa. Logo, substituindo a regra de degradação dada pela equação 3.76 na equação 3.103, tem-se

$$\dot{d} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{\lambda}_m M_{mijkl} \sigma_{kl} \geq 0 . \quad (3.107)$$

Uma vez que $\dot{\lambda}_m \geq 0$, uma condição suficiente para que a equação 3.107 seja satisfeita é que M_{mijkl} seja positivo definido. Qualquer situação em que $\dot{\lambda}_m \leq 0$, tem-se que o regime é de descarregamento e não há dissipação de energia. Usando a equação 3.75 em 3.103, a expressão para a taxa de dissipação pode ser escrita em termos das deformações de degradação como

$$\dot{d} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^d, \quad (3.108)$$

com $-y_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}$, tem-se

$$\dot{d} = (-y_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij}^d. \quad (3.109)$$

Um vez definidas a regra de fluxo generalizada e as forças termodinâmicas conjugadas, pode-se agora a generalizar a derivada, em relação às tensões, da função de carregamento. Uma vez as funções de carregamento F_n sejam expressas em termos das forças termodinâmicas conjugadas, tem-se

$$N_{nijkl} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial (-Y_{ijkl})} \right|_p. \quad (3.110)$$

Pode-se relacionar n_{nij} e N_{nijkl} aplicando a regra da cadeia, logo

$$n_{nij} = \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial F_n}{\partial (-Y_{ijkl})} \cdot \frac{\partial (-Y_{ijkl})}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (3.111)$$

Substituindo 3.110 em 3.111 e usando 3.105, tem-se

$$n_{nij} = N_{nijkl} \sigma_{kl}. \quad (3.112)$$

Analogamente, para um modelo baseado em deformação, usando a equação 3.84, em 3.98, tem-se

$$\dot{d} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij}^d, \quad (3.113)$$

com $-\bar{y}_{ij} = -\frac{1}{2} \sigma_{ij}$, tem-se

$$\dot{d} = (-\bar{y}_{ij}) \dot{\sigma}_{ij}^d. \quad (3.114)$$

Para funções de carregamento (F_n) escritas em termos das forças termodinâmicas conjugadas à rigidez, tem-se

$$\bar{N}_{nijkl} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial (-\bar{Y}_{ijkl})} \right|_{\bar{p}}. \quad (3.115)$$

Aplicando a regra da cadeia para relacionar \bar{n}_{nij} e \bar{N}_{nijkl} , tem-se

$$\bar{n}_{nij} = \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial F_n}{\partial(-\bar{Y}_{ijkl})} \cdot \frac{\partial(-\bar{Y}_{ijkl})}{\partial \varepsilon_{ij}} . \quad (3.116)$$

Substituindo a equação 3.115 em 3.116 e usando 3.100, tem-se

$$\bar{n}_{nij} = -\bar{N}_{nijkl} \varepsilon_{kl} . \quad (3.117)$$

Por fim, pode-se relacionar os gradientes N_{nijkl} com \bar{N}_{nijkl} substituindo a equação 3.105 na derivada 3.110, tem-se

$$N_{nijkl} = \frac{\partial F_n}{\partial(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{kl})} . \quad (3.118)$$

Como $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, tem-se

$$N_{nijkl} = \frac{\partial F_n}{\partial(\frac{1}{2}E_{ijpq}\varepsilon_{pq}E_{rskl}\varepsilon_{rs})} . \quad (3.119)$$

Sendo tensor de rigidez constante na derivada, tem-se

$$N_{nijkl} = \frac{1}{E_{ijpq}} \frac{\partial F_n}{\partial(\frac{1}{2}\varepsilon_{pq}\varepsilon_{rs})} \frac{1}{E_{klrs}} . \quad (3.120)$$

Invertendo o tensor de rigidez e substituindo a equação 3.100 em 3.120, obtém-se

$$N_{nijkl} = -C_{ijpq}\bar{N}_{npqrs}C_{rskl} . \quad (3.121)$$

A relação inversa pode ser obtida substituindo a equação 3.100 na derivada 3.115, resultando em

$$\bar{N}_{nijkl} = \frac{\partial F_n}{\partial(-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl})} . \quad (3.122)$$

Como $\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}$, tem-se

$$\bar{N}_{nijkl} = \frac{\partial F_n}{\partial(-\frac{1}{2}C_{ijpq}\sigma_{pq}C_{klrs}\sigma_{rs})} . \quad (3.123)$$

Sendo tensor de flexibilidade constante na derivada, tem-se

$$\bar{N}_{nijkl} = -\frac{1}{C_{ijpq}} \frac{\partial F_n}{\partial(\frac{1}{2}\sigma_{pq}\sigma_{rs})} \frac{1}{C_{rskl}} . \quad (3.124)$$

Invertendo o tensor de flexibilidade e substituindo a equação 3.118 em 3.124, obtém-se

$$\bar{N}_{nijkl} = -E_{ijpq}N_{npqrs}E_{rskl} . \quad (3.125)$$

3.5 Variáveis de Dano em Modelos de Degradação Elástica

A perda da capacidade de carga devido à degradação da rigidez ou da flexibilidade foi descrita nas seções anteriores, considerando leis de evolução do carregamento e regras de degradação. A definição da degradação do tensor de rigidez foi apresentada como a forma mais geral para a caracterização do meio material devido à capacidade de descrever fenômenos pós-críticos (endurecimento ou amolecimento do material) e por considerar todos os parâmetros do material como variáveis constitutivas que, portanto, evoluem durante o processo de degradação. Esta última característica impõe uma limitação a estes modelos: a dificuldade de se estabelecer leis de evolução para todos os parâmetros do material. Por exemplo, em um modelo ortotrópico, leis de evolução para 21 parâmetros independentes devem ser descritas.

Para superar esta dificuldade elegem-se variáveis capazes de medir o quão degradado está o material e seus reflexos no tensor de rigidez. Portanto, com este conjunto reduzido de variáveis pode-se medir o dano do material em qualquer estágio do processo de carregamento. Este conjunto de variáveis são chamadas de *variáveis de dano* e será denotada por \mathcal{D}_* . O símbolo “*” representa um conjunto de índices, dependendo da natureza do problema (ex.: \mathcal{D} é um escalar, \mathcal{D}_i é um vetor, \mathcal{D}_{ij} é um tensor de segunda ordem, etc).

3.5.1 Variação da Flexibilidade

Em modelos baseados em tensão, o processo de degradação se dá por regras que descrevem o processo progressivo do aumento da flexibilidade. Neste caso, o conjunto de variáveis \mathcal{D}_* , denominadas variáveis internas do modelo de dano, capazes de caracterizar por completo o estado de degradação do meio material, irão contribuir para a diminuição da capacidade do material suportar carga. Desta forma, pode-se escrever a flexibilidade como função das variáveis internas e das constantes elásticas na forma

$$C_{ijkl}^D = C_{ijkl}(C_{pqrs}^0, \mathcal{D}_*) . \quad (3.126)$$

Diferenciando equação (3.126), tem-se

$$\dot{C}_{ijkl}^D = \frac{\partial C_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \dot{\mathcal{D}}_* . \quad (3.127)$$

Uma regra de fluxo para o dano pode ser escrita como

$$\dot{\mathcal{D}}_* = \dot{\lambda}_m \mathcal{M}_{m*} , \quad (3.128)$$

onde $\dot{\lambda}_m$ é o multiplicador inelástico tradicional, agora denominado *multiplicador de dano*, e \mathcal{M}_{m*} define a direção da taxa de mudança das variáveis de dano (\mathcal{M}_{m*} tem o mesmo caráter e dimensão de \mathcal{D}_*).

Substituindo as equações 3.76 e 3.128 em 3.127, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_m M_{mijkl} &= \frac{\partial C_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \dot{\mathcal{D}}_* \\ \dot{\lambda}_m M_{mijkl} &= \frac{\partial C_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \dot{\lambda}_m \mathcal{M}_{m*} \\ M_{mijkl} &= \frac{\partial C_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \mathcal{M}_{m*} . \end{aligned} \quad (3.129)$$

A equação 3.129 define a variação do tensor de flexibilidade em termos da variáveis de dano.

A energia livre pode ser reescrita como

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} C_{ijkl}^D \sigma_{kl} \quad (3.130)$$

e a dissipação energética pode ser obtida substituindo a equação 3.127 em 3.104.

Portanto, tem-se

$$\dot{d} = (-Y_{ijkl}) \frac{\partial C_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \dot{\mathcal{D}}_* , \quad (3.131)$$

sendo

$$-\mathcal{Y}_* = (-Y_{ijkl}) \frac{\partial C_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} , \quad (3.132)$$

onde $-\mathcal{Y}_*$ é a força termodinâmica conjugada às variáveis de dano, no domínio da flexibilidade. Pode-se reescrever a dissipação na forma

$$\dot{d} = (-\mathcal{Y}_*) \dot{\mathcal{D}}_* . \quad (3.133)$$

Derivando a energia livre em relação às variáveis de dano pode-se generalizar a obtenção das forças termodinâmicas, logo, tem-se

$$-\mathcal{Y}_* = \left. \frac{\partial w}{\partial \mathcal{D}_*} \right|_{\sigma}. \quad (3.134)$$

Para funções de carregamento escritas em termos das forças termodinâmicas $-\mathcal{Y}_*$, tem-se o gradiente generalizado dado por

$$\mathcal{N}_{n*} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial (-\mathcal{Y}_*)} \right|_p. \quad (3.135)$$

Para relacionar N_{ijkl} com \mathcal{N}_{n*} aplica-se a regra da cadeia na equação 3.110. Portanto, tem-se

$$N_{ijkl} = \frac{\partial F_n}{\partial (-\mathcal{Y}_*)} \frac{\partial (-\mathcal{Y}_*)}{\partial (-Y_{ijkl})}. \quad (3.136)$$

Usando a equação 3.135 em 3.136, tem-se

$$N_{ijkl} = \mathcal{N}_{n*} \frac{\partial (-\mathcal{Y}_*)}{\partial (-Y_{ijkl})}. \quad (3.137)$$

Derivando a relação 3.132 em relação às forças termodinâmicas conjugadas à flexibilidade, tem-se

$$\frac{\partial (-\mathcal{Y}_*)}{\partial (-Y_{ijkl})} = \frac{\partial C_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*}. \quad (3.138)$$

Por fim, substituindo a equação 3.138 em 3.137, obtém-se

$$N_{ijkl} = \frac{\partial C_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \mathcal{N}_{n*}. \quad (3.139)$$

3.5.2 Variação da Rigidez

Na formulação baseada em deformação, o processo de degradação depende de um conjunto de variáveis, agora indicado por $\bar{\mathcal{D}}_*$, que caracteriza por completo o estado de degradação do meio material (análogo à formulação por tensão). Entretanto, agora é a rigidez que é escrita como uma função das variáveis internas e das constantes elásticas, na forma

$$E_{ijkl}^D = E_{ijkl}(E_{pqrs}^0, \bar{\mathcal{D}}_*). \quad (3.140)$$

Diferenciando a equação 3.141, tem-se

$$\dot{E}_{ijkl}^D = \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \dot{\mathcal{D}}_* . \quad (3.141)$$

A regra de fluxo para o dano é escrita como

$$\dot{\mathcal{D}}_* = \dot{\lambda}_m \bar{\mathcal{M}}_{m*} . \quad (3.142)$$

Por fim, da substituição das equação 3.85 e 3.142 em 3.141, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_m \bar{M}_{mijkl} &= \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \dot{\mathcal{D}}_* \\ \dot{\lambda}_m \bar{M}_{mijkl} &= \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \dot{\lambda}_m \bar{\mathcal{M}}_{m*} \\ \bar{M}_{mijkl} &= \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \bar{\mathcal{M}}_{m*} . \end{aligned} \quad (3.143)$$

A equação 3.143 define a variação do tensor de rigidez em termos da variáveis de dano.

A energia livre pode ser reescrita como

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_{ijkl}^D \varepsilon_{kl} \quad (3.144)$$

e a dissipação energética pode ser obtida substituindo a equação 3.132 em 3.99.

Portanto, tem-se

$$\dot{d} = (-\bar{Y}_{ijkl}) \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \dot{\mathcal{D}}_* , \quad (3.145)$$

sendo

$$-\bar{\mathcal{Y}}_* = (-\bar{Y}_{ijkl}) \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} , \quad (3.146)$$

onde $-\bar{\mathcal{Y}}_*$ é a força termodinâmica conjugada às variáveis de dano no domínio da rigidez. Pode-se reescrever a dissipação na forma

$$\dot{d} = (-\bar{\mathcal{Y}}_*) \dot{\mathcal{D}}_* . \quad (3.147)$$

Derivando a energia livre em relação às variáveis de dano pode-se generalizar a obtenção das forças termodinâmicas, logo, tem-se

$$-\bar{\mathcal{Y}}_* = \left. \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \dot{\mathcal{D}}_*} \right|_{\varepsilon} . \quad (3.148)$$

Para funções de carregamento escritas em termos das forças termodinâmicas $-\mathcal{Y}_*$, tem-se o gradiente generalizado dado por

$$\mathcal{N}_{n*} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial(-\mathcal{Y}_*)} \right|_{\bar{p}}. \quad (3.149)$$

Para relacionar \bar{N}_{ijkl} com \mathcal{N}_{n*} aplica-se a regra da cadeia na equação 3.115. Portanto, tem-se

$$\bar{N}_{ijkl} = \frac{\partial F_n}{\partial(-\mathcal{Y}_*)} \frac{\partial(-\mathcal{Y}_*)}{\partial(-\bar{Y}_{ijkl})}. \quad (3.150)$$

Usando a equação 3.149 em 3.150, tem-se

$$\bar{N}_{ijkl} = \mathcal{N}_{n*} \frac{\partial(-\mathcal{Y}_*)}{\partial(-\bar{Y}_{ijkl})}. \quad (3.151)$$

Derivando a relação 3.146 em relação às forças termodinâmicas conjugadas à rigidez, tem-se

$$\frac{\partial(-\mathcal{Y}_*)}{\partial(-\bar{Y}_{ijkl})} = \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*}. \quad (3.152)$$

Por fim, substituindo a equação 3.152 em 3.151, obtém-se

$$\bar{N}_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \mathcal{N}_{n*}. \quad (3.153)$$

3.6 Resumo das Equações

3.6.1 Formulação Baseada em Tensão

Relação Secante Total (Equação 3.2):

$$\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}\sigma_{kl}$$

Regra de Evolução (Equação 3.6):

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \dot{\lambda}_m m_{mkl}$$

Gradiente das Funções de Carregamento (Equação 3.9):

$$n_{nij} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} \right|_p$$

Tensor dos Módulos Pós-Crítico (Equação 3.10):

$$H_{nm} = - \left. \frac{\partial F_n}{\partial \lambda_m} \right|_{\sigma} = - \left. \frac{\partial F_n}{\partial p_q} \right|_{\sigma} \frac{\partial p_q}{\partial \sigma_{kl}^d} m_{mkl}$$

Tensor de Rigidez Tangente (Equação 3.20):

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} - \frac{E_{ijab} m_{mab} n_{ncd} E_{cdkl}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs} m_{mrs}}$$

Tensor de Flexibilidade Tangente (Equação 3.25):

$$C_{ijkl}^t = C_{ijkl} - \frac{1}{H_{nm}} m_{mij} n_{nkl}$$

Regra da Degradação da Flexibilidade (Equação 3.76):

$$\dot{C}_{ijkl} = \dot{\lambda}_m M_{mijkl}$$

Força Termodinâmica Conjugada à Flexibilidade (Equação 3.105):

$$-Y_{ijkl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$$

Gradiente Generalizado das Funções de Carregamento (Equação 3.110):

$$N_{nijkl} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial (-Y_{ijkl})} \right|_p$$

Regra de Evolução do Dano (Equação 3.128):

$$\dot{\mathcal{D}}_* = \dot{\lambda}_m \mathcal{M}_{m*}$$

Forças Termodinâmicas Conjugadas às Variáveis de Dano (Equação 3.132):

$$-\mathcal{Y}_* = (-Y_{ijkl}) \frac{\partial C_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*}$$

Gradiente Generalizado das Funções de Carregamento no Domínio das Variáveis de Dano (Equação 3.135):

$$\mathcal{N}_{n*} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial (-\mathcal{Y}_*)} \right|_p$$

Relações:

$$m_{mij} = -C_{ijkl} \bar{n}_{mkl} \quad (\text{Equação 3.69b})$$

$$n_{nij} = C_{ijkl} \bar{n}_{nkl} \quad (\text{Equação 3.69d})$$

$$H_{nm} = \bar{H}_{nm} + \bar{n}_{nij} C_{ijkl} \bar{n}_{mkl} \quad (\text{Equação 3.69f})$$

$$m_{mij} = M_{mijkl} \sigma_{kl} \quad (\text{Equação 3.78})$$

$$M_{mijkl} = -C_{ijpq} \bar{M}_{mpqrs} C_{rskl} \quad (\text{Equação 3.94})$$

$$N_{nijkl} = -C_{ijpq} \bar{N}_{npqrs} C_{rskl} \quad (\text{Equação 3.121})$$

$$M_{mijkl} = \frac{\partial C_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \mathcal{M}_{m*} \quad (\text{Equação 3.129})$$

$$N_{nijkl} = \frac{\partial C_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*} \mathcal{N}_{n*} \quad (\text{Equação 3.139})$$

3.6.2 Formulação Baseada em Deformação

Relação Secante Total (Equação 3.1):

$$\sigma_{kl} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Regra de Evolução (Equação 3.27):

$$\dot{\sigma}_{kl}^d = \dot{\lambda}_m \bar{n}_{mkl}$$

Gradiente das Funções de Carregamento (Equação 3.29):

$$\bar{n}_{nij} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{ij}} \right|_{\bar{p}}$$

Tensor dos Módulos Pós-Crítico (Equação 3.30):

$$\bar{H}_{nm} = -\left. \frac{\partial F_n}{\partial \lambda_m} \right|_{\varepsilon} = -\left. \frac{\partial F_n}{\partial \bar{p}_q} \right|_{\varepsilon} \frac{\partial \bar{p}_q}{\partial \varepsilon_{kl}^d} \bar{m}_{mkl}$$

Tensor de Rigidez Tangente (Equação 3.50):

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl}$$

Tensor de Flexibilidade Tangente (Equação 3.40):

$$C_{ijkl}^t = C_{ijkl} - \frac{C_{ijab} \bar{m}_{mab} \bar{n}_{ncd} C_{cdkl}}{\bar{H}_{nm} + \bar{n}_{npq} C_{pqrs} \bar{m}_{mrs}}$$

Regra da Degradação da Rigidez (Equação 3.85):

$$\dot{E}_{ijkl} = \dot{\lambda}_m \bar{M}_{mijkl}$$

Força Termodinâmica Conjugada à Rigidez (Equação 3.100):

$$-\bar{Y}_{ijkl} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

Gradiente Generalizado das Funções de Carregamento (Equação 3.115):

$$\bar{N}_{mijkl} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial (-\bar{Y}_{ijkl})} \right|_{\bar{p}}$$

Regra de Evolução do Dano (Equação 3.142):

$$\dot{\mathcal{D}}_* = \dot{\lambda}_m \bar{\mathcal{M}}_{m*}$$

Forças Termodinâmicas Conjugadas às Variáveis de Dano (Equação 3.146):

$$-\bar{\mathcal{Y}}_* = (-\bar{Y}_{ijkl}) \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \mathcal{D}_*}$$

Gradiente Generalizado das Funções de Carregamento no Domínio das Variáveis de Dano (Equação 3.149):

$$\bar{\mathcal{N}}_{n*} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial (-\mathcal{Y}_*)} \right|_{\bar{p}}$$

Relações:

$$\bar{m}_{mij} = -E_{ijkl}m_{mkl} \quad (\text{Equação 3.69a})$$

$$\bar{n}_{nij} = E_{ijkl}n_{nkl} \quad (\text{Equação 3.69c})$$

$$\bar{H}_{nm} = H_{nm} + n_{nij}E_{ijkl}m_{mkl} \quad (\text{Equação 3.69e})$$

$$\bar{m}_{mij} = \bar{M}_{mijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\text{Equação 3.88})$$

$$\bar{M}_{mijkl} = -E_{ijpq}M_{mpqrs}E_{rskl} \quad (\text{Equação 3.93})$$

$$\bar{N}_{nijkl} = -E_{ijpq}N_{npqrs}E_{rskl} \quad (\text{Equação 3.125})$$

$$\bar{M}_{mijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \bar{\mathcal{D}}_*} \bar{\mathcal{M}}_{m*} \quad (\text{Equação 3.143})$$

$$\bar{N}_{nijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial \bar{\mathcal{D}}_*} \bar{\mathcal{N}}_{n*} \quad (\text{Equação 3.153})$$

Capítulo 4

Formulação dos Modelos Constitutivos

Os modelos constitutivos revisados no capítulo 2 apresentam uma notação própria e, embora em muitos casos guardem semelhanças, a falta de uma unidade das formulações impede uma implementação computacional genérica e objetiva.

Além dos aspectos computacionais, a estrutura teórica estabelecida no capítulo 3, formaliza a generalização desejada.

A seguir serão apresentadas formulações de diversos modelos constitutivos seguindo a estrutura teórica proposta. As parcelas necessárias à descrição de cada modelo são explicitadas indicando a correlação entre a forma original e a proposta por este trabalho.

4.1 Modelos Elastoplásticos

As equações das variações das tensões para um modelo elastoplástico podem ser escritas como

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^0 (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) , \quad (4.1)$$

com

$$\dot{\epsilon}_{kl}^p = \dot{\lambda}_m m_{mkl} , \quad (4.2)$$

onde E_{ijkl}^0 são as componentes do tensor de rigidez elástico, $\dot{\lambda}_m$ são os multiplicadores plásticos, m_{mkl} são os gradientes das funções de potenciais plástico e $\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ é a variação das deformações plásticas.

Expressando as superfícies de escoamento, $F_n(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p})$, em termos do tensor de tensões, $\boldsymbol{\sigma}$, e de um vetor com variáveis internas, \mathbf{p} , tem-se a condição de consistência em sua forma linearizada dada por

$$\dot{F}_n = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} \right|_{\mathbf{p}} \dot{\sigma}_{ij} + \left. \frac{\partial F_n}{\partial p_q} \right|_{\boldsymbol{\sigma}} \dot{p}_q = 0 . \quad (4.3)$$

Podendo ser escrita como

$$n_{nij} \dot{\sigma}_{ij} - H_{nm} \dot{\lambda}_m = 0 , \quad (4.4)$$

com

$$n_{nij} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{ij}} \right|_{\mathbf{p}} . \quad (4.5)$$

Como as variáveis internas, p_q , são funções das deformações plásticas, pode-se substituir $\dot{p}_q = (\partial p_q / \partial \varepsilon_{kl}^p) \dot{\varepsilon}_{kl}^p$, na equação 4.3 e comparar o resultado com a equação 4.4 para obter

$$H_{nm} = - \left. \frac{\partial F_n}{\partial \lambda_m} \right|_{\boldsymbol{\lambda}} = - \left. \frac{\partial F_n}{\partial p_q} \right|_{\boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial p_q}{\partial \varepsilon_{kl}^p} m_{mkl} . \quad (4.6)$$

Substituindo as equações 4.1 e 4.2 na equação 4.4 e isolando $\dot{\lambda}$ tem-se a forma para o multiplicador plástico, que é dado por

$$\dot{\lambda}_m = \frac{n_{ncd} E_{cdkl}^0 \dot{\varepsilon}_{kl}}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs}^0 m_{mrs}} . \quad (4.7)$$

O operador tangente relaciona variações de deformação com variações de tensão na forma

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} . \quad (4.8)$$

Substituindo as equações 4.1 e 4.7 em 4.8 tem-se,

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl}^0 - \frac{E_{ijab}^0 m_{mab} n_{ncd} E_{cdkl}^0}{H_{nm} + n_{npq} E_{pqrs}^0 m_{mrs}} . \quad (4.9)$$

4.1.1 Critério de von Mises

Para o critério de escoamento de von Mises, tem-se

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_y) = \sqrt{3J_2(s)} - \sigma_y, \quad (4.10)$$

sendo

$$J_2(s) = -I_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}tr[\mathbf{s}^2] = \frac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s} = \frac{1}{2}\|\mathbf{s}\|^2, \quad (4.11)$$

com

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}(tr[\boldsymbol{\sigma}])I, \quad (4.12)$$

onde o $tr[\boldsymbol{\sigma}]$, no sistema de tensões principais, é $tr[\boldsymbol{\sigma}] = \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$.

Portanto, tem-se

$$n_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{s}}{\|\mathbf{s}\|}, \quad (4.13)$$

sendo $\|\mathbf{s}\| = \sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}$.

Em um modelo associado

$$n_{ij} = m_{ij} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

A lei associada aos fenômenos de endurecimento ou amolecimento é dada por

$$H = -\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_{kl}^p}, \quad (4.15)$$

com

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_y} = -1, \quad (4.16)$$

e

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial \varepsilon_{kl}^p} = \mathcal{H}, \quad (4.17)$$

sendo \mathcal{H} o módulo plástico.

Os modelos de plasticidade clássica não apresentam uma relação total entre tensão e deformação portanto é necessário um algoritmo de retorno capaz de obter a atualização das tensões, necessárias ao equilíbrio das forças internas na análise não linear.

4.2 Modelos de Dano Isotrópico

Modelos de dano isotrópicos padrão (assim denominados por de Borst e Gutiérrez (1999)) serão agora apresentados de forma a generalizar as definições comuns e identificar os gradientes da formulação unificada.

Para estes modelos a relação total é dada por

$$\sigma_{ij} = (1 - D)E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} , \quad (4.18)$$

onde D é a variável de dano.

A função de carregamento pode ser escrita como

$$F = f(\mathcal{A}) - h(\kappa) , \quad (4.19)$$

onde $f(\mathcal{A})$ é uma função específica de cada modelo que pode ser escrita em termos de medidas de tensão, ou de deformação, ou de forças termodinâmicas, ou de dano, dentre outras, denotadas por \mathcal{A} . A função $h(\kappa)$ é o parâmetro histórico que tem o mesmo sentido da medida especificada pela função $f(\mathcal{A})$. O parâmetro histórico pode ser considerado como sendo o maior valor da função já atingido durante a análise e a opção de apresentá-lo em função de uma variável κ é útil para a generalização. É válido ressaltar que a variável histórica é, direta ou indiretamente, uma função das variáveis de dano, mesmo que não exista uma relação explícita para esta variação.

Para o desenvolvimento da forma geral dos modelos de dano isotrópico padrão, será assumido a formulação baseada em deformação. Portanto, da função de carregamento dada na equação 4.19, tem-se $f(\mathcal{A}) = \tilde{\varepsilon}$, sendo $\tilde{\varepsilon}$ uma deformação equivalente, e $h(\kappa) = \kappa(D)$, com $\kappa(D)$ o valor histórico da deformação equivalente em função do dano.

A partir da relação total, dada na equação 4.18, pode-se escrever o tensor de rigidez secante como

$$E_{ijkl}^D = (1 - D)E_{ijkl}^0 . \quad (4.20)$$

Derivando a equação 4.20 em relação ao dano tem-se

$$\dot{E}_{ijkl}^D = -\dot{D}E_{ijkl}^0 . \quad (4.21)$$

Das equações 3.141 e 3.142, pode-se identificar os termos

$$\frac{\partial E_{ijkl}^D}{\partial D} = -E_{ijkl}^0; \quad \bar{\mathcal{M}} = 1; \quad \dot{\lambda} = \dot{D} . \quad (4.22a,b,c)$$

Da equação 3.143, tem-se que

$$\bar{M}_{ijkl} = -E_{ijkl}^0 \quad (4.23)$$

e, segundo a relação dada na equação 3.88, tem-se

$$\bar{m}_{ij} = -E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} = -\sigma_{ij}^0 , \quad (4.24)$$

onde σ_{ij}^0 são as componentes do tensor de tensão obtido pela rigidez elástica.

Da definição geral da função de carregamento da equação 4.19, tem-se o gradiente dado por

$$\bar{n}_{kl} = \frac{\partial F}{\partial \mathcal{A}} = \frac{\partial F}{\partial \bar{\varepsilon}} \quad (4.25)$$

e o módulo pós-crítico dado por

$$\bar{H} = \frac{\partial h(\kappa)}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa(D)}{\partial D} . \quad (4.26)$$

Na equação 4.26 tem-se a derivada do parâmetro histórico em relação ao dano ($\frac{\partial \kappa(D)}{\partial D}$). Nem sempre uma relação explícita entre a variável histórica e o dano é prescrita pelo modelo. Muitas vezes tem-se uma função para avaliar o dano escrita em termos da medida de deformação em questão. Por exemplo, uma função tradicionalmente usada é dada por

$$D(\kappa) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} [e^{-\beta(\kappa-\kappa_0)}] , \quad (4.27)$$

sendo κ uma medida de dano (por exemplo uma deformação equivalente), κ_0 o valor que delimita o limite elástico do material, β o parâmetro de variação de crescimento do dano. Portanto, tem-se

$$\frac{\partial \kappa(D)}{\partial D} = \left(\frac{\partial D(\kappa)}{\partial \kappa} \right)^{-1} . \quad (4.28)$$

A forma geral apresentada será adotada para formular modelos de dano isotrópicos padrão, que são um caso particular da formulação multipotencial e são compreendidos pela proposta de Carol et al. (1994).

4.2.1 Modelo de Mazars e Lemaitre (1984)

Mazars e Lemaitre (1984) propuseram um modelo de dano isotrópico baseado em um potencial termodinâmico, sendo a variável de dano um escalar, responsável pela relação entre as tensões nominais e efetivas como idealizado por Kachanov (1958). Portanto, a função de carregamento é definida como

$$F(\bar{\varepsilon}, D) = \bar{\varepsilon} - \kappa(D) , \quad (4.29)$$

sendo $\bar{\varepsilon}$ a deformação equivalente, dada por

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}} \quad (4.30)$$

e $\kappa(D) = \kappa$ sendo κ o maior valor de $\bar{\varepsilon}$ atingido durante a análise.

Da função de carregamento obtém-se

$$\bar{n}_{kl} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\varepsilon_{kl}}{\bar{\varepsilon}} \quad (4.31)$$

e

$$\bar{H} = \frac{\partial \kappa}{\partial D} . \quad (4.32)$$

Por fim, substituindo as definições 4.31, 4.32 e 4.24 na equação 3.50, tem-se o operador tangente, que é dado por

$$E_{ijkl}^t = (1 - D)E_{ijkl}^0 - \frac{1}{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \kappa}{\partial D} \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij} . \quad (4.33)$$

4.2.2 Modelo de Simo e Ju (1987)

O modelo proposto por Simo e Ju (1987) é baseado na definição de um potencial de energia livre, usado para definir uma variável escalar de dano. Duas formas da formulação serão apresentadas.

4.2.2.1 Formulação Baseada em Deformação

Seja a função de carregamento definida como

$$F(\bar{\tau}, D) = \bar{\tau} - \kappa(D) , \quad (4.34)$$

onde

$$\bar{\tau} = \sqrt{2\bar{w}^0} , \quad (4.35)$$

com

$$\bar{w}^0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} , \quad (4.36)$$

e $\kappa(D)$ é o maior valor atingido por $\bar{\tau}$ durante a análise.

Definida a função de carregamento, tem-se

$$\bar{n}_{kl} = \frac{\varepsilon_{ij} E_{ijkl}^0}{\bar{\tau}} \quad \text{e} \quad \bar{H} = \frac{\partial \kappa}{\partial D} . \quad (4.37a,b)$$

Por fim, o operador tangente (dado pela equação 3.50) é dado por

$$E_{ijkl}^t = (1 - D) E_{ijkl}^0 - \frac{1}{\bar{\tau} \frac{\partial \kappa}{\partial D}} \varepsilon_{ij} E_{ijkl}^0 \sigma_{ij}^0 . \quad (4.38)$$

4.2.2.2 Formulação Baseada em Tensão

Esta formulação é dual à apresentada anteriormente. Agora as relações totais são escritas em função da flexibilidade. Assim,

$$C_{ijkl}^D = \bar{D} C_{ijkl}^0 , \quad (4.39)$$

onde

$$\bar{D} = \frac{1}{(1 - D)} . \quad (4.40)$$

Diferenciando a equação 4.39, tem-se

$$\dot{C}_{ijkl}^D = \dot{\bar{D}} C_{ijkl}^0 . \quad (4.41)$$

Da equação 3.76, tem-se que

$$\frac{\partial C_{ijkl}^D}{\partial \bar{D}} = C_{ijkl}^0; \quad \mathcal{M} = 1; \quad \dot{\lambda} = \dot{\bar{D}} . \quad (4.42a,b,c)$$

Portanto, tem-se

$$M_{ijkl} = C_{ijkl}^0 \quad (4.43)$$

e, da equação 3.78, tem-se

$$m_{ij} = C_{ijkl}^0 \sigma_{kl}^0 . \quad (4.44)$$

A função de carregamento bem como a variável escalar são redefinidas para esta formulação. Logo,

$$F(\tau, \bar{D}) = \tau - \kappa(\bar{D}) , \quad (4.45)$$

sendo

$$\tau = \sqrt{2\mathbf{w}^0} , \quad (4.46)$$

com

$$\mathbf{w}^0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} C_{ijkl}^0 \sigma_{kl} , \quad (4.47)$$

e $\kappa(D)$ é o maior valor atingido por τ durante a análise.

O gradiente da função de carregamento e o módulo pós-crítico são obtidos diferenciando a função F em relação a σ_{ij} e \bar{D} , respectivamente, resultando em

$$n_{kl} = \frac{\varepsilon_{kl}^0}{\tau} \quad \text{e} \quad H = \frac{\partial \kappa}{\partial \bar{D}} , \quad (4.48a,b)$$

onde $\varepsilon_{kl}^0 = C_{klpq}^0 \sigma_{pq}$.

O operador tangente pode ser calculado pela equação 3.20. Neste modelo tem-se $E_{ijkl}^D = (1 - D)E_{ijkl}^0$, portanto,

$$E_{ijkl}^t = (1 - D)E_{ijkl}^0 - \frac{(1 - D)^2}{\tau \left[\frac{\partial \kappa}{\partial \bar{D}} + (1 - D)\tau \right]} \sigma_{ij} \sigma_{kl} . \quad (4.49)$$

No trabalho original de Simo e Ju (1987), o operador tangente E_{ijkl}^t é dado como a inversa da flexibilidade C_{ijkl}^t , portanto, substituindo as equações 4.48 e 4.44 na relação geral, dada pela equação 3.25, tem-se

$$C_{ijkl}^t = \frac{1}{(1 - D)} C_{ijkl}^0 + \frac{1}{\tau \frac{\partial \kappa}{\partial \bar{D}}} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 . \quad (4.50)$$

4.2.3 Modelo de Ju (1989)

Neste modelo, Ju (1989) reconsiderou seu trabalho anterior (Simo e Ju, 1987) e formulou o modelo baseado na função da energia livre de *Helmholtz*, no domínio das deformações. A função de carregamento é dada por

$$F(\bar{w}^0, D) = \bar{w}^0 - \kappa(D) , \quad (4.51)$$

onde

$$\bar{w}^0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} \quad (4.52)$$

e $\kappa(D)$ é o maior valor de \bar{w}^0 durante a análise.

Das definições gerais, o gradiente de F e o módulo pós-crítico são dados por

$$\bar{n}_{kl} = \varepsilon_{ij} E_{ijkl}^0 = \sigma_{kl}^0 \quad \text{e} \quad \bar{H} = \frac{\partial \kappa}{\partial D} , \quad (4.53a,b)$$

e o operador tangente pode ser obtido substituindo as equações 4.24 e 4.53 em 3.50, resultando em

$$E_{ijkl}^t = (1 - D) E_{ijkl}^0 - \frac{1}{\frac{\partial \kappa}{\partial D}} \sigma_{ij}^0 \sigma_{kl}^0 . \quad (4.54)$$

4.2.4 Modelo de Lemaitre e Chaboche (1990)

O modelo proposto por Lemaitre e Chaboche (1990) apresenta uma definição para a deformação equivalente, baseada na energia livre e comumente usada para metais, dada por

$$\bar{w}^0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl} . \quad (4.55)$$

Entretanto, esta expressão não reproduz um estado uniaxial de deformações quando submetida a um estado de tensão uniaxial. Logo, é substituída por uma forma modificada dada por

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{E} \varepsilon_{ij} E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}} , \quad (4.56)$$

onde E^0 é o módulo de elasticidade do material e E_{ijkl}^0 são as componentes do tensor de rigidez elástico.

A função de carregamento é dada por

$$F(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - \kappa(D) . \quad (4.57)$$

Portanto, derivando 4.57, tem-se

$$\bar{n}_{kl} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\sigma_{kl}}{E^0} \quad (4.58)$$

e

$$\bar{H}^{-1} = \frac{\partial D}{\partial \kappa} . \quad (4.59)$$

E, por fim, o operador tangente é

$$E_{ijkl}^t = (1 - D)E_{ijkl}^0 - \left[\frac{\partial D}{\partial \kappa} \right] \sigma_{ij}^0 \left[\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right] \quad (4.60)$$

ou

$$E_{ijkl}^t = (1 - D)E_{ijkl}^0 - \left[\frac{\partial D}{\partial \kappa} \right] \sigma_{ij}^0 \frac{\sigma_{kl}^0}{E^0} \left[\frac{1}{E^0 \varepsilon_{ij} E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}} \right]^{-\frac{1}{2}} . \quad (4.61)$$

4.2.5 Modelo de de Vree et al. (1995)

O modelo proposto por de Vree et al. (1995) apresenta uma nova proposta de deformação equivalente que é dada por

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1^\varepsilon + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} (I_1^\varepsilon)^2 + \frac{6k}{(1+\nu)^2} J_2^\varepsilon} , \quad (4.62)$$

com $k = \frac{fc}{ft}$ sendo um parâmetro do material que relaciona a diferença entre comportamentos à tração (ft) e à compressão (fc), I_1^ε e J_2^ε são os primeiro e segundo invariantes do tensor de deformação, respectivamente, dados por

$$I_1^\varepsilon = \varepsilon_{kk} \quad (4.63)$$

e

$$J_2^\varepsilon = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \quad \text{com} \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} . \quad (4.64a,b)$$

A equação de carregamento é dada pela equação 4.56. Portanto, tem-se

$$\bar{n}_{kl} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1^\varepsilon + \frac{1}{2k} \left[\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} (I_1^\varepsilon)^2 + \frac{6k}{(1+\nu)^2} J_2^\varepsilon \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[2 \frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^\varepsilon \frac{\partial I_1^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} + \frac{6k}{(1+\nu)^2} \frac{\partial J_2^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} \right], \quad (4.65)$$

sendo

$$\frac{\partial I_1^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta_{kl} \quad \text{e} \quad \frac{\partial J_2^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} = e_{kl}. \quad (4.66a,b)$$

O operador tangente é, portanto, dado por

$$E_{ijkl}^t = (1-D)E_{ijkl}^0 - \left[\frac{\partial D}{\partial \kappa} \right] \sigma_{ij}^0 \cdot \left\{ \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1^\varepsilon + \frac{1}{2k} \left[\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} (I_1^\varepsilon)^2 + \frac{6k}{(1+\nu)^2} J_2^\varepsilon \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[2 \frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^\varepsilon \frac{\partial I_1^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} + \frac{6k}{(1+\nu)^2} \frac{\partial J_2^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{kl}} \right] \right\}. \quad (4.67)$$

4.2.6 Modelo de Mazars (1984)

No modelo apresentado por Mazars (1984) a deformação equivalente é dada por

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_{(i)} \rangle_+^2} \quad (4.68)$$

com $\langle x \rangle_+ = \frac{|x| + x}{2}$, sendo $\varepsilon_{(i)}$ as deformações principais, dadas por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{(3)} \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

A degradação do meio é obtida por uma combinação de duas variáveis de dano: D_t para dano por tração e D_c para dano por compressão. Logo, tem-se

$$D = \alpha_t D_t + \alpha_c D_c, \quad (4.70)$$

sendo α_t e α_c funções peso usadas para contabilizar o comportamento do material ao dano por tração e compressão respectivamente. O valor do dano por tração, D_t ,

e por compressão, D_c , são calculados por

$$D_{t,c}(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{(1 - A_{t,c})K_0}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_{t,c}}{e^{B_{t,c}(\tilde{\varepsilon} - K_0)}} \quad (4.71)$$

sendo que t , c indicam dano por tração e compressão, respectivamente. Os parâmetros $A_{t,c}$ e $B_{t,c}$ da lei de evolução são identificados de forma independente em ensaios de compressão em corpos de prova cilíndricos e flexão em três pontos. Os pesos α_t e α_c são dados por

$$\alpha_t = \sum_{i=1}^3 = H_i \frac{\varepsilon_{(i)}^t [\varepsilon_{(i)}^t \varepsilon_{(i)}^c]}{\tilde{\varepsilon}^2}; \quad (4.72a)$$

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^3 = H_i \frac{\varepsilon_{(i)}^c [\varepsilon_{(i)}^t \varepsilon_{(i)}^c]}{\tilde{\varepsilon}^2}, \quad (4.72b)$$

com $H_i = 1$ se $\varepsilon_{(i)} = \varepsilon_{(i)}^c + \varepsilon_{(i)}^t \geq 0$, caso contrário $H_i = 0$. Os valores $\boldsymbol{\varepsilon}^t$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^c$, obtidos por meio das partes positivas e negativas do tensor de tensões principais, denotadas por $\boldsymbol{\sigma}^+$ e $\boldsymbol{\sigma}^-$ ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^+ + \boldsymbol{\sigma}^-$), respectivamente, são

$$\varepsilon_{kl}^t = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^+ \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ij}^c = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl}^-. \quad (4.73a,b)$$

Sendo a função de carregamento dada por

$$F(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - \kappa(D), \quad (4.74)$$

tem-se

$$\bar{n}_{kl} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad \text{e} \quad \bar{H} = \left[\frac{\partial D(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} \right]^{-1}, \quad (4.75a,b)$$

onde

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon_{(i)}}{\partial \varepsilon_{kl}} \langle \varepsilon_{(i)} \rangle. \quad (4.76)$$

Por fim, pode-se escrever o operador tangente substituindo as equações 4.75 e 4.24 na forma geral, dada pela equação 3.50. Portanto, tem-se

$$E_{ijkl}^t = (1 - D) E_{ijkl}^0 - \left[\frac{\partial D(\tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{\varepsilon}} \right] \sigma_{ij}^0 \left[\frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \varepsilon_{(i)}}{\partial \varepsilon_{kl}} \langle \varepsilon_{(i)} \rangle \right]. \quad (4.77)$$

Uma forma simplificada do dano isotrópico, que adota a deformação equivalente de Mazars, foi apresentada por de Borst e Gutiérrez (1999). Embora a medida de deformação seja a mesma, a proposta apresenta uma maior simplicidade no cálculo da variável de dano, pois não considera a degradação por compressão e nem a influência do estado de tensão no valor final da degradação. A vantagem é de apresentar uma maior versatilidade na escolha da função de evolução do dano. Tanto a proposta original de Mazars (1984) quanto a versão de de Borst e Gutiérrez (1999) foram implementadas, como mostrado no capítulo 6.

4.3 Modelos de Dano Ortotrópico

Uma forma geral para modelos ortotrópicos com múltiplas funções de carregamento será apresentada. Para tanto, serão tomadas medidas de deformação para o cálculo do dano, funções de carregamento desacopladas e uma hipótese geral para o tensor de rigidez.

A relação total apresenta o tensor de rigidez escrito em função das variáveis de dano, $E_{ijkl} = E_{ijkl}(E_{pqrs}^0, \bar{\mathcal{D}}_{rs})$, dada por

$$\sigma_{kl} = E_{ijkl}(E_{pqrs}^0, \bar{\mathcal{D}}_{rs})\varepsilon_{kl} . \quad (4.78)$$

As variáveis de dano, $\bar{\mathcal{D}}_{rs}$, serão escritas em um tensor de integridade, dado por

$$\bar{\phi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1(\varepsilon_1) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\phi}_2(\varepsilon_2) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\phi}_3(\varepsilon_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - D_1(\varepsilon_1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 - D_2(\varepsilon_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 - D_3(\varepsilon_3) \end{bmatrix} , \quad (4.79)$$

onde D_1 , D_2 e D_3 são variáveis de dano.

Na formulação agora apresentada serão adotadas três funções de carregamento desacopladas. Sejam, portanto, as funções de carregamento nas direções das deformações locais, dadas por

$$F_1(\varepsilon_1, \kappa(\bar{\phi}_1)) = \varepsilon_1 - \kappa(\bar{\phi}_1); \quad (4.80)$$

$$F_2(\varepsilon_2, \kappa(\bar{\phi}_2)) = \varepsilon_2 - \kappa(\bar{\phi}_2); \quad (4.81)$$

$$F_3(\varepsilon_3, \kappa(\bar{\phi}_3)) = \varepsilon_3 - \kappa(\bar{\phi}_3). \quad (4.82)$$

O vetor com as funções de carregamento pode ser escrito como

$$F_n = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (4.83)$$

Da forma linearizada das condições de consistência, dadas nas equações 3.28 e 3.31, no caso de modelos no domínio das deformações, tem-se os gradientes das funções de carregamento

$$\begin{Bmatrix} \dot{F}_1 \\ \dot{F}_2 \\ \dot{F}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{n}_{1ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \bar{H}_{11}\dot{\lambda}_1 \\ \bar{n}_{2ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \bar{H}_{22}\dot{\lambda}_2 \\ \bar{n}_{3ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \bar{H}_{33}\dot{\lambda}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (4.84)$$

Logo, como demonstrado nas equações 3.29 e 3.30, pode-se calcular parcelas necessárias à montagem do operador tangente.

Começando pelo cálculo do gradiente da função de carregamento, segundo a equação 3.29, tem-se

$$\bar{n}_{nkl} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{kl}} \right|_p = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \frac{\partial F_1}{\partial \varepsilon_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \varepsilon_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \varepsilon_3} \end{array} \right]. \quad (4.85)$$

O tensor dos módulos pós-crítico, obtido por 3.30, é

$$\bar{H}_{nm} = - \left. \frac{\partial F_n}{\partial \bar{p}_m} \right|_\varepsilon = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{\partial F_1}{\partial \bar{\phi}_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial F_2}{\partial \bar{\phi}_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial F_3}{\partial \bar{\phi}_3} \end{array} \right], \quad (4.86)$$

sendo o conjunto de variáveis internas, \bar{p}_m , associado às variáveis de dano. Desta forma, o tensor \bar{H}_{nm} pode ser reescrito como

$$\bar{H}_{nm} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \kappa(\bar{\phi}_1)}{\partial \bar{\phi}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \kappa(\bar{\phi}_2)}{\partial \bar{\phi}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \kappa(\bar{\phi}_3)}{\partial \bar{\phi}_3} \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

Uma vez que nem sempre se tem uma forma explícita para a definição da variável histórica $\kappa(D_n)$, o tensor pós-crítico pode ser montado a partir de sua forma inversa, utilizando-se as leis de evolução das variáveis de dano. Derivando as funções de dano em relação às deformações, tem-se

$$\frac{\partial \bar{\phi}_{np}}{\partial \varepsilon_{pm}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial \varepsilon_3} \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

Supondo que a variável histórica é dada como o maior valor de deformação (em cada direção) já atingido pelo material durante a análise, o tensor das derivadas das funções de dano é a forma inversa do tensor pós-crítico. Assim,

$$\bar{H}_{nm}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\phi}_1}{\partial \varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \bar{\phi}_2}{\partial \varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \bar{\phi}_3}{\partial \varepsilon_3} \end{bmatrix}. \quad (4.89)$$

A evolução da degradação do material é dada pelo tensor $\bar{\mathbf{m}}$ que pode ser obtida pela degradação do tensor de rigidez dado pelo tensor \bar{M}_{mijpq} , logo, relembrando a equação 3.143, tem-se

$$\bar{M}_{mijpq} = \frac{\partial E_{ijpq}}{\partial \bar{\mathcal{D}}_{rs}} \bar{\mathcal{M}}_{mrs} \quad (4.90)$$

e, da equação 3.88, pode-se calcular a evolução do dano por

$$\bar{m}_{mij} = \bar{M}_{mijpq} \varepsilon_{pq}. \quad (4.91)$$

Portanto, o tensor \bar{M}_{mijpq} , como já dito, representa a forma como a rigidez irá se degradar. A parcela derivada na equação 4.89 indica a mudança da rigidez à medida que o dano progride. O tensor $\bar{\mathcal{M}}_{mrs}$ indica a direção da propagação do dano. Desta forma, considerando as direções locais de dano, para o caso de funções desacopladas, tem-se

$$\bar{\mathcal{M}}_{mrs} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (4.92)$$

Assim,

$$\bar{M}_{mijpq} = \left[\bar{M}_{1ijpq} \mid \bar{M}_{2ijpq} \mid \bar{M}_{3ijpq} \right], \quad (4.93)$$

ou

$$\bar{M}_{mijpq} = \left[\frac{\partial E_{ijpq}}{\partial \bar{\mathcal{D}}_{rs}} \bar{\mathcal{M}}_{1rs} \mid \frac{\partial E_{ijpq}}{\partial \bar{\mathcal{D}}_{rs}} \bar{\mathcal{M}}_{2rs} \mid \frac{\partial E_{ijpq}}{\partial \bar{\mathcal{D}}_{rs}} \bar{\mathcal{M}}_{3rs} \right]. \quad (4.94)$$

A taxa de degradação da rigidez é diretamente dependente da hipótese adotada, portanto, o tensor de rigidez secante, no caso ortotrópico, pode ser escrito na forma geral, dada por

$$E_{ijkl} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} E_{1111} & 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 & 0 & 0 & E_{1313} \\ 0 & E_{1122} & 0 & E_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{1133} & 0 & 0 & 0 & E_{1331} & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{2112} & 0 & E_{2211} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{2121} & 0 & 0 & 0 & E_{2222} & 0 & 0 & 0 & E_{2323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2233} & 0 & E_{2332} & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{3113} & 0 & 0 & 0 & E_{3311} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{3223} & 0 & E_{3322} & 0 \\ E_{3131} & 0 & 0 & 0 & E_{3232} & 0 & 0 & 0 & E_{3333} \end{array} \right], \quad (4.95)$$

sendo as componentes do tensor funções das variáveis de dano tal que $E_{ijkl} = f(\bar{\phi}_{pq})$.

Expandindo cada parcela do tensor $\bar{\mathbf{M}}$, denotadas por \bar{M}_{1ijpq} , \bar{M}_{2ijpq} e \bar{M}_{3ijpq} , tem-se, respectivamente:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\frac{\partial E_{1111}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{1212}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{1313}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111} \\
0 & \frac{\partial E_{1122}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & \frac{\partial E_{1221}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial E_{1133}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{1331}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 \\
\hline
0 & \frac{\partial E_{2112}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & \frac{\partial E_{2211}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial E_{2121}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \frac{\partial E_{3113}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{3311}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial E_{3131}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right] \quad (4.96)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{1212}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\partial E_{1122}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & \frac{\partial E_{1221}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \frac{\partial E_{2112}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & \frac{\partial E_{2211}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial E_{2121}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{2222}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{2323}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{2233}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & \frac{\partial E_{2332}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{3223}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & \frac{\partial E_{3322}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{3232}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right] \quad (4.97)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{1313}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{\partial E_{1133}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{1331}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{2323}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{2233}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} & 0 & \frac{\partial E_{2332}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} & 0 \\
\hline
0 & 0 & \frac{\partial E_{3113}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{3311}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{3223}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} & 0 & \frac{\partial E_{3322}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} & 0 \\
\frac{\partial E_{3131}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{3232}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial E_{3333}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333}
\end{array} \right] \quad (4.98)$$

Para $\bar{\mathbf{m}}$ dado por

$$\bar{m}_{mij} = \left[\bar{m}_{1ij} \mid \bar{m}_{2ij} \mid \bar{m}_{3ij} \right], \quad (4.99)$$

tem-se

$$\bar{m}_{mij} = \left[\bar{M}_{1ijpq}\varepsilon_{pq} \mid \bar{M}_{2ijpq}\varepsilon_{pq} \mid \bar{M}_{3ijpq}\varepsilon_{pq} \right]. \quad (4.100)$$

Calculando-se as componentes \bar{m}_{mij} , tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{m}_{111} &= \frac{\partial E_{1111}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{11} + \frac{\partial E_{1122}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{22} + \frac{\partial E_{1133}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{33} \\ \bar{m}_{112} &= \frac{\partial E_{1212}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{12} + \frac{\partial E_{1221}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{21} \\ \bar{m}_{113} &= \frac{\partial E_{1313}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{13} + \frac{\partial E_{1331}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{31} \\ \bar{m}_{121} &= \frac{\partial E_{2112}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{12} + \frac{\partial E_{2121}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{21} \\ \bar{m}_{122} &= \frac{\partial E_{2211}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{11} \\ \bar{m}_{123} &= 0 \\ \bar{m}_{131} &= \frac{\partial E_{3113}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{13} + \frac{\partial E_{3131}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{31} \\ \bar{m}_{132} &= 0 \\ \bar{m}_{133} &= \frac{\partial E_{3311}}{\partial \bar{\phi}_{11}} \bar{\mathcal{M}}_{111}\varepsilon_{11} \\ \\ \bar{m}_{211} &= \frac{\partial E_{1122}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{22} \\ \bar{m}_{212} &= \frac{\partial E_{1212}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{12} + \frac{\partial E_{1221}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{21} \\ \bar{m}_{213} &= 0 \\ \bar{m}_{221} &= \frac{\partial E_{2112}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{12} + \frac{\partial E_{2121}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{21} \\ \bar{m}_{222} &= \frac{\partial E_{2211}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{11} + \frac{\partial E_{2222}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{22} + \frac{\partial E_{2233}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{33} \\ \bar{m}_{223} &= \frac{\partial E_{2323}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{23} + \frac{\partial E_{2332}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{32} \\ \bar{m}_{231} &= 0 \\ \bar{m}_{232} &= \frac{\partial E_{3223}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{23} + \frac{\partial E_{3232}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{32} \\ \bar{m}_{233} &= \frac{\partial E_{3322}}{\partial \bar{\phi}_{22}} \bar{\mathcal{M}}_{222}\varepsilon_{22} \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned}
\bar{m}_{311} &= \frac{\partial E_{1133}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{33} \\
\bar{m}_{312} &= 0 \\
\bar{m}_{313} &= \frac{\partial E_{1313}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{13} + \frac{\partial E_{1331}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{31} \\
\bar{m}_{321} &= 0 \\
\bar{m}_{322} &= \frac{\partial E_{2233}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{33} \\
\bar{m}_{323} &= \frac{\partial E_{2323}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{23} + \frac{\partial E_{2332}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{32} \\
\bar{m}_{331} &= \frac{\partial E_{3113}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{13} + \frac{\partial E_{31331}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{31} \\
\bar{m}_{332} &= \frac{\partial E_{3223}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{23} + \frac{\partial E_{3232}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{32} \\
\bar{m}_{333} &= \frac{\partial E_{3311}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{11} + \frac{\partial E_{3322}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{22} + \frac{\partial E_{3333}}{\partial \bar{\phi}_{33}} \bar{\mathcal{M}}_{333} \varepsilon_{33}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Uma vez obtidos os tensores, pela derivação da função de carregamento em relação às deformações ($\bar{\mathbf{n}}$) e em relação às variáveis internas da degradação elástica ($\bar{\mathbf{H}}$) e a evolução do dano ($\bar{\mathbf{m}}$) advindo da taxa de degradação da rigidez, o operador tangente pode ser calculado pela equação 3.50, abaixo reescrita:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl} \tag{4.104}$$

ou pela equação 3.90, abaixo reescrita:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{M}_{mijpq} \varepsilon_{pq} \bar{n}_{nkl} . \tag{4.105}$$

4.3.1 Modelos de Fissuração Distribuída

Os modelos de fissuração distribuída tradicionalmente são formulados no sistema local de coordenadas, que para estes modelos, são tomados os eixos das deformações principais. Na formulação com múltiplas funções de carregamento tem-se, portanto, uma função para cada eixo principal, avaliando a condição de carregamento e dano na respectiva direção. A possibilidade de se ter funções diferentes para cada direção permite ao modelo que capte de forma independente o comportamento, seja de tração ou compressão e, no caso particular do modelo aqui formulado, indiretamente

o cisalhamento. A figura 4.1(a) ilustra uma situação de carregamento direto capaz de gerar um estado de degradação avançado (Figura 4.1(b)) medido por uma função prescrita na respectiva direção. Nas demais direções tem-se um estado inicial de dano causado pelo efeito de Poisson.

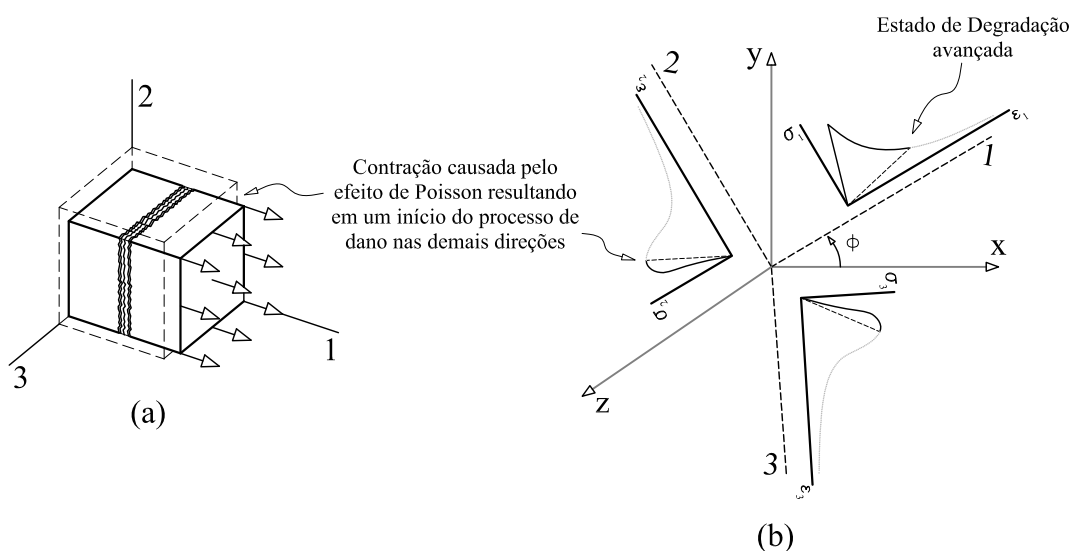


Figura 4.1: Relações tensão-deformação diferentes para as direções principais.

A fim de generalizar a formulação, as expressões para o dano, bem como os tensores relacionados foram tratados, na seção 4.3, supondo o caso tridimensional. O detalhamento para cada modelo de análise (Estado plano de tensão, estado plano de deformação, axissimétrico e sólido) é apresentado no apêndice D e diferentes funções de evolução do dano são apresentadas no apêndice E. Para exemplificar os modelos fissuração distribuída, será apresentado a formulação para o estado plano de tensão.

As funções de carregamento são dadas por

$$F_1 = \epsilon_1 - \kappa_1 ; \quad (4.106a)$$

$$F_2 = \epsilon_2 - \kappa_2 , \quad (4.106b)$$

sendo ϵ_1 e ϵ_2 as deformação principais e κ_1 e κ_2 as variáveis históricas associadas às deformações principais 1 e 2, respectivamente.

onde E^0 é o módulo de elasticidade do material e β é o fator de retenção ao cisalhamento.

O tensor de evolução do dano é calculado pela equação 4.100. Para tanto, tem-se a direção de propagação dada por

$$\bar{\mathcal{M}}_{mrs} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (4.112)$$

E a degradação da rigidez, dada pela equação 4.94, é dada por

$$\bar{M}_{mijpq} = \left[\frac{\partial E_{ijpq}}{\partial \mathcal{D}_{rs}} \bar{\mathcal{M}}_{1rs} \mid \frac{\partial E_{ijpq}}{\partial \mathcal{D}_{rs}} \bar{\mathcal{M}}_{2rs} \mid 0 \right], \quad (4.113)$$

logo,

$$M_{1ijpq} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} \frac{2\bar{\phi}_{(1)}E_0}{(1-\nu^2)} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(2)}E_0}{2(1+\nu)} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\phi}_{(2)}E_0\nu}{(1-\nu^2)} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(2)}E_0}{2(1+\nu)} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(2)}E_0\nu}{(1-\nu^2)} \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.114)$$

e

$$M_{2ijpq} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(1)}E_0}{2(1+\nu)} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{\phi}_{(1)}E_0\nu}{(1-\nu^2)} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(1)}E_0}{2(1+\nu)} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(1)}E_0\nu}{(1-\nu^2)} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\bar{\phi}_{(2)}E_0}{(1-\nu^2)} \bar{\mathcal{M}}_{222} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (4.115)$$

Por fim, com os tensores 4.107, 4.109 e 4.113, pode-se escrever o operador tangente dado na equação 4.105.

4.3.2 Modelos de Dano Distribuído por de Borst e Gutiérrez (1999)

Uma forma simplificada do modelo de dano distribuído ortotrópico foi apresentada por de Borst e Gutiérrez (1999). O modelo considera dano somente na direção

da primeira de deformação principal em tração e assume o comportamento linear elástico nas demais direções. Logo, tem-se uma única função de carregamento e uma única variável de dano. Assim como nos modelos de fissuração, para exemplificar, será apresentada a formulação para um modelo em estado plano de tensão.

Portanto, a função de carregamento, no sistema local de dano, é

$$F_1 = \varepsilon_1 - \kappa_1 . \quad (4.116)$$

A hipótese adotada para o tensor de rigidez, para um estado plano de tensão, é dado por

$$E_{ijkl} = \begin{bmatrix} \frac{(1-D_1)E^0}{1-(1-D_1)\nu^2} & 0 & 0 & 0 & \beta \frac{(1-D_1)E^0}{2[1+(1-D_1)\nu]} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-D_1)\nu E^0}{1-(1-D_1)\nu^2} & 0 & \beta \frac{(1-D_1)E^0}{2[1+(1-D_1)\nu]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-D_1)\nu E^0}{1-(1-D_1)\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E^0}{1-(1-D_1)\nu^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad (4.117)$$

onde E^0 é o módulo de elasticidade do material e β é o fator de retenção ao cisalhamento.

Derivando a função de carregamento em relação às deformações principais, tem-se

$$\bar{n}_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (4.118)$$

Da função de carregamento tem-se que o módulo pós-crítico que é dado por

$$\bar{H} = -\frac{\partial F}{\partial D_1} = \frac{\partial \kappa_1}{\partial D_1} . \quad (4.119)$$

Invertendo 4.119, tem-se

$$\bar{H}^{-1} = \frac{\partial D_1}{\partial \kappa_1} , \quad (4.120)$$

sendo D_1 a variável de dano que pode ser calculada por uma função de evolução.

A evolução do dano é dada por

$$\bar{m}_{ij} = \bar{M}_{ijkl}\varepsilon_{kl} , \quad (4.121)$$

sendo

$$\bar{M}_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial D_1} \bar{\mathcal{M}} . \quad (4.122)$$

com $\bar{\mathcal{M}} = 1$. O tensor \bar{M}_{ijkl} é formado pelas derivadas do tensor de rigidez, logo, tem-se

$$M_{ijkl} = \begin{bmatrix} \frac{-E^0}{[1 - (1 - \omega)\nu^2]^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-E^0}{2[1 - (1 - \omega)\nu^2]} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\nu E^0}{[1 - (1 - \omega)\nu^2]^2} & 0 & \frac{-E^0}{2[1 - (1 - \omega)\nu^2]} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\nu E^0}{[1 - (1 - \omega)\nu^2]^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\nu^2 E^0}{[1 - (1 - \omega)\nu^2]^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

Por fim, o operador tangente, dado por

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{H} \bar{M}_{ijpq} \varepsilon_{pq} \bar{n}_{kl} , \quad (4.124)$$

pode ser obtido substituindo 4.118, 4.119 e 4.123 em 4.124.

4.4 Modelos Anisotrópicos

Na literatura existem diversas formas para representar a anisotropia do meio material (Fichant et al., 1999; Chow et al., 2001; Hammi et al., 2003; Challamel et al., 2005; Choi e Pan, 2009). Dentre as formas mais comuns tem-se a representação da degradação anisotrópica em termos de tensores de dano (Voyiadjis et al., 2009) e pela teoria de microplanos (Ožbolt et al., 2001; Carol et al., 2001a; Kuhl et al., 2001; Leukart e Ramm, 2002, 2006).

Formas tensoriais para o dano anisotrópico podem ser obtidas de forma análoga à apresentada para os modelos ortotrópicos. Entretanto, seria necessário um número maior de variáveis a serem controladas e parametrizadas, tornando o modelo mais complexo e laborioso. No apêndice B são apresentadas algumas hipóteses para formas tensoriais de dano.

Os modelos baseados na teoria de microplanos tentam descrever o comportamento do material partindo da descrição de um plano genérico, de direção arbitrária, para em seguida descrever as várias direções do material. A seguir, será apresentado um modelo simplificado de microplanos formulado no contexto da estrutura teórica apresentada.

4.4.1 Modelos de Microplanos

O modelo de microplanos apresentado por Bažant e Gambarova (1984) propõe que a anisotropia do meio seja computada a partir de planos independentes orientados no espaço, de modo que o comportamento do material seja captado em direções diferentes. Dentre os vários tipos de formulações existentes, um forma simplificada do modelo de microplanos foi apresentada por de Borst e Gutiérrez (1999) e será agora formulada segundo a proposta teórica multipotencial vista no capítulo 3.

O modelo baseia-se na restrição cinemática, resultando em deformações normais e tangenciais em cada microplano, que pode ser deduzida pela simples projeção das deformações globais macroscópicas em um dado microplano α . Portanto, tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\alpha = \mathbf{T}_\varepsilon^\alpha \boldsymbol{\varepsilon} . \quad (4.125)$$

As tensões em um microplano qualquer pode ser calculada pela relação

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nn}^\alpha \\ 0 \\ \tau_{nt}^\alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - D_N^\alpha)E_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - D_T^\alpha)E_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{nn}^\alpha \\ 0 \\ \gamma_{nt}^\alpha \end{Bmatrix} , \quad (4.126)$$

sendo o módulo de rigidez inicial E_N e E_T funções do módulo de elasticidade (Módulo de Young), do coeficiente de Poisson e de um função peso. Mais detalhes destes parâmetros foram descritos por Bažant e Prat (1988a,b). Os parâmetros do dano D_N^α e D_T^α são funções de um parâmetro histórico κ_N^α e κ_T^α , que são as deformações normais e tangenciais no microplano, respectivamente.

O tensor de rigidez em um microplano α é, portanto,

$$E_{ij}^{\alpha} = \begin{bmatrix} (1 - \omega_N^{\alpha})E_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \omega_T^{\alpha})E_T \end{bmatrix}. \quad (4.127)$$

As funções de carregamento podem ser escritas como

$$f_N^{\alpha} = \varepsilon_{nn}^{\alpha} - \kappa_N^{\alpha}; \quad (4.128)$$

$$f_T^{\alpha} = \gamma_{nt}^{\alpha} - \kappa_T^{\alpha}. \quad (4.129)$$

Por fim, a partir de uma relação tensão-deformação, ou de leis de evolução do dano, nos microplanos e das funções de carregamento, pode-se obter os gradientes necessários para o cálculo do tensor tangente.

É importante introduzir o tensor de integridade, escrito por

$$\bar{\phi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_N & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\phi}_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - D_N^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - D_T^{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (4.130)$$

Para obter a taxa de degradação da rigidez deriva-se o tensor de rigidez em relação às variáveis de dano, assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{11}^{\alpha}}{\partial D_1} &= -E_N; & \frac{\partial E_{11}}{\partial D_3} &= 0; \\ \frac{\partial E_{33}^{\alpha}}{\partial D_1} &= 0; & \frac{\partial E_{33}}{\partial D_3} &= -E_T. \end{aligned}$$

Sendo o tensor $\bar{\mathcal{M}}_{mrs}$ dado por

$$\bar{\mathcal{M}}_{mrs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.132)$$

O tensor da taxa de degradação, calculado por $\bar{M}_{mij} = \frac{\partial E_{ij}}{\partial \bar{\mathcal{D}}_*} \bar{\mathcal{M}}_{m*}$, é escrito como

$$\bar{M}_{mij} = \left[\bar{M}_{1ij} \mid \underline{0} \mid \bar{M}_{3ij} \right], \quad (4.133)$$

sendo

$$M_{1ij} = \begin{bmatrix} -E_N^\alpha \bar{\mathcal{M}}_{111} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{3ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_T^\alpha \bar{\mathcal{M}}_{333} \end{bmatrix}. \quad (4.134)$$

O tensor pós-crítico pode ser escrito por

$$\bar{H}_{nm} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f_N^\alpha}{\partial D_N^\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial f_T^\alpha}{\partial D_T^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \kappa_N^\alpha}{\partial D_N^\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \kappa_T^\alpha}{\partial D_T^\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.135)$$

e sua forma inversa é dada por

$$\bar{H}_{nm}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_N^\alpha}{\partial \kappa_N^\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial D_T^\alpha}{\partial \kappa_T^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_N & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\phi}_T \end{bmatrix}. \quad (4.136)$$

O gradiente da função de carregamento \bar{n}_{nj} é

$$\bar{n}_{nj} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_N^\alpha}{\partial \varepsilon_{nn}^\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_T^\alpha}{\partial \gamma_{ns}^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.137)$$

Por fim, o operador tangente pode ser obtido a partir da equação 3.90, resultando em

$$E_{ij}^t = \begin{bmatrix} (1 - \omega_N^\alpha)E_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \omega_T^\alpha)E_T \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

$$+ \begin{bmatrix} E_N^\alpha \bar{\mathcal{M}}_{111} \varepsilon_{nn}^\alpha \bar{n}_{111} \frac{\partial \bar{\phi}_N}{\partial \omega_N^\alpha} \frac{\partial \omega_N^\alpha}{\partial \varepsilon_{nn}^\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_T^\alpha \bar{\mathcal{M}}_{333} \gamma_{ns}^\alpha \bar{n}_{333} \frac{\partial \bar{\phi}_T}{\partial \omega_T^\alpha} \frac{\partial \omega_T^\alpha}{\partial \gamma_{ns}^\alpha} \end{bmatrix}.$$

Capítulo 5

Proposta de um Modelo de Dano com Múltiplas Funções de Carregamento

Na modelagem de meios parcialmente frágeis, a diferenciação entre os efeitos de tração e compressão são fundamentais para uma melhor representação da constituição do material. Em modelos direcionais, as funções de carregamento são prescritas para cada direção de dano e o comportamento (de tração ou compressão) é controlado por leis de evolução da degradação para cada direção. O modelo aqui proposto também adota funções de carregamento específicas para regiões de tração e compressão, e faz uso da separação das parcelas volumétrica e desviadora das deformações. Esta decomposição tem vantagens, pois possibilita o uso dos invariantes do tensor de deformação para avaliar a degradação do meio.

5.1 Formulação Básica

A formulação do modelo baseia-se na energia livre, particionada em parcelas volumétrica e desviadora, conforme a proposta de Ladevèze (1983), escrita como

$$\psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left[(1 - D^d) \mu^0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) + (1 - D^v) K^0 \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \varepsilon_{kl} , \quad (5.1)$$

onde $\mu^0 = \frac{E^0}{2(1+\nu)}$ é o módulo de elasticidade transversal, $K^0 = \frac{E^0}{3(1-2\nu)}$ é o módulo volumétrico e D^d e D^v são variáveis que controlam o dano das parcelas desviadora e volumétrica, respectivamente.

Para contabilizar os efeitos de tração e compressão na energia livre, adota-se aqui a medida de deformação equivalente proposta por Comi (2001), que baseia-se nas parcelas volumétricas positiva e negativa do tensor de deformação, dadas por

$$tr^+ \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_t^v = \frac{tr \boldsymbol{\varepsilon} + |tr \boldsymbol{\varepsilon}|}{2} \quad (5.2)$$

e

$$tr^- \boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_c^v = \frac{tr \boldsymbol{\varepsilon} - |tr \boldsymbol{\varepsilon}|}{2}, \quad (5.3)$$

onde $tr \boldsymbol{\varepsilon}$ indica o traço do tensor de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Utilizando as expressões 5.2 e 5.3, a energia livre pode ser reescrita na forma

$$\psi = \frac{1}{2} \{ 2\mu_0(1 - D^d) \mathbf{e} : \mathbf{e} + K_0(1 - D_t^v)(tr^+ \boldsymbol{\varepsilon})^2 + K_0(1 - D_c^v)(tr^- \boldsymbol{\varepsilon})^2 \}, \quad (5.4)$$

onde \mathbf{e} é o tensor das deformações desviadoras, cujas componentes são dadas por

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (5.5)$$

onde D_t^v é o dano por tração e D_c^v é o dano por compressão.

No modelo apresentado por Comi (2001), especifica-se uma superfície escrita em termos das variáveis de dano. Desta forma, um algoritmo de retorno é necessário para a obtenção do estado de dano e, por conseguinte, calcular as tensões necessárias ao equilíbrio. A definição das funções de carregamento compreende também a descrição do regime pós-crítico, sendo, portanto, necessário mais um conjunto de equações. Assim, para a definição das funções de carregamento e das equações do regime inelástico, são necessários muitos parâmetros de caracterização da superfície de dano, sendo alguns destes parâmetros de difícil correlação com grandezas físicas conhecidas.

Visando superar esse inconvenientes, no modelo aqui proposto, formulado no domínio das deformações, adotou-se as deformações equivalentes propostas por Comi

(2001), entretanto, a definição da superfície de dano é substituída por leis de evolução. Esta substituição simplifica a definição do estado de degradação, uma vez que o dano é computado diretamente de equações pré definidas, sendo desnecessário um algoritmo de retorno. Além disso, são adotadas funções de carregamento mais simples, baseadas no estado de deformações corrente e em uma variável histórica, com um número reduzido de parâmetros.

