

**AMBIENTE TEÓRICO-COMPUTACIONAL UNIFICADO PARA
MODELOS CONSTITUTIVOS:
INCLUSÃO DE MODELO ELASTOPLÁSTICO COM DANO**

Anelize Borges Monteiro

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**AMBIENTE TEÓRICO-COMPUTACIONAL UNIFICADO PARA
MODELOS CONSTITUTIVOS:
INCLUSÃO DE MODELO ELASTOPLÁSTICO COM DANO**

Anelize Borges Monteiro

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira
PROPEEs - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Samuel Silva Penna
DEES - UFMG (Co-Orientador)

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros
PROPEEs - UFMG

Prof^ª. Dr^ª. Aurea Silva de Holanda
UFC

**Belo Horizonte
19 de Julho de 2013**

"E as pessoas nem sonham que quem acaba uma coisa nunca é aquele que a começou, mesmo que ambos tenham um nome igual, que isso só é que se mantém constante, nada mais."

"O Ano da Morte de Ricardo Reis", José Saramago.

Índice

Índice	ii
Lista de Tabelas	iv
Lista de Figuras	viii
Lista de Símbolos	ix
Lista de Abreviaturas e Siglas	xiv
Resumo	xv
Abstract	xvi
Agradecimentos	xvii
1 Introdução	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 O Projeto INSANE	2
1.3 Objetivos	3
1.3.1 Objetivo Geral	3
1.3.2 Objetivos Específicos	3
1.4 Organização do Texto	3
2 Modelo Elastoplástico com Dano	5
2.1 Fundamentos da Mecânica do Dano Contínuo	6
2.1.1 Tensão Efetiva	9
2.1.2 Deformação Efetiva	11
2.1.3 Princípio da Equivalência de Deformação	12
2.2 Termodinâmica dos Processos Irreversíveis	13
2.2.1 Estado Potencial	14
2.2.2 Potencial de Dissipação	16
2.3 Modelo Elastoplástico com Dano	19
2.3.1 Definição das Variáveis de Estado	19
2.3.2 Estado Potencial	22
2.3.3 Potencial de Dissipação	24

2.3.4	Resumo	26
3	Inclusão do Modelo Elastoplástico com Dano no Ambiente Unificado	28
3.1	Ambiente Unificado para Modelos Constitutivos	28
3.2	Modelo Elastoplástico com Dano segundo o Ambiente Unificado . . .	32
3.3	Funções de Endurecimento e Amolecimento	36
4	Implementações Computacionais	40
4.1	Organização do Núcleo Numérico do INSANE	41
4.2	Análise Estática Fisicamente Não Linear	43
4.3	Implementação do Modelo Elastoplástico com Dano	44
4.3.1	Classe abstrata <code>Material</code>	50
5	Simulações Numéricas	53
5.1	Variação da Lei Inelástica	54
5.1.1	Tração e Cisalhamento Puros	55
5.1.2	Parametrização da Lei Inelástica	59
5.2	Estabilidade Numérica	65
5.2.1	Dependência de Malha	65
5.2.2	Localização de Deformações	72
5.3	Exemplos de Validação	77
5.3.1	Ensaio de Tração Direta	78
5.3.2	Flexão Pura de uma Barra	84
5.3.3	Flexão em Três Pontos	92
6	Considerações Finais	100
6.1	Síntese do Conteúdo Apresentado	100
6.2	Conclusões	101
6.2.1	Variação da Lei Inelástica	101
6.2.2	Estabilidade Numérica	102
6.2.3	Exemplos de Validação	104
6.3	Sugestões para Trabalhos Futuros	107
	Referências Bibliográficas	109

Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros do aço AISI 1010. Adaptado de Benallal et al. (1987) <i>apud</i> de Souza Neto et al. (2008).	54
5.2	Parâmetros das funções inelásticas linear, exponencial e potencial para reprodução de plasticidade perfeita.	56
5.3	Parâmetros das funções inelásticas linear, exponencial e potencial para reprodução de endurecimento.	57
5.4	Parâmetros das funções inelásticas linear, exponencial e potencial para reprodução de amolecimento.	58
5.5	Parâmetros do material. (Lemaitre, 1992).	66
5.6	Parâmetros das funções linear, exponencial e potencial para reprodução de endurecimento.	66
5.7	Parâmetros das funções linear, exponencial e potencial para reprodução de amolecimento.	69
5.8	Parâmetros do material utilizado. Adaptado de de Souza Neto et al. (2008).	85
5.9	Parâmetros do material para a função exponencial.	88
5.10	Parâmetros do material: aço de alta resistência HY 130. (Mashayekhi et al., 2005).	94

Lista de Figuras

2.1	Volume representativo em um sólido com dano. Adaptado de Lemaitre (1992).	8
2.2	Elemento unidimensional danificado submetido à tração uniaxial. Adaptado de Lemaitre (1992).	9
2.3	Abertura de descontinuidades internas. Adaptado de Proença (2001).	11
2.4	Princípio da Equivalência de Deformação. Adaptado de Proença (2001).	12
2.5	Gráfico <i>tensão x deformação</i> e identificação do dano. Adaptado de Proença (2001).	13
2.6	Superfície potencial de dissipação e vetor de fluxo generalizado no espaço da força generalizada. Adaptado de Murakami (2012).	19
2.7	Estado unidimensional de tensão com endurecimento linear.	24
3.1	<i>Tensão de escoamento x evolução da variável interna.</i>	37
3.2	<i>Módulo pós-crítico x evolução da variável interna.</i>	37
3.3	<i>Tensão de escoamento x evolução da variável interna.</i>	38
3.4	<i>Módulo pós-crítico x evolução da variável interna.</i>	38
3.5	<i>Tensão de escoamento x evolução da variável interna.</i>	39
3.6	<i>Módulo pós-crítico x evolução da variável interna.</i>	39
4.1	Simbologia adotada na representação UML.	41
4.2	Organização geral do núcleo numérico do INSANE.	41
4.3	Diagrama de classes para <code>Persistence</code>	43
4.4	Diagrama de classes para <code>ConstitutiveModel</code>	46
4.5	Diagrama de classes para <code>UnifiedConstitutiveModelFilter</code>	47
4.6	Diagrama de classes para <code>ElastoPlasticConstitutiveModelFilter</code>	48
4.7	Interação entre classes para obtenção do tensor constitutivo tangente.	49
4.8	Diagrama de classes para <code>Material</code>	50

4.9	Diagrama de classes para <code>LemaitreMaterial</code>	51
4.10	Diagrama de classes para <code>InelasticLaw</code>	52
5.1	Geometrias, cargas e condições de contorno para as simulações de: (a) tração pura e (b) cisalhamento puro.	55
5.2	Curvas <i>Fator de Carga x Deslocamento Horizontal</i> do nó 3 para a plasticidade perfeita: (a) tração pura e (b) cisalhamento puro.	56
5.3	Curvas <i>Fator de Carga x Deslocamento Horizontal</i> do nó 3 para o endurecimento: (a) tração pura e (b) cisalhamento puro.	57
5.4	Curvas <i>Fator de Carga x Deslocamento Horizontal</i> do nó 3 para o amolecimento: (a) tração pura e (b) cisalhamento puro.	59
5.5	Variação do módulo pós-crítico \mathcal{H} para a função inelástica linear.	61
5.6	Variação do parâmetro a da função inelástica exponencial, com $b =$ $0, 40$	62
5.7	Variação do parâmetro b da função inelástica exponencial, com $a =$ 3300	62
5.8	Variação do parâmetro b para a função inelástica potencial, com $a =$ $1296, 71$, $n = 1, 0$ e $K = 0, 50$	63
5.9	Variação do parâmetro a para a função inelástica potencial, com $b =$ $1, 0645$, $n = 1, 0$ e $K = 0, 50$	64
5.10	Malhas de elementos finitos com indicação dos nós de controle: (a) 1, (b) 4, (c) 16, (d) 64, (e) 256 e (f) 1024 elementos.	65
5.11	Resultados de tração pura com reprodução de endurecimento com dano: (a) função linear, (b) função exponencial e (c) função potencial.	67
5.12	Resultados de tração pura com reprodução de endurecimento sem dano: (a) função linear, (b) função exponencial e (c) função potencial.	68
5.13	Resultados de tração pura com reprodução de amolecimento com dano: (a) função linear, (b) função exponencial e (c) função potencial.	70
5.14	Resultados de tração pura com reprodução de amolecimento sem dano: (a) função linear, (b) função exponencial e (c) função potencial.	71
5.15	Discretização em elementos finitos para um problema de localização de deformações.	72
5.16	Trajetórias de equilíbrio do nó 8 para $c = 4, 3, 2, 1$ e $0, 50 m$	73
5.17	Trajetórias de equilíbrio dos nós 8, 6 e 3 para $c = 0, 50 m$	74

5.18	<i>Tensão</i> (σ_{xx}) x <i>deformação</i> (ε_{xx}) de Pontos de Gauss dos elementos 1, 2 e 3 para $c = 0, 50 m$	75
5.19	Localização de deformações axiais ε_{xx}	76
5.20	Estado de dano.	76
5.21	<i>Dano</i> (D) x <i>deformação</i> (ε_{xx}) para o nó 6 e diferentes comprimentos c do elemento central.	77
5.22	Dimensões do corpo-de-prova.	78
5.23	Ensaio de tração direta: (a) modelo de um quarto da geometria usando condição de simetria; (b) malha de elementos finitos.	79
5.24	Curvas <i>carga normalizada</i> (P/P_L) x <i>deslocamento horizontal</i> (d_x) : do modelo de Lemaitre (1985 <i>a,b</i>) (a) com dano e (b) sem dano; do modelo apresentado por Mashayekhi et al. (2005) (c) com dano e (d) sem dano.	80
5.25	<i>Tensão</i> (σ_{xx}) x <i>deformação</i> (ε_{xx}) e <i>dano</i> (D) x <i>deformação</i> (ε_{xx}). . .	81
5.26	<i>Tensão</i> (σ_{xx}) x <i>dano</i> (D).	82
5.27	Isofaixas de valores de dano para a simulação de tração em uma barra.	82
5.28	Isofaixas de valores de tensão σ_{xx} para a simulação de tração em uma barra.	83
5.29	Flexão de uma barra com entalhe em V : definição do problema. Adaptado de de Souza Neto et al. (2008).	84
5.30	Modelo de elementos finitos de uma barra com entalhe em V	85
5.31	Comparação entre o resultado de Green (1953) e o resultado obtido pelo modelo de Lemaitre (1985 <i>a,b</i>) com utilização da função linear. . .	87
5.32	Comparação entre os resultados obtidos pelo modelo Lemaitre (1985 <i>a,b</i>) com a função exponencial reproduzindo (a) plasticidade perfeita, (b) endurecimento com dano e (c) endurecimento sem dano com o resul- tado analítico de Green (1953) (d).	88
5.33	<i>Tensão</i> (σ_{xx}) x <i>deformação</i> (ε_{xx}) e <i>dano</i> (D) x <i>deformação</i> (ε_{xx}). . .	89
5.34	<i>Tensão</i> (σ_{xx}) x <i>dano</i> (D) para o nó 5.	90
5.35	Isofaixas de valores de dano.	90
5.36	Comparação entre o resultado analítico de Green (1953) e os resulta- dos obtidos pelo modelo Lemaitre (1985 <i>a,b</i>) com a função linear re- produzindo plasticidade perfeita com: EPT, EPD sem confinamento e EPD com confinamento.	91

5.37	Ensaio de flexão em três pontos: geometria e dimensões.	93
5.38	Malha de elementos finitos e condição de carregamento para o ensaio de flexão em três pontos.	93
5.39	Curvas <i>carga normalizada</i> (P/P_L) x <i>CTOD</i> : do modelo de Lemaitre (1985 <i>a,b</i>) (a) com dano e (b) sem dano; (c) experimental de Giovanola et al. (1999); do modelo apresentado por Mashayekhi et al. (2005) (d) com dano e (e) sem dano.	95
5.40	<i>Tensão</i> (σ_{xx}) x <i>deformação</i> (ε_{xx}) e <i>dano</i> (D) x <i>deformação</i> (ε_{xx}). . .	97
5.41	<i>Tensão</i> (σ_{xx}) x <i>dano</i> (D).	97
5.42	Isofaixas de valores de dano para a simulação de flexão em três pontos.	98
5.43	Isofaixas de valores de tensão σ_{xx} para a simulação de flexão em três pontos.	99

Lista de Símbolos

A lista de símbolos é subdividida por capítulos.

Capítulo 2

Modelo Elastoplástico com Dano

δ_{ij}	Delta de Kronecker
ϵ	Deformação total
ϵ_{kl}	Componentes do tensor de deformação total
$\tilde{\epsilon}$	Deformação efetiva
ϵ^e	Deformação elástica
ϵ_{kl}^e	Componentes do tensor de deformação elástica
$\dot{\epsilon}^e$	Varição da deformação elástica
ϵ^p	Deformação plástica
ϵ_{kl}^p	Componentes do tensor de deformação plástica
$\dot{\epsilon}^p$	Varição da deformação plástica
Δl	Varição do comprimento
Δd	Abertura de descontinuidades internas
$\dot{\gamma}$	Multiplicador das equações de evolução do dano e da plasticidade
κ	Variável de endurecimento ou amolecimento
ρ	Densidade de massa
σ	Tensão normal
$\tilde{\sigma}$	Tensão normal efetiva
σ_{ij}	Componentes do tensor de tensão
ψ	Energia livre de Helmholtz
$\dot{\psi}$	Varição da energia livre de Helmholtz
ψ^d	Energia livre de deformação elástica afetada pelo dano
ψ^p	Energia livre devido ao endurecimento ou amolecimento

\mathbf{A}_k	Variáveis associadas às variáveis internas
A	Área total
\tilde{A}	Área íntegra
A_D	Área danificada
\mathbf{d}	Dissipação por unidade de volume do material
D_n	Variável de dano advinda do conceito de tensão efetiva
D^*	Variável de dano advinda do conceito de deformação efetiva
D	Variável de dano escalar
\dot{D}	Variação do dano
\mathbf{E}	Módulo de rigidez elástica
$\tilde{\mathbf{E}}$	Módulo de rigidez elástica secante
E_{ijkl}^0	Componentes do tensor de rigidez elástica
E_{ijkl}	Componentes do tensor de rigidez secante
F	Força de tração
\vec{F}	Força de tração na direção normal
\mathbf{g}	Gradiente de temperatura
$grad T$	Gradiente de temperatura
H	Módulo de endurecimento ou amolecimento generalizado
\mathbf{J}	Vetor de fluxo generalizado
$J_2(\mathbf{s})$	Segundo invariante do tensor de tensão desviador
l_0	Comprimento
$\vec{\mathbf{n}}$	Direção normal
N_{ij}	Componentes do tensor dos gradientes das funções potenciais no domínio das tensões
\mathbf{p}_k	Conjunto de variáveis internas
$\dot{\mathbf{p}}_k$	Variação das variáveis internas
\mathbf{q}	Vetor de fluxo de calor
Q	Função potencial de dissipação
Q^p	Função potencial de dissipação plástica
Q^d	Função potencial de dissipação de dano
R	Deformação plástica associada ao endurecimento ou amolecimento

\dot{R}	Variação da deformação plástica associada ao endurecimento ou amolecimento
r	Resistência de dano
S	Expoente de dano
\mathbf{s}	Tensor de tensão desviador
s_{ij}	Componentes do tensor de tensão desviador
s	Densidade de entropia
T	Temperatura
\dot{T}	Variação da temperatura
V_d	Volume de material danificado
\mathbf{X}	Vetor de forças generalizadas
Y	Taxa de variação da energia de dano

Capítulo 3

Inclusão do Modelo Elastoplástico com Dano no Ambiente Unificado

ε_{kl}	Componentes do tensor de deformação total
$\dot{\gamma}$	Multiplicador das equações de evolução do dano e da plasticidade
κ	Variável interna associada ao endurecimento ou amolecimento
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensão
σ_{ij}	Componentes do tensor de tensão
σ_0	Tensão de escoamento
a	Parâmetro do material
b	Parâmetro do material
\mathbf{C}	Tensor de flexibilidade
C_{ijkl}	Componentes do tensor de flexibilidade secante
\mathcal{D}_*	Conjunto das variáveis de dano
D	Variável de dano escalar
\dot{D}	Variação do dano
\mathbf{E}	Tensor de rigidez
E_{ijkl}	Componentes do tensor de rigidez secante
E_{ijkl}^t	Componentes do tensor de rigidez tangente
F_n	Funções potenciais
\mathbf{H}	Tensor pós-crítico no domínio das tensões

$\bar{\mathbf{H}}$	Tensor pós-crítico no domínio das deformações
H	Tensor pós-crítico de ordem zero no domínio das tensões
\bar{H}	Tensor pós-crítico de ordem zero no domínio das deformações
H_{nm}	Componentes do tensor pós-crítico no domínio das tensões
\bar{H}_{nm}	Componentes do tensor pós-crítico no domínio das deformações
\mathcal{H}	Módulo de endurecimento ou amolecimento generalizado
I_{ijkl}	Componentes do tensor identidade de segunda ordem
$J_2(\mathbf{s})$	Segundo invariante do tensor de tensão desviador
K	Deformação inicial do limite elástico
\mathbf{m}	Tensor das direções da degradação no domínio das tensões
$\bar{\mathbf{m}}$	Tensor das direções da degradação no domínio das deformações
m_{mkl}	Componentes do tensor das direções da degradação no domínio das tensões
\bar{m}_{mkl}	Componentes do tensor das direções da degradação no domínio das deformações
\mathbf{M}	Tensor das direções da variação do tensor de flexibilidade
$\bar{\mathbf{M}}$	Tensor das direções da variação do tensor de rigidez
M_{mijkl}	Componentes do tensor das direções da variação do tensor de flexibilidade
\bar{M}_{mijkl}	Componentes do tensor das direções da variação do tensor de rigidez
\mathcal{M}_{m*}	Direção da taxa de mudança das variáveis de dano no domínio da flexibilidade
$\bar{\mathcal{M}}_{m*}$	Direção da taxa de mudança das variáveis de dano no domínio da rigidez
n	Coefficiente de majoração ou minoração de κ
\mathbf{n}	Tensor das direções das funções potenciais no domínio das tensões
$\bar{\mathbf{n}}$	Tensor das direções das funções potenciais no domínio das deformações
n_{nkl}	Componentes do tensor dos gradientes das funções potenciais no domínio das tensões
\bar{n}_{nij}	Componentes do tensor dos gradientes das funções potenciais no domínio das deformações
\mathbf{p}	Vetor com variáveis internas
Q	Função potencial de dissipação
Q_m	Funções potenciais

Q^d	Função potencial de dissipação de dano
Q^p	Função potencial de dissipação plástica
\dot{R}	Varição da deformação plástica associada ao endurecimento ou amolecimento
r	Resistência de dano
S	Expoente de dano
s_{kl}	Componentes do tensor de tensão desviador
Y	Força termodinâmica conjugada à variável de dano no domínio da flexibilidade
\bar{Y}	Força termodinâmica conjugada à variável de dano no domínio da rigidez

Capítulo 4

Implementações Computacionais

$\delta\lambda$	Incremento do fator de carga
$\delta\dot{\mathbf{U}}$	Vetor de incrementos de deslocamentos
$\boldsymbol{\sigma}$	Vetor de tensões
\mathbf{A}	Matriz dos coeficientes associados a $\ddot{\mathbf{X}}$
\mathbf{B}	Matriz dos coeficientes associados a $\dot{\mathbf{X}}$
\mathbf{B}	Matriz das relações entre deformações e deslocamentos
\mathbf{C}	Matriz dos coeficientes associados à variável de estado
\mathbf{D}	Vetor das variáveis de estado duais
\mathbf{E}	Matriz constitutiva
\mathbf{F}	Vetor das forças nodais equivalentes a um estado de tensão interno
\mathbf{K}	Matriz de rigidez incremental
\mathbf{K}^e	Matriz de rigidez de um elemento finito
\mathbf{P}	Vetor das cargas de referência
\mathbf{Q}	Vetor das cargas residuais
V	Volume de um elemento finito
\mathbf{X}	Variáveis de estado do problema
$\dot{\mathbf{X}}$	Primeira variação temporal da variável de estado
$\ddot{\mathbf{X}}$	Segunda variação temporal da variável de estado

Lista de Abreviaturas e Siglas

AISI	<i>American Iron and Steel Institute</i>
ASTM	<i>American Society for Testing and Materials</i>
CTOD	<i>Crack Tip Opening Displacement</i>
DEES	Departamento de Engenharia de Estruturas
EPD	Estado Plano de Deformação
EPT	Estado Plano de Tensão
EVR	Elemento de Volume Representativo
FAPEMIG	Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais
INSANE	<i>INteractive Structural ANalysis Environment</i>
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MSM	Métodos Sem Malha
POO	Programação Orientada a Objetos
PROPEEs	Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UML	<i>Unified Modeling Language</i>
XML	<i>Extensible Markup Language</i>

Resumo

Monteiro, A. B., 2013. Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos: Inclusão de Modelo Elastoplástico com Dano. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

A formulação de modelos constitutivos combinada com a mecânica computacional é tema recorrente em diversas pesquisas e tem encorajado a investigação das respostas não lineares dos materiais e de suas influências sobre o comportamento estrutural. Neste contexto, esta dissertação investiga um modelo elastoplástico com dano. Para isto, utilizou-se o sistema computacional *INSANE* (*INteractive Structural ANalysis Environment*), cujo núcleo numérico contém o Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos proposto por Penna (2011). O Modelo Elastoplástico com Dano desenvolvido por Lemaitre (1985*a,b*) foi incorporado a este ambiente, considerando-se três leis de endurecimento ou amolecimento. O projeto de *software* desta inclusão mostrou-se eficiente e genérico, sendo possível implementar diversas funções de evolução do módulo inelástico. As simulações numéricas permitiram avaliar o ajuste dos parâmetros dos materiais, a estabilidade numérica do modelo e validá-lo através da reprodução de exemplos, comparando-se os resultados obtidos com os disponíveis na literatura.

Palavras-Chave: Modelagem Constitutiva, Análise Não Linear, Método dos Elementos Finitos.

Abstract

Monteiro, A. B., 2013. Unified Theoretical-Computational Environment to Constitutive Models: Inclusion of Elastoplastic Damage Model. Dissertation, Federal University of Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil.