Derivando a equação 5.4 tem-se a relação total entre tensões e deformações na forma

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu_0(1 - D^d)\frac{\partial[\mathbf{e} : \mathbf{e}]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + K_0(1 - D_t^v)\frac{\partial[(tr^+\boldsymbol{\varepsilon})^2]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + K_0(1 - D_c^v)\frac{\partial[(tr^-\boldsymbol{\varepsilon})^2]}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5.6)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{e} : \mathbf{e} &= (\varepsilon_{11} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}))^2 + (\varepsilon_{12})^2 + (\varepsilon_{13})^2 \\ &+ (\varepsilon_{21})^2 + (\varepsilon_{22} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}))^2 + (\varepsilon_{23})^2 \\ &+ (\varepsilon_{31})^2 + (\varepsilon_{32})^2 + (\varepsilon_{33} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}))^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Derivando 5.7 em relação às componentes de deformação, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{e} : \mathbf{e})}{\partial \varepsilon_{11}} &= 2(\varepsilon_{11} - \varepsilon^v)(1 - \frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{11}}) + 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon^v)(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{11}}) + 2(\varepsilon_{33} - \varepsilon^v)(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{11}}) \\ &= 2(\varepsilon_{11} - \varepsilon^v) + 2(\varepsilon_{11} - \varepsilon^v)(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{11}}) + 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon^v)(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{11}}) \\ &\quad + 2(\varepsilon_{33} - \varepsilon^v)(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{11}}) \\ &= 2(\varepsilon_{11} - \varepsilon^v) - 2\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{11}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - 3\varepsilon^v) \\ &= 2(\varepsilon_{11} - \varepsilon^v); \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathbf{e} : \mathbf{e})}{\partial \varepsilon_{22}} &= 2(\varepsilon_{11} - \varepsilon^v)(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{22}}) + 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon^v)(1 - \frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{22}}) + 2(\varepsilon_{33} - \varepsilon^v)(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{22}}) \\ &= 2(\varepsilon_{11} - \varepsilon^v)(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{22}}) + 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon^v) + 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon^v)(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{22}}) \\ &\quad + 2(\varepsilon_{33} - \varepsilon^v)(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{22}}) \\ &= 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon^v) - 2\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{22}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - 3\varepsilon^v) \\ &= 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon^v); \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathbf{e} : \mathbf{e})}{\partial \varepsilon_{33}} &= 2(\varepsilon_{11} - \varepsilon^v) \left(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{33}}\right) + 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon^v) \left(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{33}}\right) + 2(\varepsilon_{33} - \varepsilon^v) \left(1 - \frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{33}}\right) \\
&= 2(\varepsilon_{11} - \varepsilon^v) \left(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{33}}\right) + 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon^v) \left(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{33}}\right) \\
&\quad + 2(\varepsilon_{33} - \varepsilon^v) + 2(\varepsilon_{33} - \varepsilon^v) \left(-\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{33}}\right) \\
&= 2(\varepsilon_{22} - \varepsilon^v) - 2\frac{\partial \varepsilon^v}{\partial \varepsilon_{33}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - 3\varepsilon^v) \\
&= 2(\varepsilon_{33} - \varepsilon^v) ; \tag{5.10}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{e} : \mathbf{e})}{\partial \varepsilon_{12}} = 2(\varepsilon_{12}) ; \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{e} : \mathbf{e})}{\partial \varepsilon_{13}} = 2(\varepsilon_{13}) ; \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{e} : \mathbf{e})}{\partial \varepsilon_{21}} = 2(\varepsilon_{21}) ; \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{e} : \mathbf{e})}{\partial \varepsilon_{23}} = 2(\varepsilon_{23}) ; \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{e} : \mathbf{e})}{\partial \varepsilon_{31}} = 2(\varepsilon_{31}) ; \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{e} : \mathbf{e})}{\partial \varepsilon_{32}} = 2(\varepsilon_{32}) . \tag{5.16}$$

Escrevendo as parcelas 5.8 a 5.16 na forma tensorial tem-se:

$$\frac{\partial[\mathbf{e} : \mathbf{e}]}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2 \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon^v & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon^v & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon^v \end{bmatrix} = 2\mathbf{e} . \tag{5.17}$$

Da definição de deformação equivalente, das equações 5.2 e 5.3, tem-se, para a tração

$$\bar{\varepsilon}_t^v = tr^+ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (tr \boldsymbol{\varepsilon} + |tr \boldsymbol{\varepsilon}|) = \begin{cases} tr \boldsymbol{\varepsilon} & \text{para } tr \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ 0 & \text{para } tr \boldsymbol{\varepsilon} < 0 \end{cases} \tag{5.18}$$

e, para a compressão

$$\bar{\varepsilon}_c^v = tr^- \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(tr \boldsymbol{\varepsilon} - |tr \boldsymbol{\varepsilon}|) = \begin{cases} 0 & \text{para } tr \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ tr \boldsymbol{\varepsilon} & \text{para } tr \boldsymbol{\varepsilon} < 0 \end{cases}. \quad (5.19)$$

Assim, as derivadas $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} [(tr^+ \boldsymbol{\varepsilon})^2]$ e $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} [(tr^- \boldsymbol{\varepsilon})^2]$ são dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} [(tr^+ \boldsymbol{\varepsilon})^2] = 2tr^+ \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial(tr^+ \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (5.20)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} [(tr^- \boldsymbol{\varepsilon})^2] = 2tr^- \boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial(tr^- \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5.21)$$

com

$$\frac{\partial(tr^+ \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{cases} \frac{\partial(tr \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} & \text{para } tr \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ 0 & \text{para } tr \boldsymbol{\varepsilon} < 0 \end{cases} = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{para } tr \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ 0 & \text{para } tr \boldsymbol{\varepsilon} < 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

e

$$\frac{\partial(tr^- \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{cases} 0 & \text{para } tr \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ \frac{\partial(tr \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} & \text{para } tr \boldsymbol{\varepsilon} < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{para } tr \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ \mathbf{I} & \text{para } tr \boldsymbol{\varepsilon} < 0 \end{cases}. \quad (5.23)$$

As expressões 5.22 e 5.23 podem ser escritas matematicamente por

$$\frac{\partial(tr^+ \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{H}(tr \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \quad (5.24)$$

e

$$\frac{\partial(tr^- \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{H}(-tr \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}, \quad (5.25)$$

onde $\mathcal{H}()$ é a função de Heavyside ($\mathcal{H}(x) = 1$ para $x > 0$ e $\mathcal{H}(x) = 0$ para $x < 0$).

Usando os resultados de 5.17, 5.24 e 5.25, escreve-se 5.6 na forma

$$\sigma_{ij} = 2\mu_0(1 - D^d)e_{ij} + K_0(1 - D_t^v)\mathcal{H}(tr \boldsymbol{\varepsilon})\bar{\varepsilon}_t^v \delta_{ij} + K_0(1 - D_c^v)\mathcal{H}(-tr \boldsymbol{\varepsilon})\bar{\varepsilon}_c^v \delta_{ij}. \quad (5.26)$$

Após a definição da relação total entre tensão e deformação, pode-se obter a relação constitutiva secante, dada por

$$\mathbf{E}^s = 2\mu \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + [K_+[\mathcal{H}(tr \boldsymbol{\varepsilon})]^2 + K_-[\mathcal{H}(-tr \boldsymbol{\varepsilon})]^2] \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (5.27)$$

onde

$$\mu = \mu_0(1 - D^d) ; \quad (5.28)$$

$$K_+ = \mu_0(1 - D_t^v) ; \quad (5.29)$$

$$K_- = \mu_0(1 - D_c^v) , \quad (5.30)$$

como $[\mathcal{H}(x)]^n = \mathcal{H}(x) \quad \forall \quad n$, e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr} \varepsilon_{ij} \delta_{ij} \right] \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \\ &= \mathbf{I} \boxtimes \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} , \end{aligned} \quad (5.31)$$

pode-se escrever 5.27 na forma

$$\mathbf{E}^s = 2\mu \left[\mathbf{I} \boxtimes \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] + \left[K_+ \mathcal{H}(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) + K_- \mathcal{H}(-\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} , \quad (5.32)$$

ou, na forma indicial,

$$E_{ijkl}^s = 2\mu \left[\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] + \left[K_+ \mathcal{H}(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) + K_- \mathcal{H}(-\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \delta_{ij} \delta_{kl} . \quad (5.33)$$

5.2 Representação do Modelo Segundo a Estrutura Teórica Unificada

Dados, a relação total entre tensão e deformação e o tensor de rigidez, pode-se, a partir das funções de carregamento e das equações de dano, obter o gradiente da evolução do carregamento (\bar{n}_{nkl}), o gradiente inelástico (\bar{m}_{mij}) e o módulo pós-crítico (\bar{H}_{nm}) generalizado, completando assim a formulação do modelo.

Admitindo as funções de carregamento

$$F_t^v = \text{tr}^+ \boldsymbol{\varepsilon} - \kappa_+^v(D_t^v) \quad (5.34)$$

e

$$F_c^v = \text{tr}^- \boldsymbol{\varepsilon} - \kappa_-^v(D_c^v) , \quad (5.35)$$

onde $\kappa_+^v(D_t^v)$ e $\kappa_-^v(D_c^v)$ são as variáveis históricas.

Pode-se definir o gradiente das funções de carregamento por

$$\bar{n}_{nkl} = \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{kl}} = \left[\frac{\partial F_t^v}{\partial \varepsilon_{kl}} \mid \frac{\partial F_c^v}{\partial \varepsilon_{kl}} \mid \underline{0} \right], \quad (5.36)$$

onde

$$\frac{\partial F_t^v}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial tr^+ \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \mathcal{H}(tr \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{kl} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(tr \boldsymbol{\varepsilon}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}(tr \boldsymbol{\varepsilon}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H}(tr \boldsymbol{\varepsilon}) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

e

$$\frac{\partial F_c^v}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial tr^- \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \mathcal{H}(-tr \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{kl} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(-tr \boldsymbol{\varepsilon}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}(-tr \boldsymbol{\varepsilon}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H}(-tr \boldsymbol{\varepsilon}) \end{bmatrix}. \quad (5.38)$$

Das funções de carregamento também são obtidas as componentes do tensor pós-crítico, dado por

$$\bar{H}_{nm} = -\frac{\partial F_n}{\partial \bar{p}_m} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_t^v}{\partial D_t^v} & -\frac{\partial F_c^v}{\partial D_t^v} & -\frac{\partial F^d}{\partial D_t^v} \\ -\frac{\partial F_c^v}{\partial D_t^v} & -\frac{\partial F_c^v}{\partial D_c^v} & -\frac{\partial F_c^v}{\partial D^d} \\ -\frac{\partial F^d}{\partial D_t^v} & -\frac{\partial F^d}{\partial D_c^v} & -\frac{\partial F^d}{\partial D^d} \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

Como, no modelo em questão, as funções são desacopladas, tem-se

$$\bar{H}_{nm} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial F_t^v}{\partial D_t^v} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial F_c^v}{\partial D_c^v} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \kappa_+^v(D_t^v)}{\partial D_t^v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \kappa_-^v(D_c^v)}{\partial D_c^v} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.40)$$

Uma vez definidas as equações de evolução do dano, suas derivadas constituem as componentes do tensor \bar{H}_{nm}^{-1} :

$$\bar{H}_{nm}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_t^v(\kappa_+^v)}{\partial \kappa_+^v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial D_c^v(\kappa_-^v)}{\partial \kappa_-^v} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_t^v}{\partial tr^+ \boldsymbol{\varepsilon}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial D_c^v}{\partial tr^- \boldsymbol{\varepsilon}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Derivando o tensor secante em relação ao dano tem-se

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial D_c^v} = -2\mu_0(1 - D_t^v) \left[\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right] - K_0 \mathcal{H}(tr\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (5.47)$$

e

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial D_t^v} = -2\mu_0(1 - D_c^v) \left[\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right] - K_0 \mathcal{H}(-tr\boldsymbol{\varepsilon})\delta_{ij}\delta_{kl} . \quad (5.48)$$

Nas derivadas acima adotou-se, como fez Ladevèze (1983), $D^d = (1 - D_t^v)(1 - D_c^v)$.

As equações 5.47 e 5.48 permitem montar o gradiente de degradação

$$\bar{m}_{mij} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \bar{\mathcal{D}}_{rs}} \bar{\mathcal{M}}_{mrs}\varepsilon_{kl} = \left[\bar{m}_{1ij} \mid \bar{m}_{2ij} \mid \underline{0} \right] , \quad (5.49)$$

sendo

$$\bar{m}_{1ij} = -2\mu_0(1 - D_c^v)e_{ij} - K_0 \mathcal{H}(tr\boldsymbol{\varepsilon})tr^+\boldsymbol{\varepsilon}\delta_{ij} \quad (5.50)$$

e

$$\bar{m}_{2ij} = -2\mu_0(1 - D_t^v)e_{ij} - K_0 \mathcal{H}(-tr\boldsymbol{\varepsilon})tr^-\boldsymbol{\varepsilon}\delta_{ij} . \quad (5.51)$$

O operador tangente pode ser escrito substituindo as equação 5.33, 5.36, 5.39 e 5.48 na equação 3.50.

5.3 Uma Variação do Modelo

Uma possível variação do modelo de dano apresentado, assume que a variável que controla o dano desviador é uma grandeza independente das demais. Desta forma, tem-se uma medida direta da degradação associada à deformação desviadora. Neste caso, o modelo é controlado por três variáveis de dano, com três funções de carregamento independentes. Assim, dadas três funções de carregamento independentes e desacopladas, pode-se derivar os gradientes necessários à montagem do operador tangente. Assumindo,

$$F_t^v = tr^+\boldsymbol{\varepsilon} - \kappa_+^v(D_t^v) ; \quad (5.52)$$

$$F_c^v = tr^-\boldsymbol{\varepsilon} - \kappa_-^v(D_c^v) ; \quad (5.53)$$

$$F^d = \tilde{\varepsilon}^d - \kappa^d(D^d) , \quad (5.54)$$

onde $\kappa_+^v(D_t^v)$, $\kappa_-^v(D_c^v)$ e $\kappa^d(D^d)$ são as variáveis históricas e $\tilde{\varepsilon}^d$ é a deformação equivalente que controla o dano desviador, dada por

$$\tilde{\varepsilon}^d = \sqrt{J_\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{2}e_{ij}e_{ij}}, \quad (5.55)$$

sendo J_ε é o segundo invariante de deformações. Assim, o gradiente das funções de carregamento é

$$\bar{n}_{nkl} = \frac{\partial F_n}{\partial \varepsilon_{kl}} = \left[\frac{\partial F_t^v}{\partial \varepsilon_{kl}} \mid \frac{\partial F_c^v}{\partial \varepsilon_{kl}} \mid \frac{\partial F^d}{\partial \varepsilon_{kl}} \right], \quad (5.56)$$

com

$$\frac{\partial F_t^v}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} tr^+ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{H}(tr \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{kl} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(tr \boldsymbol{\varepsilon}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}(tr \boldsymbol{\varepsilon}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H}(tr \boldsymbol{\varepsilon}) \end{bmatrix}, \quad (5.57)$$

$$\frac{\partial F_c^v}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} tr^- \boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{H}(-tr \boldsymbol{\varepsilon}) \delta_{kl} = \begin{bmatrix} \mathcal{H}(-tr \boldsymbol{\varepsilon}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}(-tr \boldsymbol{\varepsilon}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H}(-tr \boldsymbol{\varepsilon}) \end{bmatrix}, \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial F^d}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sqrt{J_\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{2} [J_\varepsilon]^{-\frac{1}{2}} e_{kl} = \frac{1}{2\sqrt{J_\varepsilon}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \frac{1}{3} tr \boldsymbol{\varepsilon} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \frac{1}{3} tr \boldsymbol{\varepsilon} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \frac{1}{3} tr \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

O tensor de dano é agora composto por três variáveis,

$$\bar{\mathcal{D}}_{rs} = \begin{bmatrix} D_t^v & 0 & 0 \\ 0 & D_c^v & 0 \\ 0 & 0 & D^d \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$

Das funções de carregamento também são obtidas as componentes do tensor pós-crítico,

$$\bar{H}_{nm} = -\frac{\partial F_n}{\partial \bar{p}_m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \kappa_+^v(D_t^v)}{\partial D_t^v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \kappa_-^v(D_c^v)}{\partial D_c^v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \kappa^d(D^d)}{\partial D^d} \end{bmatrix}, \quad (5.61)$$

cuja relação inversa é

$$\bar{H}_{nm}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_t^v(\kappa_+^v)}{\partial \kappa_+^v} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial D_c^v(\kappa_-^v)}{\partial \kappa_-^v} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial D^d(\kappa^d)}{\partial \kappa^d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_t^v}{\partial tr^+\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial D_c^v}{\partial tr^-\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial D^d}{\partial \sqrt{J_\epsilon}} \end{bmatrix}. \quad (5.62)$$

Derivando a da relação secante em relação ao, dano tem-se

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial D_c^v} = -K_0 \mathcal{H}(tr\epsilon) \delta_{ij} \delta_{kl}; \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial D_t^v} = -K_0 \mathcal{H}(-tr\epsilon) \delta_{ij} \delta_{kl}; \quad (5.64)$$

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial D^d} = -2\mu_0 \left[\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right], \quad (5.65)$$

que permite montar o gradiente de degradação ,

$$\bar{m}_{mij} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \mathcal{D}_{rs}} \bar{\mathcal{M}}_{mrs} \epsilon_{kl} = \left[m_{1ij} \mid m_{2ij} \mid m_{3ij} \right], \quad (5.66)$$

sendo

$$m_{1ij} = -K_0 \mathcal{H}(tr\epsilon) tr^+ \epsilon \delta_{ij}; \quad (5.67)$$

$$m_{2ij} = -K_0 \mathcal{H}(-tr\epsilon) tr^- \epsilon \delta_{ij}; \quad (5.68)$$

$$m_{3ij} = -2\mu_0 \left[\frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right] e_{kl}; \quad (5.69)$$

$$\bar{\mathcal{M}}_{mrs} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (5.70)$$

O operador tangente pode ser escrito substituindo as equação 5.33, 5.56, 5.61 e 5.66 na equação 3.50.

Capítulo 6

Implementação Computacional

O **INSANE** (*INteractive Structural ANalysis Environment*) é um sistema computacional desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. O sistema é desenvolvido em JAVA, seguindo o paradigma de *Programação Orientada a Objetos* (POO), aplicando todos os conceitos proporcionados pela metodologia, resultando em um código segmentado, consequência direta de abstrações e generalizações oriundas de herança de classes e polimorfismo conjugados à padrões de projetos de *softwares* adequados.

O **INSANE** é composto por aplicações gráficas interativas, para pré processamento e pós processamento, e um núcleo numérico, contendo as implementações dos modelos numéricos e as técnicas de soluções apropriadas. As implementações do presente trabalho concentram-se, principalmente, no núcleo numérico, mais especificamente na segmentação relativa aos modelos constitutivos.

Neste capítulo será apresentado o projeto orientado a objetos da implementação realizada, posicionando-o no núcleo numérico e detalhando as classes que o compõe. Para tanto serão apresentados diagramas UML (*Unified Modelling Language*), que é uma linguagem padronizada para a modelagem de sistemas de software orientados a objetos.

Para melhor visualização das contribuições deste trabalho, as classes modificadas durante o desenvolvimento são representadas em amarelo e as classes criadas em verde, conforme ilustrado na figura 6.1.

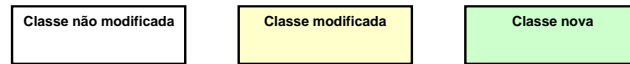


Figura 6.1: Notação UML usada na descrição do projeto de classes.

6.1 Organização do Núcleo Numérico

O núcleo numérico do **INSANE** é composto pelas interfaces `Model`, `Assembler` e `Solution`, conforme ilustra a figura 6.2. Estas interfaces, respectivamente, compõem as abstrações do modelo discreto adotado, a generalização do processo de montagem do sistema matricial de equações e as técnicas de solução necessárias à obtenção dos resultados da análise.

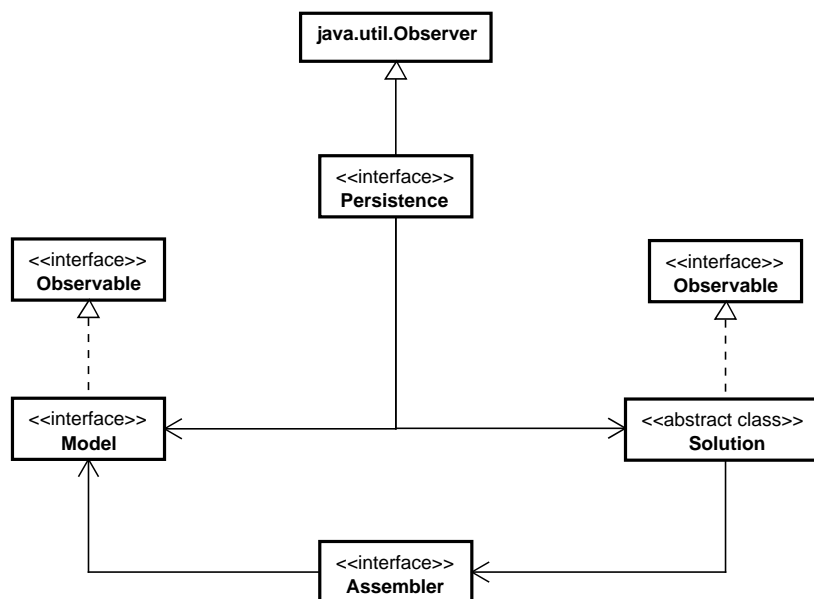


Figura 6.2: Organização do núcleo numérico.

Além das classes que implementam as interfaces citadas, o núcleo é auxiliado pela interface `Persistence` responsável pelo tratamento dos dados não voláteis do programa, ou seja, as classes que formam a hierarquia de `Persistence` são responsáveis por coletar os dados de entrada oriundos de arquivos XML (*eXtensible Markup*

Language) — uma técnica para criar dados estruturados baseados em um arquivo texto — advindos, por exemplo, do pré processador, e pela geração de dados gravados em disco, também sob a forma de arquivos XML, para a posterior leitura dos resultados pelo pós processador.

A atual organização é fruto dos trabalhos de Almeida (2005), Fonseca (2006), Fonseca (2008) e Fuina (2009). Embora não tenham atuação direta na organização do núcleo numérico, outros trabalhos também colaboraram para a expansão dos modelos que compõe o sistema (Germânio (2005), Saliba (2007), Ajeje (2009) e Wolff (2010)). Maiores detalhes das implementações do sistema podem ser vistas nestes trabalhos.

A organização do núcleo numérico, esquematizada na figura 6.2, foi descrita primeiramente por Fonseca (2006) e é revista nesta seção.

A interface **Assembler** é a responsável por montar o sistema matricial de segunda ordem com o qual é possível representar diversos tipos de modelos discretos:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{D} , \quad (6.1)$$

onde \mathbf{X} é o vetor de variáveis de estado do problema; $\dot{\mathbf{X}}$ e $\ddot{\mathbf{X}}$ são os vetores com, respectivamente, a primeira e a segunda variação das grandezas de estado; \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são matrizes e \mathbf{D} é um vetor, que podem ou não depender da variável de estado e suas derivadas.

A interface **Solution** desencadeia o processo de solução, possuindo os recursos necessários para resolver este sistema matricial, seja o sistema linear ou não linear.

Model possui os dados relativos ao modelo discreto a ser analisado e fornece para **Assembler** todas as informações necessárias para montar a equação do modelo, que será resolvida por **Solution**.

Tanto **Model** como **Solution** se comunicam com a interface **Persistence**, que trata os dados de entrada e, principalmente, persiste os dados de saída para as demais aplicações, sempre que observa alterações no estado do modelo discreto.

Este processo de observação de alterações ocorre segundo um mecanismo de propagação de mudanças proporcionado pelo padrão de projeto *Observer*. Quando um objeto dito **observador** (que implementa a interface `java.util.observer`) é criado, ele é inscrito na lista de observadores dos objetos ditos **observados** (que estendem a interface `java.util.observable`). Quando alguma mudança ocorre no estado de um objeto observado, é disparado então o mecanismo de propagação de mudanças, que se encarrega de notificar os objetos observadores para se atualizarem. Isto garante a consistência e a comunicação entre o componente observador (*Persistence*) e os componentes observados (*Solution* e *Model*).

Maiores detalhes das classes que constituem o núcleo numérico são apresentados no apêndice F.

6.2 Análise Estática Fisicamente Não Linear

Na mecânica dos sólidos computacional, o sistema de equações 6.1, para o caso de uma análise estática, se reduz a

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D} \quad (6.2)$$

sendo \mathbf{C} a matriz de rigidez global, \mathbf{X} o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{D} o vetor de forças nodais do modelo. Se a análise é fisicamente não linear, a matriz \mathbf{C} depende dos deslocamentos \mathbf{X} . Neste caso, as raízes das equações 6.2 são obtidas por meio de um processo incremental iterativo segundo o qual o sistema de equações 6.2 é reescrito na forma

$$\mathbf{K}_t \cdot \delta\mathbf{U} = \delta\lambda \cdot \mathbf{P} + \mathbf{Q} \quad (6.3)$$

onde \mathbf{K}_t , é a matriz de rigidez tangente, $\delta\mathbf{U}$ é o vetor de deslocamentos incrementais, $\delta\lambda$ é um incremento do fator de carga, \mathbf{P} é o vetor de cargas de referência e \mathbf{Q} é o vetor de cargas residuais do modelo. \mathbf{Q} é obtido pela diferença entre o vetor de cargas externas e o vetor de forças equivalentes às tensões internas \mathbf{F}_i .

Utilizando-se o Método dos Elementos Finitos, a matriz \mathbf{K}_t e o vetor \mathbf{F}_i são montados a partir da contribuição de cada elemento finito. Tal processo se baseia

em duas operações fundamentais:

$$\mathbf{k}_t^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_t \mathbf{B} dV_e, \quad (6.4)$$

e

$$\mathbf{F}_i^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV_e \quad (6.5)$$

sendo \mathbf{F}_i^e o vetor de cargas nodais equivalentes ao estado de tensão corrente de cada elemento, $\boldsymbol{\sigma}$ as tensões no elemento finito, \mathbf{k}_t^e a rigidez tangente, \mathbf{B} a matriz das relações deformação-deslocamento, \mathbf{E}_t a matriz constitutiva tangente e V o volume do elemento.

No **INSANE**, o processo incremental iterativo acima descrito é implementado no método *execute()* da classe `StaticEquilibriumPath`, derivada da classe `Solution` (Figura 6.3).

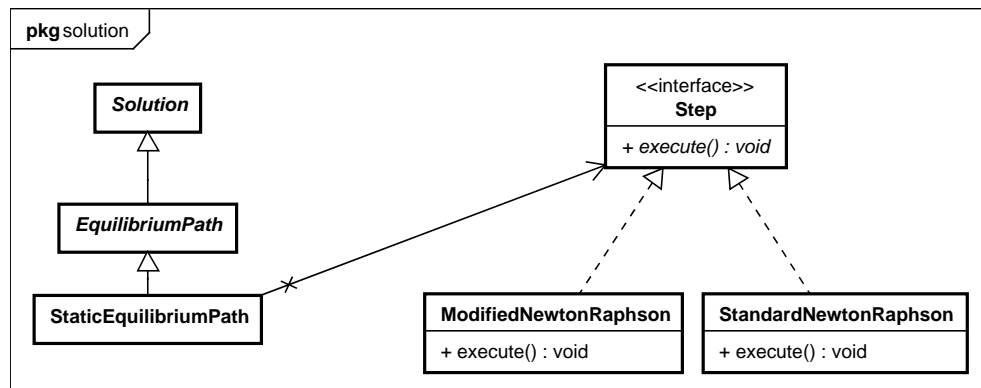


Figura 6.3: Classes da solução com a implementação do método de Newton-Rapshon.

Conforme mostra a figura 6.3, por meio do mecanismo de composição, a classe `StaticEquilibriumPath` é auxiliada pela classe `Step`, cujas classes derivadas `StandardNewtonRaphson` e `ModifiedNewtonRaphson` implementam o método *execute()*, contendo, respectivamente, as versões padrão e modificada do método de Newton-Rapshon.

Na figura 6.4 tem-se a sequência de atividades implementada no método *execute()* da classe `StandardNewtonRaphson`. O processo de solução segue o algoritmo apresentado na figura C.5 do apêndice C.

No início do algoritmo deve-se montar a matriz de rigidez incremental. Portanto, é requisitado à classe `Assembler`, pelo método `getIncrementalCuu()`, a referida matriz (Figura 6.4). O método `getIncrementalCuu()`, que por sua vez, evoca o método `getIncrementalC()` de cada elemento finito do modelo (Figura 6.5). A classe `Element` é auxiliada pela classe `ProblemDriver`, responsável por montar a rigidez de um elemento, de acordo com a natureza do problema (Figura 6.6).

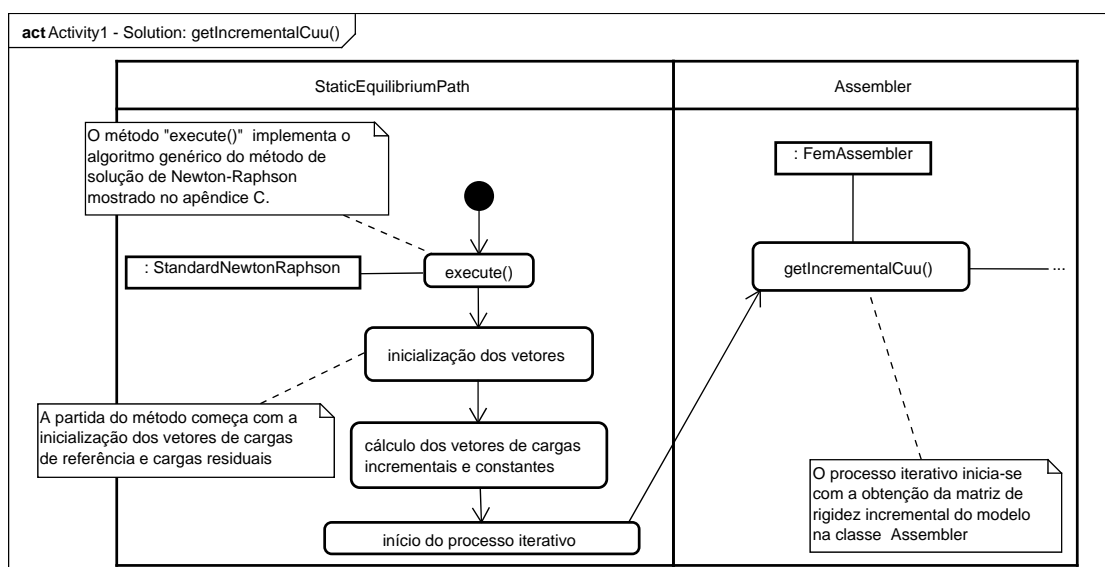


Figura 6.4: Início do processo de execução do método de Newton-Raphson.

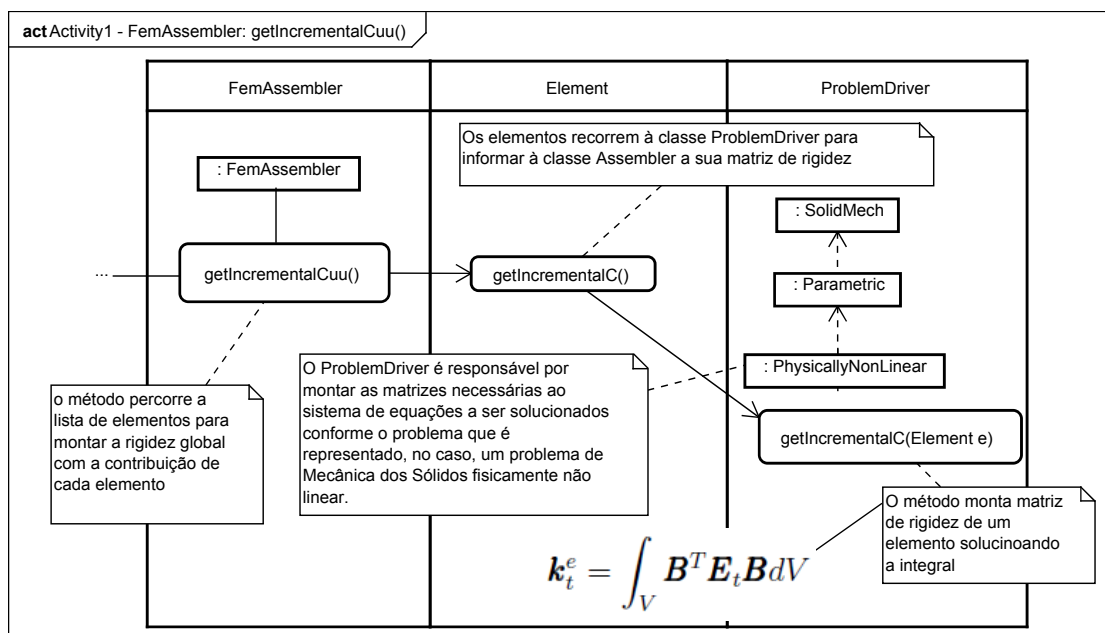


Figura 6.5: Obtenção da rigidez incremental.

Observa-se, na figura 6.6, a indicação do processo para integração numérica da rigidez dado na equação 6.4. Neste processo, a matriz constitutiva é obtida em cada entidade do tipo degeneração do elemento finito. A degeneração contém informações das propriedades geométricas do ponto de integração, do material, do modelo de análise e do modelo constitutivo. A degeneração também contém dois mapas, um com as variáveis constitutivas correntes, tais como as deformações, tensões e as variáveis de dano, e outro com as variáveis constitutivas históricas. Estes mapas guardam dados fundamentais para a análise fisicamente não linear. Assim, para avaliação do tensor constitutivo tangente de cada degeneração, esse mapas são passados como parâmetros do método $mountCt()$, da classe “ConstitutiveModel” conforme mostra a figura 6.7.

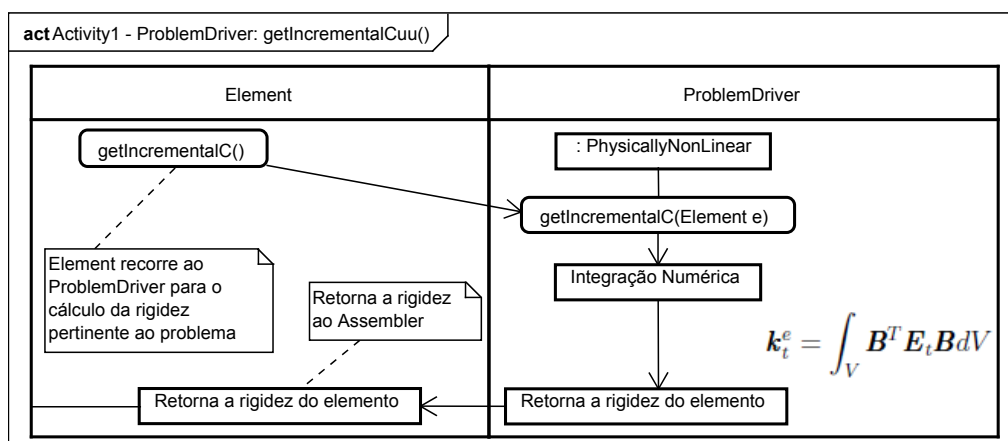


Figura 6.6: Integração da rigidez tangente de um elemento.

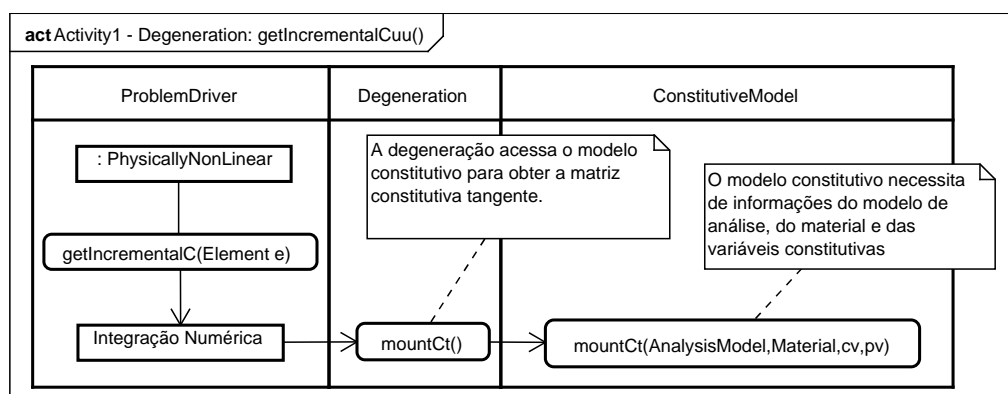


Figura 6.7: Obtenção da matriz constitutiva tangente para a integração da rigidez incremental.

Nas figuras 6.4, 6.5, 6.6 e 6.7 tem-se a sequência de atividades da solução na obtenção da matriz de rigidez incremental.

Seguindo no algoritmo da solução (Figura C.5 do apêndice C), com a matriz de rigidez incremental, pode-se calcular os deslocamentos devidos às cargas incrementais e às cargas residuais (Figura 6.8).

Em seguida, (Figura 6.8), com os deslocamentos obtidos, é calculado o fator de carga e as variáveis do processo de solução (fator de carga total, cargas incrementais, cargas residuais, e deslocamento nodais) são atualizadas. Com as variáveis atualizadas, pode-se verificar a convergência do processo iterativo a partir da condição de equilíbrio entre as forças internas e externas.

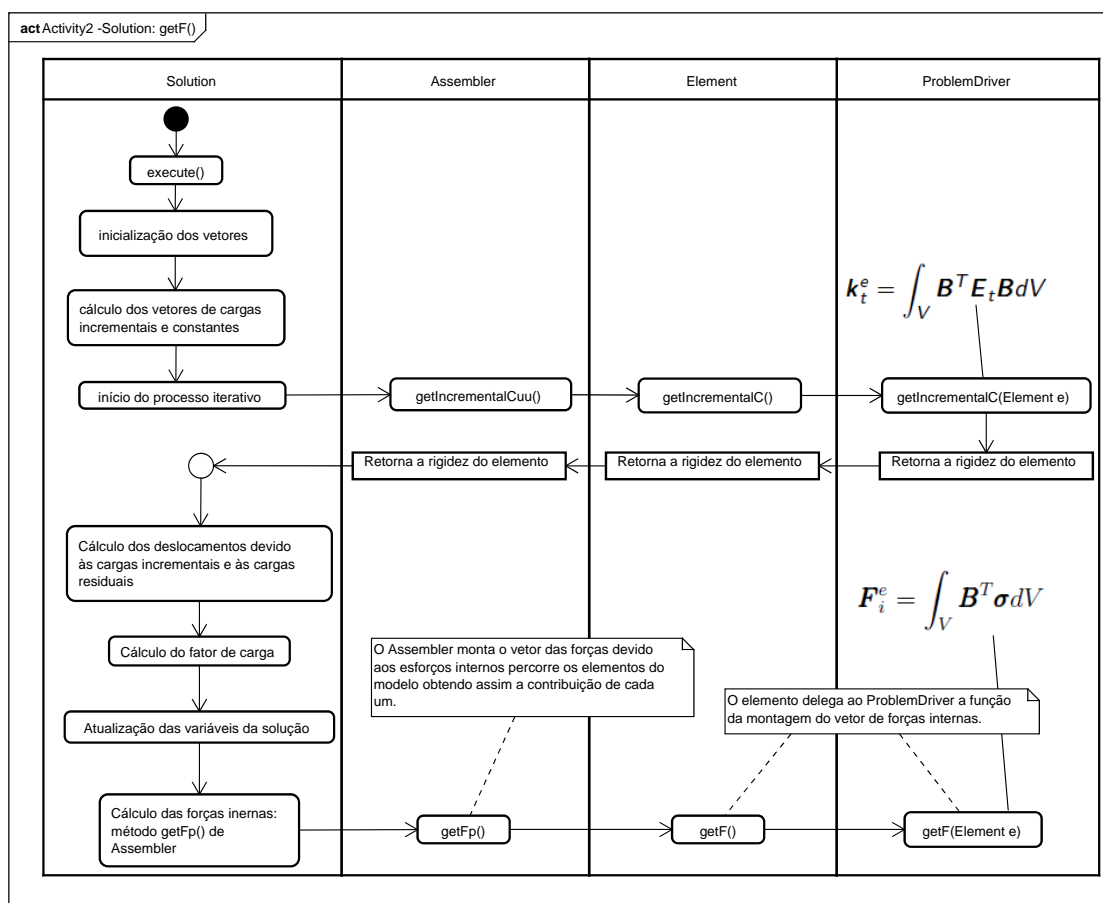


Figura 6.8: Atividades de obtenção do vetor de forças internas.

A figura 6.8 também mostra as atividades realizadas para o cálculo das forças equivalentes às tensões internas. O procedimento é semelhante ao acima descrito,

para a obtenção da matriz de rigidez tangente. Para integração numérica da equação 6.1, o estado de tensão corrente é obtido em cada degeneração. Para tanto, os mapas, com as variáveis históricas, são passadas como parâmetros do método *mountDualInternalVariableVector()* da classe “*ConstitutiveModel*”, conforme mostra a figura 6.9.

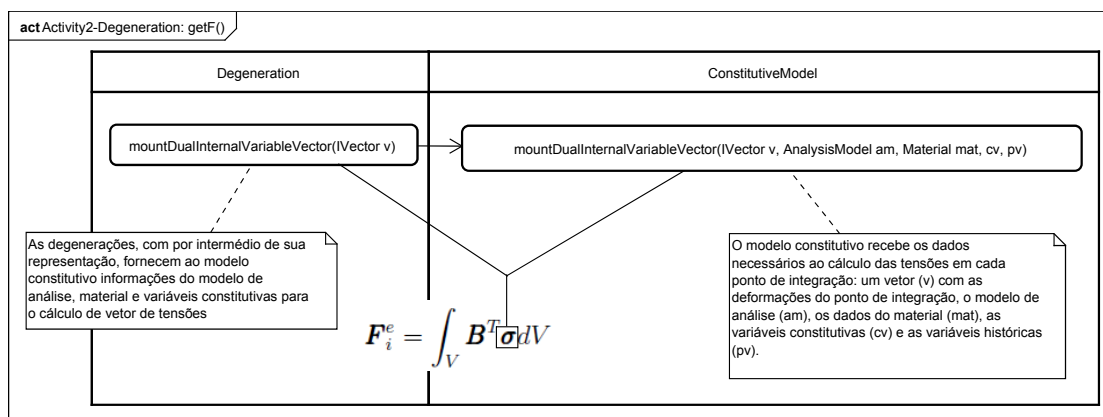


Figura 6.9: Cálculo das tensões: relação entre degeneração e modelo constitutivo.

6.3 Implementação da Estrutura Teórica Unificada

As vantagens de um projeto orientado a objetos como o acima descrito são muitas. Entidades como função de forma, elemento finito, ponto de integração, modelo de análise e modelo constitutivo, embora dependentes entre si, podem ser tratadas de forma geral.

O elemento finito é uma entidade abstrata que, por meio do mecanismo de composição, se auxilia: (1) da classe *Shape*, para representar diversas funções de aproximação — unidimensionais de 2, 3 e 4 nós, quadrilaterais de 4, 8 e 9 nós, triangulares de 3, 6 e 10 nós, hexaédricos de 8, e 20 nós, tetraédricos de 4 e 10 nós; (2) da classe *AnalysisModel*, para representar modelos de análise diversos — treliça plana e espacial, viga, grelha, pórtico plano e espacial, estado plano de tensão, de deformação e axissimétrico, placa e casca de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin, sólido; (3) da classe *Degeneration*, para representar os pontos internos dos elementos, onde se avaliam as tensões, e os diversos casos de degeneração da geometria — degeneração

da seção transversal em modelos unidimensionais, e da espessura em modelos planos; (4) da classe `ProblemDriver`, para representar os diversos tipos de problemas e suas formulações — formulação paramétrica de elementos finitos para mecânica dos sólidos, transferência de calor, problemas de campo, dentre outros; (5) da classe `ConstitutiveModel`, para representar diferentes modelos constitutivos em problemas fisicamente não lineares.

A classe `ConstitutiveModel` é especialmente importante para a implementação da estrutura teórica unificada proposta neste trabalho. Esta encapsula as atividades do modelo constitutivo, ou seja, uma vez que as informações dos elementos, formato da integração, dados dos pontos materiais, propriedades físicas do meio e do tipo de análise são passadas para o modelo constitutivo, este pode realizar todas as operações necessárias para o cálculo do operador tangente e das forças internas, sem se remeter diretamente aos elementos finitos, aos pontos de integração e nem mesmo ao modelo discreto, seja este do MEF (Método dos Elementos Finitos), ou outras abordagens tais como o MEFG (Método dos Elementos Finitos Generalizado), MEC (Método dos Elementos de Contorno) ou MSM (Métodos Sem Malha).

A independência do modelo constitutivo pode ser vista nos diagramas das figuras 6.7 e 6.9. Estes diagramas destacam as duas principais atividades da classe `ConstitutiveModel`: cálculo da matriz constitutiva tangente (método `mountCt()` na figura 6.7) e do vetor de tensões (método `mountDualInternalVariableVector()` na figura 6.9) em um ponto interno. Nos dois casos, os dados da degeneração são passados para o modelo constitutivo, que é responsável por calcular as grandezas no respectivo ponto de integração (representados pela degeneração).

As figuras 6.7 e 6.9 também mostram que os principais métodos do algoritmo de solução da análise não linear tem seu ponto final no modelo constitutivo. As instâncias polimórficas, bem como os mapas, propiciaram a generalização do modelo constitutivo e, portanto, a implementação da estrutura teórica unificada se beneficiou desta organização. A referida implementação alterou as classes `ConstitutiveModel`,

`Material`, `Degeneration`, `AnalysisModel` e `ConstitutivePointModel`.

A classe abstrata `ConstitutiveModel` contém métodos capazes de generalizar as atribuições e funcionalidades dos modelos constitutivos do sistema.

As implementações realizadas neste trabalho mudam a forma de funcionamento do modelo constitutivo no contexto das implementações computacionais. Até então, cada modelo era implementado em uma classe herdeira direta de `ConstitutiveModel` e as atribuições de generalização eram limitadas ao próprio modelo constitutivo, que delegava ao modelo de análise as definições dos tensores de rigidez, ou flexibilidade, fazendo com que o modelo de análise tivesse que ser adaptado para cada novo modelo constitutivo inserido no sistema, tornando custosa a implementação de novos modelos devido à constante expansão, ou adaptação, dos tipo de análise.

Como apresentado nos capítulos 3 e 4, o modelo constitutivo passa a ser formado por funções potenciais e seus respectivos gradientes, que resultam em um conjunto de operações tensoriais capazes de lidar com os tensores secante, os operadores tangentes, os gradientes das funções e as condições de carregamento e descarregamento. Assim, as operações da estrutura teórica unificada e as particularidades de cada modelo são atribuídas a um conjunto de classes, criadas com o propósito de responder pelas parcelas que compõem as operações comuns e generalizar o uso do modelo de análise, evitando sua constante refatoração. Este conjunto de classes foram denominadas de “*Filters*”. As implementações são tais que cada “*Filter*” contém as informações do respectivo modelo constitutivo que ele quer representar e as hipóteses do modelo de análise. Cada “*Filter*” trata o modelo constitutivo no formato tensorial, de modo que o modelo de análise forneça as componentes de cada tensor (de rigidez, de flexibilidade, de tensão e de deformação) necessárias para sua montagem.

A figura 6.10 apresenta a nova herança de classes de `ConstitutiveModel` (a herança completa pode ser vista no apêndice F). Observa-se que a classe abstrata para

o modelo constitutivo geral, `UnifiedConstitutiveModel`, apresenta duas especializações: as classes `UCMSingleLoadingFunction` e `UCMMultipleLoadingFunction`.

Estas especializações que especificam as formulações com uma função de carregamento (`UCMSingleLoadingFunction`) e com múltiplas funções de carregamento (`UCMMultipleLoadingFunction`), foram adotadas visando melhor organização do código e melhor desempenho.

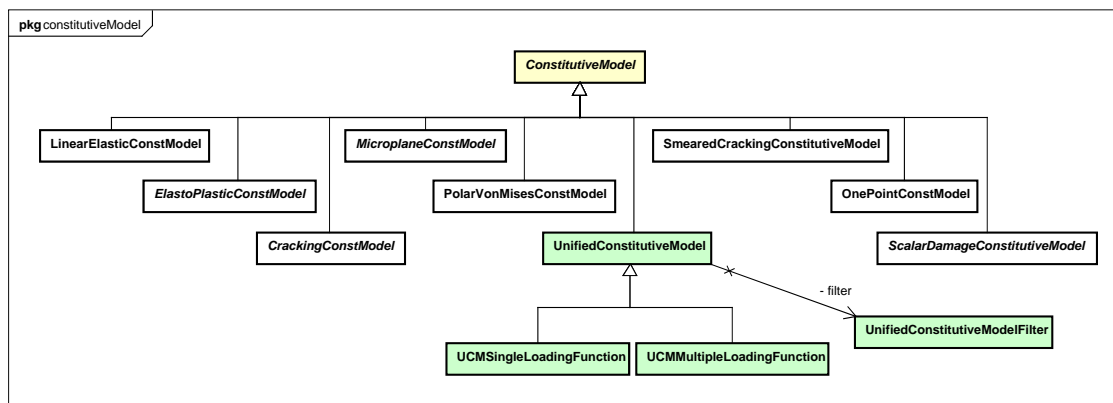


Figura 6.10: Hierarquia de classes de `ConstitutiveModel`.

A figura 6.10 também mostra que a classe `UnifiedConstitutiveModel` possui uma instância de `UnifiedConstitutiveModelFilter`, a superclasse do conjunto de classes que formam a camada “*Filter*”. A figura 6.11 mostra a herança de `UnifiedConstitutiveModelFilter` com todas as classes para os modelos constitutivos implementados, a saber:

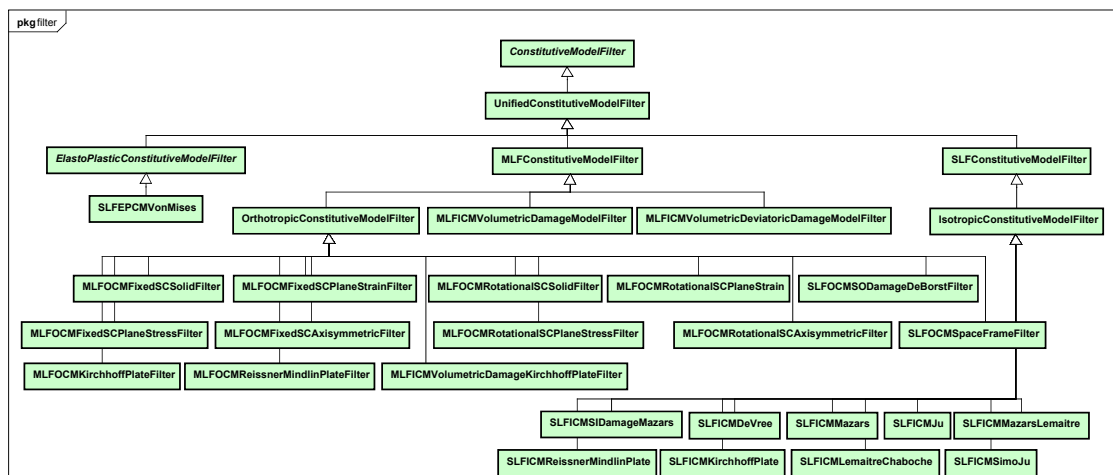


Figura 6.11: Hierarquia de classes de `ConstitutiveModelFilter`.

O modelo constitutivo realiza todas as operações pertinentes à solução do modelo, delegando as especificidades de cada um aos respectivos “*Filters*”. Desta forma, operações mais genéricas, como a obtenção do tensor de rigidez elástico ($mountC(...)$), obtenção do tensor de rigidez secante ($mountCs(...)$) e atualização das variáveis constitutivas ($update(...)$) podem ser tratadas em classes mais gerais da herança. A figura 6.12 apresenta as atividades mais gerais do modelo constitutivo unificado.

Além dos métodos mencionados tem-se o cálculo das tensões pelo método $mountDualInternalVariable(...)$ e do operador tangente pelo método $mountCt(...)$. As tensões são obtidas pelo produto entre o tensor de rigidez e o de deformações ou provenientes de um algoritmo de retorno. O operador tangente é obtido pela equação geral 3.50. Estas atividades são implementadas em classes especializadas conforme mostra a figura 6.13. Para realizar estas atividades, as superclasses de `ConstitutiveModel` solicitam ao respectivo “*Filter*” que forneça as parcelas que compõem as operações gerais da estrutura teórica unificada, apresentadas no capítulo 3.

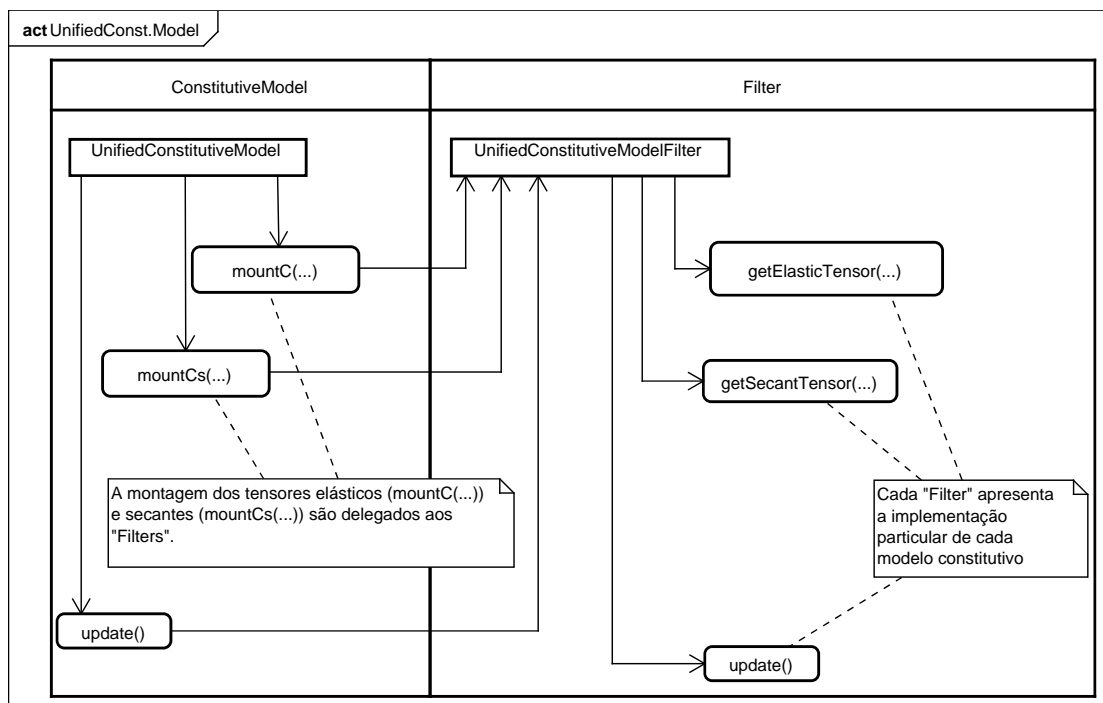


Figura 6.12: Modelo constitutivo unificado: obtenção dos tensores de rigidez elástico e secante e atualização das variáveis.

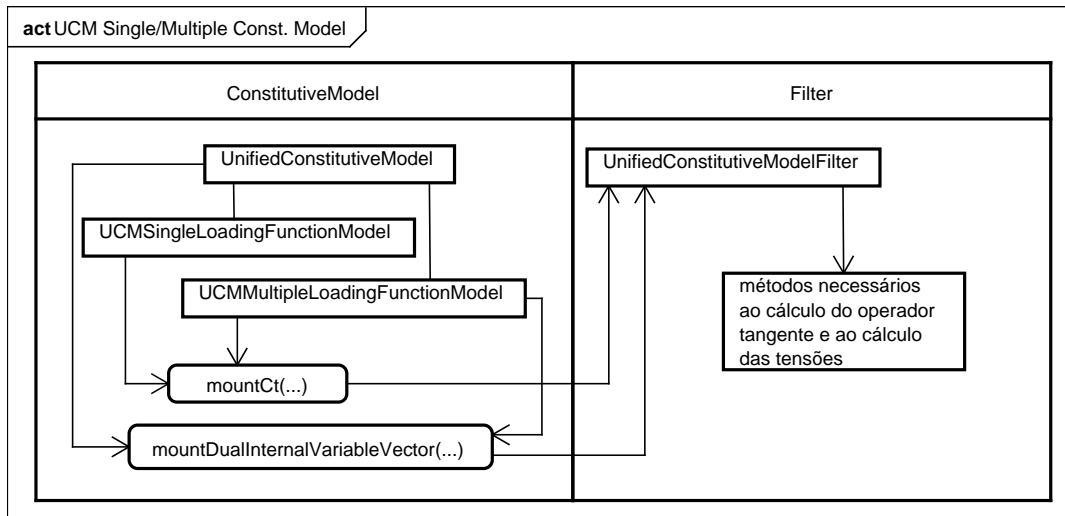


Figura 6.13: Modelo constitutivo unificado: obtenção do operador tangente e cálculo das tensões.

Para descrever a interação entre o modelo constitutivo e o respectivo “*Filter*” são apresentados os diagramas de atividades (Figuras 6.14 e 6.15) do processo de obtenção do operador tangente e do cálculo das tensões, para o modelo constitutivo de dano volumétrico.

O cálculo do operador tangente é baseado na equação 3.50, repetida a seguir:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl} . \quad (6.6)$$

Na sequência de atividades, mostrada na figura 6.14, observa-se a solicitação ao “*Filter*” correspondente das parcelas do tensor secante (E_{ijkl}), do tensor pós-crítico (\bar{H}_{nm}), do tensor dos gradientes das funções de carregamento (\bar{n}_{nkl}) e do tensor de degradação (\bar{m}_{mij}).

A figura 6.15 mostra a sequência de chamadas realizadas pelo modelo constitutivo para o cálculo das tensões. Para tanto, tem-se a chamada do método *updateConstitutiveVariables(...)*, que atualiza as variáveis constitutivas para o estado de deformações corrente, para, em seguida, calcular as tensões.

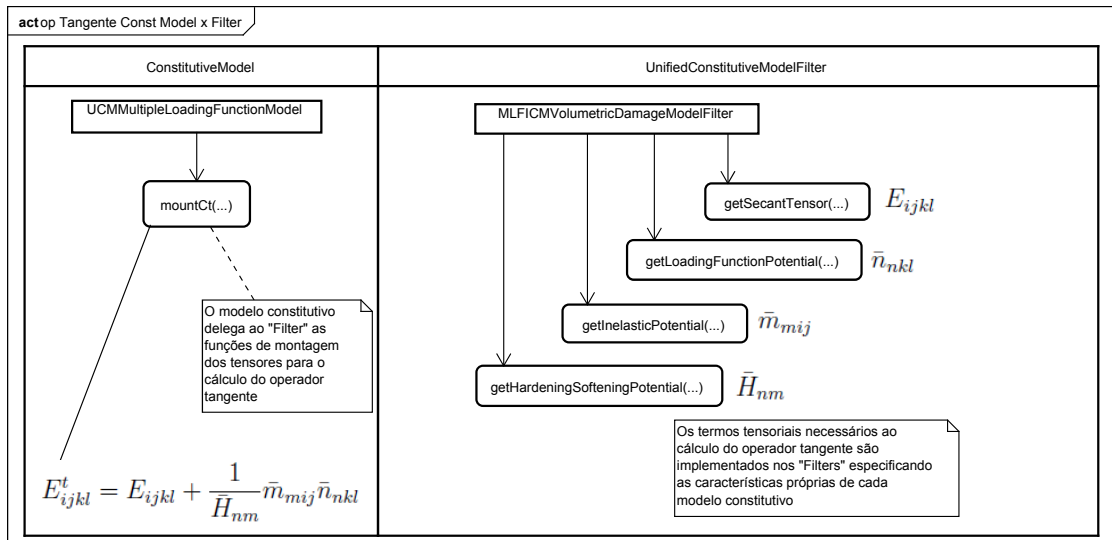


Figura 6.14: Modelo constitutivo unificado: obtenção operador tangente.

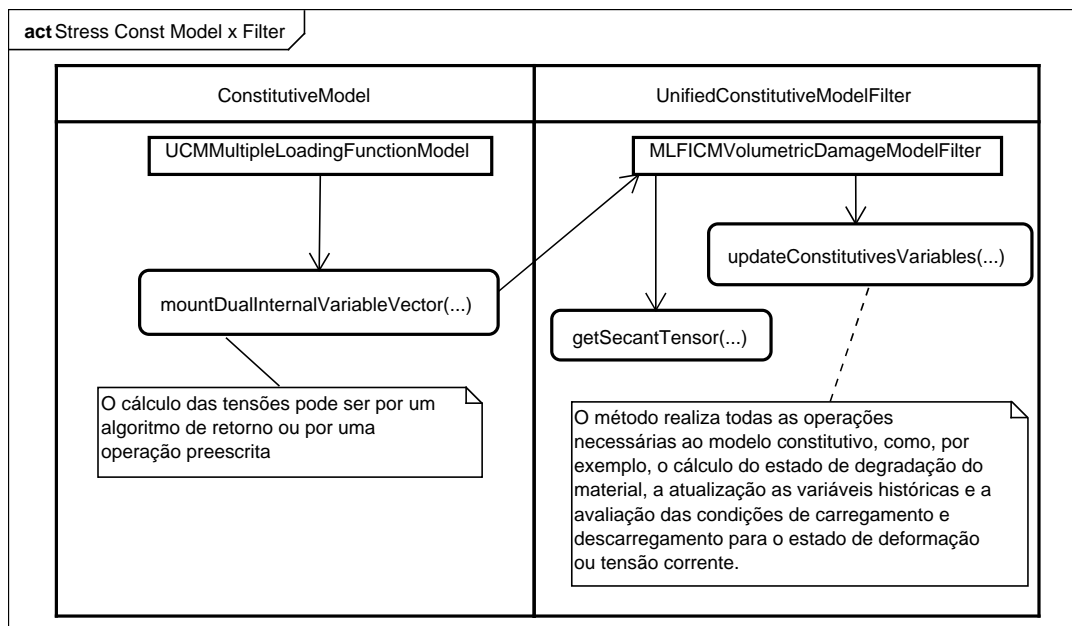


Figura 6.15: Modelo constitutivo unificado: cálculo das tensões.

6.3.1 Classe Material

A figura 6.16 mostra o diagrama de classes de `Material` e suas sub classes, para os materiais implementados.

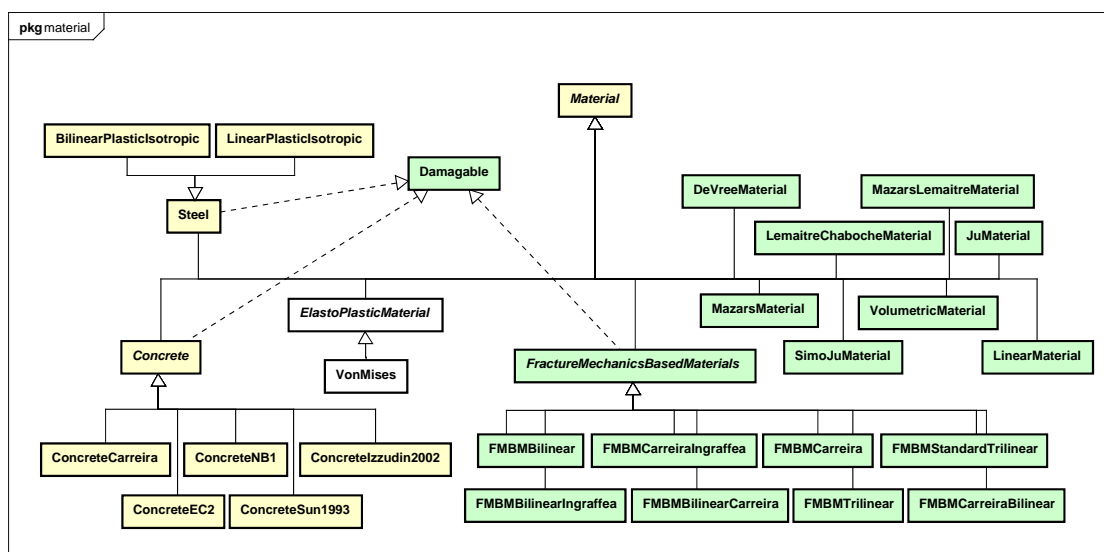


Figura 6.16: Hierarquia de classes de Material.

A classe abstrata `Material` possui os métodos necessários para descrever as propriedades dos diferentes materiais, sejam elas propriedades secantes ou tangentes. Os diferentes materiais são representados por subclasses herdeiras de `Material` que têm como atributos seu identificador e um mapa contendo os valores necessários para caracterizar material (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, coeficiente térmico etc).

Cada modelo constitutivo está associado a um tipo de material adequado. Por exemplo, o modelo de fissuração distribuída está associado aos materiais do tipo `FractureMechanicsBasedMaterials`. A interface `Damagable` foi criada para permitir que os materiais cuja degradação é baseada em leis tensão-deformação, também sejam capazes de computar esta degradação em termos de variáveis de dano.

Os materiais cuja degradação é descrita por leis de evolução de dano possuem uma ou mais instâncias da classe `DamageLaw`, que possui a forma da função de dano. A figura 6.17 mostra a associação de `DamageLaw` e sua herança com as respectivas classes especializadas de `Material`.

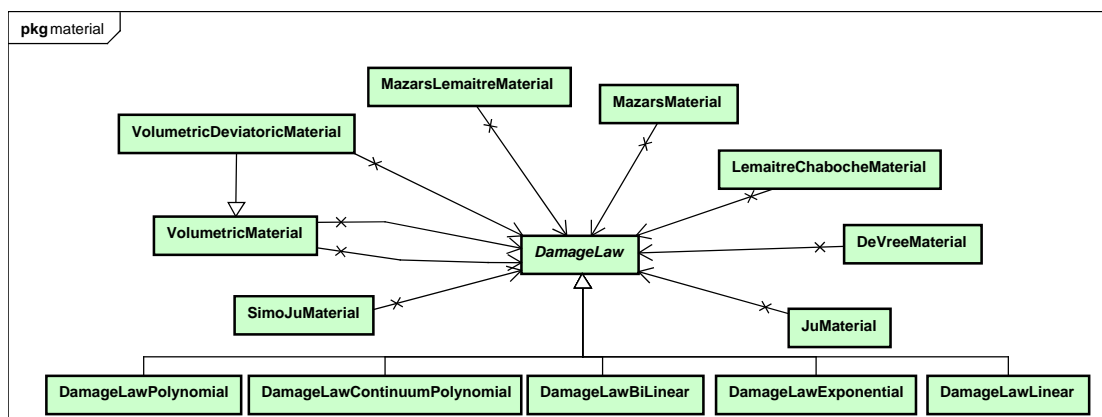


Figura 6.17: Hierarquia de classes de *DamageLaw*.

As instâncias de *DamageLaw* podem assumir diversas formas para a evolução de dano, conforme indicam as subclasses. A implementação das funções de evolução é ilimitada e deve se manter independente do material, pois assim poderão ser aplicadas aos diversos modelos constitutivos.

6.3.2 Classe Degeneration

A classe *Degeneration* representa a degeneração na geometria do elemento. As degenerações são compostas por uma lista de pontos materiais e são representadas por objetos do tipo *Representation*. O diagrama da figura 6.18 apresenta a herança da classe abstrata *Degeneration* e a associação entre a degeneração, sua representação e seus pontos materiais.

As classes para degenerações foram alteradas com duas finalidades. A primeira foi permitir a persistência de dados de grandezas internas dos modelos constitutivos como tensão, deformação e variáveis de dano. A segunda alteração compreendeu apenas as degenerações do tipo *CrossSection* e *Thickness*. Estes tipos de degenerações, respectivamente, são usadas para representar uma seção transversal genérica, composta por um conjunto de pontos materiais, e um espessura formada por múltiplas camadas.

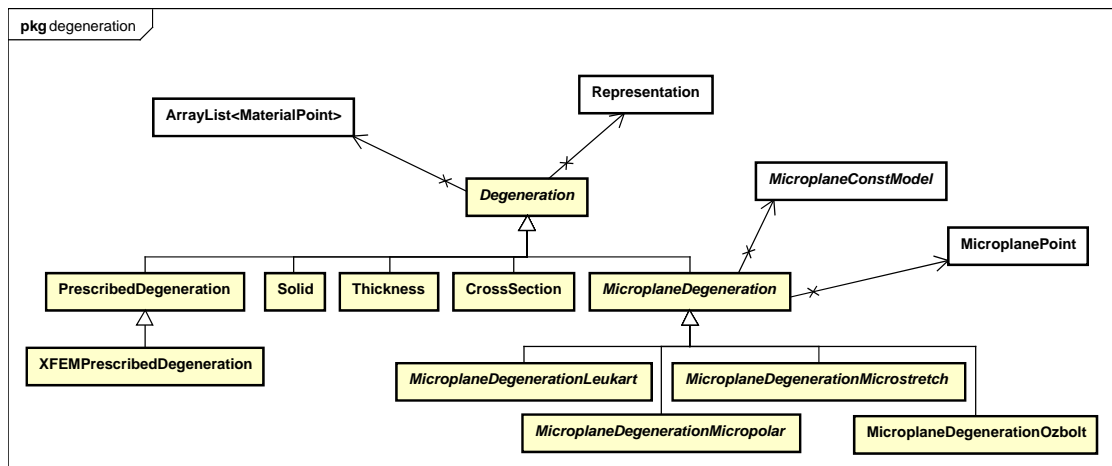


Figura 6.18: Hierarquia de classes de Degeneration.

Na figura 6.19 mostra-se a classe `MaterialPoint`. A classe `MaterialPoint` representa um ponto no meio material e que tem como propriedades um objeto `IPoint3d`, que o representa como um ponto no espaço, um objeto `IVolume`, que representa sua propriedade geométrica discreta, um objeto `Material`, um objeto `ContinuousPointModel` e um objeto `ConstitutiveModel`. Possui ainda duas mapas que armazenam variáveis dependentes do seu modelo constitutivo.

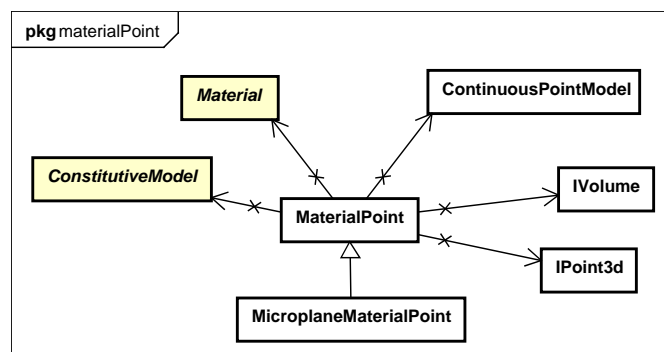


Figura 6.19: Hierarquia de classes de MaterialPoint.

6.3.3 Classe *AnalysisModel*

AnalysisModel é a super classe que representa os tipos de análise implementadas no **INSANE**. As subclasses de `AnalysisModel`, que foram alteradas, podem ser vistas na figura 6.20.

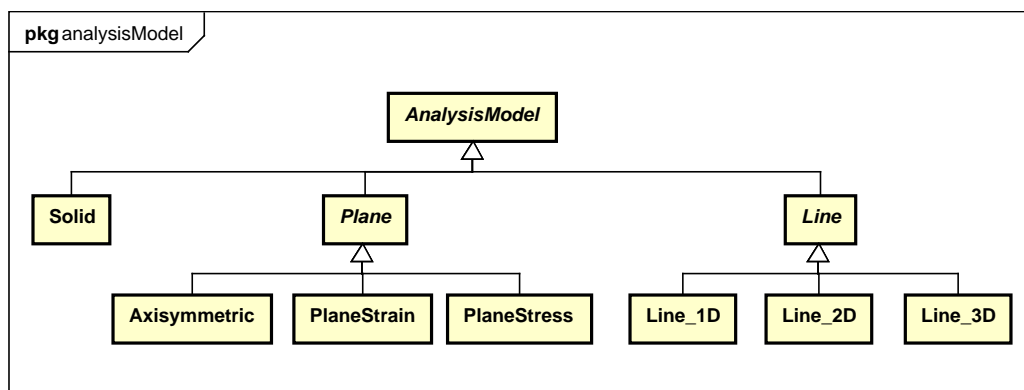


Figura 6.20: Hierarquia de classes de `AnalysisModel`.

A classe abstrata `AnalysisModel` possui métodos para fornecer informações, dependentes do modelo de análise, necessárias ao modelo. As classes da herança representam os diversos modelos de análise e respondem, de forma especializada, por informações como: número de graus de liberdade, variáveis de estado e variáveis internas de cada modelo (deformações e tensões).

As classes foram alteradas de modo a generalizar os modelos de análise e tornar a implementação dos modelos constitutivos independentes, permitindo a criação de novos modelos constitutivos sem a necessidade de refatorar os modelos de análise. Os modelos constitutivos foram implementados na forma tensorial, portanto, foram criados métodos nos modelos de análise capazes de representar matricialmente os tensores de rigidez e flexibilidade.

Da mesma forma que a classe `AnalysisModel` responde por propriedades da degeneração, a classe `ContinuousPointModel` responde por propriedades dos pontos materiais que compõem um degeneração. Assim, a classe abstrata `ContinuousPointModel` pode ser entendida como um modelo de análise aplicado ao ponto material. As classes que implementam `ContinuousPointModel` (Figura 6.21) são responsáveis por informar os tensores necessários aos modelos constitutivos, quando a estrutura teórica unificada é aplicada a cada ponto material.

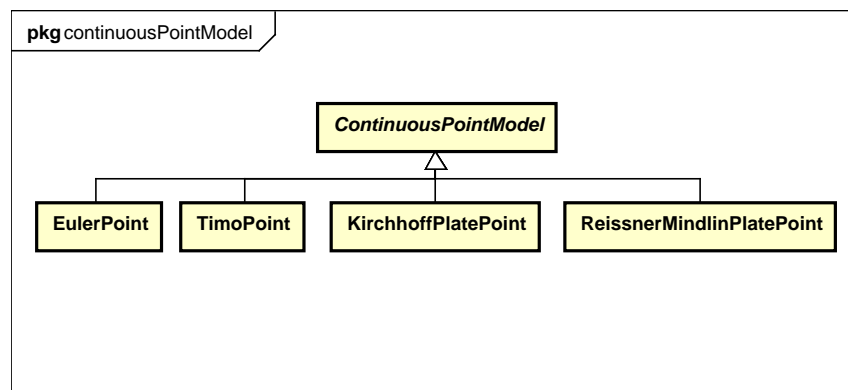


Figura 6.21: Hierarquia de classes de `ContinuousPointModel`.

Observa-se que para a análise fisicamente não linear com elementos de pórtico espacial segundo as teorias de Euler e Timoshenko, adotando a técnica de decomposição da seção transversal, e com elementos de placas segundo as teorias de Kirchhoff e Reissner-Mindlin, com decomposição da espessura em camadas, foi necessário alterar o tratamento do ponto material, visando uma abordagem tensorial das tensões e deformações.

Capítulo 7

Exemplos de Aplicação dos Modelos Implementados

Neste capítulo são apresentados exemplos de aplicação dos diversos modelos constitutivos implementados, visando ilustrar cada modelo e ressaltar as características individuais de cada um.

Os vários modelos de análise são ilustrados em exemplos básicos, visando mostrar as diversas aplicações possíveis, destacando-se o uso dos modelos constitutivos, tanto no âmbito das degenerações quanto no âmbito dos pontos materiais que as representam. As várias propostas de leis de evolução do dano estão apresentadas de modo a expor as diferenças entre cada uma e seus reflexos diretos no comportamento do material e na resposta do modelo.

Os parâmetros de cada modelo constitutivo adotados, quando não explicitados na referência original, foram obtidos por meio de ajustes baseados em simulações numéricas dos ensaios de tração e compressão uniaxiais, como exemplificado no apêndice G.

7.1 Modelos Constitutivos Implementados

Os modelos constitutivos implementados são agora apresentados em um exemplo de tração axial modelada com elementos finitos planos. Este exemplo permite ilustrar todos os modelos implementados, pois, devido à simplicidade dos estados de tensão e deformação envolvidos, todos eles produzem respostas equivalentes.

A configuração geométrica, as condições de contorno e a discretização utilizada (16 elementos planos quadriláteros de 4 nós) para uma chapa em estado plano de tensão, estão ilustradas na figura 7.1.

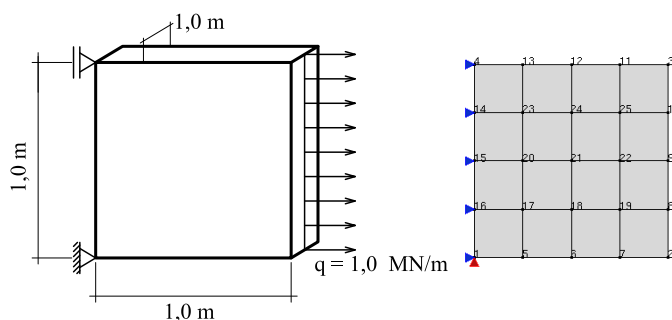


Figura 7.1: Modelos de tração direta.

Empregaram-se parâmetros do material e funções de dano pertinentes a cada modelo constitutivo. Em comum, o módulo de elasticidade de $20000,0 \text{ MPa}$ e o coeficiente de Poisson de $0,2$. Os parâmetros de cada modelo constitutivo são listados abaixo:

Modelo de Dano Volumétrico: Tração - $\alpha = 0,999$; $\beta = 1950,0$; $\kappa_0 = 0,000095$; Compressão - $\alpha = 0,999$; $\beta = 500,0$; $\kappa_0 = 0,00065$; Função de dano exponencial dada pela equação E.8.

Modelo de Fissuração Distribuída: $f_c = 20,0 \text{ MPa}$; $f_t = 2,0 \text{ MPa}$; $\varepsilon_c = 0,002$; $G_f = 0,00002 \text{ MN/m}$; $h = 0,05 \text{ m}$; $\beta_r = 0,05$; Leis tensão-deformação de Carreira e Chu (1985) na compressão (equação E.2) e Boone et al. (1986) na tração (equação E.1).

Modelo de Dano Ortotrópico, de Borst e Gutiérrez (1999): $\alpha = 0,85$; $\beta = 5000,0$; $\kappa_0 = 0,0001$; Função de dano exponencial dada pela equação E.8.

Plasticidade com Critério de von Mises: $H = -2000,0 \text{ MPa}$; $\sigma_y = 2,0 \text{ MPa}$.

Lei de “*softening*” linear.

Modelo de Dano de Mazars (1984): $\alpha_t = 0,95$; $\beta_t = 10000,0$; $\alpha_c = 1,0$; $\beta_c = 3000,0$; $\kappa_0 = 0,0001$; Função de dano exponencial dada pela equação E.10.

Modelo de Dano Isotrópico de Mazars (1984) Simplificado: $\alpha = 0,999$; $\beta = 1789,0$; $\kappa_0 = 0,0001$; Função de dano exponencial dada pela equação E.8.

Modelo de Dano Isotrópico de Mazars e Lemaitre (1984): $\alpha = 0,999$; $\beta = 2000,0$; $\kappa_0 = 0,000104$; Função de dano exponencial dada pela equação E.8.

Modelo de Dano Isotrópico de Lemaitre e Chaboche (1990): $\alpha = 0,999$; $\beta = 2000,0$; $\kappa_0 = 0,000104$; Função de dano exponencial dada pela equação E.8.

Modelo de Dano Isotrópico de Simo e Ju (1987): $\alpha = 0,999$; $\beta = 15,0$; $\kappa_0 = 0,0145$; Função de dano exponencial dada pela equação E.8.

Modelo de Dano Isotrópico de Ju (1989): $\alpha = 0,999$; $\beta = 15,0$; $\kappa_0 = 0,00011$; Função de dano exponencial dada pela equação E.8.

Modelo de Dano Isotrópico de Brekelmans et al. (1992): $\alpha = 0,999$; $\beta = 2550,0$; $\kappa_0 = 0,000126$; Função de dano exponencial dada pela equação E.8.

Os dados apresentados para as funções de dano variam em cada modelo, sendo válido ressaltar que, mesmo com leis de evolução de dano semelhantes, as diferenças entre os modelos constitutivos impossibilita a correspondência exata entre os parâmetros adotados.

Para solução das equações não lineares foi adotado o método de controle direto de deslocamento, com incremento de $0,000005 \text{ m}$ do deslocamento horizontal na extremidade carregada da chapa e tolerância de 1×10^{-4} , absoluto em deslocamento e/ou em força.

As trajetórias de equilíbrio foram obtidas e, para cada modelo, as curvas “Fator de carga \times Deslocamento Horizontal” da extremidade da chapa estão apresentadas nas figuras 7.2 e 7.3. Nas figuras 7.4, 7.5, 7.6 e 7.7 tem-se a variação do “Dano \times Deformação Axial” e da “Integridade \times Deformação Axial” ao longo da análise.

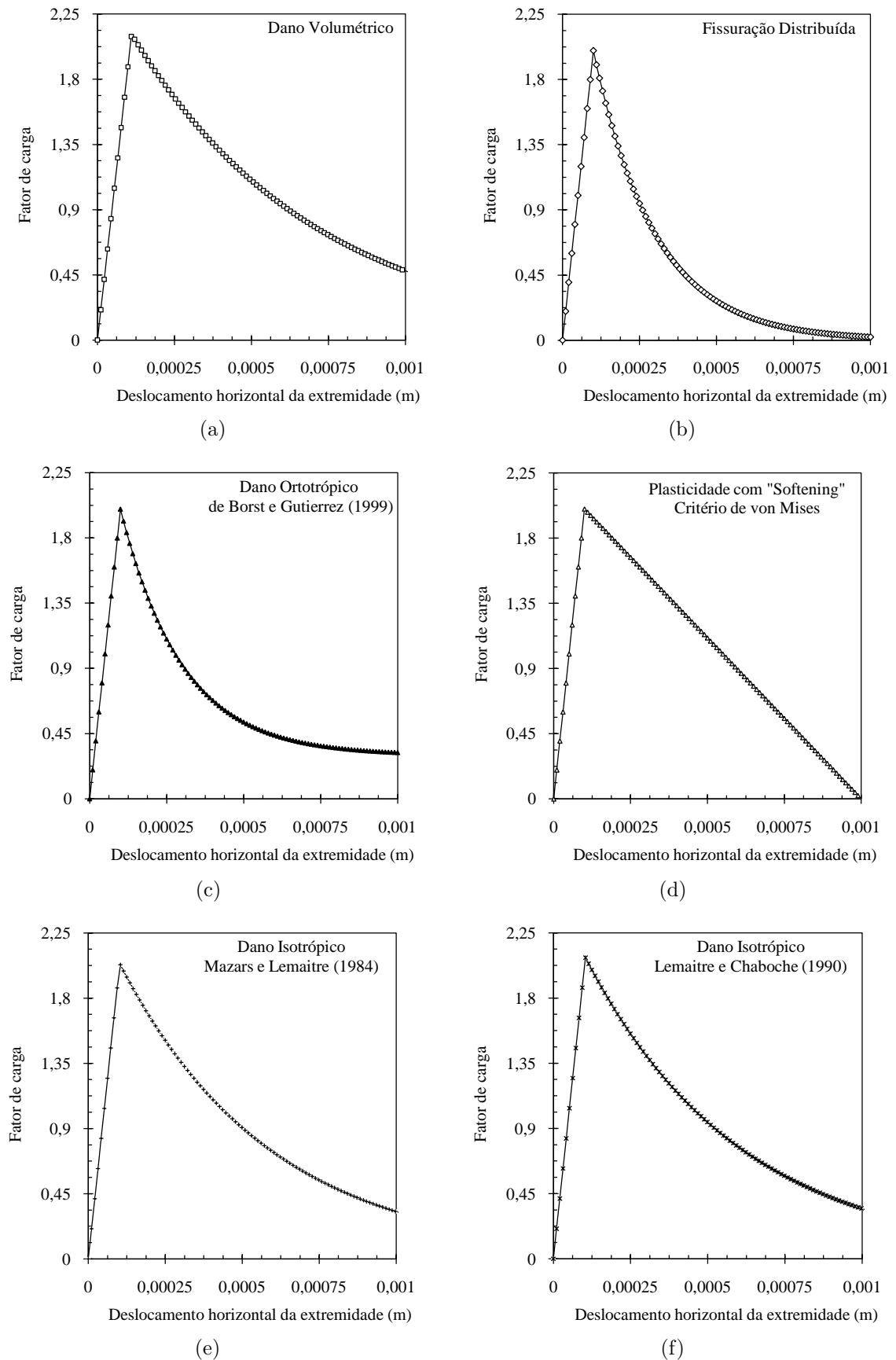


Figura 7.2: Trajetória de equilíbrio: Fator de carga \times Deslocamento horizontal da extremidade.

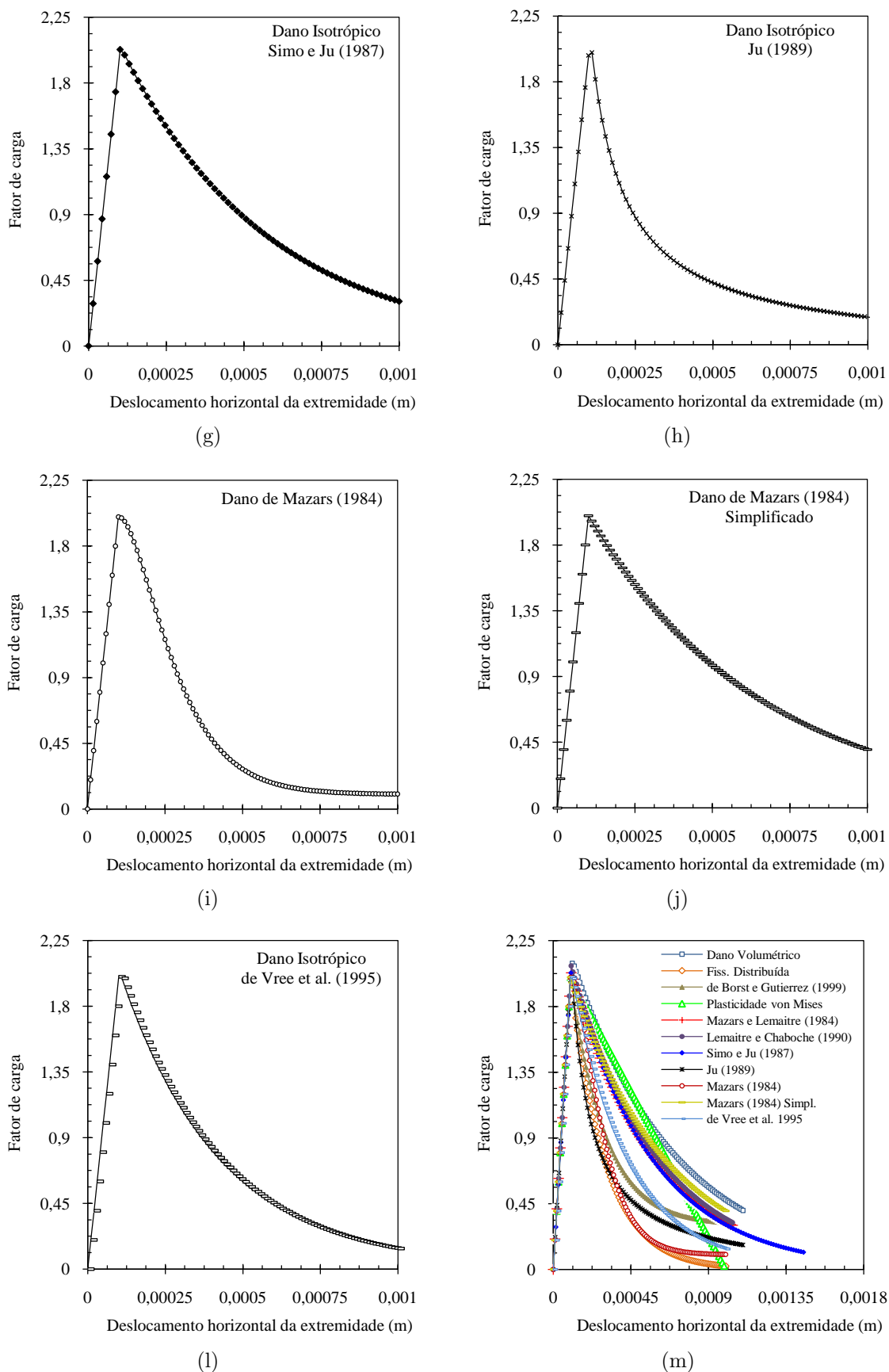


Figura 7.3: Trajetória de equilíbrio: Fator de carga × Deslocamento horizontal da extremidade.

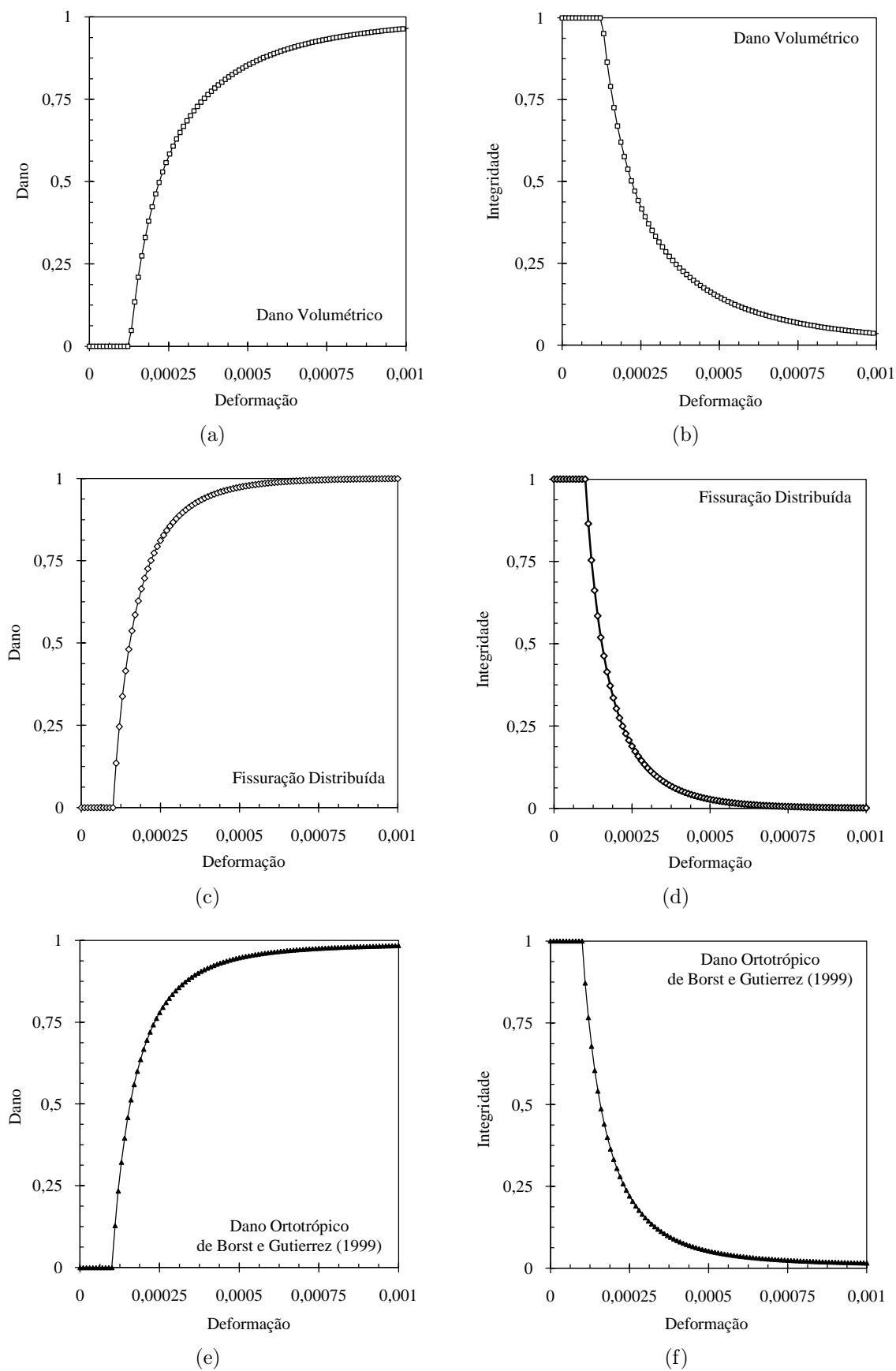


Figura 7.4: Variação do Dano e da Integridade: Dano \times Deformação axial (ϵ_x); Integridade \times Deformação axial (ϵ_x)

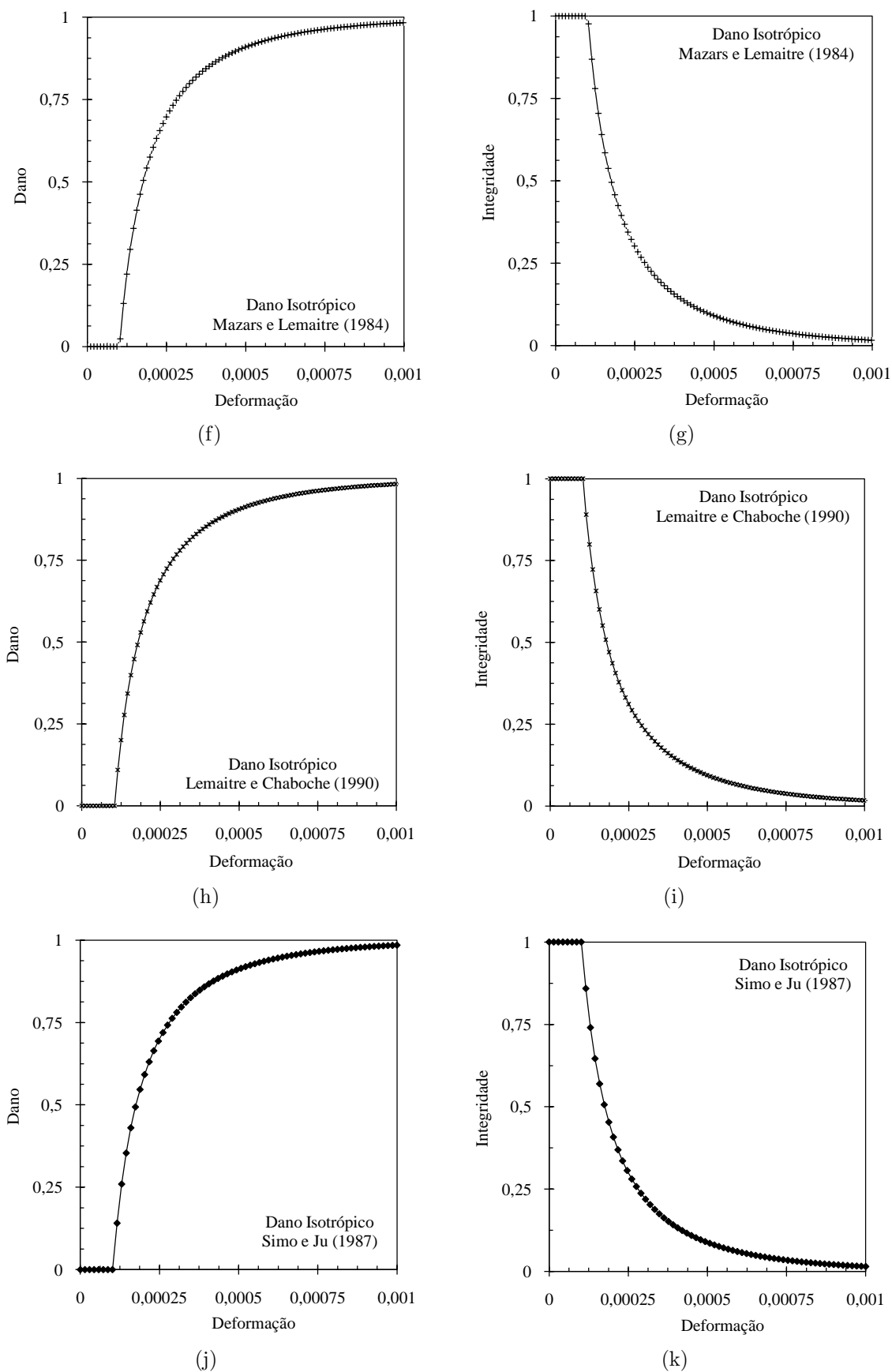


Figura 7.5: Variação do Dano e da Integridade: Dano \times Deformação axial (ϵ_x); Integridade \times Deformação axial (ϵ_x)

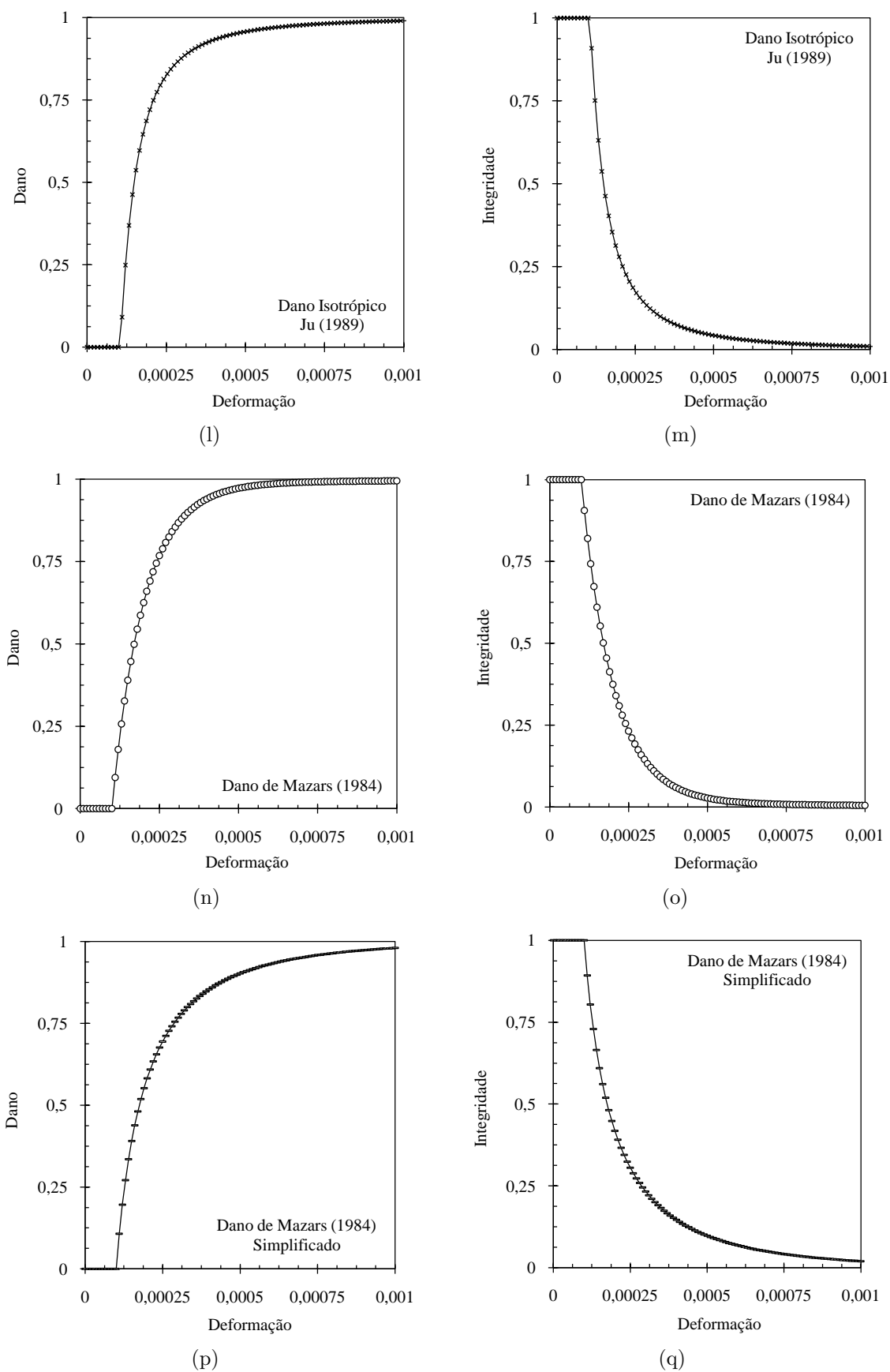


Figura 7.6: Variação do Dano e da Integridade: Dano \times Deformação axial (ε_x); Integridade \times Deformação axial (ε_x)

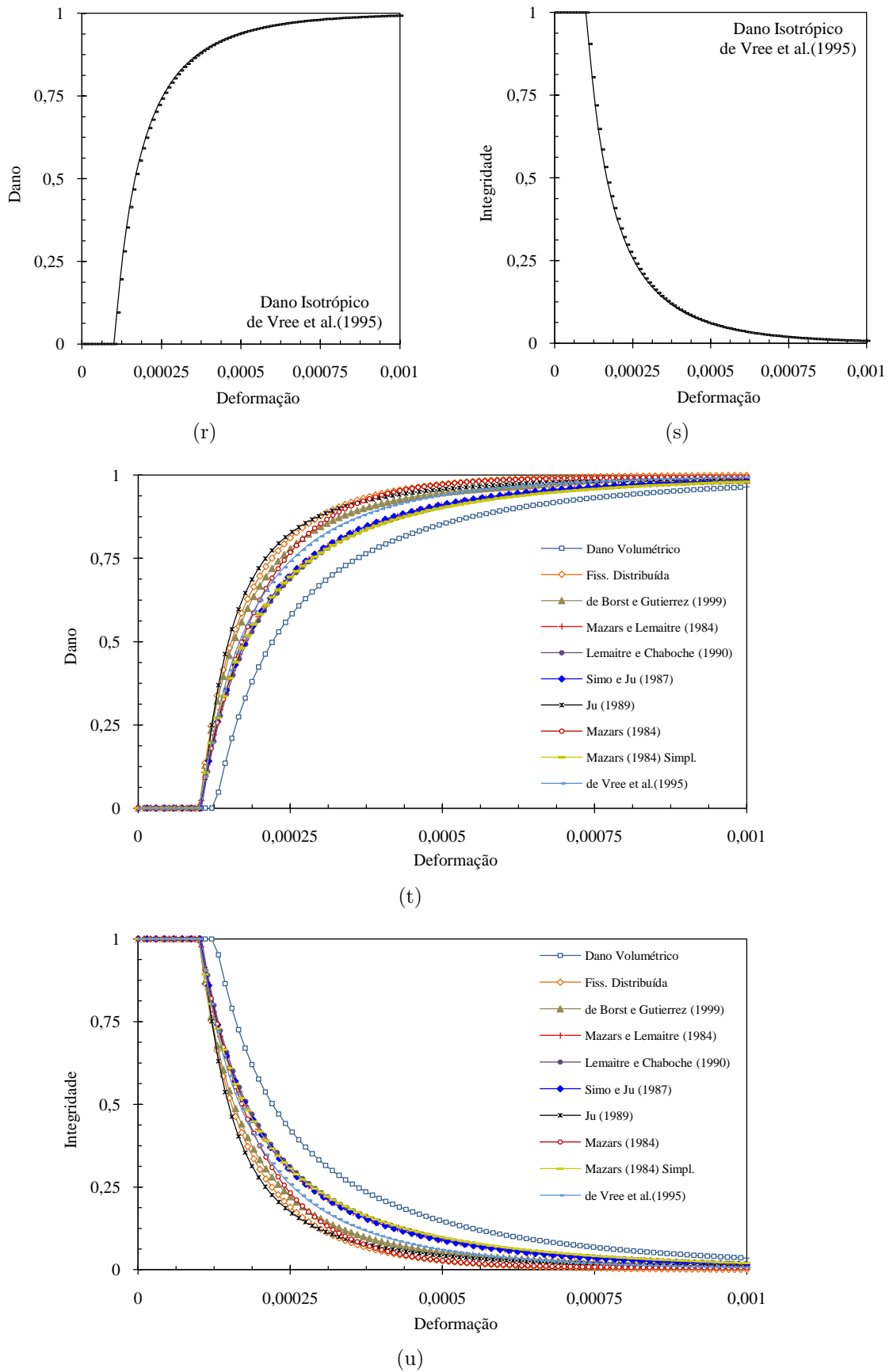


Figura 7.7: Variação do Dano e da Integridade: Dano \times Deformação axial (ε_x); Integridade \times Deformação axial (ε_x)

7.1.1 Variação da Função de Dano

Com exceção do modelo constitutivo de plasticidade, em que foi adotado um comportamento pós-crítico linear, para os modelos apresentados, utilizou-se uma variação exponencial para a degradação do material. Entretanto, várias formas de variação do dano podem ser usadas. No apêndice E são apresentadas diferentes leis tensão-deformação e funções de evolução de dano passíveis de serem usadas junto com os modelos constitutivos apresentados.

Continuando com o exemplo de tração direta, adotando o modelo de dano volumétrico, são apresentadas as funções de dano exponencial, polinomial, linear e bilinear, expondo seus diferentes comportamentos no que diz respeito ao processo de degradação. Os parâmetros de cada função de dano são variados em quatro casos, cujos dados estão especificadas na tabela 7.1. Além dos parâmetros citados adotou-se módulo de elasticidade de $20000,0 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson de $0,2$. Nos gráficos das figuras 7.8a,b,c,d tem-se as trajetórias de equilíbrio da extremidade da chapa tracionada para as quatro formas de evolução.

Tabela 7.1: Parâmetros das funções dano para a tração.

	Função Exponencial				Função Linear				
	1	2	3	4	1	2	3	4	
α	0,999	0,999	0,999	0,999	κ_0	0,00009	0,00009	0,00009	0,00009
β	2050	2550	3050	3550	κ_u	0,001	0,0008	0,0006	0,0004
κ_0	0,00009	0,00009	0,00009	0,00009					
	Função Polinomial				Função Bilinear				
	1	2	3	4	1	2	3	4	
f_e	1,0	1,0	1,0	1,0	κ_0	0,00009	0,00009	0,00009	0,00009
κ_0	0,00016	0,00014	0,00012	0,0001	κ_{cr}	0,0004	0,0003	0,000225	0,00016875
\tilde{E}	11111,111	11111,111	11111,111	11111,111	κ_u	0,0013	0,00095	0,0007125	0,000534375
					f_0	2,0	2,0	2,0	2,0
					f_{cr}	1,0	1,0	1,0	1,0
					f_u	0,0	0,0	0,0	0,0

Na tração direta não há efeito do dano por compressão. Assim, assumiu-se função de dano polinomial com $f_e = 12,0 \text{ MPa}$, $\kappa_0 = 0,002$ e $\tilde{E} = 11111,111 \text{ MPa}$, para todos os casos analisados. Para a solução empregou-se o método de controle direto de deslocamento, com incremento de $0,000011 \text{ m}$ do deslocamento horizontal na extremidade da chapa e tolerância de 1×10^{-4} .

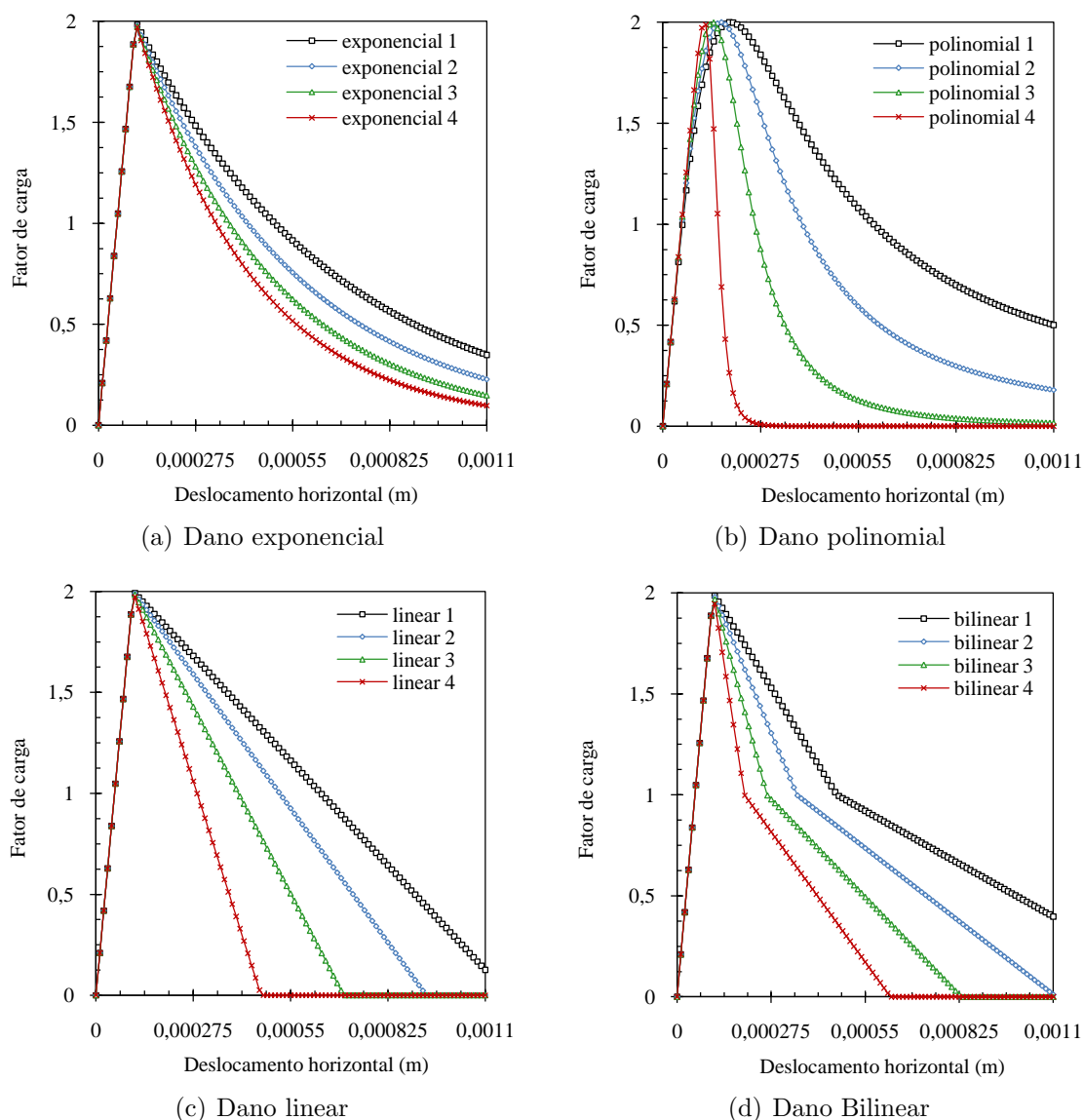


Figura 7.8: Trajetórias de equilíbrio com diferentes funções de dano.

A variação dos parâmetros teve o propósito de modificar a intensidade do crescimento do dano. Tal fato pode ser observado no ramo descendente das trajetórias de equilíbrio apresentadas na figura 7.8. O aumento da inclinação da curva indica um crescimento mais acentuado do dano, refletindo diretamente na ductilidade do material. A figura 7.9 mostra os resultados obtidos com quatro formas de evolução, para os parâmetros para o primeiro caso. A figura permite comparar qualitativamente os resultados e observar que, embora os respectivos parâmetros não admitem uma equivalência exata, as curvas apresentam um comportamento similar.

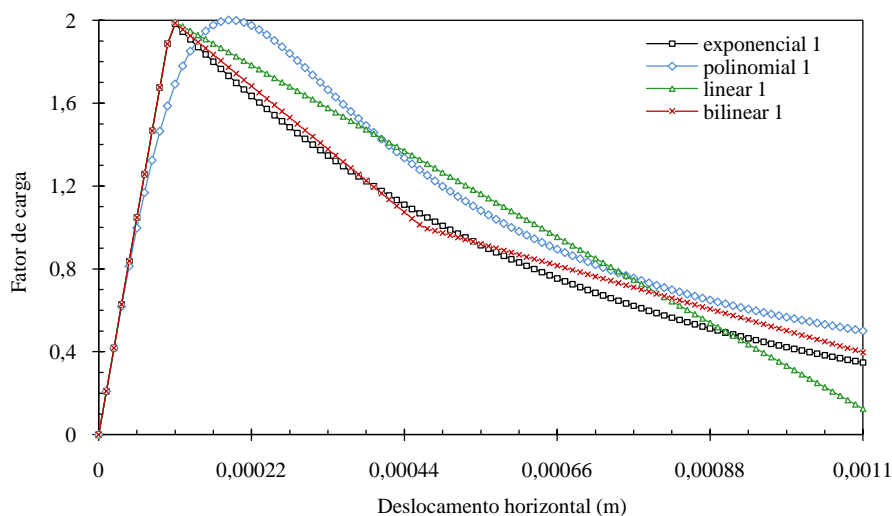
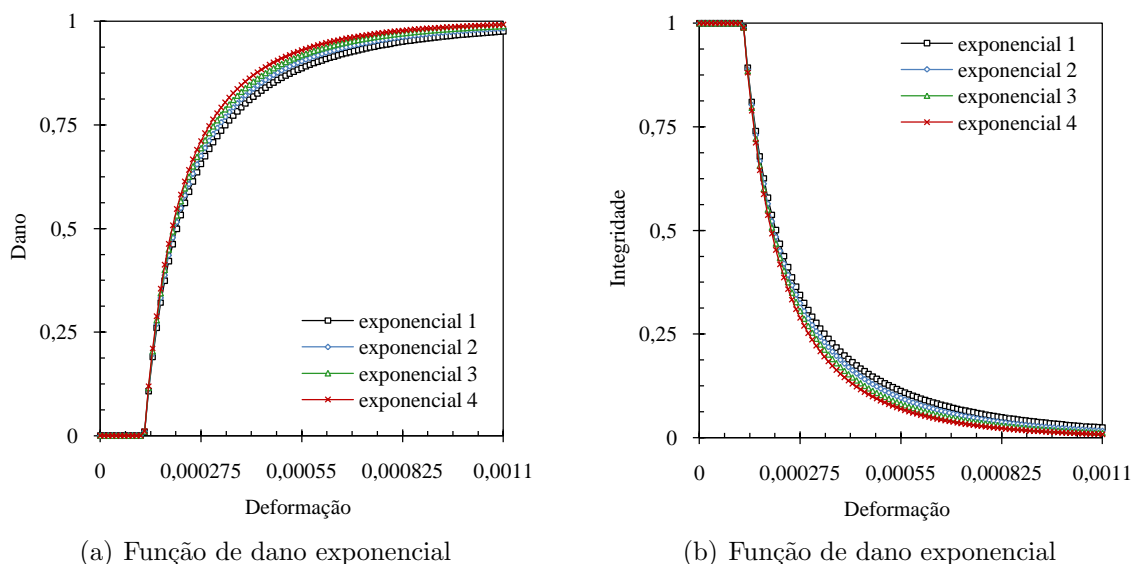


Figura 7.9: Comparação entre as diferentes funções evolução do dano.

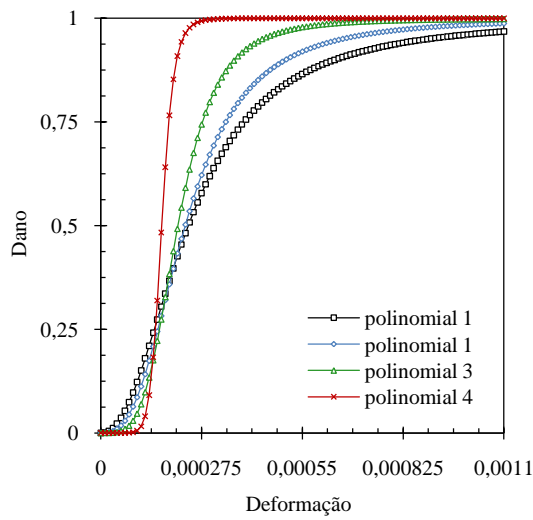
Assim como nas curvas tensão-deformação da figura 7.8, os reflexos da variação dos parâmetros das funções de dano podem ser observados em termos do dano e da integridade. As figuras 7.10 e 7.11 mostram a variação do dano e da integridade com as deformações axiais ao longo da análise. As figuras 7.12 e 7.13 mostra os resultados obtidos com quatro formas de evolução, para os parâmetros para o primeiro caso.



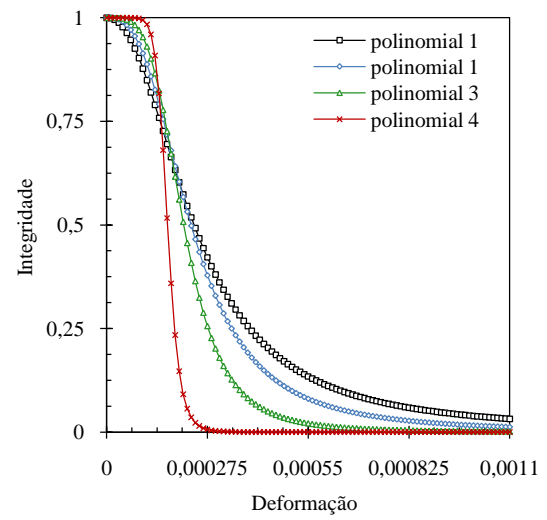
(a) Função de dano exponencial

(b) Função de dano exponencial

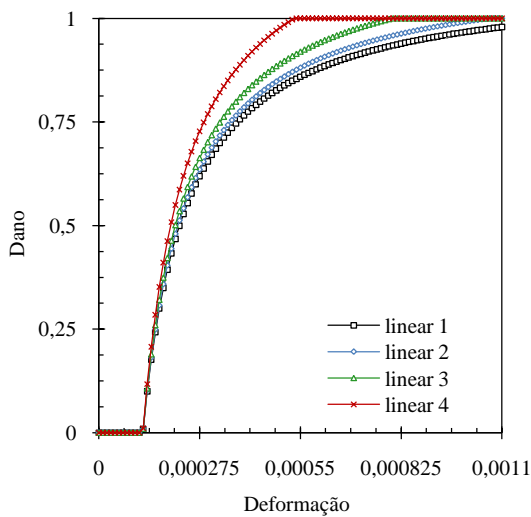
Figura 7.10: Variação do Dano e da Integridade: Dano \times Deformação axial (ε_x); Integridade \times Deformação axial (ε_x).



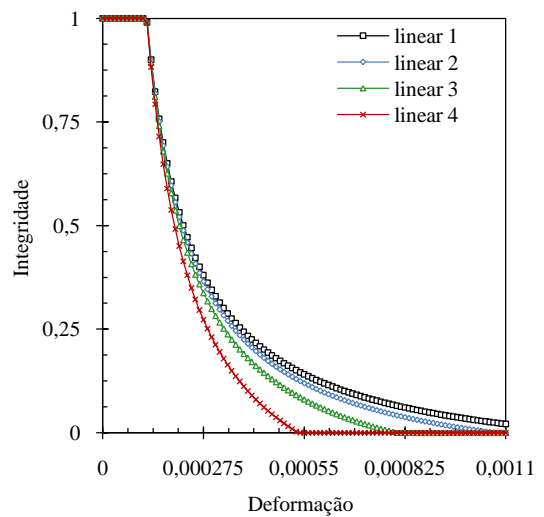
(c) Função de dano polinomial



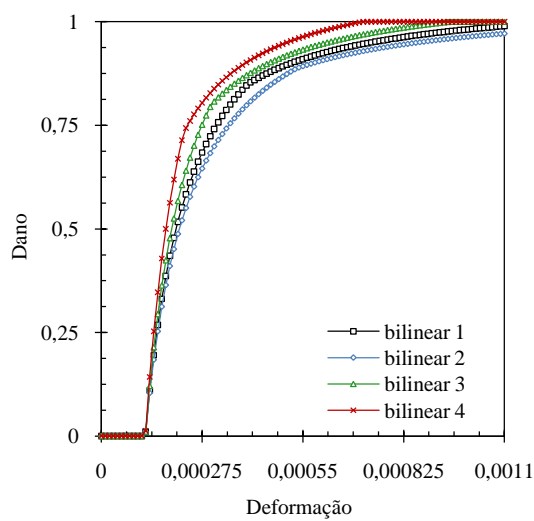
(d) Função de dano polinomial



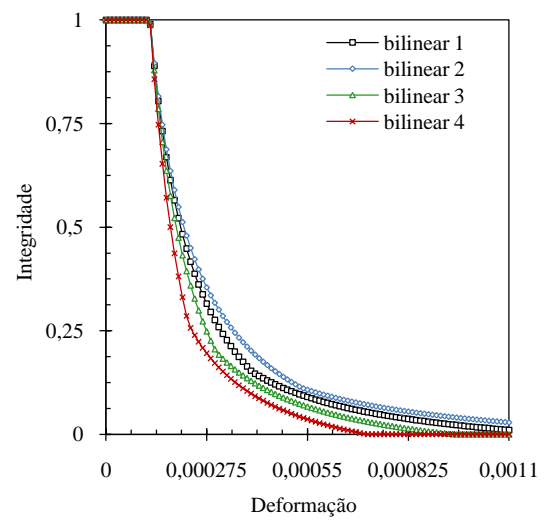
(e) Função de dano linear



(f) Função de dano linear



(g) Função de bilinear



(h) Função de dano bilinear

Figura 7.11: Variação do Dano e da Integridade: Dano \times Deformação axial (ε_x); Integridade \times Deformação axial (ε_x).

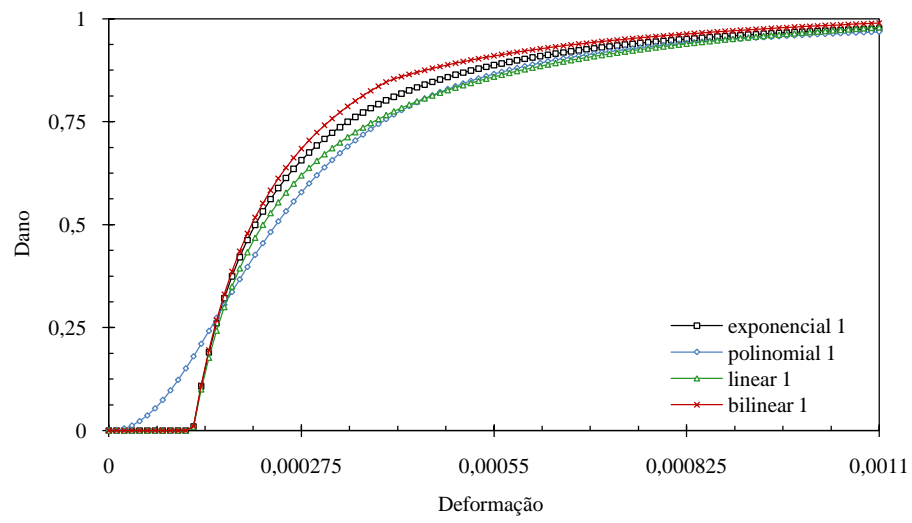


Figura 7.12: Variação do Dano: Dano \times Deformação axial (ε_x).

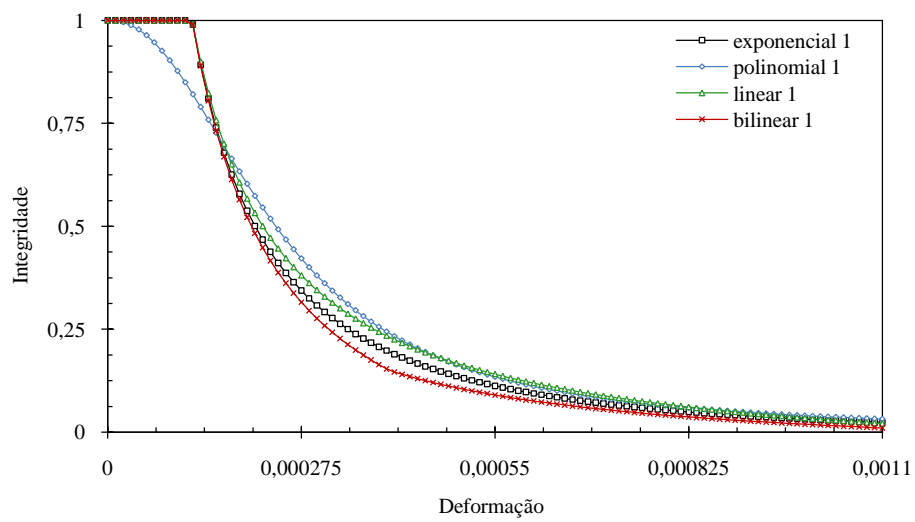


Figura 7.13: Variação da Integridade: Integridade \times Deformação axial (ε_x)

7.2 Diferentes Modelos de Análise

Os modelos constitutivos implementados podem ser aplicados a diferentes modelos de análise e, para exemplificar este potencial, são apresentados alguns exemplos ilustrativos, com destaque para diferentes tipos de estruturas. Os modelos constitutivos adotados em cada exemplo foram escolhidos por conveniência, entretanto são aplicáveis a todos os modelos de análise.

7.2.1 Modelo de Estado Plano de Tensão

Neste exemplo, uma viga biapoada é modelada com elementos quadriláteros de 8 nós. A configuração geométrica, o carregamento, as condições de contorno e a malha de elementos finitos são mostradas na figura 7.14.

Foi adotado o modelo de dano isotrópico com deformação equivalente de Mazars (1984) e variação exponencial, do dano dada pela equação E.8. Como mostrado na figura 7.14, visando simular uma região fissurada, as propriedades do material, naquela região, foram modificadas supondo a perda de resistência em decorrência da degradação do meio. Considerou-se módulo de elasticidade de $20000,0 \text{ N/mm}^2$, coeficiente de Poisson de $0,2$ e função de dano com $\alpha = 1,0$, $\beta = 1790,0$ e $\kappa_0 = 0,0001$, na região degradada, o valor de κ_0 foi reduzido para $0,00008$.

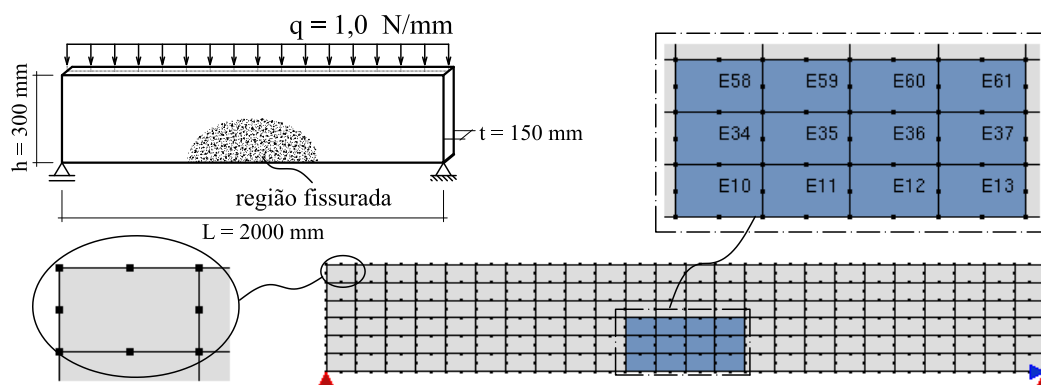


Figura 7.14: Modelo de estado plano de tensões.

As trajetórias de equilíbrio foram obtidas usando controle direto de deslocamento, sendo controlado o deslocamento vertical do nó central inferior da malha,

com incremento de deslocamento igual a $-0,015 \text{ mm}$ e tolerância de 5×10^{-4} . A trajetória de equilíbrio do nó controlado é mostrada na figura 7.15

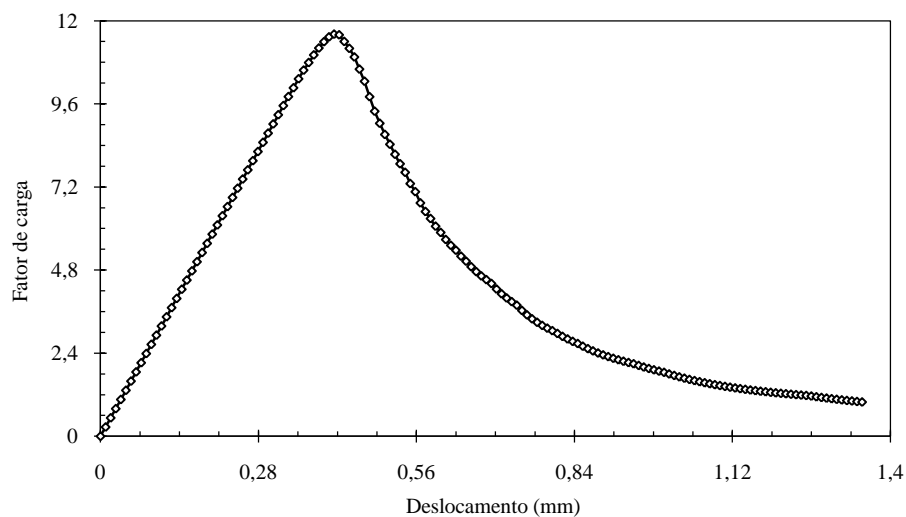


Figura 7.15: Trajetória de equilíbrio: Fator de carga \times Deslocamento.

7.2.2 Modelo de Estado Plano de Deformação

Para ilustrar uma análise em estado plano de deformação, uma barragem, ilustrada na figura 7.16, é modelada com elementos finitos triangulares de três nós. A barragem está submetida a um carregamento triangular constante e uma carga concentrada incremental.

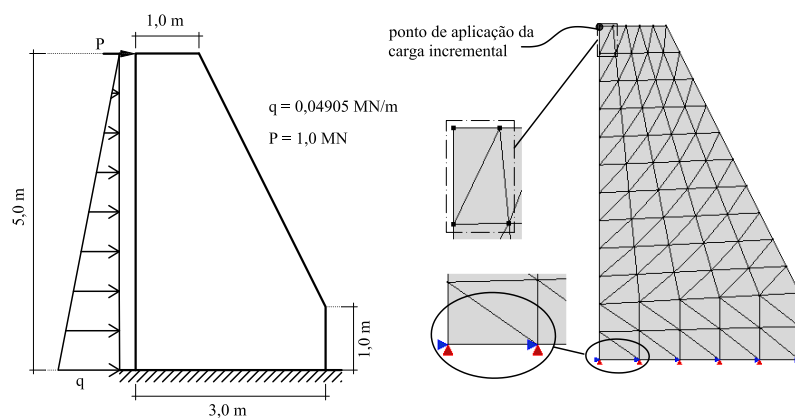


Figura 7.16: Detalhes da geométricos e malha de elementos finitos.

Para solução, foi adotado controle de deslocamento generalizado com um fator de carga inicial de 0,1 e tolerância de 1×10^{-4} , sendo o incremento aplicado à carga

P. Este método foi proposto por Yang e Shieh (1990) e baseia-se no controle de uma grandeza, denominada deslocamento generalizado, que relaciona os deslocamentos incrementais, de todos os graus de liberdade do modelo, em dois passos sucessivos (ver apêndice C). A trajetória de equilíbrio correspondente ao deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga incremental é mostrada na figura 7.17.

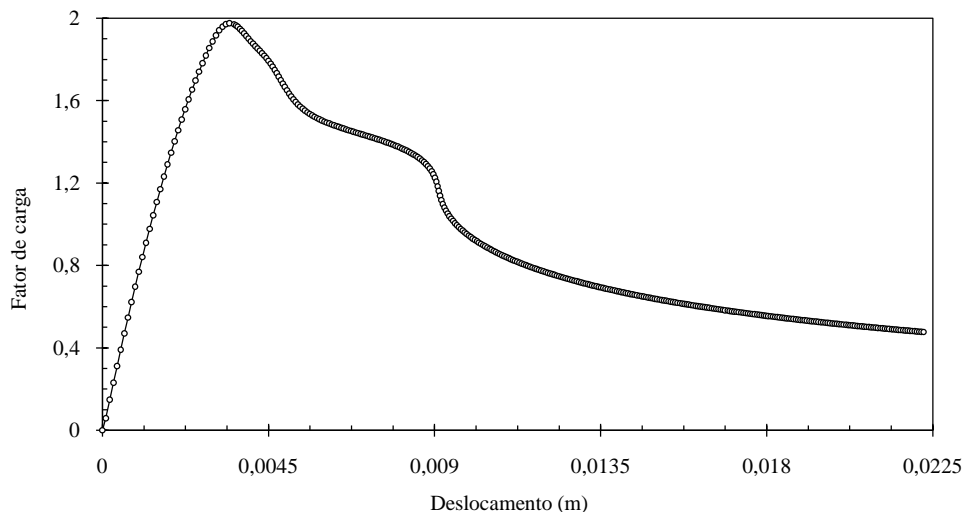


Figura 7.17: Trajetória de equilíbrio: Fator de carga \times Deslocamento.

Foi usado o modelo de dano volumétrico, com lei de evolução polinomial (equação E.14), considerando módulo de elasticidade de $30000,0 MPa$, coeficiente de Poisson de $0,2$ e os parâmetros de dano: $\kappa_0 = 0,0002825$, $f_e = 1,85 MPa$ e $\tilde{E} = 16666,666 MPa$, para tração, e $\kappa_0 = 0,005$, $f_e = 11,1 MPa$ e $\tilde{E} = 16666,666 MPa$, para compressão.

7.2.3 Modelo Axissimétrico

Neste exemplo, modela-se um reservatório cilíndrico axissimétrico. Foram considerados dois materiais, um elástico linear para a base do reservatório, e o outro, simulando concreto, para a parede. As dimensões e os detalhes da malha de elementos finitos estão ilustrados na figura 7.18.

Utilizou-se o modelo de dano de Mazars (1984) com $E_0 = 20000,0 N/mm^2$, $\nu = 0,2$, $\beta_t = 15000,0$ e $\beta_c = 10000,0$, $\alpha_t = 0,95$, $\alpha_c = 0,7$ e $\kappa_0 = 0,0001$. Para análise

não linear, foi empregado o método de controle de deslocamentos generalizados, com incremento de carga inicial de 0,003 e tolerância para a convergência de 1×10^{-4} .

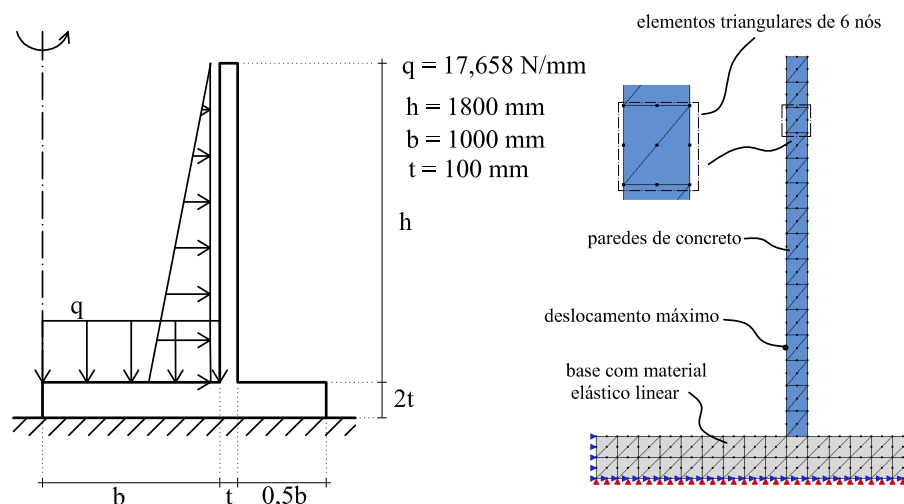


Figura 7.18: Modelo axissimétrico.

A figura 7.19 apresenta a trajetória de equilíbrio do ponto de maior deslocamento horizontal da parede do reservatório (Figura 7.18).

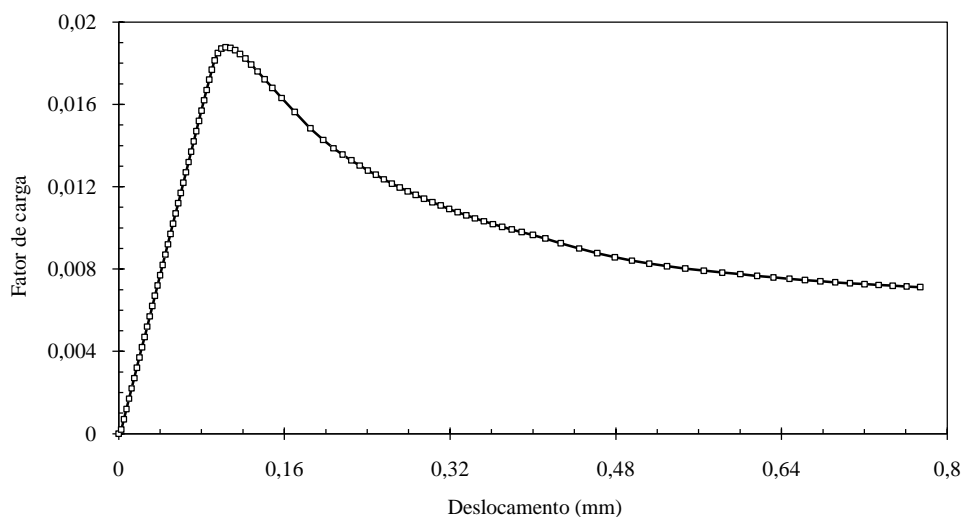


Figura 7.19: Trajetória de equilíbrio: Fator de carga \times Deslocamento.

7.2.4 Modelo de Placa de Kirchhoff

Utilizando o modelo de fissuração distribuída e leis tensão-deformação de Carreira e Chu (1985), para compressão (equação E.2), e de Boone et al. (1986), para tração (equação E.1), uma placa fina retangular foi modelada com elementos finitos

retangulares baseados na teoria de Kirchhoff. A figura 7.20 apresenta os detalhes do modelo e da malha de elementos finitos.

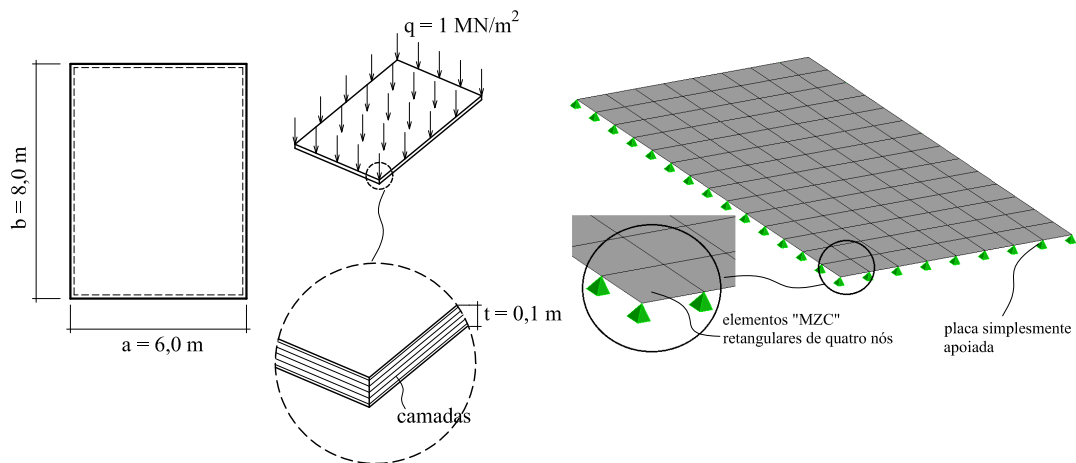


Figura 7.20: Modelo de placa de Kirchhoff.

As propriedades do material para cada uma das 40 camadas são dadas por: $E_0 = 20000,0 \text{ MPa}$, $\nu = 0,2$, $f_c = 20,0 \text{ MPa}$, $f_t = 2,0 \text{ MPa}$, $\varepsilon_c = 0,002$, $G_f = 0,00006 \text{ MN/m}$, $h = 0,05 \text{ m}$ e $\beta_r = 0,05$.

Para a obtenção das trajetórias de equilíbrio foi usado o método de controle de comprimento de arco cilíndrico, com fator de carga inicial de 0,0001 e tolerância de 1×10^{-4} . A figura 7.21 apresenta o gráfico “Fator de carga × Deslocamento” para o nó central da malha.

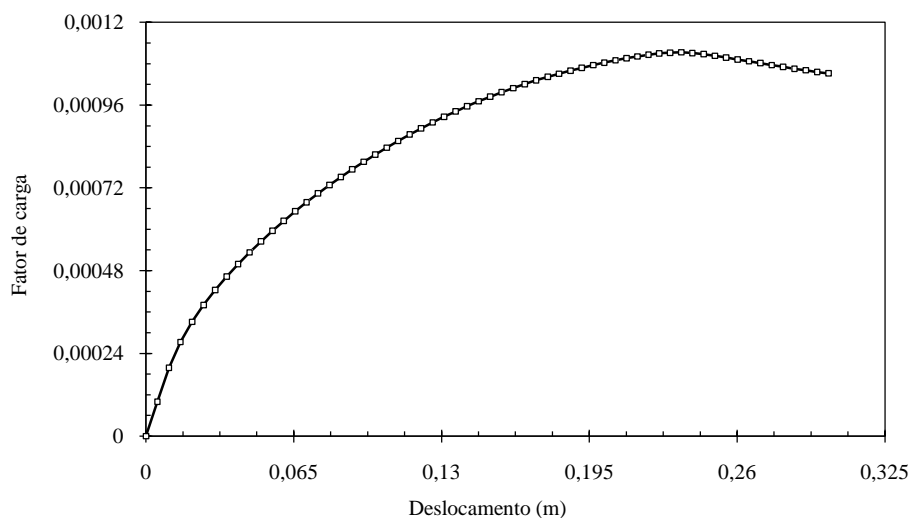


Figura 7.21: Trajetória de equilíbrio: Fator de carga × Deslocamento.

7.2.5 Modelo de Placa de Reissner-Mindlin

Uma placa anular com carga distribuída na borda interna foi modelada com elementos quadrilaterais de quatro nós segundo a teoria de placas de Reissner-Mindlin. Os detalhes do modelo estão especificados na figura 7.22.

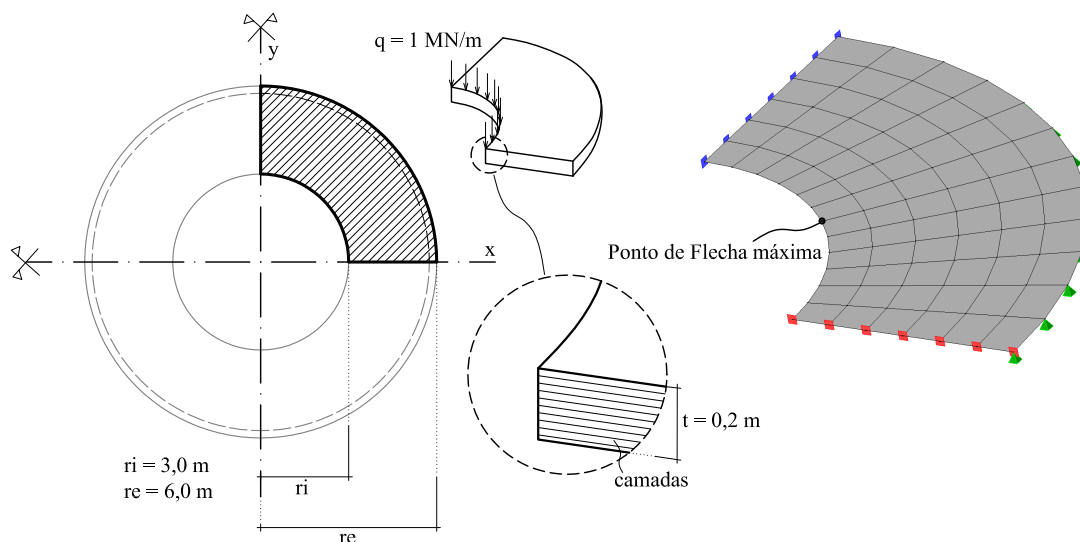


Figura 7.22: Modelo de placa de Reissner-Mindlin.

A espessura da placa foi discretizada em 50 camadas de $0,004\text{ m}$ de altura. Assim como no exemplo anterior foi adotado o modelo de fissuração distribuída, com leis de Carreira e Chu (1985), para compressão, e de Boone et al. (1986), para tração. Os parâmetros do material são: $E_0 = 28000\text{ MPa}$, $\nu = 0,2$, $f_c = 25,0\text{ MPa}$, $f_t = 2,5\text{ MPa}$, $\varepsilon_c = 0,002$, $G_f = 0,0001\text{ MN/m}$, $h = 0,075\text{ m}$ e $\beta_r = 0,05$.

As trajetórias de equilíbrio foram obtidas com o método de controle de deslocamentos generalizados, adotando-se fator de carga inicial de $0,005$ e tolerância de 1×10^{-4} . A trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical, de um dos pontos de maior deslocamento, pode ser vista na figura 7.23.

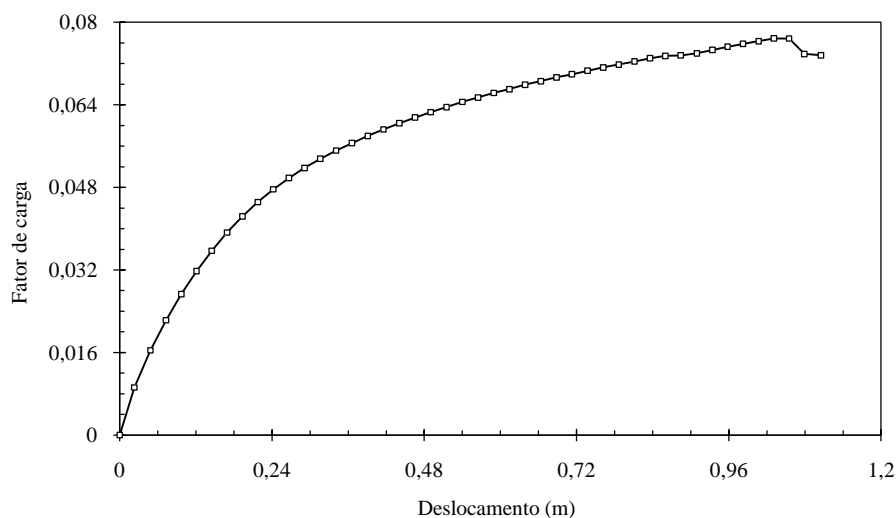


Figura 7.23: Trajetórias de equilíbrio: Deslocamento vertical \times Fator de carga.

7.2.6 Modelo Sólido

Os fenômenos de localização de deformações podem ser simulados com exemplos simples de tração direta, como o da barra prismática mostrada na figura 7.24. Para induzir a localização, admite-se uma região menos resistente no interior da mesma, representando a degradação do meio. Assim, a barra foi discretizada com três elementos finitos hexaédricos de oito nós, reduzindo-se a resistência à tração do elemento central. Desta forma, o elemento menos resistente tem seu comprimento reduzido gradualmente, visando de localizar o dano em uma região cada vez menor. Para tanto foram analisados cinco modelos distintos com $c = 0,5; 1,0; 2,0; 3,0; 4,0$ m.

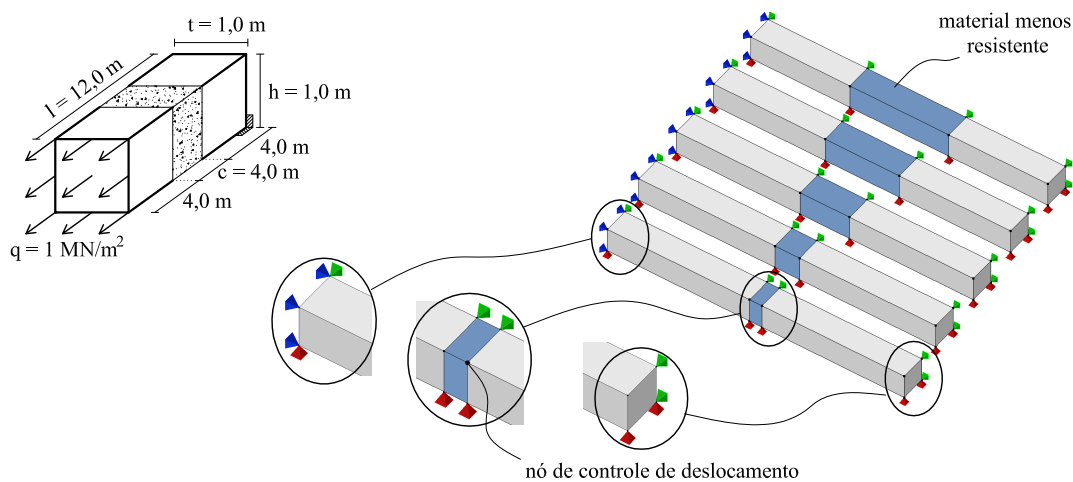


Figura 7.24: Modelo sólido.

Foi adotado o modelo constitutivo de Mazars e Lemaitre (1984) com módulo de elasticidade de $20000,0 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson de $0,2$ e função de dano exponencial, dada pela equação E.8, com os parâmetros: $\alpha = 0,99$, $\beta = 1500$ e $\kappa_0 = 0,00011$. Na região degradada adota-se $\kappa_0 = 0,00008$. Para a obtenção das trajetórias de equilíbrio, empregou-se o método de controle direto de deslocamento com incremento de $0,00002 \text{ m}$ do deslocamento horizontal do nó destacado na figura 7.24 e tolerância de 1×10^{-4} . As trajetórias de equilíbrio para o deslocamento horizontal da extremidade da barra, para os 5 modelos analisados, são mostradas na figura 7.25.

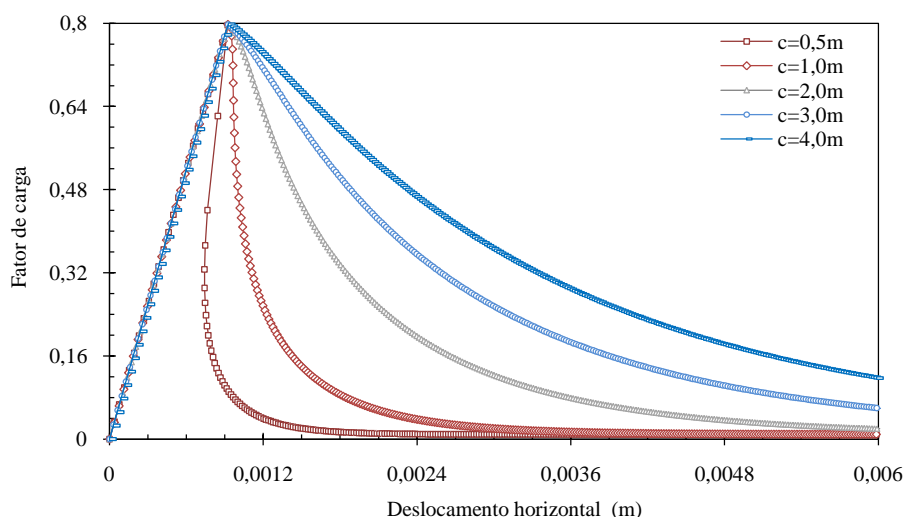


Figura 7.25: Trajetória de equilíbrio: Deslocamento horizontal \times Fator de carga.

No gráfico apresentado na figura 7.25, verifica-se a perda de ductilidade estrutural à medida que a região menos resistente é reduzida. A resistência global da estrutura é governada pelo elemento central de modo que, durante o processo de carregamento, esta região entra em regime de amolecimento, ao passo que o restante do domínio apresenta descarregamento elástico. As figuras 7.26 e 7.27 ilustram esta constatação, mostrando o carregamento inelástico da região degradada e o descarregamento elástico das regiões íntegras.

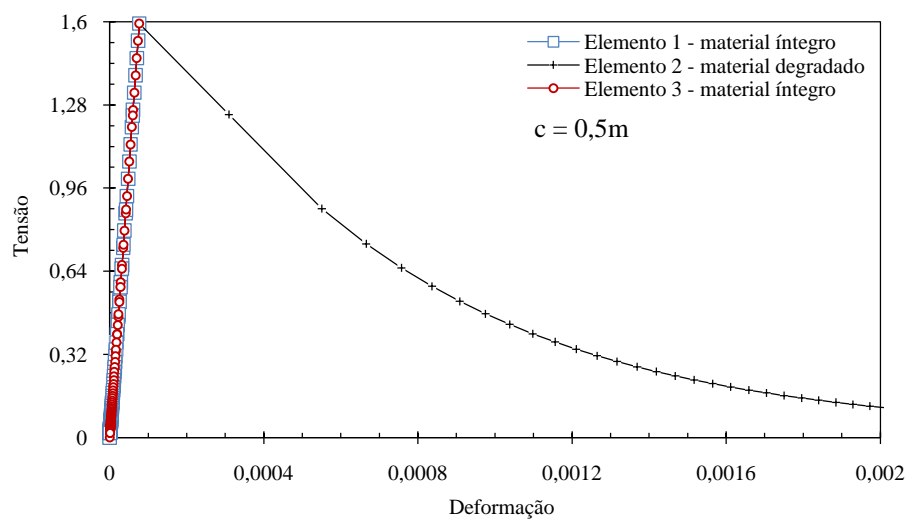


Figura 7.26: Tensão (σ_{xx}) \times Deformação (ε_{xx}) para $c = 0,5 m$.

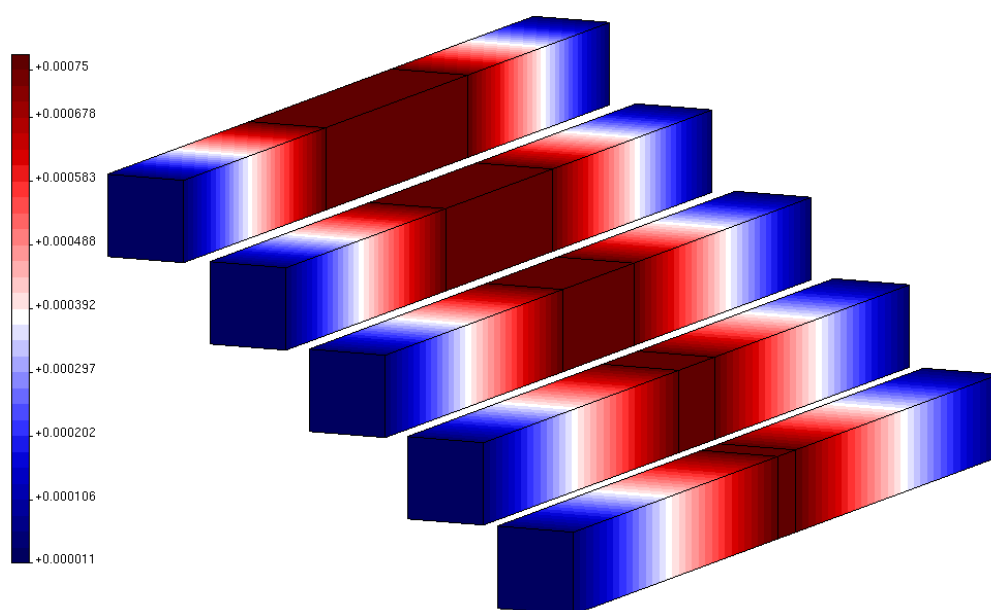


Figura 7.27: Localização de deformações axiais ε_{xx} .

7.2.7 Modelo de Pórtico de Bernoulli-Euler

O pórtico espacial de concreto armado apresentado neste exemplo foi modelado por Fonseca (2006) e uma análise mais detalhada pode ser vista em seu trabalho. A figura 7.28 apresenta os detalhes geométricos do modelo bem como o carregamento e as condições de contorno.

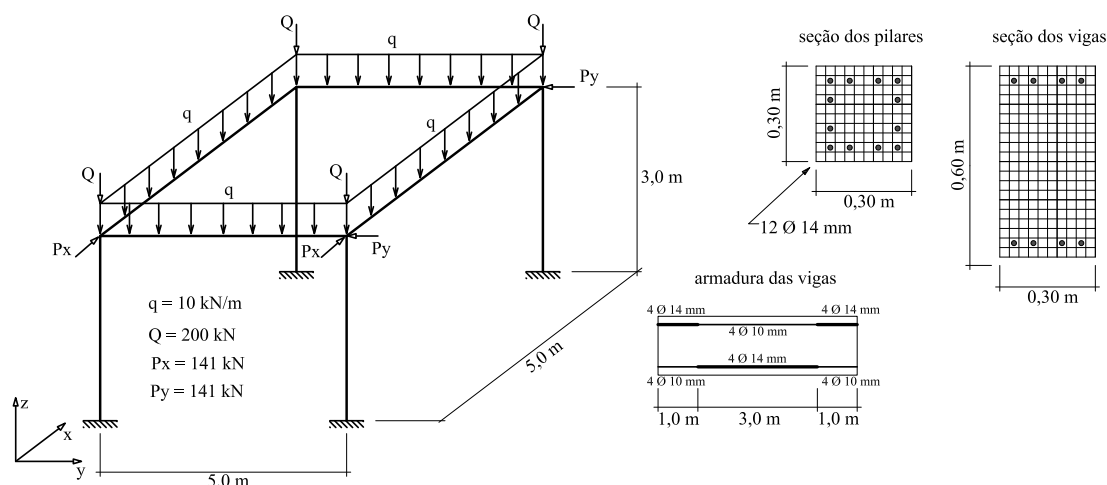


Figura 7.28: Detalhes da geométricos do pórtico espacial.