The formulation of constitutive models combined with computational mechanics is a recurrent theme in several researches and it has encouraged the investigation of material nonlinear responses and their influences on structural behavior. In this context, this work investigates an elastoplastic damage model. To achieve this, the **INSANE** (INteractive Structural ANalysis Environment), whose numerical core contains the Unified Theoretical and Computational Environment to Constitutive Models proposal by Penna (2011), has been used. The Elastoplastic Damage Model of Lemaitre (1985*a,b*) has been incorporated on it and three hardening or softening laws have been considered. The software project of this inclusion was efficient and generic, making possible to implement different evolution functions of the inelastic modulus. Numerical simulations allowed evaluating the adjustment of the material parameters, the numerical stability of the model as well as validating it through the reproduction of examples, comparing the obtained results with the ones available in the literature.

Keywords: Constitutive Modeling, Nonlinear Analysis, Finite Element Method.

Agradecimentos

A Deus, por fazer esta caminhada ser um belo aprendizado e não ser solitária, mas repleta de pessoas maravilhosas.

À minha família, Lia, Manoel e Emanoeli, por acreditar na realização desta conquista e pelo amor e encorajamento demonstrados em todos os momentos. Por ensinar que a saudade e a distância podem fortalecer e motivar.

Aos Professores Roque Pitangueira e Samuel Penna, pela dedicada orientação, pelo apoio e incentivo irrestritos, pela valiosa paciência e por compartilhar, exemplarmente, o conhecimento.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas pela disponibilidade, atenção e prestatividade proporcionadas.

Aos amigos e colegas de INSANE que acompanharam e incetivaram a realização desta etapa.

À FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Iniciais

A formulação de modelos constitutivos combinada com a mecânica computacional é tema recorrente em diversas pesquisas e tem encorajado a investigação das respostas não lineares dos materiais e de suas influências sobre o comportamento estrutural.

Quando os materiais são sujeitos a condições diversas, como variação de temperatura, ações químicas, carregamentos mecânicos ou condições ambientais, desenvolvem-se defeitos microscópicos em todo o meio. Os defeitos distribuídos no meio material são responsáveis pelo início da fissuração, cuja coalescência e propagação levam à fratura final. Tal processo induz a deterioração da rigidez, resistência, estabilidade, vida residual, dentre outras propriedades. Os fenômenos de degradação progressiva que ocorrem nos materiais influenciam significativamente o comportamento estrutural e, por este motivo, uma grande quantidade de pesquisas tem sido conduzida neste campo.

A análise desses fenômenos geralmente é efetuada por intermédio de modelos constitutivos apropriados, capazes de representar as variações das propriedades e os processos de falha resultantes da nucleação, crescimento e propagação de trincas no material. Tais modelos são normalmente empregados juntamente com métodos numéricos consagrados, como o Método dos Elementos Finitos, que constitui recurso

adequado à solução de problemas não lineares, visto que é amplamente disseminado e aplicado em diversos *softwares* comerciais e acadêmicos de análise estrutural.

1.2 O Projeto INSANE

O projeto INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), vinculado ao grupo de pesquisa *Simulação Numérica e Computacional na Mecânica dos Sólidos e das Estruturas* do Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), está em andamento e visa ao desenvolvimento de um sistema computacional para a modelagem de estruturas. Tal sistema é composto de aplicações segmentadas, facilmente alteráveis e ampliáveis, caracterizado pela facilidade de uso, código livre, utilização da linguagem *Java* e total separação entre o núcleo numérico e as interfaces gráficas.

As pesquisas realizadas por Fonseca et al. (2004), Gonçalves (2004), Pitangueira e Caldas (2005), Almeida (2005), Germanio (2005), Fonseca (2006), Moreira (2006), Penna (2007), Saliba (2007), Camara (2007), Ferreira (2008), Fonseca (2008), Ajeje (2009), Fuina (2009), Wolff (2010), Penna (2011), Anacleto et al. (2011), Alves (2012), Silva (2012), Wolenski (2013), e os trabalhos desenvolvidos atualmente, compõem a versão atual do sistema, que dispõe de: (1) extensa biblioteca de modelos de análise, modelos constitutivos e métodos para soluções de equações não lineares; (2) modelos discretos do Método dos Elementos Finitos (MEF), do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), do Método de Elementos de Contorno (MEC) e dos Métodos Sem Malhas (MSM); (3) um Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos; e (4) interfaces gráficas interativas.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo Geral

Nesta dissertação, objetivou-se estudar um modelo constitutivo e incluí-lo no Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos, desenvolvido por Penna (2011), pertencente ao sistema INSANE. Para tanto, o Modelo Elastoplástico com Dano desenvolvido por Lemaitre (1985*a,b*) foi escolhido por reunir conceitos de dois importantes arcabouços teóricos da modelagem constitutiva, a saber: a Teoria da Plasticidade e a Mecânica do Dano Contínuo.

1.3.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos desta dissertação foram:

- (1) implementar no sistema INSANE o Modelo Elastoplástico com Dano proposto por Lemaitre (1985*a,b*);
- (2) realizar simulações numéricas considerando as diferentes leis de endurecimento ou amolecimento implementadas, ajustando os parâmetros dessas leis para a caracterização dos materiais analisados;
- (3) avaliar a estabilidade do modelo implementado, investigando a dependência de malha; e
- (4) comparar os resultados obtidos com este modelo com aqueles disponíveis na literatura.

1.4 Organização do Texto

O texto desta dissertação contém cinco capítulos, além desta introdução, descritos resumidamente a seguir.

O Capítulo 2 contempla os fundamentos da Mecânica do Dano Contínuo e apresenta o Modelo Elastoplástico com Dano proposto por Lemaitre (1985 *a, b*). No Capítulo 3, reescreve-se o modelo de Lemaitre (1985 *a, b*) segundo o Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos proposto por Penna (2011). Destacam-se as equações para o cálculo das tensões, os tensores constitutivos e as funções que descrevem o endurecimento ou amolecimento dos materiais. O Capítulo 4 compreende o projeto orientado a objetos da implementação realizada, sendo apresentadas classes e interfaces criadas e alteradas no núcleo numérico do **INSANE**. O Capítulo 5 apresenta as simulações numéricas realizadas com o modelo implementado. No Capítulo 6 são relatadas as conclusões advindas da realização deste trabalho e as perspectivas de trabalhos futuros oriundos desta dissertação.

Capítulo 2

Modelo Elastoplástico com Dano

Um dos arcabouços teóricos mais utilizados para a modelagem constitutiva é a Teoria da Plasticidade. Segundo esta teoria, o comportamento inelástico dos materiais é descrito pela quantificação do crescimento de deformações plásticas. Entretanto, Lemaitre (1984) verificou experimentalmente, para muitos materiais, que a energia de dissipação associada com a nucleação e crescimento de vazios e microtrincas, que acompanha o crescimento de deformações plásticas, possuía um efeito dominante. Segundo Mashayekhi et al. (2005), este fato sugeriu que a previsão de ruptura e das propriedades finais dos materiais necessitavam da consideração de acoplamento entre plasticidade e dano.

As equações básicas para modelar o acoplamento entre os comportamentos de deformação plástica e de dano foram escritas por Lemaitre (1985*a,b*) segundo o arcabouço teórico da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis.

De acordo com Lemaitre (1985*b*), comumente efetuam-se três etapas para se prever as condições de falha em cálculos estruturais:

1. os campos de tensão e de deformação são primeiramente calculados com equações constitutivas elástica, plástica ou viscoplástica e um método de cálculo adaptado ao problema, como o Método dos Elementos Finitos;
2. os resultados obtidos na primeira etapa são utilizados para calcular a condição da iniciação de uma macrotrinca; e

3. o crescimento e propagação da trinca através da estrutura são analisados por meio da Mecânica da Fratura, sendo utilizados conceitos de fatores de intensidade de tensão ou taxa de liberação de energia de deformação.

Estes procedimentos assumem implicitamente que o estado de dano da estrutura não influi nos estados de tensão ou deformação e que não há acoplamento entre as equações constitutivas das diferentes etapas. Com os avanços da Mecânica Computacional, Lemaitre (1985*b*) enfatizou que a hipótese de desacoplamento deveria ser substituída pela hipótese de acoplamento que, do ponto de vista físico, é decorrente da natureza do dano.

Lemaitre (1985*b*) ressaltou que a utilização de equações constitutivas desacopladas acarreta a ocorrência de pequenos erros em tensão ou deformação caso o carregamento não esteja próximo às condições de ruptura. Entretanto, esses erros podem ser da ordem de 10 a 50% quando há a iminência de fraturamento do material. Deste modo, para prever a ruptura de estruturas com boa acurácia, é necessário utilizar equações constitutivas acopladas.

Bouchard et al. (2011) argumentaram que, ao contrário das aproximações desacopladas, há maior dificuldade em se implementar em *softwares* numéricos modelos de dano acoplados, mas os resultados obtidos se aproximam mais do fenômeno de dano e proporcionam uma melhor representação da evolução progressiva do dano e de como ela leva à fratura.

Conforme o que foi explicitado, neste capítulo serão apresentados os fundamentos da Mecânica do Dano Contínuo, o arcabouço teórico da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis e o Modelo Elastoplástico com Dano de Lemaitre (1985*a,b*).

2.1 Fundamentos da Mecânica do Dano Contínuo

De acordo com Lemaitre (1992), o dano de materiais é um processo progressivo pelo qual os mesmos se deterioram. Trata-se do estudo, por intermédio de variáveis

mecânicas, de mecanismos envolvidos nesta deterioração quando os materiais são submetidos a carregamento. Neste estudo, as propriedades atribuídas aos meios contínuos devem ser determinadas a partir de análise em diferentes escalas.

Em nível microescalar, há o acúmulo de microtensões na vizinhança de defeitos ou interfaces e quebra de ligações, que deterioram o material. Em nível mesoescalar, há o crescimento e a coalescência de microfissuras ou microvazios que juntos iniciam uma trinca. Em nível macroescalar, há o crescimento e a propagação da fratura. Os dois primeiros estágios podem ser estudados por meio de variáveis de dano da Mecânica do Contínuo, definidas no nível mesoescalar. O terceiro estágio normalmente é estudado usando a Mecânica da Fratura, com variáveis definidas na macroescala.

Quando se estudam materiais, tais como metais e ligas, polímeros e compósitos, cerâmicas, rochas, concreto e madeira, observa-se que tais materiais, constituídos por diferentes estruturas físicas, são similares em seus comportamentos mecânicos qualitativos. Conforme Lemaitre (1992), todos apresentam comportamento elástico, escoamento, forma plástica ou deformação irreversível, anisotropia induzida por deformação, ciclo de histerese, dano por carregamento monotônico ou fadiga e crescimento de trinca sob cargas estáticas ou dinâmicas. Isto significa que as propriedades mesoscópicas comuns podem ser explicadas por mecanismos de dissipação de energia que são similares para todos aqueles materiais.

Lemaitre (1992) afirmou que esta é a principal razão a partir da qual é possível explicar o comportamento material com eficácia através da Mecânica do Contínuo e processos termodinâmicos de irreversibilidade, que modelam os materiais sem especificar referência à complexidade de suas microestruturas físicas.

A Mecânica do Dano foi introduzida por Kachanov (1958), sendo o dano admitido como uma variável de natureza escalar. Rabotnov (1969) *apud* Chaboche (1987) utilizou a variável dano como um redutor da rigidez inicial do material e

Lemaitre e Chaboche (1990) a formalizaram em termos da termodinâmica dos processos irreversíveis.

O dano pode ser interpretado na microescala como a criação de microsuperfícies de descontinuidade, tais como quebra de ligações atômicas e alargamento de microcavidades. Na mesoescala, o número de quebras ou padrões de microcavidades pode ser aproximado em um plano pela área das intersecções de todas as falhas com aquele plano. Esta área é dimensionada pelo tamanho do Elemento de Volume Representativo (EVR), conforme apresenta a Figura 2.1.

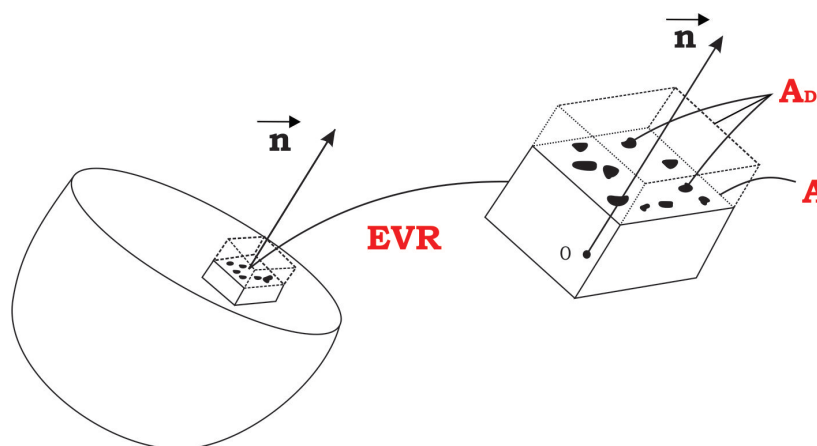


Figura 2.1: Volume representativo em um sólido com dano. Adaptado de Lemaitre (1992).

No EVR, as dimensões são grandes o suficiente para admitir a homogeneidade da distribuição dos defeitos, mas suficientemente pequenas para evitar gradientes elevados de grandezas locais de interesse, tais como as deformações. Admite-se continuidade das funções representativas dos fenômenos que ocorrem no EVR e as propriedades medidas são valores médios que podem ser associados a um ponto material.

A respeito do significado físico das variáveis de dano, é conveniente separar as teorias da Mecânica do Dano Contínuo em duas categorias principais: modelos micromecânicos e modelos fenomenológicos, segundo de Souza Neto et al. (2008).

Em modelos micromecânicos, a variável de dano deve representar uma média

dos defeitos microscópicos que caracteriza o estado de deterioração interna. Já em modelos fenomenológicas, a variável de dano pode ser definida com base na influência que a degradação interna exerce nas propriedades macroscópicas do material. Em particular, propriedades tais como o módulo de elasticidade, a tensão de escoamento, a densidade e a resistência elétrica podem ser fortemente afetadas pela presença de dano na forma de cavidades microscópicas. A medida de tais quantidades é, em geral, mais fácil do que a determinação da geometria ou distribuição de microdefeitos.

Com base nesses conceitos, a classe de modelos apresentada por Lemaitre e Chaboche (1990) utiliza a degradação do módulo elástico como medida macroscópica do dano. Sob condições isotrópicas ideais, a variável de dano é um valor escalar e sob anisotropia trata-se de um tensor de segunda ordem (Lemaitre et al., 2000).

2.1.1 Tensão Efetiva

A Figura 2.2 ilustra o EVR tracionado por uma força $\vec{F} = F\vec{n}$.

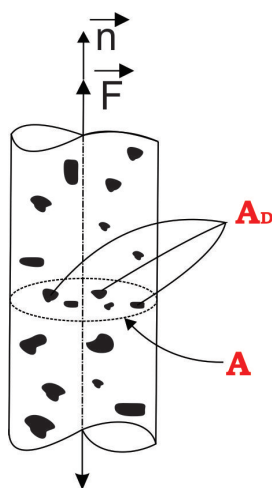


Figura 2.2: Elemento unidimensional danificado submetido à tração uniaxial. Adaptado de Lemaitre (1992).

A tensão uniaxial normal na seção genérica (Figura 2.2) é dada por:

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (2.1)$$

A área total (A) menos a área íntegra (\tilde{A}) é denominada área danificada:

$$A_D = A - \tilde{A}. \quad (2.2)$$

A variável dano é definida como segue:

$$D_n = \frac{A_D}{A}. \quad (2.3)$$

Conforme Lemaitre (1985a), do ponto de vista físico, a variável D_n é a área de trincas e cavidades por unidade de superfície cortada por um plano perpendicular a \vec{n} . Segundo o autor, têm-se as seguintes correspondências referentes à variável de dano:

1. $D_n = 0$ corresponde ao estado íntegro;
2. $D_n = 1$ corresponde à ruptura do elemento;
3. $0 < D_n < 1$ caracteriza o estado danificado.

No caso geral, as trincas e os vazios são orientados e D_n é uma função de \vec{n} . Isto leva a uma variável de dano intrínseca que pode ser uma grandeza escalar, vetorial ou tensorial, dependendo da hipótese utilizada. Em Lemaitre (1985a), considerou-se o dano isotrópico, sendo as trincas e os vazios igualmente distribuídos em todas as direções. Em consequência, D_n não depende de \vec{n} e a variável de dano intrínseca é o escalar D . Desse modo, denota-se que o dano é escalar quando há distribuição uniforme dos microdefeitos e vetorial ou tensorial quando tal distribuição depende da orientação da normal a A , conforme apresenta a Figura 2.2.

A reorganização das equações (2.2) e (2.3) leva a:

$$\tilde{A} = A - A_D = A(1 - D). \quad (2.4)$$

A tensão normal efetiva é dada por:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{A}} = \frac{F}{A(1 - D)} = \frac{\sigma}{(1 - D)}. \quad (2.5)$$

Lemaitre (1985a) afirmou que, juntamente com a hipótese de isotropia, foi assumido em seu trabalho que os efeitos mecânicos das cavidades e microtrincas são os mesmos tanto para tração quanto para compressão. O autor destacou que, como isto geralmente não ocorre na prática, há a limitação da aplicabilidade da teoria para os casos em que as deformações de compressão são pequenas.

2.1.2 Deformação Efetiva

Existe um conceito dual ao da tensão efetiva, postulado na mesoescala. Conforme ilustra a Figura 2.3, se Δl é a variação do comprimento l_0 , a medida de deformação linear nominal é definida como:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.6)$$

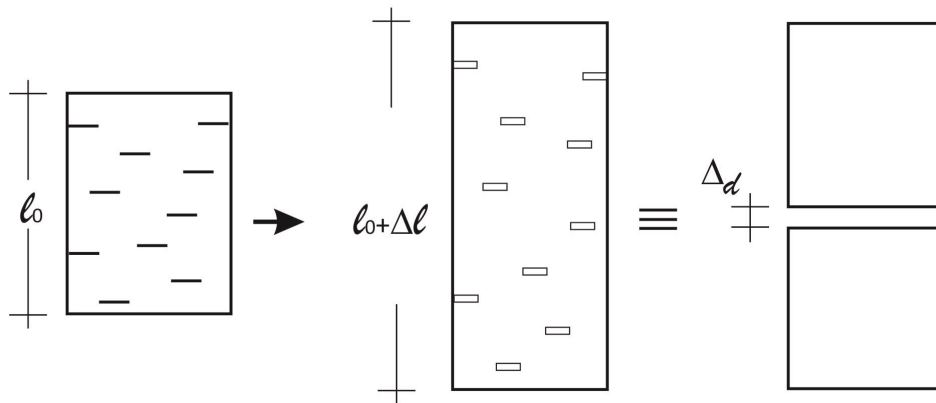


Figura 2.3: Abertura de descontinuidades internas. Adaptado de Proença (2001).

Se o elemento possuir defeitos iniciais ou descontinuidades internas, os mesmos se abrem de certa quantidade, Δd , pois consiste em um movimento de corpo rígido, não contribuindo para a deformação do meio, conforme ilustra a Figura 2.3. Esta quantidade deve ser descontada do incremento de alongamento, definindo-se, assim, uma medida efetiva de deformação, por:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\Delta l - \Delta d}{l_0}. \quad (2.7)$$

A quantificação da parcela de alongamento oriunda do dano é dada por:

$$D^* = \frac{\Delta d}{\Delta l}. \quad (2.8)$$

Introduzindo a equação (2.8) na equação (2.7) e usando a medida de deformação linear nominal, dada na equação (2.6), tem-se:

$$\tilde{\varepsilon} = (1 - D^*)\varepsilon. \quad (2.9)$$

Calculando o volume de material danificado por meio da área danificada A_D ou por meio da área total A , tem-se:

$$V_d = A_D \Delta l = A \Delta d. \quad (2.10)$$

Substituindo as definições de D e D^* em (2.10), obtém-se:

$$D = D^*. \quad (2.11)$$

2.1.3 Princípio da Equivalência de Deformação

Lemaitre (1985a) assumiu que o comportamento em deformação é modificado pelo dano somente por conta da tensão efetiva. Em um material danificado, tal comportamento é representado pelas equações constitutivas do material íntegro, ou seja, sem qualquer dano, sendo a tensão substituída pela tensão efetiva. Para o caso uniaxial, o Princípio da Equivalência de Deformação é representado pela Figura 2.4.

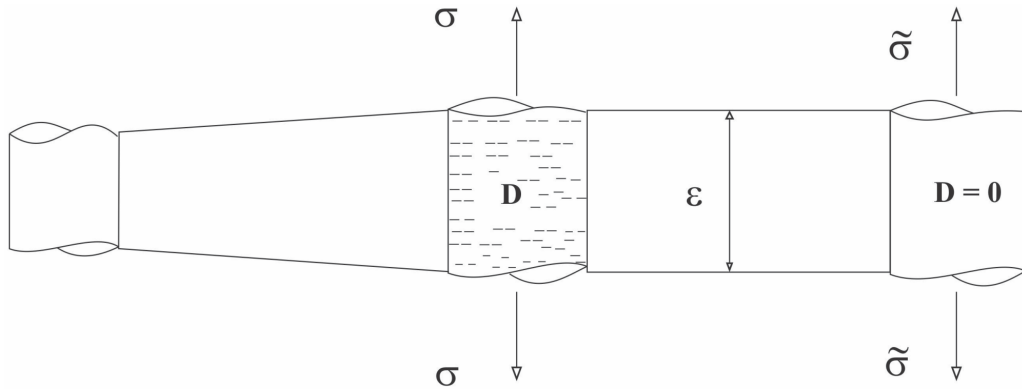


Figura 2.4: Princípio da Equivalência de Deformação. Adaptado de Proença (2001).

A equação (2.12) apresenta a substituição da tensão pela tensão efetiva:

$$\frac{\sigma}{1 - D} = \mathbf{E}\varepsilon. \quad (2.12)$$

Tal equação permite definir o módulo de rigidez elástica secante como:

$$\tilde{\mathbf{E}} = (1 - D)\mathbf{E}, \quad (2.13)$$

em que $(1 - D)$ corresponde à integridade do material.

A equação (2.14) e a Figura 2.5 permitem identificar o dano como:

$$D = 1 - \left(\frac{\tilde{\mathbf{E}}}{\mathbf{E}} \right). \quad (2.14)$$

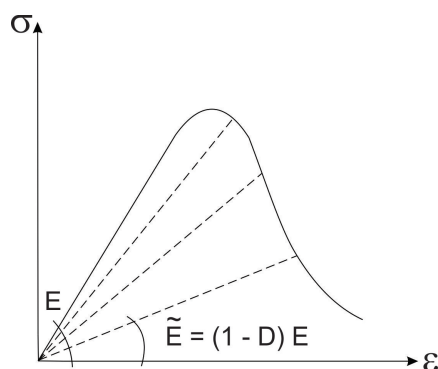


Figura 2.5: Gráfico *tensão x deformação* e identificação do dano. Adaptado de Proença (2001).

2.2 Termodinâmica dos Processos Irreversíveis

Neste subitem são apresentadas, em síntese, as bases termodinâmicas que compõem a teoria dos modelos constitutivos para meios contínuos.

Coleman e Gurtin (1967) afirmaram que, juntamente com a condução de calor, os efeitos dissipativos acompanham as deformações e podem ser considerados de diferentes modos. Dentre as principais formas citadas pelos autores, destaca-se a que postula a existência de variáveis de estado internas que influenciam a energia livre e cujas taxas de variação são governadas por equações diferenciais.

Neste sentido, conforme Lemaitre (1992), o arcabouço teórico da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis usa os conceitos de Estado Potencial e Potencial de Dissipação, descritos a seguir.

2.2.1 Estado Potencial

De acordo com de Souza Neto et al. (2008), o estado termodinâmico de um sistema pode ser completamente determinado por um número finito de variáveis de estado, relacionadas aos fenômenos que o modelo descreverá. Estas variáveis são divididas em duas categorias: observáveis e internas. Por variáveis observáveis entendem-se aquelas que podem ser medidas experimentalmente e por variáveis internas aquelas relacionadas aos mecanismos dissipativos e que não são diretamente quantificadas.

Murakami (2012) afirma que a adoção das variáveis observáveis *deformação total* $\boldsymbol{\varepsilon}$ e *temperatura* T permite quantificar fenômenos mecânicos, tais como as deformações elástica, viscoelástica e plástica, bem como o dano e a fissuração. A escolha das variáveis internas, segundo o autor, está atrelada à representação adequada das mudanças do estado interno do material sendo, portanto, dependente do fenômeno a ser descrito.

Definidas as variáveis observáveis ($\boldsymbol{\varepsilon}$ e T) e as variáveis internas, agrupadas no conjunto \mathbf{p}_k ($k = 1, 2, 3, \dots$), postula-se a existência de um potencial termodinâmico do qual as leis de estado podem ser derivadas. O estado potencial é escrito em função das variáveis de estado. A *energia livre de Helmholtz*, definida em regime de pequenos deslocamentos e deformações, por exemplo, é um potencial possível:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{p}_k). \quad (2.15)$$

Assume-se que as deformações totais, $\boldsymbol{\varepsilon}$, podem ser divididas em uma parcela elástica e uma plástica da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p. \quad (2.16)$$

Uma vez que a parcela $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ pode ser entendida como mais uma variável interna, a energia livre pode ser escrita em termos das deformações elásticas, temperatura e variáveis internas na forma:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, \mathbf{p}_k). \quad (2.17)$$

Logo, a taxa de variação desta energia é dada por:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}_k} : \dot{\mathbf{p}}_k. \quad (2.18)$$

Na termodinâmica dos processos irreversíveis, um sistema está em equilíbrio termodinâmico se, para certo estado, os valores das variáveis de estado são independentes do tempo. Neste sentido, a conservação da energia de um sistema é tratada pela primeira lei da termodinâmica, enquanto a segunda lei impõe que, em um processo qualquer de transformação de um sistema, a variação total de entropia deve ser igual ou superar a variação provocada pela transferência de calor.

Conforme Pituba (2009), a primeira e a segunda leis da termodinâmica podem ser combinadas, levando a uma desigualdade que deve ser observada para que um processo seja termodinamicamente admissível. A denominada *inequação de Clausius-Duhem* deve ser satisfeita para todos os processos termodinâmicos do meio contínuo, segundo Malvern (1969). Portanto, ela impõe restrições essenciais às equações constitutivas e garante a fundamentação termodinâmica da teoria constitutiva de processos dissipativos do contínuo. Esta inequação é definida por:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho(\dot{\psi} + \dot{T}s) - \mathbf{q} \cdot \frac{\text{grad } T}{T} \geq 0, \quad (2.19)$$

em que ρ é densidade de massa, \mathbf{q} é o vetor de fluxo de calor e s é a densidade de entropia.

Substituindo (2.16) e (2.18) na inequação de Clausius-Duhem, obtém-se:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}_k} : \dot{\mathbf{p}}_k - \frac{\text{grad } T}{T} \cdot \mathbf{q} \geq 0. \quad (2.20)$$

Esta expressão deve satisfazer todos os processos termodinâmicos descritos pela equação (2.17). Logo, supondo que o meio esteja sujeito apenas a deformações

elásticas e a temperatura uniforme e que as variáveis internas não são alteradas, tem-se:

$$\text{grad } T = 0; \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = 0; \quad \dot{\mathbf{p}}_k = 0. \quad (2.21)$$

Assim, a inequação (2.20) é reescrita na forma:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} \geq 0. \quad (2.22)$$

Como esta inequação deve ser satisfeita para quaisquer valores de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$ e \dot{T} , tem-se as definições para a tensão, associada à variável de estado $\boldsymbol{\varepsilon}^e$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}, \quad (2.23)$$

e para a entropia, associada à variável de estado T :

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (2.24)$$

Deste modo, o estado potencial, fornecido pela energia livre de Helmholtz, define as leis de estado dadas pelas equações (2.23) e (2.24), que permitem escrever as relações entre as variáveis de estado observáveis e as variáveis a elas associadas sendo, portanto, as equações constitutivas do meio material.

2.2.2 Potencial de Dissipação

Do item anterior, verifica-se que o estado potencial permite escrever as relações entre as variáveis observáveis e as associadas. Conforme Lemaitre e Chaboche (1990), para as variáveis internas, o estado potencial é capaz de definir as suas variáveis associadas, mas não de estabelecer relações entre elas. Segundo os autores, a descrição do processo de dissipação, no que tange, principalmente, a evolução das variáveis internas, necessita de equações de evolução (ou leis complementares), determinadas através de um potencial de dissipação.

O potencial de dissipação é uma função escalar escrita em termos das variáveis associadas, cujo objetivo é estabelecer leis de evolução para as variáveis internas.

A substituição das equações (2.23) e (2.24) na inequação (2.20) leva a:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}_k} : \dot{\mathbf{p}}_k - \frac{\text{grad } T}{T} \cdot \mathbf{q} \geq 0, \quad (2.25)$$

logo, pode-se definir que

$$\mathbf{A}_k \equiv -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{p}_k}; \quad (2.26)$$

$$\mathbf{g} \equiv -\text{grad } T, \quad (2.27)$$

em que \mathbf{A}_k representa as variáveis associadas às variáveis internas \mathbf{p}_k e \mathbf{g} é o próprio gradiente de temperatura.

Reescrevendo a inequação (2.25), tem-se:

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \mathbf{A}_k : \dot{\mathbf{p}}_k + \left(\frac{\mathbf{g}}{T} \right) \cdot \mathbf{q} \geq 0, \quad (2.28)$$

em que \mathbf{d} denota a dissipação por unidade de volume do material, composta pela soma das dissipações: associada à evolução das deformações plásticas, associada à evolução das variáveis internas e térmica por calor. A denominada *inequação de dissipação* (2.28) estipula que a dissipação provocada pela alteração do estado interno é sempre positiva.

Na inequação (2.28) é possível observar que a dissipação \mathbf{d} é obtida pelo produto escalar do vetor das variáveis associadas, também conhecido como *vetor de forças generalizadas*, com o vetor de fluxo das variáveis dissipativas, ou *vetor de fluxo generalizado*. Assim, define-se:

$$\mathbf{X} \equiv \{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{A}_k, \mathbf{g}/T\}; \quad (2.29)$$

$$\mathbf{J} \equiv \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\mathbf{p}}_k, \mathbf{q}\}, \quad (2.30)$$

em que \mathbf{X} é o vetor de forças generalizadas e \mathbf{J} é o vetor de fluxo generalizado.

A expressão (2.28) é reescrita novamente como:

$$\mathbf{d} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{J} \geq 0. \quad (2.31)$$

O fluxo generalizado \mathbf{J} representa a taxa de mudança das variáveis internas, enquanto as forças generalizadas \mathbf{X} estão associadas às variáveis internas.

Neste contexto, define-se a função potencial de dissipação como:

$$Q = Q(\mathbf{X}, \mathbf{p}_k, T). \quad (2.32)$$

Assim, a evolução das variáveis dissipativas que compõem o vetor \mathbf{J} pode ser calculada por intermédio da função Q como:

$$\mathbf{J} = \dot{\gamma} \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{X}}, \quad (2.33)$$

onde $\dot{\gamma}$ é o multiplicador das equações de evolução do dano e da plasticidade. Desta forma, é possível explicitar as taxas das variáveis dissipativas $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, $\dot{\mathbf{p}}_k$ e \mathbf{q} a partir de derivadas sobre a função potencial de dissipação Q , respectivamente, por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad (2.34)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_k = \dot{\gamma} \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{A}_k}; \quad (2.35)$$

$$\mathbf{q} = \dot{\gamma} \frac{\partial Q}{\partial (\mathbf{g}/T)}. \quad (2.36)$$

Deste modo, as expressões (2.34), (2.35) e (2.36) são as equações de evolução, capazes de descrever o progresso dos processos irreversíveis.

Graficamente, as equações constitutivas para as deformações plásticas $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ e para o vetor de fluxo de calor \mathbf{q} , juntamente com as equações de evolução das variáveis internas $\dot{\mathbf{p}}_k$, são especificadas por um vetor normal à superfície definida pela função potencial $Q = 0$, como mostrado na Figura 2.6.

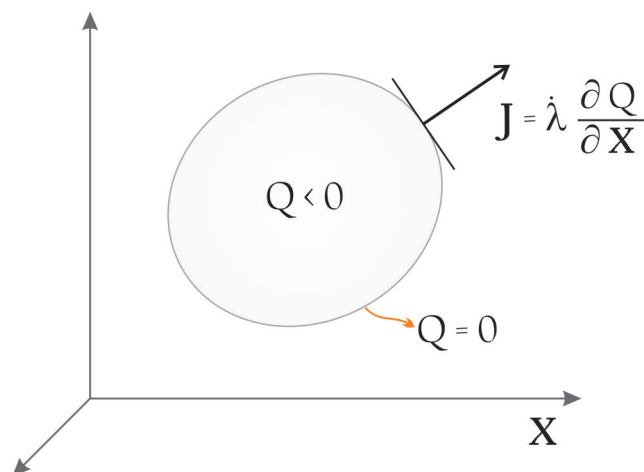


Figura 2.6: Superfície potencial de dissipação e vetor de fluxo generalizado no espaço da força generalizada. Adaptado de Murakami (2012).

2.3 Modelo Elastoplástico com Dano

Com base na Termodinâmica dos Processos Irreversíveis descrita na seção 2.2, escrevem-se as equações constitutivas elastoplásticas com dano, propostas por Lemaitre (1985*a,b*), por meio da definição das variáveis de estado, do estado potencial e do potencial de dissipação.

2.3.1 Definição das Variáveis de Estado

Segundo Murakami (2012), um processo não equilibrado pode ser descrito por seu estado de equilíbrio e conseqüentemente pelo processo de variação de suas variáveis de estado. Deste modo, o estado termodinâmico é especificado pela deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}$, temperatura T e variáveis internas \mathbf{p}_k representando os estado de dano e de endurecimento ou amolecimento.

Esta contextualização fundamenta a consideração das seguintes variáveis de estado:

a. Variáveis observáveis

1. $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor total de deformações associado ao tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$;

2. T é a temperatura associada à densidade de entropia s .

b. Variáveis internas

1. $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ é o tensor de deformações elástico associado ao tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$;
2. $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ é o tensor de deformações plástico associado ao tensor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$;
3. R é a deformação plástica associada ao endurecimento ou amolecimento κ ;
4. D é o dano associado à força termodinâmica conjugada Y .

Primeiramente, postula-se que as deformações são pequenas e que a deformação total é decomposta nas parcelas elástica e plástica como:

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^p. \quad (2.37)$$

Assumindo a isotropia do dano, o estado de dano é representado pela variável escalar D . A variável escalar R é representativa do endurecimento ou amolecimento isotrópicos. Assim, essas variáveis internas são definidas como:

$$\mathbf{p}_2 = \{R, D\}. \quad (2.38)$$

Conforme a equação (2.17), a energia livre de Helmholtz agora é escrita por:

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, T, R, D). \quad (2.39)$$

A partir da substituição da equação (2.39) na inequação de Clausius-Duhem (2.20), obtém-se a expressão

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{T} + \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial R} \dot{R} \\ - \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} - \frac{\text{grad } T}{T} \mathbf{q} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Para que a inequação (2.40) seja satisfeita para qualquer variação da deformação elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ e da temperatura T , os coeficientes do primeiro e do segundo termos

devem ser nulos. Esta exigência leva à definição da equação constitutiva elástica e do estado térmico, respectivamente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}; \quad (2.41)$$

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}. \quad (2.42)$$

Com base nas equações (2.41) e (2.42), reescreve-se a inequação (2.40) na forma:

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial R} \dot{R} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} \dot{D} - \frac{\text{grad } T}{T} \cdot \mathbf{q} \geq 0. \quad (2.43)$$

Em um estado cuja temperatura é uniforme ($\text{grad } T = 0$), as variáveis associadas às variáveis internas podem ser definidas como:

$$\kappa \equiv \rho \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad (2.44)$$

sendo κ a variável associada à variável interna R e

$$Y \equiv -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D}, \quad (2.45)$$

em que Y é a variável associada à variável interna D .

Reescreve-se a inequação (2.43) substituindo-se as variáveis associadas definidas pelas equações (2.44) e (2.45), sendo obtido o seguinte formato para \mathbf{d} :

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \kappa \dot{R} + Y \dot{D} \geq 0. \quad (2.46)$$

Para o processo de dissipação da inequação (2.46), o vetor de fluxo generalizado \mathbf{J} e o vetor de forças generalizadas \mathbf{X} são definidos por:

$$\mathbf{J} \equiv \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{R}, \dot{D}\}; \quad (2.47)$$

$$\mathbf{X} \equiv \{\boldsymbol{\sigma}, -\kappa, -Y\}. \quad (2.48)$$

Assim, a inequação (2.46) pode ser expressa como:

$$\mathbf{d} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{J} \geq 0. \quad (2.49)$$

Sendo a dissipação \mathbf{d} expressa na inequação (2.49), a equação de evolução para o vetor de fluxo generalizado \mathbf{J} pode ser derivada de uma lei potencial Q , escrita em função da força generalizada \mathbf{X} . Assim, postula-se a lei potencial de dissipação na forma:

$$Q(\mathbf{X}) = Q(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, -Y; \boldsymbol{\varepsilon}^p, R, D). \quad (2.50)$$

A evolução do fluxo plástico é dada pela equação (2.33). As expressões explícitas advindas dessa equação são dadas por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.51)$$

que representa a evolução das deformações plásticas;

$$\dot{R} = -\dot{\gamma} \frac{\partial Q}{\partial \kappa}, \quad (2.52)$$

definindo a evolução da variável de endurecimento ou amolecimento; e

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial Q}{\partial (-Y)}, \quad (2.53)$$

representando a evolução do dano.

2.3.2 Estado Potencial

As derivações apresentadas nas equações (2.41), (2.42), (2.51), (2.52) e (2.53) dependem da especificação de expressões adequadas para a energia livre de Helmholtz ψ e para o potencial de dissipação Q .

De acordo com Murakami (2012), a magnitude da energia livre armazenada em um material danificado depende, entre outros, do estado de deformação da estrutura. Então, a função da energia livre de Helmholtz por unidade de massa em um processo isotérmico pode ser postulada como:

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, R, D) = \psi^d(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) + \psi^p(R), \quad (2.54)$$

em que ψ^d denota a energia livre de deformação elástica afetada pelo dano e ψ^p representa a energia livre devido ao endurecimento ou amolecimento isotrópicos, associados à deformação plástica.

Se o comportamento do material é linear-elástico e isotrópico, a equação constitutiva elástica no estado não afetado pelo dano é dada por:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e, \quad (2.55)$$

em que σ_{ij} são as componentes do tensor de tensões, E_{ijkl}^0 são as componentes do tensor de rigidez elástico e ε_{kl}^e são as componentes do tensor de deformação elástica.

Quando o material é afetado pelo dano, a equação constitutiva, definida com base na equação da tensão efetiva (2.5), é escrita como:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e, \quad (2.56)$$

em que, pelo Princípio da Equivalência de Deformação e pela equação (2.13), E_{ijkl} é definido por:

$$E_{ijkl} = (1 - D)E_{ijkl}^0. \quad (2.57)$$

Assim, a parcela de energia livre de Helmholtz relacionada ao dano ψ^d assume a forma:

$$\psi^d(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^e (1 - D) E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e. \quad (2.58)$$

Reescreve-se a equação (2.54), substituindo a parcela ψ^d pela equação (2.58):

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, R, D) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^e (1 - D) E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e + \psi^p(R). \quad (2.59)$$

Efetuando-se a derivação apresentada na equação (2.41), é possível escrever a equação constitutiva elástica como:

$$\sigma_{ij} = (1 - D) E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e. \quad (2.60)$$

As forças generalizadas associadas às variáveis internas são calculadas a partir das equações (2.44), (2.45) e (2.59), definindo-se Y e κ . A taxa de liberação de

energia de dano, que corresponde à variação da densidade de energia interna devido ao crescimento do dano, é representada por:

$$Y = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^e E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e. \quad (2.61)$$

Já a força termodinâmica associada ao endurecimento ou amolecimento isotrópico é definida por:

$$\kappa = \kappa(R). \quad (2.62)$$

A Figura 2.7 ilustra o significado da relação (2.62) para o caso de estado unidimensional de tensão com endurecimento linear.

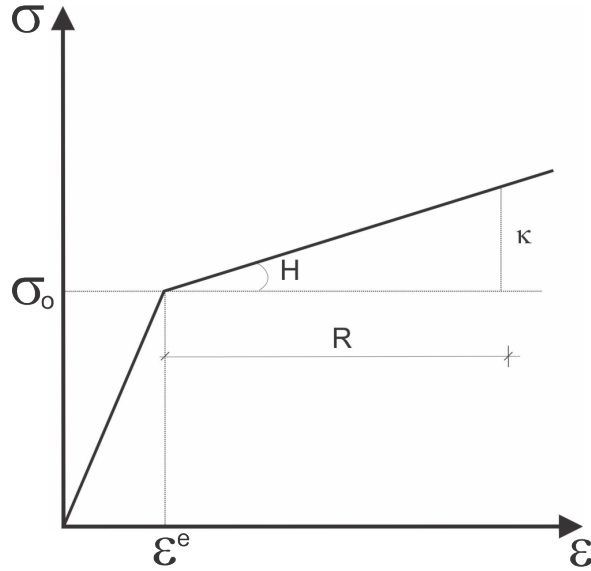


Figura 2.7: Estado unidimensional de tensão com endurecimento linear.

2.3.3 Potencial de Dissipação

A dissipação \mathbf{d} , descrita na inequação (2.46), foi definida postulando-se três mecanismos de dissipação: deformação plástica, endurecimento ou amolecimento isotrópicos e crescimento do dano.

Deste modo, a função potencial de dissipação Q , apresentada na equação (2.50), é dividida em duas parcelas. A primeira, devido à deformação plástica, é denominada

Q^p e a segunda, relacionada ao dano, é representada por Q^d . Assim, tem-se:

$$Q(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, -Y) = Q^p(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, D) + Q^d(-Y, D). \quad (2.63)$$

No potencial Q^p , a variável D foi incluída como parâmetro porque o desenvolvimento do dano pode acarretar a contração da superfície de escoamento, segundo Murakami (2012).

Conforme observado nas equações (2.51), (2.52) e (2.53), o potencial de dissipação plástico Q^p desempenha o papel de *superfície de carregamento* no espaço das forças generalizadas:

$$Q^p(\boldsymbol{\sigma}, \kappa, D) = 0. \quad (2.64)$$

Este potencial define o critério de plastificação e a ocorrência de fenômenos dissipativos e trata-se de uma função com a qual é possível avaliar a condição de carregamento e descarregamento do modelo. Baseada no *critério de von Mises*, a seguinte superfície de carregamento foi definida:

$$Q^p = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{s})}}{1 - D} - \sigma_0 - \kappa, \quad (2.65)$$

em que o parâmetro σ_0 é a tensão limite uniaxial do material não degradado e $J_2(\mathbf{s})$ é o segundo invariante do tensor de tensão desviador, definido como:

$$J_2(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}, \quad (2.66)$$

com

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij}, \quad (2.67)$$

sendo δ_{ij} o *Delta de Kronecker*.

A evolução do dano depende da variável interna D e da força generalizada Y . Deste modo, o *potencial de dissipação de dano*, ou *superfície de dano*, é escrito como:

$$Q^d = Q^d(-Y, D). \quad (2.68)$$

Lemaitre (1985b) definiu Q^d como sendo uma função da taxa de liberação de energia de dano Y :

$$Q^d = \frac{r}{(1-D)(S+1)} \left(\frac{-Y}{r} \right)^{S+1}, \quad (2.69)$$

em que r e S são constantes do material. De acordo com Lemaitre et al. (1999), r é denominada *resistência de dano* e dimensiona a quantidade de dano por incremento de deformação e S é o *expoente de dano*, que representa a não linearidade do processo de dano.

A equação (2.69) também é um critério para o limite do material íntegro e sua aplicação na equação (2.53) leva à equação de evolução do dano, escrita como:

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{1}{1-D} \left(\frac{-Y}{r} \right)^S. \quad (2.70)$$

2.3.4 Resumo

Com base nas hipóteses para energia livre e para os potenciais de dissipação decorrentes das deformações plásticas e do dano, as equações do modelo de Lemaitre (1985a,b) podem ser resumidas da seguinte maneira:

i. Decomposição do tensor de deformação:

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^p. \quad (2.71)$$

ii. Lei de acoplamento entre elasticidade e dano:

$$\sigma_{ij} = (1-D)E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e. \quad (2.72)$$

iii. Potencial de dissipação devido às deformações plásticas:

$$Q^p = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{s})}}{1-D} - \sigma_0 - \kappa. \quad (2.73)$$

iv. Potencial de dissipação devido ao dano:

$$Q^d = \frac{r}{(1-D)(S+1)} \left(\frac{-Y}{r} \right)^{S+1}. \quad (2.74)$$

v. Fluxo plástico e equações de evolução para $\dot{\epsilon}^p$, \dot{R} e \dot{D} :

Assumindo que o fluxo plástico é normal à superfície de dissipação Q^p , escreve-se

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\gamma} N_{ij}, \quad (2.75)$$

sendo

$$N_{ij} = \frac{\partial Q^p}{\partial \sigma_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{ij}}{(1-D)\|s_{ij}\|}, \quad (2.76)$$

em que $\|s_{ij}\|$ é definido por:

$$\|s_{ij}\| = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}. \quad (2.77)$$

O multiplicador $\dot{\gamma}$ é usado para avaliar a evolução de todas as grandezas inelásticas do modelo. Assim, para a evolução do endurecimento ou amolecimento, tem-se:

$$H = -\frac{\partial Q^p}{\partial \kappa} = 1, \quad (2.78)$$

em que H é o módulo de endurecimento ou amolecimento generalizado e

$$\dot{R} = -\dot{\gamma} \frac{\partial Q^p}{\partial \kappa} = \dot{\gamma} H = \dot{\gamma}, \quad (2.79)$$

que corresponde à evolução da variável interna relacionada ao endurecimento ou amolecimento.