Adotou-se a malha, com 80 elementos finitos hermitianos, unidimensionais de dois nós, baseados na teoria de Bernoulli-Euler, detalhada na figura 7.29. Para o aço adotou-se o comportamento elastoplástico perfeito com módulo de elasticidade de $210000,0 \text{ MPa}$ e tensão de escoamento de $500,0 \text{ MPa}$. Para o concreto foram adotadas as leis de Carreira e Chu (1985, 1986), para tração e para compressão (equação E.2), com $E_0 = 32000,0 \text{ MPa}$, $f_c = 33,0 \text{ MPa}$, $f_t = 3,3 \text{ MPa}$, $\varepsilon_c = 0,002$ e $\varepsilon_t = 0,0002$.

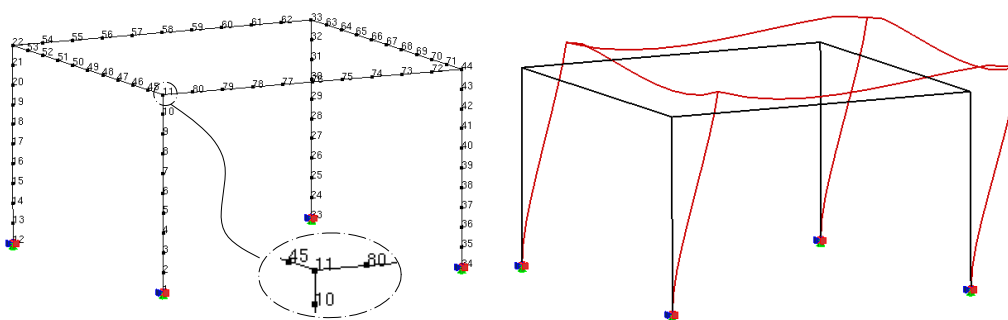


Figura 7.29: Modelo de elementos finitos e deformada.

Para a análise não linear, foi utilizado o método de controle direto de deslocamento, com incremento do deslocamento na direção x do nó 11 de $0,0005 \text{ m}$ e tolerância para a convergência de 1×10^{-4} . As cargas P_x e P_y são incrementais e as cargas Q e q são mantidas constantes. A figura 7.30 apresenta o gráfico da trajetória de equilíbrio para o deslocamento de controle.

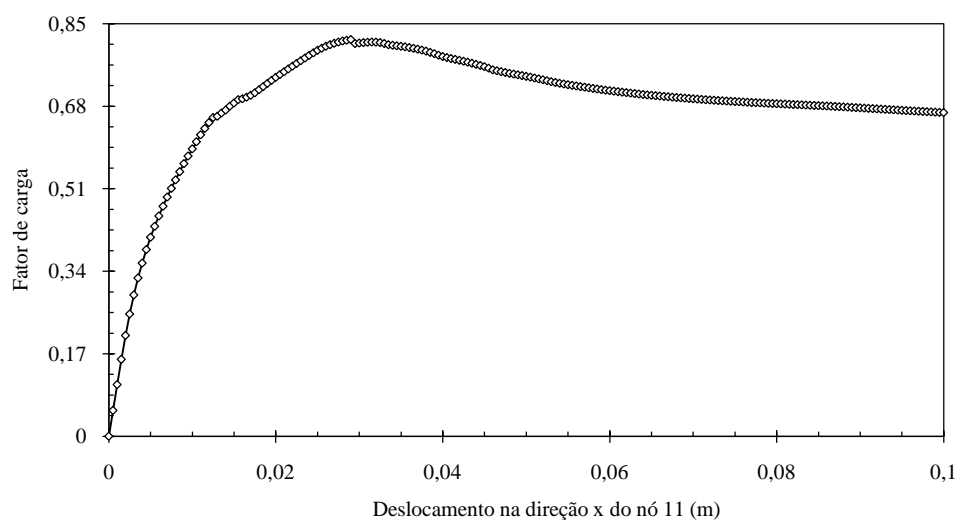


Figura 7.30: Trajetória de equilíbrio: Deslocamento horizontal \times Fator de carga.

Para as cargas incrementais P_x e P_y o fator de carga máximo obtido foi de 0,8158, e o deslocamento máximo do nó 11 foi de 0,1 m. A figura 7.29 apresenta a deformada do modelo no final da análise.

7.2.8 Modelo de Viga de Timoshenko

Neste exemplo, a viga ilustrada na figura 7.31 foi analisada com dois modelos diferentes: o primeiro, com elementos unidimensionais de dois nós, e o segundo, com elementos unidimensionais de três nós, baseados na teoria de viga de Timoshenko.

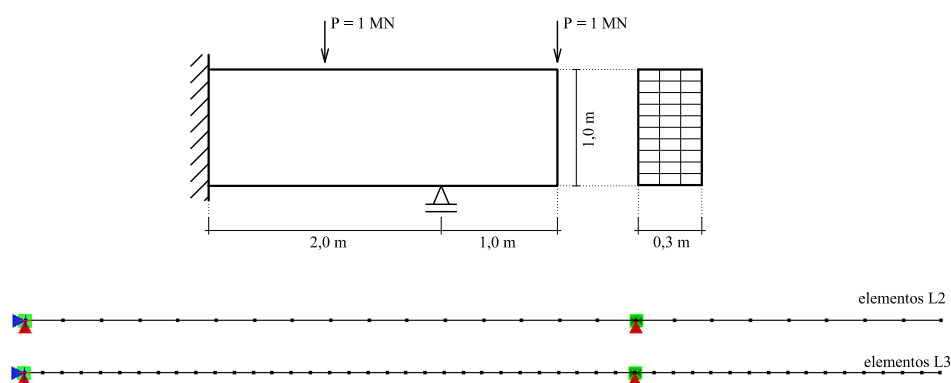


Figura 7.31: Detalhes geométricos e das malhas de elementos finitos.

O comportamento do material segue as leis de Carreira e Chu (1985, 1986), para tração e para compressão (equação E.2) com: $E_0 = 20000$ MPa, $f_c = 20,0$ MPa,

$f_t = 2,0 \text{ MPa}$, $\varepsilon_c = 0,0011$ e $\varepsilon_t = 0,0002$. Para a análise não linear, foi utilizado o método de controle de comprimento de arco cilíndrico, com fator de carga inicial de 0,005 e tolerância para a convergência de 1×10^{-4} . A figura 7.32 apresenta as trajetórias de equilíbrio da extremidade do balanço. Na malha com elementos de dois nós, para evitar o bloqueio da solução, foi adotado uma integração reduzida com 1 ponto de integração. Para a malha com elementos de três nós, por ser mais flexível, a integração reduzida não foi necessária.

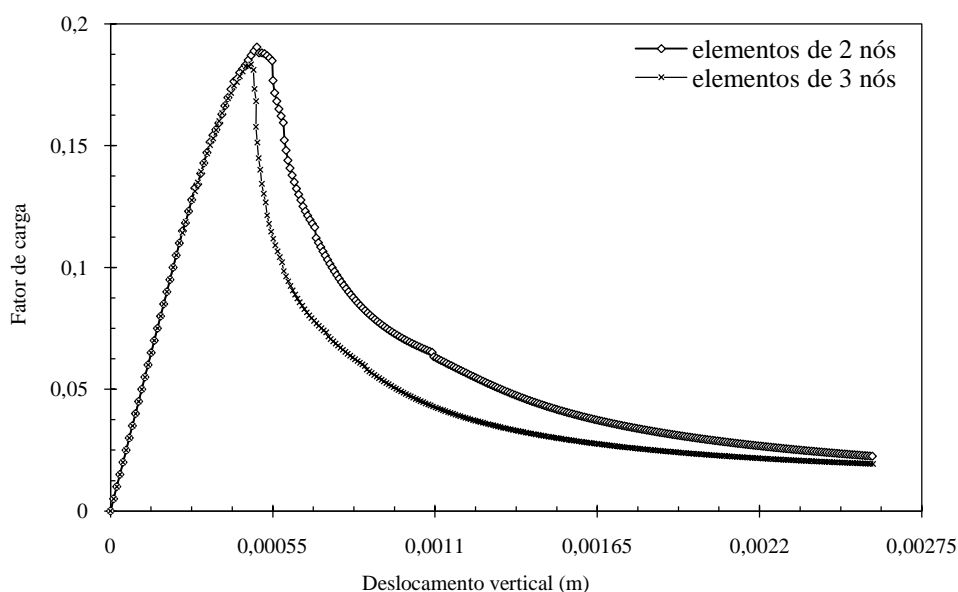


Figura 7.32: Trajetórias de equilíbrio da extremidade do balanço.

7.2.9 Modelo de Treliça Plana

A treliça plana ilustrada na figura 7.33 foi analisada com o modelo de plasticidade clássica, com critério de von Mises, e com o modelo de dano de Lemaitre e Chaboche (1990), com função de dano exponencial.

Para o modelo de plasticidade adotou-se: módulo de elasticidade de $2,1 \times 10^5 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson de 0,2 e tensão de escoamento igual a $500,0 \text{ MPa}$. Para o modelo de dano de Lemaitre e Chaboche (1990) foi adotado: módulo de elasticidade de $210000,0 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson de 0,2 e função de dano exponencial, dada pela equação E.8, com: $\alpha = 0,1$, $\beta = -30,0$ e $\kappa_0 = 0,002381$. Para obtenção das trajetórias de equilíbrio, foi usado método de controle de comprimento

de arco cilíndrico, com fator de carga inicial de 0,5 e tolerância de 1×10^{-4} .

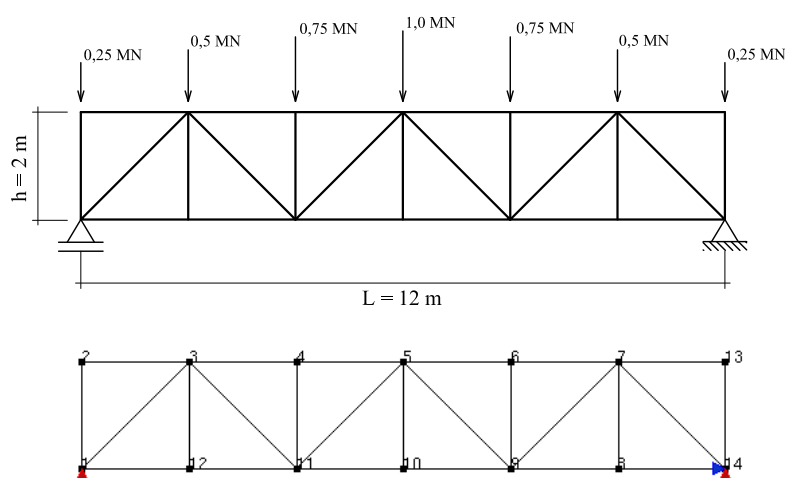


Figura 7.33: Detalhes da geométricos e modelo de elementos finitos.

A figura 7.34 apresenta o gráfico do “Deslocamento vertical \times Fator de carga” do nó central inferior, para os dois modelos constitutivos adotados.

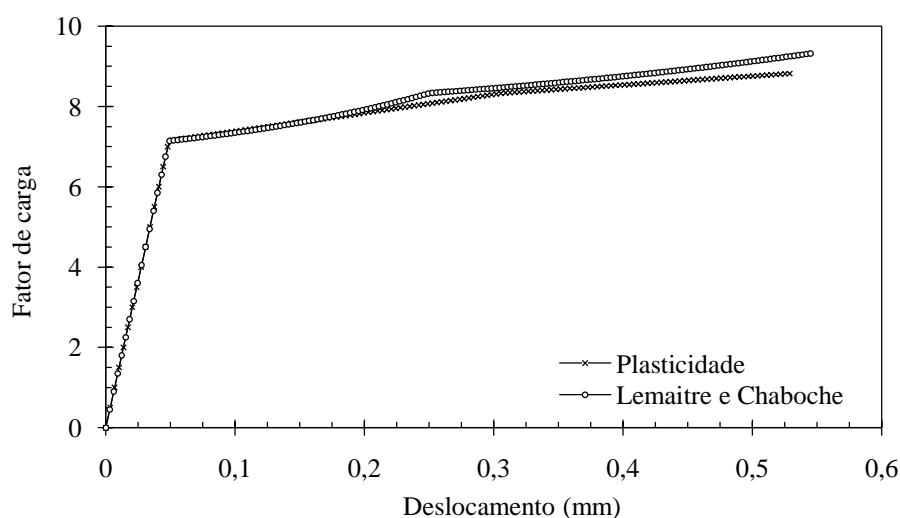


Figura 7.34: Trajetórias de equilíbrio: Deslocamento vertical \times Fator de carga.

Verifica-se que no regime inelástico, em ambos os modelos, as curvas apresentam dois ramos distintos e, embora os modelos constitutivos sejam diferentes, o comportamento é o mesmo. As figuras 7.35, 7.36 e 7.37 mostram a variação das deformações das barras da treliça para o modelo de plasticidade e as figuras 7.38, 7.39 e 7.40, para o modelo de dano.

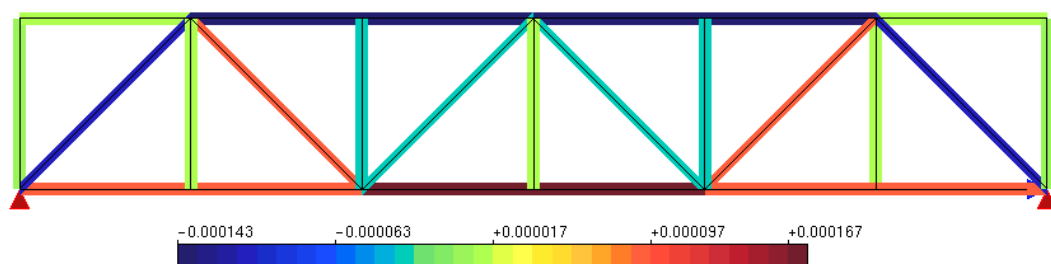


Figura 7.35: Variação das deformações no regime elástico, para o modelo de plasticidade.

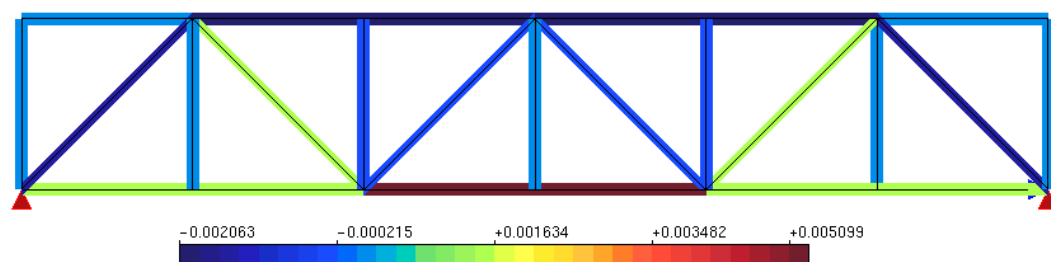


Figura 7.36: Variação das deformações no trecho I do regime inelástico, para o modelo de plasticidade.

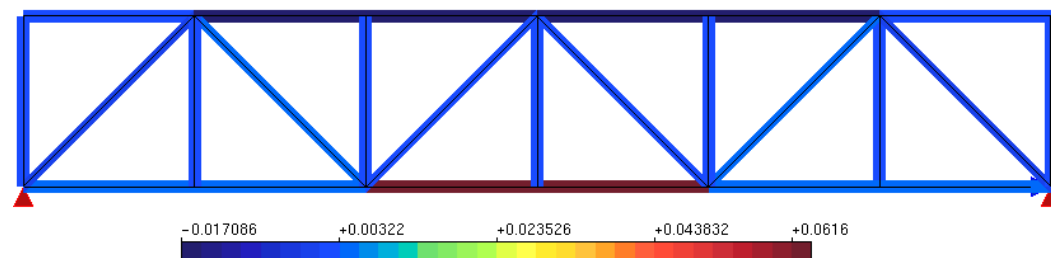


Figura 7.37: Variação das deformações no trecho II do regime inelástico, para o modelo de plasticidade.

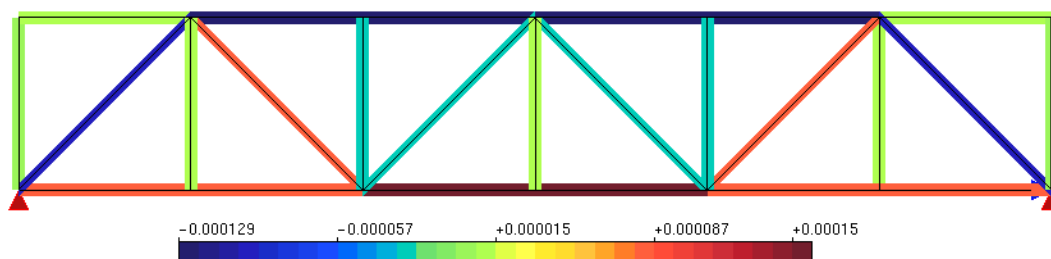


Figura 7.38: Variação das deformações no regime elástico, para o modelo de dano.

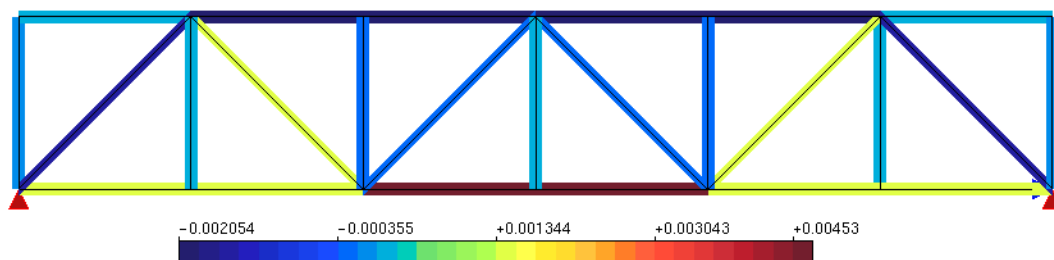


Figura 7.39: Variação das deformações no trecho I do regime inelástico, para o modelo de dano.

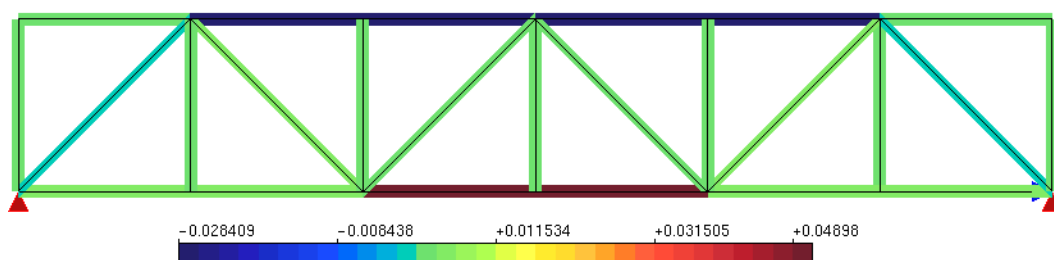


Figura 7.40: Variação das deformações no trecho II do regime inelástico, trecho para o modelo de dano.

7.3 Considerações Sobre o Emprego de Diferentes Tipos de Elementos e Modelos de Análise

Os exemplos aqui apresentados ilustram diferentes modelos de análise e diferentes tipos de elementos finitos. Nos trabalhos de Fonseca et al. (2004), Almeida (2005), Fonseca (2006), Saliba (2007) e Ajeje (2009), os diversos tipos de elementos e modelos de análise foram implementados no sistema **INSANE**, proporcionando uma extensa biblioteca.

A implementação da estrutura teórica unificada proposta neste trabalho, bem como dos modelos constitutivos nela inseridos, foi feita de forma genérica e independente dos elementos finitos disponíveis. Seguindo a filosofia de generalização empregada na concepção do sistema **INSANE**, foi possível separar completamente a estrutura teórica unificada dos tipos de elementos já existentes, o que favoreceu o uso amplo dos modelos constitutivos. Esta separação, com o auxílio do formato tensorial usado na formulação e implementação, possibilitou tratar de forma geral

cada modelo constitutivo, de modo a contemplar os modelos de análise existentes no sistema.

Os modelos aqui apresentados também ilustram as diferentes formas de inclusão da estrutura teórica proposta nas discretizações do método dos elementos finitos. Isto é, os modelos constitutivos podem ser usados para descrever o comportamento de pontos representativos de degenerações geométricas diversas. Sejam os modelos planos, unidimensionais ou tridimensionais, o ponto material pode ser representativo de diferentes grandezas, conforme ilustra a figura 7.41.

Nos modelos geometricamente planos, o ponto material pode representar a espessura degenerada e , portanto, prescrita (Figura 7.41a) ou uma camada da espessura decomposta (Figura 7.41b). De forma análoga, nos modelos geometricamente unidimensionais, o ponto material pode representar uma seção transversal degenerada (Figura 7.41c) ou cada um dos pontos que formam a decomposição da mesma (Figura 7.41d). Por fim, quando não há degeneração da geometria, o modelo constitutivo é representativo de um ponto no espaço (Figura 7.41e).

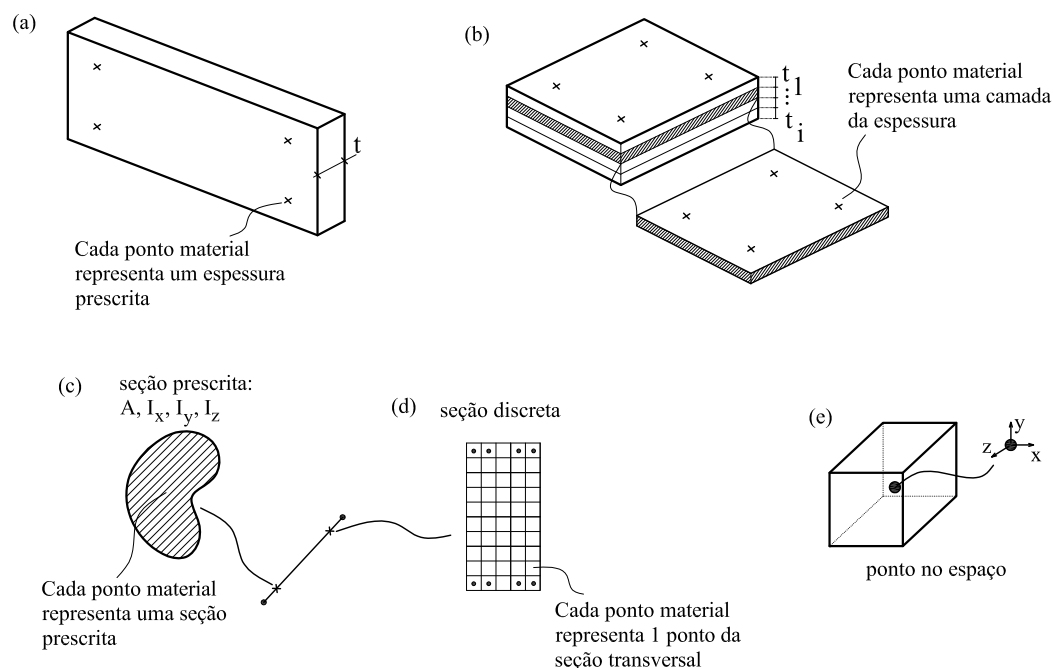


Figura 7.41: Tipos de Degenerações.

Capítulo 8

Estudos de Caso

Neste capítulo serão apresentadas algumas simulações baseadas em casos clássicos encontrados na literatura com a finalidade de ilustrar a potencialidade do arcabouço computacional implementado. Será usado, para tanto, o modelo de fissuração distribuída, escolhido pela conveniência dos exemplos, mas as possibilidades de estudo podem ser estendidas à todos os modelos constitutivos apresentados de acordo com o propósito de cada estudo pretendido.

8.1 Flexão com Pré Tensão

Apresenta-se uma viga de concreto submetida a flexão com pré tensão, de tração ou de compressão. A definição da geometria e da malha de elementos finitos, bem como os carregamentos são vistos na figura 8.1.

A viga foi estudada por DeJong et al. (2008), utilizando análises lineares sequenciais, controlada por lei tensão-deformação bilinear, descritas pelos parâmetros: módulo de elasticidade de $32,0 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson de $0,2$, resistência à tração de $3,0 \text{ MPa}$ e energia de fratura de $0,06 \text{ N/mm}$.

Neste trabalho, adotou-se o modelo de fissuração distribuída com leis bilineares

para tração (equação E.4) e para compressão (equação E.5), descritas pelos parâmetros: $E_0 = 32000,0 \text{ N/mm}^2$, $E_2 = 3000,0 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,2$, $f_c = 30,0 \text{ N/mm}^2$, $f_t = 3,0 \text{ N/mm}^2$, $h = 50 \text{ mm}$, $G_f = 0,06 \text{ N/mm}$ e $\beta_r = 0,0$.

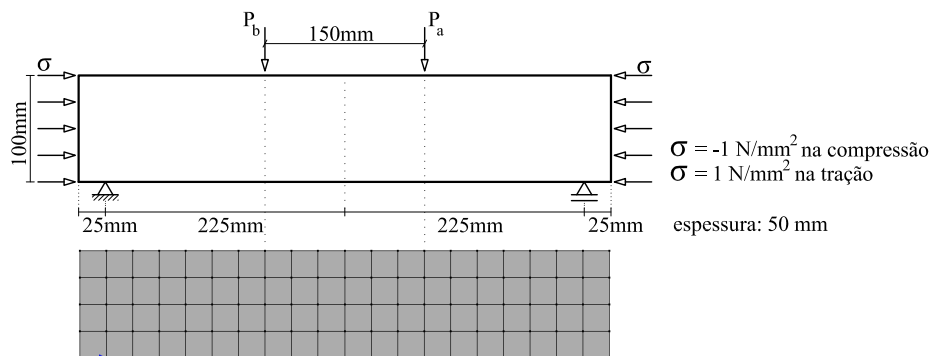


Figura 8.1: Geometria e modelo de elementos finitos

Para obtenção das trajetórias de equilíbrio, empregou-se o método de controle de deslocamentos generalizados com fator de incremento de carga inicial de 10,0, tolerância para convergência de 1×10^{-4} e cargas de referência de $P_a = P_b = 0,5 \text{ N}$, como visto na figura 8.1. A carga distribuída de pre tensão foi mantida constante: $1,0 \text{ N/mm}^2$, para tração, e $-1,0 \text{ N/mm}^2$, para compressão.

As trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga P_b , para os casos $\sigma > 0$, $\sigma = 0$ e $\sigma < 0$, são mostradas na figura 8.2.

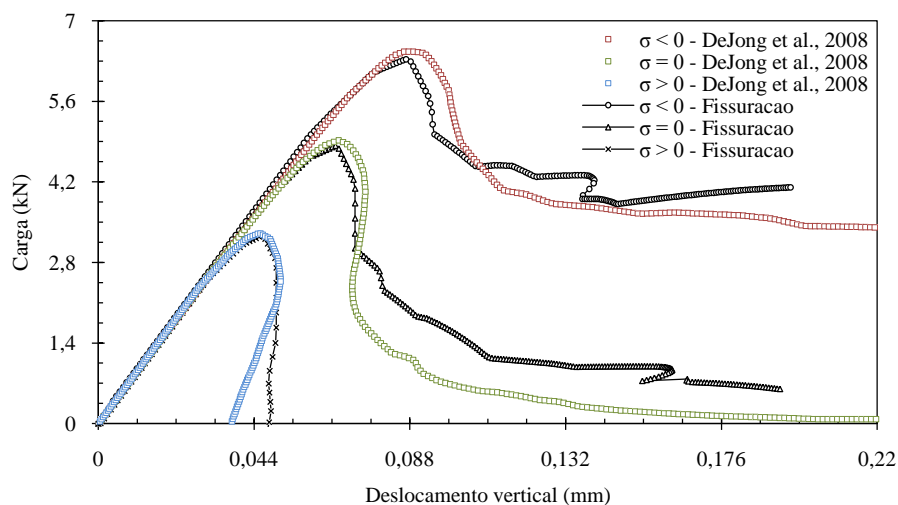


Figura 8.2: Trajetórias de equilíbrio: Carga \times Deslocamento vertical.

As trajetórias de equilíbrio mostram boa conformidade entre os resultados aqui obtidos e os de DeJong et al. (2008). Esta conformidade pode ser atribuída ao modelo usado por DeJong et al., que, embora adote um método de solução diferente, é baseado no modelo de fissuração de Rots (1988), muito semelhante ao modelo aqui usado. Ressalta-se que DeJong et al. (2008) consideram uma redução gradativa do módulo de elasticidade transversal e vinculam o comprimento característico do material com o tamanho dos elementos finitos. Estas diferenças influenciam o comportamento pós-crítico do modelo, resultando em maior estabilidade do processo incremental-iterativo, o que pode ser observado na porção final das trajetórias de equilíbrio para os casos de pré tensão negativa e sem pré tensão.

Na obtenção das trajetórias de equilíbrio, o modelo com pré tensão negativa foi o que mais apresentou dificuldade de convergência. Esta dificuldade pode ser atribuída à combinação de esforços de tração e compressão na parte inferior da viga, que cria um estado de tensão mais complexo e, portanto, de tratamento numérico mais difícil. A figura 8.3 apresenta as variações do dano na direção da deformação principal máxima no ponto de carga máxima e no fim da análise.

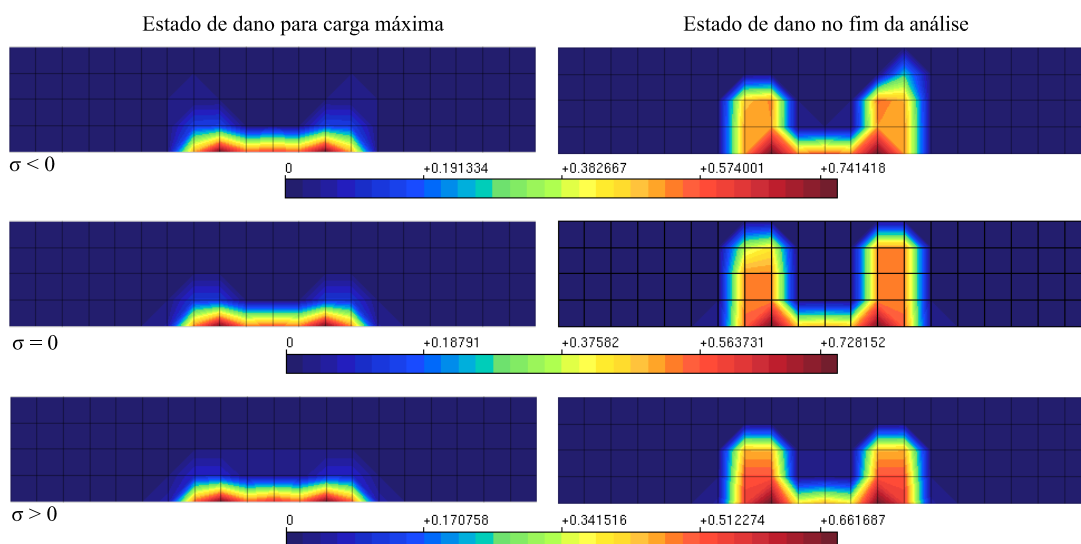


Figura 8.3: Variação do dano para $\sigma < 0$, $\sigma = 0$, $\sigma > 0$.

Verifica-se um padrão de dano semelhante para os três casos. Contudo, a intensidade do dano cresce de acordo com o sinal da pré tensão, sendo maior para o caso

de pré tensão de compressão, justificando as dificuldades obtidas na solução.

8.2 Estrutura de Ancoragem

Neste exemplo, analisa-se uma estrutura de ancoragem que consiste em uma barra de aço inserida em um bloco maciço de concreto. Os detalhes geométricos e de carregamento estão ilustrados na figura 8.4. Esta estrutura foi estudada por Rots (1988).

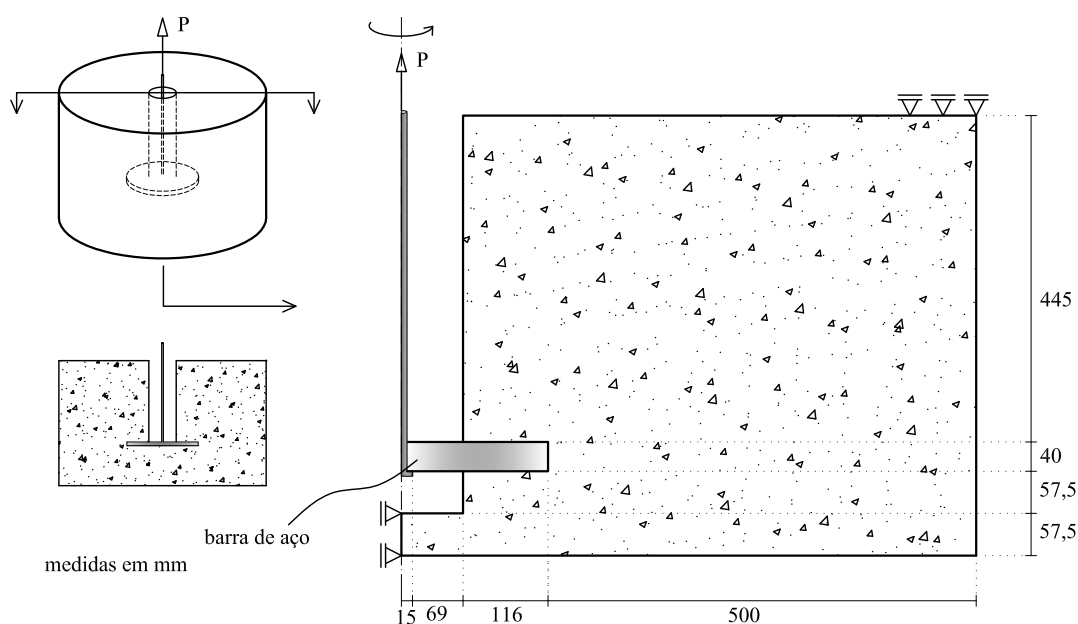


Figura 8.4: Detalhes geométricos e de carregamento do ensaio de ancoragem.

A estrutura foi modelada com elementos finitos axissimétricos quadriláteros de oito nós. A malha de elementos finitos adotada é mostrada na figura 8.5. Para o concreto foi adotado o modelo de fissuração distribuída com leis de Carreira e Chu (1985), para compressão, e Boone et al. (1986), para tração, com as seguintes propriedades: $E_0 = 30000,0 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,2$, $f_c = 25,0 \text{ N/mm}^2$, $f_t = 2,5 \text{ N/mm}^2$, $\varepsilon_c = 0,001667$, $G_f = 0,1 \text{ N/mm}$, $h = 100,0 \text{ mm}$ e $\beta_r = 0,0$. A barra de aço foi considerada linear elástica com $E_0 = 210000,0 \text{ N/mm}^2$ e $\nu = 0,3$.

Para solução do modelo, empregou-se o método de controle direto de deslocamento, incrementando-se de $0,001 \text{ mm}$ o deslocamento vertical do nó do topo do

bloco de concreto (Figura 8.5), com tolerância para convergência de 1×10^{-4} e a carga $P = 1N/mm$ axissimétrica.

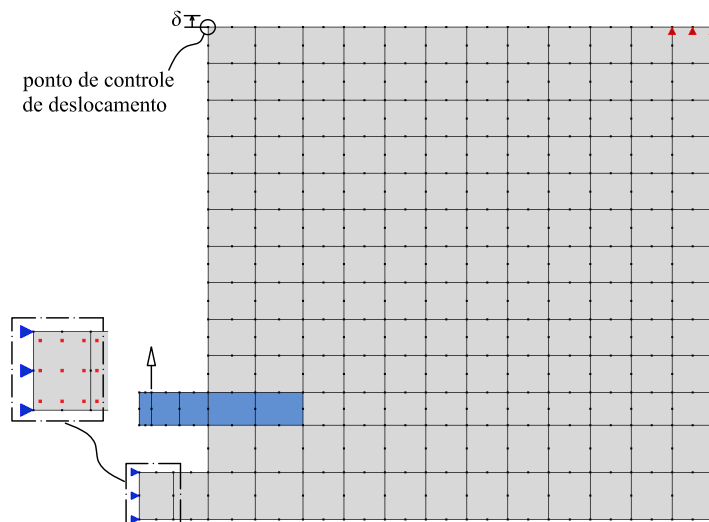


Figura 8.5: Malha de elementos finitos.

A trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga é mostrada na figura 8.6.

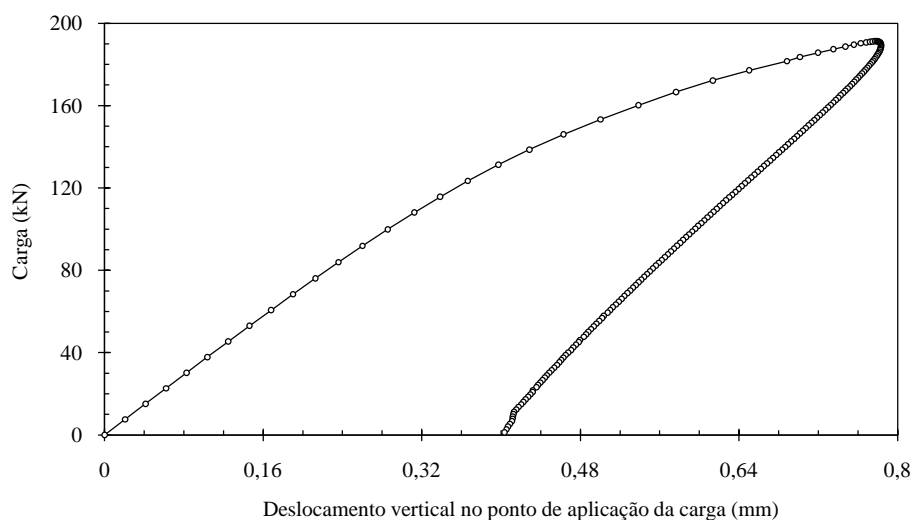


Figura 8.6: Trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.

A descrição do acentuado “*snap-back*” (decréscimo de deslocamento de um nível de carga para outro) da trajetória da figura 8.6, somente foi possível devido à escolha apropriada do nó de controle que, conforme ilustra a figura 8.7, exibe valores

crecentes de deslocamento vertical.

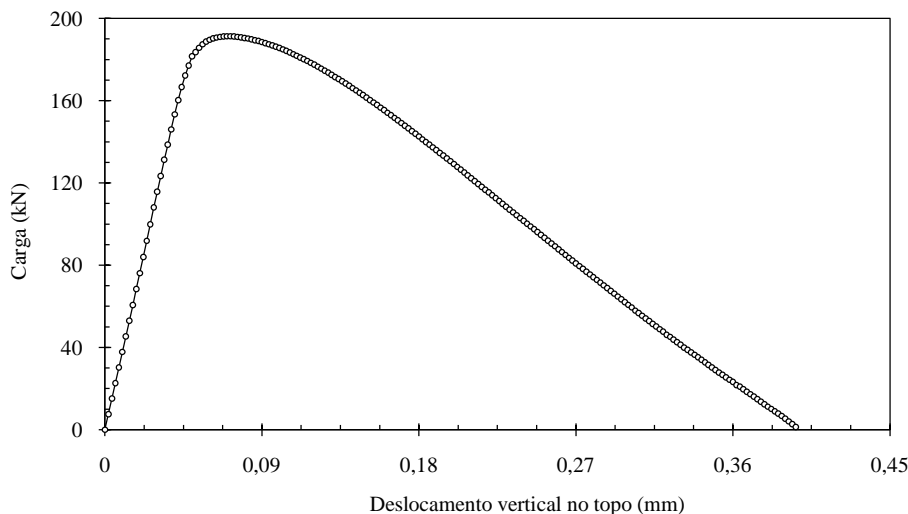


Figura 8.7: Trajetórias de equilíbrio: Carga \times Deslocamento vertical no topo.

8.3 Efeito de Tamanho na Flexão

A ductilidade, como fenômeno estrutural e não apenas uma característica do material, tem sido tema de muitos estudos — Bažant (1976), Bažant e Pfeiffer (1987), Shayanfar et al. (1997), Bažant e Planas (1998), Planas et al. (1999), Rocco et al. (1999), Bažant e Novák (2000) e Van Mier e Man (2008), dentre outros —, que a associa ao efeito de tamanho das estruturas. Partindo de ensaios experimentais, os estudos mostram que as propriedades do material podem ser obtidas independentemente do tamanho da estrutura, desde que o efeito de tamanho seja incorporado à análise dos resultados, isto é, deve-se considerar a ductilidade ou fragilidade como uma propriedade estrutural de modo que os resultados obtidos para a resposta do material não sejam influenciados pela configuração geométrica da estrutura.

Uma forma de constatar a influência do efeito de tamanho no comportamento estrutural é apresentada neste exemplo. Seja, portanto, um modelo numérico de flexão em três pontos em que o tamanho da viga é alterado sendo mantida constante a relação vão/altura, como ilustrado na figura 8.8. As vigas com diferentes tamanhos foram modeladas com elementos quadrilaterais de quatro nós, com tamanho constante de 60×60 mm, variando apenas as dimensões da estrutura, mantendo-se fixo

o tamanho da trinca inicial $c = 60 \text{ mm}$.

O modelo de fissuração distribuída com leis de Carreira e Chu (1985), para compressão, e Boone et al. (1986), para tração, foi usado na modelagem do concreto. Adotando-se as mesmas propriedades físicas do material para todas as vigas, de modo que o comportamento seja um reflexo do efeito de tamanho da estrutura, os seguintes parâmetros foram usados: $E_0 = 44000,0 \text{ N/mm}^2$; $\nu = 0,2$; $f_c = 40,0 \text{ N/mm}^2$; $f_t = 3,8 \text{ N/mm}^2$; $\varepsilon_c = 0,0018$; $G_f = 0,164 \text{ N/mm}$; $h = 100,0 \text{ mm}$ e $\beta_r = 0,05$.

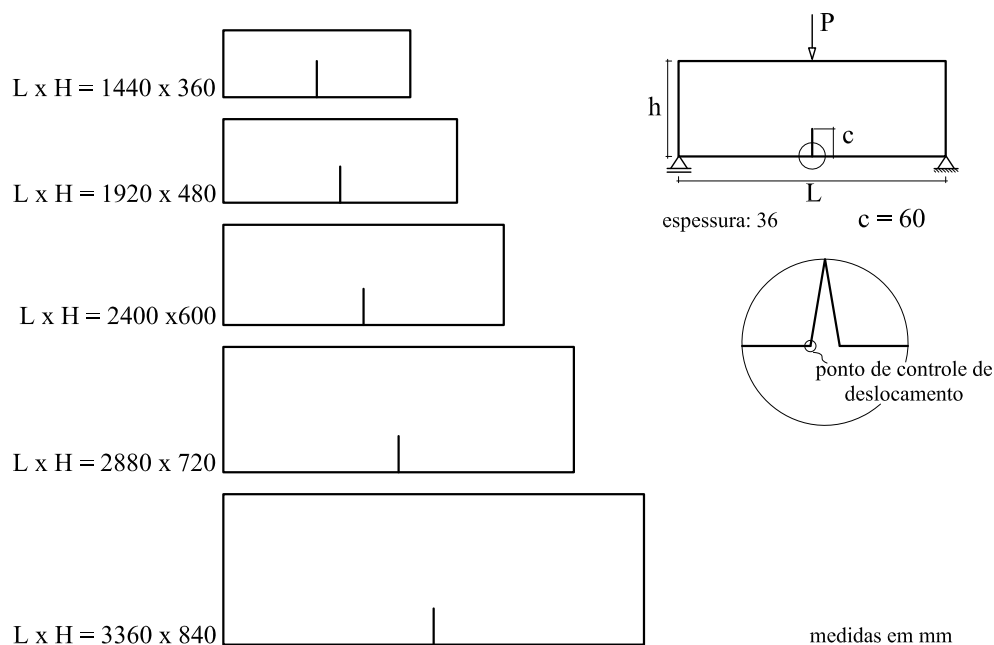


Figura 8.8: Configuração geométrica.

Na análise não linear, foi adotado o método de controle direto de deslocamento, com incremento do deslocamento horizontal do nó na extremidade da trinca de $0,001 \text{ mm}$, como indicado na figura 8.8, tolerância à convergência de 1×10^{-4} e a carga de referência de $P = 0,5 \text{ N}$.

As trajetórias de equilíbrio referentes ao deslocamento vertical na ponta da trinca, para as cinco vigas, são mostradas na figura 8.9.

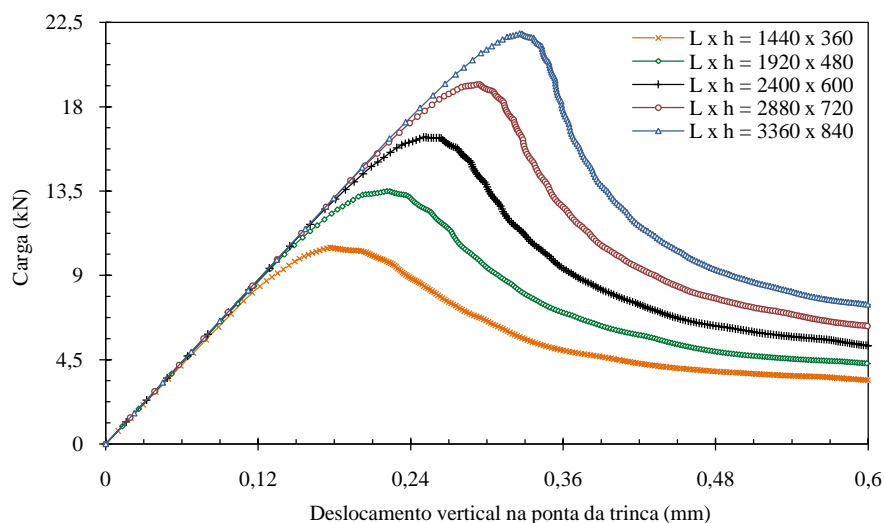


Figura 8.9: Trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical da ponta da trinca.

Observa-se que quanto maior a viga, mais acentuada é a inclinação do ramo descendente da trajetória, sendo esta uma consequência direta do efeito escala na ductilidade estrutural. Para melhorar a visualização deste efeito a figura 8.10 apresenta os ramos descendentes das trajetórias de equilíbrio vistas na figura 8.9, normalizados em relação aos valores, de carga e deslocamento, dos pontos de carga máxima. Verifica-se que quanto menor as dimensões da viga (ou seja, maior o tamanho relativo da trinca inicial), maiores são os deslocamentos obtidos, revelando, portanto, um comportamento mais dúctil.

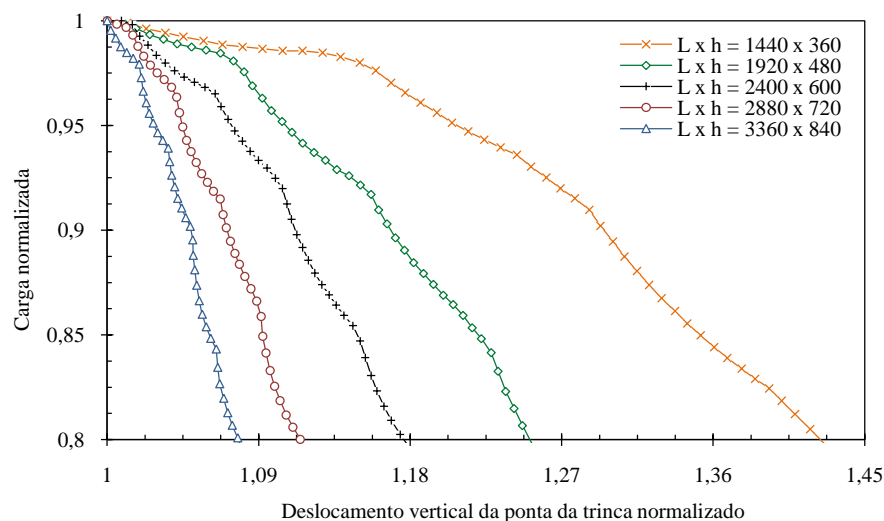


Figura 8.10: Ductilidade estrutural: comportamento pós pico normalizado.

A normalização do ramo descendente das curvas foi feita, para cada trajetória de equilíbrio, dividindo-se a carga de cada passo pelo valor da carga máxima e o deslocamento pelo deslocamento correspondente ao ponto de carga máxima.

Outra observação é a variação da resistência da viga com a variação da altura efetiva. Para avaliar a influência do tamanho estrutural na resistência da viga, a tabela 8.1 apresenta os dados da variação da resistência das vigas, que são mostrados graficamente na figura 8.11. A resistência nominal da viga foi calculada a partir da definição da resistência de flexão (Planas et al., 1999), para os valores de carga máxima, dada por

$$\sigma_r = \frac{3 P_{max} L}{2 E t h_{ef}^2} \quad (8.1)$$

onde σ_r é a resistência à flexão da viga, P_{max} é a carga máxima, L é o comprimento da viga, E é o módulo de elasticidade, t é a espessura da viga e h_{ef} é a altura efetiva.

Tabela 8.1: Variação da Resistência

h (m)	L (m)	h_{ef} (m)	Carga Max. (kN)	Resistência Nominal (kPa)
0,84	3,36	0,78	21,92	504,41
0,72	2,88	0,66	19,20	528,93
0,60	2,40	0,54	16,37	561,39
0,48	1,92	0,42	13,50	612,25
0,36	1,44	0,30	10,48	698,67

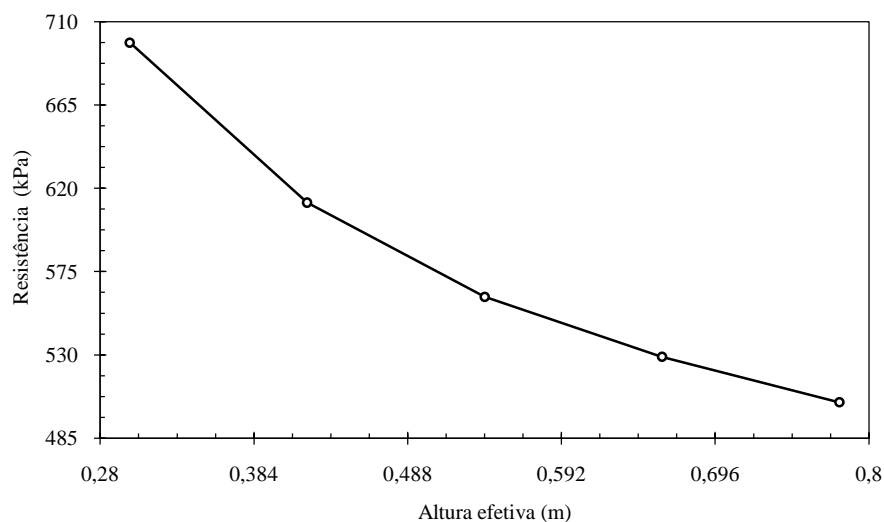


Figura 8.11: Variação da resistência efetiva.

8.4 Propagação de Trinca na Flexão

Como no exemplo anterior, este exemplo também avalia a ductilidade estrutural de uma viga submetida a flexão em três pontos. Partido do crescimento de uma trinca inicial, verifica-se a repercussão da variação da altura efetiva da viga no comportamento estrutural da mesma. As dimensões da viga são mantidas constantes e o comprimento da trinca é aumentado em cada análise. A figura 8.12 apresenta os detalhes geométricos e de carregamento da estrutura.

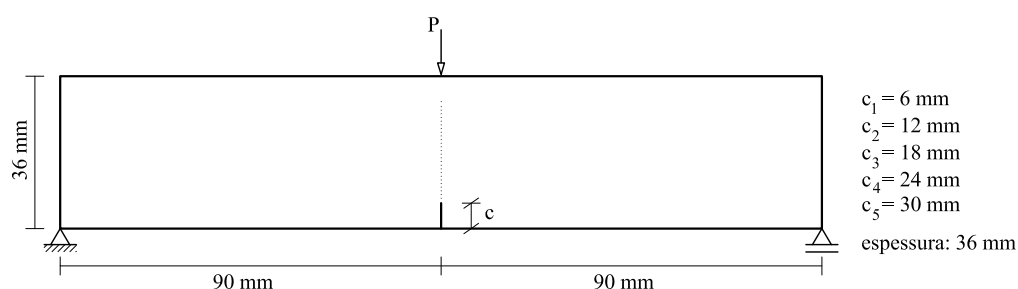


Figura 8.12: Configuração geométrica.

A malha de elementos finitos, formada por elementos quadriláteros de quatro nós, de tamanho $6 \times 6 \text{ mm}$, é mantida constante, exceto pelo crescimento da trinca inicial, que é inserida no modelo de forma discreta pela duplicação de nós, como mostrado na figura 8.13.

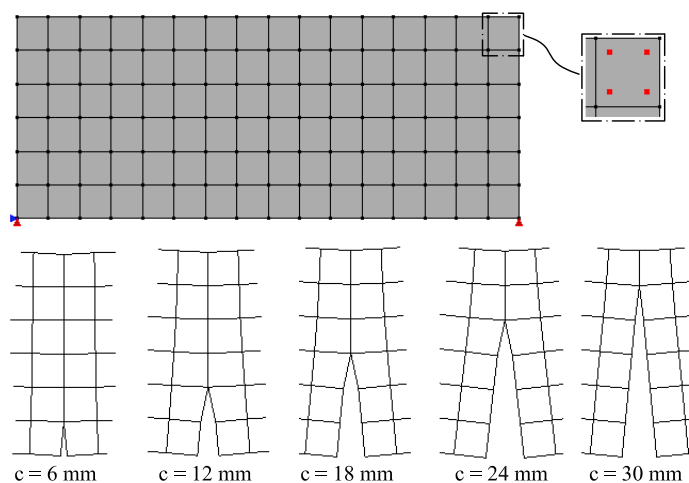


Figura 8.13: Malhas de elementos finitos utilizada.

O modelo constitutivo e os parâmetros do material são os mesmos do exemplo

da seção 8.3. Para obtenção das trajetórias de equilíbrio, foi usado o método de controle de comprimento arco cilíndrico com fator de carga inicial de 500,0, carga de referência de $P = 1,0 N$ e tolerância à convergência de 1×10^{-4} . As trajetórias de equilíbrio para deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga são mostradas da figura 8.14.

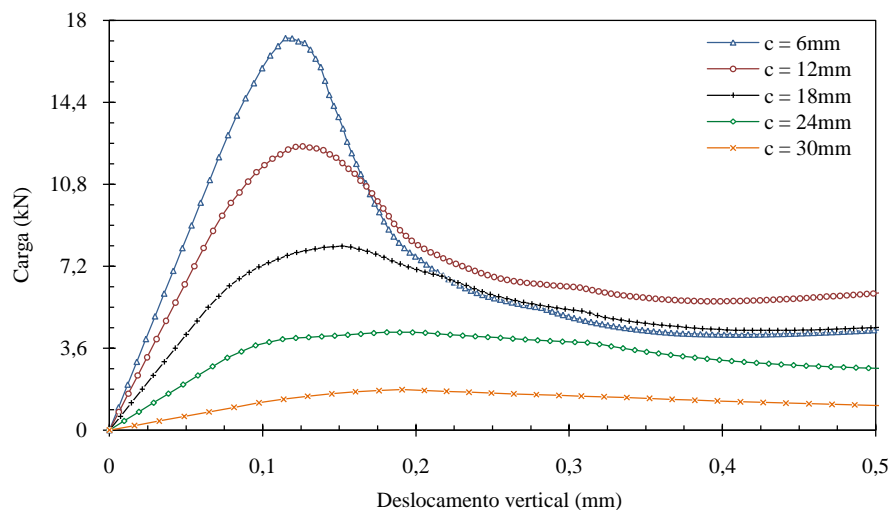


Figura 8.14: Trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga.

Observa-se na figura 8.14 que, à medida em que a trinca inicial cresce, o comportamento se assemelha ao efeito da diminuição da altura da viga, visto no exemplo anterior (Figura 8.9). Em termos de altura efetiva, observa-se que quanto maior a altura efetiva e mais acentuados são os ramos descendentes das trajetórias. Para melhor visualização desse efeito, a figura 8.15 mostra os comportamentos pós-críticos normalizados, em relação aos valores de carga máxima e dos respectivos deslocamentos, de cada trajetória, como descrito no exemplo da seção 8.3.

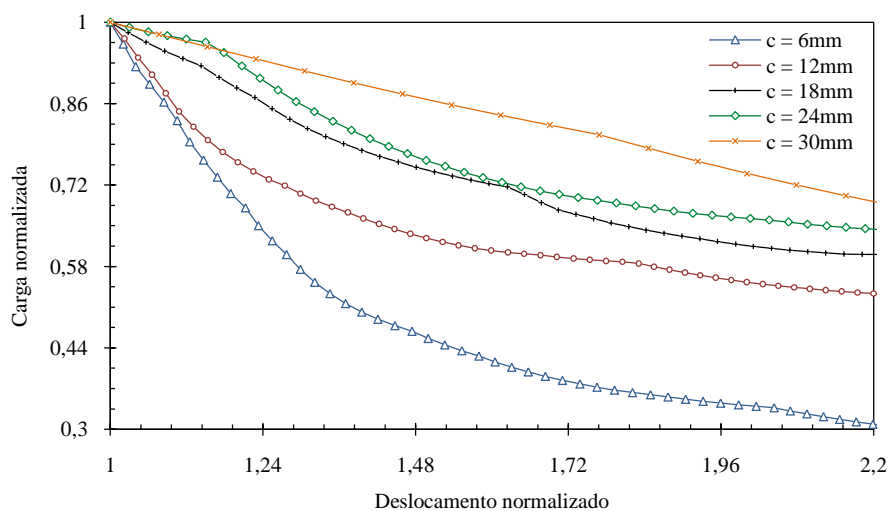


Figura 8.15: Comportamentos pós-críticos normalizados.

As configurações deformadas das vigas, para a carga máxima em cada caso, mostradas na figura 8.16, ilustram o aumento da flexibilidade da vigas com o crescimento da trinca.

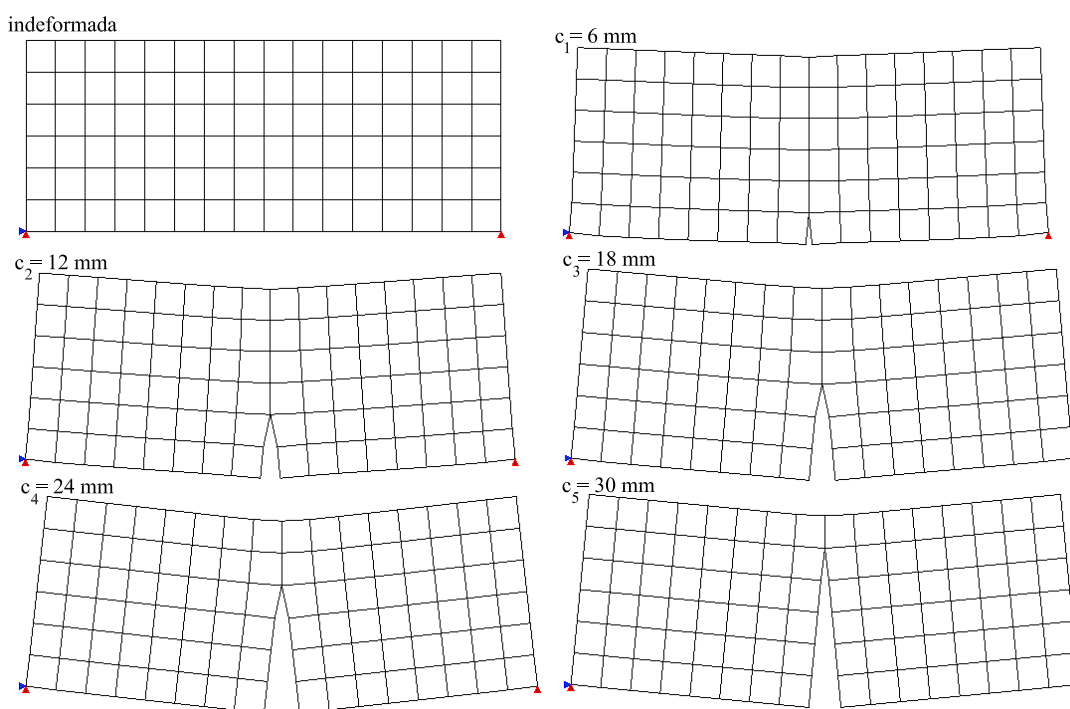


Figura 8.16: Deformadas.

A variação da resistência da viga, calculada pela equação 8.1, com a altura efetiva são mostrados na tabela 8.2 e é ilustrada na figura 8.17. Observa-se assim, como no

estudo do efeito de tamanho, uma queda da resistência com o aumento da altura efetiva da viga.

Tabela 8.2: Variação da Resistência

h_{ef} (m)	Carga Max. (kN)	Resistência Nominal (kPa)
0,030	17,22	1435,00
0,024	12,46	1622,40
0,018	8,08	1869,91
0,012	4,30	2239,06
0,006	1,78	3700,00

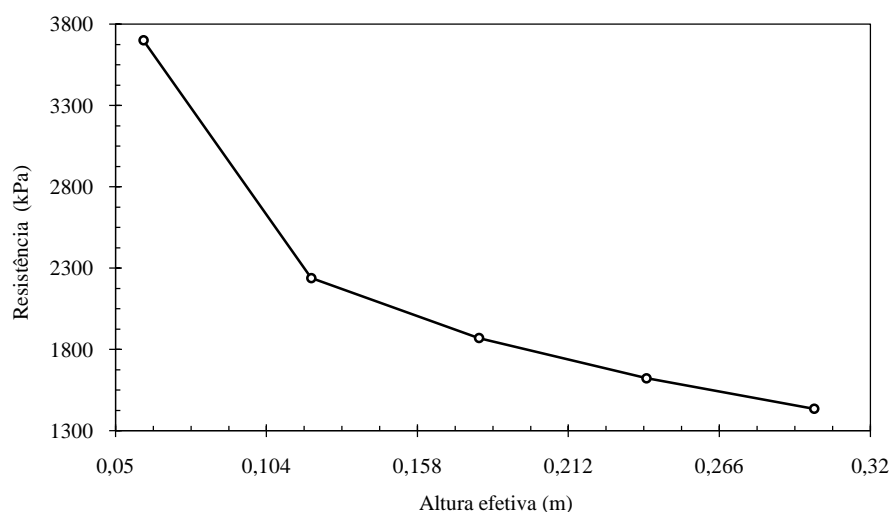


Figura 8.17: Variação da resistência com a altura efetiva.

Os resultados aqui apresentados mostram que é possível simular, qualitativamente, o efeito de tamanho, sem a necessidade de redefinição de malha para diferentes tamanhos estruturais. Pode-se verificar a conformidade qualitativa dos resultados em termos da ductilidade estrutural e da queda de resistência. A mesma metodologia pode ser aplicada a outros ensaios como, por exemplo, o de compressão diametral apresentado na seção 8.5, a seguir.

8.5 Efeito de Tamanho na Compressão Diametral

O ensaio de compressão diametral é usado para obter de forma indireta a resistência à tração do material ensaiado. A fim de estudar a ductilidade estrutural

a metodologia empregada no exemplo de flexão em três pontos da seção 8.4 será usada para modelar o ensaio de compressão diametral. A geometria do modelo, bem como as dimensões da trinca inicial de cada simulação, é especificada na figura 8.18. A malha foi gerada com elementos triangulares de três nós considerando a dupla simetria do corpo de prova.

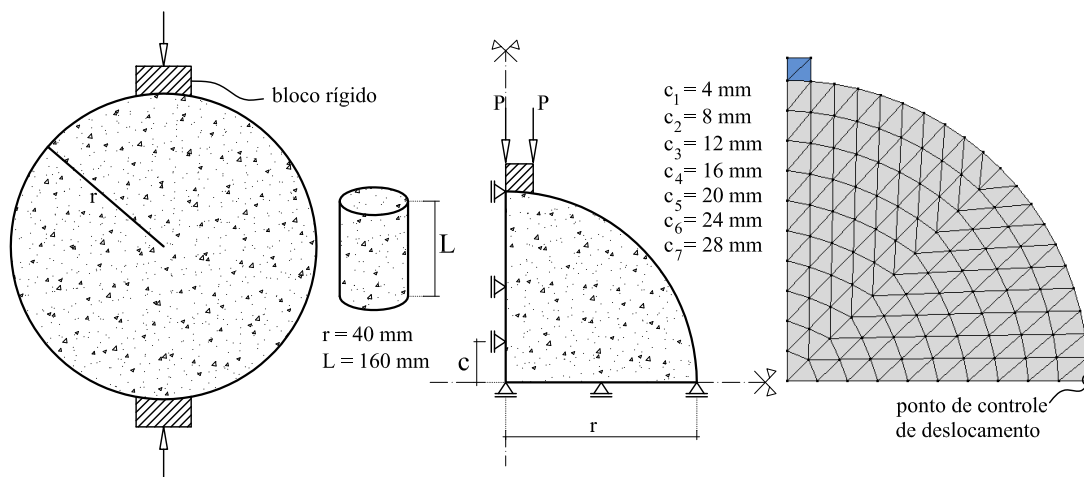


Figura 8.18: Configuração geométrica e malha de elementos finitos do modelo de compressão diametral.

Novamente é usado o modelo de fissuração distribuída sendo o comportamento do concreto regido pelas leis de Carreira e Chu (1985), para compressão, e Boone et al. (1986), para tração, com: $E_0 = 20000,0 \text{ N/mm}^2$; $\nu = 0,2$; $f_c = 25,0 \text{ N/mm}^2$; $f_t = 2,5 \text{ N/mm}^2$; $\varepsilon_c = 0,001$; $G_f = 0,1 \text{ N/mm}$; $h = 50,0 \text{ mm}$ e $\beta_r = 0,05$. O bloco rígido é considerado linear elástico com $E_0 = 210000,0 \text{ N/mm}^2$ e $\nu = 0,15$.

Na análise não linear foi adotado o método de controle direto do deslocamento horizontal, com incremento de $0,000075 \text{ mm}$, do nó de extremidade da malha, como mostrado na figura 8.18, tolerância para convergência de 1×10^{-4} e carga de referência $P = 0,5 \text{ N}$. Os modelos foram analisados em estado plano de deformação.

As trajetórias de equilíbrio para o deslocamento horizontal de controle e para o deslocamento vertical do ponto de contato do bloco rígido com o cilindro são mostradas nas figuras 8.19 e 8.20, respectivamente.

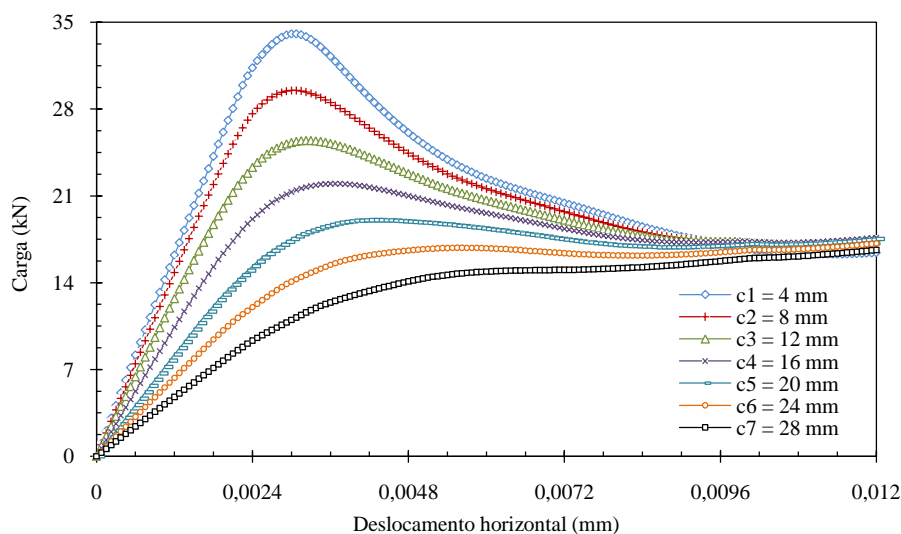


Figura 8.19: Trajetórias de equilíbrio para o deslocamento horizontal de controle.

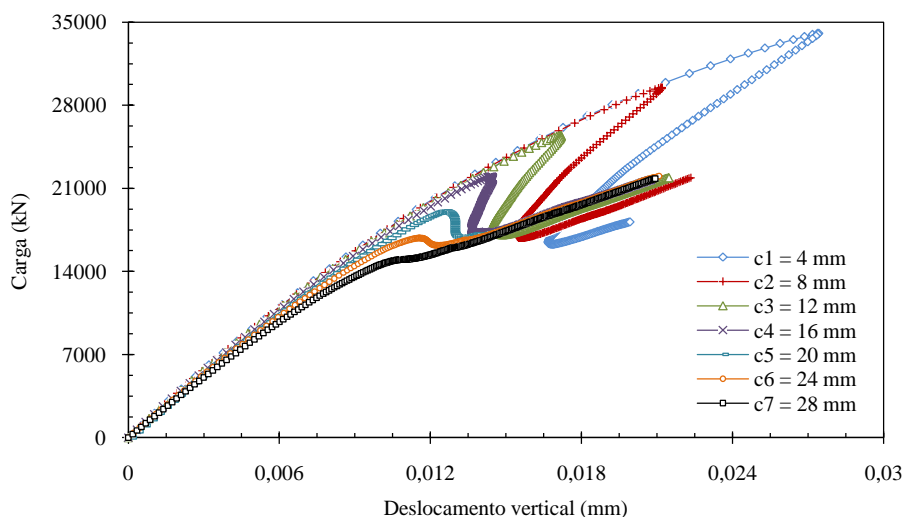


Figura 8.20: Trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical do contato da chapa com o cilindro.

Observa-se que o comportamento do modelo, à medida em que a trinca cresce, vai se modificando e a inclinação do ramo descendente varia desde um acentuado “*snap-back*” até um enrijecimento (Figura 8.20). A capacidade de carga, assim como nos exemplos de flexão em três pontos (apresentados nas seções 8.3 e 8.4), é proporcional a altura efetiva do cilindro. As figuras 8.21 e 8.22 apresentam os comportamentos dos ramos pós-crítico normalizados, em relação aos pontos de carga máxima, de modo a ressaltar a ductilidade e o enrijecimento de cada caso.

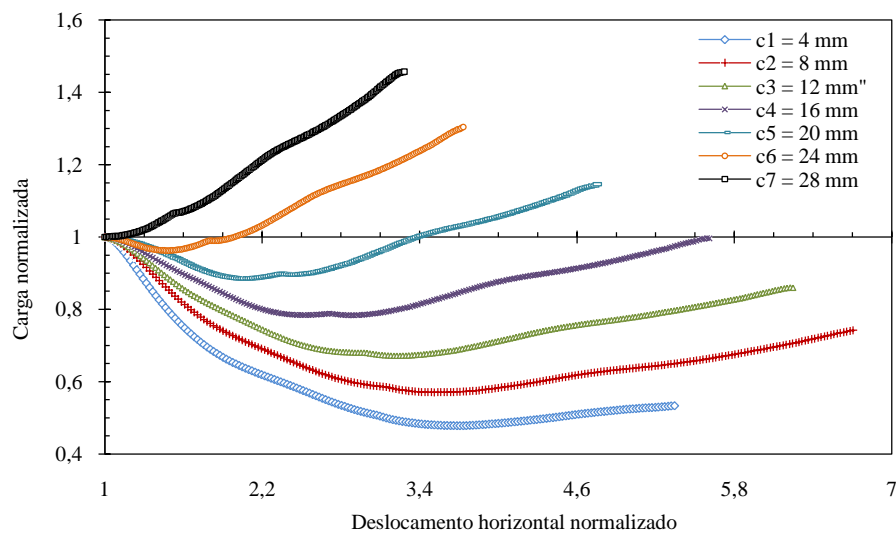


Figura 8.21: Trajetórias de equilíbrio normalizadas: deslocamento horizontal.

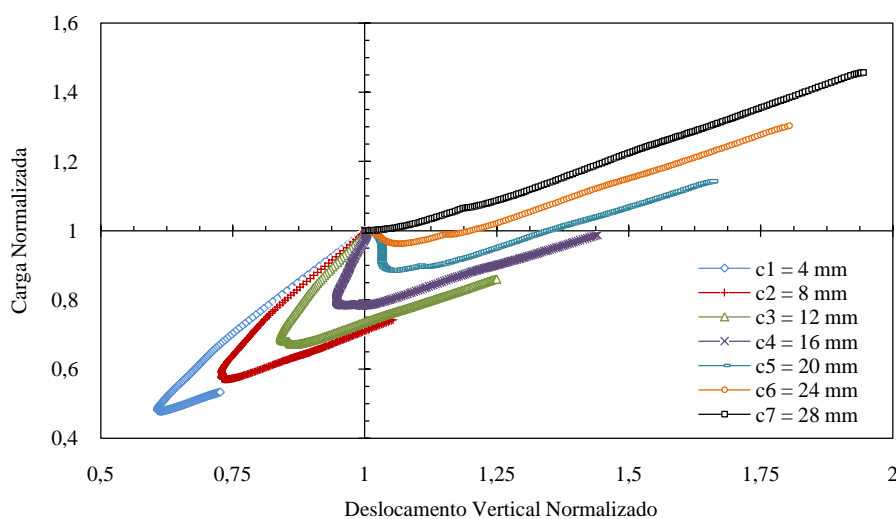


Figura 8.22: Trajetórias de equilíbrio normalizadas: deslocamento vertical.

As figuras 8.23, 8.24, 8.25, 8.26, 8.27, 8.28 e 8.29 apresentam as isofaixas de valores das deformações principais, tensões principais e de von Mises e as respectivas deformadas, relativas ao ponto de carga crítica, de cada caso. O ponto de carga crítica é considerado o último ponto antes do modelo exibir “*snap-back*” ou enrijecimento, como visto nas trajetórias de equilíbrio.

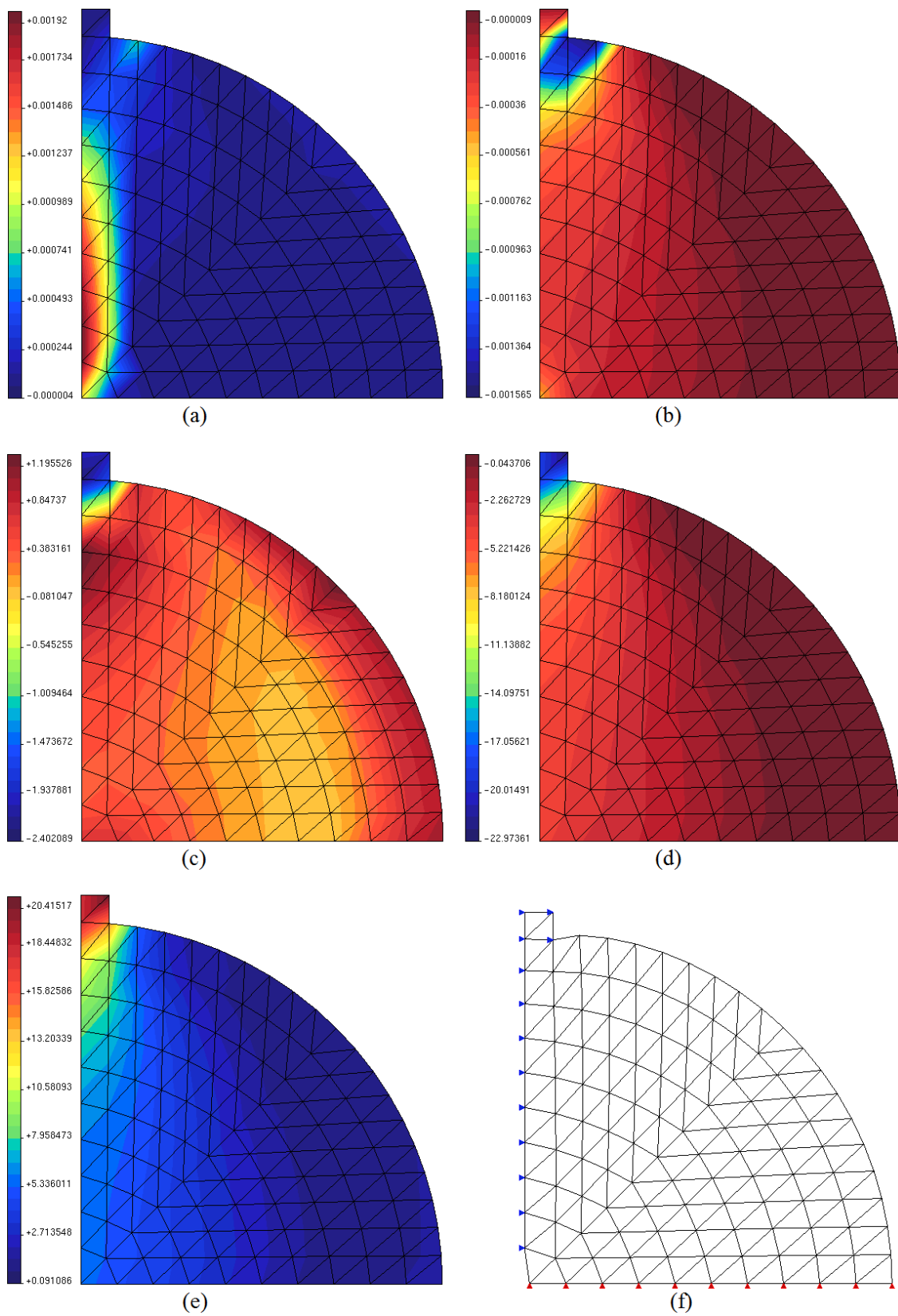


Figura 8.23: Trinca 4 mm: (a) ε_1 ; (b) ε_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.

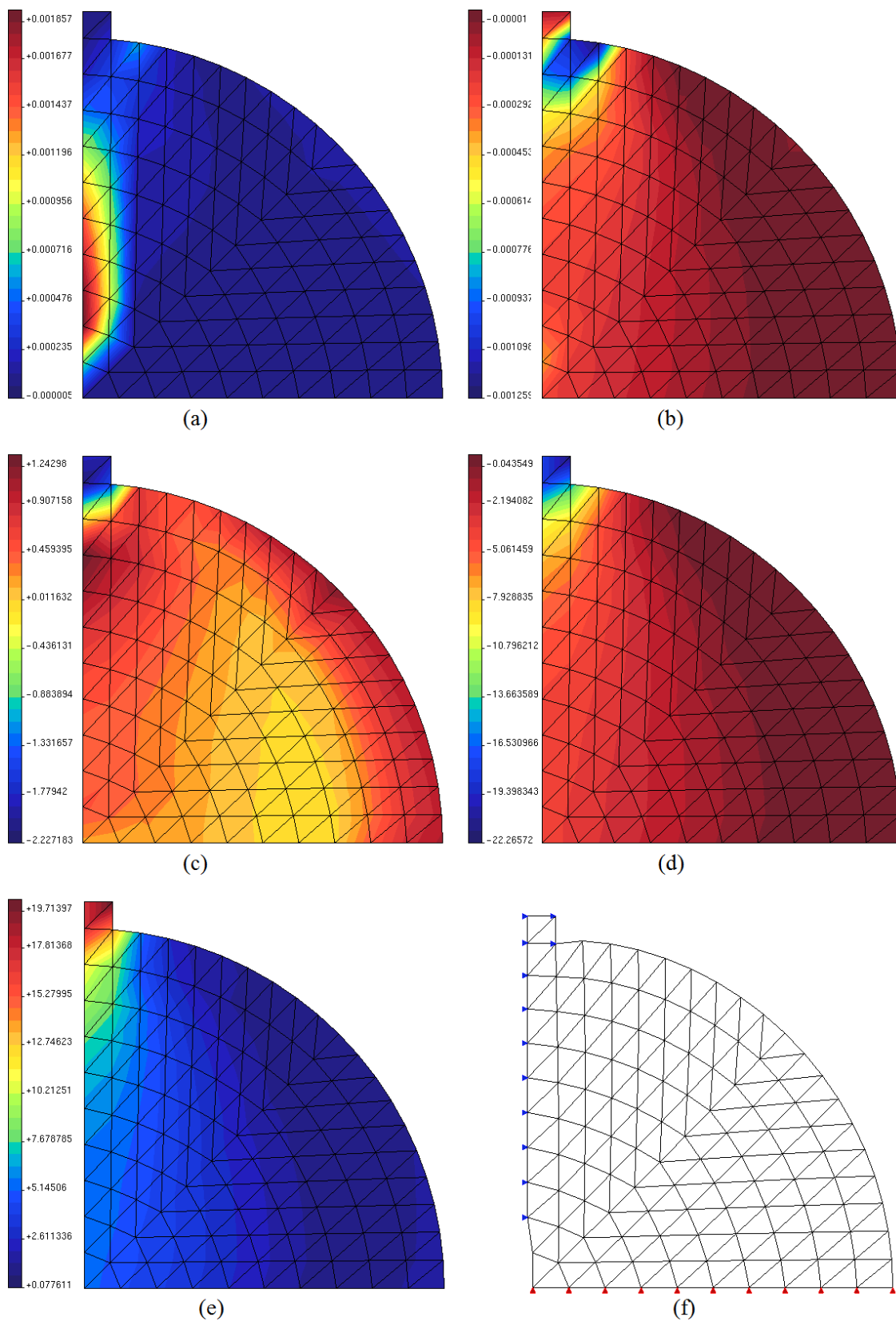


Figura 8.24: Trinca 8 mm: (a) ϵ_1 ; (b) ϵ_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.

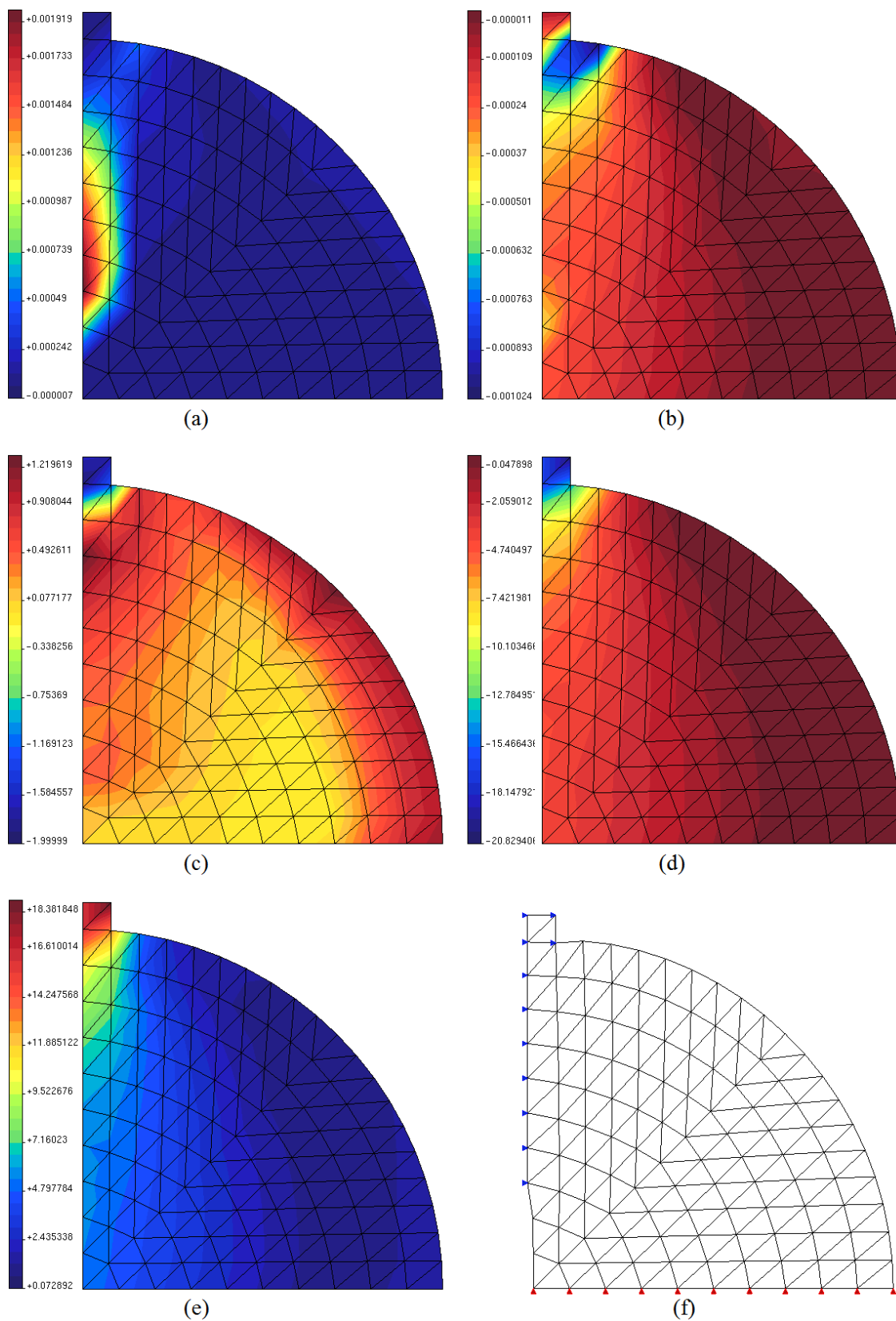


Figura 8.25: Trinca 12 mm: (a) ϵ_1 ; (b) ϵ_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.

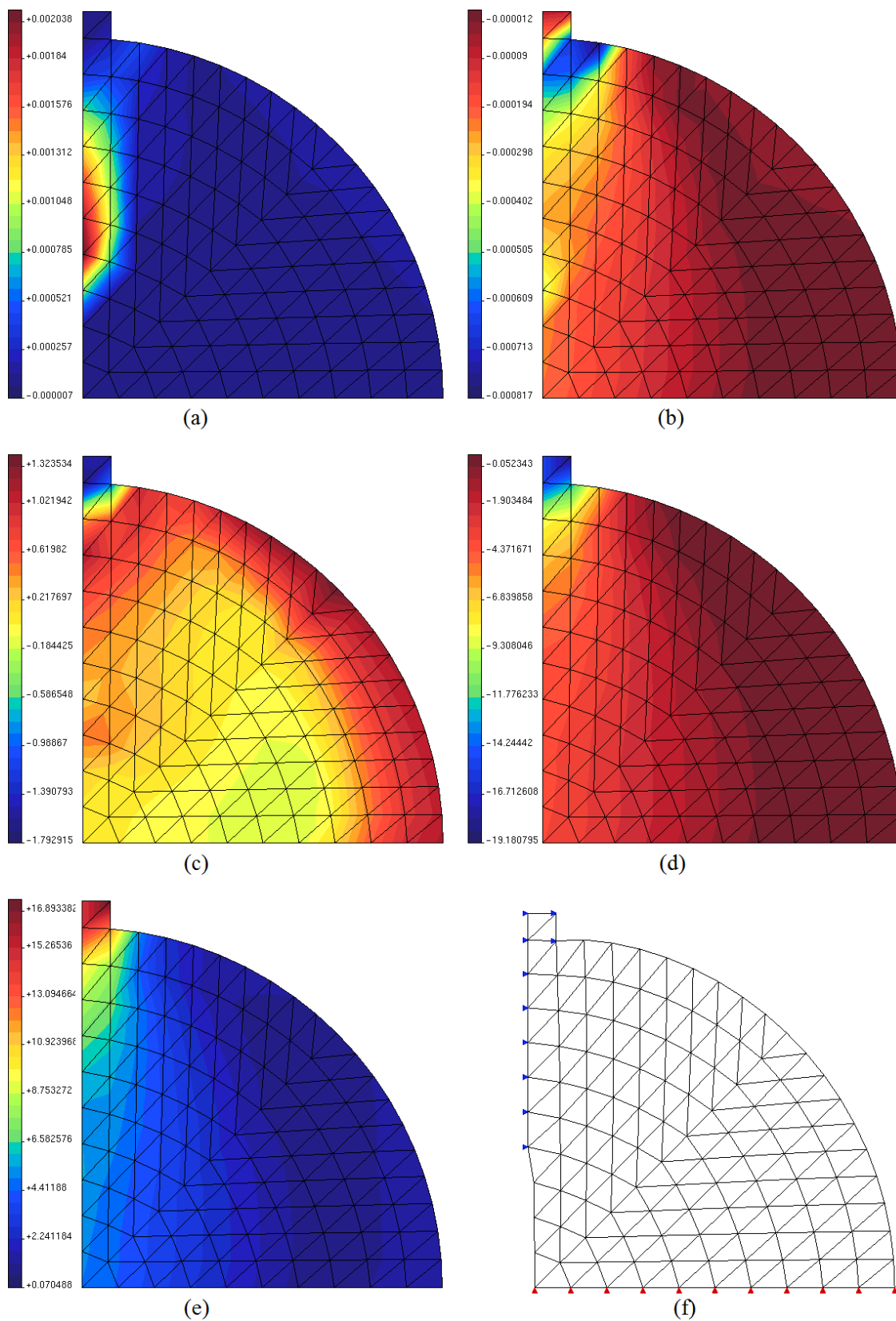


Figura 8.26: Trinca 16 mm: (a) ε_1 ; (b) ε_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.

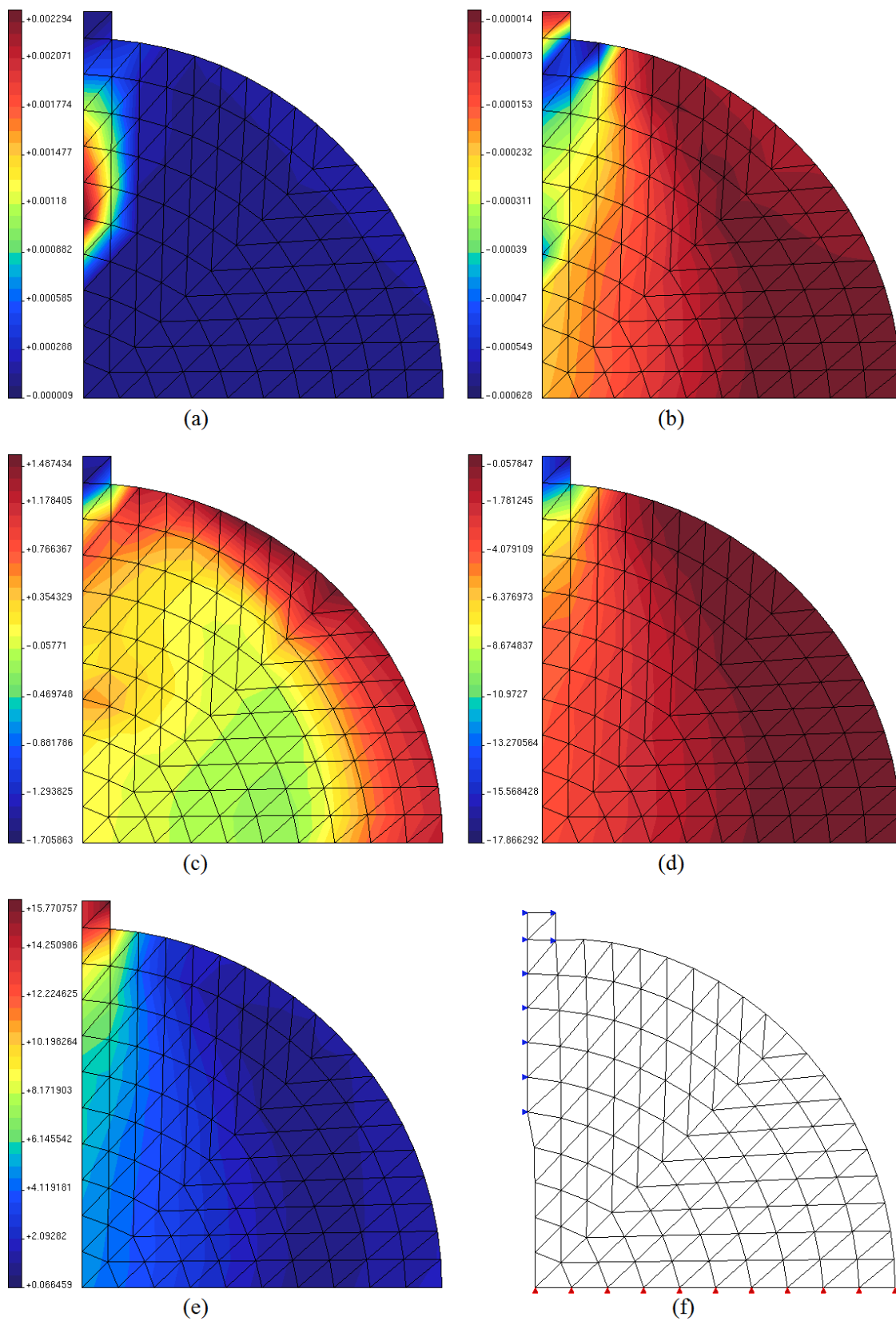


Figura 8.27: Trinca 20 mm: (a) ϵ_1 ; (b) ϵ_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.

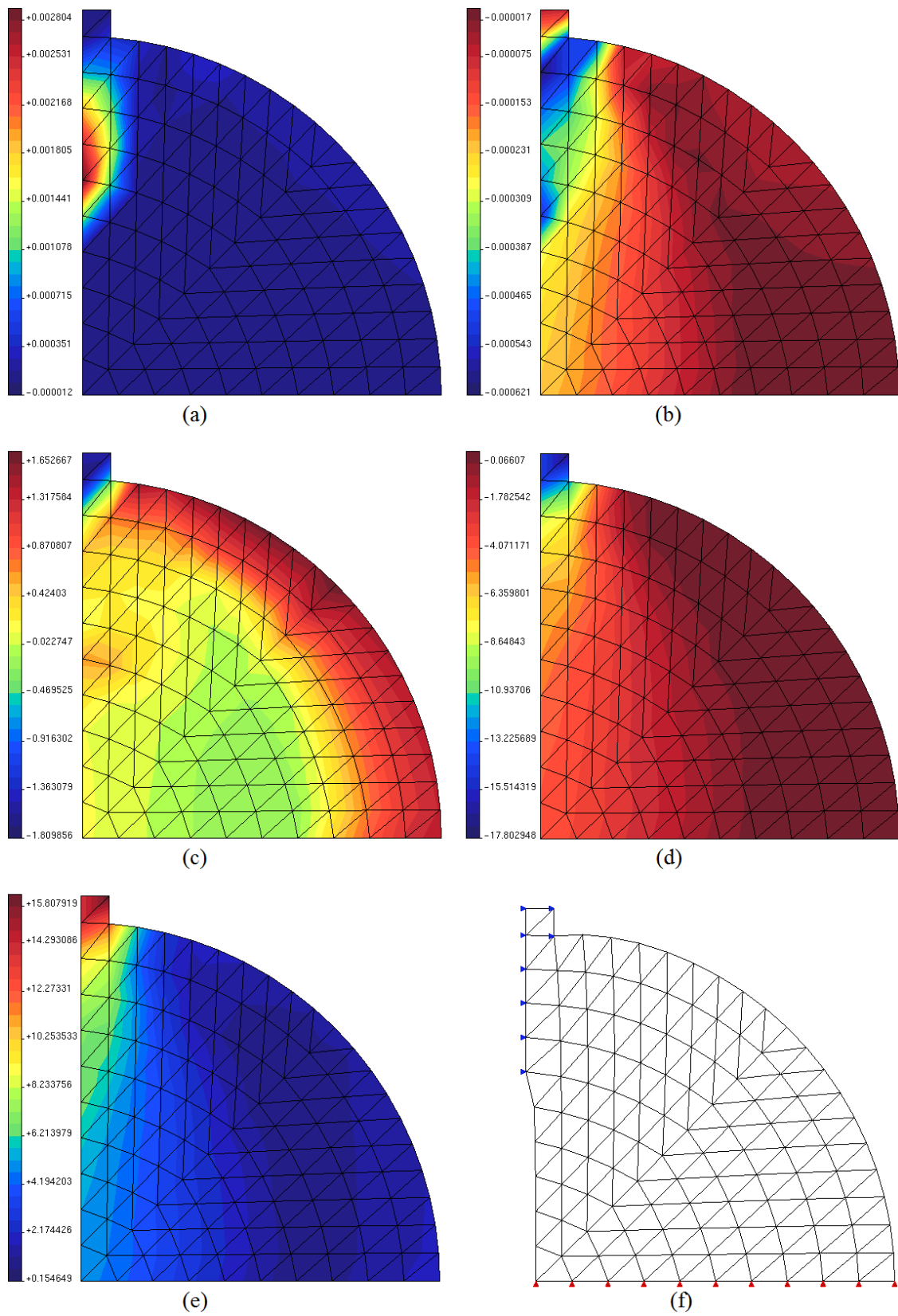


Figura 8.28: Trinca 24 mm: (a) ϵ_1 ; (b) ϵ_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.

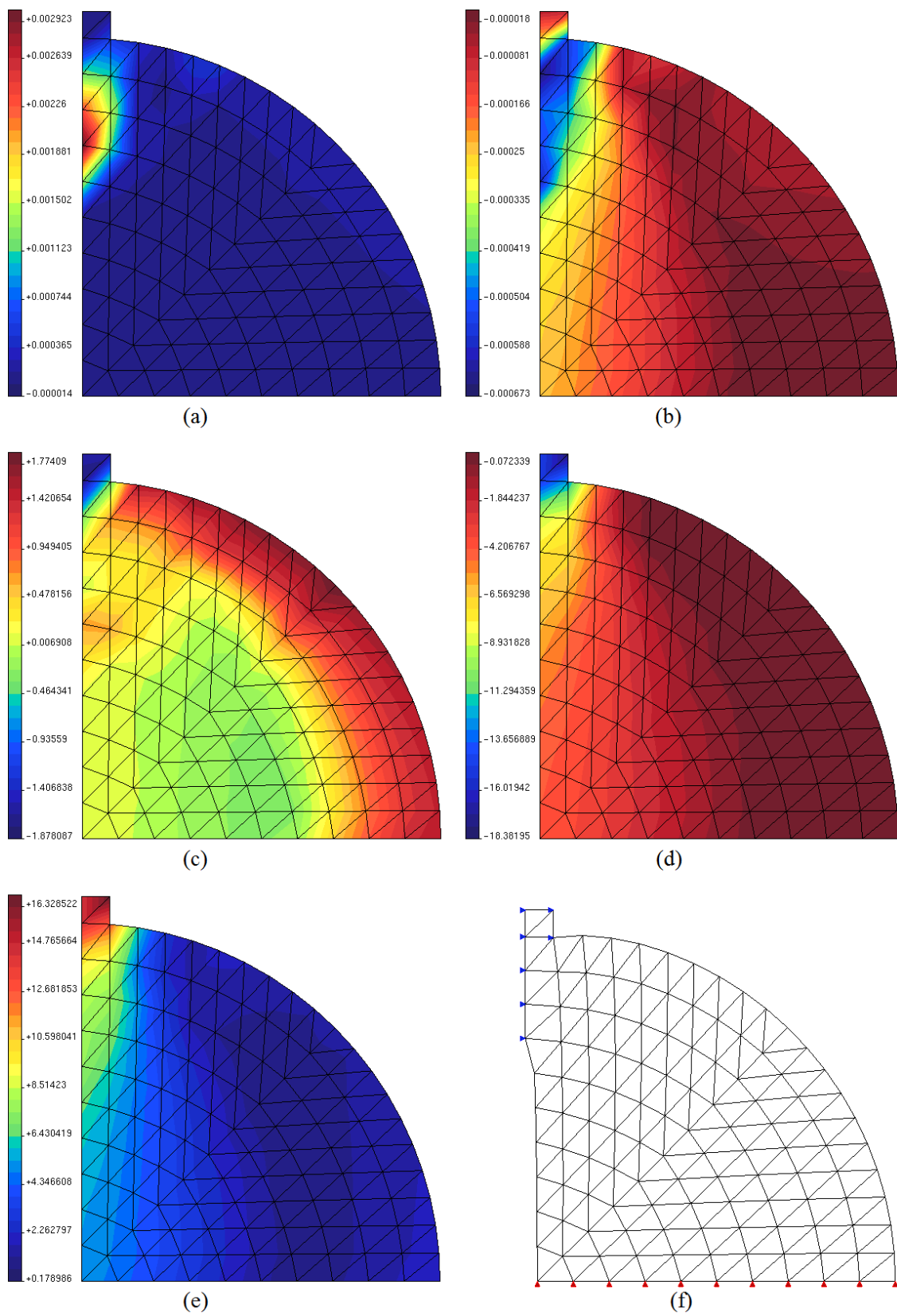


Figura 8.29: Trinca 28 mm: (a) ε_1 ; (b) ε_2 ; (c) σ_1 ; (d) σ_2 ; (e) von Mises; (f) Deformada.

O formato do estado deformado da malha mostra a influência da trinca na concentração das deformações. Esta concentração de deformações é diretamente responsável pela mudança de comportamento do modelo com o crescimento da trinca. Pode-se observar que há um crescimento gradativo das deformações de compressão, ilustradas pelas deformações principais ε_2 , e esse crescimento aumenta a condição de confinamento do concreto fazendo com que o enrijecimento ocorra. Ressalta-se que a resistência da peça ainda é comandada pela tração, uma vez que as deformações principais positivas são de maior intensidade.

A variação resistência pode ser calculada, para o valor de carga máxima, pela equação da resistência nominal do ensaio de compressão diametral (Planas et al., 1999), dada por

$$\sigma_r = \frac{2 P_{max}}{\pi D_{ef} L}, \quad (8.2)$$

onde σ_r é a resistência à compressão diametral, P_{max} é a carga máxima, L é o comprimento do corpo de prova e D_{ef} é o diâmetro efetivo. Os valores da variação da resistência são mostrados na tabela 8.3.

Tabela 8.3: Variação da Resistência

D_{ef} (m)	Carga Max. (kN)	Resistência Nominal (kPa)
0,072	34,06	1882,23
0,064	29,50	1834,01
0,056	25,47	1809,68
0,048	21,99	1822,82
0,040	19,04	1893,94
0,032	16,82	2091,40
0,024	15,00	2486,80

Tomando-se os valores dessas tensões e relacionando-as com o diâmetro efetivo (Figura 8.30), observa-se uma variação com a altura efetiva do corpo de prova que é decrescente em um primeiro momento para crescente, em seguida.

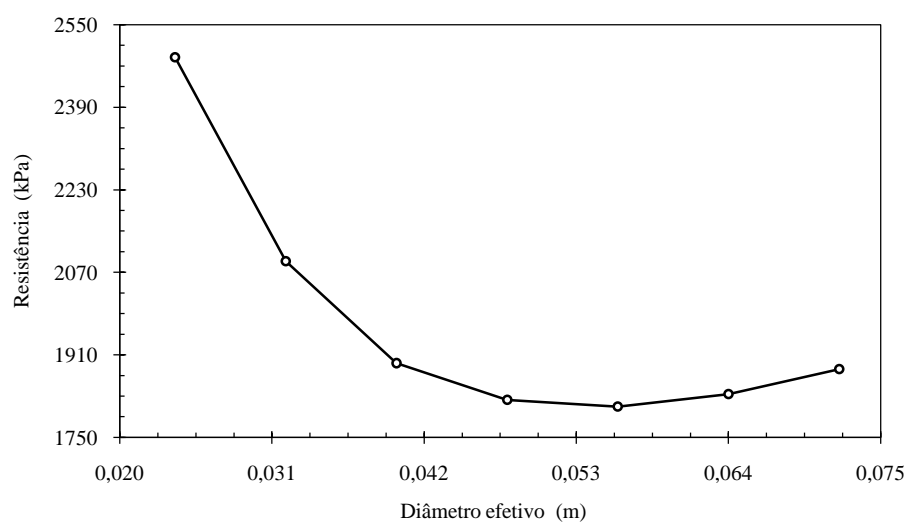


Figura 8.30: Variação da Resistência.

Capítulo 9

Exemplos de Validação do Modelo Constitutivo de Dano Volumétrico

No capítulo 5 deste trabalho foi proposto um modelo de dano volumétrico. No presente capítulo, diversos exemplos são apresentados afim de avaliar o comportamento deste modelo, comparando os resultados com ele obtidos com resultados experimentais e com resultados oriundos de outros modelos existentes na literatura, implementados segundo a estrutura teórica unificada proposta neste trabalho.

9.1 Flexão em 3 Pontos – Petersson (1981)

Uma viga de concreto submetida a flexão em três pontos foi estudada experimentalmente por Petersson (1981). O estudo apresenta as características do concreto utilizado, especificando suas propriedades, e os resultados obtidos nos ensaios. Os dados geométricos da viga estudada são dados na figura 9.1.

Os parâmetros obtidos experimentalmente por Petersson (1981) apresentam uma faixa de valores de $2,5 \text{ N/mm}^2$ a $3,9 \text{ N/mm}^2$, para a resistência à tração (f_t), e de 115 N/m a 137 N/m , para a energia de fratura (G_f). Embora o autor não tenha apresentado os resultados dos ensaios para o módulo de elasticidade, foi assumido o valor de $30000,0 \text{ MPa}$ em um estudo teórico apresentado no mesmo trabalho.

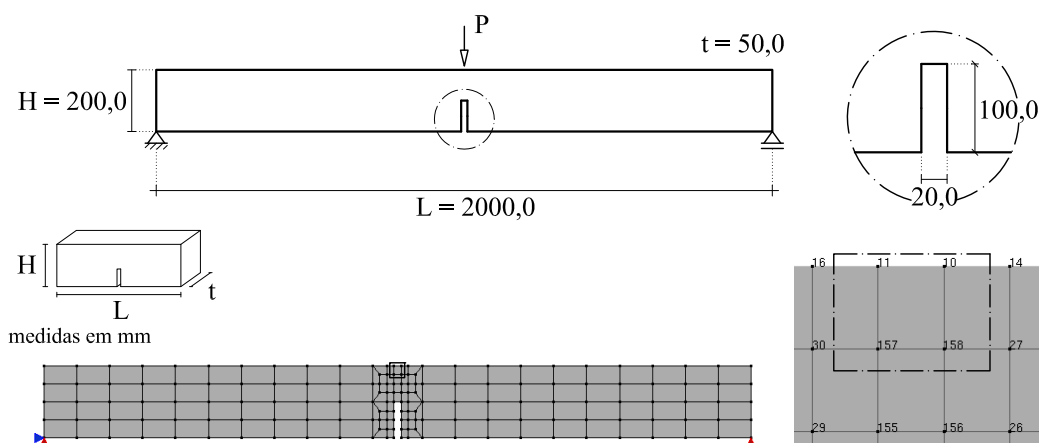


Figura 9.1: Geometria e malha de elementos finitos para a viga submetida a flexão em três pontos.

A viga é aqui analisada com a malha de elementos finitos mostrada na figura 9.1 e os modelos constitutivos de dano volumétrico e de fissuração distribuída.

Para o modelo de dano volumétrico foram utilizadas leis de dano polinomial, linear e exponencial. Para o modelo de fissuração distribuída, foram adotadas as leis tensão-deformação propostas por Carreira e Chu (1985, 1986), Boone e Ingraffea (1987) e uma lei bilinear. Como a lei proposta por Boone e Ingraffea prediz somente o comportamento à tração, esta foi combinada com a lei de Carreira e Chu para compressão. As tabelas 9.1 e 9.2 apresentam os parâmetros usados na modelagem, adotou-se também módulo de elasticidade de $30000,0 \text{ N/mm}^2$ e o coeficiente de Poisson igual a 0,2.

Tabela 9.1: Parâmetros das leis de dano.

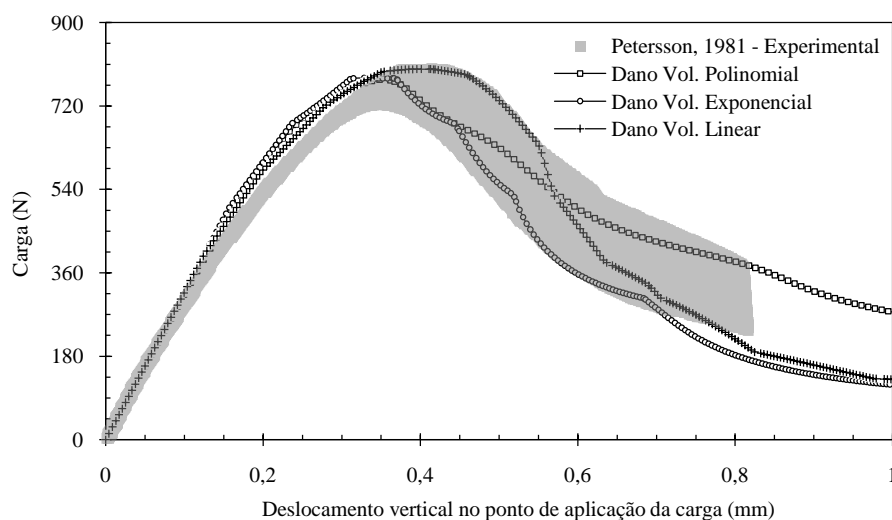
Modelo de Dano Volumétrico					
	Polinomial		Exponencial		Linear
	Tração		Tração		Tração
f_e	$1,95 \text{ N/mm}^2$	α	0,999	κ_0	0,0001
κ_0	0,00024	β	1000	κ_u	0,00325
\tilde{E}	$16666,67 \text{ N/mm}^2$	κ_0	0,000125		
	Compressão		Compressão		Compressão
f_e	$11,1 \text{ N/mm}^2$	α	0,999	κ_0	0,0011
κ_0	0,2	β	100	κ_u	0,02
\tilde{E}	$16666,67 \text{ N/mm}^2$	κ_0	0,00125		

Tabela 9.2: Parâmetros das leis tensão-deformação.

Modelo de Fissuração Distribuída					
Carreira		Carreira-Ingraffea		Bilinear	
f_t	3,3 N/mm^2	f_t	3,3 N/mm^2	f_t	3,3 N/mm^2
f_c	33,3 N/mm^2	f_c	33,3 N/mm^2	f_c	33,3 N/mm^2
ε_t	0,00022	G_f	0,124 N/mm^2	G_f	0,124 N/mm^2
ε_c	0,002	h	40 mm	h	40 mm
		ε_c	0,002	E_2	3000,0 N/mm^2

Para os modelos de fissuração não foi considerado o fator de retenção de cisalhamento ($\beta_r = 0,0$). Nos experimentos para a obtenção da resistência do concreto, Petersson (1981) adotou uma região de 40 mm para aferir as deformações. Assim, o comprimento característico do material (para o modelo de fissuração distribuída) foi assumido de 40 mm , por ser uma região representativa do comportamento visto nos ensaios.

As trajetórias de equilíbrio foram obtidas com o método de controle de deslocamentos generalizado, com um incremento inicial do fator de carga de 0,02 e tolerância para convergência de 1×10^{-4} . A carga de referência P foi igualmente dividida entre os nós 10 e 11, sendo $P = 800 N$. As trajetórias de equilíbrio para o deslocamento vertical do nó 10 são apresentadas nos gráficos das figuras 9.2 e 9.3, juntamente com os resultados experimentais obtidos por Petersson (1981).

**Figura 9.2:** Trajetórias de equilíbrio para o modelo de dano volumétrico.

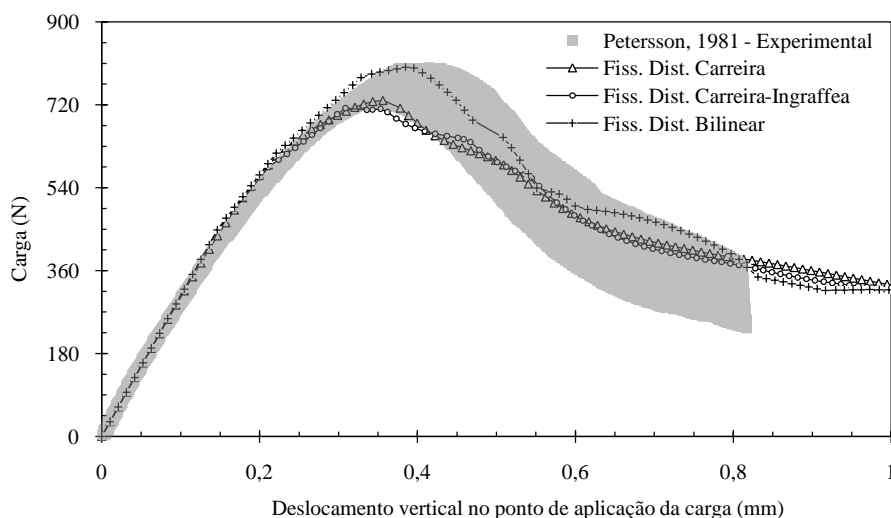


Figura 9.3: Trajetórias de equilíbrio para o modelo de fissuração distribuída.

Verifica-se boa concordância dos resultados dos modelos de dano volumétrico e de fissuração distribuída com os resultados experimentais, tanto na estimativa da carga máxima como na descrição do regime pós-crítico.

Os modelos também foram comparados com resultados numéricos obtidos por Rots et al. (1985), que adotou um modelo de fissuração distribuída, e por Fang et al. (2008), que usou o método dos elementos finitos estendidos, empregando um modelo de trinca coesiva.

A figura 9.4 mostra a comparação do resultado obtido por Rots et al. (1985), que adotou uma lei tensão-deformação trilinear (ou, como designado pelo autor, uma lei com “*softening*” bilinear) com os resultados obtidos com o modelo de fissuração distribuída — com leis de Carreira e Carreira-Ingraffea — e com o resultado obtido com o modelo de dano volumétrico, usando função de dano polinomial.

A figura 9.5 mostra a comparação do resultado obtido com o modelo de dano volumétrico, usando uma lei de evolução linear, com o resultado obtido por Fang et al. (2008), que adotou uma lei exponencial. Observa-se que, e embora os modelos sejam bem diferentes, os resultados são equivalentes.

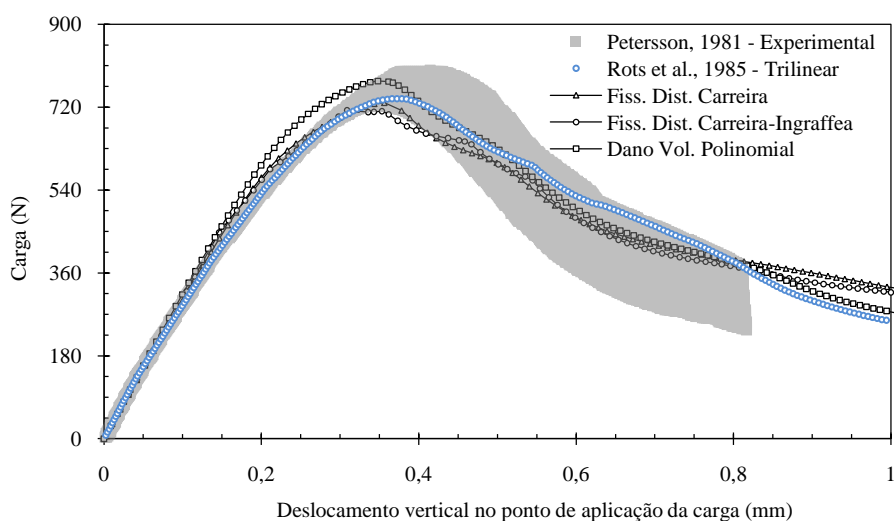


Figura 9.4: Comparação entre os modelos de dano volumétrico, com lei de dano polinomial, de fissuração distribuída, com leis de Carreira e Chu (1985, 1986) e Boone e Ingraffea (1987), e os resultados obtidos por Rots et al. (1985), com modelo de fissuração distribuída usando lei trilinear.

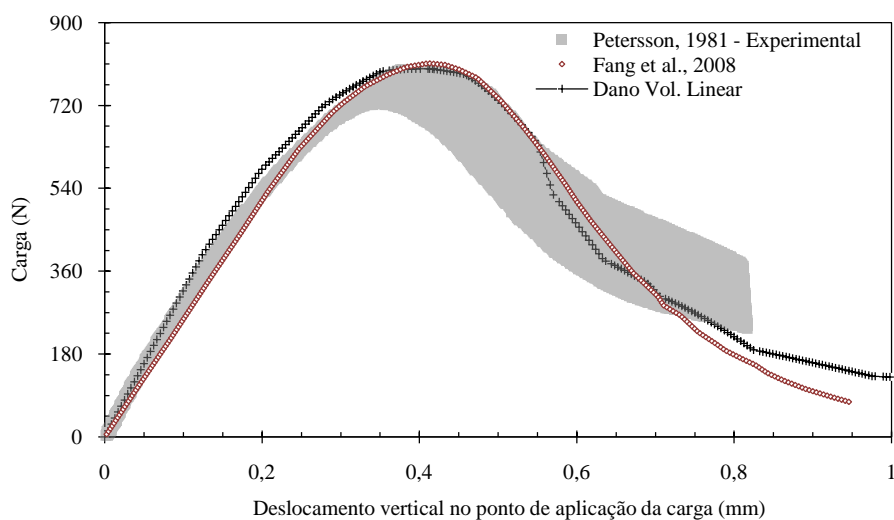


Figura 9.5: Comparação entre o modelo de dano volumétrico, com lei de dano linear, e os resultados obtidos por Fang et al. (2008), com modelo de trinca coesiva usando lei exponencial.

As figuras 9.6 e 9.7 apresentam as isoformas de valores das deformações ε_x , ε_y e γ_{xy} , correspondentes ao ponto de carga máxima, para, respectivamente, o modelo de fissuração distribuída, com lei bilinear, e o modelo de dano volumétrico, com evolução de dano linear.

Verifica-se que o comportamento de ambos os modelos se assemelham e, embora

as deformações sejam, quantitativamente, um pouco diferentes, os padrões apresentados nas isofaixas de valores são praticamente os mesmos.

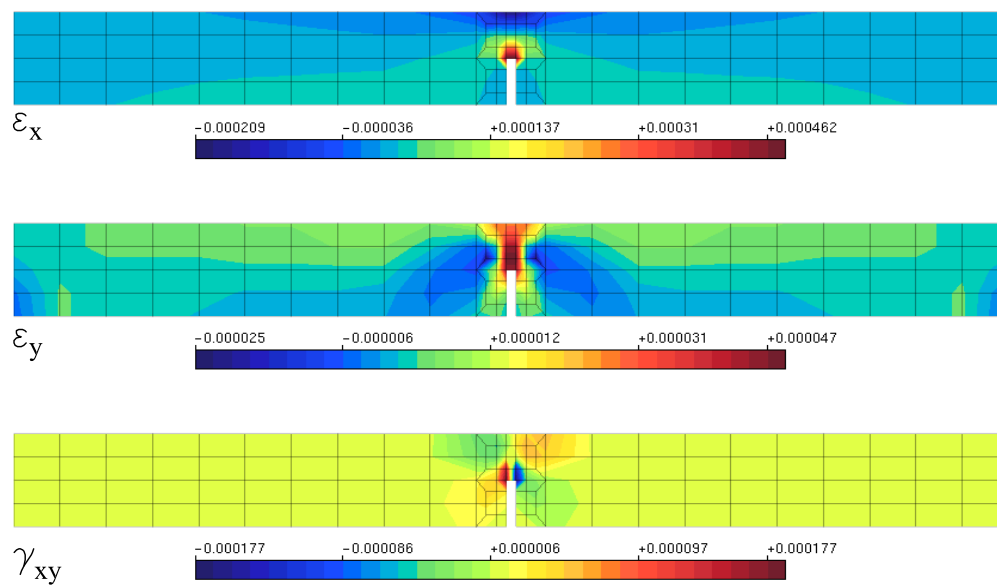


Figura 9.6: Variação das deformações obtidas com o modelo de fissuração distribuída.

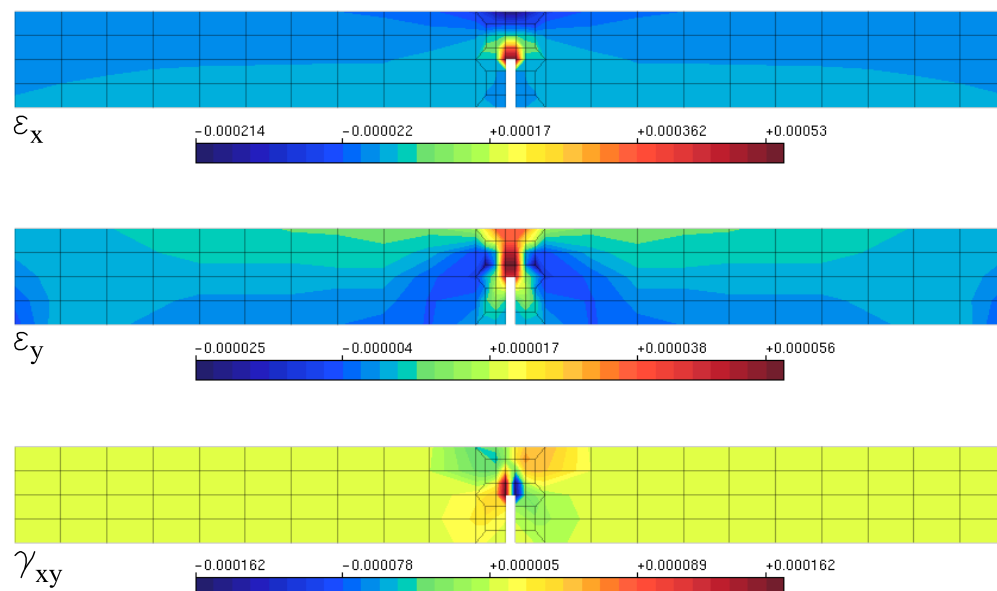


Figura 9.7: Variação das deformações obtidas com o modelo de dano volumétrico.

9.2 Painel em L – Winkler et al. (2004)

Winkler et al. (2004) realizaram ensaios experimentais em painéis de concreto em forma de “L”, como ilustrado na figura 9.8, e simulações numéricas com um modelo constitutivo de fissuração distribuída formulado nas bases da teoria da plasticidade. Este painel é aqui modelado, utilizando-se a malha de elementos finitos quadrilaterais de quatro nós, mostrado na figura 9.8.

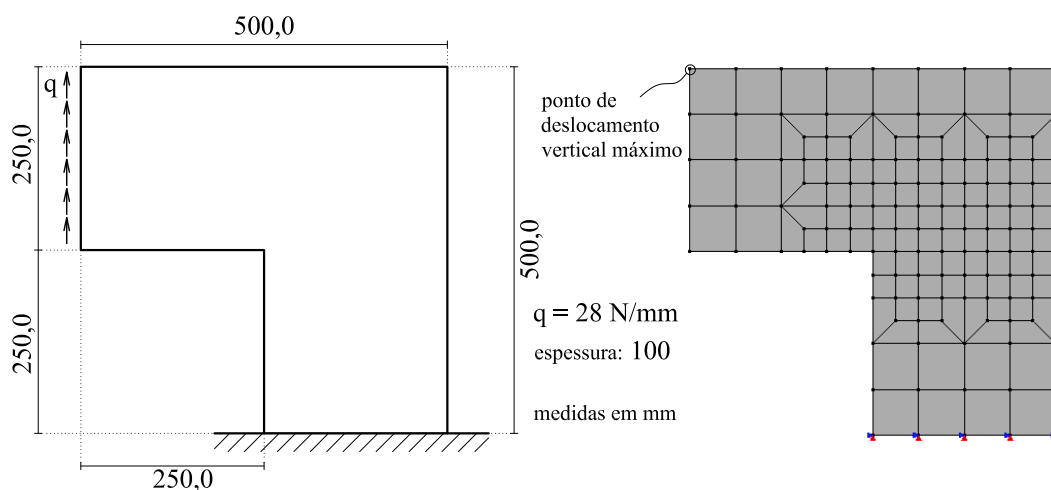


Figura 9.8: Painel em “L”: geometria e malha do modelo de elementos finitos.

Nos experimentos realizados por Winkler et al. (2004), foram obtidos os seguintes valores para as propriedades do concreto: $E_0 = 25850,0 \text{ N/mm}^2$, $f_t = 2,7 \text{ N/mm}^2$, $f_c = 31,0 \text{ N/mm}^2$, $G_f = 0,065 \text{ N/mm}^2$ e foi assumido $\nu = 0,18$. O concreto foi fabricado com agregado de diâmetro máximo de 8 mm , permitindo estimar o comprimento característico do material em 28 mm (usualmente admite-se que o comprimento característico é aproximadamente de 3 a 5 vezes o tamanho do diâmetro máximo do agregado). Com base nessas grandezas, utilizaram-se os modelos de dano volumétrico e de fissuração distribuída, com os parâmetros especificados nas tabelas 9.3 e 9.4.

No controle do processo incremental-iterativo, foi adotado um incremento inicial do fator de carga de 0,02, com o método de controle de deslocamentos generalizados, e tolerância para convergência de 1×10^{-4} .

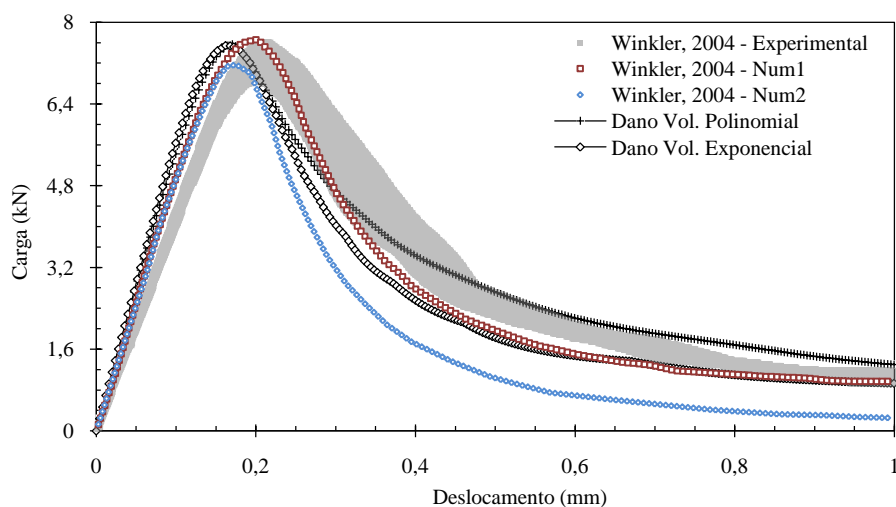
Tabela 9.3: Parâmetros das leis de dano.

Modelo de Dano Volumétrico			
Polinomial		Exponencial	
Tração		Tração	
f_e	1,43 N/mm^2	α	0,97
κ_0	0,000215	β	1000,0
\tilde{E}	13463,0 N/mm^2	κ_0	0,00011
Compressão		Compressão	
f_e	16,0 N/mm^2	α	1,0
κ_0	0,0022	β	500,0
\tilde{E}	13463,0 N/mm^2	κ_0	0,001

Tabela 9.4: Parâmetros das leis tensão-deformação.

Modelo de Fissuração Distribuída			
Material 1		Material 2	
Carreira-Carreira		Carreira-Ingraffea	
f_t	2,7 N/mm^2	f_t	2,7 N/mm^2
f_c	31,0 N/mm^2	f_c	31,0 N/mm^2
ε_t	0,0001925	G_f	0,065 N/mm^2
ε_c	0,0022	h	28 mm
β_r	0,0	ε_c	0,0

As trajetórias de equilíbrio do ponto de deslocamento vertical máximo (como visto na figura 9.8) em relação à carga são apresentadas nos gráficos das figuras 9.9 e 9.10. Os resultados são comparados com os resultados experimentais e numéricos de Winkler et al. (2004).

**Figura 9.9:** Trajetórias de equilíbrio obtidos com o modelo de dano volumétrico.

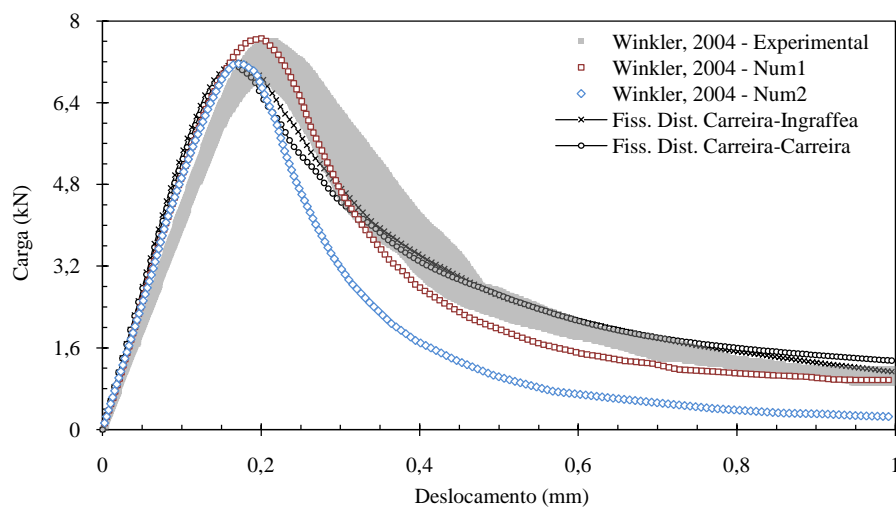


Figura 9.10: Trajetórias de equilíbrio obtidos com o modelo de fissuração distribuída.

Observa-se que tanto o modelo de fissuração distribuída quanto o modelo de dano foram capazes de representar o comportamento do painel visto nos experimentos. Comparando os resultados aqui obtidos com os resultados numéricos apresentados por Winkler et al. (2004), verifica-se uma concordância do modelo numérico 2 com os modelos de fissuração distribuída, no que diz respeito à obtenção do limite de carga, embora os comportamentos pós-crítico sejam distintos. O comportamento pós-crítico visto no modelo numérico 1 é mais próximo dos obtidos com os modelos aqui adotados, com destaque para o modelo de dano com função exponencial que, mesmo apresentando uma rigidez inicial maior, apresentou boa concordância com os resultados experimentais.

O padrão de evolução do dano, por tração, obtido com o modelo de dano volumétrico para a lei de dano exponencial, pode ser visto na figura 9.11. Verifica-se que a degradação se inicia de forma concentrada na junção angular do painel e propaga-se horizontalmente por quase toda a peça. O comportamento observado para a lei polinomial é similar.

O mesmo comportamento foi observado por Winkler et al. (2004), como ilustrado na figura 9.12. Contudo, verifica-se uma localização da trinca (no caso experimental) e da região de dano (no caso numérico) em uma região acima da observada, na figura

9.11, nos padrões de evolução de dano aqui obtidos.

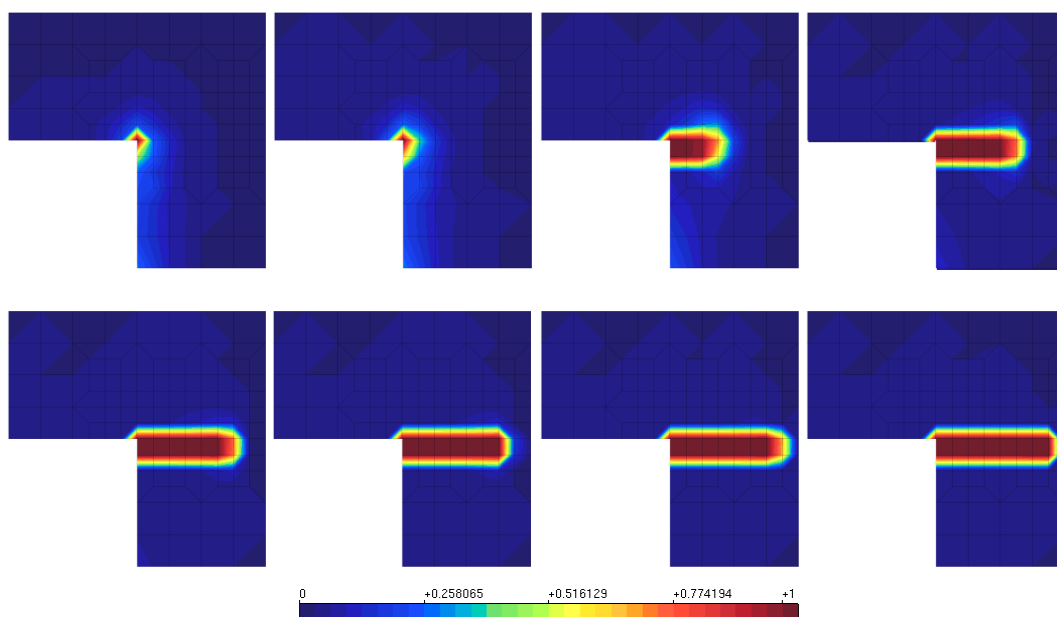


Figura 9.11: Isofaixas de evolução do dano por tração obtidas com o modelo de dano volumétrico.

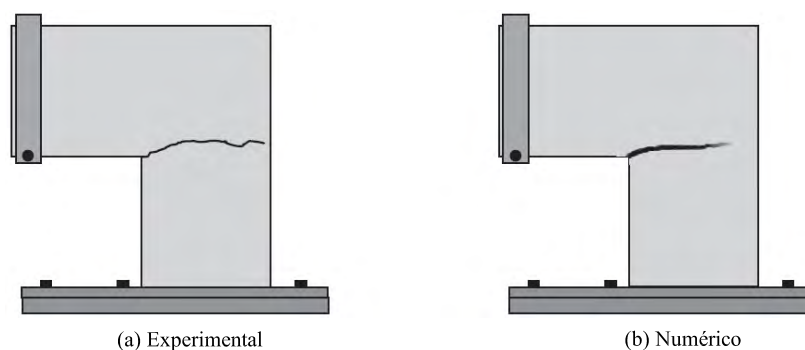


Figura 9.12: Padrão de dano observado por Winkler et al. (2004).

9.3 Cisalhamento em 4 Pontos – Arrea e Ingrassia (1982)

A investigação do comportamento do processo de degradação do concreto, quando submetido a um modo misto de sollicitação, é ainda uma questão muito explorada na modelagem numérica, devido à difícil simulação dos efeitos do cisalhamento em meios parcialmente frágeis. Os trabalhos de Arrea e Ingrassia (1982), Ohlsson e Gylltoft (1986), Schlangen (1993), Feenstra (1993) e, mais recentemente, Fang et al. (2008), dentre outros, abordaram o modo misto de sollicitação, a partir do ensaio de

cisalhamento em 4 pontos, por meio de ensaios experimentais ou modelos numéricos.

O ensaio de cisalhamento em 4 pontos realizado por Arrea e Ingraffea (1982) apresenta resultados do deslocamento vertical relativo das extremidades da trinca. Esta medida é conhecida como CMSD (*Crack Mouth Sliding Displacement*). Os detalhes geométricos do ensaio, as condições de carregamento e de apoios estão mostrados na figura 9.13, que também destaca a medida CMSD.

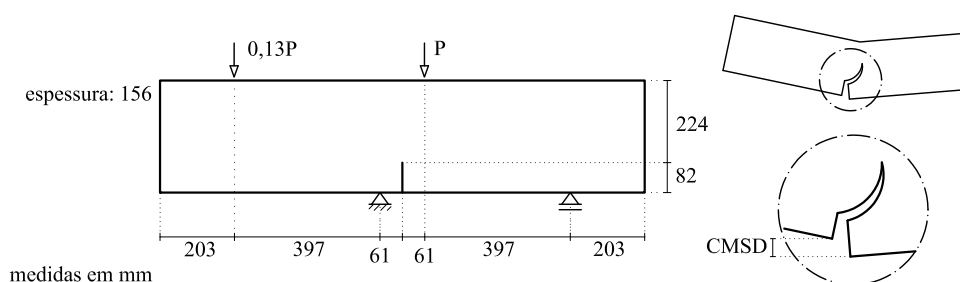


Figura 9.13: Geometria do modelo.

O ensaio foi modelado com elementos quadriláteros de quatro nós e a malha utilizada é mostrada na figura 9.14.

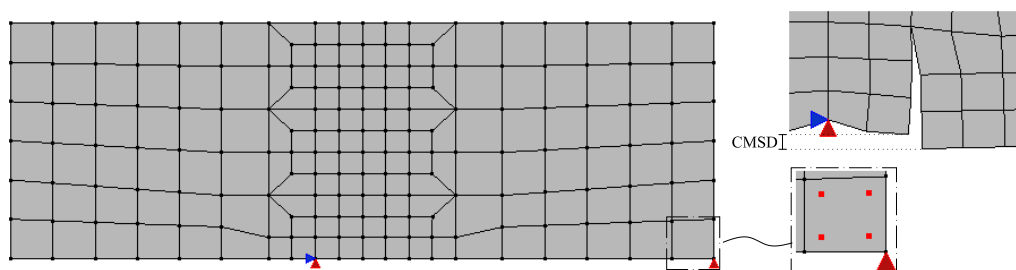


Figura 9.14: Malha de elementos finitos.

Foram usados os modelos de dano volumétrico e de fissuração distribuída. Para a análise não linear foi adotado o método de controle de comprimento de arco cilíndrico com incremento inicial do fator de carga de 0,0125 e tolerância para convergência de 1×10^{-4} . A carga de referência foi de $P = 130000,0 \text{ N}$.

Nos experimentos de Arrea e Ingraffea (1982), a energia de fratura do concreto variou de $100,0 \text{ N/m}$ a $140,0 \text{ N/m}$ e a resistência a tração variou de $2,8 \text{ N/mm}^2$ a $4,0 \text{ N/mm}^2$. Os parâmetros dos modelos aqui usados foram obtidos a partir dos

valores médios dessas grandezas e estão especificados na tabelas 9.5 (modelo de dano) e 9.6 (fissuração distribuída).

Tabela 9.5: Parâmetros das leis de dano.

Modelo de Dano Volumétrico			
Material 1		Material 2	
Tração-Polinomial		Tração-Exponencial	
f_e	0,8 N/mm^2	α	0,92
κ_0	0,00014	β	1200,0
\tilde{E}	13000,0 N/mm^2	κ_0	0,000068
Compressão-Polinomial		Compressão-Polinomial	
f_e	12,0 N/mm^2	f_e	12,0 N/mm^2
κ_0	0,0018	κ_0	0,0018
\tilde{E}	13000,0 N/mm^2	\tilde{E}	13000,0 N/mm^2

Tabela 9.6: Parâmetros das leis tensão-deformação.

Modelo de Fissuração Distribuída			
Material 1		Material 2	
Carreira-Carreira		Carreira-Inggraffea	
f_t	3,4 N/mm^2	f_t	3,4 N/mm^2
f_c	34,0 N/mm^2	f_c	34,0 N/mm^2
ε_t	0,00024	G_f	0,120 N/mm^2
ε_c	0,0024	h	40 mm
β_r	0,02	ε_c	0,002

Para o modelo de dano volumétrico foram usados dois materiais diferentes, o primeiro com uma relação polinomial para o dano, para tração e compressão, e o segundo com função exponencial, para tração, e polinomial, para compressão. Para o modelo de fissuração, duas relações tensão-deformação foram adotadas, uma baseada nas leis de Carreira e Chu (1985, 1986) (para tração e compressão) e outra assumindo a relação de Boone e Inggraffea (1987), para tração, e mantendo a relação de Carreira e Chu, para compressão. Foi considerado o módulo de elasticidade de 24800 N/mm^2 e coeficiente de Poisson de 0,18.

Os gráficos carga versus CMSD podem ser vistos nas figuras 9.15 e 9.16. Os resultados são comparados com os resultados experimentais obtidos por Arrea e Inggraffea (1982).

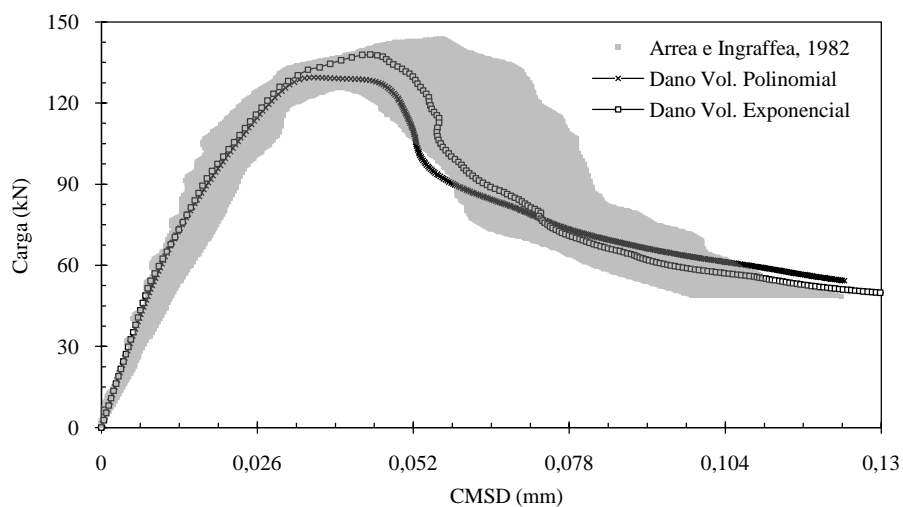


Figura 9.15: Resposta carga \times CMSD obtidos com o modelo de dano volumétrico.

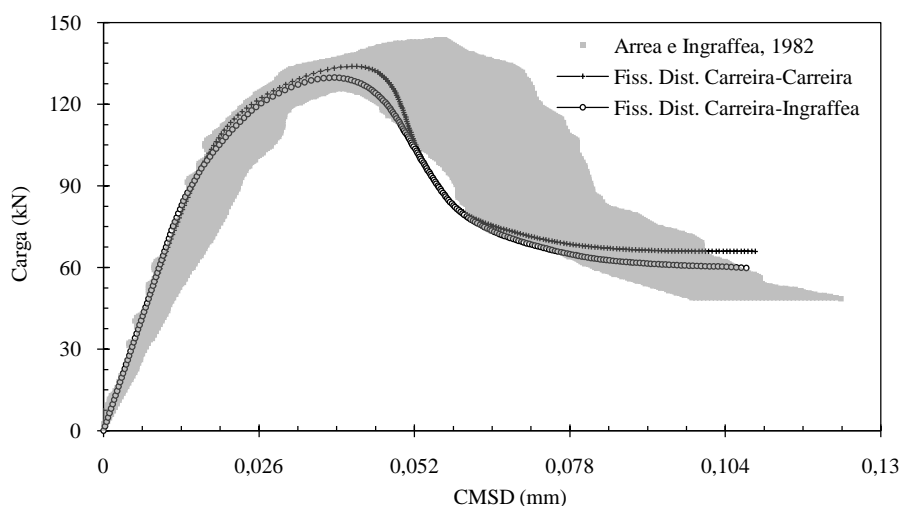


Figura 9.16: Resposta carga \times CMSD obtidos com o modelo de fissuração distribuída.

Observa-se que os modelos foram capazes de representar os resultados experimentais, descrevendo adequadamente a evolução do deslocamento vertical relativo da extremidade da trinca. Fang et al. (2008), com um modelo constitutivo de trinca coesiva que adota leis exponencial e bilinear, em um modelo de elementos finitos estendidos, analisou a mesma viga, adotando uma energia de fratura de $140,0 \text{ N/m}$ e uma resistência de à tração de $3,0 \text{ N/mm}^2$. Os resultados podem ser vistos na figura 9.17, sendo postos em comparação com os obtidos na modelagem aqui realizada.

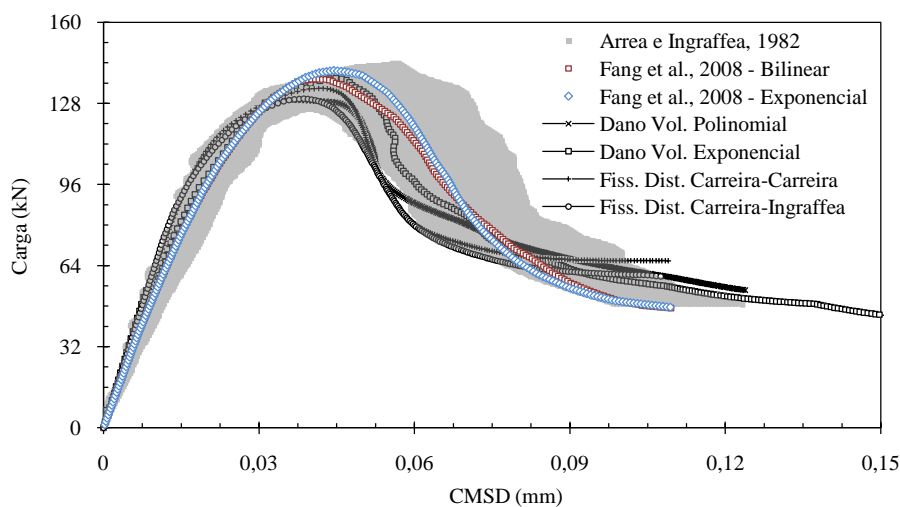


Figura 9.17: Comparação dos modelos de dano volumétrico e de fissuração distribuída com os resultados obtidos por Fang et al. (2008).

Verifica-se que, mesmo com modelos numéricos distintos e diferentes leis de evolução, os resultados são correspondentes e o comportamento do ensaio é representado. A equivalência dos resultados pode ser creditada à conformidade das propriedades físicas do material, obtidas nos experimentos, com os parâmetros das leis de evolução de dano dos modelos.

As figuras 9.18 e 9.19 apresentam os contornos de tensão de cisalhamento (τ_{xy}) e a deformada da viga, correspondentes ao máximo valor de carga. A formação de uma banda de cisalhamento, localizada entre o apoio e a carga do centro da viga, é um fenômeno característico deste tipo de ensaio, como visto nas figuras.

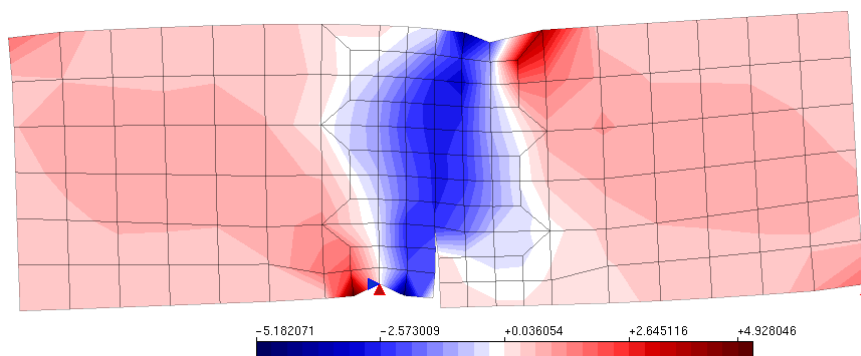


Figura 9.18: Deformada e distribuição de tensões de cisalhamento da viga correspondentes ao máximo valor de carga para o modelo de fissuração distribuída.

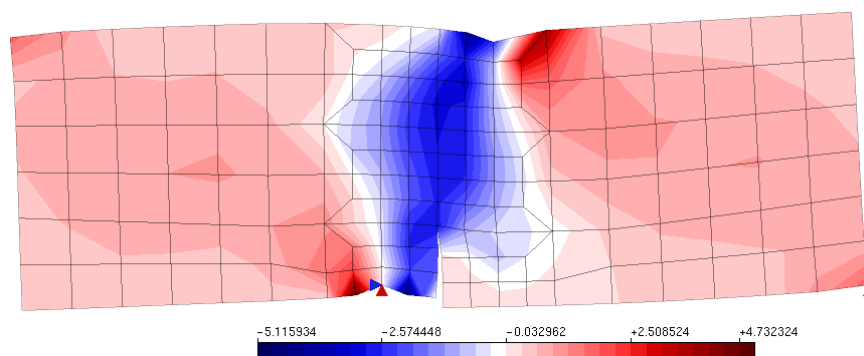


Figura 9.19: Deformada e distribuição de tensões de cisalhamento da viga correspondentes ao máximo valor de carga para o modelo de dano volumétrico.

É relevante observar a trajetória de equilíbrio associada ao deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga central. O experimento de Arrea e Ingraffea (1982) não apresenta resultados desta grandeza, entretanto diversas simulações desse ensaio constataram um acentuado “*snap-back*” para a referida trajetória.

A figura 9.20 apresenta as trajetórias obtidas com os modelos de dano volumétrico e de fissuração distribuída, para as diferentes leis adotadas.

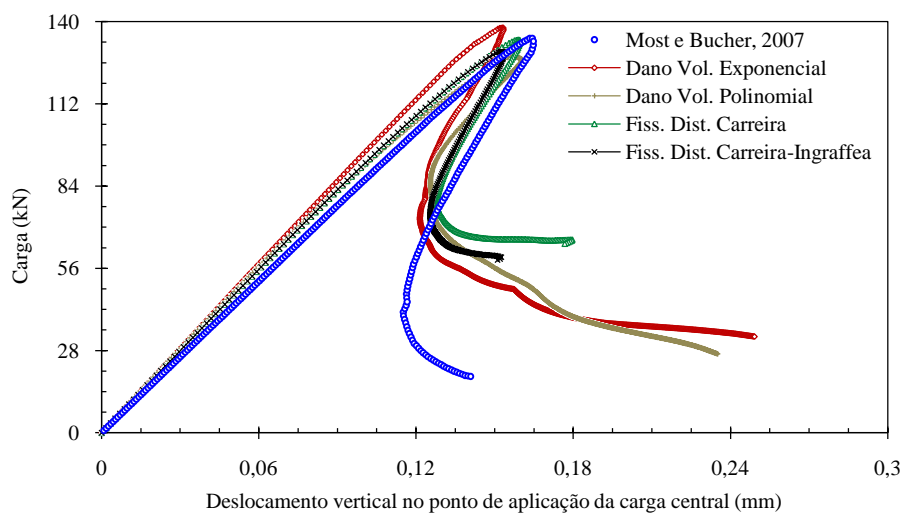


Figura 9.20: Comparação das trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga central, obtidos com os modelos de fissuração distribuída e de dano volumétrico, com os resultados obtidos por Most e Bucher (2007).

Este gráfico são comparados com o resultado obtido por Most e Bucher (2007), que fizeram uso de um modelo de trinca coesiva em um método sem malha. Pode-se observar a equivalência dos resultados e a adequada descrição do “*snap-back*”,

típico deste tipo de simulação. Verifica-se que o modelo de fissuração distribuída apresentou um enrijecimento no fim da trajetória. Isto pode ser atribuído ao fator de retenção ao cisalhamento, responsável por estabilizar o modelo, que não permite a degradação crescente do módulo de elasticidade transversal.

9.4 Viga de Concreto Armado – Mazars e Pijaudier-Cabot (1989)

No trabalho de Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) foram apresentados modelos constitutivos para a análise não linear de estruturas de concreto, destacando-se o modelo de Mazars (1984). Resultados de simulações numéricas foram comparados com os obtidos em ensaios experimentais. Destaca-se a simulação de uma viga de concreto armado que será agora apresentada.

A figura 9.21 mostra a geometria da viga, bem como os detalhes do modelo de elementos finitos aqui adotados.

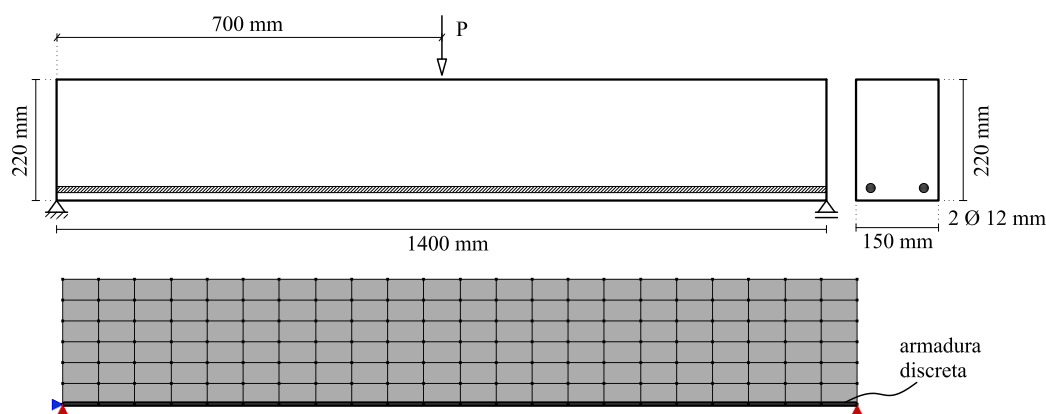


Figura 9.21: Flexão em 3 pontos em concreto armado: geometria e modelo de elementos finitos.

Na modelagem de Mazars e Pijaudier-Cabot (1989), foram utilizados elementos finitos triangulares tanto para o concreto quanto para o aço. A armadura foi modelada de forma discreta, considerando aderência perfeita com o concreto. O modelo de dano de Mazars (1984) foi adotado para o concreto, com os seguintes parâmetros: $E_0 = 30000,0 \text{ N/mm}^2$; $\nu = 0,2$; $A_t = 0,8$; $A_c = 1,4$; $B_t = 20000,0$; $B_c = 1850,0$.

O valor de κ_0 não foi especificado. Para o aço, os autores especificam o módulo de elasticidade de $210000,0 \text{ N/mm}^2$, mas não informam o limite de escoamento.

No presente trabalho, a viga foi modelada em estado plano de tensão, com elementos quadriláteros de quatro nós, para representar o concreto, e elementos unidimensionais de dois nós, para a armadura. Considerou-se aderência perfeita entre aço e concreto. Para o concreto, foram adotados o modelo de dano de Mazars (1984) e o modelo de dano volumétrico proposto neste trabalho, com lei de dano exponencial dada pela equação E.8. Para o aço, foi adotado o modelo de plasticidade, com critério de von Mises, assumindo plasticidade perfeita. Os parâmetros para cada modelo estão especificados na tabela 9.7.

Tabela 9.7: Parâmetros dos modelos constitutivos.