Para a evolução do dano, tem-se:

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{1}{1-D} \left(\frac{-Y}{r} \right)^s. \quad (2.80)$$

Capítulo 3

Inclusão do Modelo Elastoplástico com Dano no Ambiente Unificado

Neste capítulo é apresentada a formulação do Modelo Elastoplástico com Dano de Lemaitre (1985*a,b*) segundo o Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos desenvolvido por Penna (2011) e as funções de endurecimento ou amolecimento que descrevem o comportamento inelástico do material.

3.1 Ambiente Unificado para Modelos Constitutivos

Penna (2011) relatou que diversas vertentes da modelagem constitutiva são baseadas em estruturas teóricas capazes de representar as principais características do meio material, captando os comportamentos observados experimentalmente e propiciando um modelo mais realista. O autor destacou que, após o desenvolvimento de um grande número de modelos constitutivos elastoplásticos e de degradação elástica, foram observadas tentativas de unificação para representar, em uma mesma estrutura teórica, as várias descrições do comportamento do material.

de Borst (1987) apresentou uma das primeiras propostas de abordagem unificada, seguido por outros trabalhos, como os de Carol et al. (1994), Rizzi (1995), Carol e Willam (1996), de Borst (1999), Armero e Oller (2000*a,b*), Hansen et al. (2001) e Carol et al. (2001). Penna (2011) revisou estes trabalhos, ressaltando as carências e

os benefícios de tais propostas.

Neste contexto, Penna (2011) apresentou uma expansão da estrutura teórica proposta por Carol et al. (1994), capaz de contemplar vários modelos constitutivos (elastoplásticos ou de degradação elástica; isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico), formulados com uma ou múltiplas funções potenciais, sejam estes modelos baseados em deformação, tensão, forças termodinâmicas ou variáveis de dano. Tal estrutura teórica parte de hipóteses comuns a modelos elastoplásticos e de degradação elástica para a descrição do meio material.

Inicialmente, deve-se estabelecer uma relação entre tensões e deformações, dada por:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} , \quad (3.1)$$

sendo σ_{ij} as componentes do tensor de tensões, E_{ijkl} as componentes do tensor de rigidez e ε_{kl} as componentes do tensor de deformações.

Em seguida, definem-se uma ou mais funções potenciais:

$$F_n = F_n(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}), \quad (3.2)$$

em que $n = 1, 2, \dots, n$ representa o número de funções potenciais, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões e \mathbf{p} é um vetor com variáveis internas.

O operador tangente é escrito como:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}_{nm}} \bar{n}_{nij} \bar{m}_{mkl} , \quad (3.3)$$

em que os tensores $\bar{\mathbf{n}}$, $\bar{\mathbf{H}}$ e $\bar{\mathbf{m}}$ devem ser determinados. Por notação, quando a formulação é baseada em deformação, os tensores são representados com uma barra. Caso contrário, trata-se da formulação baseada em tensão.

Penna (2011) destacou que as formulações baseadas em tensão e em deformação são ditas duais. Segundo o autor, as funções potenciais escritas em tensão ou deformação fornecem expressões matemáticas com termos diferentes, mas, para um mesmo estado de tensão ou o correspondente estado de deformação, geram o mesmo

resultado. Deste modo, é possível que as componentes tensoriais dos gradientes das formulações baseadas em tensão e deformação se relacionem e, conseqüentemente, que um modelo baseado em tensão seja escrito em termos de deformação e vice-versa. Neste trabalho, parte-se da formulação baseada em tensão e utilizam-se relações para se obter a formulação baseada em deformação.

O tensor das direções de evolução do carregamento \mathbf{n} pode ser obtido por:

$$n_{nkl} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial \sigma_{kl}} \right|_{p=\text{constante}} . \quad (3.4)$$

Já o tensor com os módulos pós-críticos \mathbf{H} é dado por:

$$H_{nm} = \left. \frac{\partial F_n}{\partial p_m} \right|_{\boldsymbol{\sigma}=\text{constante}} , \quad (3.5)$$

em que $m = 1, 2, \dots, m$ representa o número de variáveis internas.

Define-se a evolução dos processos dissipativos a partir do tensor \mathbf{m} , que pode ser obtido por uma ou mais funções denotadas por Q :

$$m_{mkl} = \left. \frac{\partial Q_m}{\partial \sigma_{kl}} \right|_{p=\text{constante}} . \quad (3.6)$$

Quando não se tem uma função explícita para o potencial de dissipação em termos, neste caso, de σ_{kl} , pode-se redefinir o tensor \mathbf{m} por:

$$m_{mij} = M_{mijkl} \sigma_{kl} , \quad (3.7)$$

sendo M_{mijkl} as componentes do tensor das direções da variação do tensor de flexibilidade, obtidas pela Regra da Degradação Generalizada como:

$$M_{mijkl} = \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial \mathcal{D}_*} \mathcal{M}_{m_*} , \quad (3.8)$$

onde \mathcal{D}_* define o conjunto de variáveis de dano, \mathcal{M}_{m_*} é a variável que denota a direção da taxa de mudança de dano e C_{ijkl} são as componentes do tensor de flexibilidade.

Segundo Penna (2011), a Regra da Degradação Generalizada é aplicada quando as funções de carregamento, o tensor com os módulos pós-críticos e a regra de fluxo

não são suficientes para definir a evolução do modelo de degradação. A equação (3.7) é reescrita, para o caso de uma única função de degradação Q , como:

$$m_{ij} = M_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (3.9)$$

Também se reescreve a equação (3.8), obtendo-se M_{ijkl} por:

$$M_{ijkl} = \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial \mathcal{D}_*} \mathcal{M}_*, \quad (3.10)$$

em que \mathcal{D}_* corresponde à variável escalar D do modelo de Lemaitre (1985*a,b*).

O modelo utilizado nesta dissertação não apresenta uma relação entre o tensor de flexibilidade \mathbf{C} e a variável de dano D , mas somente a relação entre o tensor de rigidez \mathbf{E} e o dano, expressa na equação (2.57). Assim, o tensor $\bar{\mathbf{M}}$ é apresentado na equação (3.11), em que se define a variação do tensor de rigidez em termos da variável de dano:

$$\bar{M}_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \mathcal{D}_*} \bar{\mathcal{M}}_*. \quad (3.11)$$

A direção da taxa de mudança do dano no domínio da rigidez, $\bar{\mathcal{M}}_*$, é dada por:

$$\bar{\mathcal{M}}_* = \frac{\partial Q}{\partial(-\bar{Y})} = \frac{\partial Q}{\partial(-Y)}, \quad (3.12)$$

pois $-\bar{Y} = -Y$, conforme explicita a equação (3.13):

$$\bar{Y} = \frac{\partial \psi^d}{\partial D} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kl}^e E_{klij}^0 \varepsilon_{ij}^e = Y = -\frac{1}{2(1-D)^2} \sigma_{kl} C_{klij}^0 \sigma_{ij}. \quad (3.13)$$

As equações (3.14), (3.15) e (3.16) apresentam as relações entre $\bar{\mathbf{n}}$ e \mathbf{n} , $\bar{\mathbf{m}}$ e \mathbf{m} e $\bar{\mathbf{H}}$ e \mathbf{H} , respectivamente, conforme Penna (2011):

$$\bar{n}_{nij} = E_{ijkl} n_{nkl}, \quad (3.14)$$

$$\bar{m}_{mij} = -E_{ijkl} m_{mkl}, \quad (3.15)$$

$$\bar{H}_{nm} = H_{nm} + n_{nij} E_{ijkl} m_{mkl}, \quad (3.16)$$

sendo \mathbf{n} , \mathbf{m} e \mathbf{H} formulados no domínio das tensões e $\bar{\mathbf{n}}$, $\bar{\mathbf{m}}$ e $\bar{\mathbf{H}}$ no domínio das deformações.

A partir destas relações, tanto modelos baseados em tensão quanto em deformação podem ser inseridos no ambiente teórico e computacional para modelos constitutivos, sejam eles com uma ou múltiplas funções potenciais. Penna (2011) apresentou formulações de diversos modelos constitutivos implementados e validados no âmbito do Método dos Elementos Finitos, segundo este ambiente unificado. Com o intuito de avaliá-lo para um modelo constitutivo elastoplástico com dano, incluiu-se nele o modelo proposto por Lemaitre (1985*a,b*). Assim, este modelo é rerepresentado a seguir em termos da estrutura teórica unificada.

3.2 Modelo Elastoplástico com Dano segundo o Ambiente Unificado

A função potencial de dissipação é assumida como:

$$Q(\sigma_{ij}, \kappa, D, -Y) = Q^p + Q^d. \quad (3.17)$$

O potencial de dissipação plástico ou função de carregamento Q^p é o critério de limite elástico, sendo definido como:

$$Q^p(\sigma_{ij}, \kappa, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{s})}}{1-D} - \sigma_0 - \kappa. \quad (3.18)$$

Fazendo $\sigma(\kappa) = \sigma_0 + \kappa$, tem-se:

$$Q^p(\sigma_{ij}, \kappa, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{s})}}{1-D} - \sigma(\kappa), \quad (3.19)$$

em que o parâmetro σ_0 é a tensão limite uniaxial do material não degradado e κ é a tensão associada ao endurecimento ou amolecimento do material.

O potencial de dissipação de dano Q^d é escrito como:

$$Q^d(D, -Y) = \frac{r}{(1-D)(S+1)} \left(\frac{-Y}{r} \right)^{S+1}. \quad (3.20)$$

Substituindo as equações (3.19) e (3.20) na equação (3.17), obtém-se:

$$Q(\sigma_{ij}, \kappa, D, -Y) = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{s})}}{1-D} - \sigma(\kappa) + \frac{r}{(1-D)(S+1)} \left(\frac{-Y}{r} \right)^{S+1}. \quad (3.21)$$

Assumindo que o fluxo plástico é normal à superfície de carregamento ($Q^p = Q^p(\sigma_{ij})$), escreve-se:

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = \dot{\lambda} n_{kl}, \quad (3.22)$$

sendo o multiplicador $\dot{\lambda}$ utilizado para avaliar a evolução de todas as grandezas inelásticas do modelo e definido como a magnitude da taxa das deformações plásticas.

O parâmetro n_{kl} são as componentes do tensor das direções da evolução da superfície de carregamento no domínio das tensões. Assim, tem-se:

$$n_{kl} = \left. \frac{\partial Q^p}{\partial \sigma_{kl}} \right|_{p=\text{constante}}. \quad (3.23)$$

Esta derivação, relacionada à equação (3.19), leva a:

$$n_{kl} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{kl}}{(1-D)\|s_{kl}\|}. \quad (3.24)$$

A substituição da equação (3.24) na equação (3.14) determina as componentes do tensor das direções da evolução da superfície de carregamento no domínio das deformações, \bar{n}_{ij} :

$$\bar{n}_{ij} = E_{ijkl} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{kl}}{(1-D)\|s_{kl}\|}. \quad (3.25)$$

O tensor dos módulos pós-críticos no domínio das tensões, H_{nm} , é expresso por:

$$H_{nm} = - \left. \frac{\partial Q_n^p}{\partial p_m} \right|_{\sigma=\text{constante}}. \quad (3.26)$$

Para a evolução do endurecimento ou amolecimento, visto que o modelo em questão possui uma função potencial (Q) e uma variável relacionada ao endurecimento ou amolecimento (κ), H_{nm} é reduzido a um tensor de ordem zero:

$$H = - \left. \frac{\partial Q^p}{\partial R} \right|_{\sigma=\text{constante}} = - \frac{\partial Q^p}{\partial \sigma(\kappa)} \frac{\partial \sigma(\kappa)}{\partial R}. \quad (3.27)$$

Efetuada-se as derivações, tem-se:

$$\frac{\partial Q^p}{\partial \sigma(\kappa)} = -1; \quad \frac{\partial \sigma(\kappa)}{\partial R} = \mathcal{H}. \quad (3.28)$$

Substituindo a equação (3.28) em (3.27), encontra-se:

$$H = -(-1)\mathcal{H} \rightarrow H = \mathcal{H}, \quad (3.29)$$

em que \mathcal{H} é o módulo de endurecimento ou amolecimento generalizado e

$$\dot{R} = \dot{\lambda}\mathcal{H} \quad (3.30)$$

corresponde à evolução da variável interna relacionada ao endurecimento ou amolecimento.

Substituindo-se a equação (3.29) na equação (3.16), obtém-se o módulo pós-crítico no domínio das deformações, $\bar{\mathbf{H}}$:

$$\bar{H} = \mathcal{H} + n_{ij}E_{ijkl}m_{kl}. \quad (3.31)$$

A evolução do dano é definida por:

$$\dot{D} = \dot{\lambda}\bar{\mathcal{M}}_* = \dot{\lambda}\frac{\partial Q^d}{\partial(-\bar{Y})} = \dot{\lambda}\frac{1}{1-D}\left(\frac{-\bar{Y}}{r}\right)^s. \quad (3.32)$$

A direção da taxa de mudança do dano no domínio da rigidez, conforme a equação (3.12), é escrita como:

$$\bar{\mathcal{M}}_* = \frac{1}{(1-D)}\left(\frac{-\bar{Y}}{r}\right)^s. \quad (3.33)$$

Da equação (2.57) calcula-se a derivada da equação (3.11), já substituindo \mathcal{D}_* por D :

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial D} = -E_{ijkl}^0. \quad (3.34)$$

Substituindo as equações (3.12) e (3.34) na equação (3.11), tem-se:

$$\bar{M}_{ijkl} = -(E_{ijkl}^0)\frac{1}{1-D}\left(\frac{-\bar{Y}}{r}\right)^s. \quad (3.35)$$

Como na equação (3.9) exige-se a determinação de \mathbf{M} , é possível relacionar M_{ijkl} com \bar{M}_{ijkl} pela seguinte expressão:

$$M_{ijkl} = -C_{ijpq}\bar{M}_{pqrs}C_{rskl}. \quad (3.36)$$

Substituindo \bar{M}_{ijkl} obtido na equação (3.35) na equação (3.36), obtém-se:

$$M_{ijkl} = -C_{ijpq}(-E_{pqrs}^0)C_{rskl} \frac{1}{1-D} \left(\frac{-Y}{r} \right)^S. \quad (3.37)$$

O produto $E_{pqrs}^0 C_{rskl}$ resulta nas componentes I_{pqkl} do tensor identidade de quarta ordem. Substituindo na equação (3.37), tem-se:

$$M_{ijkl} = C_{ijpq} I_{pqkl} \frac{1}{1-D} \left(\frac{-Y}{r} \right)^S. \quad (3.38)$$

O produto tensorial $C_{ijpq} I_{pqkl}$ resulta nas componentes do tensor de flexibilidade C_{ijkl} :

$$M_{ijkl} = C_{ijkl} \frac{1}{1-D} \left(\frac{-Y}{r} \right)^S. \quad (3.39)$$

Sendo descrito M_{ijkl} na equação (3.39), sua substituição na equação (3.9) leva à definição de m_{ij} :

$$m_{ij} = \frac{1}{1-D} \left(\frac{-Y}{r} \right)^S C_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (3.40)$$

Para cada equação baseada em tensão, há a correspondente baseada em deformação, demonstrando a existência de dualidade de formulação. Desta forma, o parâmetro que governa as direções de degradação no domínio das tensões, m_{ij} , apresentado nas equações (3.9) e (3.40), pode ser relacionado com o parâmetro escrito em termos de deformação, \bar{m}_{ij} , e vice-versa, através da equação (3.15). Assim, substituindo a equação (3.40) na equação (3.15), obtém-se:

$$\bar{m}_{ij} = -E_{ijkl} \frac{1}{1-D} \left(\frac{-\bar{Y}}{r} \right)^S \varepsilon_{kl}. \quad (3.41)$$

A substituição das equações (3.25), (3.31) e (3.41) na equação (3.3) conduz à expressão para o operador tangente, dado por:

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\mathcal{H} + n_{ij} E_{ijkl} m_{kl}} (-E_{ijkl}) \frac{1}{1-D} \left(\frac{-\bar{Y}}{r} \right)^S \varepsilon_{kl} E_{ijkl} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{s_{kl}}{(1-D) \|s_{kl}\|}}. \quad (3.42)$$

A natureza dos problemas elastoplásticos com dano necessita do estabelecimento de um algoritmo de duas etapas: preditor elástico e corretor plástico. Neste trabalho, adotou-se o algoritmo de integração descrito em Vaz Jr. e Owen (2001).

3.3 Funções de Endurecimento e Amolecimento

Segundo de Souza Neto et al. (2008), a formulação de modelos constitutivos elastoplásticos depende, dentre outros fatores, da descrição de uma lei de endurecimento ou amolecimento do material, expressa por \mathcal{H} e dependente da variável interna κ .

Essencialmente, o endurecimento e o amolecimento são caracterizados por uma dependência do nível da tensão de escoamento sobre o histórico de deformação plástica a que o corpo é submetido. Assim, as funções apresentadas nesta seção referem-se ao comportamento elastoplástico do material.

Derivando-se a função que descreve a tensão de escoamento de um material, $\sigma(\kappa)$, é obtida a função que rege o comportamento inelástico do material no trecho pós-pico, de acordo com a equação (3.43):

$$\mathcal{H}(\kappa) = \frac{\partial \sigma(\kappa)}{\partial R}. \quad (3.43)$$

Diversas funções de evolução do módulo inelástico têm sido propostas. Neste trabalho, optou-se pela utilização das funções exponencial, linear e potencial.

Benallal et al. (1987) *apud* de Souza Neto et al. (2008) calibraram, para o aço AISI 1010, uma função $\sigma(\kappa)$, caracterizada genericamente pela equação (3.44) abaixo. Esta função também é apresentada em Benallal (2001) e Mashayekhi et al. (2005) a utilizaram para definir a tensão $\sigma(\kappa)$ do aço HY 130.

$$\sigma(\kappa) = \sigma_0 + a \cdot [1 - \exp(-b \cdot \kappa)] , \quad (3.44)$$

sendo σ_0 a tensão de escoamento inicial do material, a e b parâmetros do material e κ a variável interna associada ao fenômeno de endurecimento ou amolecimento.

A Figura 3.1 é ilustrativa dessa função.

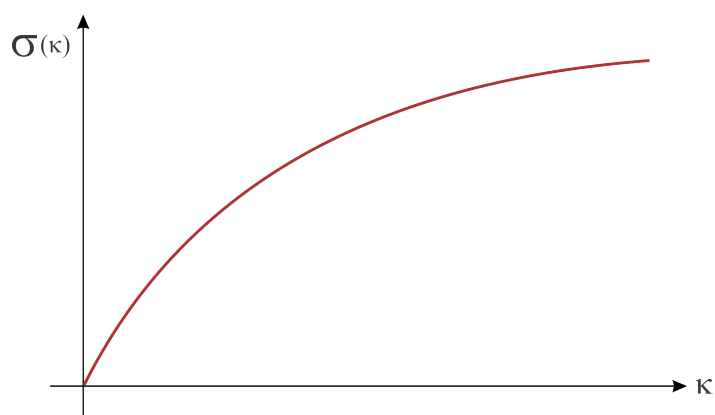


Figura 3.1: *Tensão de escoamento x evolução da variável interna.*

Derivando-se a equação (3.44), conforme a equação (3.43), obtém-se a seguinte função de endurecimento ou amolecimento:

$$\mathcal{H}(\kappa) = b \cdot a \cdot \exp(-b \cdot \kappa) . \quad (3.45)$$

A Figura 3.2 representa o comportamento do módulo pós-crítico.

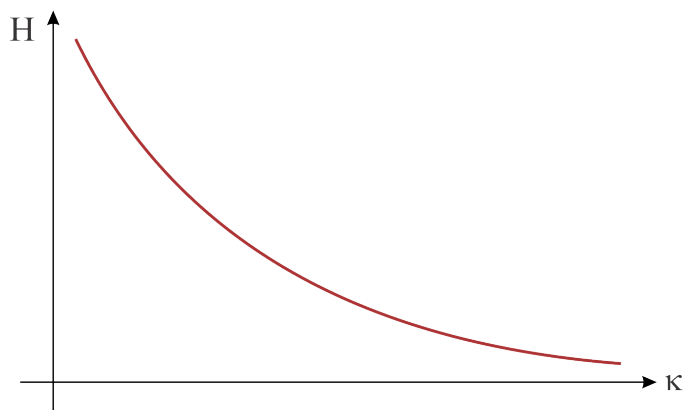


Figura 3.2: *Módulo pós-crítico x evolução da variável interna.*

Além da função exponencial, outra maneira de se considerar $\sigma(\kappa)$ é utilizando uma função linear, conforme apresenta a equação (3.46):

$$\sigma(\kappa) = \sigma_0 + (\mathcal{H} \cdot \kappa) . \quad (3.46)$$

A Figura 3.3 representa o comportamento linear de endurecimento.

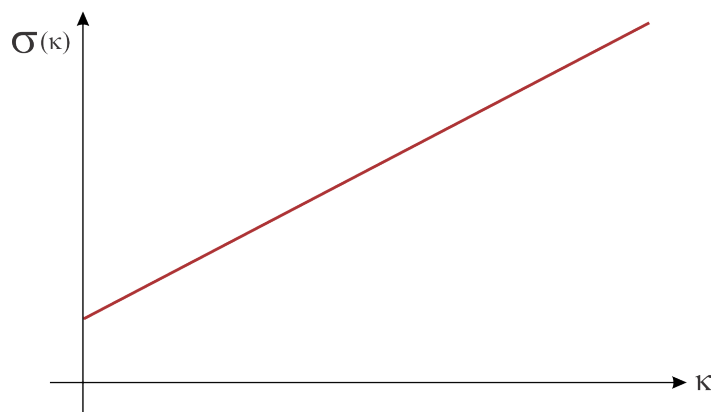


Figura 3.3: Tensão de escoamento x evolução da variável interna.

O valor do módulo pós-crítico é constante para o regime inelástico. Em se tratando de elastoplasticidade, quando o valor de \mathcal{H} é positivo, há a ocorrência de endurecimento. Já o \mathcal{H} negativo leva ao comportamento de amolecimento do material e o módulo pós-crítico nulo define a plasticidade perfeita.