Dano Volumétrico		Mazars (1984)		Plasticidade	
Tração		Tração			
α	0,95	A_t	0,8	f_{ys}	420 N/mm^2
β	2150,0	A_c	1,4	H	0,0
κ_0	0,000035	κ_0	0,0008		-
Compressão		Compressão			
α	1,0	B_t	20000,0		-
β	600,0	B_c	1850,0		-
κ_0	0,0004	κ_0	0,0008		-

Adotou-se módulo de elasticidade de $30000,0 \text{ N/mm}^2$ e coeficiente de Poisson de 0,2, para o concreto, módulo de elasticidade de 210000 N/mm^2 e coeficiente de Poisson igual a 0,3, para o aço.

Para a análise não linear foi adotado o método de controle de deslocamento generalizado, com incremento inicial do fator de carga de 550, e tolerância para convergência de 1×10^{-4} e carga de referência de $P = 1,0 \text{ N}$. As trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga são apresentadas na figura 9.22. Os resultados dos modelos são comparados com os valores experimentais e numéricos apresentados por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) e verifica-se uma boa concordância entre os resultados dos modelos numéricos adotados neste trabalho e os apresentados por Mazars e Pijaudier-Cabot.

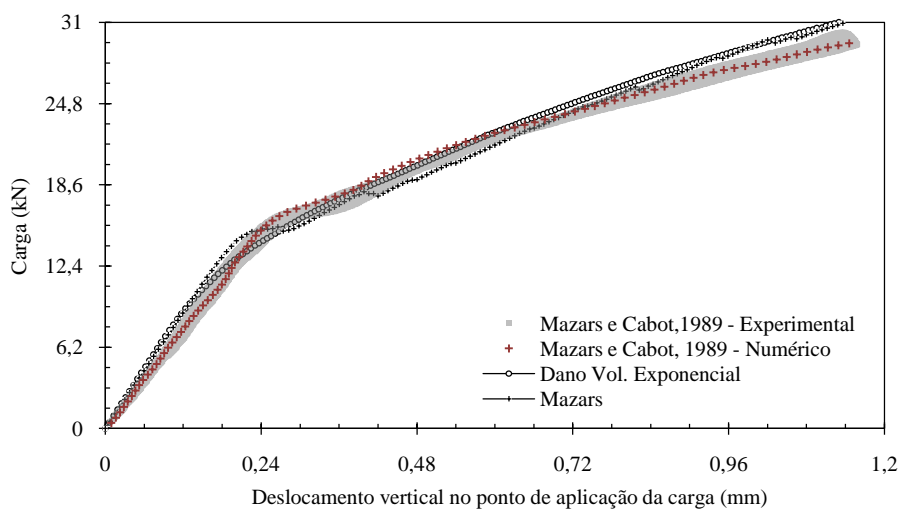


Figura 9.22: Trajetórias de equilíbrio do deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga.

9.5 Viga de Concreto Armado – Álvares (1993)

Neste exemplo serão modeladas vigas submetidas a flexão em quatro pontos, como proposto por Álvares (1993). Os detalhes das vigas estudadas por Álvares (1993) são mostrados na figura 9.23.

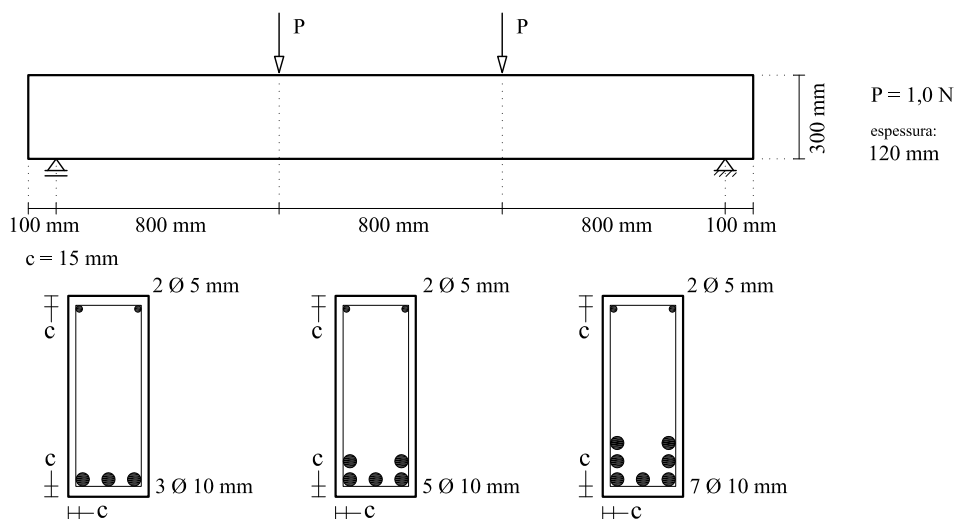


Figura 9.23: Detalhes geométricos e da armadura das vigas.

Álvares (1993) apresentou um estudo detalhado sobre o modelo de dano de Mazars (1984) e a obtenção experimental dos parâmetros utilizados na lei de evolução do dano. Também apresentou um estudo experimental e modelagem numérica de

vigas de concreto armado, submetidas à flexão em quatro pontos, com diferentes taxas de armadura (subarmada, normalmente armada e super armada).

Na modelagem computacional, Álvares (1993) considerou o concreto com módulo de elasticidade de $29200,0 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson de $0,2$ e o aço com módulo de elasticidade de $196000,0 \text{ MPa}$. O modelo de Mazars (1984) foi usado com os seguintes parâmetros: $A_t = 0,995$, $B_t = 8000,0$, $A_c = 0,85$, $B_c = 1620,0$ e $\kappa_0 = 0,00007$. Para a armadura adotou-se comportamento elástico linear com aderência perfeita.

Apresenta-se aqui a modelagem das vigas estudadas por Álvares (1993), com o modelo de dano volumétrico e com o modelo de Mazars (1984). Os resultados serão comparados com os resultados obtidos por Álvares (1993). Os detalhes do modelo de elementos finitos são vistos na figura 9.24.

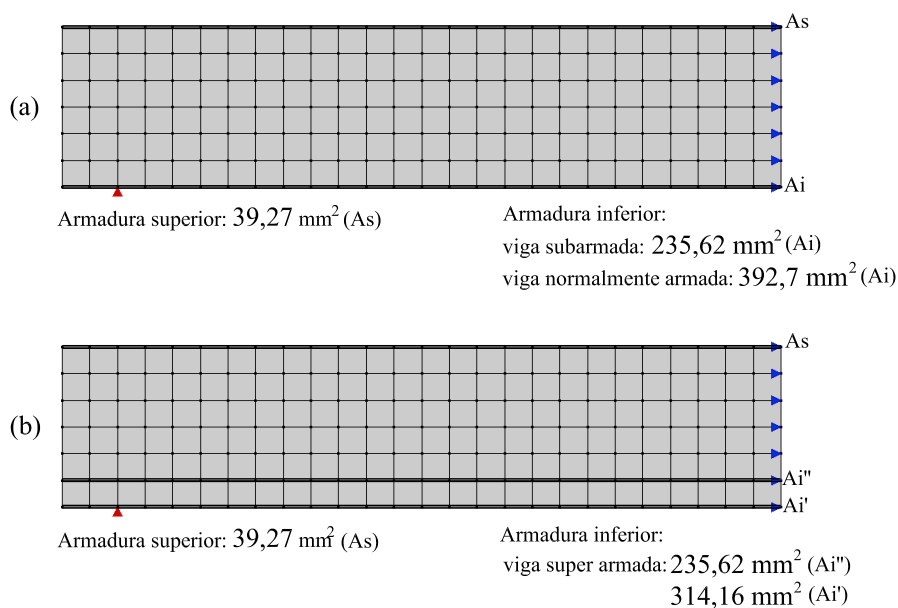


Figura 9.24: Modelo de elementos finitos:(a) Malha adotada para as vigas subarmada e normalmente armada;(b) Malha adotada para a viga super armada.

A viga é aqui modelada com elementos quadrilaterais de quatro nós em estado plano de tensão e a armadura, com elementos unidimensionais de dois nós, considerando-se aderência perfeita entre o aço e o concreto. Para o concreto foram adotados os modelos de dano volumétrico e o de dano de Mazars (1984). Para o

aço, adotou-se um modelo de plasticidade, segundo o critério de von Mises. Os parâmetros dos modelos constitutivos, para o concreto e para o aço, são apresentados na tabela 9.8.

Tabela 9.8: Parâmetros dos modelos constitutivos.

Modelo com Dano Volumétrico					
Função Polinomial		Função Linear		Função Exponencial	
Tração					
f_e	0,945 N/mm^2	κ_0	0,00006	α	1,0
κ_0	0,000094	κ_u	0,00045	β	4150,0
\tilde{E}	16222,22 N/mm^2			κ_0	0,000058
Compressão					
f_e	11,2 N/mm^2	κ_0	0,000697	α	0,9
κ_0	0,0017	κ_u	0,017	β	90,0
\tilde{E}	16222,22 N/mm^2			κ_0	0,000697
Mazars (1984)		Plasticidade			
A_t	0,995	f_{ys}	420 N/mm^2		
A_c	0,655	H	0,0		
B_t	8000,0				
B_c	1050,0				
κ_0	0,00007				

Os parâmetros adotados foram obtidos a partir dos resultados apresentados por Álvares (1993) e a metodologia empregada pode ser vista no apêndice G.

Para a análise não linear, foi adotado o método de controle de deslocamentos generalizados, com fator de carga inicial de 1125,0, tolerância para convergência de 1×10^{-3} e carga de referência de $P = 1,0 N$. Foi adotado o equilíbrio secante na obtenção dos resultados. Em consequência do equilíbrio secante o processo incremental iterativo foi mais custoso, ou seja, mais iterações foram necessárias em cada passo para que o equilíbrio fosse alcançado.

A figura 9.25 apresenta a trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical no meio do vão, para a viga subarmada. Os resultados são comparados com os obtidos por Álvares (1993) e com os resultados apresentados por Barros (2002), que analisou a viga subarmada com o modelo de Mazars, adotando o método dos elementos finitos generalizados, com elementos quadrilaterais de quatro nós e o aço como material

elástico-linear embutido no elemento quadrilateral.

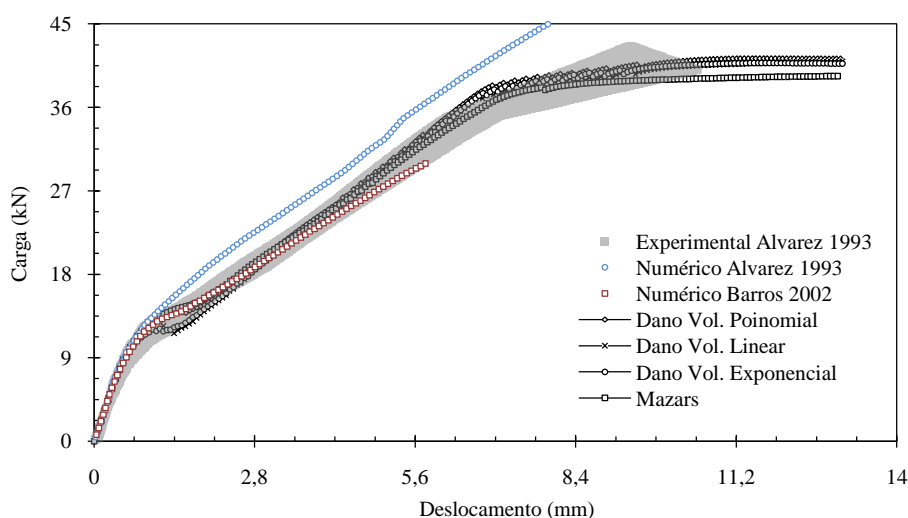


Figura 9.25: Trajetórias de equilíbrio carga \times Deslocamento vertical, para a viga subarmada.

Observa-se que o modelo de dano volumétrico e do modelo de Mazars foram capazes de descrever com bastante fidelidade os resultados experimentais e, qualitativamente, exibe uma correspondência com os demais modelos numéricos.

Para as demais vigas (normalmente armada e super armada), também foram obtidos resultados muito bons, como pode ser visto nos gráficos das figuras 9.26 e 9.27.

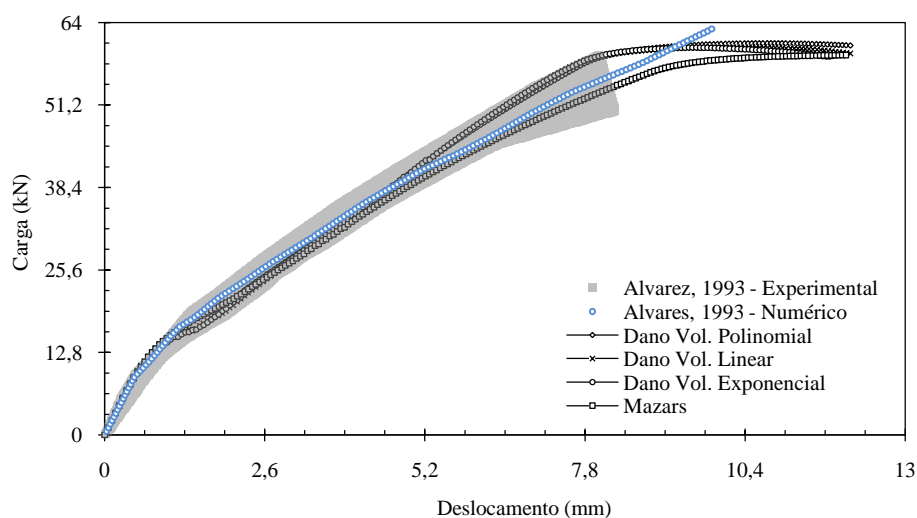


Figura 9.26: Trajetórias de equilíbrio carga \times Deslocamento vertical, para a normalmente armada.

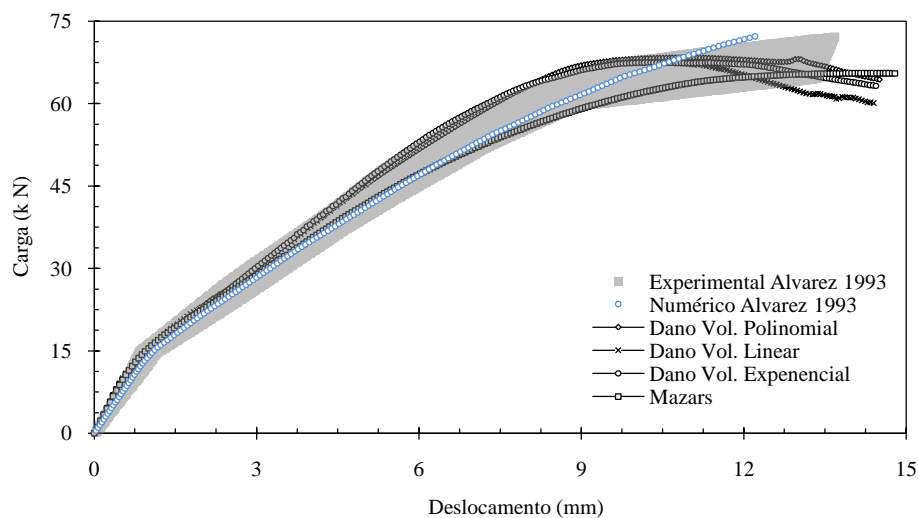


Figura 9.27: Trajetórias de equilíbrio carga \times Deslocamento vertical, para a viga superarmada.

Ressalta-se que o modelo de Mazars apresenta uma rigidez um pouco menor que o modelo de dano volumétrico. Pode-se observar também a grande equivalência desta implementação do modelo de Mazars com os resultados numéricos apresentados por Álvares. As diferenças observadas são atribuídas às diferentes formas de modelagem, principalmente a modelagem da armadura.

A figura 9.28 apresenta as isoformas de valores de o dano correspondentes a uma carga de $14,4 \text{ kN}$. O comportamento do modelo de Mazars e do modelo de dano volumétrico podem ser comparados aos obtidos por Barros (2002) modelado com elementos finitos (MEF) e elementos finitos generalizados (MEFG). O padrão de dano visto na figura 9.28-a é também visto nos modelos de dano volumétrico e de Mazars (1984). Estes modelos apresentam uma maior distribuição da degradação. Este fato está relacionado à modelagem adotada, especialmente à modelagem da armadura, que evita a concentração de deformações e distribui o dano na parte inferior da viga.

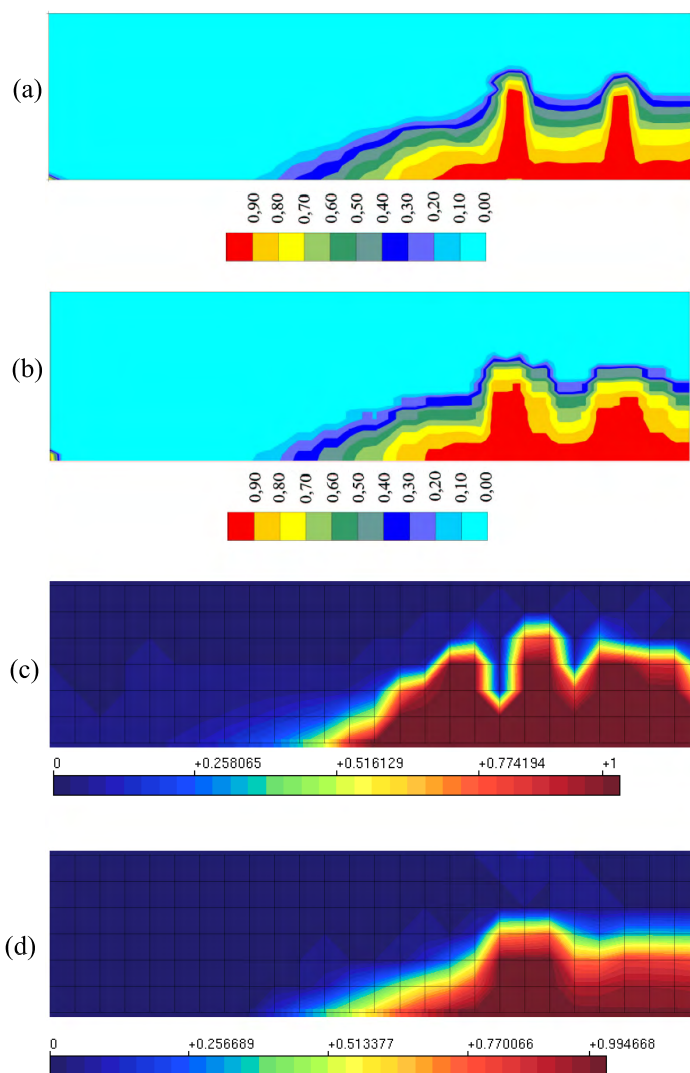


Figura 9.28: Isofaixas de Dano: (a)Barros (2002)- MEF; (b)Barros (2002)- MEF; (c) Modelo de dano volumétrico; (d) Modelo Mazars (1984).

9.6 Viga de Concreto Armado – de Borst e Nauta (1985)

Outro estudo em vigas de concreto armado submetidas a flexão em quatro pontos foi feita por de Borst e Nauta (1985), que empregaram um modelo de fissuração distribuída e compararam os resultados com os obtidos experimentalmente. Este estudo é aqui repetido, adotando-se os modelos de fissuração distribuída e de dano volumétrico e os resultados são comparados com os obtidos por de Borst e Nauta. Os detalhes geométricos e da malha de elementos finitos são mostrados na figura 9.29.

A viga foi modelada com elementos planos quadrilaterais de oito nós em estado plano de tensão. As barras de aço foram modeladas com elementos unidimensionais de três nós, considerando aderência perfeita e comportamento elastoplástico, segundo o critério de von Mises. Os parâmetros dos modelos constitutivos são mostrados na tabela 9.9. Para o modelo de dano volumétrico, foram adotadas leis de evolução do dano polinomiais. Para o modelo de fissuração distribuída, foram adotadas as leis de Carreira e Chu (1985), para compressão, e Boone e Ingraffea (1987), para tração. Considerou-se módulo de elasticidade do concreto de $28000,0 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson de $0,2$. Para o aço, adotou-se módulo de elasticidade de $210000,0 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson de $0,3$.

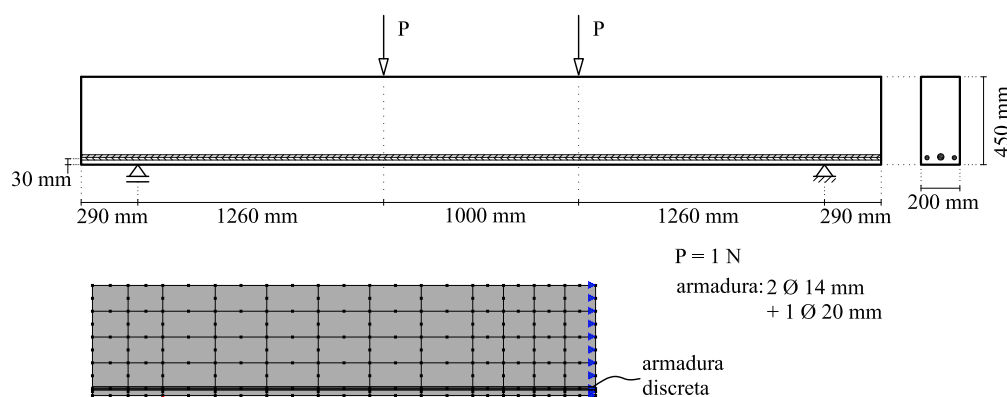


Figura 9.29: Detalhes geométricos e malha de elementos finitos.

Tabela 9.9: Parâmetros dos modelos constitutivos.

Dano Volumétrico		Fissuração Distribuída		Plasticidade	
Tração		Tração			
f_e	$0,835 \text{ N/mm}^2$	f_t	$2,5 \text{ N/mm}^2$	f_{ys}	$440,0 \text{ MPa}$
κ_0	$0,00012$	G_f	$0,06 \text{ N/mm}^2$	H	$0,0$
\tilde{E}	$15555,5 \text{ N/mm}^2$	h	100 mm		-
Compressão		Compressão			
f_e	$10,0 \text{ N/mm}^2$	f_c	$25,0 \text{ N/mm}^2$		-
κ_0	$0,0012$	ε_c	$0,015$		-
\tilde{E}	$15555,5 \text{ N/mm}^2$	β_r	$0,04167$		-

Para obtenção das trajetórias de equilíbrio foi adotado o método de controle de deslocamento generalizado com incremento inicial do fator de carga de 750 e

tolerância para convergência de 1×10^{-4} . As trajetórias de equilíbrio para o nó inferior no centro da viga são mostradas na figura 9.30. Os modelos são comparados com os resultados experimentais e numéricos apresentados por de Borst e Nauta (1985).

Pode-se observar que os modelos de dano volumétrico e de fissuração distribuída foram capazes de representar o comportamento da viga. Para valores de carga de, aproximadamente, 34 kN os modelos numéricos são muito próximos ao experimento. Para valores de carga superiores, os modelos se mostraram mais rígidos.

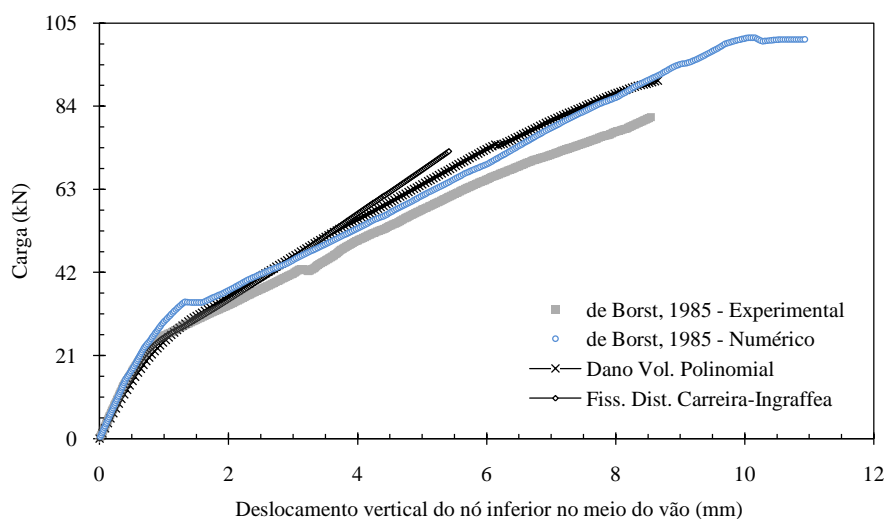


Figura 9.30: Trajetórias de equilíbrio carga \times Deslocamento vertical.

O resultado numérico apresentado por de Borst e Nauta (1985) exibe valores de carga mais altos que os obtidos experimentalmente. Contudo para cargas acima de 45 kN , o modelo se mostra mais estável e se aproxima mais do comportamento do experimento, alcançando valores de carga mais elevados. Verifica-se também que o modelo de fissuração se mostrou mais instável, atingindo uma carga máxima de $72,59 \text{ kN}$, ao passo que o modelo de dano volumétrico revelou uma carga máxima de $94,83 \text{ kN}$, assemelhando bastante ao resultado obtido por de Borst e Nauta (1985), ao fim da análise.

9.7 Viga de Concreto com Fibras – Guetti et al. (2010)

Este exemplo apresenta a modelagem de vigas em concreto reforçado com fibras de aço. A modelagem é baseada no trabalho de Guetti et al. (2010), que analisaram experimentalmente vigas com quantidades diferentes de fibras. A configuração geométrica, de cargas e malha de elementos finitos adotada estão mostradas na figura 9.31. Guetti et al. (2010) obtiveram experimentalmente as curvas para carga versus CMOD (“*Crack Mouth Opening Displacement*”). O CMOD é uma medida da abertura do entalhe feito no corpo de prova (Figura 9.31).

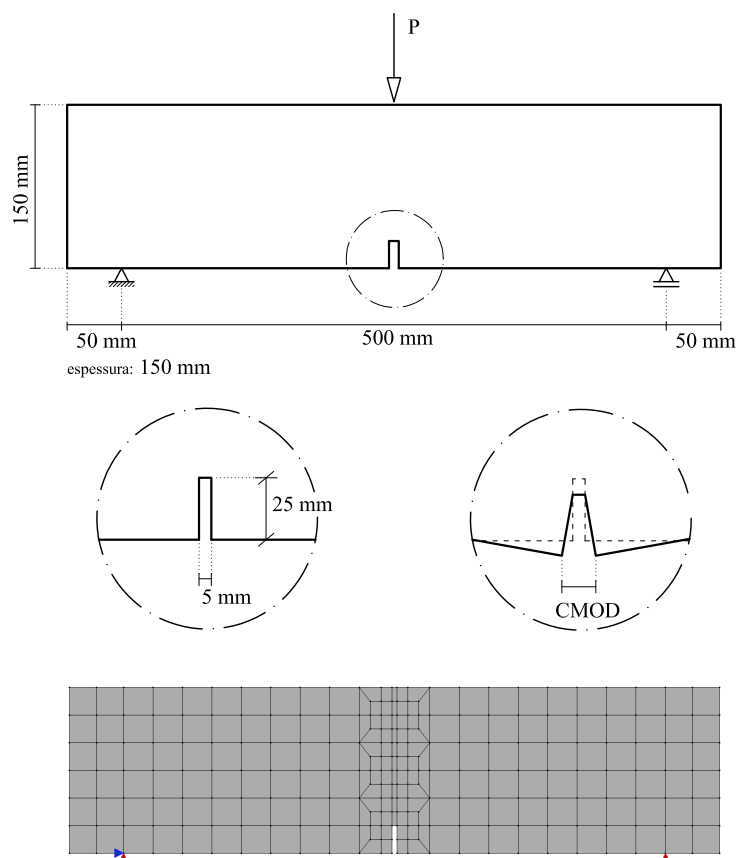


Figura 9.31: Configuração geométrica e malha de elementos finitos do modelo.

Dentre os tipos de concreto estudados por Guetti et al. (2010), modelou-se aquele com módulo de elasticidade de $28282,0 \text{ N/mm}^2$, $f_c = 44,9 \text{ N/mm}^2$ e $f_t = 4,71 \text{ N/mm}^2$. Para a representação do concreto, foi escolhido o modelo de dano volumétrico com lei de dano exponencial, na tração, e lei de dano polinomial, na

compressão, com os parâmetros mostrados na tabela 9.10.

Tabela 9.10: Parâmetros do modelo de dano volumétrico.
Dano Volumétrico

Tração		Compressão	
α	0,7 N/mm^2	f_e	16,67 N/mm^2
β_0	1600 ,0	κ_0	0,003
κ_0	0,00025	\tilde{E}	11784,2 N/mm^2

A solução foi processada com o método de controle de deslocamentos generalizados, com fator de carga inicial de 2500 N e tolerância para convergência de 1×10^{-4} . O gráfico carga versus CMOD é visto na figura 9.32.

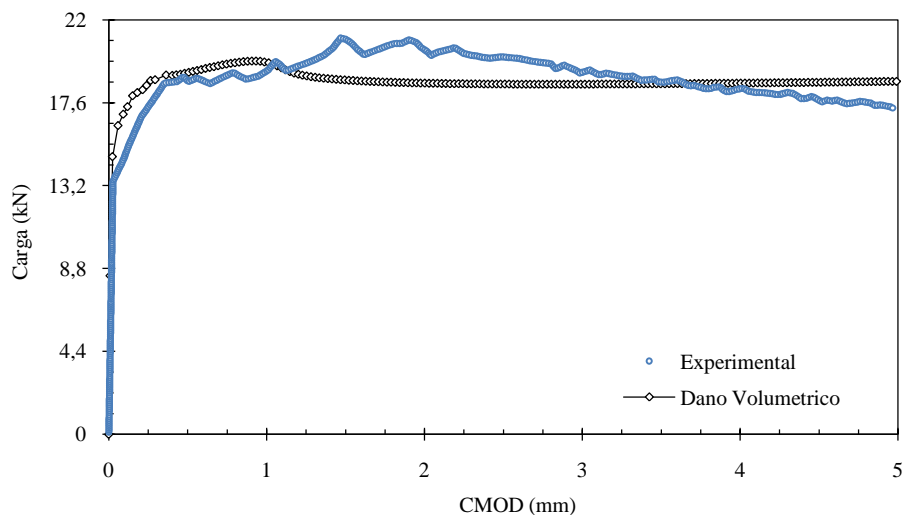


Figura 9.32: Resposta carga \times CMOD obtidas com o modelo de dano volumétrico.

Observa-se boa concordância entre os resultados experimentais e numéricos, revelando um comportamento muito dúctil, que é uma característica de concretos reforçados com fibras. Embora o resultado numérico obtido apresente uma boa conformidade com o experimental, deve-se ressaltar a dificuldade da modelagem. Esta dificuldade está associada à tentativa de representar o concreto com fibras apenas pela adequação da lei de dano.

Capítulo 10

Considerações Finais

Neste trabalho apresentou-se uma proposta de unificação teórica e implementação computacional de modelos constitutivos baseados em degradação elástica.

Dada a amplitude do tema, o enfoque foi mantido na modelagem constitutiva de meios parcialmente frágeis, como o concreto, mais especificamente no processo de degradação devido a cargas. Modelos clássicos para tratar a degradação do meio foram abordados no contexto da estrutura teórica e computacional apresentada. Além disso, os modelos de fissuração distribuída foram reformulados, considerando-se múltiplas funções de carregamento desacopladas e uma regra de degradação generalizada. Para ilustrar a potencialidade do arcabouço teórico e computacional criado, alguns modelos de dano encontrados na literatura foram implementados bem como um modelo de plasticidade clássica. Também foi proposto um novo modelo de dano com múltiplas funções de carregamento.

A implementação computacional foi realizada no sistema **INSANE** (*INteractive Structural ANalysis Environment*) e, tomando partido de seu projeto orientado objetos, foi possível implementar a unificação teórica proposta independentemente do método numérico aplicado. Contudo, apenas o método dos elementos finitos foi usado na validação da estrutura teórica criada e dos modelos constitutivos nela

inseridos.

Vários exemplos de aplicação foram apresentados, visando ilustrar as possibilidades de modelagem proporcionadas pela biblioteca de modelos constitutivos reunida neste trabalho. O novo modelo de dano proposto foi validado por meio de exemplos que comparam os resultados do mesmo com resultados experimentais ou obtidos com outros modelos, disponíveis na literatura.

Todos os aspectos mencionados anteriormente são consideradas a seguir, destacando-se as principais contribuições desta tese.

10.1 Sobre a Unificação Teórica Proposta

Como discutido no capítulo 3, vários pesquisadores apresentaram propostas para tratar a modelagem constitutiva em um único formato. Esses trabalhos propõem formas particulares para abordagem do problema. Dentre todas as propostas, Carol et al. (1994) apresentaram o arcabouço teórico mais completo e formal, introduzindo conceitos fundamentais para a generalização da modelagem constitutiva.

Contudo, a proposta de Carol et al. (1994) contempla somente modelos baseados em uma única superfície de carregamento e a aludida generalização não é demonstrada para os diferentes modelos constitutivos disponíveis na literatura. Além disso, a formulação não aborda a generalização do ponto de vista computacional. O trabalho também carece de exemplos associados com os métodos numéricos usados na Mecânica dos Sólidos, como o Método dos Elementos Finitos.

A formulação apresentada no capítulo 3 expandiu a proposta de Carol et al. (1994), visando tratar problemas baseados em múltiplas funções de carregamento. A referida expansão foi inspirada no trabalho de Zhou et al. (2003), que exemplificou a utilização de múltiplas funções de carregamento em um modelo constitutivo específico.

Construiu-se, assim, uma estrutura teórica capaz de representar modelos multipotenciais. Portanto, modelos direcionais com comportamentos específicos para

cada direção, como o de fissuração distribuída, e modelos com grandezas dissipativas distintas, como o modelo de dano volumétrico, puderam ser incorporados.

A estrutura teórica criada também permite a inclusão de outros modelos constitutivos, sejam eles: baseado em tensão; em deformação; em grandezas termodinâmicas; em variáveis de dano; que façam uso ou não da regra de degradação generalizada. Todas estas possibilidades também foram contempladas na proposta de Carol et al. (1994), entretanto, aqui, todas elas foram devidamente demonstradas.

Embora somente o método dos elementos finitos tenha sido empregado na validação da estrutura teórica, a formulação da mesma é independente do método numérico usado, indicando que sua aplicabilidade pode ser estendida.

Ressalta-se que o desenvolvimento da proposta baseou-se em modelos de degradação contínua. Assim, a necessidade de adaptação da mesma, de modo a contemplar modelos baseados em grandezas localizadas, como os modelos de trinca discreta, precisa ser investigada.

10.2 Sobre a Modelagem Constitutiva

No capítulo 4, vários modelos constitutivos, encontrados na literatura em seu formato original, foram formulados segundo o arcabouço teórico aqui proposto.

Os modelos tradicionais de plasticidade, associada e não associada, bem como modelos elastoplásticos com dano ou modelos compostos por múltiplas superfícies, acopladas ou não, podem ser facilmente incorporados ao arcabouço teórico proposto, variando-se somente o algoritmo de retorno, de acordo com a necessidade de cada modelo. A inclusão do modelo de plasticidade com critério de von Mises ilustra essa constatação.

Os modelos de dano isotrópico foram incorporados por meio de uma especialização da formulação geral, diferenciando-se pela medida de dano e, conseqüentemente, pelos termos obtidos da derivação da função de carregamento. Foram formulados os modelos de Mazars e Lemaitre (1984), Simo e Ju (1987), Ju (1989), Lemaitre e

Chaboche (1990), de Vree et al. (1995) e Mazars (1984).

Também, para os modelos ortotrópicos, foi apresentada uma especialização da forma geral baseada na regra da degradação generalizada e na existência de múltiplas funções de carregamento, válidas para um sistema local de dano.

Foram formulados e implementados modelos de fissuração distribuída com direções de degradação fixas e variáveis. Tais modelos foram aplicados em domínios unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. Nestes modelos, é necessário computar os efeitos da degradação do meio de forma independente e desacoplada em cada direção. Assim, o formato multipotencial foi imprescindível para a generalização deste tipo de modelo. Ressalta-se que esta classe de modelos pode ser incorporada de tal maneira que o processo de degradação seja acompanhado sem que se tenha uma variável de dano explícita. Isto permite que a perda de rigidez seja obtida de leis tensão-deformação, com as quais mede-se as variações dos módulos de elasticidade secante e tangente locais.

Os modelos anisotrópicos foram representados pela teoria de microplanos. Foi apresentada uma formulação de modelos de microplanos baseados em leis de evolução de dano escalares com múltiplas funções de carregamento. Como visto, a formulação unificada foi desenvolvida de forma geral, sendo aplicada em cada microplano. Este modelo foi apresentado como uma extensão dos modelos direcionais ortotrópicos, facilmente inserido na generalização proposta. Contudo, não foi realizada a implementação deste modelo que apresenta particularidades, independentes da estrutura teórica proposta, que devem ser exploradas com mais detalhes em outro trabalho.

Os modelos de degradação elástica foram formulados e a forma do tensor constitutivo tangente para cada um deles foi explicitada. Entretanto, muitas vezes o mesmo é aproximado por sua parcela secante, como nos trabalhos de de Vree et al. (1995) e Mazars e Pijaudier-Cabot (1989). Aqui, dada a facilidade proporcionada pela unificação teórica, duas possibilidades foram implementadas: a denominada

equilíbrio tangente, que considera todas as parcelas do referido tensor e , e a denominada equilíbrio secante, que a adota a aproximação do mesmo por meio da parcela secante. Ambas as possibilidades foram usadas nos diversos exemplos apresentados.

Uma outra importante consideração refere-se à caracterização do ponto material no modelo numérico, ao qual se deseja aplicar a estrutura teórica implementada. Isto foi visto nos modelos unidimensionais de pórtico espacial, segundo as teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko, adaptado da proposta apresentada por Fonseca (2006), que adota a decomposição da seção transversal em que cada subdivisão é um ponto material. De forma análoga, o mesmo tratamento foi aplicado à flexão de placas, cuja espessura é subdividida em camadas e cada camada é um ponto material.

Por fim, é válido reafirmar que a formulação e implementação computacional de novos modelos constitutivos é beneficiada pela praticidade do arcabouço teórico apresentado, o que é corroborado pelo desenvolvimento do novo modelo de dano proposto: o modelo de dano volumétrico.

10.3 Sobre o Modelo de Dano Volumétrico

O modelo de dano proposto, formulado no capítulo 5, baseou-se na definição de energia livre na qual o tensor de deformação é decomposto em parcelas volumétricas e desviadoras e adotou as deformações volumétricas para caracterizar uma medida de dano que diferencia os efeitos de tração e compressão. O modelo formulado assume a definição de energia livre semelhante à adotada por Ladevèze (1983), entretanto as equações foram aqui desenvolvidas no domínio das deformações. A medida de deformação aqui adotada seguiu a proposta de Comi (2001), de modo a diferenciar os efeitos de tração e compressão. Entretanto, diferentemente de Comi (2001) — que usou duas superfícies, acoplando os efeitos de tração e compressão, necessitando assim de um algoritmo de retorno para quantificação do dano —, neste trabalho, os efeitos de tração e compressão foram desacoplados por meio de funções

de carregamento independentes. Além disso, a quantificação do dano foi aqui feita, diretamente com o uso de leis de evolução previamente especificadas.

Assumidas as hipóteses básicas do modelo (tensor de rigidez, oriundo da definição da energia livre, e medida de degradação), a definição do modelo foi complementada partindo-se de múltiplos potenciais obtidos de funções de carregamento assumidas para cada medida de deformação correspondente às variáveis de dano. Os gradientes das funções de carregamento permitiram avaliar as direções de degradação e de evolução do carregamento e o tensor pós-rítico foi obtido diretamente dos gradientes das leis de dano.

Formas lineares, exponenciais e polinomiais foram avaliadas, entretanto, a formulação proposta permite a inserção de qualquer função matemática para descrever a evolução do dano.

A definição dos coeficientes das equações que controlam a evolução do dano, bem como o número de parâmetros, refletem diretamente no comportamento do material e dependem da função escolhida, logo, quanto mais simples for o formato da equação mais simples será a parametrização do material. Como o modelo trata de grandezas equivalentes, os parâmetros obtidos de ensaios experimentais não correspondem diretamente aos do modelo, sendo portanto necessário obter estes parâmetros indiretamente.

O capítulo 9 foi dedicado à modelagem de estruturas em concreto simples e armado com o modelo de dano volumétrico proposto. Vários exemplos foram apresentados, destacando-se a flexão de vigas em três e quatro pontos, cisalhamento em quatro pontos. Os resultados obtidos foram comparados com resultados experimentais e numéricos obtidos nas referências bibliográficas consultadas. O modelo foi capaz de representar o comportamento das estruturas modeladas mostrando um bom desempenho e conformidade com os resultados laboratoriais.

10.4 Sobre a Implementação Computacional

A implementação realizada foi dividida em duas partes distintas: a primeira parte concerne à implementação da estrutura teórica unificada e a segunda no que diz respeito aos modelo constitutivos propriamente ditos.

A implementação computacional da proposta de unificação teórica tomou partido da generalização proporcionada pelo sistema **INSANE** e manteve o mesmo projeto orientado a objetos de seu núcleo numérico.

Como mostrado, o processo de solução evoca métodos para o cálculo da rigidez incremental e do vetor de forças equivalentes aos esforços internos. Para estas duas tarefas, o modelo constitutivo é requisitado, caracterizando os pontos de ligação da implementação do método numérico e do modelo constitutivo.

Os esforços internos podem ser calculadas por uma relação total ou como resultante de um algoritmo de retorno, o que depende dos requisitos do modelo constitutivo em questão. Já para o cálculo do operador tangente o formato implementado é dado pela equação 3.50, abaixo repetida

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{m}_{mij} \bar{n}_{nkl}.$$

No capítulo 3, diversas formas para o cálculo do operador tangente foram apresentadas e o formato dado pela equação acima se mostrou bastante geral, uma vez que, com as relações de correspondência entre os vários formatos, resumidos na seção 3.6, qualquer versão do operador pode ser obtida. Contudo, como mostrado no diagrama de classes da figura 6.10, novas expansões podem ser realizadas, de forma tal que quaisquer outras alternativas para o cálculo do referido operador podem ser implementadas.

Vários modelos constitutivos foram implementados conforme o diagrama de classes da figura 6.11. Seja para o cálculo do operador tangente ou do vetor de forças equivalentes aos esforços internos, o modelo constitutivo consulta o material para obter suas propriedades físicas (por exemplo, módulo de elasticidade e o coeficiente

de Poisson) e, para o estado de tensão ou deformação corrente, o valor do dano. O material, por sua vez, possui acesso à forma de evolução do dano, bem como os parâmetros necessários para quantificá-lo. Isto é possível devido ao polimorfismo proporcionado pelas classes abstratas `Material` e `DamageLaw` e pela interface `Damageable`, mostradas nas figuras 6.16 e 6.17. Estas figuras também mostram a generalização alcançada pela implementação das funções de evolução de dano, de modo que qualquer função de evolução possa ser implementada.

As leis de evolução de dano podem ou não estar associadas a um modelo material (Figura 6.16), uma vez que determinadas classes de materiais têm leis de evolução da degradação como característica intrínseca. Entretanto, existem modelos de materiais que, além da prescrição das propriedades físicas, requerem a indicação de uma lei de evolução.

Ressalta-se que o formato tensorial usado na formulação foi mantido na implementação e, desta forma, pôde-se generalizar todos os modelos de análise, ampliando a aplicação dos modelos constitutivos. O formato tensorial escolhido facilitou a implementação das operações tensoriais de modo que estas puderam ser realizadas seguindo a notação indicial.

Por fim, vale dizer que as características do projeto orientado a objetos permitiu a criação de um arcabouço computacional para modelos constitutivos que pode ser facilmente expandido, para inclusão de novos modelos, ou utilizado, sem qualquer alteração, para análise não linear baseada em outros métodos numéricos, como o método dos elementos finitos (MEF), o método dos elementos finitos generalizados (MEFG), o método dos elementos de contorno (MEC) e os métodos sem malha (MSM).

10.5 Continuidade da Linha de Pesquisa

Tendo em vista a continuidade da linha de pesquisa e tomando como base o conteúdo apresentado ao longo deste trabalho são sugeridas algumas propostas de

estudos relevantes para a Mecânica Computacional do Concreto:

Aplicar o formato proposto para tratar de forma genérica a modelagem constitutiva na formulação e implementação de modelos de microplanos, como os propostos por Ožbolt et al. (2001), Carol et al. (2001a), Kuhl et al. (2001) e Leukart e Ramm (2002).

Formular um modelo de microplanos baseado na definição de múltiplos potenciais, com a divisão do vetor de deformações de cada microplano em parcelas volumétricas e desviadoras, como um aprimoramento do novo modelo de dano proposto nesta tese.

Formular e implementar modelos não locais, sofisticando a aplicação dos modelos constitutivos aqui apresentados, a fim de criar mecanismos de regularização capazes de tratar problemas de localização de deformações e dependência de malha.

Ampliar a biblioteca com outras propostas de modelos constitutivos baseados em degradação elástica, dano e plasticidade. Dentre as possibilidades, destaca-se os modelos de plasticidade com múltiplas superfícies e os modelos baseados em superfícies de dano.

Ampliar o sistema computacional com a inclusão de modelos para armadura e perda de aderência, permitindo uma modelagem mais realista de estruturas concreto armado.

Aplicar o arcabouço teórico e computacional criado e os modelos constitutivos implementados para a análise não linear em modelos de elementos finitos generalizados, modelos com descontinuidade forte embutida, modelos de elementos de contorno e modelos baseados em métodos sem malha.

Referências Bibliográficas

- Ajeje, F. H., Setembro 2009. Abordagem orientada a objetos para implementação computacional de elementos finitos de cascas planos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Almeida, M. L., Agosto 2005. Elementos finitos paramétricos implementados em Java. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Álvares, M. d. S., 1993. Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com emprego do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Alves, M., Yu, J., Jones, N., 2000. On the elastic modulus degradation in continuum damage mechanics. *Computers & Structures* 76, 703–712.
- Armero, F., Oller, S., 2000a. A general framework for continuum damage models. I. infinitesimal plastic damage models in stress space. *International Journal of Solids and Structures* 37, 7409–7436.
- Armero, F., Oller, S., 2000b. A general framework for continuum damage models. II. integration algorithms, with applications to the numerical simulation of porous metals. *International Journal of Solids and Structures* 37, 7437–7464.
- Arrea, M., Ingraffea, A., 1982. Mixed mode crack propagation in mortar and concrete. Tech. Rep. 81-13, Departement Of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, EUA, citado por Rots et al. (1985).
- Barain, J. M., Mari, A., 2007. Multiaxial-coupled analysis of rc cross-sections subjected to combined forces. *Engineering Structures* 29, 1722–1738.

- Barbat, A. H., Oller, S., Oñate, E., Hanganu, A., 1997. Viscous damage model for timoshenko beam structures. *Finite Elements in Analysis and Design* 34 (30), 3953–3976.
- Barros, F. B., 2002. Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Barros, J., Cunha, V., Ribeiro, A., Antunes, J., 2005. Post-cracking behaviour of steel fibre reinforced concrete. *Materials and Structures* 38, 47–56.
- Batoz, J. L., Dhat, G., 1979. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14, 1262–1267.
- Bažant, Z., Lin, F.-B., 1988. Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture. *Journal of Structural Engineering* 114 (11), 2493–2511.
- Bažant, Z., Novák, D., 2000. Probabilistic nonlocal theory for quasibrittle fracture initiation and size effect. I: Theory and II: Application. *Journal of Engineering Mechanics* 126 (2).
- Bažant, Z. P., 1976. Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete. *Journal of the engineering mechanics division* 102, 331–344.
- Bažant, Z. P., Cedolin, L., 1979. Blunt crack band propagation in finite element analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 105, 297–315.
- Bažant, Z. P., Cedolin, L., 1980. Fracture mechanics of reinforced concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 106, 1287–1306.
- Bažant, Z. P., Cedolin, L., 1983. Finite element modeling of crack band propagation. *Journal of Structural Engineering* 109 (1), 69–92.
- Bažant, Z. P., Gambarova, P. G., 1984. Crack shear in concrete: crack band micro-plane model. *Journal of Structural Engineering* 110 (9), 2015–2035.
- Bažant, Z. P., Oh, B. H., 1983. Crack band for fracture of concrete. *Matériaux et Constructions* 16 (93), 155–177.

- Bažant, Z. P., Oh, B. H., 1985. Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. *Journal of Engineering Mechanics* 111 (4), 559–582.
- Bažant, Z. P., Ožbolt, J., 1990. Nonlocal microplane model for fracture, damage, and size effect in structures. *Journal of Engineering Mechanics* 116 (11), 2485–2505.
- Bažant, Z. P., Pfeiffer, P. A., 1987. Determination of fracture energy from size effect and brittleness number. *ACI Materials Journal* 84 (41), 463–480.
- Bažant, Z. P., Pijaudier-Cabot, G., 1987. Softening in reinforced concrete beams and frames. *Journal of Structural Engineering, ASCE* 113 (12), 2333–2347.
- Bažant, Z. P., Pijaudier-Cabot, G., 1988. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics* 55 (2), 287–293.
- Bažant, Z. P., Planas, J., 1998. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. CRC Press, EUA.
- Bažant, Z. P., Prat, P. C., 1988a. Microplane model for brittle-plastic material: I. Theory. *Journal of Engineering Mechanics* 114 (10), 1672–1688.
- Bažant, Z. P., Prat, P. C., 1988b. Microplane model for brittle-plastic material: II. Verification. *Journal of Engineering Mechanics* 114 (10), 1689–1702.
- Belhoue, J. P., Nguyen, G. D., Korsunsky, A. M., 2007. A one-dimensional nonlocal damage-plasticity model for ductile materials. *Letters in Fracture Micromechanics* 144, 53–60.
- Blaauwendraad, J., 1972. Realistic analysis of reinforced concrete framed structures. *HERON* 18 (4), 1–23.
- Boone, T., Ingraffea, A. R., 1987. Simulation of the fracture process at rock interfaces. In: *Proceedings of the fourth international conference in Numerical Methods in fracture Mechanics*. pp. 519–531.
- Boone, T., Wawrzynek, P. A., Ingraffea, A. R., 1986. Simulation of the fracture process in rock with application to hydrofracturing. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science* 23 (3), 255–265.

- Borges, J. U. A., Bittencourt, T. N., 2005. Efeito de escala na ductilidade do concreto sob compressão uniaxial e vigas armadas sob flexão. *Revista IBRACON de Estruturas* 1 (2), 187–213.
- Bratina, S., Saje, M., Planinc, I., 2004. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. *International Journal of Solids and Structures* 41, 7181–7207.
- Brekelmans, W. A. M., Scheurs, P. J. G., de Vree, J. H. P., 1992. Continuum damage mechanics for softening of brittle materials. *Acta Mechanica* 93, 133–143.
- Carol, I., 1996. Elastic degradation and damage: plasticity-like formulation, stiffness recovery and localization. In: *Mecánica Computacional vol. XVII*. Tucumán, Argentina, pp. 243–252.
- Carol, I., 1999. New developments in elastic degradation and damage: anisotropic formulations and evolution laws in pseudo-log space. In: *MECOM 99*. Mendoza, Argentina, pp. 3–16.
- Carol, I., Jirasek, M., Bažant, Z., 2001a. A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part I. Free energy and consistent microplane stresses. *International Journal of Solids and Structures* 38, 2921–2931.
- Carol, I., Prat, C., Bažant, Z. P., 1992. New explicit microplane model for concrete: Theoretical aspects and numerical implementation. *International Journal of Solids and Structures* 29 (9), 1173–1191.
- Carol, I., Rizzi, E., Willam, K., 1994. A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface. *International Journal of Solids and Structures* 31 (20), 2835–2865.
- Carol, I., Rizzi, E., Willam, K., 2001b. On the formulation of anisotropic elastic degradation. I. Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. *International Journal of Solids and Structures* 38, 491–518.
- Carol, I., Rizzi, E., Willam, K., 2001c. On the formulation of anisotropic elastic degradation. II. Generalized pseudo-rankiner model for tensile damage. *International Journal of Solids and Structures* 38, 519–546.

- Carol, I., Willam, K., 1996. Spurious energy dissipation/generation and stiffness recovery models for elastic degradation and damage. *International Journal of Solids Structures* 33 (20-22), 2939–2957.
- Carreira, D. J., Chu, K.-H., 1985. Stress-strain relationship for plain concrete in compression. *American Concrete Institute Journal* 82 (6), 797–804.
- Carreira, D. J., Chu, K.-H., 1986. Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension. *American Concrete Institute Journal* 83 (1), 21–28.
- Cauvin, A., Testa, R. B., 1999. Damage mechanics: basic variables in continuum theory. *International Journal of Solids and Structures* 36, 747–761.
- Chaisomphob, T., Hansapinyo, C., 1999. Nonlinear analysis of three-dimensional framed structures using smeared crack models. *Thammasat International Journal of Science and Technology* 4 (1), 11–18.
- Challamel, N., Lanos, C., Casandjian, C., 2005. Strain-based anisotropic damage modelling and unilateral effects. *International Journal of Mechanical Sciences* 47, 459–473.
- Chen, W., Han, D. J., 1988. *Plasticity For Structural Engineers*. Springer, Madison, EUA.
- Chen, W. F., 1982. *Plasticity in Reinforced Concrete*. McGraw-Hill Book Company, Nova York, EUA.
- Choi, K. S., Pan, J., 2009. A generalized anisotropic hardening rule based on the mroz multi-yield-surface model for pressure insensitive and sensitive materials. *International Journal of Plasticity* 25, 1325–1358.
- Chow, C. L., Wang, J., 1987. An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture. *Engineering Fracture Mechanics* 27 (5), 547–558.
- Chow, C. L., Yang, X. J., Chu, E., 2001. Effect of principal damage plane rotation on anisotropic damage plastic model. *International Journal of Damage Mechanics* 10, 43–54.

- Comi, C., 2001. A non-local model tension and compression damage mechanisms. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 20, 1–22.
- Comi, C., Perego, U., 2004. Criteria for mesh refinement in nonlocal damage finite element analyses. *European Journal of Mechanics A/Solids* 23, 615–632.
- Cordebois, J. P., Sidoroff, F., 1982. Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité. *J. Mécanique Théorique et Appliquée Numéro Spécial*, 45–60, citado por Carol et al. (2001b).
- Crisfield, M. A., 1981. A fast incremental-iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers & Structures* 13, 55–62.
- Crisfield, M. A., 1983. An arc length method including line searches and accelerations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 19, 1269–1289.
- Darwin, D., Pecknold, D. A., 1976. Analysis of rc shear panels under cyclic loading. In: *Journal of the structural division, ASCE*. pp. 355–369.
- de Borst, R., 1987. Smeared cracking, plasticity, creep and thermal loading – a unified approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 62, 89–110.
- de Borst, R., 2002. Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. *Engineering Fracture Mechanics* 69, 95–112.
- de Borst, R., Gutiérrez, M. A., 1999. A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects. *International Journal of Fracture* 95, 261–277.
- de Borst, R., Nauta, P., 1985. Non-orthogonal cracks in a smeared finite element model. *Engineering Computations* 2, 35–46.
- de Vree, J. H., Brekelmans, W. A. M., van Gils, M. A. J., 1995. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. *Computers & Structures* 55 (4), 581–588.

- DeJong, M. J., Hendriks, M. A. N., Rots, J. G., 2008. Sequentially linear analysis of fracture under non-proportional loading. *Engineering Fracture Mechanics* 75 (18), 5042–5056.
- Desmorat, R., Cantournet, S., 2009. Modeling microdefects closure effect with isotropic/anisotropic damage. *International Journal of Damage Mechanics* 17, 65–96.
- Desmorat, R., Gatuingt, F., Ragueneau, F., 2007a. Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics* 74, 1539–1560.
- Desmorat, R., Gatuingt, F., Ragueneau, F., 2007b. Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics* 74, 1539–1560.
- Dundar, C., Tokgoz, S., Tanrikulu, A. K., Baran, T., 2008. Behaviour of reinforced and concrete-encased composite columns subjected to biaxial bending and axial load. *Building and Environment* 43, 1109–1120.
- Dunne, F., Petrinic, N., 2005. *Introduction to Computational Plasticity*. Oxford University Press, Oxford.
- Dym, C. L., Shames, I. H., 1973. *Solid mechanics: A variational approach*. McGraw-Hill, Inc, Estados Unidos.
- Faleiro, J., Oller, S., Barbat, A., 2008. Plastic-damage seismic model for reinforced concrete frames. *Computers & Structures* 86, 581–597.
- Fang, X.-J., Jin, F., Yang, Q.-D., 2008. Extended finite-element analysis of fractures in concrete. In: *Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Vol. Engineering and Computational Mechanics* 161. pp. 187–197.
- Feenstra, P. H., 1993. *Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete*. Tese de Doutorado, Delft University, Holanda.
- Fichant, S., Borderie, C. L., Pijaudier-Cabot, G., 1999. Isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* 4, 339–359.

- Fonseca, F. T., Agosto 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não-linear através do método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, F. T., Pitangueira, R. L., Vasconcellos Filho, A., 2004. Implementação de modelos estruturais de barras como casos particulares do método de elementos finitos. In: Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional - SIMMEC 2004. Itajubá, Minas Gerais, Brasil.
- Fonseca, M. T., Agosto 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., Fevereiro 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., Abril 2009. Formulações de modelos constitutivos de microplanos para contínuos generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Germânio, L., Setembro 2005. Implementação orientada a objetos da solução de problemas estruturais dinâmicos via método dos elementos finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Ghrib, F., Tinawi, R., 1995. Nonlinear behavior of concrete dams using damage mechanics. *Journal of Engineering Mechanics* 121 (4), 513–527.
- Guetti, P. C., Ribeiro, G. O., Ros, P. S., 2010. Experimental study of the post-cracking behavior of steel fibre reinforced self-compacting concrete. In: 2o. Congresso Ibérico de Betão Auto-Compactável. Univeridade do Minho, Guimarães, Portugal.
- Hammi, Y., Horstemeyer, M. F., Bammann, D. J., 2003. An anisotropic damage model for ductile metals. *International Journal of Damage Mechanics* 12, 245–262.

- Hansen, E., Willam, K., Carol, I., 2001. A two-surface anisotropic damage/plasticity model for plain concrete. In: Proceedings of Fracture Mechanics of Concrete Materials - Francos-4 Conference. Paris, França, pp. 1–8.
- He, W., Wu, Y.-F., Liew, K. M., 2008. A fracture energy based constitutive model for the analysis of reinforced concrete structures under cyclic load. *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering* 197 (51-52), 4745–4762.
- Hillerborg, A., Modéer, M., Peterson, P.-E., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research* 6, 773–782.
- Izzuddin, B. A., Siyam, A. A. F. M., Smith, D. L., 2002. An efficient beam-column formulation for 3d reinforced concrete frames. *Computers & Structures* 80, 659–676.
- Izzuddin, B. A., Smith, D. L., 2000. Efficient nonlinear analysis of elasto-plastic 3d r/c frames using adaptive techniques. *Computers & Structures* 78, 549–573.
- Jansson, A., 2008. Fibres in reinforced concrete structures - analysis, experiments and design. Chalmers University Of Technology, Göteborg, Suécia, monografia.
- Jirásek, M., Patzák, B., 2002. Consistent tangent stiffness for nonlocal damage models. *Computers & Structures* 80, 1279–1293.
- Jirásek, M., Zimmermann, T., 1998. Rotating crack model with transition to scalar damage. *Journal of Engineering Mechanics* 124, 277–284.
- Ju, J. W., 1989. On energy-based coupled elastoplasticity damage theories: constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures* 25 (7), 803–833.
- Ju, J. W., 1990. Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics. *Journal of Engineering Mechanics* 116 (12), 2764–2770.
- Junior, F. S., Venturini, W. S., 2007. Damage modelling of reinforced concrete beams. *Advances in Engineering Software* 38, 538–546.

- Kachanov, L. M., 1958. Time rupture process under creep conditions (in russian). *Izv. A Rad. Nauk SSSR otd Tekh* 8, 26–31, citado por Carol et al. (1994).
- Kachanov, L. M., 1971. *Foundations Of The Theory Of Plasticity*. North-Holland Publishing CO., Amesterdã, Holanda.
- Krajcinovic, D., Lubarda, V. A., 1993. Damage tensors and the crack density distribution. *International Journal of Solids and Structures* 30 (20), 2859–2877.
- Krenk, S., 1995. An orthogonal residual procedure for nonlinear finite element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 38, 823–839.
- Krenk, S., Hededal, O., 1995. A dual orthogonality procedure for nonlinear finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 123, 95–107.
- Kuhl, E., Steinmann, P., Carol, I., 2001. A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part II. Dissipation and inelastic constitutive modeling. *International Journal of Solids and Structures* 38, 2933–2952.
- La Borderie, C., 1991. *Phenomenes unilateraux dans un materiau endommageable: Modelisation et application a l'analyse de structures en beton*. Tese de Doutorado, Universidade Paris 6 Ecole Normale Superieure de Cachan, Paris, França, citado por Matallah e La Borderie (2009).
- Ladevèze, P., 1983. *Sur une théorie de l'endommagement anisotrope*. Tech. Rep. 34, Laboratoire de Mécanique et Technologi - Ecole Normale Superieure, Cachan, França, citado por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989).
- Lee, J. S., Choi, I.-Y., Cho, H.-N., 2004. Modeling and detection of damage using smeared crack model. *Engineering Structures* 26, 267–278.
- Lee, U., Lesieutre, G. A., Fang, L., 1997. Anisotropic damage mechanics based on strain energy equivalence and equivalent elliptical microcracks. *International Journal of Solids Structures* 34, 4377–4397.
- Lemaitre, J., 1992. *A Course on Damage Mechanics*. Springer, Berlim.

- Lemaitre, J., Chaboche, J. L., 1990. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, citado por de Borst e Gutiérrez (1999).
- Lemaitre, J., Desmorat, R., 2005. *Engineering Damage Mechanics - Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer, Berlin.
- Lemaitre, J., Dufailly, J., 1987. Damage measurements. *Engineering Fracture Mechanics* 28 (5/6), 643–661.
- Leukart, M., Ramm, E., 2002. An alternative split within the microplane material model. In: H.A. Mang, F. R. e. J. E. (Ed.), *Fifth World Congress on Computational Mechanics*. Viena, Austria.
- Leukart, M., Ramm, E., 2006. Identification and interpretation of microplane material laws. *Journal of Engineering Mechanics* 132 (3), 295–305.
- Li, Y.-J., Zimmermann, T., 1998. Numerical evaluation of the rotating crack model. *Computers & Structures* 69, 487–497.
- Lubliner, J., 1990. *Plasticity Theory*. Dover Publications, Inc., Mineola, Nova York, EUA.
- Mal, A. K., Singh, S. J., 1991. *Deformation of Elastic Solids*. Prentice Hall, Englewood, Nova Jersey, EUA.
- Manzoli, O. L., Oliver, J., Diaz, G., Huespe, A. E., 2008. Análise tridimensional de elementos estruturais de concreto armado via elementos finitos com descontinuidades incorporadas. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais* 1 (1), 58–83.
- Mase, G. E., 1971. *Theory and Problems of Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, Nova York, EUA.
- Mata, P., Oller, S., Barbat, A. H., 2007. Static analysis of beam structures under nonlinear geometric and constitutive behavior. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 196, 4458–4478.
- Matallah, M., La Borderie, C., 2009. Inelasticity-damage-based model for numerical modeling of concrete cracking. *Engineering Fracture Mechanics* 76(8), 1087–1108.

- Mazars, J., 1984. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure. Tese de Doutorado, Université Paris, Paris, citado por Lemaitre (1992) e Lemaitre e Desmorat (2005).
- Mazars, J., Lemaitre, J., 1984. Application of continuous damage mechanics to strain and fracture behavior of concrete. In: Shah, S. P. (Ed.), Application Of Fracture Mechanics to Cementitious Composites. NATO Advanced Research Workshop, 4-7 Setembro. Northwestern University, pp. 375–378, citado por Carol et al. (1994).
- Mazars, J., Pijaudier-Cabot, G., 1989. Continuum damage theory – application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 115, 345–365.
- Menin, R. C., Trautwein, L. M., Bittencourt, T. N., 2009. Modelos de fissuração distribuída em vigas de concreto armado pelo método dos elementos finitos. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais* 2 (2), 166–200.
- Monnier, T., 1970. The moment-curvature relation of reinforced concrete. *HERON* 18 (2), 1–101.
- Mosalam, K. M., Paulino, G. H., 1997. Evolutionary characteristic length method for smeared cracking finite element models. *Finite Elements in Analysis and Design* 27, 99–108.
- Most, T., Bucher, C., 2007. Energy-based simulation of concrete cracking using an improved mixed-mode cohesive crack model within a meshless discretization. *International Journal For Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 31 (2), 285–305.
- Neto, E. A. S., Perić, D., Owen, D. R. J., 2006. *Computational Methods For Plasticity: Theory and Application*. Wiley.
- Ngo, D., Scordelis, A. C., 1967. Finite element analysis of reinforced concrete beams. *American Concrete Institute Journal* 67, 152–163.
- Nguyen, G. D., 2005. A thermodynamic approach to constitutive modelling of concrete using damage mechanics and plasticity theory. Tese de Doutorado, University of Oxford, Oxford, Reino Unido.

- Nilson, A. H., 1968. Nonlinear analysis of concrete by the finite element method. *Journal of American Concrete Institute* 65, 757–766.
- Ohlsson, U., Gylltoft, K., 1986. Fracture mechanics of concrete - finite element analysis of mixed mode fracture using a discrete crack approach. Tech. Rep. TVBM-3025, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Suécia, nordic Seminar held at Division of Building Materials.
- Oliver, J., 1996a. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in engineering* 39, 3575–3600.
- Oliver, J., 1996b. Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation. *International Journal for Numerical Methods in engineering* 39, 3601–3623.
- Ožbolt, J., Bažant, Z. P., 1992. Microplane model for cyclic triaxial behavior of concrete. *Journal of Engineering Mechanics* 118 (7), 1365–1386.
- Ožbolt, J., Li, Y., Kožar, I., 2001. Microplane model for concrete with relaxed kinematic constraint. *International Journal of Solids and Structures* 38, 2683–2711.
- Owen, D. R. J., Hinton, E., 1980. *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Second Edition. Pineridge Press Limited, Swansea, Reino Unido.
- Paliga, C. M., Filho, A. C., Real, M. V., 2007. Modelo de elementos finitos para análise numérica de estruturas de concreto armado reforçadas. *Revista IBRACON de Estruturas* 3 (2), 177–200.
- Pavan, R. C., Creus, G. J., Maghous, S., 2009. A simplified approach to continuous damage of composite materials and micromechanical analysis. *Composite Structures* 91, 84–94.
- Petersson, P.-E., 1981. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. Tech. Rep. TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Suécia.

- Petrangeli, M., Ožbolt, J., 1996. Smearred crack approaches - material modeling. *Journal of Engineering Mechanics* 122 (6), 545–554.
- Pi, Y.-L., Bradford, M., Tin-Loi, F., Gilbert, R., 2007. Geometric and material nonlinear analysis of elastically restrained arches. *Engineering Structures* 29, 283–295.
- Pijaudier-Cabot, G., Huerta, A., 1991. Finite element analysis of bifurcation in non local strain softening solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 90 (1-3), 905–919.
- Pitangueira, R. L. S., Agosto 1998. Mecânica de estruturas de concreto com inclusão de efeitos de tamanho e heterogeneidade. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- Pituba, J. J. C., 1998. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Pituba, J. J. C., 2003. Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Planas, J., Guinea, G. V., Elices, M., 1999. Size effect and inverse analysis in concrete fracture. *International Journal of Fracture* 95, 367–378.
- Pröchtel, P., Häußler-Combe, U., 2008. On the dissipative zone in anisotropic damage models for concrete. *International Journal of Solids and Structures* 45, 4384–4406.
- Proença, S. P. B., 1988. Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: Análise crítica e contribuições. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- Proença, S. P. B., Pituba, J. J. C., 2008. Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto. *Cadernos de engenharia de estruturas* 10 (47), 117–1146.

- Ramm, E., 1981. Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points, in *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. Springer, Berlin, Alemanha.
- Ramm, E., D'Addetta, G. A., Leukart, M., 2004. From microscopic to macroscopic modeling of geomaterials. In: *ECCOMAS - European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*. Universidade de Jyväskylä, Finlândia.
- Rashid, Y. R., 1968. Ultimate strenght analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design* 7, 334–344.
- Ricks, E., 1972. The application of newton method to the problem of elastic stability. *Journal of Applied Mechanics* 94, 1060–1065.
- Ricks, E., 1979. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures* 15, 529–551.
- Rizzi, E., 1995. Sulla localizzazione delle deformation in materiali e strutture. Tese de Doutorado, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano, Milão, Itália.
- Rizzi, E., Carol, I., Willam, K., 1995. Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage. *Journal of Engineering Mechanics* 121 (4), 541–554.
- Rocco, C., Guinea, G. V., Panas, J., Elices, M., 1999. Size effect and inverse analysis in concrete fracture. *Material and Structures* 32, 437–444.
- Romero, M. L., Miguel, P. F., Cano, J. J., 2002. A parallel procedure for nonlinear analysis of reinforced concrete three-dimensional frames. *Computers & Structures* 80, 1337–1350.
- Rots, J. G., 1988. Computational modeling of concrete fracture. Tese de Doutorado, Delft University of Technology, Delft, Holanda.
- Rots, J. G., Blaauwendraad, J., 1989. Crack models for concrete: Discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating? *HERON* 34 (1).

- Rots, J. G., de Borst, R., 1987. Analysis of mixed-mode fracture in concrete. *Journal of Engineering Mechanics* 113 (11), 1739–1758.
- Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M., Blaauwendra, J., 1985. Smearred crack approach and fracture localization in concrete. *HERON* 30 (1), 1–48.
- Saliba, S. S., Março 2007. Implementação computacional e análise crítica de elementos finitos de placas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Schlangen, E., 1993. Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete. Tese de Doutorado, Delft University, Holanda.
- Scotta, R., Vitaliani, R., Saetta, A., Onate, E., Hanganu, A., 2002. A scalar damage model with a shear retention factor for the analysis of reinforced concrete structures: theory and validation. *Computers & Structures* 79, 737–755.
- Shayanfar, M. A., Kheyroddin, A., Mirza, M. S., 1997. Element size effect in non-linear analysis of reinforced concrete members. *Computers & Structures* 62 (2), 339–352.
- Silva, P. P. R., Fevereiro 2002. Implementação de modelos de microplanos para análise não-linear de estruturas de concreto, uma abordagem orientada a objetos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Simo, J. C., Hughes, T. J. R., 1988. *Computational Inelasticity*, 1st Edition. Springer-Verlag New York, Inc., EUA.
- Simo, J. C., Hughes, T. J. R., 1998. *Computational Inelasticity*, 2nd Edition. Springer-Verlag New York, Inc., EUA.
- Simo, J. C., Ju, J. W., 1987. Strain- and stress-based continuum damage models – I. Formulation. *International Journal of Solids and Structures* 23 (7), 821–840.
- Simão, W. I. S., Agosto 2003. Modelos de armadura e aderência para análise não-linear de concreto armado. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Srikanth, M., Kumar, G. R., Giri, S., 2007. Moment curvature of reinforced concrete beams using various confinement models and experimental validation. *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)* 8 (3), 247–265.
- Suidan, M., Schnobrich, W. C., 1973. Finite element analysis of reinforced concrete. In: *Journal of the structural division, ASCE*. pp. 2109–2121.
- Swartz, S. E., Hu, K.-K., Jones, G. L., 1978. Compliance monitoring of crack growth in concrete. In: *Journal of the engineering mechanics division, ASCE*. pp. 789–800.
- Taylor, G. I., 1938. Plastic strains in metals. *Journal of the Institute of Metals* 62, 307–324. Citado por Bažant e Planas (1998).
- Timoshenko, S. P., Goodier, J. N., 1970. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, Tóquio, Japão.
- Van Mier, J. G. M., Man, H.-K., 2008. Some notes on microcracking, softening, localization, and size effects. *International Journal of Damage Mechanics* 18, 283–309.
- Voyiadjis, G. Z., Taqieddin, Z. N., Kattan, P. I., 2008. Anisotropic damage-plasticity model for concrete. *International Journal of Plasticity* 24, 1946–1965.
- Voyiadjis, G. Z., Taqieddin, Z. N., Kattan, P. I., 2009. Theoretical formulation of a coupled elastic-plastic anisotropic damage model for concrete using the strain energy equivalence concept. *International Journal of Damage Mechanics* 18, 603–638.
- Weihe, S., Kröplin, B., de Borst, R., 1998. Classification of smeared cracking models based on material and structural properties. *International Journal of Solid and Structures* 35 (12), 1289–1308.
- Winkler, B., Hofstetter, G., Lehar, H., 2004. Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 28, 797–819.
- Wolff, K. P., Agosto 2010. Implementação computacional de um modelo de fissuração para o concreto baseado no método dos elementos finitos estendido (xfem).

- Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Wu, J. Y., 2007a. On isotropic and anisotropic unilateral damage model for concrete. In: Proceedings of International Symposium on Innovation & Sustainability of Structures in Civil Engineering. Tongji University, China, pp. 360–371.
- Wu, J. Y., 2007b. Stress-based elastic anisotropic unilateral degradation model for concrete. In: Proceedings of Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures - New Trends in Fracture Mechanics of Concrete. Catania, Itália, pp. 385–392.
- Wu, J. Y., Li, J., 2006a. On a new framework for anisotropic damage model. In: Proceedings of III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering. Lisboa, Portugal.
- Wu, J. Y., Li, J., 2006b. Stress-based effective space anisotropic damage model for concrete. In: Proceedings of Enhancement and Promotion of Computational Methods in Engineering and Science X. Sanya, Hainan, China, pp. 1–8.
- Wu, J. Y., Li, J., Faria, R., 2006. An energy release rate-based plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures* 43, 583–612.
- Xiang, Z., Swoboda, G., Cen, Z., 2002. Identification of damage parameters for jointed rock. *Computers & Structures* 80, 1429–1440.
- Yang, Y. B., Kuo, S. R., 1994. *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. Prentice-Hall, Singapore.
- Yang, Y. B., McGuire, W., 1985. A work control method for geometrically nonlinear analysis. In: Swansea, U. C. (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Numerical Methods in Engineering: Theory and Application*. pp. 913–921.
- Yang, Y. B., Shieh, M. S., 1990. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA Journal* 28 (12), 2110–2116.

Zhou, W., Liu, Y., Zhao, J., 2003. Multi-potential based discontinuous bifurcation model for jointed rock masses and its application. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192, 3596–3584.

Apêndice A

Condições de Carregamento, Descarregamento e Recarregamento

As condições de carregamento, descarregamento ou recarregamento ditam, para cada ponto material, o decorrer da análise. Em um estado de carregamento contínuo, por exemplo, o material pode passar do regime elástico para o inelástico até atingir um estado avançado de dano levando a estrutura ao colapso. Entretanto, esta é uma análise simplista, que admite uma degradação uniforme de todo o domínio, fato este que dificilmente ocorre. Mas, se a análise for ponto a ponto do meio material, pode-se descrever comportamentos distintos para cada um destes pontos relacionados ao estado de tensão ou deformação, regime de comportamento e histórico da análise, com reflexo direto no comportamento global da estrutura.