O parâmetro \mathcal{H} é calculado por:

$$\mathcal{H}(\kappa) = \mathcal{H}. \quad (3.47)$$

Na Figura 3.4 observa-se que o módulo pós-crítico é constante.

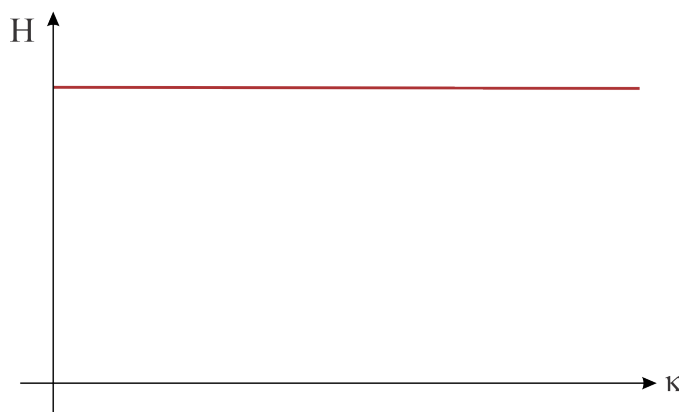


Figura 3.4: Módulo pós-crítico x evolução da variável interna.

Bouchard et al. (2011) e Vaz Jr. et al. (2011) descreveram funções potenciais para a tensão de escoamento $\sigma(\kappa)$ em conformidade com parâmetros de diferentes

materiais. Tem-se uma função geral definida por:

$$\sigma(\kappa) = a \cdot [K + (n \cdot \kappa)]^b, \quad (3.48)$$

sendo a e b os parâmetros do material, κ a variável interna associada ao fenômeno de endurecimento ou amolecimento, n um coeficiente que majora ou minora o valor de κ e K uma deformação inicial do limite elástico.

O comportamento da função (3.48) é representada na Figura 3.5.

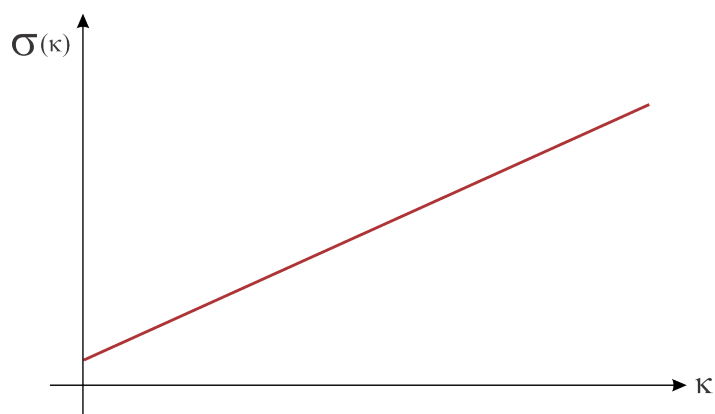


Figura 3.5: Tensão de escoamento x evolução da variável interna.

A função de endurecimento ou amolecimento potencial é definida por:

$$\mathcal{H}(\kappa) = \frac{b \cdot a \cdot n}{[K + (n \cdot \kappa)]^{1-b}}. \quad (3.49)$$

Na Figura 3.6 é ilustrado o comportamento do módulo pós-crítico em função da evolução da variável interna κ .

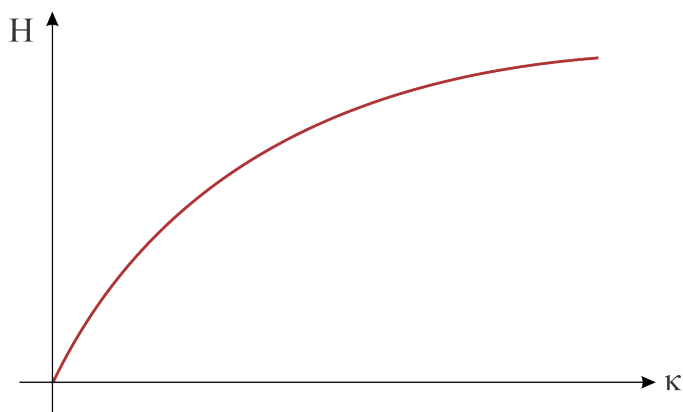


Figura 3.6: Módulo pós-crítico x evolução da variável interna.

Capítulo 4

Implementações Computacionais

Este capítulo é reservado à apresentação do sistema *INSANE* no que tange, principalmente, a implementação do Modelo Elastoplástico com Dano de Lemaitre (1985*a,b*), com base na formulação apresentada nos Capítulos 2 e 3.

O *INSANE* (*INteractive Structural ANalysis Environment*) é um ambiente computacional desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). O sistema *INSANE* é implementado em linguagem Java e utiliza o paradigma da Programação Orientada a Objetos (POO). A plataforma foi concebida com o intuito de ser um sistema segmentado, amigável e capaz de suportar novas implementações sem modificações significativas.

Em síntese, o sistema *INSANE* pode ser dividido em três grandes aplicações: pré-processador, processador e pós-processador. O pré e o pós-processador são aplicações gráficas interativas que fornecem recursos para construir as diversas representações discretas de um problema estrutural, além de visualização de resultados. O processador é a aplicação mais importante do ambiente e representa o núcleo numérico, responsável pela obtenção dos resultados dos modelos.

Este sistema é caracterizado pela utilização de código livre e da linguagem *Java*, pela total separação entre o núcleo numérico e interfaces gráficas, viabilizando alterações e ampliações, e pela facilidade de uso. Em adição, sua biblioteca é composta por diversos módulos que permitem aos desenvolvedores realizar implementações

independentes e simultâneas.

Neste capítulo são discutidas as alterações dos módulos numéricos do INSANE relacionadas às implementações realizadas. Isto é feito através de diagramas de classes que ilustram a hierarquia das mesmas e como elas se comunicam para desempenhar suas funções. Estes diagramas seguem a proposta da *Unified Modeling Language*, que é uma linguagem padronizada para a modelagem de sistemas orientados a objetos. Para a orientação quanto ao entendimento das contribuições deste trabalho, adotou-se a simbologia ilustrada na Figura 4.1. As classes do INSANE simbolizadas pelas cores branca, amarela e verde fazem referência às classes não modificadas, modificadas e criadas, respectivamente.

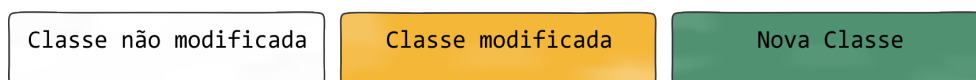


Figura 4.1: Simbologia adotada na representação UML.

4.1 Organização do Núcleo Numérico do INSANE

A estrutura geral do núcleo numérico é composta por interfaces e classes abstratas representantes das diferentes abstrações da solução por modelos discretos. A organização do núcleo é embasada nas relações entre as interfaces `Assembler` e `Persistence` e as classes abstratas `Solution` e `Model`. A Figura 4.2 apresenta esses módulos e explicita a comunicação entre eles.

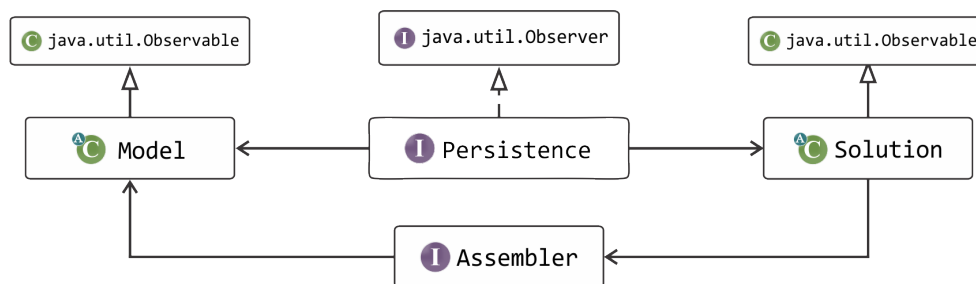


Figura 4.2: Organização geral do núcleo numérico do INSANE.

À interface `Assembler` é atribuída a tarefa de montar o sistema matricial de

segunda ordem apresentado na equação (4.1), que possibilita representar diversos tipos de modelos discretos.

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{D}, \quad (4.1)$$

em que \mathbf{X} é o vetor de variáveis de estado do problema; $\dot{\mathbf{X}}$ e $\ddot{\mathbf{X}}$ são os vetores com a primeira e segunda variações das grandezas de estado, respectivamente; \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são as matrizes dos coeficientes e \mathbf{D} é o vetor com os termos independentes deste sistema, que podem ou não depender da variável de estado e suas derivadas.

A classe abstrata `Solution` é responsável por desencadear o processo de solução e contém os recursos necessários à resolução do sistema matricial (4.1), sendo ele linear ou não linear. Quanto à classe abstrata `Model`, além de conter os dados relativos ao modelo discreto a ser analisado, fornece a `Assembler` as informações necessárias para a montagem da equação do modelo, cuja resolução é feita por `Solution`. `Model` e `Solution` se comunicam com a interface `Persistence`, que interpreta os dados de entrada e fornece os dados de saída para outras aplicações, sempre que modificações no estado do modelo discreto forem realizadas.

O processo de observação de alterações ocorre através de um mecanismo de propagação de mudanças proporcionado pelo padrão de projeto *Observer-Observable*. A interface `Persistence` é um componente observador, enquanto os componentes observados são as classes abstratas `Solution` e `Model`. Desta forma, `Model` e `Solution` se comunicam com a interface `Persistence` através deste mecanismo, que notifica os objetos observadores para se atualizarem quando ocorre alguma mudança nos estados dos objetos observados. Isto assegura a consistência e a comunicação entre o componente observador (`Persistence`) e os componentes observados (`Model` e `Solution`). `Persistence` é responsável pelo tratamento dos dados de entrada e pela persistência dos dados de saída para as outras aplicações assim que observa alterações no estado do modelo discreto. Tal persistência, que consiste no armazenamento de dados de modo a garantir a permanência e recuperação dos mesmos, é

feita através de arquivos *XML* (*eXtensible Markup Language*), permitindo a criação de dados estruturados com base em arquivo texto.

Na Figura 4.3 é exposta a hierarquia da interface `Persistence`, que é implementada pela classe `PersistenceAsXML`. Esta classe foi alterada com o objetivo de persistir a entrada e a saída de dados relativas às implementações desta dissertação.

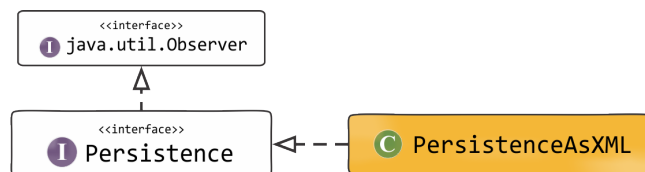


Figura 4.3: Diagrama de classes para `Persistence`.

A seguir, o núcleo numérico do `INSANE` é descrito no que se refere à análise fisicamente não linear e o ambiente unificado para modelagem constitutiva.

4.2 Análise Estática Fisicamente Não Linear

Para a análise estática, a equação (4.1) é simplificada pela desconsideração de seus dois primeiros termos, sendo obtida a seguinte equação:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{D}, \quad (4.2)$$

em que \mathbf{C} é a matriz de rigidez global, \mathbf{X} é o vetor de deslocamentos nodais e \mathbf{D} é o vetor de forças nodais do modelo. Se a análise é fisicamente não linear, há dependência da matriz \mathbf{C} em relação ao vetor de deslocamentos \mathbf{X} . Neste caso, utiliza-se um processo incremental iterativo para a determinação das raízes do sistema de equações (4.2), sendo este reescrito como:

$$\mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{U} = \delta \lambda \cdot \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \quad (4.3)$$

em que \mathbf{K} é a matriz de rigidez incremental, $\delta \mathbf{U}$ é o vetor de deslocamentos incrementais, $\delta \lambda$ é um incremento do fator de carga, \mathbf{P} é o vetor de cargas de referência

e \mathbf{Q} é o vetor de cargas residuais do modelo, obtido pela diferença entre o vetor de cargas externas e o vetor de forças equivalentes às tensões internas \mathbf{F} .

No MEF, a montagem da matriz \mathbf{K} e do vetor \mathbf{F} , feita a partir da contribuição de cada elemento finito, é baseada em duas operações fundamentais:

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (4.4)$$

e

$$\mathbf{F}^e = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (4.5)$$

sendo \mathbf{K}^e a matriz de rigidez, \mathbf{B} a matriz das relações deformação-deslocamento, \mathbf{E} a matriz constitutiva, \mathbf{F}^e o vetor de cargas nodais equivalentes ao estado de tensão corrente, $\boldsymbol{\sigma}$ as tensões do elemento finito e V o volume do elemento.

No sistema **INSANE**, o processo incremental iterativo de solução da equação (4.3) foi implementado segundo o algoritmo genérico proposto por Yang e Shieh (1990). Os detalhes da referida implementação estão descritos nos trabalhos de Fuina (2004), Fonseca (2006), Fonseca (2008) e Penna (2011).

4.3 Implementação do Modelo Elastoplástico com Dano

Dentre os benefícios relacionados à utilização de um projeto orientado a objetos como o descrito anteriormente, Penna (2011) evidenciou a possibilidade do tratamento geral de entidades dependentes entre si, tais como a função de forma, o elemento finito, o ponto de integração, o modelo de análise e o modelo constitutivo.

O elemento finito, por exemplo, é uma entidade abstrata auxiliada, através de mecanismo de composição, pelas classes: (1) **Shape**, representativa das diversas funções de aproximação; (2) **AnalysisModel**, relacionada aos diversos modelos de análise; (3) **Degeneration**, para representar os pontos internos dos elementos, onde

se avaliam as tensões, e os diversos casos de degeneração da geometria; (4) `ProblemDriver`, que representa os diferentes problemas e suas formulações; (5) `ConstitutiveModel`, para representar diferentes modelos constitutivos em problemas fisicamente não lineares.

Penna (2011) destacou que a importância da classe `ConstitutiveModel` para a implementação do ambiente teórico-computacional está relacionada à sua capacidade de encapsular as atividades do modelo constitutivo. Assim, o modelo constitutivo, após receber as informações dos elementos (formato da integração, dados dos pontos materiais, propriedades físicas do meio e do tipo de análise), consegue realizar todas as operações necessárias ao cálculo do operador constitutivo e das forças internas sem se remeter diretamente aos elementos finitos, aos pontos de integração e ao modelo discreto, seja este do MEF ou de formulações como o MEEG (Método dos Elementos Finitos Generalizados), MEC (Métodos de Elementos de Contorno) ou MSM (Métodos Sem Malha).

As duas principais atividades da classe `ConstitutiveModel` são: o cálculo dos tensores constitutivos com aproximações tangente, secante ou elástica (matriz \mathbf{E} na equação (4.4)) e o cálculo do vetor de tensões (vetor $\boldsymbol{\sigma}$ na equação (4.5)). Nestes dois casos, as informações da degeneração são passadas para o modelo constitutivo, que calcula as grandezas no respectivo ponto de integração.

Conforme mostrado no Capítulo 3, segundo o arcabouço teórico proposto por Penna (2011), a formulação de modelos constitutivos é baseada na especificação de funções potenciais, que resultam em um conjunto de operações tensoriais capaz de lidar com os tensores constitutivos, os gradientes das funções e as condições de carregamento e descarregamento. Assim, as operações da estrutura teórica unificada e as particularidades de cada modelo são atribuídas a um conjunto de classes, criadas para responder pelas parcelas que compõem as operações comuns.

Estas classes são denominadas *Filters*. As implementações são feitas de modo

que cada *Filter* contenha as informações do respectivo modelo constitutivo a ser representado por ele e as hipóteses do modelo de análise. Cada *Filter* trata o modelo constitutivo no formato tensorial, possibilitando ao modelo de análise fornecer as componentes de cada tensor (de rigidez, de tensão e de deformação) necessárias para sua montagem.

A Figura 4.4 ilustra a herança de classes de `ConstitutiveModel`. A classe `UnifiedConstitutiveModel`, relativa ao modelo constitutivo geral, apresenta duas especializações: as classes `UCMSingleLoadingFunction` e `UCMMultipleLoadingFunction`. Estas classes especificam as formulações com uma ou múltiplas funções de carregamento, respectivamente. O diagrama com a herança completa desta classe é apresentado no trabalho de Penna (2011).

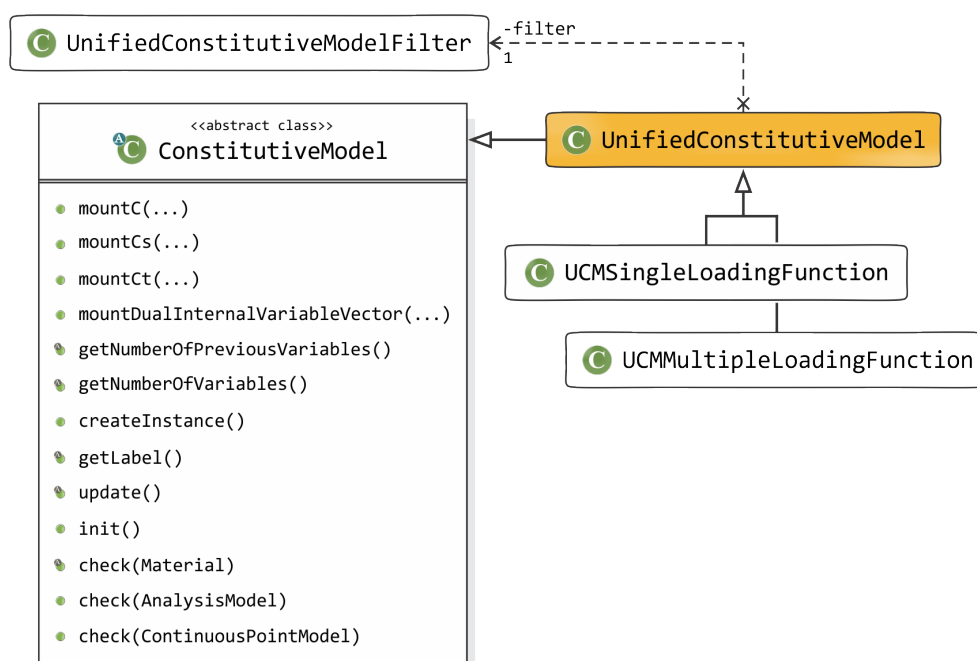


Figura 4.4: Diagrama de classes para `ConstitutiveModel`.

Na Figura 4.4, observa-se que a classe `UnifiedConstitutiveModel` possui uma

instância de `UnifiedConstitutiveModelFilter`, a superclasse do conjunto de classes que formam a camada *Filter*. A Figura 4.5 apresenta a hierarquia de `UnifiedConstitutiveModelFilter`, evidenciando-se a classe criada neste trabalho, `SLFEPCMLemaitre`, responsável pela implementação do modelo de Lemaitre (1985a,b).

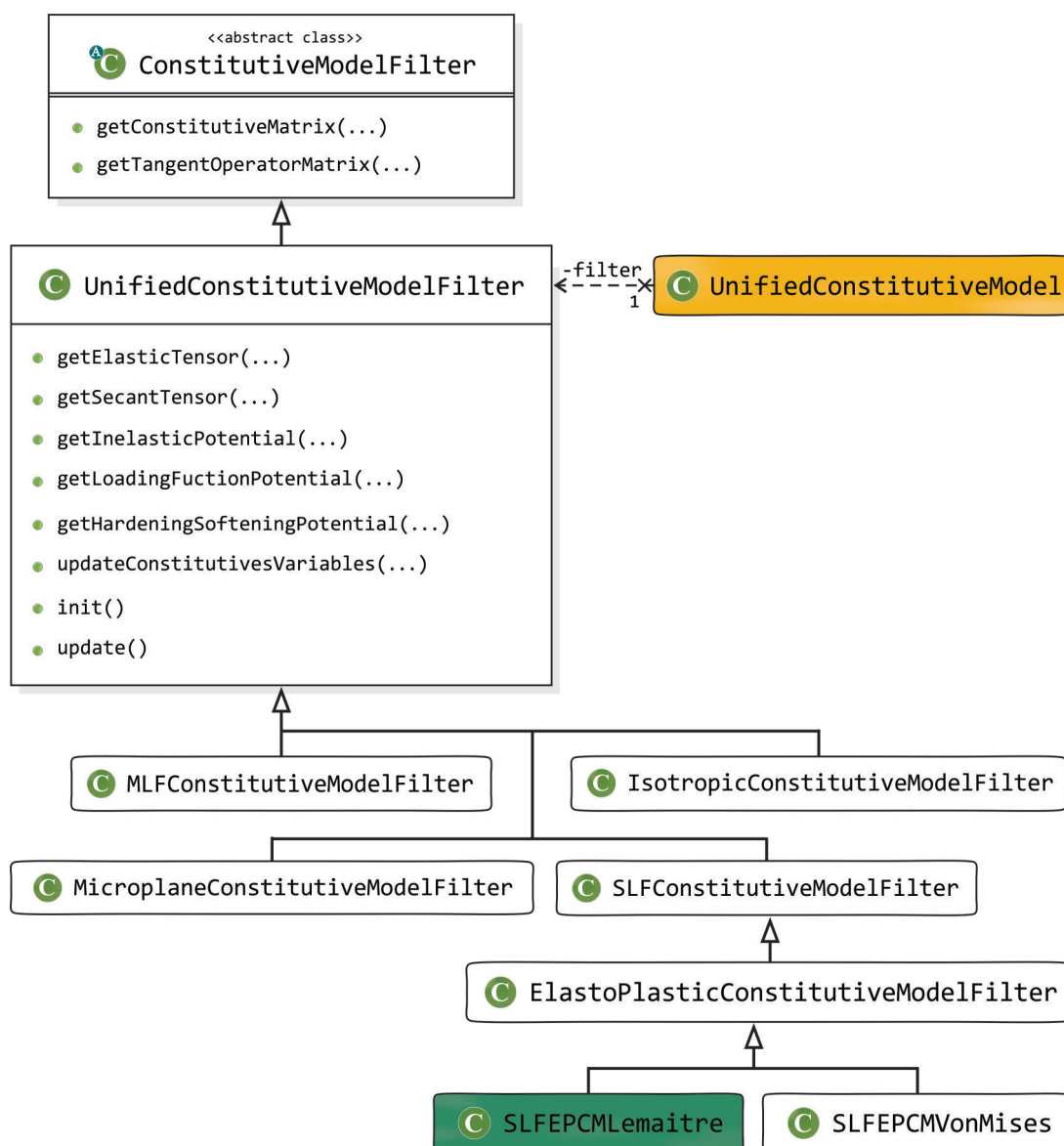


Figura 4.5: Diagrama de classes para `UnifiedConstitutiveModelFilter`.

A classe `UnifiedConstitutiveModelFilter` efetua todas as operações referentes aos modelos constitutivos, delegando as especificidades de cada um aos respectivos *Filters*. Assim, de acordo com a Figura 4.4, as operações genéricas, tais como a obtenção do tensor de rigidez elástico ($mountC(...)$) e da aproximação secante do

tensor de rigidez incremental ($mountCs(...)$) e a atualização das variáveis constitutivas ($update(...)$) podem ser tratadas em classes mais gerais da herança.

Conforme a Figura 4.4, além dos métodos mencionados, o cálculo do tensor de tensões é realizado pelo método $mountDualInternalVariable(...)$ e do operador tangente pelo método $mountCt(...)$. De modo geral, as tensões podem ser obtidas pelo produto entre o tensor secante e o de deformações ou provenientes de um algoritmo, que é o caso da implementação deste trabalho. Já o operador tangente é obtido pela equação (3.42). A realização destas atividades está a cargo das superclasses de `ConstitutiveModel` (Figura 4.4), que solicitam ao respectivo `Filter` o fornecimento das parcelas que compõem as operações gerais da estrutura teórica unificada.

Para descrever a interação entre o modelo constitutivo e o respectivo `Filter`, apresenta-se na Figura 4.6 a hierarquia de classes para o Modelo Elastoplástico com Dano proposto por Lemaitre (1985a,b), representado pela classe `SLFEPCMLemaitre`.

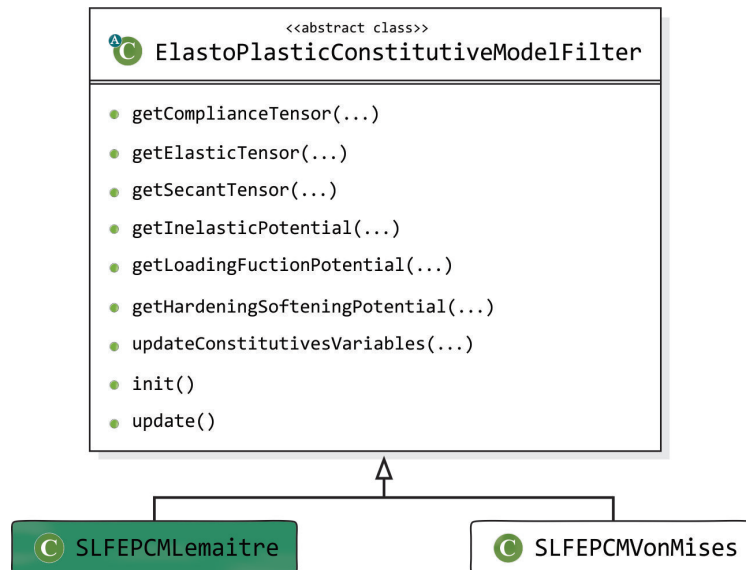


Figura 4.6: Diagrama de classes para `ElastoPlasticConstitutiveModelFilter`.

A classe `SLFEPCMLemaitre` é herdeira de `ElastoPlasticConstitutiveModelFilter`, visto que o modelo de Lemaitre (1985a,b) combina elastoplasticidade e dano,

sendo suas especificações contidas na classe que o implementa. Assim, `SLFEPCMLemaitre` utiliza, entre outros, os métodos `getElasticTensor(...)` e `getComplianceTensor(...)` da classe abstrata `ElastoPlasticConstitutiveModelFilter`.

O algoritmo de integração das equações constitutivas implementado é baseado no Método de Newton-Raphson, tratando o problema no contexto numérico, e compreende as fases de preditor elástico e de corretor plástico. Na classe `SLFEPCMLemaitre` (Figura 4.7), a implementação dessas duas fases, a inicialização das variáveis e a atualização das variáveis de estado são realizadas pelo método `integrationAlgorithm(...)`.

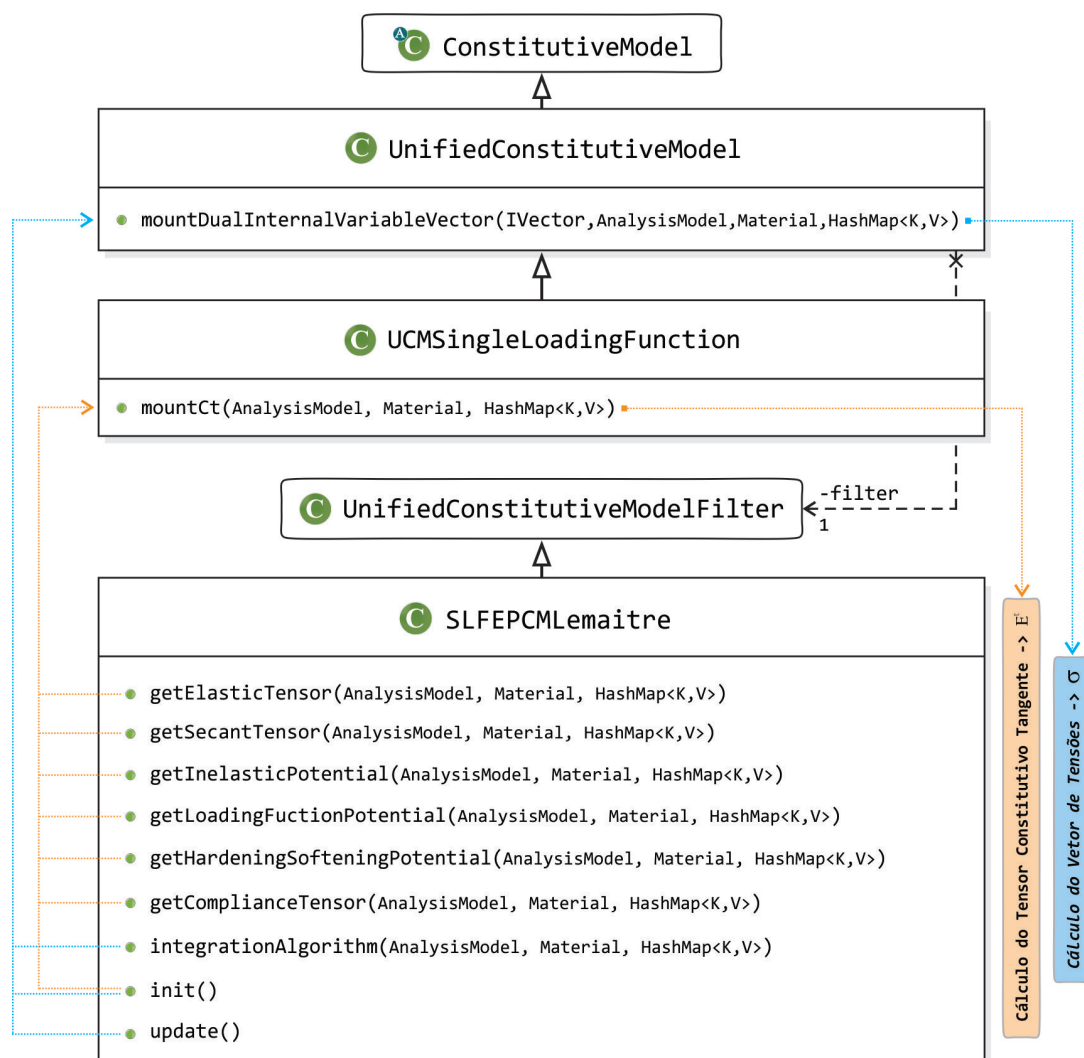


Figura 4.7: Interação entre classes para obtenção do tensor constitutivo tangente.

A Figura 4.7 também indica a relação entre as classes `UnifiedConstitutiveModel` e `SLFEPCLemaitre`, existente em virtude da solicitação das parcelas do tensor secante (método `getSecantTensor(...)`), do tensor de módulo pós-crítico (método `getHardeningSofteningPotential(...)`), do tensor de degradação (método `getInelasticPotential(...)`) e do tensor dos gradientes das funções de carregamento (método `getLoadingFunctionPotential(...)`), repassados para o cálculo do tensor tangente.

4.3.1 Classe abstrata `Material`

O pacote `MaterialMedia` contém interfaces e classes fundamentais à representação da constituição física dos elementos finitos. Conforme a Figura 4.8, a classe abstrata `Material`, pertencente a este pacote, possui os métodos necessários à descrição das propriedades de diferentes materiais, sejam elas propriedades secantes, tangentes ou de descarregamento. Os materiais são representados por classes herdeiras de `Material`, tendo como atributos seu identificador (`Label`) e um mapa (`HashMap`) contendo os valores necessários para caracterizar o material (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, etc.).

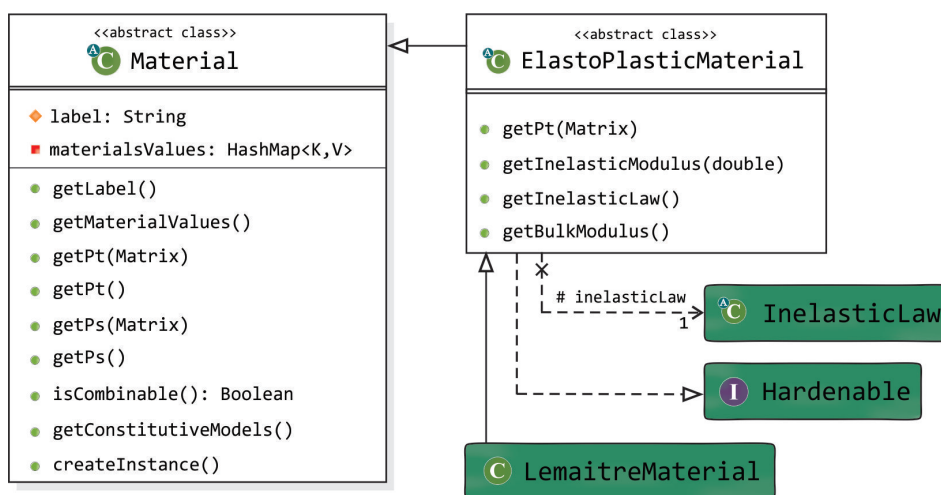


Figura 4.8: Diagrama de classes para `Material`.

A Figura 4.8 também mostra o diagrama da classe abstrata `ElastoPlasticMaterial`, que herda os atributos de `Material` e particulariza sua representação

para materiais empregados nos modelos elastoplásticos. Ao implementar `ElastoPlasticMaterial`, a classe `LemaitreMaterial` incorpora todos os seus atributos, além de acrescentar outros para representar os parâmetros de dano do material. Observa-se também que a classe abstrata `ElastoPlasticMaterial` implementa a interface `Hardenable`, que representa um material capaz de endurecer ou amolecer, ao incorporar os métodos `getInelasticModulus(...)` e `getInelasticLaw(...)`, responsáveis, respectivamente, pelo cálculo do módulo inelástico específico do material e por indicar a lei inelástica utilizada na análise.

O diagrama da classe `LemaitreMaterial` é detalhado na Figura 4.9. Esta classe contém como atributos as variáveis r (resistência de dano) e S (expoente de dano).

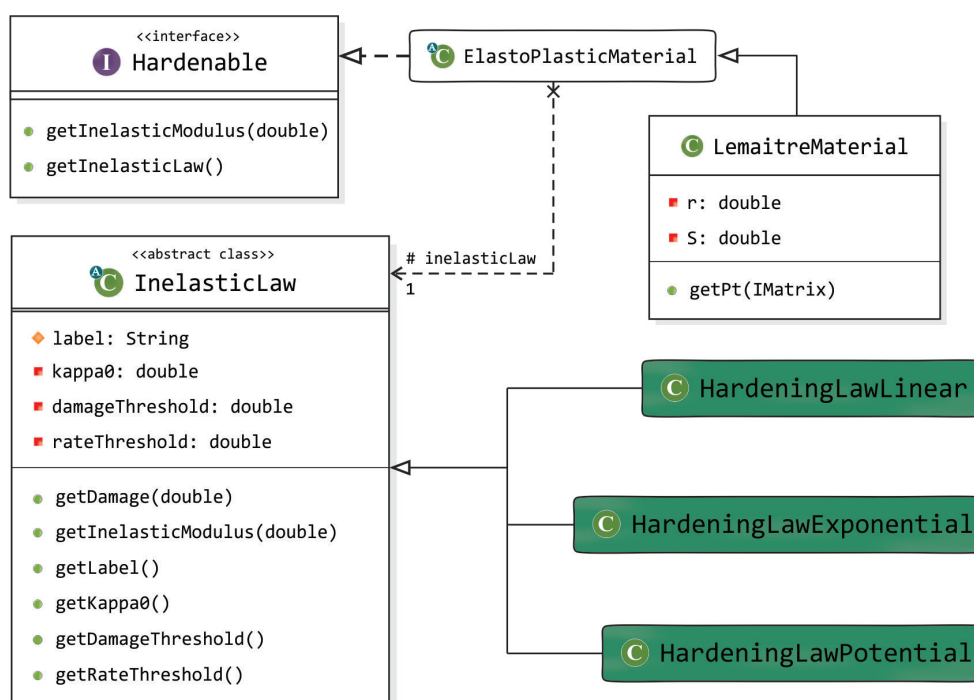


Figura 4.9: Diagrama de classes para `LemaitreMaterial`.

No trabalho de Penna (2011), os materiais cuja degradação é descrita por leis de evolução de dano possuíam uma ou mais instâncias da classe abstrata `DamageLaw`. Esta classe foi excluída para a criação de uma classe abstrata que possibilita, além das atribuições de `DamageLaw`, tratar materiais cujos comportamentos não lineares são definidos por leis de endurecimento ou amolecimento. Esta classe abstrata é

denominada `InelasticLaw` e suas instâncias podem assumir diversas formas para a evolução do dano e do módulo inelástico.

A existência da instância de `inelasticLaw` possibilita o acesso da classe `LemaitreMaterial` às diferentes leis de endurecimento ou amolecimento e funções de evolução de dano implementadas por `InelasticLaw`. Na Figura 4.10 é ilustrada a hierarquia desta classe no que se refere somente às leis de endurecimento ou amolecimento, visto que nesta dissertação apenas elas foram utilizadas. Estas funções são: linear, exponencial e potencial, representadas pelas respectivas classes: `HardeningLawLinear`, `HardeningLawExponential` e `HardeningLawPotential`.

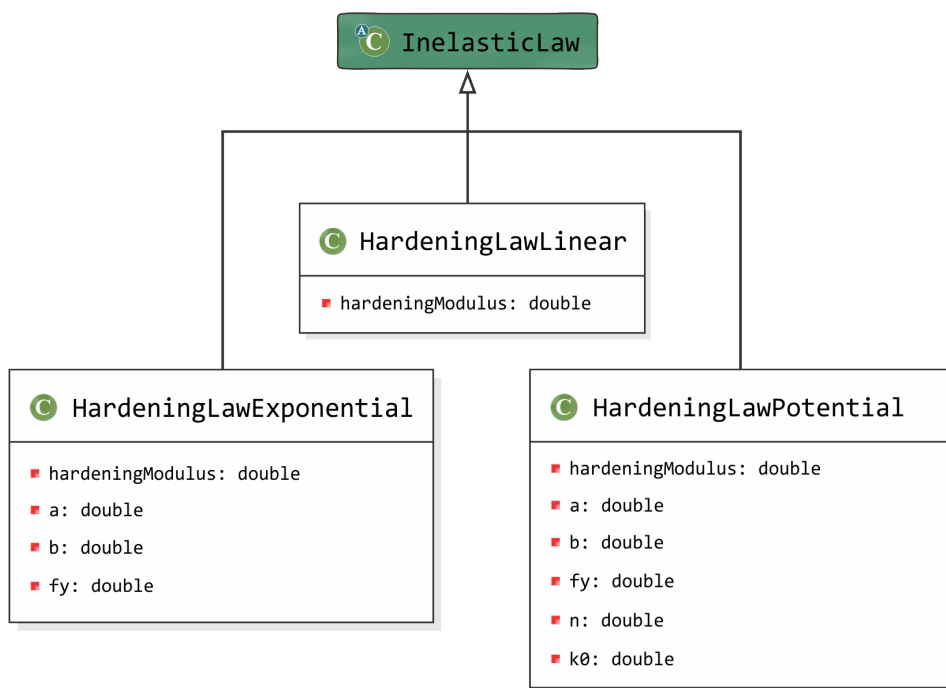


Figura 4.10: Diagrama de classes para `InelasticLaw`.

Cada uma das classes que representam as diferentes funções possuem atributos específicos referentes a elas. Assim, a classe abstrata `InelasticLaw` é capaz de assumir diversas formas para a evolução do módulo inelástico e do dano. As implementações destas funções são ilimitadas e independentes do material, permitindo suas aplicações para os diferentes modelos constitutivos.

Capítulo 5

Simulações Numéricas

Este capítulo compreende as simulações numéricas realizadas com o Modelo Elastoplástico com Dano proposto por Lemaitre (1985*a,b*), implementado no INSANE, como mostrado nos capítulos anteriores. Em síntese, as simulações foram agrupadas da seguinte maneira:

1. Variação da Lei Inelástica

Para analisar as diferentes leis de endurecimento ou amolecimento implementadas são simulados exemplos de tração e de cisalhamento puros para um determinado material. Procede-se com a simulação de endurecimento, amolecimento e plasticidade perfeita, adequando-se os parâmetros das funções para estes comportamentos. Adotaram-se as funções inelásticas linear, exponencial e potencial, apresentadas na seção 3.3.

2. Estabilidade Numérica

Na sequência, a estabilidade numérica do modelo é investigada pela análise da dependência de malha e da localização de deformação. Para tanto, ensaios de tração pura são efetuados para as três leis de endurecimento ou amolecimento, utilizando malhas com 1, 4, 16, 64, 256 e 1024 elementos finitos.

3. Exemplos de Validação

A implementação é validada comparando-se os resultados de exemplos encontrados na literatura com os obtidos a partir do modelo de Lemaitre (1985*a,b*).

5.1 Variação da Lei Inelástica

Entende-se por lei inelástica uma função matemática escrita em termos das variáveis internas do modelo constitutivo, associadas ao endurecimento ou amolecimento do material. A partir dessa lei, pode-se determinar o módulo inelástico do material, como visto na seção 3.3.

Com o intuito de analisar as diferentes leis inelásticas implementadas neste trabalho, são simulados ensaios de tração e de cisalhamento puros para o aço AISI 1010, cujos parâmetros seguem descritos na Tabela 5.1. Estes parâmetros foram calibrados por Benallal et al. (1987) *apud* de Souza Neto et al. (2008) a partir de ensaios uniaxiais e com a utilização da função inelástica exponencial.

Tabela 5.1: Parâmetros do aço AISI 1010. Adaptado de Benallal et al. (1987) *apud* de Souza Neto et al. (2008).

Módulo de Elasticidade	$E = 210000 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,30$
Tensão de escoamento inicial	$\sigma_0 = 620 \text{ MPa}$
a	3300
b	0,40
Tensão de escoamento	$\sigma(\kappa) = 620 + 3300 [1 - e^{(-0,40\kappa)}]$
Módulo pós-crítico	$H(\kappa) = 1320 e^{(-0,40\kappa)}$
Resistência de dano	$r = 3,5 \text{ MPa}$
Expoente de dano	$S = 1$

A Figura 5.1 ilustra as configurações geométricas, de carga e de condições de contorno utilizadas.

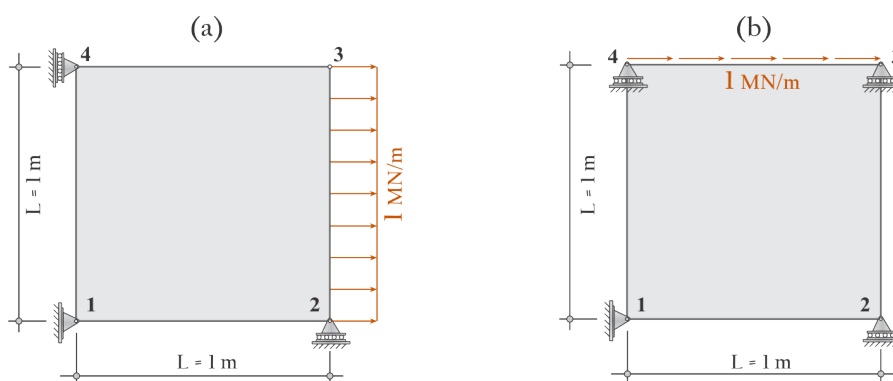


Figura 5.1: Geometrias, cargas e condições de contorno para as simulações de: (a) tração pura e (b) cisalhamento puro.

A partir destas informações, procedeu-se com o ajuste dos parâmetros para a reprodução dos comportamentos de plasticidade perfeita, endurecimento e amolecimento para as diferentes leis inelásticas, adotando-se: (1) a malha com um único elemento finito quadrilateral de quatro nós; (2) aproximação tangente para o tensor constitutivo; (3) análise sob condições de Estado Plano de Tensão (EPT); e (4) método de controle direto de deslocamento, em que o deslocamento horizontal do nó 3 foi controlado, com tolerância de 1×10^{-4} e carga de referência de $1 \text{ MN}/m$.

As leis de endurecimento ou amolecimento utilizadas são: (a) função linear (equação (3.47)); (b) função exponencial (equação (3.45)); e (c) função potencial (equação (3.49)), descritas na seção 3.3.

5.1.1 Tração e Cisalhamento Puros

Os resultados do processo de ajuste dos parâmetros do material para cada uma das funções a fim de reproduzir a plasticidade perfeita são dados na Tabela 5.2.

Nota-se que o parâmetro r , apresentado na Tabela 5.1, teve que ser alterado para a reprodução da plasticidade perfeita. Para tanto, segundo Esmaili e Öchsner (2011), r deve tender ao infinito, de modo a anular o efeito do dano, e os parâmetros relacionados ao módulo pós-crítico devem ser nulos. Na obtenção das trajetórias de equilíbrio, incrementou-se de $0,001 \text{ mm}$ o deslocamento horizontal do nó 3.

Tabela 5.2: Parâmetros das funções inelásticas linear, exponencial e potencial para reprodução de plasticidade perfeita.

Função	r (MPa)	\mathcal{H}	a	b	n	K
Linear	$r \rightarrow \infty$	0	—	—	—	—
Exponencial	$r \rightarrow \infty$	—	0	0	—	—
Potencial	$r \rightarrow \infty$	—	0	0	1,0	0

Os resultados para tração e cisalhamento puros com reprodução do comportamento de plasticidade perfeita para estas funções são ilustrados na Figura 5.2.