As condições de Kuhn-Tucker são uma forma eficiente de captar o estado de carregamento, descarregamento ou recarregamento do material. Estas condições baseiam-se nas funções de carregamento do modelo constitutivo e nas variáveis históricas. As condições de Kuhn-Tucker podem ser representadas, em sua forma mais tradicional, por

$$f \leq 0; \quad \dot{\lambda} \geq 0 . \quad (\text{A.1a,b})$$

$$(\text{A.1a})$$

onde f é a função de carregamento e $\dot{\lambda}$ é o multiplicador inelástico. Tem-se também as condições de complementaridade e de consistência dadas por

$$f\dot{\lambda} = 0; \quad \dot{f}\dot{\lambda} = 0 \quad (\text{A.2a,b})$$

$$(\text{A.2a})$$

Os regimes de carregamento, descarregamento e recarregamento são obtidos diretamente a partir das funções prescritas por cada modelo. Para ilustrar as condições de carregamento, toma-se a função

$$f = \tilde{\varepsilon} - \kappa , \quad (\text{A.3})$$

onde f é a função de carregamento, $\tilde{\varepsilon}$ é uma medida de deformação e κ a variável histórica do modelo. Dado um ensaio de tração uniaxial, cuja medida de deformação seja a deformação principal positiva e a variável histórica atribuída ao maior valor já atingido por $\tilde{\varepsilon}$ ao longo da análise, tem-se

$$f = \tilde{\varepsilon} - \kappa , \quad (\text{A.4})$$

$$\dot{f} = \dot{f}_i - \dot{f}_{i-1} , \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{\kappa} = \dot{\kappa}_i - \dot{\kappa}_{i-1} . \quad (\text{A.6})$$

Neste caso, admite-se que a deformação de tração linear elástica máxima admitida é o valor inicial da variável histórica κ_0 . A figura A.1 ilustra o regime de carregamento no domínio elástico. Como a deformação ainda não atingiu valores superiores ao admitido para o domínio elástico, as condições de Kuhn-Tucker, complementaridade e consistência ficam

$$f_1 = \tilde{\varepsilon}_1 - \kappa_0 < 0, \quad (\text{A.7})$$

$$f_2 = \tilde{\varepsilon}_2 - \kappa_0 < 0, \quad (\text{A.8})$$

$$|f_1| > |f_2|, \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{f} > 0, \quad (\text{A.10})$$

$$\dot{\kappa} = 0. \quad (\text{A.11})$$

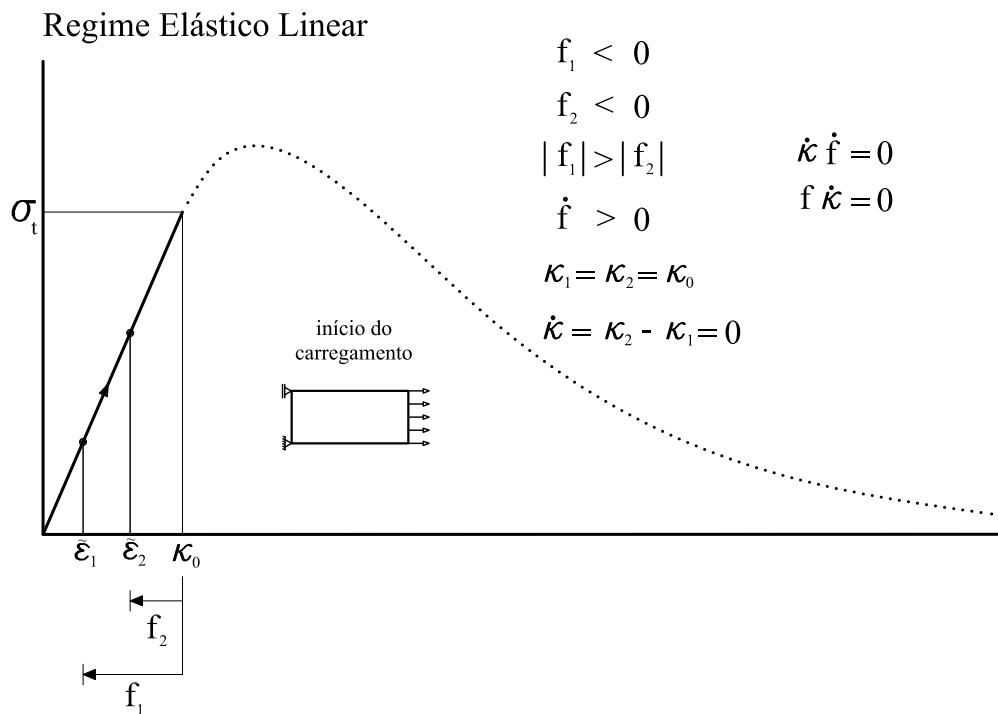


Figura A.1: Regime de carregamento elástico

Uma vez que o limite dado por κ_0 seja superado, o regime inelástico é atingido e os valores da variável histórica devem ser atualizados para o maior valor da deformação. A partir deste ponto da análise tem-se um estado de carregamento com dano, conforme ilustra a figura A.2.

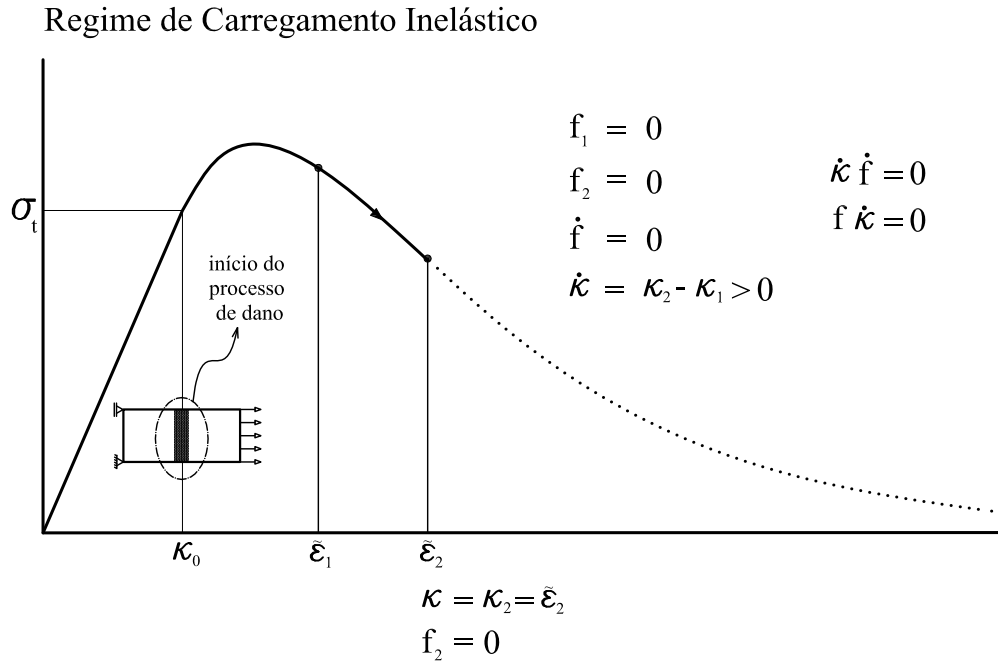


Figura A.2: Regime inelástico de carregamento com dano

Atualizando os valores das condições de carregamento, tem-se

$$f_1 = \tilde{\varepsilon}_1 - \kappa = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$f_2 = \tilde{\varepsilon}_2 - \kappa = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$|f_1| = |f_2| = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{f} = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{\kappa} > 0 \quad \text{pois} \quad \kappa_2 > \kappa_1. \quad (\text{A.16})$$

É válido ressaltar que os valores de $\tilde{\varepsilon}$, κ , f do estado anterior são fundamentais para se determinar o estado corrente.

Por razões inerentes ao modelo constitutivo e/ou ao problema analisado, o material pode entrar em regime de descarregamento, como ilustra a figura A.3.

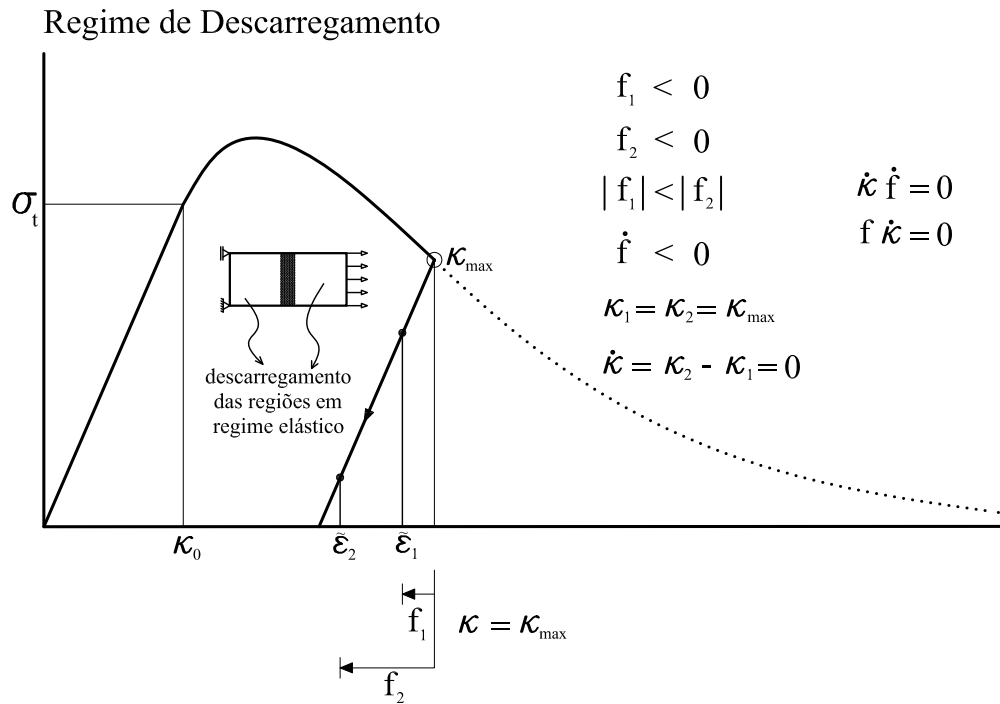


Figura A.3: Regime de Descarregamento

O regime de descarregamento pode ser um comportamento induzido, por exemplo, por uma concentração de dano em uma região da estrutura, que perde capacidade de carga, fazendo com que as demais áreas se descarreguem. As condições de carregamento são atualizadas para

$$f_1 = \tilde{\epsilon}_1 - \kappa < 0, \quad (\text{A.17})$$

$$f_2 = \tilde{\epsilon}_2 - \kappa < 0, \quad (\text{A.18})$$

$$|f_1| < |f_2| = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\dot{f} < 0, \quad (\text{A.20})$$

$$\dot{\kappa} = 0 \quad \text{pois} \quad \kappa_2 = \kappa_1. \quad (\text{A.21})$$

Nota-se que o descarregamento pode ocorrer no regime linear elástico e as condições de carregamento, neste caso, são usadas sem restrições com a diferença que $\kappa = \kappa_0$.

Por fim, tem-se a possibilidade de recarregamento. A condição é mais comum em problemas de cargas cíclicas, entretanto o recarregamento pode ocorrer pela simples distribuição de cargas da estrutura, pelas condições de contorno, por definições do

modelo constitutivo etc. Assim como no descarregamento, o recarregamento pode ocorrer no regime elástico, sendo neste caso $\kappa = \kappa_0$. As condições de Kuhn-Tucker ficam, portanto

$$f_1 = \tilde{\varepsilon}_1 - \kappa < 0, \quad (\text{A.22})$$

$$f_2 = \tilde{\varepsilon}_2 - \kappa < 0, \quad (\text{A.23})$$

$$|f_1| > |f_2| = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$\dot{f} > 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\dot{\kappa} = 0 \quad \text{pois} \quad \kappa_2 = \kappa_1. \quad (\text{A.26})$$

A figura A.4 mostra que a condição de recarregamento é semelhante ao carregamento elástico, embora, para um estado de deformação mais avançado.

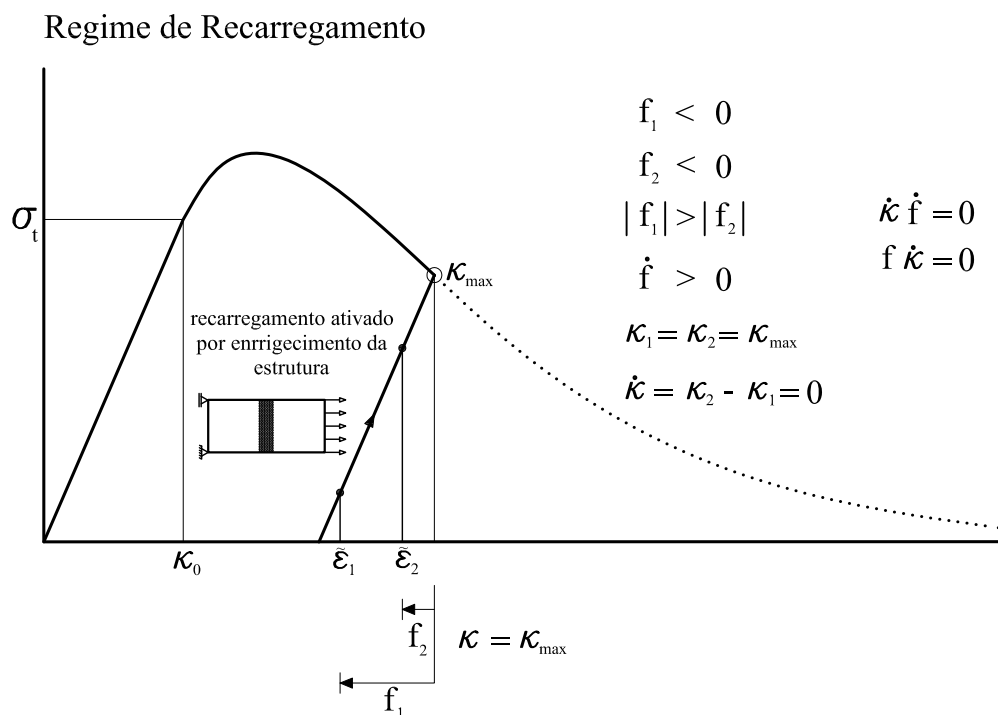


Figura A.4: Regime de Recarregamento

Nas figuras A.1, A.2, A.3 e A.4 observa-se que as condições de complementaridade e consistência sempre devem ser iguais a zero, comprovando que o regime calculado pelas condições de carregamento são válidas. As condições de carregamento, descarregamento e recarregamento são resumidas por:

Carregamento Elástico

$$f < 0 ; \quad \dot{f} > 0 ; \quad \kappa = \kappa_0 ; \quad \dot{\kappa} = 0 . \quad (\text{A.27})$$

Carregamento Inelástico

$$f = 0 ; \quad \dot{f} = 0 ; \quad \kappa > \kappa_0 ; \quad \dot{\kappa} > 0 . \quad (\text{A.28})$$

Descarregamento

$$f < 0 ; \quad \dot{f} < 0 ; \quad \kappa > \kappa_0 ; \quad \dot{\kappa} = 0 . \quad (\text{A.29})$$

Recarregamento

$$f < 0 ; \quad \dot{f} > 0 ; \quad \kappa > \kappa_0 ; \quad \dot{\kappa} = 0 . \quad (\text{A.30})$$

Apêndice B

Conceitos da Mecânica do Dano Contínuo, Relações Secantes e Variáveis de Dano

Na formulação de um modelo de dano deve-se definir as variáveis de dano e sua dependência com os tensores secantes de rigidez e flexibilidade. Para modelos isotrópicos tradicionais tem-se uma relação trivial dada por

$$E_{ijkl} = (1 - D)E_{ijkl}^0 \quad (\text{B.1})$$

sendo D a variável de dano. Para modelos com degradação anisotrópica baseada em tensores de dano de segunda ordem, por exemplo, esta relação é mais complicada e deve ser definida segundo os conceitos da mecânica do dano contínuo (“*MDC*”). Conceitos como tensão e deformação efetivas, bem como equivalência de deformações, tensões e energia são usados para estabelecer os sentidos físicos dos modelos de degradação do material que são as bases das relações secantes com as variáveis de dano Carol et al. (2001b).

B.1 Tensão e Deformação Efetivas e Equivalência de Energia

Segundo Lemaitre e Desmorat (2005) a degradação deve ser entendida como a média do efeito das “microfissuras” e “microvazios” que surgem no material quando sujeito a solicitações. Desta forma, as tensões efetivas σ_{ij}^{ef} e as deformações efetivas ε_{ij}^{ef} são definidas como sendo os valores de tensão e deformação calculados tomando-se o material íntegro, isto é, considera-se uma redução da área útil de material, descontando-se as áreas degradadas, para que os efetivos sejam computados. Com os valores efetivos de tensão e deformação pode-se, de forma simples, relacionar estas grandezas com o material intacto por

$$\sigma_{ij}^{ef} = E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^{ef} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ij}^{ef} = C_{ijkl}^0 \sigma_{kl}^{ef}, \quad (\text{B.2a,b})$$

sendo

$$\begin{aligned} E_{ijkl}^0 &= \Lambda^0 \delta_{ij} \delta_{kl} + G^0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \\ C_{ijkl}^0 &= \frac{-\nu^0}{E^0} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1 + \nu^0}{2E^0} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \end{aligned} \quad (\text{B.3a,b})$$

$$\text{com } \Lambda^0 = \frac{\nu^0 E^0}{(1 + \nu^0)(1 - 2\nu^0)} \text{ e } G^0 = \frac{E^0}{2(1 + \nu^0)}.$$

As variáveis de dano relacionam as grandezas efetivas com suas respectivas parcelas nominais. Pode-se portanto, relacionar as parcelas nominais e efetivas usando o tensor dano de quarta ordem, o denominado “efeito de dano”, dado por $\bar{\alpha}_{ijkl}$. Logo, tem-se

$$\sigma_{ij} = \bar{\alpha}_{ijkl} \sigma_{ij}^{ef} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ij}^{ef} = \bar{\alpha}_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (\text{B.4a,b})$$

na forma inversa,

$$\sigma_{ij}^{ef} = \alpha_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ij} = \alpha_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{ef}, \quad (\text{B.5a,b})$$

sendo $\alpha_{ijpq} \bar{\alpha}_{pqkl} = \bar{\alpha}_{ijpq} \alpha_{pqkl} = I_{ijkl}^{sim}$. Combinando as equações B.2 e B.3 tem-se as relações secantes dadas por

$$E_{ijkl} = \bar{\alpha}_{ijpq} E_{pqrs}^0 \bar{\alpha}_{rskl} \quad \text{e} \quad C_{ijkl} = \alpha_{pqij} C_{pqrs}^0 \alpha_{rskl}, \quad (\text{B.6a,b})$$

que resulta em relações simétricas devido à natureza simétrica do tensor efeito de dano.

B.1.1 Dano Isotrópico

A forma isotrópica, vista na equação B.1, pode ser escrita no contexto da mecânica do dano contínuo. Para tanto a forma típica de dano “(1 - D)” é escrita como

$$\bar{\alpha}_{ijpq} = \bar{\phi} I_{ijkl}^{sim} \quad \text{e} \quad \alpha_{ijpq} = \phi I_{ijkl}^{sim}, \quad (\text{B.7})$$

em notação matricial, tem-se

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}} = \bar{\phi} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\alpha} = \phi \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

As relações entre parcelas nominais e efetivas podem ser reescritas como

$$\sigma_{ij} = \bar{\phi} \sigma_{ij}^{ef}, \quad \sigma_{ij}^{ef} = \phi \sigma_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{ef} = \bar{\phi} \varepsilon_{ij} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ij} = \phi \varepsilon_{ij}^{ef}. \quad (\text{B.9a,b,c,d})$$

As formas escalares recaem na forma tradicional de dano isotrópico, logo

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\phi} = \sqrt{1 - D}. \quad (\text{B.10})$$

B.1.2 Tensores de Dano de Segunda Ordem

Uma forma de tratar a degradação ortotrópica ou anisotrópica do meio é pela representação desta por variáveis de dano escritas na forma de tensores de segunda ordem. Os tensores de dano de segunda ordem, denotados por D_{ij} , variam de zero a δ_{ij} . Outra forma é representar o dano em termos do tensor de integridade, que é dado por $\bar{\phi}_{ij} = \delta_{ij} - D_{ij}$, com a variação exatamente oposta ao tensor de dano, variando de δ_{ij} até zero. A figura B.1 mostra a dualidade entre o dano e a integridade para o caso de tração uniaxial.

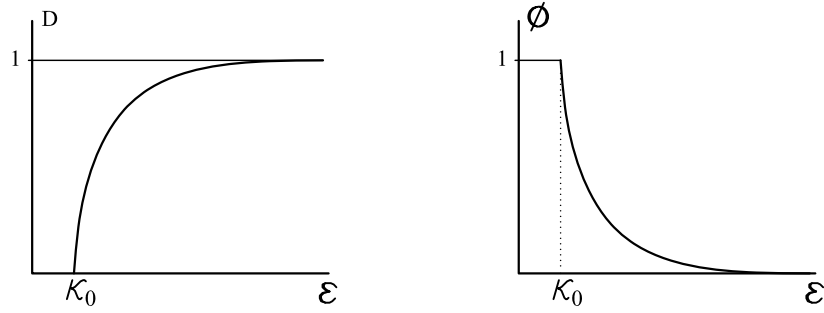


Figura B.1: Dano \times Integridade.

Os tensores de dano e integridade compartilham os mesmos sistemas principais, sendo $D_{(i)} = 1 - \bar{\phi}_{(i)}$. Uma vez estabelecido o tensor de integridade $\bar{\phi}_{ij}$, pode-se introduzir sua raiz quadrada \bar{w}_{ij} e suas formas inversas ϕ_{ij} e w_{ij} . Portanto,

$$\bar{\phi}_{ij} = \bar{w}_{ik}\bar{w}_{kj} \quad \text{e} \quad \bar{\phi}_{(i)} = \bar{w}_{(i)}^2. \quad (\text{B.11})$$

$$\phi_{ij} = w_{ik}w_{kj} \quad \text{e} \quad \phi_{(i)} = w_{(i)}^2. \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{\phi}_{ik}\phi_{kj} = \phi_{ik}\bar{\phi}_{kj} = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \bar{\phi}_{(i)} = \frac{1}{\phi_{(i)}}. \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{w}_{ik}w_{kj} = w_{ik}\bar{w}_{kj} = \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \bar{w}_{(i)} = \frac{1}{w_{(i)}}. \quad (\text{B.14})$$

No caso do dano isotrópico estes tensores reduzem-se à sua forma volumétrica.

B.1.3 Formulação Anisotrópica Para as Relações Secantes com Tensores de Dano

Após a introdução das variáveis de dano em forma tensorial, e estabelecer as relações nominais-efetivas, pode-se identificar o tensor efeito de dano e as relações secantes. No caso isotrópico unidimensional, a integridade representa a redução da área efetiva, entretanto, tratando-se de casos mais gerais não se pode garantir a simetria do tensores efetivos, portanto, o cálculo deve considerar um processo de simetrização como o proposto por Cordebois e Sidoroff (1982):

$$\sigma_{ij} = \bar{w}_{ik}\sigma_{kl}^{ef}\bar{w}_{lj}, \quad (\text{B.15})$$

Apêndice C

Solução das Equações Não Lineares do Método dos Elementos Finitos

A análise não linear pelo método dos elementos finitos é uma ferramenta essencial na modelagem computacional. Procedimentos numéricos promovem uma forma rápida, prática e precisa para a modelagem estrutural desde que utilizada corretamente. Para o desenvolvimento de software ou para modelagem é indispensável o entendimento dos principais conceitos da análise não linear. O não entendimento das questões e da metodologia envolvida no problema pode acarretar em dificuldades no uso, ou até a escolha incorreta de soluções, resultando em modelos não condizentes com a realidade do problema.

O comportamento não linear de estruturas costuma ser caracterizado de duas formas: comportamento fisicamente não linear e comportamento geometricamente não linear.

Uma análise fisicamente não linear se dá quando o material passa a responder não linearmente. A forma mais simples deste comportamento é aquela em que as tensões são proporcionalmente não lineares às deformações, mesmo o material estando no regime elástico. Um problema é geometricamente não linear quando a estrutura apresenta um estado deformado substancialmente diferente do estado indeformado e

esta configuração passa a ser significante no seu comportamento global, resultando em uma resposta não linear.

Os resultados oriundos de uma análise não linear são apresentados tradicionalmente sob a forma de trajetórias de equilíbrio. Um exemplo ilustrativo de uma trajetória de equilíbrio é mostrado na figura C.1.

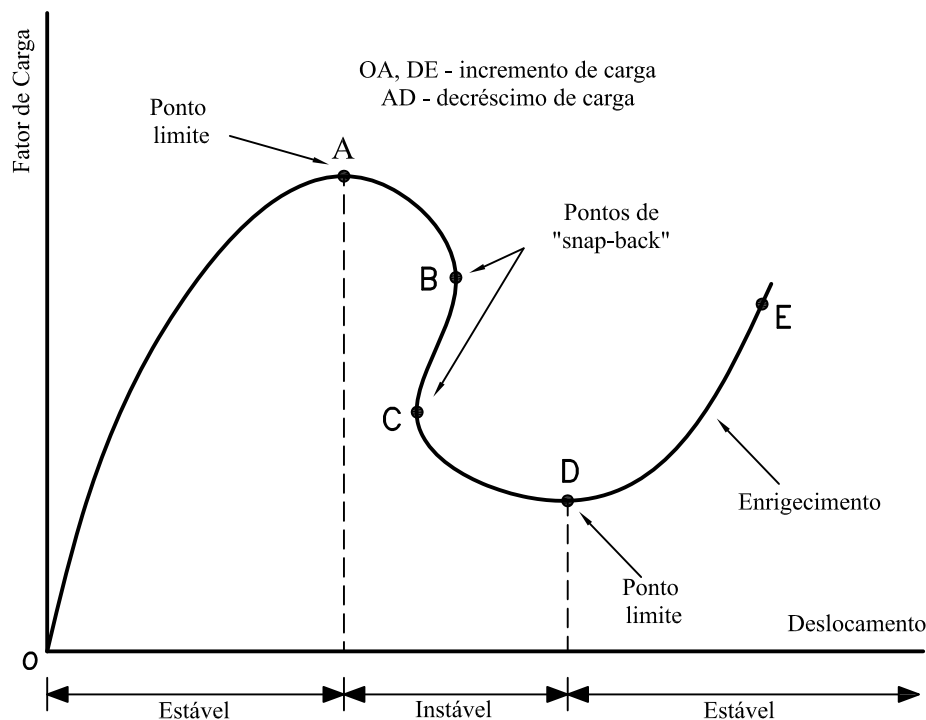


Figura C.1: Trajetória de equilíbrio típica em problemas não lineares

Observa-se na figura C.1 a ocorrência de pontos limites de carga (pontos A e D) e pontos limites de deslocamento (pontos B e C), sendo estes conhecidos como pontos de “snap-back”. Verifica-se também que a trajetória passa por trechos de incremento de carga (OA e DE) e trechos de decréscimo de carga (AD). Para a obtenção de trajetórias de equilíbrio para determinados graus de liberdade da discretização, como a acima descrita, executa-se um processo incremental-iterativo nas variáveis do problema.

C.1 Métodos Incrementais-Iterativos

Dado um campo de deslocamentos $\{U\}$ e um fator de carga proporcional λ , equivalentes a um ponto da trajetória de equilíbrio (ponto A na figura C.2), deseja-se encontrar outro ponto de equilíbrio (ponto B na figura C.2) de modo que a variação de determinadas grandezas do problema no passo incremental (do ponto A ao ponto B), seja controlada.

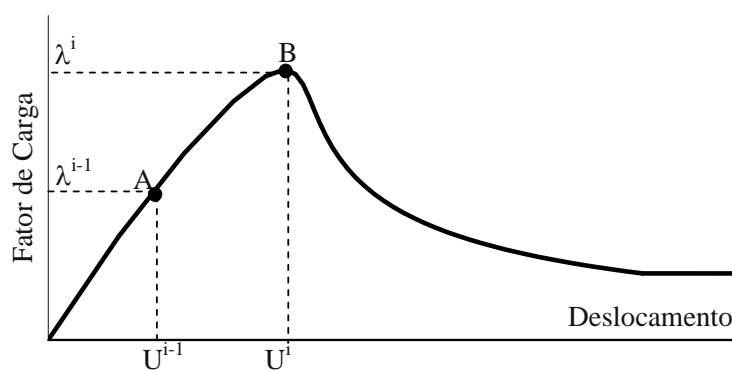


Figura C.2: Obtenção de pontos de equilíbrio.

Diferentes métodos incrementais-iterativos têm sido empregados para análise não linear de estruturas, destacando-se os métodos de controle de carga, de controle direto de deslocamento, de controle de comprimento de arco e de controle de deslocamento generalizado (Fuina (2004) e Pitangueira (1998)).

De acordo com Yang e Kuo (1994), estes métodos podem ser caracterizados por três principais fases. A primeira fase, ou preditor, envolve a solução do incremento de deslocamentos a partir de equações incrementais de equilíbrio para o respectivo modelo. A segunda fase, ou corretor, se ocupa em restabelecer as forças incrementais dos elementos, a partir dos incrementos de deslocamentos obtidos na primeira fase. No fim desta fase, as forças resultantes em cada elemento são obtidas pelo acúmulo de todas as forças incrementais antes e durante o passo corrente. Por fim, tem-se a terceira fase, na qual é verificada a convergência da iteração, isto é, se o equilíbrio do modelo foi obtido na nova configuração deformada.

Existem duas formulações para os métodos de obtenção de trajetórias de equilíbrio: a formulação secante e a formulação tangente. A formulação secante (figura C.3(a)) parte das equações de equilíbrio totais do sistema discreto, relacionando forças externas com deslocamentos totais. Já a formulação tangente (figura C.3(b)) parte das equações de equilíbrio incrementais, relacionando incrementos das grandezas envolvidas no problema.

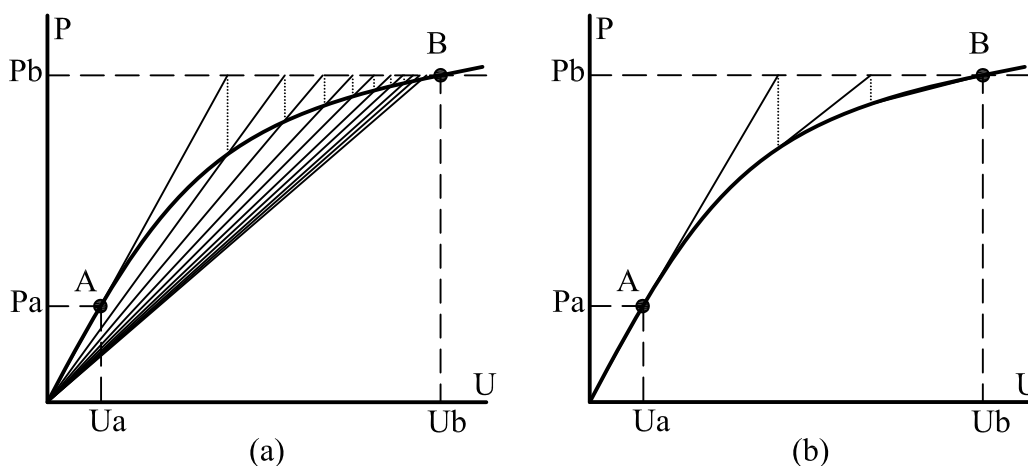


Figura C.3: Formulações dos métodos incrementais-iterativos: (a) secante; (b) tangente.

A formulação tangente apresenta uma forma mais rápida de se obter a convergência. O uso do ponto obtido na iteração anterior, como base para a iteração seguinte, possibilita uma melhor descrição da trajetória, o que favorece a obtenção de curvas mais complicadas. Atualmente, a formulação secante está em desuso por apresentar desvantagens em relação à formulação tangente.

Embora cada um dos diversos procedimentos existentes possuam suas particularidades, em uma análise não linear confronta-se com o problema de resolver o sistema de $N+1$ incógnitas (N deslocamentos incrementais e um incremento no fator de carga) e $N+1$ equações (N equações de equilíbrio e uma equação de restrição). Portanto, um processo incremental-iterativo é adotado para solucionar o problema. Para este fim, a equação de equilíbrio incremental correspondente à iteração j do passo i pode ser escrita na forma abaixo (figura C.4):

$$[K]_{j-1}^i \cdot \{\delta U\}_j^i = \delta \lambda_j^i \cdot \{P\} + \{Q\}_{j-1}^i, \quad (\text{C.1})$$

onde

$[K]_{j-1}^i$ é a matriz de rigidez tangente na iteração $j-1$ do passo i , função do campo de deslocamentos $\{U\}_{j-1}^i$;

$\{\delta U\}_j^i$ é o vetor deslocamentos incrementais da iteração j do passo i ;

$\delta\lambda_j^i$ é o incremento do fator de cargas na iteração j do passo i ;

$\{P\}$ é o vetor de cargas de referência;

$\{Q\}_{j-1}^i$ é o vetor de forças residuais da iteração $j-1$ do passo i .

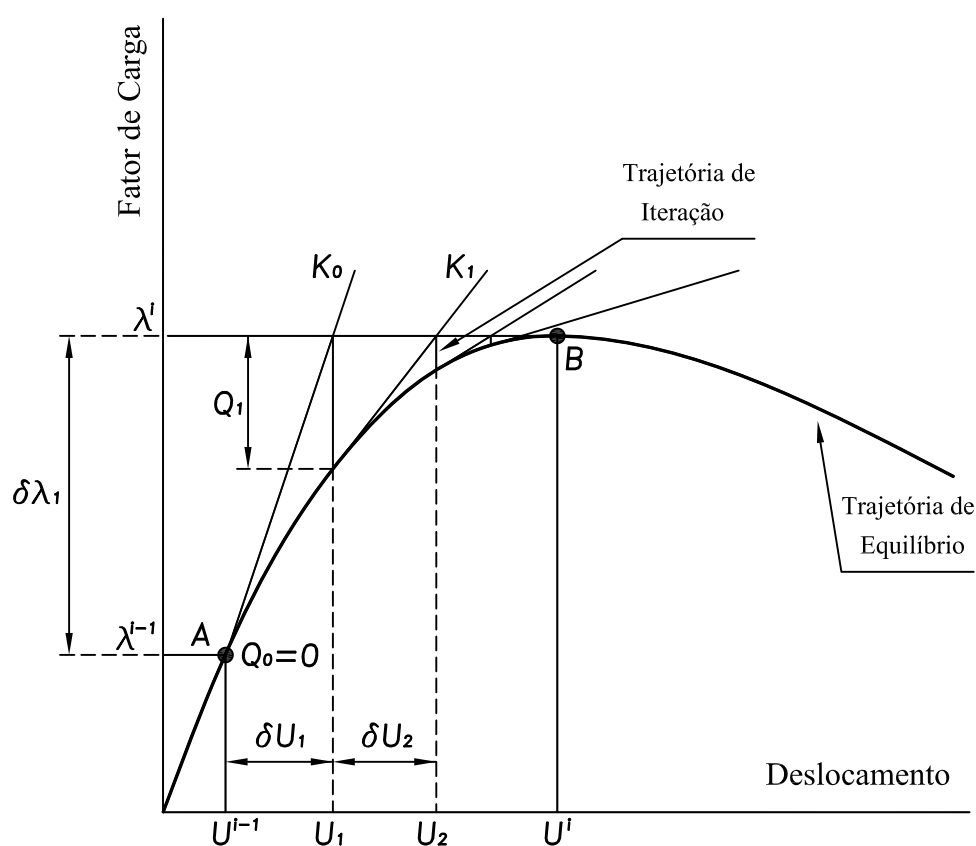


Figura C.4: Processo incremental-iterativo com controle de carga

Inicialmente, estabelece-se, em função do parâmetro de controle, um valor para o incremento do fator de carga $\delta\lambda_j$, podendo-se então obter $\{\delta U\}_j$, o qual pode ser decomposto nas parcelas associadas à carga de referência, $\{\delta U\}_j^P$, e à carga residual $\{\delta U\}_j^Q$, na forma:

$$\{\delta U\}_j = \delta\lambda_j \cdot \{\delta U\}_j^P + \{\delta U\}_j^Q, \quad (C.2)$$

com

$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j^P = \{P\} \quad (\text{C.3})$$

e

$$[K]_{j-1} \cdot \{\delta U\}_j^Q = \{Q\}_{j-1} . \quad (\text{C.4})$$

Ao final de cada iteração, a convergência é verificada através da magnitude do vetor de forças residuais $\{Q\}_j$ e/ou da magnitude do vetor de deslocamentos iterativos $\{\delta U\}_j$ e o processo iterativo continua até que determinado critério de convergência seja atendido.

Para a verificação da convergência pelo critério de forças residuais, usa-se a equação dada por

$$\frac{\|\{Q\}\|}{\|\lambda\{P\}\|} < \textit{tolerância}. \quad (\text{C.5})$$

Se a convergência for verificada pelo critério de deslocamentos, usa-se a condição

$$\frac{\|\{\delta U\}\|}{\|\{U\}\|} < \textit{tolerância}. \quad (\text{C.6})$$

Se uma nova iteração for necessária, após calculados $\{\delta U\}_j^P$ e $\{\delta U\}_j^Q$ utilizando-se as equações C.3 e C.4, o valor de $\delta\lambda_j$ deve ser obtido com uma equação de restrição que envolve combinações das grandezas do problema.

A atualização das variáveis é feita da seguinte forma:

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} + \delta\lambda_j \quad (\text{C.7})$$

$$\{U\}_j = \{U\}_{j-1} + \{\delta U\}_j \quad (\text{C.8})$$

O vetor de cargas residuais da iteração j é dado por:

$$\{Q\}_j = \lambda_j \cdot \{P\} - \{F\}_j \quad (\text{C.9})$$

onde $\{F\}_j$ é o vetor de forças equivalentes às tensões internas ao final da iteração j .

Observa-se que, na primeira iteração de cada passo, o vetor de cargas residuais $(\{Q\}_{j-1})$ é nulo.

A formulação acima descrita é bastante genérica e se aplica a vários métodos de controle, bastando que se redefina a equação de restrição.

O diagrama de atividades da figura C.5 mostra os principais passos do algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990). Pode-se observar que o diagrama de atividades desta figura possui um procedimento em destaque. Este refere-se à obtenção do parâmetro de carga $\delta\lambda_j^i$, que depende do método de controle adotado.

A figura C.6 mostra os valores de $\delta\lambda_j^i$ para os métodos de controle mais consagrados: controle de cargas; controle direto de deslocamento, desenvolvido por Batoz e Dhat (1979); controle por trabalho, desenvolvido por Yang e McGuire (1985); o método de controle do resíduo ortogonal, do estudo de Krenk (1995) e Krenk e Hededal (1995); controle de deslocamento generalizado, proposto por Yang e Shieh (1990); e três versões do controle de comprimento de arco: a que mantém a trajetória de iteração perpendicular à tangente do início do passo (Ricks, 1972, 1979); a que mantém a trajetória de iteração ortogonal à tangente da iteração anterior (Ramm, 1981) e a que usa uma trajetória de iteração cilíndrica (Crisfield, 1981, 1983).

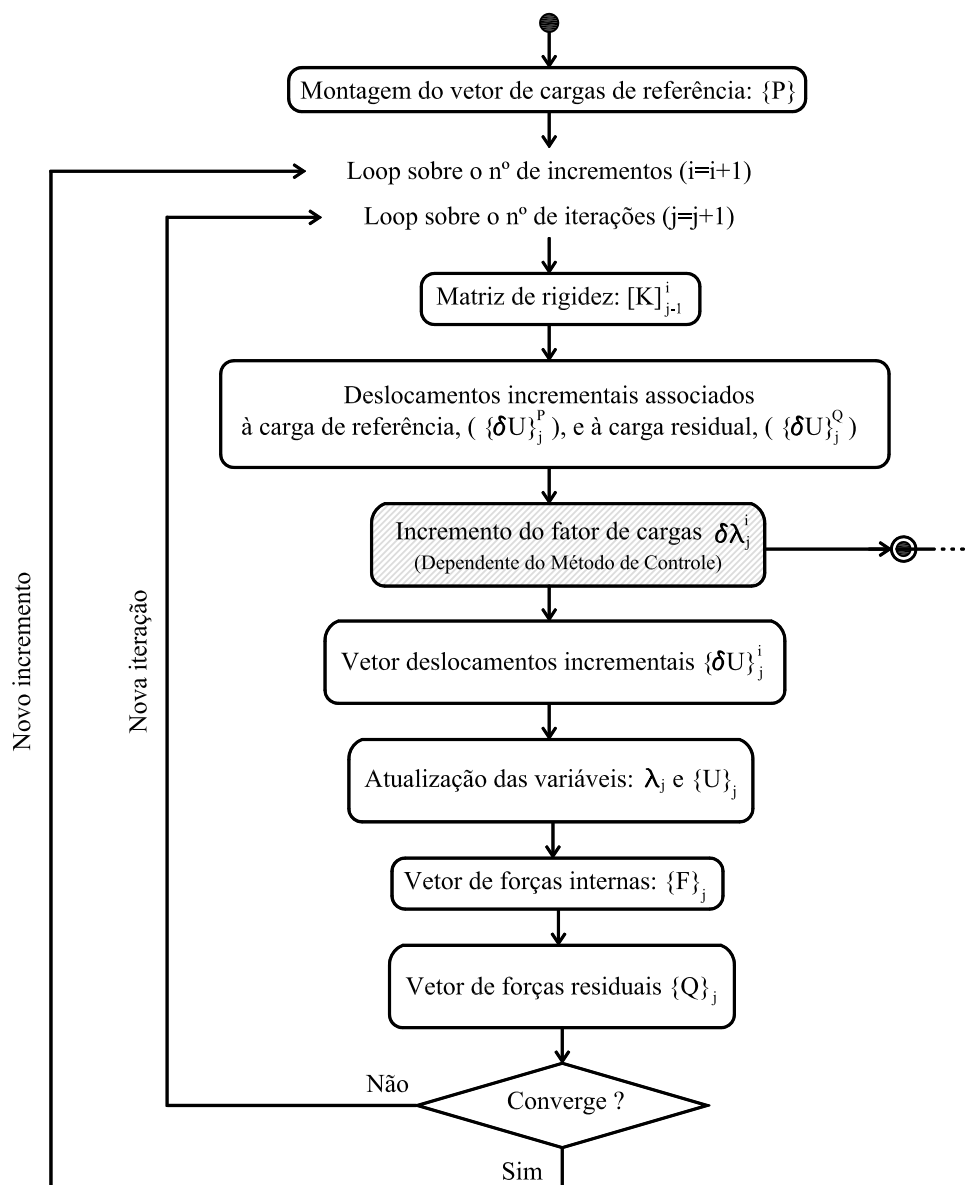


Figura C.5: Diagrama de atividades do algoritmo genérico para métodos de controle

⋮
↓

MÉTODOS DE CONTROLE	$\delta\lambda$ para $j=1$	$\delta\lambda$ para $j>1$
Controle de Carga	$\delta\lambda_1 = \text{constante}$	$\delta\lambda_j = 0$
Controle Direto de Deslocamento	$\delta\lambda_1 = \frac{\delta U_1^k}{\delta U_1^{pk}}$	$\delta\lambda_j = -\frac{\delta U_j^{Qk}}{\delta U_j^{Pk}}$
Controle de Comprimento de Arco	$\delta\lambda_1 = \pm \frac{\Delta S}{\sqrt{\{\delta U\}_1^{pT} \cdot \{\delta U\}_1^p}}$	Trajectoria de iteração ortogonal à tangente inicial: $\delta\lambda_j = -\frac{\{\Delta U\}_1^T \cdot \{\delta U\}_j^Q}{\{\Delta U\}_1^T \cdot \{\delta U\}_j^P}$
		Trajectoria de iteração ortogonal à tangente da iteração anterior: $\delta\lambda_j = -\frac{\{\Delta U\}_{j-1}^T \cdot \{\delta U\}_j^Q}{\{\Delta U\}_{j-1}^T \cdot \{\delta U\}_j^P}$
		Trajectoria cilíndrica: equação do 2º grau que permite obter $\delta\lambda_j$
Controle de Deslocamento Generalizado	$\delta\lambda_1 = \delta\lambda_1^i \left(\frac{\{\delta U\}_1^{p,iT} \cdot \{\delta U\}_1^{p,i}}{\{\delta U\}_1^{p,i-1T} \cdot \{\delta U\}_1^{p,i}} \right)^{0.5}$	$\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_1^{p,i-1T} \cdot \{\delta U\}_j^{Q,i}}{\{\delta U\}_1^{p,i-1T} \cdot \{\delta U\}_j^{P,i}}$
Controle por Trabalho	$\delta\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{\Delta W}{\{\delta U\}_1^{pT} \{P\}}}$	$\delta\lambda_j = -\frac{\{\delta U\}_j^{Q,T} \{P\}}{\{\delta U\}_j^{P,T} \{P\}}$
Método do Resíduo Ortogonal	$\delta\lambda_1 = \pm \text{constante}$	$\delta\lambda_j = \delta\lambda_1 \left(-\frac{\{\tilde{Q}\}_j^T \cdot \{\Delta U\}_j}{\delta\lambda_1 \{P\}^T \cdot \{\Delta U\}_j} \right)$

Figura C.6: Detalhamento do diagrama de atividades da figura C.5

Apêndice D

Modelos de Análise Aplicados aos Modelos Constitutivos

No capítulo 4 foram apresentados diversos modelos constitutivos formulados segundo a proposta de unificação teórica e computacional proposta. Não foi abordado diretamente o emprego destes modelos aos possíveis modelos de análise, portanto, serão apresentadas as hipóteses para os tensores de rigidez e flexibilidade, aplicadas aos modelos constitutivos implementados, destacando-se o modelo de fissuração distribuída.

D.1 Composição Tensorial Geral

O modelo sólido tridimensional é o caso mais geral para os modelos de análise, logo, será apresentado em primeiro lugar para, em seguida, as reduções respectivas aos demais modelos, sem vinculá-los a modelos constitutivos.

Os tensores de rigidez e flexibilidade serão apresentados seguindo as relações totais dadas por

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl} \quad , \quad (\text{D.1a,b})$$

sendo os tensores de tensão e deformação escritos como

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.2a,b})$$

O tensor de quarta ordem representando o tensor de rigidez é dado por

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1112} & E_{1113} & E_{1211} & E_{1212} & E_{1213} & E_{1311} & E_{1312} & E_{1313} \\ E_{1121} & E_{1122} & E_{1123} & E_{1221} & E_{1222} & E_{1223} & E_{1321} & E_{1322} & E_{1323} \\ E_{1131} & E_{1132} & E_{1133} & E_{1231} & E_{1232} & E_{1233} & E_{1331} & E_{1332} & E_{1333} \\ \hline E_{2111} & E_{2112} & E_{2113} & E_{2211} & E_{2212} & E_{2213} & E_{2311} & E_{2312} & E_{2313} \\ E_{2121} & E_{2122} & E_{2123} & E_{2221} & E_{2222} & E_{2223} & E_{2321} & E_{2322} & E_{2323} \\ E_{2131} & E_{2132} & E_{2133} & E_{2231} & E_{2232} & E_{2233} & E_{2331} & E_{2332} & E_{2333} \\ \hline E_{3111} & E_{3112} & E_{3113} & E_{3211} & E_{3212} & E_{3213} & E_{3311} & E_{3312} & E_{3313} \\ E_{3121} & E_{3122} & E_{3123} & E_{3221} & E_{3222} & E_{3223} & E_{3321} & E_{3322} & E_{3323} \\ E_{3131} & E_{3132} & E_{3133} & E_{3231} & E_{3232} & E_{3233} & E_{3331} & E_{3332} & E_{3333} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

Todas as componentes apresentadas são valores obtidos durante o processo incremental iterativo em procedimento de solução para análise não linear. Isto é, na composição do operador tangente, que usa as hipóteses particulares de cada modelo constitutivo, tem-se a forma tensorial dada por D.3. É válido ressaltar que ao se definir o modelo de análise, seja o caso unidimensional, bidimensional ou tridimensional, muitas destas componentes são nulas.

O tensor de rigidez secante, assumindo a ortotropia do meio, para o modelo de análise sólido, sem necessariamente ser aplicado a um modelo constitutivo específico, é dado por

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{1111} & 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 & 0 & 0 & E_{1313} \\ 0 & E_{1122} & 0 & E_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{1133} & 0 & 0 & 0 & E_{1331} & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{2112} & 0 & E_{2211} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{2121} & 0 & 0 & 0 & E_{2222} & 0 & 0 & 0 & E_{2323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2233} & 0 & E_{2332} & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{3113} & 0 & 0 & 0 & E_{3311} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{3223} & 0 & E_{3322} & 0 \\ E_{3131} & 0 & 0 & 0 & E_{3232} & 0 & 0 & 0 & E_{3333} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

Sendo que, para o regime elástico linear isotrópico, as componentes, na forma indicial, são dadas por

$$E_{ijkl} = \Lambda^0 \delta_{ij} \delta_{kl} + G^0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) , \quad (\text{D.5})$$

sendo $\Lambda^0 = \frac{\nu^0 E^0}{(1 + \nu^0)(1 - 2\nu^0)}$, $G^0 = \frac{E^0}{2(1 + \nu^0)}$, E^0 o módulo de elasticidade e ν^0 o coeficiente de Poisson.

Especializando para o caso plano axissimétrico e estado plano de deformação, tem-se a rigidez secante dada por

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} E_{1111} & 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{1122} & 0 & E_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{2112} & 0 & E_{2211} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{2121} & 0 & 0 & 0 & E_{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{3311} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{3322} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{3333} \end{array} \right] , \quad (\text{D.6})$$

cujas as componentes são dadas pela equação D.5.

Em estado plano de tensão tem-se a rigidez secante dada por

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} E_{1111} & 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{1122} & 0 & E_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{2112} & 0 & E_{2211} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{2121} & 0 & 0 & 0 & E_{2222} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] , \quad (\text{D.7})$$

entretanto as componentes são dadas, na forma indicial, para o caso elástico linear isotrópico, por

$$E_{ijkl} = \Gamma^0 \delta_{ij} \delta_{kl} + G^0 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) , \quad (\text{D.8})$$

sendo $\Gamma^0 = \frac{E^0 \nu^0}{(1 - \nu^0)}$.

Os modelos unidimensionais apresentam apenas uma componente axial de tensão e de deformação, sendo esta diretamente dependente do modelo de análise. Seja, por exemplo, um modelo para representar uma treliça, a deformação pode ser considerada uniforme em toda a seção transversal, já, por exemplo, para um elemento

de pórtico a deformação não pode ser considerada constante ao longo da seção e, portanto, deve ser calculada ponto a ponto, como resultante da combinação dos esforços axiais e de flexão. Este detalhamento foi abordado na seção 2.2 do capítulo 2. Por fim, o tensor é dado por

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} E_{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad (\text{D.9})$$

onde a única componente é dada pelo módulo de elasticidade do material em função do estado de degradação.

De forma análoga tem-se que o tensor de flexibilidade, para o caso sólido, é dado por

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} C_{1111} & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 & 0 & C_{1313} \\ 0 & C_{1122} & 0 & C_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & C_{1331} & 0 & 0 \\ \hline 0 & C_{2112} & 0 & C_{2211} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{2121} & 0 & 0 & 0 & C_{2222} & 0 & 0 & 0 & C_{2323} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2233} & 0 & C_{2332} & 0 \\ \hline 0 & 0 & C_{3113} & 0 & 0 & 0 & C_{3311} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3223} & 0 & C_{3322} & 0 \\ C_{3131} & 0 & 0 & 0 & C_{3232} & 0 & 0 & 0 & C_{3333} \end{array} \right], \quad (\text{D.10})$$

cujas as componentes, para o caso elástico linear isotrópico, são dadas por

$$C_{ijkl} = -\frac{\nu_0}{E_0} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1 + \nu_0}{2E_0} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (\text{D.11})$$

A definição da flexibilidade para os casos bidimensional e unidimensional é obtida reduzindo o tensor tridimensional para às componentes específicas de cada modelo de análise. Os tensores de rigidez e flexibilidade ortotrópicos escrito em termos de variáveis de dano podem ser vistos no apêndice B.

Considerações sobre as componentes de tensão e deformação devem ser destacadas. Assumindo o comportamento ortotrópico do meio, segundo a teoria da

elasticidade (Timoshenko e Goodier (1970), Mase (1971), Mal e Singh (1991)), tem-se

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau_{12}; \quad 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = \gamma_{12}; \quad (\text{D.12})$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \tau_{13}; \quad 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} = \gamma_{13}; \quad (\text{D.13})$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \tau_{23}; \quad 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = \gamma_{23}. \quad (\text{D.14})$$

Portanto, matricialmente, para o caso sólido as relações tensão e deformação é escrita como

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ E_{2211} & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ E_{3311} & E_{3322} & E_{3332} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{2323} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.15})$$

Os modelos de análise respeitam a forma matricial apresentada, podendo ser obtidos a partir da eliminação das linhas e colunas respectivas às grandezas não pertencentes ao domínio da análise.

D.2 Modelo de Fissuração Distribuída

O tensor de rigidez do modelo de fissuração, apresentado na seção 2.3 do capítulo 2, é caracterizado pela inversão do tensor de flexibilidade. Desta forma, as hipóteses de degradação impostas às componentes da flexibilidade são refletidas no tensor de rigidez.

Serão apresentadas as hipótese do tensor de rigidez para os modelos de análise sólido, axissimétrico, estado plano de tensão, estado plano de deformação. Serão apresentadas também as considerações necessárias aos modelos de flexão de placas.

Como o formato tensorial geral já foi apresentado as componentes serão apresentadas, por conveniência, no formato matricial, sendo escritas em função das variáveis de dano. Como o modelo de fissuração é definido no sistema das deformações

principais, o tensor de integridade (ou das funções de dano), no sistema principal de dano, é dado por

$$\bar{\phi} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\phi}_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\phi}_{(3)} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.16})$$

sendo $\bar{\phi}_{(i)}$ funções de dano definidas no domínio das deformações.

D.2.1 Modelo de Análise Sólido Tridimensional

Os termos do tensor de rigidez e flexibilidade, respectivo ao modelo sólido, na forma matricial são dados por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{1111} & T_{1122} & T_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ T_{2211} & T_{2222} & T_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ T_{3311} & T_{3322} & T_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{2323} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.17})$$

com \mathbf{T} representando a flexibilidade ou a rigidez.

Da relação total dada na equação D.1b, tem-se a flexibilidade, escrita na em função das variáveis de dano, dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{\phi}_{(1)}^2 E_0} & \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0} & \frac{\nu_0}{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(3)} E_0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(1)} E_0} & \frac{1}{\bar{\phi}_{(2)}^2 E_0} & \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(3)} E_0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(3)} \bar{\phi}_{(1)} E_0} & \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(3)} \bar{\phi}_{(2)} E_0} & \frac{1}{\bar{\phi}_{(3)}^2 E_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_0)}{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_0)}{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(3)} E_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_0)}{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(3)} E_0} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.18})$$

Por inversão de D.18 obtém-se a matriz de rigidez, que é dada por

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\phi}_{(1)}^2 E_0 (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(3)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(1)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(2)}^2 E_0 (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(3)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{\phi}_{(3)} \bar{\phi}_{(1)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(3)} \bar{\phi}_{(2)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(3)}^2 E_0 (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0}{2(1 + \nu_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(3)} E_0}{2(1 + \nu_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(3)} E_0}{2(1 + \nu_0)} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.19})$$

D.2.2 Modelo de Análise Axissimétrico Plano

Analogamente ao modelo sólido, tem-se o a matriz de flexibilidade dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{\phi}_{(1)}^2 E_0} & \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0} & \frac{\nu_0}{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(3)} E_0} & 0 \\ \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(1)} E_0} & \frac{1}{\bar{\phi}_{(2)}^2 E_0} & \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(3)} E_0} & 0 \\ \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(3)} \bar{\phi}_{(1)} E_0} & \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(3)} \bar{\phi}_{(2)} E_0} & \frac{1}{\bar{\phi}_{(3)}^2 E_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1 + \nu_0)}{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.20})$$

Por inversão de D.20 obtém-se a matriz de rigidez, que é dada por

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\phi}_{(1)}^2 E_0 (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(3)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & 0 \\ \frac{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(1)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(2)}^2 E_0 (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(3)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & 0 \\ \frac{\bar{\phi}_{(3)} \bar{\phi}_{(1)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(3)} \bar{\phi}_{(2)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(3)}^2 E_0 (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0}{2(1 + \nu_0)} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.21})$$

D.2.3 Modelo de Análise Estado Plano de Deformação

Para o estado plano de deformação é necessário impor a condição de que $\varepsilon_3 = 0$ e substituir na relação total os valores de σ_3 , a fim de simplificar o sistema para 3 equações. Desta forma, invertendo a flexibilidade, pode-se obter as componentes de rigidez para o estado plano de deformação. A relação total pode ser escrita como

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{\phi}_{(1)}^2 E_0} & \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)} E_0} & \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(3)} E_0} & 0 \\ \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(2)}\bar{\phi}_{(1)} E_0} & \frac{1}{\bar{\phi}_{(2)}^2 E_0} & \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(2)}\bar{\phi}_{(3)} E_0} & 0 \\ \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(3)}\bar{\phi}_{(1)} E_0} & \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(3)}\bar{\phi}_{(2)} E_0} & \frac{1}{\bar{\phi}_{(3)}^2 E_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_0)}{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)} E_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (\text{D.22})$$

Portanto, escrevendo as equações para as deformações, tem-se

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\bar{\phi}_{(1)}^2 E_0} \sigma_1 - \frac{\nu_0}{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)} E_0} \sigma_2 - \frac{\nu_0}{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(3)} E_0} \sigma_3; \quad (\text{D.23})$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu_0}{\bar{\phi}_{(2)}\bar{\phi}_{(1)} E_0} \sigma_1 + \frac{1}{\bar{\phi}_{(2)}^2 E_0} \sigma_2 - \frac{\nu_0}{\bar{\phi}_{(2)}\bar{\phi}_{(3)} E_0} \sigma_3; \quad (\text{D.24})$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu_0}{\bar{\phi}_{(3)}\bar{\phi}_{(1)} E_0} \sigma_1 - \frac{\nu_0}{\bar{\phi}_{(3)}\bar{\phi}_{(2)} E_0} \sigma_2 + \frac{1}{\bar{\phi}_{(3)}^2 E_0} \sigma_3; \quad (\text{D.25})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{2(1+\nu_0)}{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)} E_0} \sigma_{12}. \quad (\text{D.26})$$

Como $\varepsilon_3 = 0$, por hipótese do estado plano de deformação, isolando σ_3 na equação D.24 e substituindo nas demais equações tem-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= -\frac{\nu_0}{\bar{\phi}_{(3)}\bar{\phi}_{(1)} E_0} \sigma_1 - \frac{\nu_0}{\bar{\phi}_{(3)}\bar{\phi}_{(2)} E_0} \sigma_2 + \frac{1}{\bar{\phi}_{(3)}^2 E_0} \sigma_3 = 0; \\ \sigma_3 &= \bar{\phi}_{(3)}^2 E_0 \left(\frac{\nu_0}{\bar{\phi}_{(3)}\bar{\phi}_{(1)} E_0} \sigma_1 + \frac{\nu_0}{\bar{\phi}_{(3)}\bar{\phi}_{(2)} E_0} \sigma_2 \right). \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

Substituindo D.27 nas equações D.23 e D.24, tem-se

$$\varepsilon_1 = \bar{\phi}_{(1)}^2 \frac{1}{E_0} \sigma_1 (1 - \nu_0^2) - \bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)} \frac{\nu_0}{E_0} \sigma_2 (1 + \nu), \quad (\text{D.28})$$

$$\varepsilon_2 = -\phi_{(1)}\phi_{(2)}\frac{\nu_0}{E_0}\sigma_1(1+\nu) + \phi_{(2)}^2\frac{1}{E_0}\sigma_2(1-\nu_0^2). \quad (\text{D.29})$$

Desta forma, a matrix de flexibilidade pode ser escrita como

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu_0^2)}{\bar{\phi}_{(1)}^2 E_0} & \frac{-\nu_0(1+\nu_0)}{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)} E_0} & 0 \\ \frac{-\nu_0(1+\nu_0)}{\bar{\phi}_{(2)}\bar{\phi}_{(1)} E_0} & \frac{(1-\nu_0^2)}{\bar{\phi}_{(2)}^2 E_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_0)}{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)} E_0} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.30})$$

Invertendo D.30, tem-se a matrix de rigidez, dada por

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\phi}_{(1)}^2 E_0(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)} E_0 \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{\bar{\phi}_{(2)}\bar{\phi}_{(1)} E_0 \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(2)}^2 E_0(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)} E_0}{2(1+\nu_0)} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.31})$$

D.2.4 Modelo de Análise Estado Plano de Tensão

Para o estado plano de tensão a flexibilidade pode ser obtido diretamente do caso sólido, eliminando-se as componentes energeticamente inativas, resultando em

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{\phi}_{(1)}^2 E_0} & \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)} E_0} & 0 \\ \frac{-\nu_0}{\bar{\phi}_{(2)}\bar{\phi}_{(1)} E_0} & \frac{1}{\bar{\phi}_{(2)}^2 E_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_0)}{\bar{\phi}_{(1)}\bar{\phi}_{(2)} E_0} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.32})$$

Por inversão de D.32 obtém-se a matriz constitutiva

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\phi}_{(1)}^2 E_0}{(1 - \nu^2)} & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0 \nu}{(1 - \nu^2)} & 0 \\ \frac{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(1)} E_0 \nu}{(1 - \nu^2)} & \frac{\bar{\phi}_{(2)}^2 E_0}{(1 - \nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0}{2(1 + \nu_0)} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.33})$$

D.2.5 Modelo de Análise para Flexão de Placas

Os modelos de análise para a flexão de placas baseados nas teorias de Kirchhoff (aplicada a placas finas) e Reissner-Mindlin (aplicada a placas medianamente espessas) podem ser resumidas por suas hipóteses básicas, a definição dos campos de deslocamentos e pelas relações tensão-deformação. Uma compilação de vários elementos finitos de placas, para a análise linear elástica, foi apresentada por Saliba (2007). A seguir, será brevemente apresentada a aplicação destes elementos de placas na análise fisicamente não linear.

D.2.5.1 Teoria de Kirchhoff para Placas Finas

A teoria de Kirchhoff apresenta quatro hipóteses básicas:

1. Os pontos contidos no plano médio somente se deslocam verticalmente, logo os deslocamentos horizontais (u , v) são iguais a zero;
2. Todo os pontos contidos numa reta normal ao plano médio têm o mesmo deslocamento vertical;
3. A tensão normal na direção z (σ_z) é desprezível;
4. Retas normais ao médio da placa indeformada permanecem retas e normais ao plano médio, após a deformação da placa.

Dado o deslocamento de um ponto qualquer ao longo da espessura de uma placa, ilustrado na figura D.1, para o plano xz ou yz , pode-se escrever o campo de deslocamentos como

$$u(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) = -z\frac{\partial w(x, y)}{\partial x}; \quad (\text{D.34})$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_y(x, y) = -z\frac{\partial w(x, y)}{\partial y}; \quad (\text{D.35})$$

$$w(x, y, z) = w(x, y), \quad (\text{D.36})$$

com u , v e w sendo os deslocamentos nas direções x , y e z respectivamente. Como, por hipótese, u e v são iguais a zero, o vetor de deslocamentos pode ser escrito como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (\text{D.37})$$

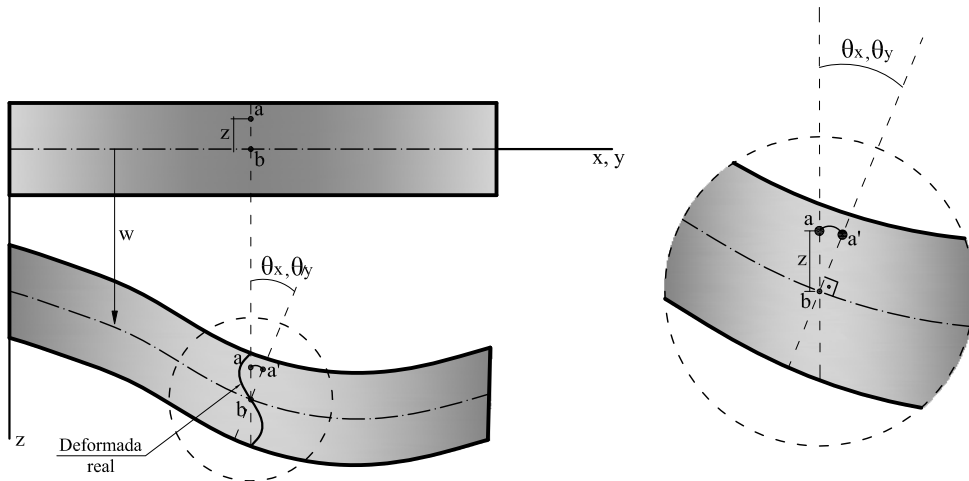


Figura D.1: Representação do deslocamento de ponto qualquer.

Partindo do campo de deslocamento, a relação entre deformação e deslocamento é escrita como

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}; \quad \varepsilon_z \simeq \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (\text{D.38a,b,c,d})$$

Portanto, matricialmente, tem-se

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \quad (\text{D.39})$$

Por fim, uma vez que a placa está livre para se deformar na direção z e, por hipótese, $\sigma_z \simeq 0$, pode-se admitir a mesma relação constitutiva de um estado plano de tensão.

Portanto, para o caso do modelo do modelo de fissuração distribuída, tem-se

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} = -z\mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\text{D.40})$$

sendo,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\phi}_{(1)}^2 E_0 (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & 0 \\ \frac{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(1)} E_0 \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(2)}^2 E_0 (1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0}{2(1 + \nu_0)} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.41})$$

Lembrando que para o caso linear elástico o tensor de dano, dado pela equação D.16, é $\bar{\boldsymbol{\phi}} = \delta_{ij}$.

D.2.5.2 Teoria de Reissner-Mindlin para Placas Espessas

A teoria de Reissner-Mindlin apresenta quatro hipóteses básicas:

1. Os pontos contidos no plano médio somente se deslocam verticalmente, portanto, tem-se os deslocamentos horizontais (u, v) iguais a zero;
2. Todos os pontos contidos numa reta normal ao plano médio têm o mesmo deslocamento vertical;
3. A tensão normal na direção z (σ_z) é desprezível;

4. Retas normais ao plano médio da placa indeformada permanecem retas, mas não necessariamente normais ao plano médio, após a deformação da placa.

Dado o deslocamento de um ponto qualquer ao longo da espessura de uma placa, ilustrado na figura D.2, para o plano xz ou yz , pode-se escrever o campo de deslocamentos como

$$u(x, y, z) = -z\theta_x(x, y) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}; \quad (\text{D.42})$$

$$v(x, y, z) = -z\theta_y(x, y) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}; \quad (\text{D.43})$$

$$w(x, y, z) = w(x, y), \quad (\text{D.44})$$

com u , v e w sendo os deslocamentos nas direções x , y e z respectivamente. Como, por hipótese, u e v , no plano médio, são iguais a zero, o vetor de deslocamentos pode ser escrito como

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (\text{D.45})$$

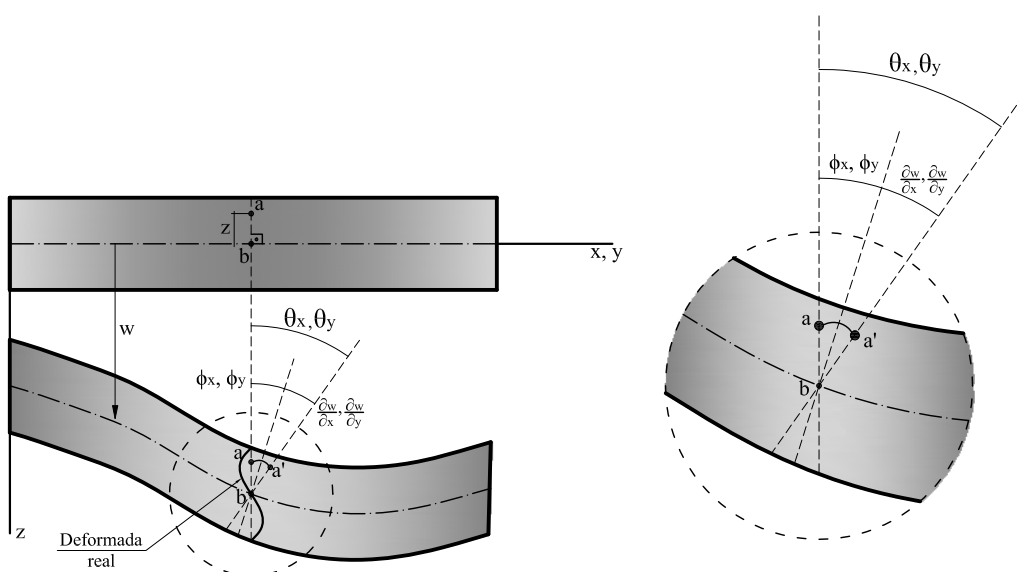


Figura D.2: Representação do deslocamento de ponto qualquer.

Partindo do campo de deslocamento, a relação entre deformação e deslocamento é escrita como

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}; \quad (\text{D.46a})$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}; \quad (\text{D.46b})$$

$$\varepsilon_z = 0; \quad (\text{D.46c})$$

$$\gamma_{xy} = -z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right); \quad (\text{D.46d})$$

$$\gamma_{xz} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi_x; \quad (\text{D.46e})$$

$$\gamma_{yz} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_y. \quad (\text{D.46f})$$

Portanto, matricialmente, tem-se

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} -z\theta_{x,x} \\ -z\theta_{y,y} \\ -z(\theta_{x,y} + \theta_{y,x}) \\ w_{,x} - \theta_x \\ w_{,y} - \theta_y \end{Bmatrix}. \quad (\text{D.47})$$

Por fim, uma vez que a placa está livre para se deformar na direção z e, por hipótese, $\sigma_z \simeq 0$ pode-se admitir a mesma relação constitutiva de um estado plano de tensão, contudo, deve-se considerar componentes de rigidez respectivas às deformações relativas aos esforços cortantes transversais. Portanto, tem-se

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\phi}_{(1)}^2 E_0 (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0 \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(1)} E_0 \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\bar{\phi}_{(2)}^2 E_0 (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E_0}{2(1+\nu_0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{13} \frac{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(3)} E_0}{2(1+\nu_0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{23} \frac{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(3)} E_0}{2(1+\nu_0)} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.48})$$

onde α_{13} e α_{23} são coeficientes de correção da distribuição do esforço cortante ao longo da espessura. Em seções retangulares, os esforços são, usualmente, dados por $\alpha_{13} = \alpha_{13} = \frac{5}{6}$ ou $\alpha_{13} = \alpha_{13} = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu}$, (Dym e Shames, 1973).

Lembrando que para o caso linear elástico, o tensor de dano, dado pela equação D.16, é $\bar{\phi} = \delta_{ij}$.

D.2.5.3 Modelagem Não Linear de Flexão de Placas

Muitos elementos finitos para flexão de placas existentes na literatura, tanto os baseados na teoria de Kirchhoff, quanto na de Reissner-Mindlin, foram apresentados por Saliba (2007). Em seu trabalho, além da implementação computacional, foi apresentada uma análise crítica destes elementos, com diversos exemplos de aplicação para análise elástica linear. Dentre os exemplos apresentados, destacam-se as modelagens de placas em concreto armado. Para tanto, a modelagem utiliza-se da decomposição em camadas da espessura da placa. A figura D.3 ilustra esta decomposição em camadas.

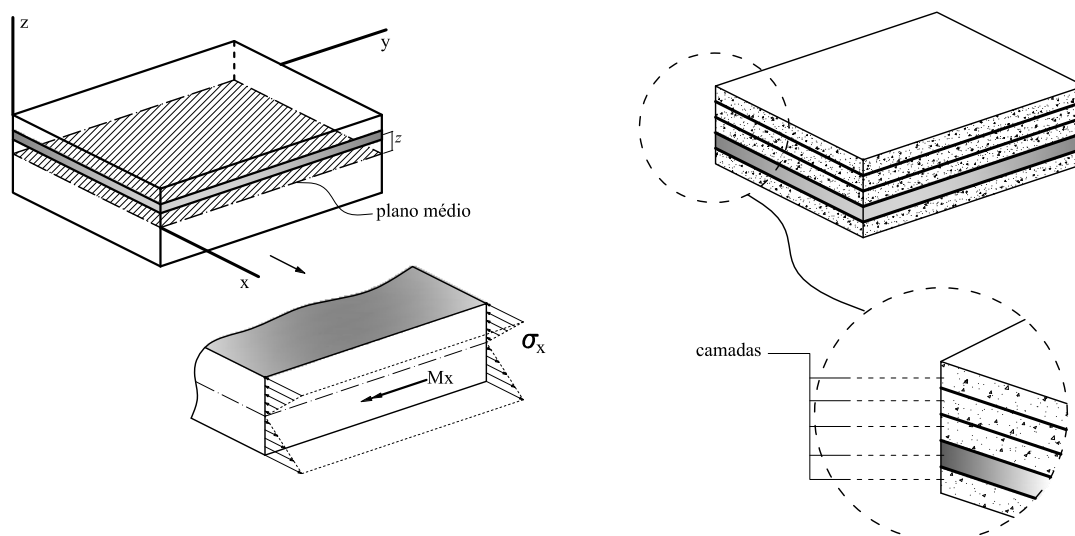


Figura D.3: Decomposição da espessura da placa em camadas.

Ao se discretizar a placa ao longo da espessura, é possível obter a variação do estado de tensão e deformação ao longo da altura da placa, permitindo assim, captar o processo de dano do material. Portanto, para uma análise não linear, cada camada deve ser analisada separadamente, de forma que a degradação da rigidez seja computada e a obtenção dos esforços internos seja resultante do somatório das contribuições das camadas, possibilitando o equilíbrio no processo de convergência.

Como apresentado nas seções D.2.5.1 e D.2.5.2, os modelos de fissuração foram usados na modelagem constitutiva para a flexão de placas, usando a teoria de placas finas e espessas, com decomposição, em camadas, da seção transversal.

D.3 Modelos de Degradação Isotrópicos

Os modelos constitutivos para a degradação isotrópica, apresentados no formato padrão, com uma variável de dano, cuja relação total é dada por

$$\sigma_{ij} = (1 - D)E_{ijkl}\varepsilon_{kl} , \quad (\text{D.49})$$

apresenta uma forma única de redução da rigidez dada pela função de dano. O tensor de rigidez advém das formas lineares elásticas isotrópicas apresentadas na seção D.1.

Os modelos de dano isotrópico apresentados no capítulo 4, foram implementados neste trabalho para os modelos de análise aplicados a sólidos tridimensionais, axissimétricos, estado plano de tensão e estado plano de deformação.

Apêndice E

Relações Tensão-Deformação e Equações de Evolução do Dano

Os modelos apresentados no capítulo 4 dependem diretamente de leis de evolução (relações tensão-deformação ou funções de dano) capazes de computar a degradação das propriedades físicas do material. Além da descrição do processo de perda de integridade, estas leis são também responsáveis pela intensidade de crescimento ou decrescimento do regime pós-crítico do material. Esta última atribuição pode ser constatada diretamente do tensor pós-crítico, como visto no capítulo 3.

E.1 Relações Tensão-Deformação

Os modelos de fissuração apresentados captam a integridade do módulo secante a partir de relações tensão-deformação para o concreto. Estas relações são propostas pela aproximação de equações matemáticas ajustadas tomando-se como base experimentos laboratoriais e correlacionando as características do material com os parâmetros das equações. Relações não lineares, bilineares e trilineares serão apresentadas junto a simulações para ilustrar o comportamento das leis com a variação dos parâmetros do material. Para as simulações, serão adotados valores padrões para o material com os parâmetros dados por:

Tabela E.1: Parâmetros do material

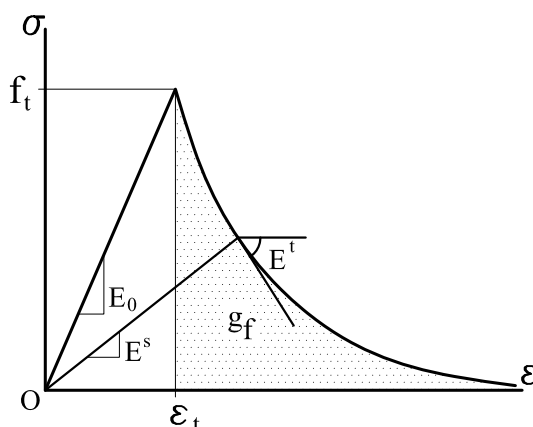
Módulo de elasticidade (E_0)	20000,0 MPa
Deformação máxima para compressão não linear polinomial (ε_c)	0,002
Deformação máxima para tração não linear polinomial (ε_t)	0,0002
Resistência limite em compressão (f_c)	20,0 MPa
Resistência limite em tração (f_t)	2,0 MPa
Energia de fratura (G_f)	0,0001 MN/m
Comprimento característico (h)	0,05 m
Coefficiente de Poisson (ν)	0,2

E.1.1 Proposta de Boone e Ingraffea (1987)

A proposta de Boone e Ingraffea (1987) aproxima o comportamento à tração do concreto por uma lei exponencial baseada na energia de fratura e nos limites de deformação e tensão admitidos. A equação é dada por

$$\sigma = f_t e^{-k(\varepsilon - \varepsilon_t)} \quad \text{sendo: } k = \frac{h f_t}{G_f} \quad \text{ou} \quad k = \frac{f_t}{g_f}. \quad (\text{E.1a,b})$$

Onde σ é a tensão, f_t é tensão limite de resistência à tração, ε é a deformação corrente, ε_t é a deformação relativa ao limite elástico na tração, h é o comprimento característico, G_f é a energia de fratura por comprimento de trinca e g_f é a energia de fratura específica. A figura E.1 ilustra de forma esquemática os parâmetros da equação.

**Figura E.1:** Lei de Boone e Ingraffea (1987).

Nos gráficos apresentados pela figura E.2 tem-se simulações correspondentes à equação E.1. O gráfico da figura E.2a apresenta a curva para o material padrão

especificado. Nas figuras E.2b,c tem-se o comportamento do material ao se variar a energia de fratura e a resistência à tração respectivamente. Ao se manter uma proporção entre a resistência à tração e a energia de fratura tem-se um comportamento semelhante da lei exponencial como visto na figura E.2d.