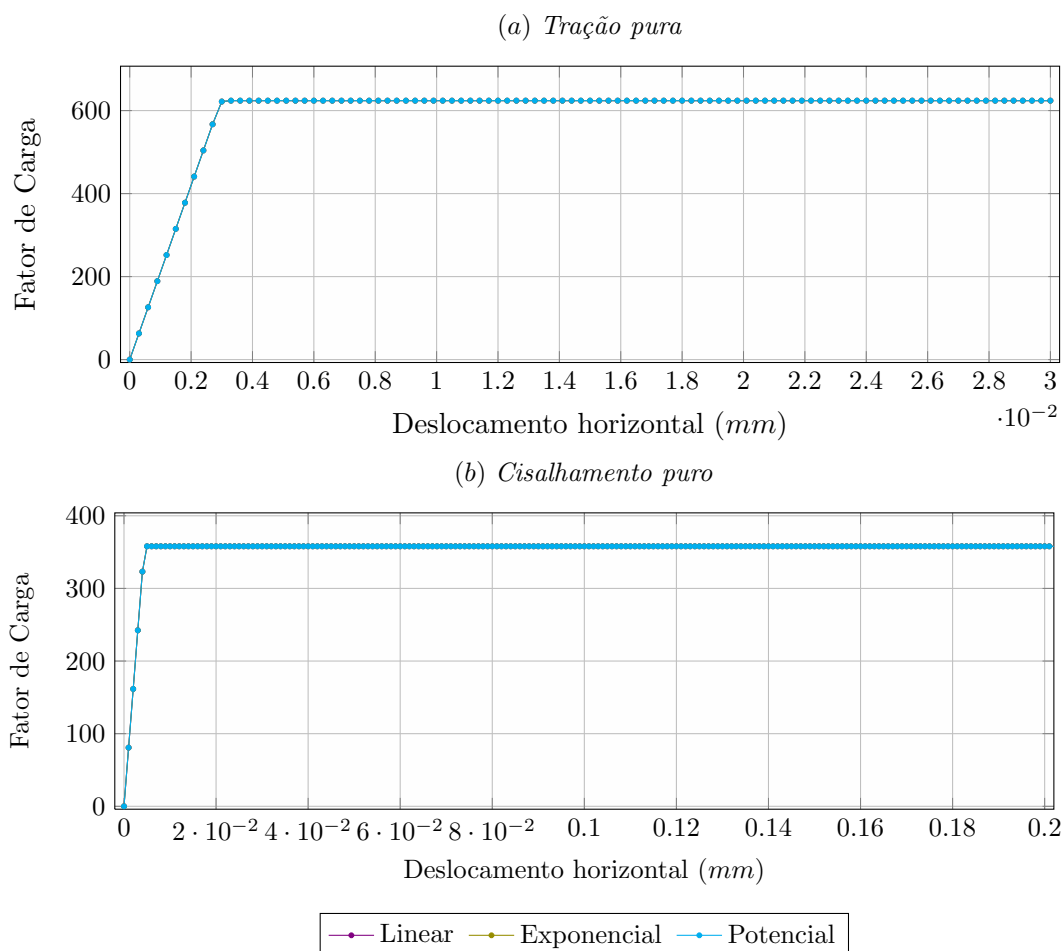


Figura 5.2: Curvas *Fator de Carga x Deslocamento Horizontal* do nó 3 para a plasticidade perfeita: (a) tração pura e (b) cisalhamento puro.

Observa-se que, para as três funções adotadas, há equivalência das trajetórias de equilíbrio, sendo todas capazes de representar a plasticidade perfeita.

Para a reprodução do comportamento de endurecimento do material com dano, os parâmetros das funções linear, exponencial e potencial adotados são os descritos na Tabela 5.3 e o incremento do deslocamento horizontal do nó 3 é de $0,001 \text{ mm}$.

Tabela 5.3: Parâmetros das funções inelásticas linear, exponencial e potencial para reprodução de endurecimento.

Função	\mathcal{H}	a	b	n	K
Linear	1320,0	—	—	—	—
Exponencial	—	3300,0	0,40	—	—
Potencial	—	1296,71	1,065	1,0	0,50

A Figura 5.3 ilustra as respostas obtidas a partir das simulações de tração e cisalhamento puros para as funções ajustadas ao comportamento de endurecimento.

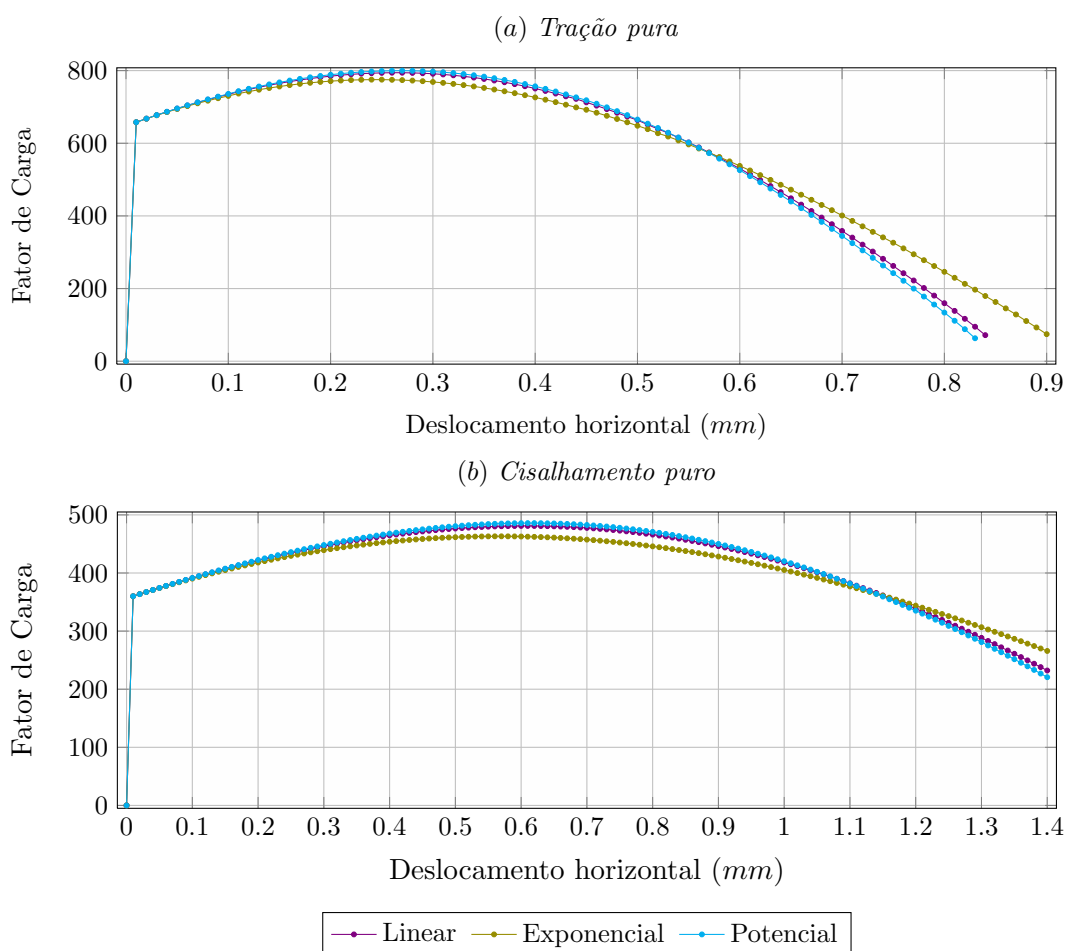


Figura 5.3: Curvas *Fator de Carga x Deslocamento Horizontal* do nó 3 para o endurecimento: (a) tração pura e (b) cisalhamento puro.

A partir da análise das respostas apresentadas na Figura 5.3, verifica-se que ocorreu um aumento de resistência do material caracterizado pela expansão do domínio elástico, observada pelos pontos limites de carga das três trajetórias de equilíbrio. O comportamento não linear foi causado pela presença de dano.

Para o comportamento de amolecimento do material foram adotados os parâmetros das funções linear, exponencial e potencial escritos na Tabela 5.4, sendo adotado o incremento de $0,001 \text{ mm}$ do deslocamento horizontal do nó 3.

Tabela 5.4: Parâmetros das funções inelásticas linear, exponencial e potencial para reprodução de amolecimento.

Função	\mathcal{H}	a	b	n	K
Linear	-1320	—	—	—	—
Exponencial	—	-3300	0,40	—	—
Potencial	—	-1300	1,065	1,0	0,50

Os resultados das simulações de tração pura com reprodução do comportamento de amolecimento para as diferentes funções são apresentados na Figura 5.4.

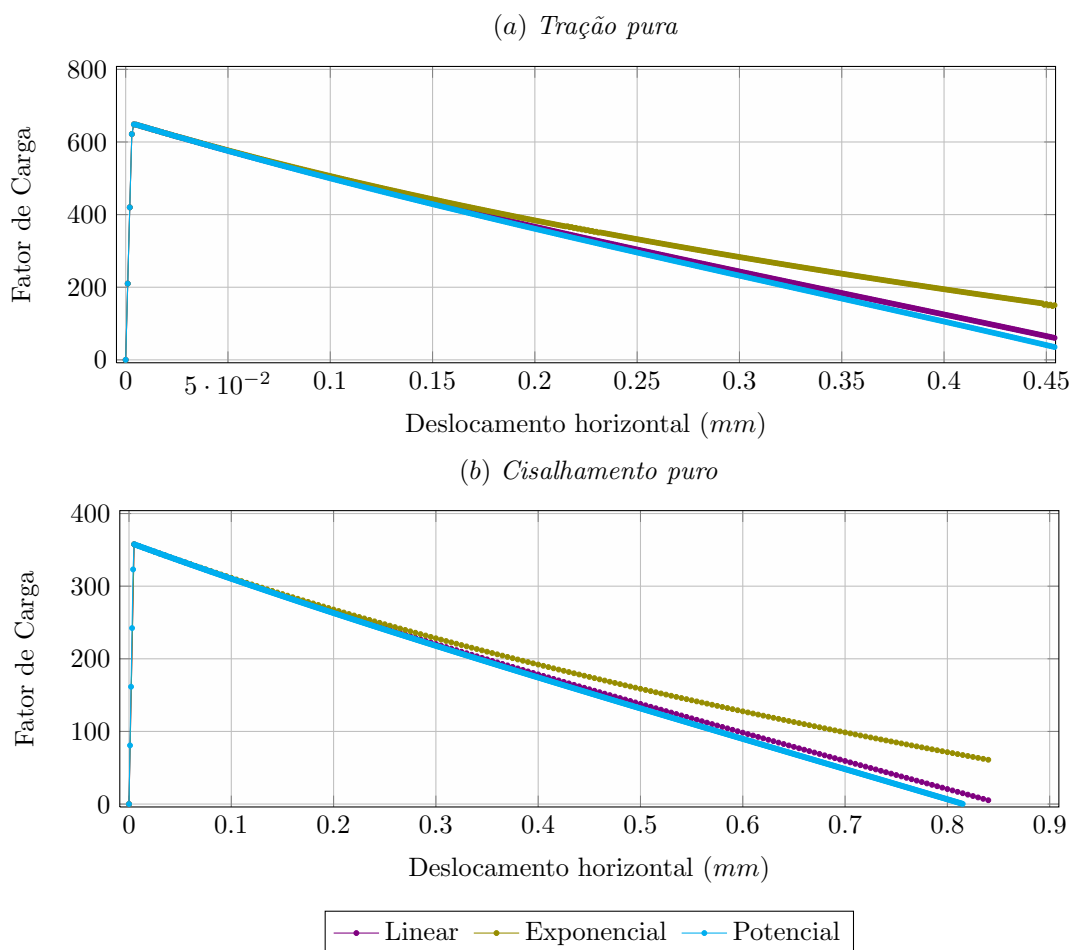


Figura 5.4: Curvas *Fator de Carga x Deslocamento Horizontal* do nó 3 para o amolecimento: (a) tração pura e (b) cisalhamento puro.

Verifica-se, a partir da Figura 5.4, que ocorreu a perda de resistência do material, relacionada à retração do domínio elástico tanto no gráfico (a) quanto no (b). O comportamento não linear observado foi causado pela presença de dano. Nos gráficos (a) e (b), observa-se que a perda de resistência do material para a função potencial foi um pouco mais acentuada em comparação às demais curvas.

5.1.2 Parametrização da Lei Inelástica

Como visto, a resposta do modelo está diretamente associada à lei inelástica adotada. Cada função depende de um conjunto de parâmetros que devem ser prescritos para descrever o comportamento do material. Os ajustes foram baseados na representação do comportamento do material para estados de tração dominante, uma vez

que as leis refletem um estado uniaxial de sollicitação.

Desta forma, com o objetivo de caracterizar as leis inelásticas e ilustrar os procedimentos de ajuste dos parâmetros destas funções, foram realizadas simulações numéricas do ensaio de tração pura. Nestas simulações, os diferentes parâmetros de cada uma das funções foram sucessivamente alterados, verificando-se o comportamento do modelo através das curvas *fator de carga x deslocamento* obtidas. Nestes ensaios, tomou-se como referência o aço AISI 1010 (Tabela 5.1).

Para o ajuste, adotou-se: (1) malha com um elemento finito quadrilateral de quatro nós e carga de referência de $1 \text{ MN}/m$ (Figura 5.1-a); (2) aproximação tangente para o tensor constitutivo; (3) análise em EPT; e (4) método de controle de deslocamento, controlando-se o nó 3, tolerância de 1×10^{-4} e incremento de deslocamento de $2,5 \times 10^{-4}$.

5.1.2.1 Função Linear

O único parâmetro referente à função inelástica linear é o módulo pós-crítico \mathcal{H} e para o material de referência adotado $\mathcal{H} = 1320$. Assim, para a caracterização deste parâmetro, a simulação de tração pura foi efetuada com \mathcal{H} assumindo os valores de -5000 , -1000 , -100 , 1320 e 5000 . Os três primeiros valores reproduzem o comportamento de amolecimento do material enquanto os dois últimos simulam seu endurecimento, conforme as trajetórias de equilíbrio ilustradas na Figura 5.5.

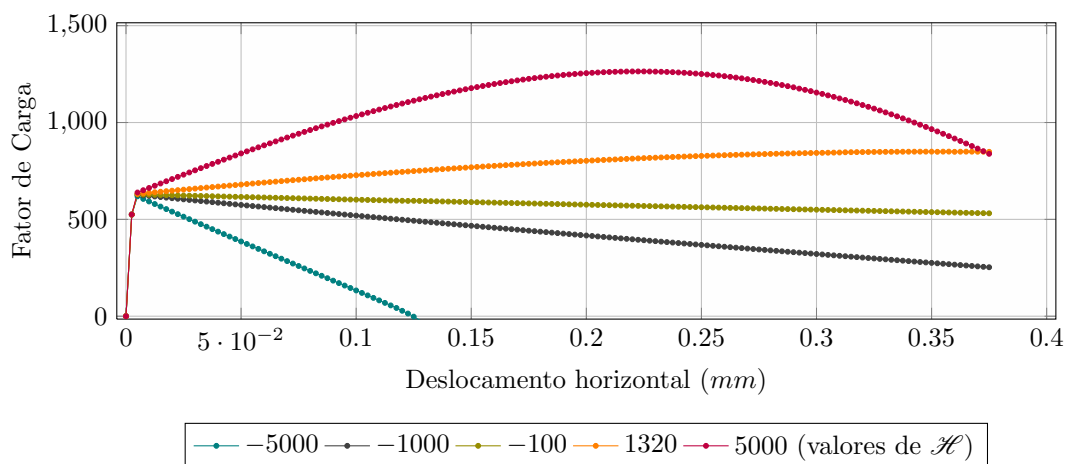


Figura 5.5: Variação do módulo pós-crítico \mathcal{H} para a função inelástica linear.

Na Figura 5.5, observa-se que o comportamento inelástico é não linear, mesmo a função de endurecimento ou amolecimento sendo linear, o que pode ser justificado pela influência exercida pela variável de dano. É possível verificar, principalmente comparando-se os gráficos para $\mathcal{H} = 1320$ e $\mathcal{H} = 5000$, que o modelo é afetado pelo dano de maneira mais intensa quanto maior for o valor do módulo pós-crítico.

5.1.2.2 Função Exponencial

A função inelástica exponencial possui a e b como parâmetros. Portanto, a análise do comportamento do material é realizada primeiramente mantendo-se b constante e variando-se a e posteriormente procede-se mantendo a constante e variando-se b .

Para a função exponencial, o material de referência tem parâmetros $a = 3300$ e $b = 0,40$. Assim, realizando a simulação com $b = 0,40$, o parâmetro a foi variado com os valores de -5000 , -1000 , -100 , 3300 e 5000 . Este parâmetro está associado ao endurecimento ou amolecimento do material e constata-se que os três primeiros valores reproduzem o comportamento de amolecimento e os outros dois endurecimento do material. Os resultados obtidos constam na Figura 5.6.

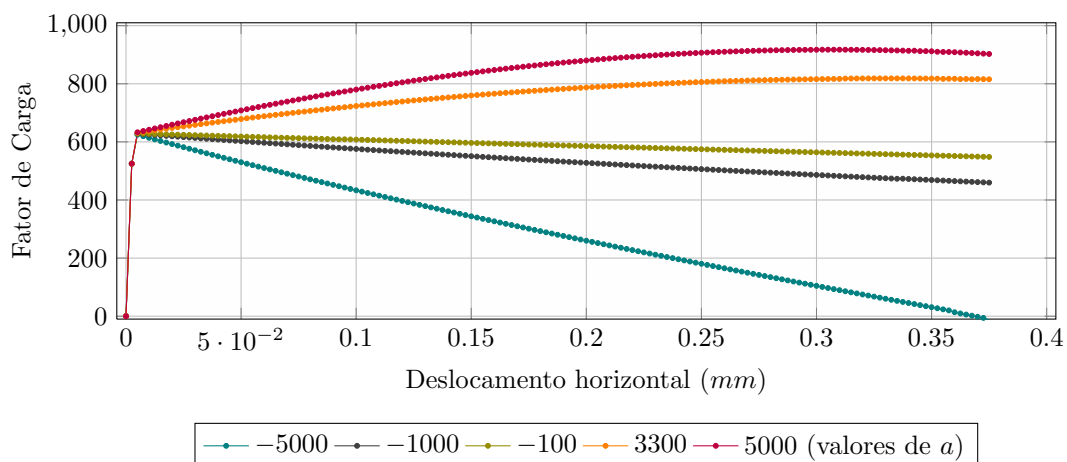


Figura 5.6: Variação do parâmetro a da função inelástica exponencial, com $b = 0,40$.

A partir da Figura 5.6, verifica-se que o dano afeta mais intensamente o comportamento inelástico à medida que o valor do módulo pós-crítico aumenta. Isto pode ser observado comparando-se os gráficos para $a = -5000$ e $a = -1000$, cujos comportamentos são de amolecimento, e os gráficos para $a = 3300$ e $a = 5000$, nos quais ocorre endurecimento.

Admitindo-se que $a = 3300$, o parâmetro b assumiu os valores de $-0,75$, $-0,10$, $0,40$, $0,95$ e $1,50$. É possível observar na Figura 5.7 que os dois primeiros valores reproduzem o comportamento de amolecimento do material, enquanto os três últimos caracterizam o endurecimento.

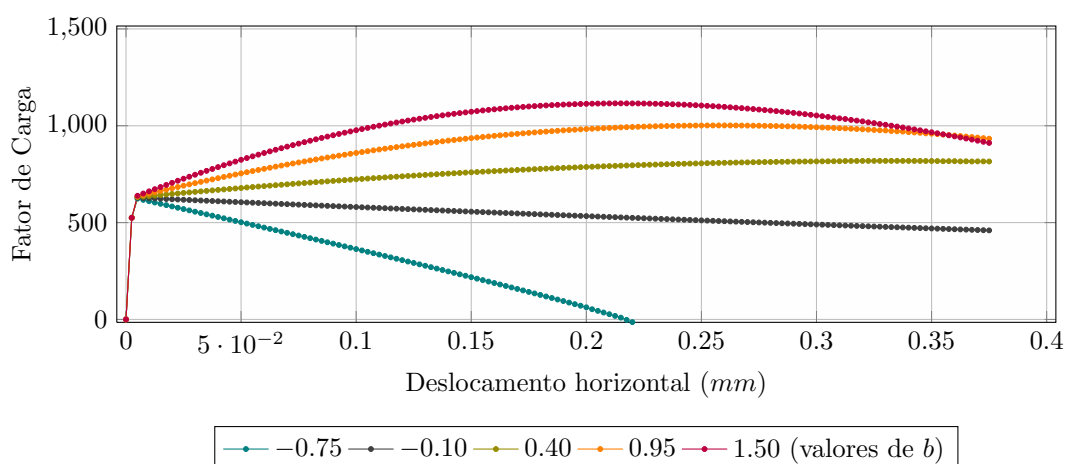


Figura 5.7: Variação do parâmetro b da função inelástica exponencial, com $a = 3300$.

Com estas variações, pode-se observar que tanto o parâmetro a quanto o b podem representar o amolecimento e o endurecimento. Contudo, verifica-se que o parâmetro b é mais sensível às alterações, influenciando fortemente no crescimento ou decréscimo do fator de carga.

5.1.2.3 Função Potencial

A função inelástica potencial possui como parâmetros a , b , n e K . O parâmetro n representa a influência das deformações plásticas na resposta do material. Para considerar integralmente estas deformações, n será fixo e igual a 1,0. O parâmetro K trata-se de uma medida de deformação equivalente que está associada ao limite elástico do material, de modo que $\sigma_0 = aK^b$. Desta maneira, a análise do comportamento do material é efetuada mantendo-se a , n e K constantes e variando-se b e em seguida adotando b , n e K fixos e variando-se o parâmetro a . Para esta função, o material de referência tem parâmetros $a = 1296,71$, $K = 0,50$, $b = 1,065$ e $n = 1,0$.

Tomando $a = 1296,71$, $n = 1,0$ e $K = 0,50$, o parâmetro b foi variado com os valores de $-1,065$, $-0,50$, $-0,010$, $1,065$ e $3,50$. Os resultados obtidos constam na Figura 5.8.