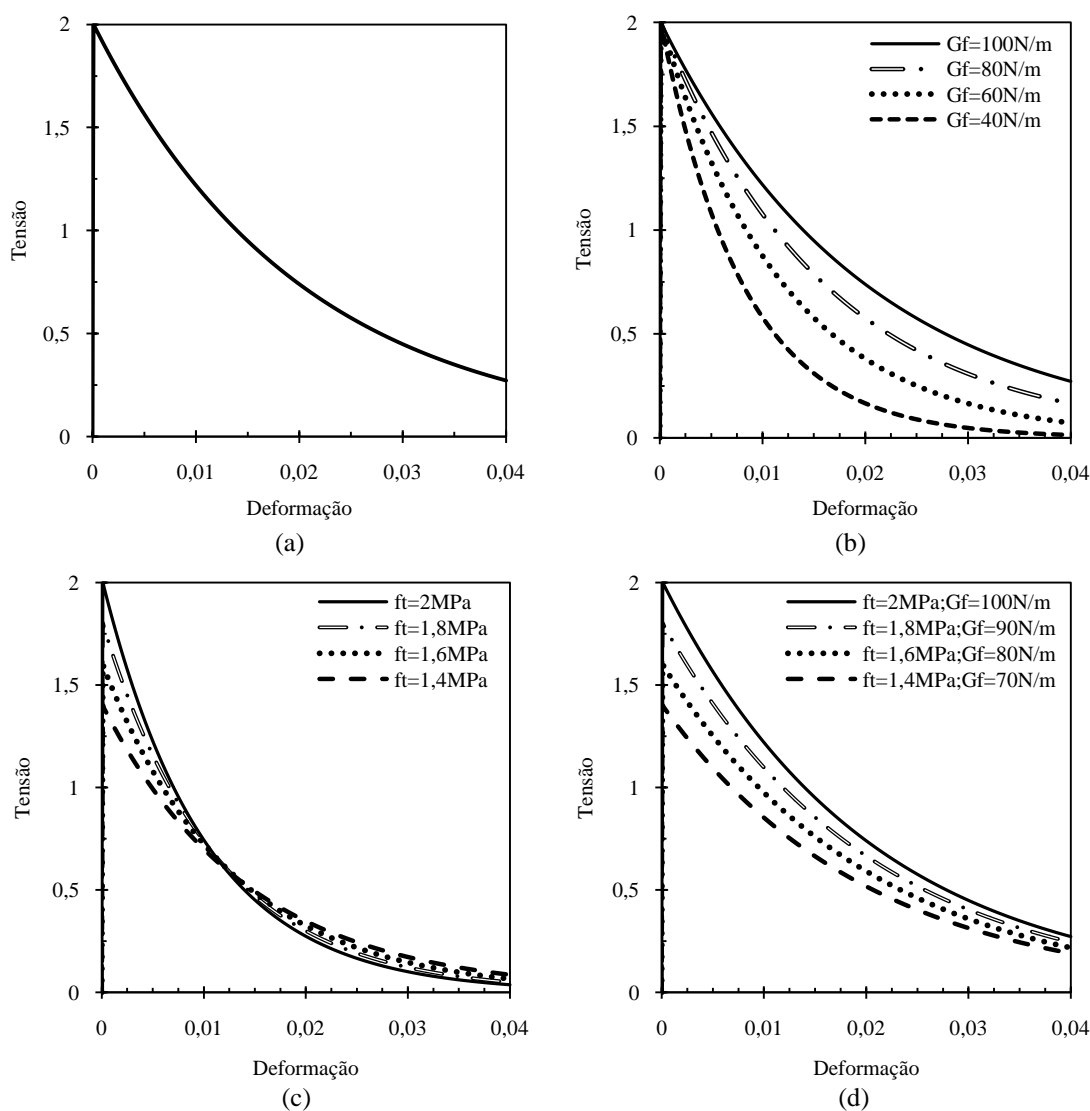


Figura E.2: Simulações com a lei proposta por Boone e Ingraffea (1987).

E.1.2 Proposta de Carreira e Chu (1985, 1986)

As leis propostas Carreira e Chu (1985, 1986) apresentam formas polinomiais baseadas nos limites de tensão e deformação para tração e para compressão, dadas

pela equação E.2.

$$\sigma_i = f_i \frac{k \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i} \right)}{k - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_i} \right)^k} \quad \text{onde: } k = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_i}{\varepsilon_i \cdot E_0} \right)}, \quad \text{sendo } i = t, c. \quad (\text{E.2a,b})$$

Onde σ_i é a tensão equivalente de tração ou compressão, f_i é a tensão equivalente relativa ao limite de resistência à tração ou compressão, ε_i é a deformação equivalente relativa ao limite elástico na tração ou compressão, com $i = t$ para tração e $i = c$ para a compressão, e E_0 é o módulo de elasticidade equivalente no domínio elástico. A equação E.2, para a tração e para a compressão, é ilustrada na figura E.3

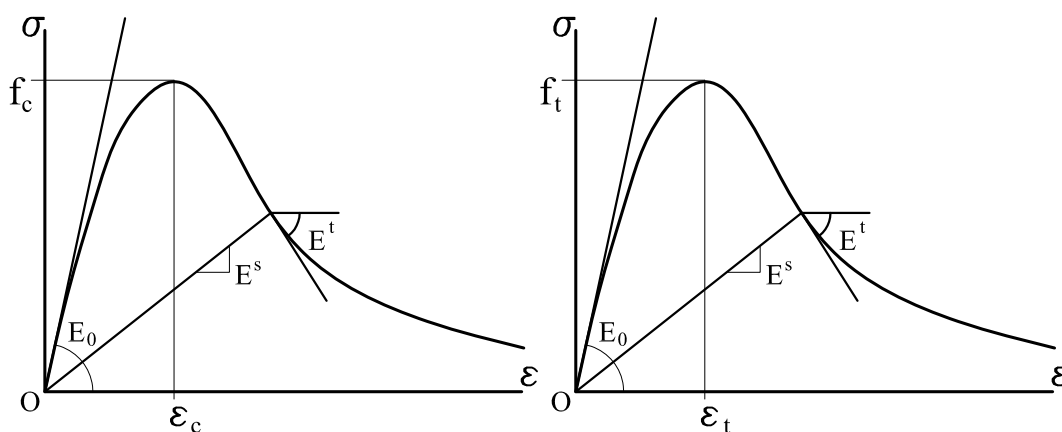


Figura E.3: Lei de Carreira e Chu (1985, 1986).

As simulações são análogas às apresentadas na seção E.1.1. Contudo, serão apresentados resultados para a tração, sendo o gráfico E.4a para o material padrão. Nos demais gráficos (E.4b,c,d) tem-se variações dos parâmetros de resistência (tensão e deformação). É válido ressaltar que o coeficiente k usado pela lei admite que

$$\varepsilon_i > \frac{f_i}{E_0}, \quad (\text{E.3})$$

o que resulta em um comportamento mais dúctil, para materiais equivalentes, em relação à leis que assumem $\varepsilon_i = \frac{f_i}{E_0}$.

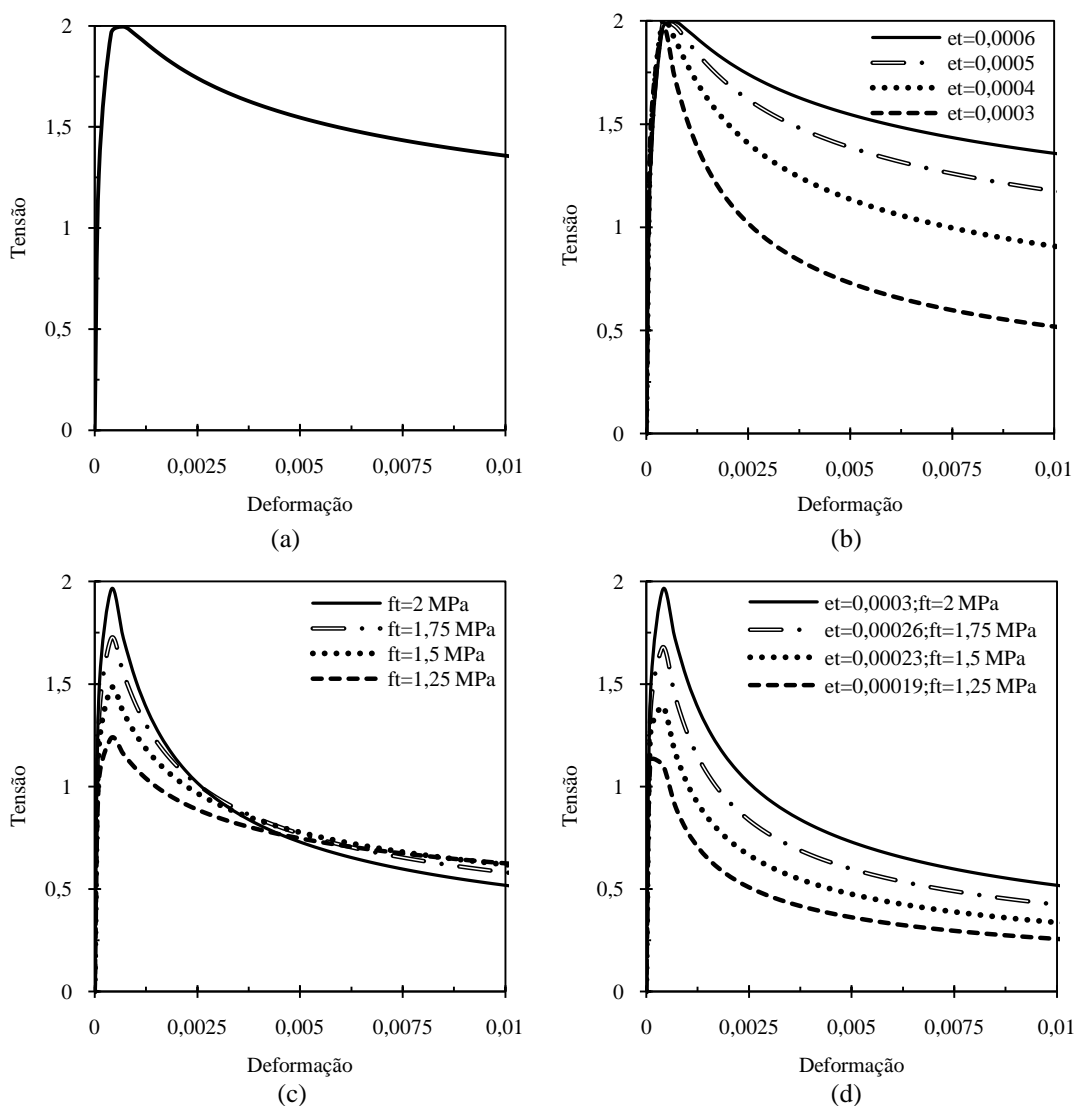


Figura E.4: Simulações com a lei proposta por Carreira e Chu (1985, 1986) para à tração.

E.1.3 Aproximação Bilinear

A lei bilinear apresenta uma forma bastante intuitiva de representar o comportamento de um material. Uma composição linear é usada tanto para o regime elástico quanto para o inelástico. O ramo linear elástico é dado pela lei de Hooke e o ramo inelástico é descrito pelas características do material e seus limites de resistência. A descrição das leis para tração e compressão diferem apenas pela definição dos parâmetros usados. Para a tração, tem-se

$$\sigma = \frac{\varepsilon_{t,cr} - \varepsilon}{\varepsilon_{t,cr} - \varepsilon_t} f_t \quad \text{com: } \varepsilon_{t,cr} = \varepsilon_t + \frac{2g_f}{f_t} = \varepsilon_t + \frac{2G_f}{h f_t} . \quad (\text{E.4a,b})$$

Para a compressão, tem-se

$$\sigma = \frac{\varepsilon_{c,cr} - \varepsilon}{\varepsilon_{c,cr} - \varepsilon_c} f_c \quad \text{com: } \varepsilon_{c,cr} = \varepsilon_c + \frac{f_c}{E_2} . \quad (\text{E.5a,b})$$

Onde $\varepsilon_{t,u}$ e $\varepsilon_{c,u}$ é a deformação última admissível na tração e compressão respectivamente. A figura E.5 apresenta a lei bilinear para compressão e para tração.

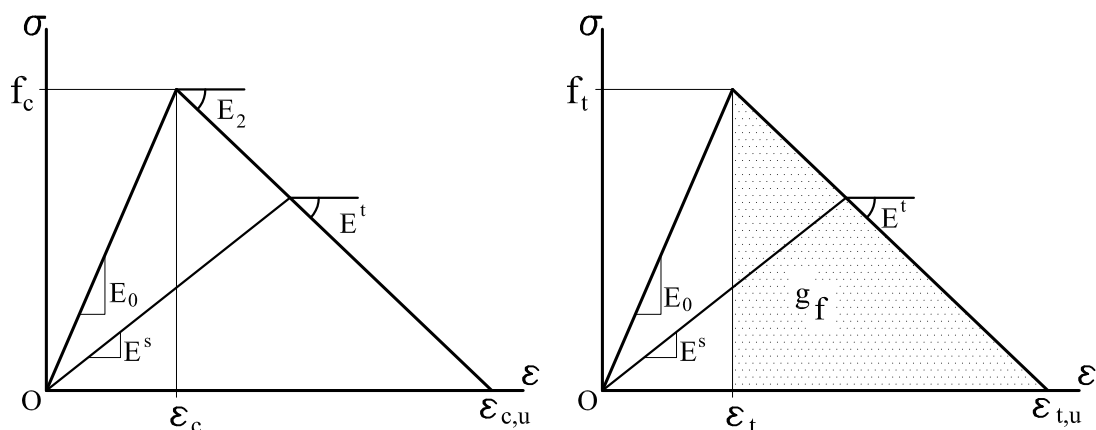


Figura E.5: Lei bilinear.

Os parâmetros usados para as leis de Boone e Ingraffea (1987) são os mesmos necessários para a definição da lei bilinear de tração, logo, as simulações apresentadas na figura E.6 são para as mesmas variações dos parâmetros do material.

Qualitativamente tem-se o mesmo comportamento da lei de Boone e Ingraffea (1987), entretanto, a aproximação bilinear acarreta, ao comportamento global de um dado modelo, uma maior resistência em detrimento da ductilidade.

O comportamento descrito pode ser visto, em termos de perda de ductilidade, no gráfico da figura E.6a. A descrição do ramo descendente, pela lei bilinear, apresenta uma inclinação constante, logo, no início do regime inelástico tem-se a definição do comportamento do material, obtendo-se, para uma mesma energia de fratura, índices de deformações bem menores que nas leis exponenciais. As figuras E.2b,c,d tem as variações da lei bilinear correspondentes às variações do material.

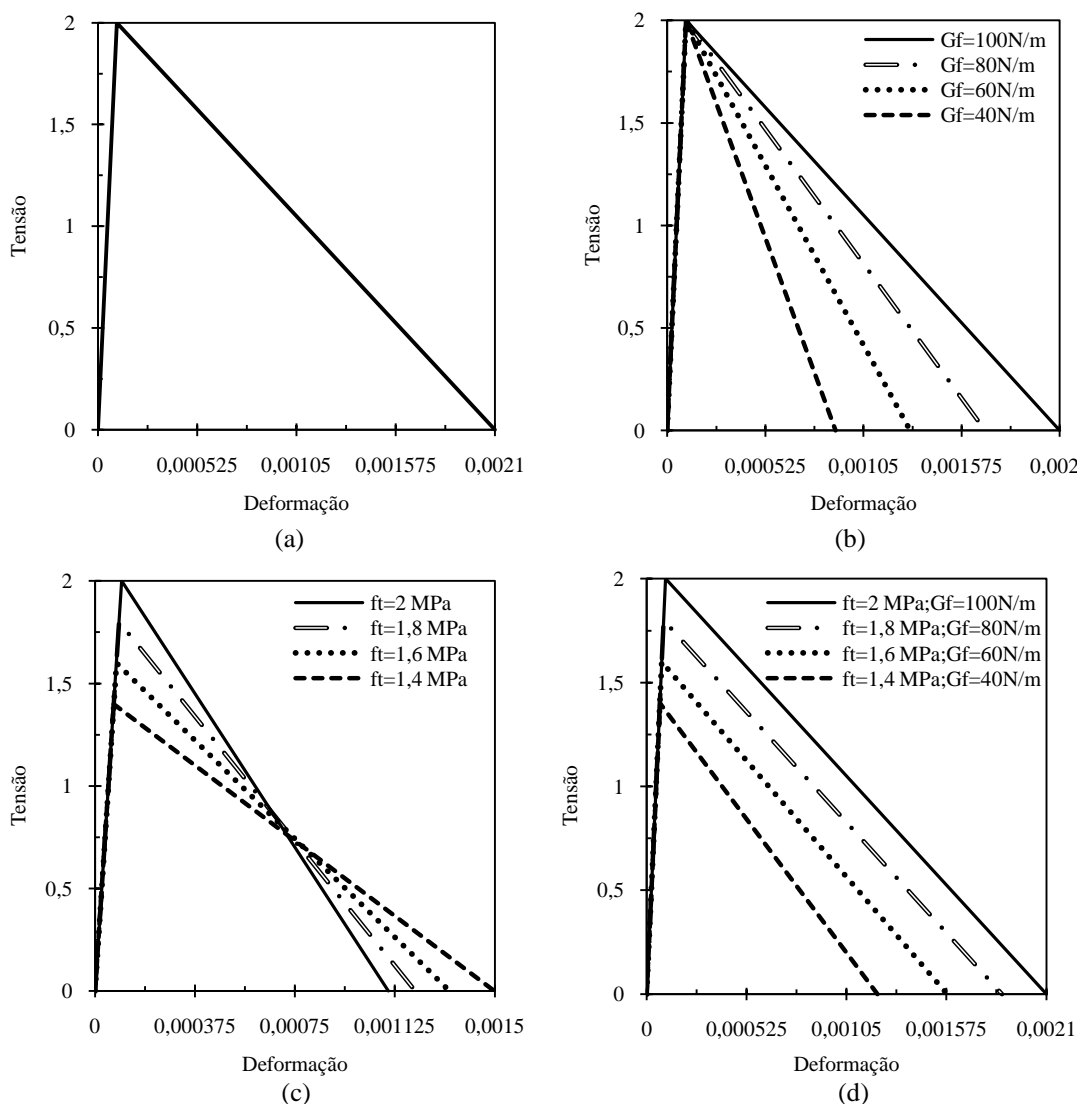


Figura E.6: Simulações com a lei bilinear para à tração.

E.1.4 Aproximação Trilinear

As questões de resistência e ductilidade apresentadas pelas leis bilineares podem ser melhorados com o uso de leis trilineares, uma vez que, o regime inelástico é descrito por duas aproximações lineares. Usualmente empregada para a tração, em substituição de leis exponenciais, a forma trilinear padrão é descrita por limites de tensão e deformação representativos do material, portanto, tem-se dois trechos para descrever o regime inelástico, sendo o regime elástico linear dado pela lei de Hooke. A figura E.7 ilustra os limites de resistência para se definir cada trecho da lei.

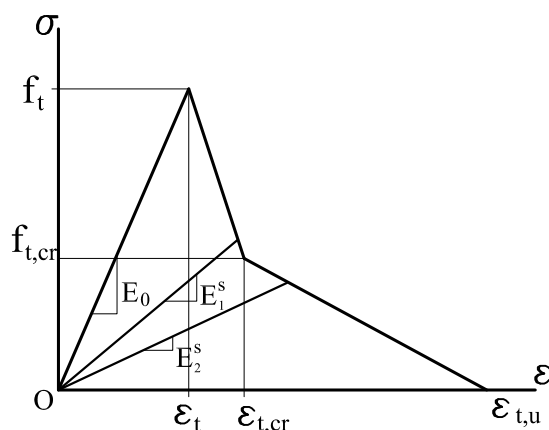


Figura E.7: Lei trilinear.

O primeiro trecho, $\varepsilon_t < \varepsilon < \varepsilon_{t,cr}$, é dado por

$$\sigma = \frac{f_{t,cr} - f_t}{\varepsilon_{t,cr} - \varepsilon_t} \varepsilon + f_t - \frac{f_{t,cr} - f_t}{\varepsilon_{t,cr} - \varepsilon_t} \varepsilon_t, \quad (\text{E.6})$$

o segundo trecho, $\varepsilon_{t,cr} < \varepsilon < \varepsilon_{t,u}$, é dado por

$$\sigma = \frac{f_{t,u} - f_{t,cr}}{\varepsilon_{t,u} - \varepsilon_{t,cr}} \varepsilon + f_{t,cr} - \frac{f_{t,u} - f_{t,cr}}{\varepsilon_{t,u} - \varepsilon_{t,cr}} \varepsilon_{t,cr}. \quad (\text{E.7})$$

Onde $f_{t,cr}$ é a tensão crítica de tração e $\varepsilon_{t,cr}$ é a deformação relativa à tensão crítica de tração e $f_{t,u}$ é a tensão última de tração.

Outras propostas para a lei trilinear são encontradas na literatura, podendo ser citados os trabalhos Rots et al. (1985), Barros et al. (2005) e Jansson (2008), com diferentes formas de definição do regime inelástico.

Para as simulações propostas, o material padrão, descrito pelo gráfico dado pela figura E.8a, apresenta os parâmetros $\varepsilon_{t,cr} = 0,00064$, $\varepsilon_{t,u} = 0,004$, $f_{t,cr} = 0,8MPa$ e $f_{t,u} = 0$. As variações destes parâmetros podem ser vistas nos gráficos das figuras E.8b,c,d. Pode-se definir a lei trilinear vinculando os limites de tensão e deformação com a energia de fratura simplificando a definição do material como proposto por Rots et al. (1985).

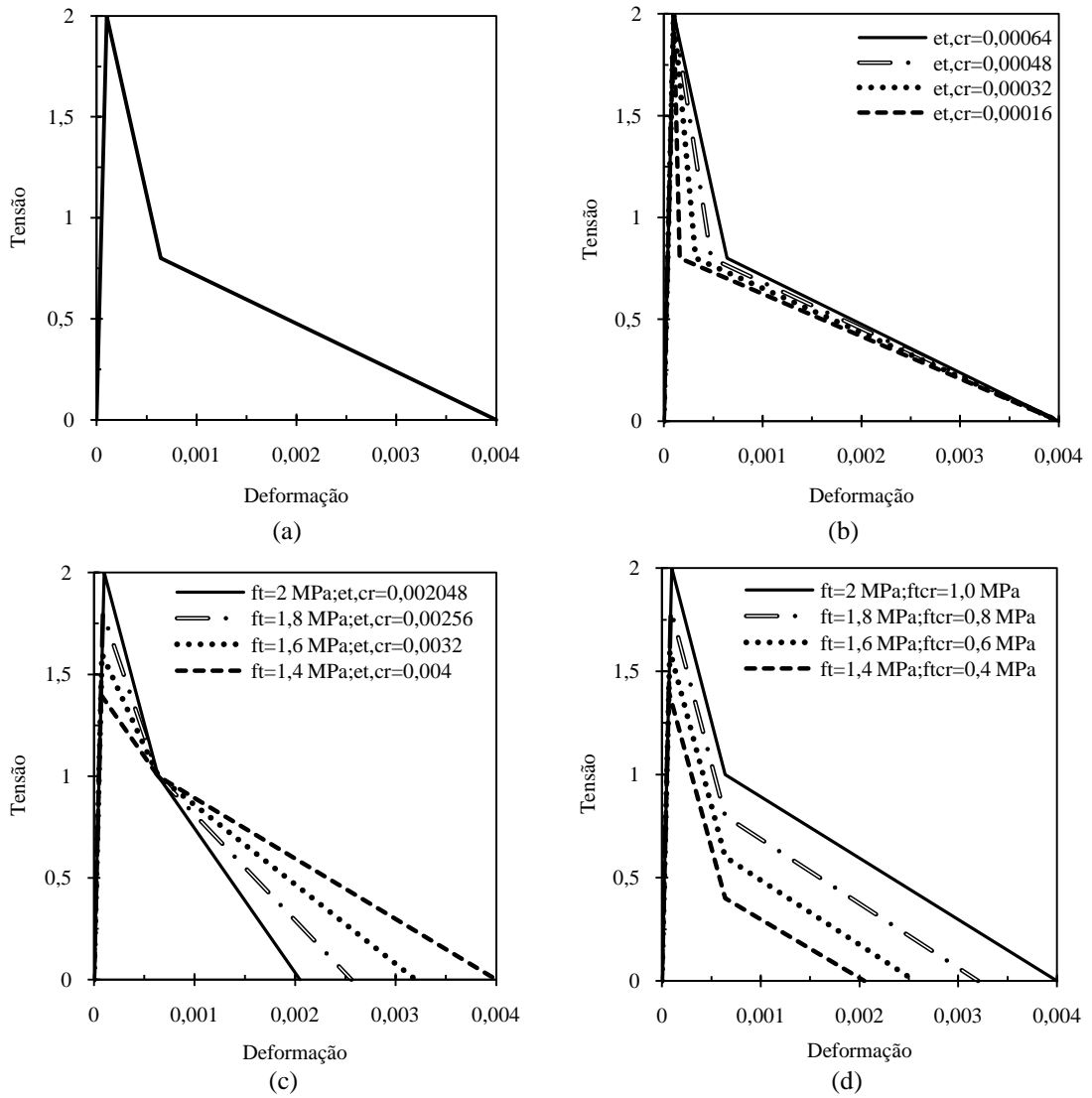


Figura E.8: Simulações com a lei trilinear para à tração.

E.2 Equações de Evolução do Dano

Equações de evolução do dano apresentam diversas formas de variação. As formas mais tradicionais apresentam variações exponenciais, entretanto, pode-se representar o processo de degradação por equações polinomiais e lineares. Serão apresentadas algumas variações das funções de dano encontradas na literatura.

E.2.1 Função de Evolução do Dano com Variação Exponencial

A forma exponencial mais tradicional é dada por

$$D(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} [1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\tilde{\varepsilon}-\kappa_0)}] ; \quad (\text{E.8})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}^2} [1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(\tilde{\varepsilon}-\kappa_0)}] + \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} [\alpha \beta e^{-\beta(\tilde{\varepsilon}-\kappa_0)}] . \quad (\text{E.9})$$

Onde $\tilde{\varepsilon}$ é a medida de deformação equivalente, κ_0 é o valor da deformação equivalente a partir do qual o processo de dano se inicia, α é o valor máximo de dano admissível para o material e β é a intensidade de evolução do dano.

Diversos autores (de Borst e Gutiérrez (1999), Leukart e Ramm (2002), Leukart e Ramm (2006), Fuina (2009)) adotaram em seus trabalhos a equação E.8 como forma de evolução do dano. É válido ressaltar que de Borst e Gutiérrez (1999) adotam a mesma equação do dano exponencial aplicado a modelos de dano isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos, sendo que em cada modelo a definição dos parâmetros e das medidas de deformação assumem novos sentidos, entretanto, a forma de crescimento do dano é a mesma.

Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) apresentam uma outra função de dano exponencial dada por

$$D(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} \left[1 - \alpha + \alpha \frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0} e^{-\beta(\tilde{\varepsilon}-\kappa_0)} \right] ; \quad (\text{E.10})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}^2} (1 - \alpha) + \alpha \beta e^{-\beta(\tilde{\varepsilon}-\kappa_0)} . \quad (\text{E.11})$$

Outras formas de variação da equação E.8 são possíveis. Pituba (2003) propõe uma variação baseada na expressão dada por Mazars (1984) combinada à expressão

proposta por La Borderie (1991). Logo, tem-se

$$D(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{1 + \alpha}{\alpha + e^{-\beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)}}; \quad (\text{E.12})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{1 + \alpha}{[\alpha + e^{-\beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)}]^2} + \beta e^{\beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)}. \quad (\text{E.13})$$

E.2.2 Função de Evolução do Dano com Variação Polinomial

Carreira e Chu (1985, 1986) descreveram a relação tensão-deformação (vista na seção E.1) usando uma função polinomial a partir de dados experimentais. Usando a mesma equação polinomial para descrever o dano tem-se

$$D(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{1}{\tilde{E}\tilde{\varepsilon}} \frac{\frac{f_e k \tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}}{k - 1 + \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}\right)^k}; \quad (\text{E.14})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{f_e k^2 \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}\right)^{k-1}}{\tilde{E} \kappa_0^2 \left[k - 1 + \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}\right)^k \right]}. \quad (\text{E.15})$$

Esta equação de dano apresenta uma evolução contínua e κ_0 marca o limite elástico mas não necessariamente linear, sendo que

$$\kappa_0 > \frac{f_e}{\tilde{E}} \quad \text{pois} \quad k = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_e}{\kappa_0 \tilde{E}}\right)}.$$

Onde f_e é a tensão equivalente relativa ao limite de resistência do material e \tilde{E} é o módulo de elasticidade equivalente.

Outra forma polinomial, esta usada por Carol et al. (2001c), é escrita como

$$D(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\tilde{\varepsilon}^{-\beta}}{\kappa_0}; \quad (\text{E.16})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \beta \frac{1}{\kappa_0} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0}\right)^{-\beta-1}. \quad (\text{E.17})$$

No modelo apresentado por Carol et al. (2001c) β é dado como uma relação entre a energia de fratura e a energia elástica sendo

$$\beta = \frac{g_{ft}}{g_{ft} - r_0} \quad \text{sendo} \quad g_{ft} = r_0 + g_f.$$

Onde g_f é a energia de fratura e r_0 é a energia elástica.

De La Borderie (1991) tem-se um polinômio do tipo

$$D(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{1}{1 + A(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)^B}; \quad (\text{E.18})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{1}{1 + A([\tilde{\varepsilon} - \kappa_0]^B)^2} AB(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)^{B-1}. \quad (\text{E.19})$$

Por fim, tem-se a equação adotada por Pijaudier-Cabot e Huerta (1991) dada por

$$D(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{1}{1 + \beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0) + \alpha(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)^2}; \quad (\text{E.20})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{\beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0) + 2\alpha(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)}{[1 + \beta(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0) + \alpha(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)^2]^2}. \quad (\text{E.21})$$

E.2.3 Função de Evolução do Dano com Variação Linear

O dano linear pode ter várias formas sendo estas definidas com parâmetros diferentes, por exemplo, energia de fratura, ou os limites de tensão e deformação. A seguir, tem-se os limites de deformação como definição da relação de dano linear

$$D(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\kappa_f}{\kappa_f - \kappa_0} \left(1 - \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}}\right); \quad (\text{E.22})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{\kappa_f}{\kappa_f - \kappa_0} \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}^2}. \quad (\text{E.23})$$

A composição da variação do dano por trecho lineares, por exemplo, resultante de uma lei de tensão-deformação trilinear, como visto na figura E.7, pode ser escrita, para o primeiro trecho, como:

$$D(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{f_{cr} - f_t}{E_0 \varepsilon_{cr} - \varepsilon_t} + \frac{f_t}{E_0 \varepsilon} + \frac{f_{cr} - f_t}{E_0 \varepsilon_{cr} - \varepsilon_t} \frac{\varepsilon_{cr}}{E_0 \varepsilon}; \quad (\text{E.24})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{f_t}{E_0 \varepsilon^2} - \frac{f_{cr} - f_t}{\varepsilon_{cr} - \varepsilon_t} \frac{\varepsilon_t}{E_0 \varepsilon^2}. \quad (\text{E.25})$$

E, para o segundo trecho, como:

$$D(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{f_u - f_{cr}}{E_0 \varepsilon_u - \varepsilon_{cr}} + \frac{f_{cr}}{E_0 \varepsilon} + \frac{f_u - f_{cr}}{E_0 \varepsilon_u - \varepsilon_{cr}} \frac{\varepsilon_u}{E_0 \varepsilon}; \quad (\text{E.26})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{f_{cr}}{E_0 \varepsilon^2} - \frac{f_u - f_{cr}}{\varepsilon_u - \varepsilon_{cr}} \frac{\varepsilon_{cr}}{E_0 \varepsilon^2}. \quad (\text{E.27})$$

Apêndice F

Complemento do Projeto Orientado a Objetos do Núcleo Numérico do Sistema INSANE

Neste apêndice tem-se o complemento do projeto orientado a objetos apresentado no capítulo 6. A organização do núcleo numérico é mostrada com detalhes para a associação de classes e os diagramas completos para os demais projetos do núcleo numérico apresentados.

F.1 Detalhes das Classes do Núcleo Numérico do INSANE

O núcleo numérico foi descrito na seção 6.1 e nesta seção tem-se um complemento das classes que compõe o núcleo numérico. Os aspectos mais relevantes de cada classe são comentados e ilustrados com diagramas UML e para maiores detalhes outros trabalhos (Almeida (2005), Germânio (2005), Fonseca (2006), Saliba (2007), Fonseca (2008), Fuina (2009), Ajeje (2009) e Wolff (2010)) devem ser consultados.

F.1.1 Interface Assembler

A interface `Assembler` possui os métodos necessários para montar as matrizes e vetores do modelo, como visto na seção 6.1. Atualmente a interface é implementada

pela classe `FEMAssembler`, que aplicada diretamente ao modelos do Método dos Elementos Finitos, que por sua vez apresenta uma hierarquia de classes vista na figura F.1.

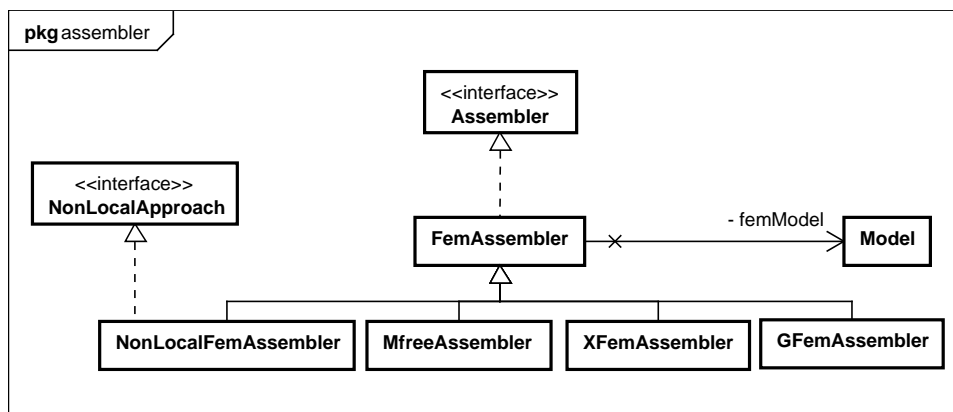


Figura F.1: Herança de classe de Assembler.

A classe `FemAssembler` tem como atributo um objeto do tipo `Model`, que é o modelo de elementos finitos para o qual deve montar o sistema de equações. Para o Método dos Elementos Finitos aplicado à análise estática, a equação 6.1 se resume ao sistema de equações

$$\begin{bmatrix} C_{uu} & C_{up} \\ C_{pu} & C_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_u \\ X_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_u \\ N_p \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_u \\ E_p \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_u \\ F_p \end{Bmatrix}. \quad (\text{F.1})$$

A matriz \mathbf{C} é a matriz de rigidez do modelo, \mathbf{X} o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{F} o vetor de forças nodais equivalentes aos esforços internos. O vetor \mathbf{N} e o vetor \mathbf{E} que são, respectivamente, o vetor de forças aplicadas diretamente nos nós e o vetor de forças nodais equivalentes às cargas de corpo. Os índices u e p indicam, respectivamente, se a sub-matriz é referente a valores desconhecidos ou prescritos. Esta mesma subdivisão aplica-se também às matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} , assim como aos vetores $\dot{\mathbf{X}}$ e $\ddot{\mathbf{X}}$ da equação 6.1.

F.1.2 A Classe Abstrata Solution

Uma vez montada a equação do problema, fica a cargo da classe abstrata `Solution` solucioná-la. Esta classe estende a classe `Observable`, uma vez que é

observada pela persistência, isto é, a cada atualização da solução a persistência grava os dados do modelo. A hierarquia de classes para `Solution` é apresentada na figura F.2.

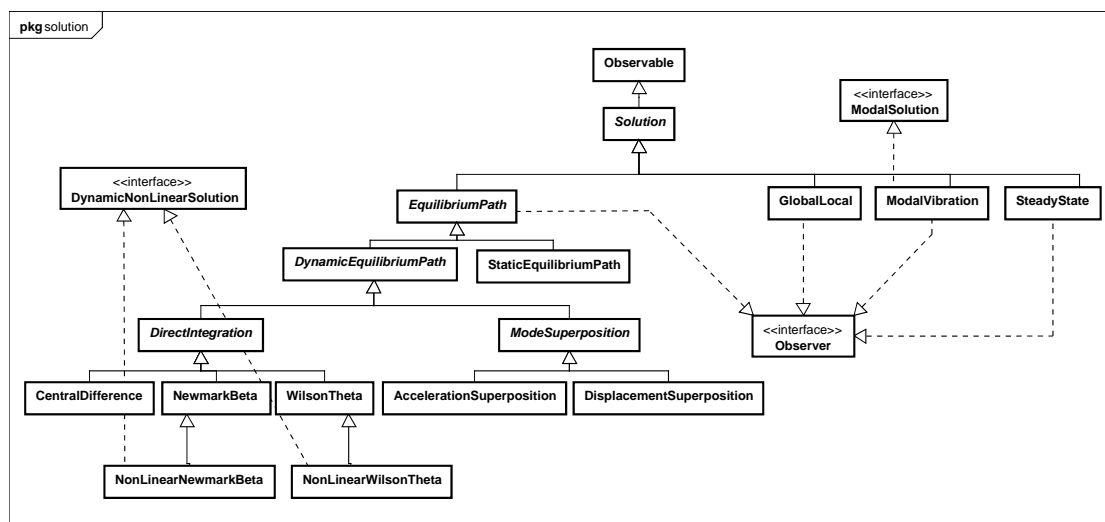


Figura F.2: Herança de classe de `Solution`.

A classe `SteadyState` é a mais simples das subclasses de `Solution`, pois representa a solução de um problema linear estático. A classe abstrata `EquilibriumPath` generaliza uma solução cujo objetivo é determinar uma trajetória de equilíbrio. A solução não linear estática é representada pela classe `StaticEquilibriumPath`, que implementa um processo incremental-iterativo e utiliza um dos métodos de controle (visto na figura C.6 do apêndice C) para solucionar o problema.

A classe `StaticEquilibriumPath` possui um objeto do tipo `Step`, responsável pelos métodos necessários à execução de um passo incremental da análise não linear, e uma lista de objetos do tipo `IterativeStrategy`. Como mostra a figura F.3 `Step` é uma interface implementada pelas classes `StandardNewtonRaphson` e `ModifiedNewtonRaphson` em que os métodos de Newton-Raphson Padrão e Modificado, respectivamente, são implementados.

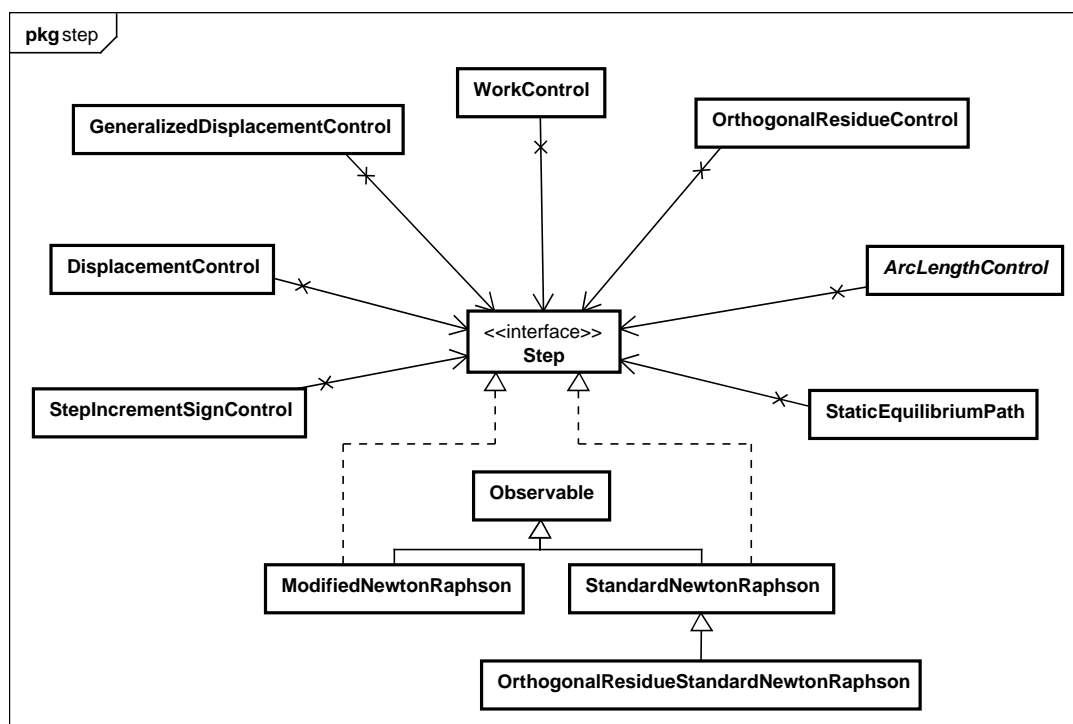


Figura F.3: Herança de classe de Step.

A interface `IterativeStrategy`, cuja herança de classes é mostrada na figura F.4, é implementada pelas classes `LoadControl`, que implementa o Método de Controle de Carga, `DisplacementControl`, o Método de Controle Direto de Deslocamento, `WorkControl`, o Método de Controle por Trabalho, `OrthogonalResidueControl`, o Método de Controle de Resíduo Ortogonal, `GeneralizedDisplacementControl`, o Método de Controle de Deslocamento Generalizado, e pela classe abstrata `ArcLengthControl` que possui as subclasses `UpdateOrthogonalArcLengthControl`, que implementa o Método de Controle de Comprimento de Arco com Trajetória Ortogonal à Tangente da Iteração Anterior, `InitialOrthogonalArcLengthControl`, que implementa o Método de Controle de Comprimento de Arco com Trajetória Ortogonal à Tangente Inicial, e `CylindricalArcLengthControl`, o Método de Controle de Comprimento de Arco com Trajetória Cilíndrica.

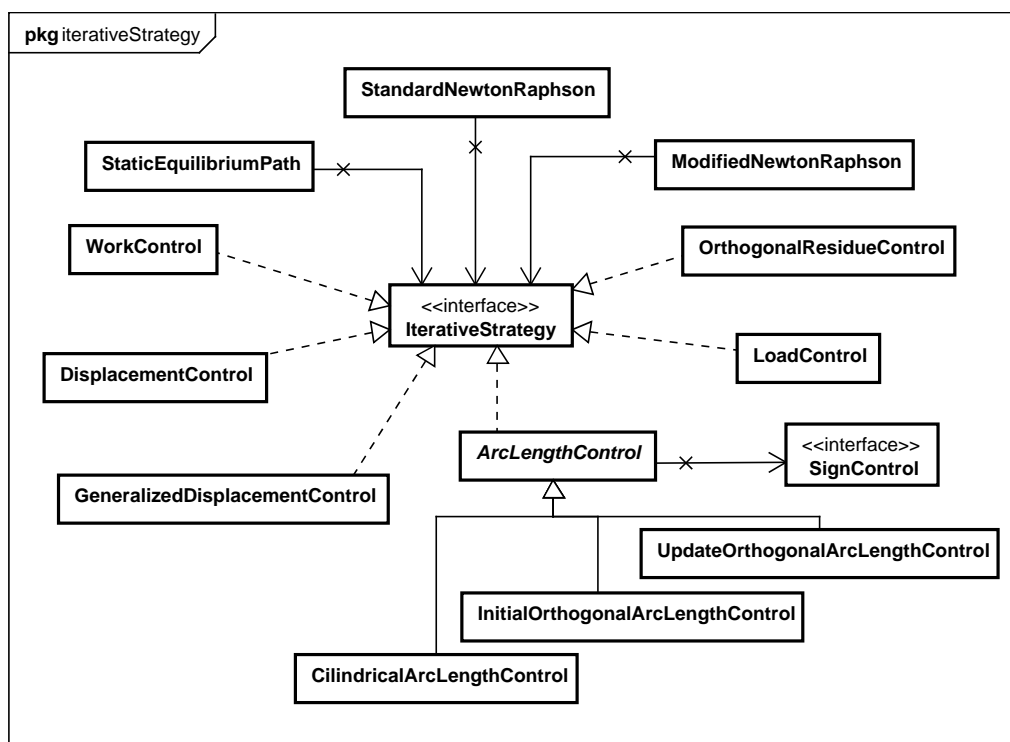


Figura F.4: Especializações da interface de `IterativeStrategy`.

F.1.3 A Interface Model

O modelo discreto a ser analisado é representado no projeto orientado a objetos do núcleo numérico pela interface `Model` (Figura F.5). As classes que a implementam são constituídas por listas de objetos inerentes a este modelo e contém métodos de acesso e manipulação destes dados.

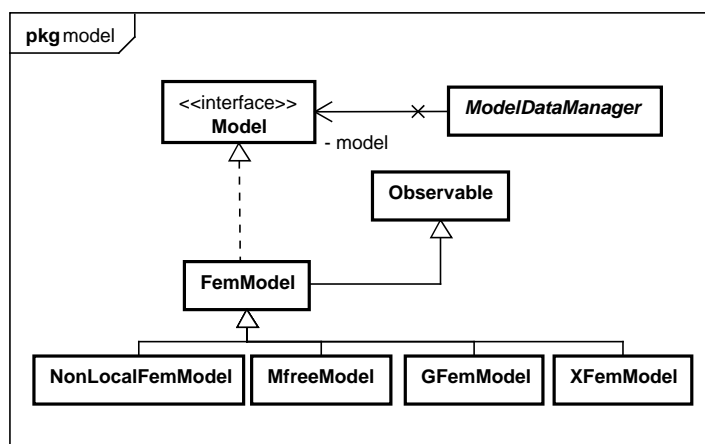


Figura F.5: Hierarquia da interface de `Model`.

Destaca-se a classe `FemModel` (Figura F.6), que representa o modelo de elementos finitos propriamente dito.

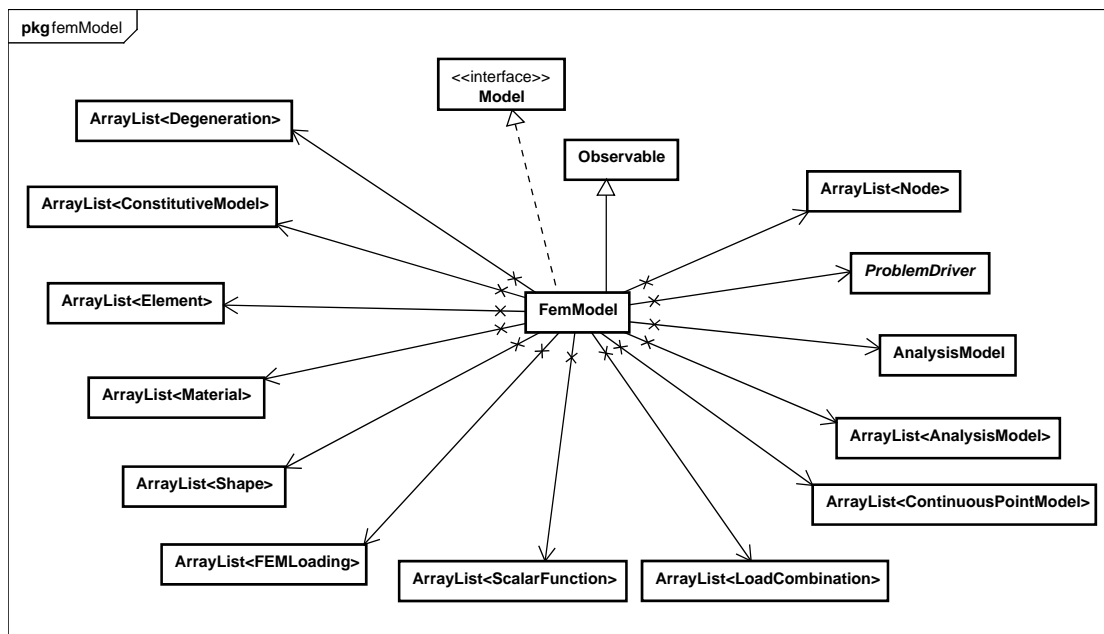


Figura F.6: Associação de instâncias da classe `FemModel`.

Um objeto `FemModel` tem listas de nós (representados pela classe `Node`, figura F.7), elementos (representados pela classe `Element`, figura F.8), funções de forma, carregamentos, combinações de carregamento, funções escalares, modelos de análise, materiais, modelos constitutivos e degenerações.

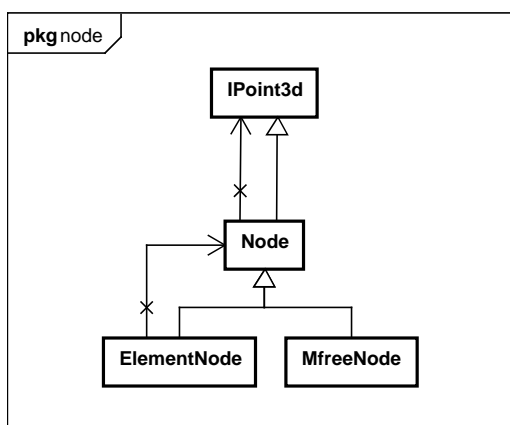


Figura F.7: Diagramas de classe para `Node`.

Tem ainda dois atributos: um modelo de análise global do tipo `AnalysisModel`

e um objeto `ProblemDriver`. `FemModel` estende também a classe `Observable`, pois é observada pela persistência. Juntamente à interface `Model` estão implementadas as classes `Node`, `Element` e `ProblemDriver`.

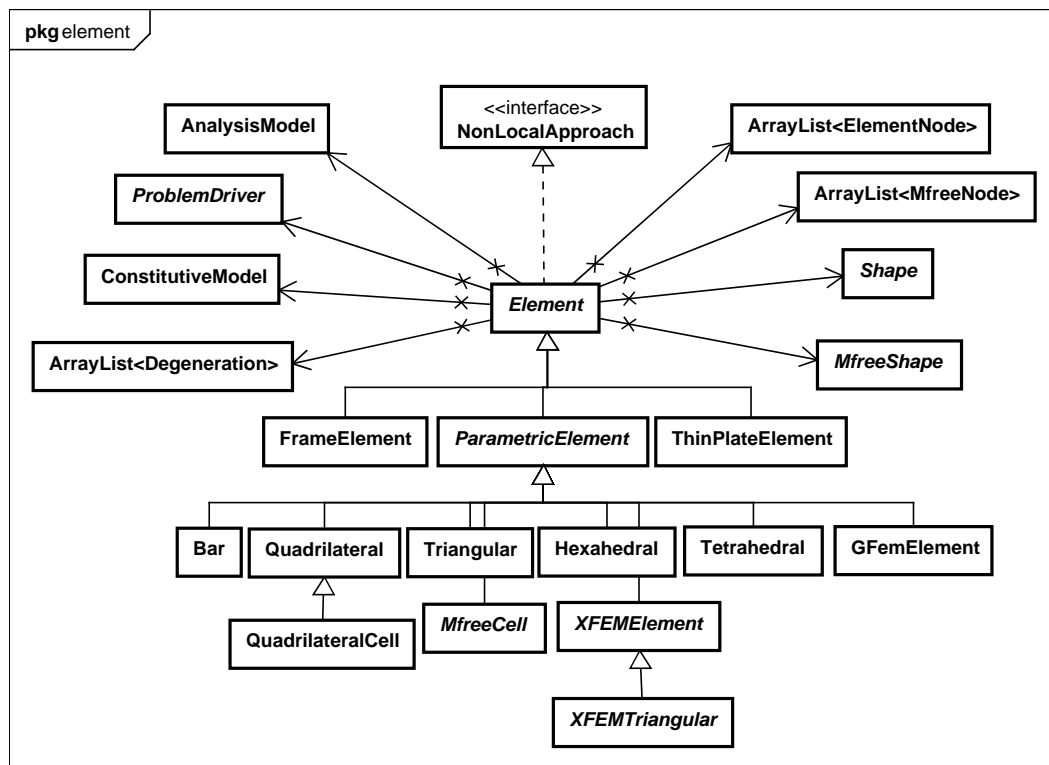


Figura F.8: Diagramas de classe para `Element`.

A interface `ProblemDriver` possui os métodos necessários para informar ao respectivo `Assembler` as parcelas de cada elemento na equação do modelo, sejam elas incrementais ou totais. Em sua hierarquia, como mostrado pela figura F.9, são representados diversos tipos de problemas e formulações de modelos discretos. Desta maneira, a classe `Element` é uma classe bastante geral, independente do problema que representa.

As funções de forma dos elementos finitos estão agrupadas na hierarquia da interface `Shape` (Figura F.10), que possui métodos responsáveis por fornecer às funções, suas primeiras derivadas e suas segundas derivadas. As funções são divididas de acordo com a geometria, podendo ser unidimensionais, triangulares, quadrilaterais, tetraédricos ou hexaédricos. E conforme cada a geometria tem-se a especialização

conforme a aproximação do função.

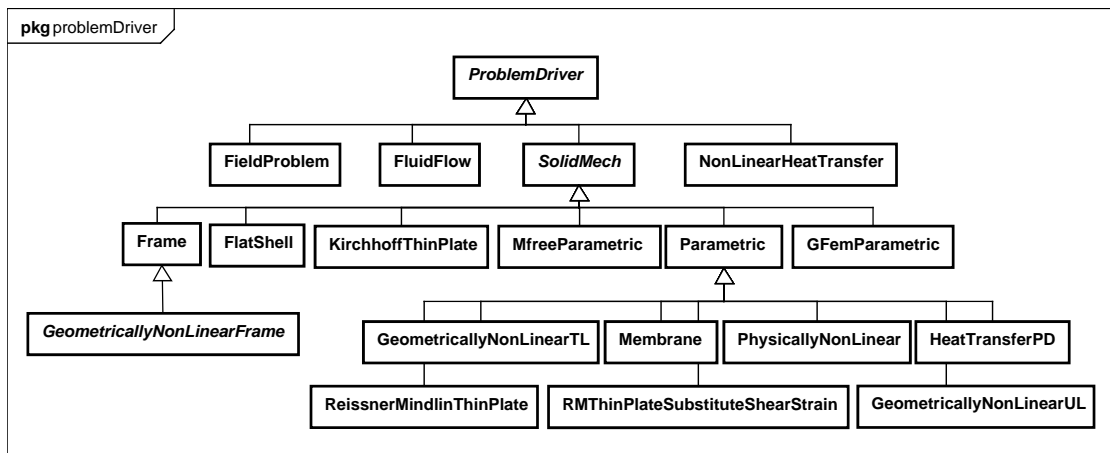


Figura F.9: Especializações da interface ProblemDriver.

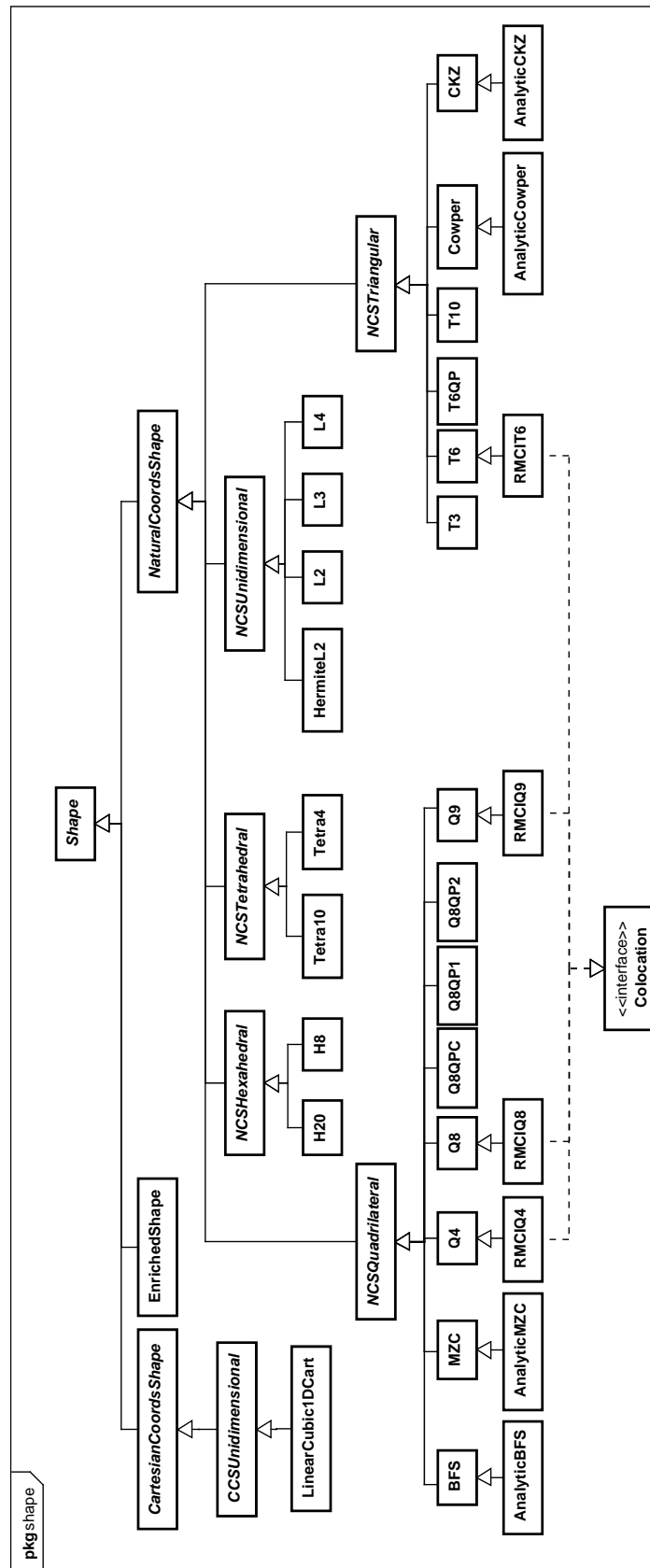


Figura F.10: Diagramas de classe para Shape.

F.2 Complemento: Projeto Orientado a Objetos da Implementação Realizada

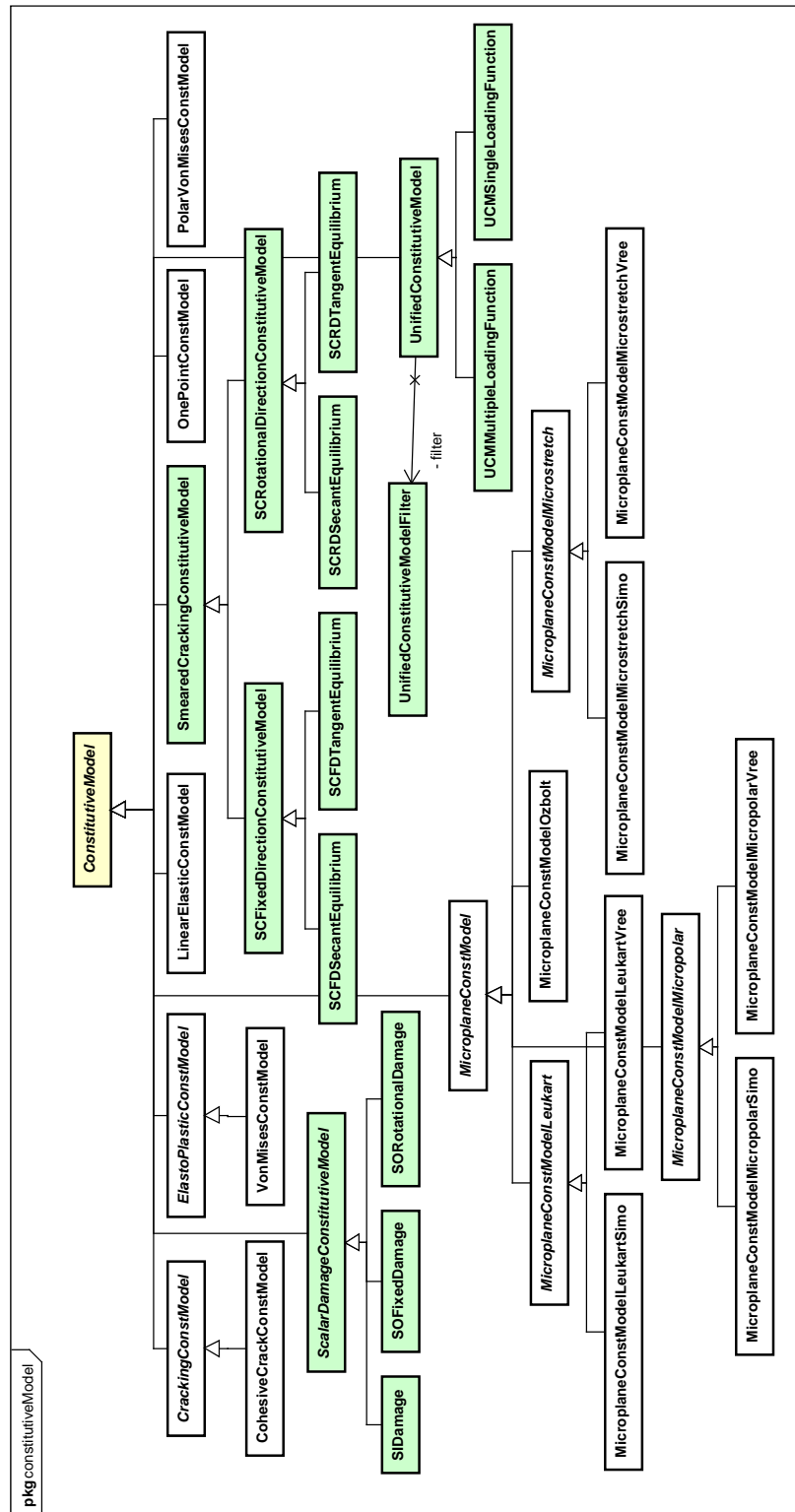


Figura F.11: Diagramas de classe para `ConstitutiveModel`.

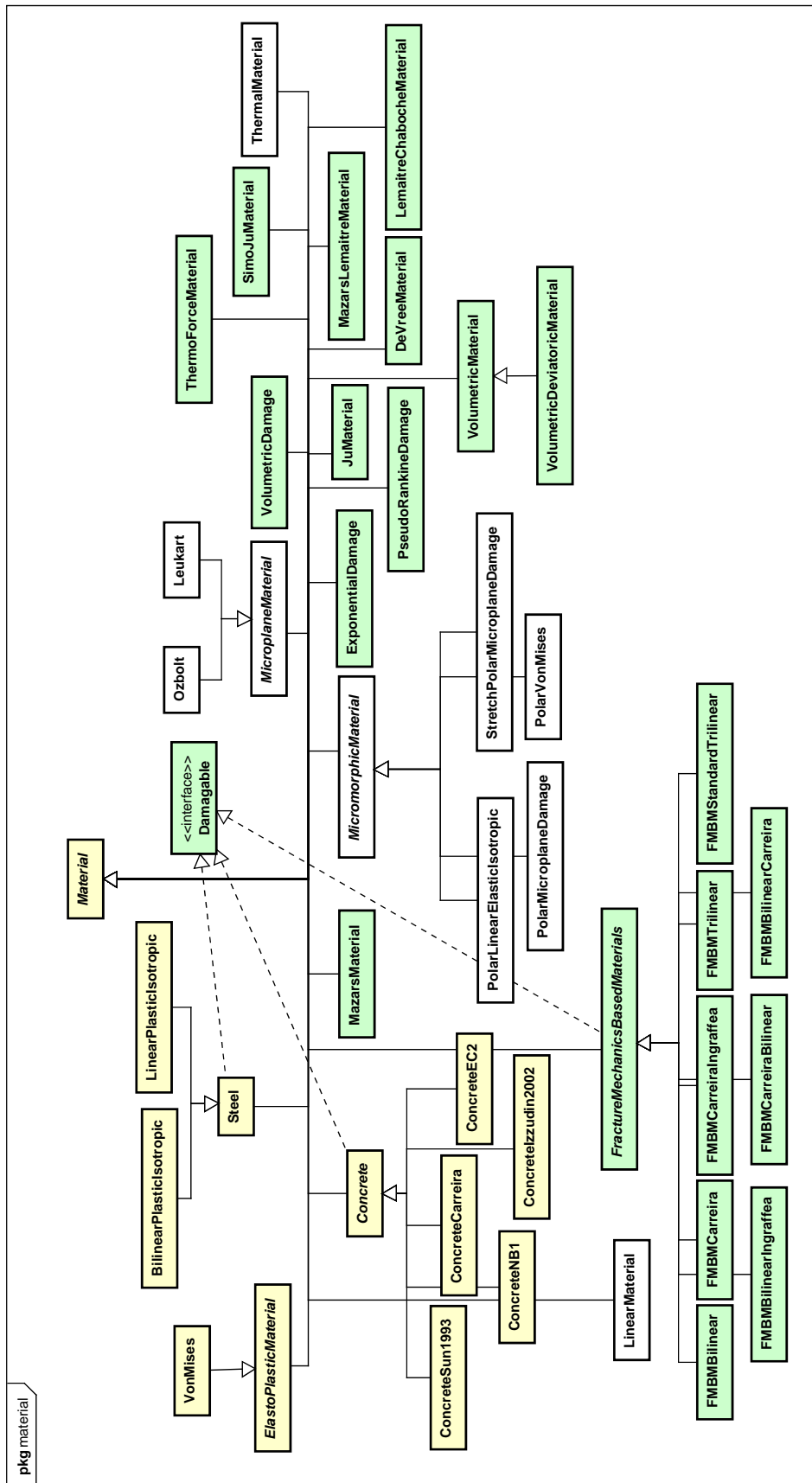


Figura F.13: Diagramas de classe para Material.

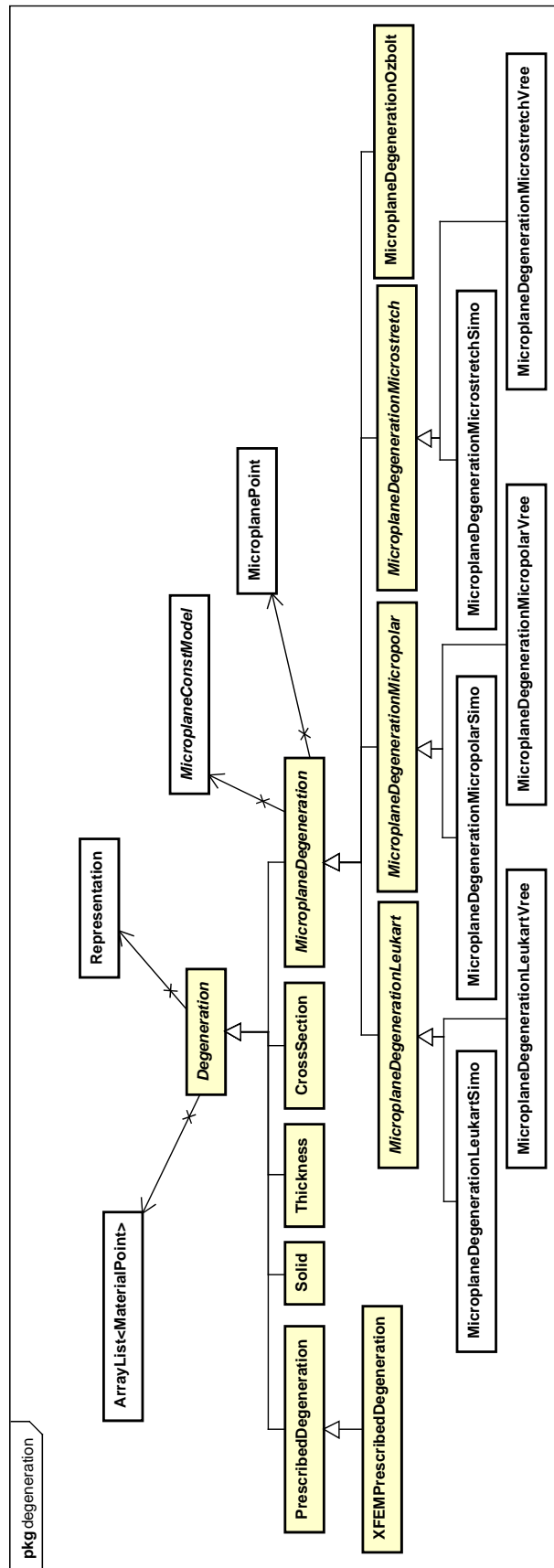


Figura F.14: Diagramas de classe para Degeneration.

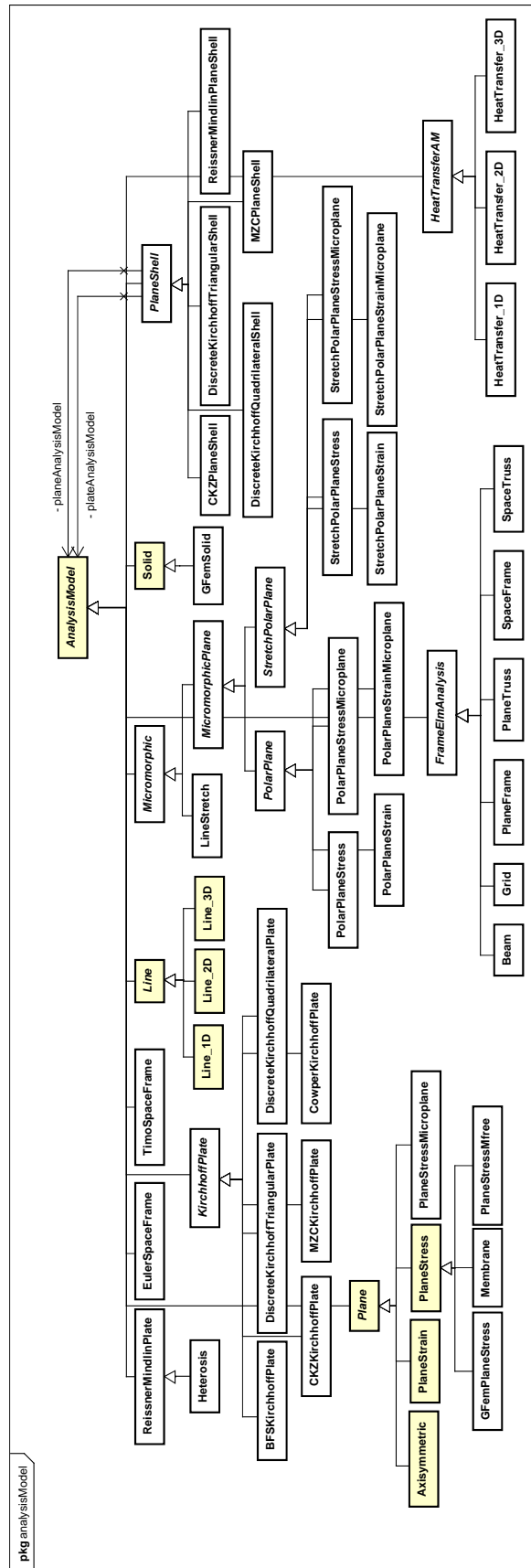


Figura F.15: Diagramas de classe para AnalysisModel.

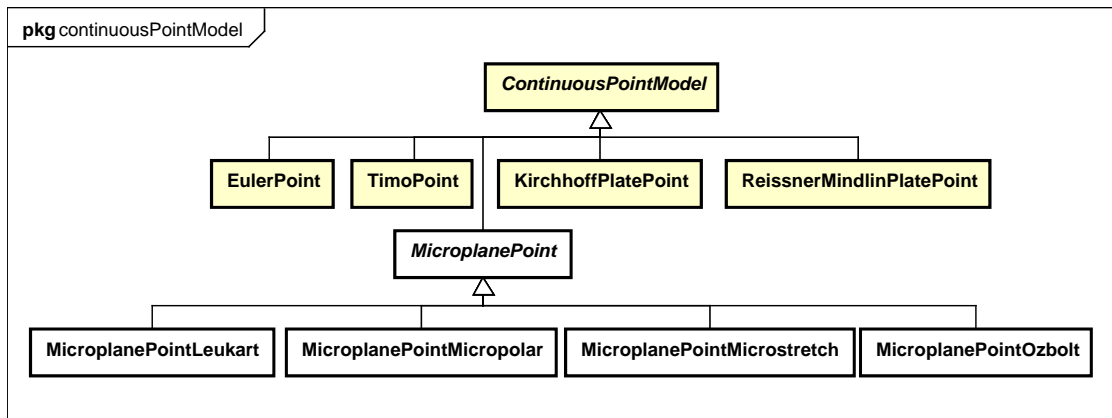


Figura F.16: Diagramas de classe para ContinuousPointModel.

Apêndice G

Obtenção dos Parâmetros dos Modelos de Dano

O modelo de dano volumétrico assume diversas variações da função de evolução do dano sendo que, a adoção dos parâmetros, baseia-se em modelos cujas propriedades são obtidas a partir de experimentos, como, por exemplo, o modelo de fissuração distribuída (resistência a tração e compressão, energia de fratura etc). Logo, partindo de simulações dos ensaios de tração e compressão pode-se obter os parâmetros do dano.

Álvares, em seu trabalho, estabelece relações de ensaios experimentais tradicionais (compressão direta e compressão diametral) aos parâmetros da função de dano de Mazars (1984) obtendo assim uma correlação ao modelo numérico. Desta forma, fazendo uso do modelo de dano de Mazars, na tração direta, com os parâmetros adotados por Álvares (que assumiu valores médios, encontrados na literatura, para A_t e B_t e a deformação equivalente limite, dada por κ_0 , obtida a partir do ensaio de compressão diametral) pode-se obter os parâmetros das funções de dano do modelo volumétrico. A figura G.1 apresenta as trajetórias de equilíbrio obtidas para as leis polinomial, linear e exponencial confrontadas com o modelo de Mazars.

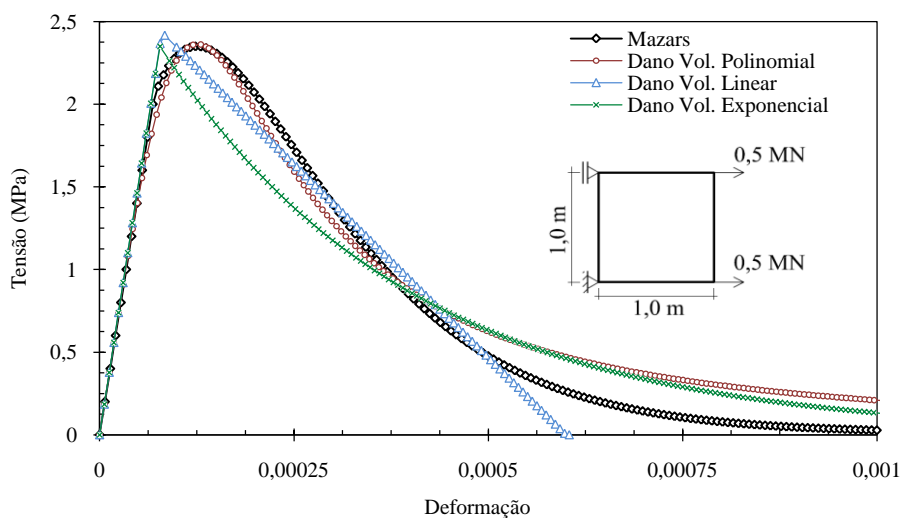


Figura G.1: Trajetórias de equilíbrio tensão \times Deformação na tração

Na compressão, os parâmetros das funções de dano para o modelo de Mazars (1984) e de dano volumétrico são obtidos a partir do experimento de compressão direta apresentado por Álvares (1993). As trajetórias de equilíbrio para as funções de evolução do dano polinomial, linear e exponencial, na compressão, e para o modelo de Mazars são mostradas na figura G.2.

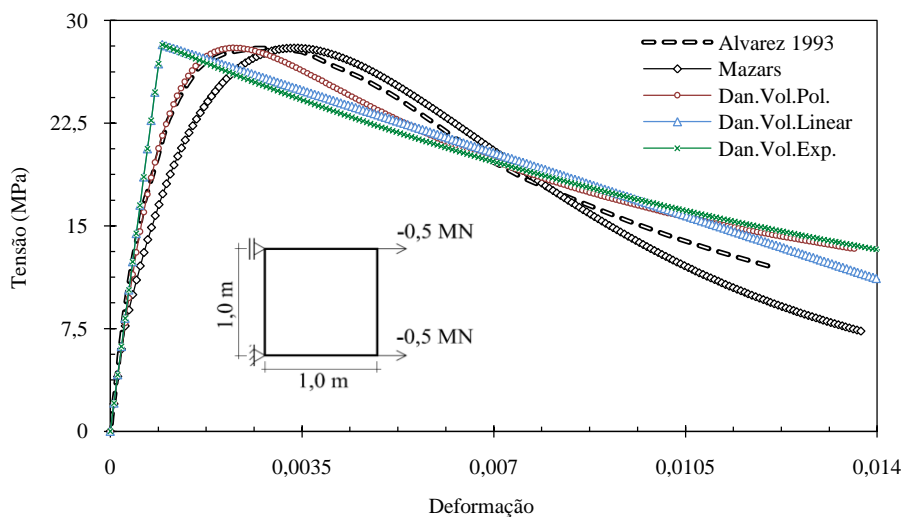


Figura G.2: Trajetórias de equilíbrio tensão \times Deformação na compressão

Os parâmetros obtidos, mostrados na tabela 9.8, foram adotados na modelagem apresentada na seção 9.5.