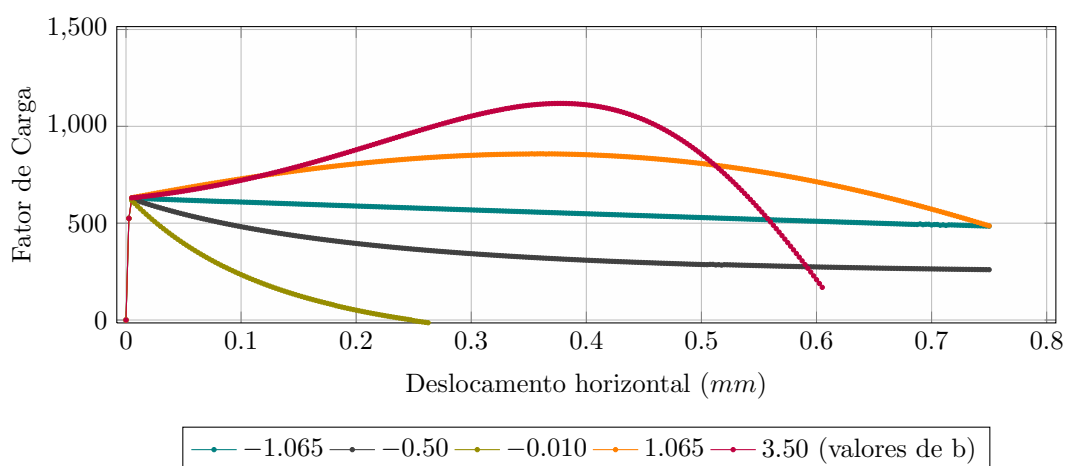


Figura 5.8: Variação do parâmetro b para a função inelástica potencial, com $a = 1296,71$, $n = 1,0$ e $K = 0,50$.

Observa-se que este parâmetro influenciou o formato das curvas, bem como caracterizou o comportamento de endurecimento e amolecimento. Os valores negativos do parâmetro ditaram o amolecimento do material, sendo este menos acentuado à medida que houve o aumento dos valores de b . Já os valores positivos desse parâmetro reproduziram o comportamento de endurecimento do material, que se tornou mais rígido com a elevação de b .

Sendo fixados os parâmetros $b = 1,065$, $n = 1,0$ e $K = 0,50$, o comportamento do material foi avaliado com a variação do parâmetro a . Admitiu-se os valores -2000 , -700 , 1 , $1296,71$ e 2000 para a e as respostas obtidas são ilustradas na Figura 5.9.

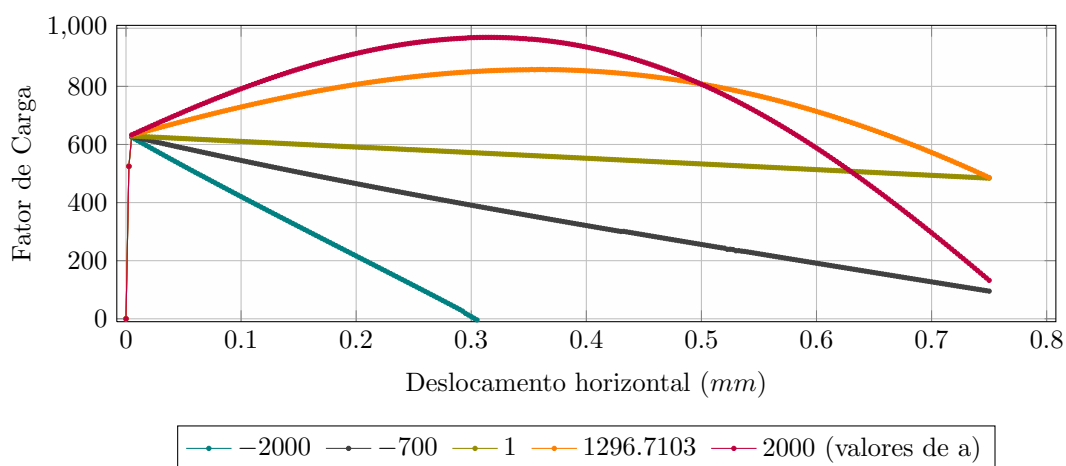


Figura 5.9: Variação do parâmetro a para a função inelástica potencial, com $b = 1,0645$, $n = 1,0$ e $K = 0,50$.

O parâmetro a influencia a reprodução do endurecimento e amolecimento do material. Entretanto, o fato de seu valor ser positivo ou negativo não está associado ao endurecimento ou amolecimento, respectivamente, visto que quando a foi assumido ser igual 1, houve a reprodução do comportamento de amolecimento. Em relação ao comportamento de endurecimento, a elevação do valor de a torna o comportamento do material mais rígido e, para um mesmo nível de tensão, o valor da deformação associada é menor quando $a = 2000$ do que para $a = 1296,71$.

5.2 Estabilidade Numérica

5.2.1 Dependência de Malha

O fenômeno de localização de deformações numericamente induzidas é bastante comum em análise fisicamente não linear. Conforme Fuina (2004), este fenômeno ocorre em função de particularidades numéricas do modelo, tais como as relações constitutivas dos materiais, os algoritmos de solução das equações de equilíbrio, os erros de aproximação inerentes à discretização, o refinamento da malha, entre outras.

Neste sentido, a investigação do modelo constitutivo quanto à dependência de malha de elementos finitos é realizada neste item através de simulações numéricas de tração pura, sendo utilizadas discretizações com 1, 4, 16, 64, 256 e 1024 elementos finitos quadrilaterais de quatro nós, ilustradas na Figura 5.10.

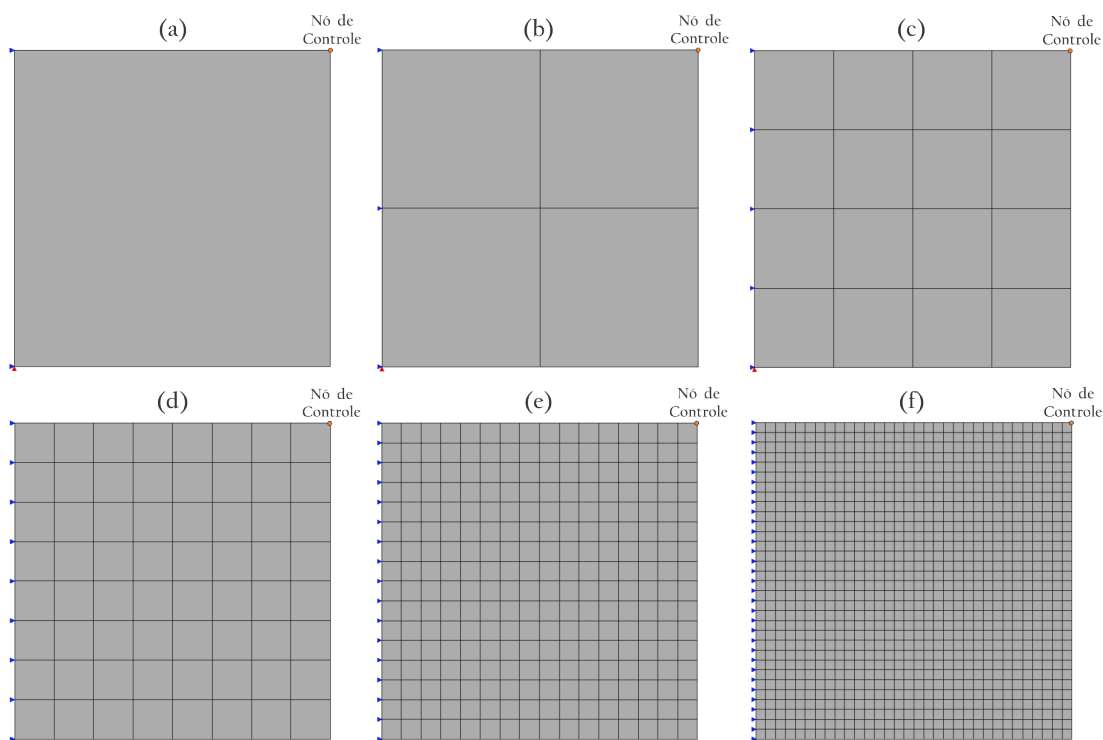


Figura 5.10: Malhas de elementos finitos com indicação dos nós de controle: (a) 1, (b) 4, (c) 16, (d) 64, (e) 256 e (f) 1024 elementos.

Nas simulações, foi admitido EPT, método de controle de deslocamentos, com tolerância de 1×10^{-4} e incremento do deslocamento horizontal do nó superior da face

de aplicação da carga de $0,0000011 \text{ mm}$. Os parâmetros do material são descritos por Lemaitre (1992) e apresentados na Tabela 5.5.

Tabela 5.5: Parâmetros do material. (Lemaitre, 1992).

Módulo de Elasticidade	$E = 30000 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,2$
Tensão de escoamento inicial	$\sigma_0 = 2,50 \text{ MPa}$
Resistência de dano	$r = 2,50 \times 10^{-7} \text{ MPa}$
Expoente de dano	$S = 1$

As funções inelásticas linear, exponencial e potencial, juntamente com seus parâmetros correspondentes, foram utilizadas para a reprodução dos comportamentos de endurecimento e amolecimento com e sem dano. Nas simulações em que não foi considerada a influência do dano, adotou-se $r \rightarrow \infty$, enquanto os demais parâmetros permaneceram com seus valores originais.

5.2.1.1 Endurecimento

Na Tabela 5.6 apresentam-se os parâmetros das funções linear, exponencial e potencial, ajustados ao comportamento de endurecimento do material.

Tabela 5.6: Parâmetros das funções linear, exponencial e potencial para reprodução de endurecimento.

Função	\mathcal{H}	a	b	n	K
Linear	3000	—	—	—	—
Exponencial	$\mathcal{H}(\kappa) = 3000e^{(-0,8571\kappa)}$	3500	0,8571	—	—
Potencial	$\mathcal{H}(\kappa) = \frac{0,9059}{[K+(\kappa)]^{0,88}}$	7,5499	0,12	1,0	0,0001

Nas Figuras 5.11 e 5.12 são apresentados, respectivamente, os resultados do comportamento de endurecimento com e sem dano para as três funções, utilizando-se as malhas de 1, 4, 16, 64, 256 e 1024 elementos finitos.

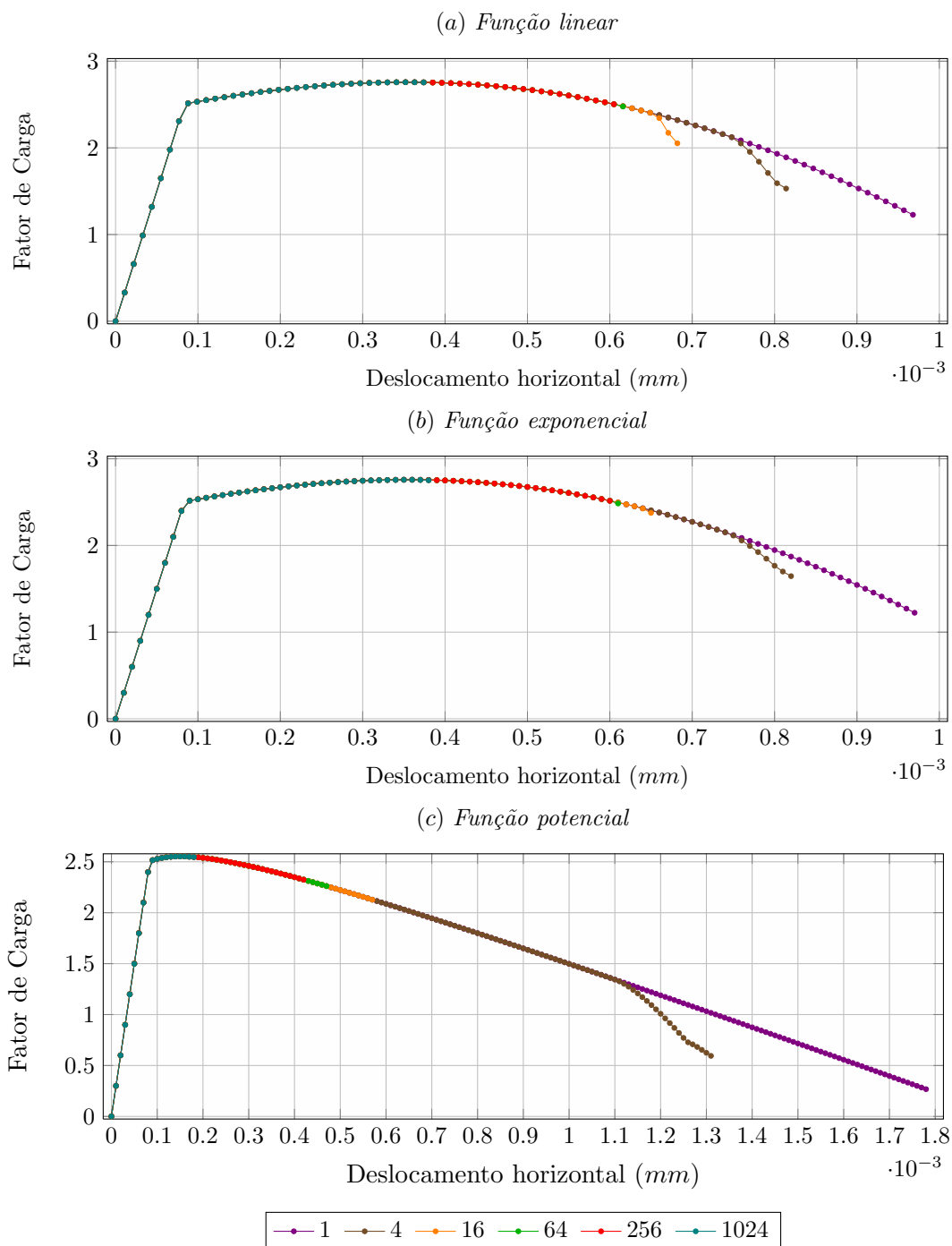


Figura 5.11: Resultados de tração pura com reprodução de endurecimento com dano: (a) função linear, (b) função exponencial e (c) função potencial.

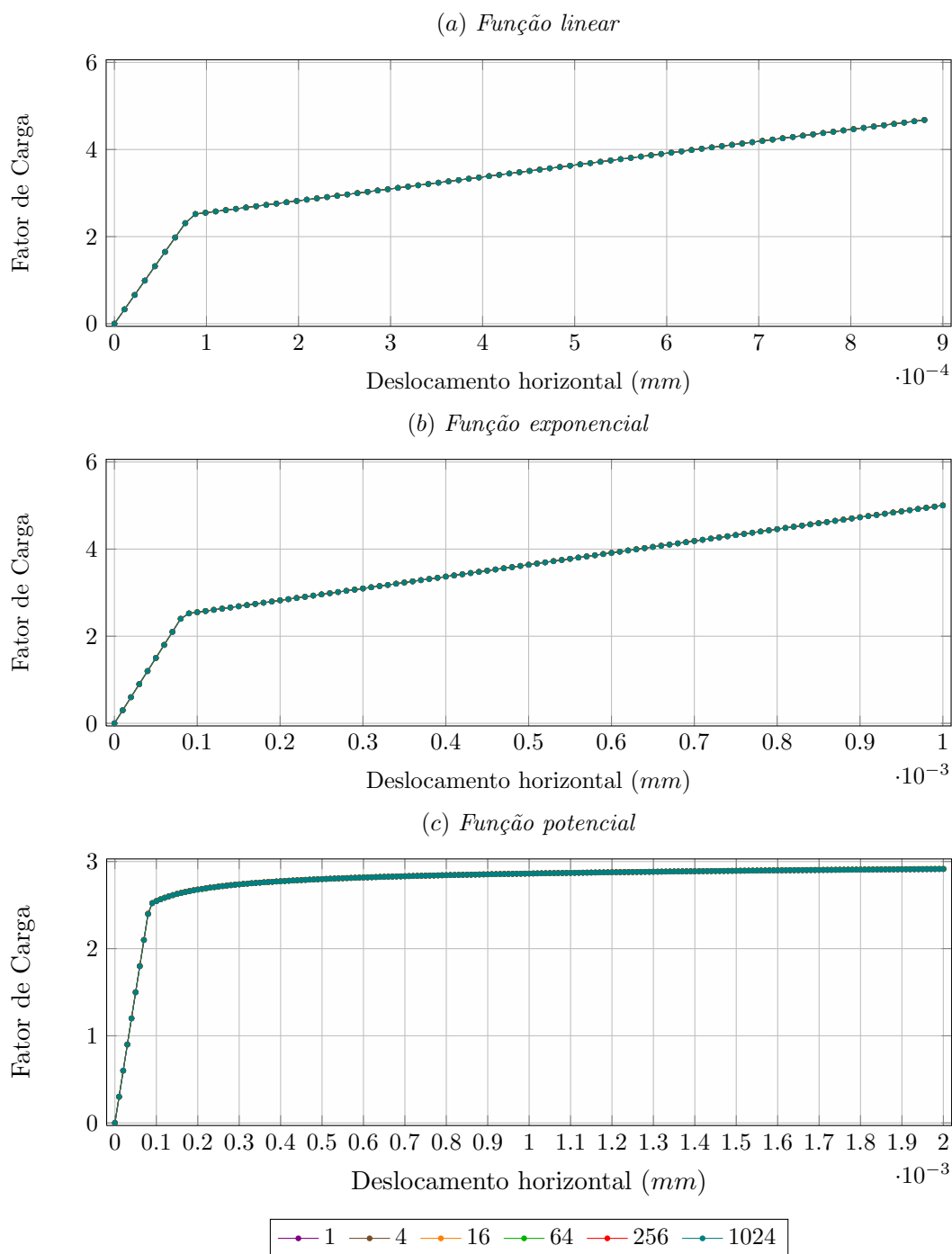


Figura 5.12: Resultados de tração pura com reprodução de endurecimento sem dano: (a) função linear, (b) função exponencial e (c) função potencial.

Os resultados apresentados na Figura 5.11 mostra que há dependência de malha. As trajetórias de equilíbrio foram interrompidas para as três funções a partir da discretização com quatro elementos finitos, conforme mostra a Figura 5.11.

Para a simulação de tração pura sem dano, de acordo com a Figura 5.12, não

houve a interrupção das trajetórias de equilíbrio.

Também se observa pela Figura 5.11 que a consideração do dano antecipou a localização. Tomando-se a malha com 1024 elementos, verifica-se que, na ocorrência de dano, as trajetórias de equilíbrio foram interrompidas para os deslocamentos horizontais de $3,74 \times 10^{-4}$, $3,80 \times 10^{-4}$ e $1,80 \times 10^{-4}$ *mm* para as funções linear, exponencial e potencial, respectivamente.

5.2.1.2 Amolecimento

Na Tabela 5.7 são descritos os parâmetros das funções linear, exponencial e potencial, ajustados ao comportamento de amolecimento do material.

Tabela 5.7: Parâmetros das funções linear, exponencial e potencial para reprodução de amolecimento.

Função	\mathcal{H}	a	b	n	K
Linear	-500	—	—	—	—
Exponencial	$\mathcal{H}(\kappa) = -500e^{(-0,8475\kappa)}$	-590	0,8475	—	—
Potencial	$\mathcal{H}(\kappa) = \frac{-0,041588}{[K+(\kappa)]^{1,02}}$	2,0794	-0,02	1,0	0,0001

As Figuras 5.13 e 5.14 ilustram, respectivamente, as respostas relativas ao comportamento de amolecimento com e sem dano para as três funções, utilizando-se as malhas de 1, 4, 16, 64, 256 e 1024 elementos finitos.

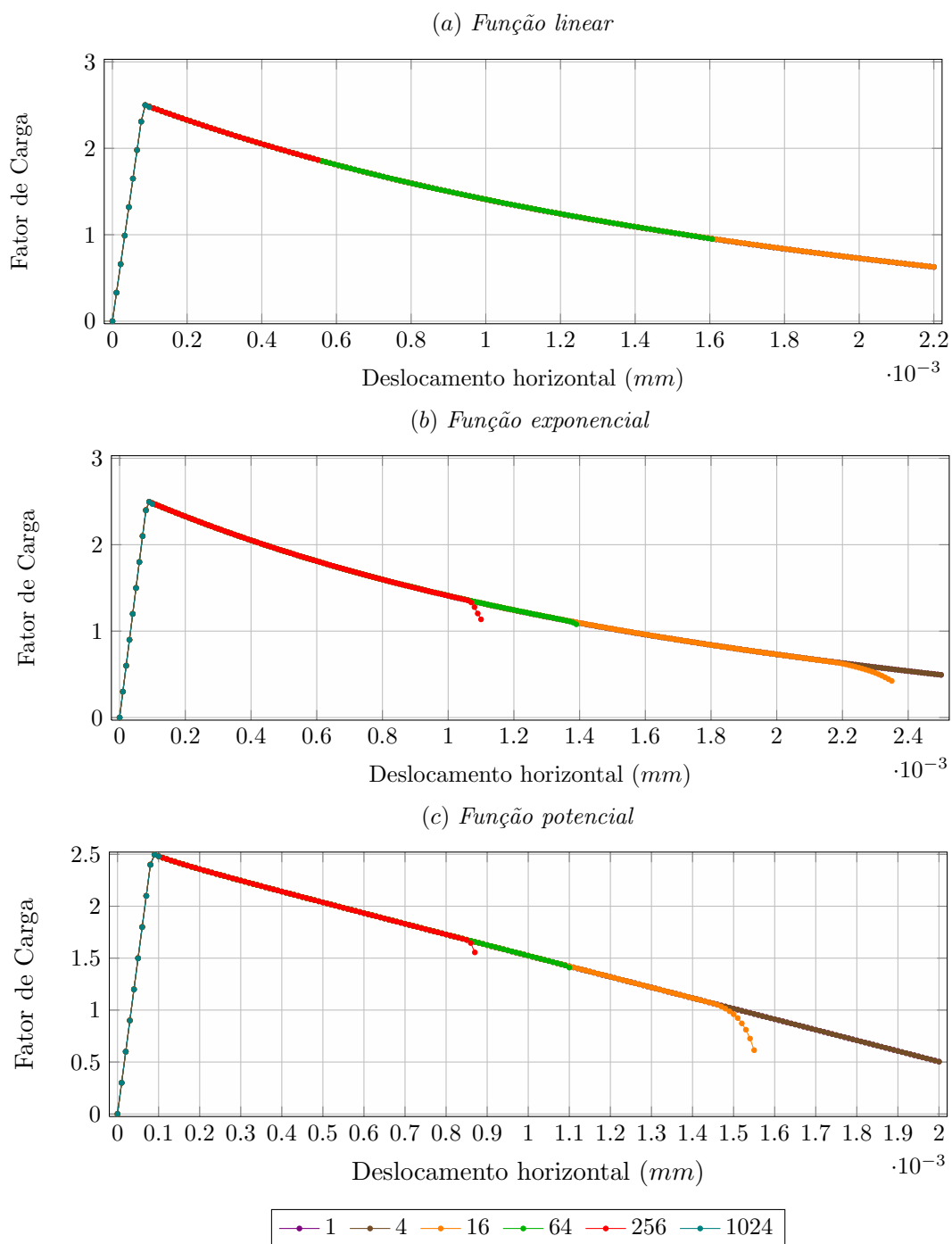


Figura 5.13: Resultados de tração pura com reprodução de amolecimento com dano: (a) função linear, (b) função exponencial e (c) função potencial.

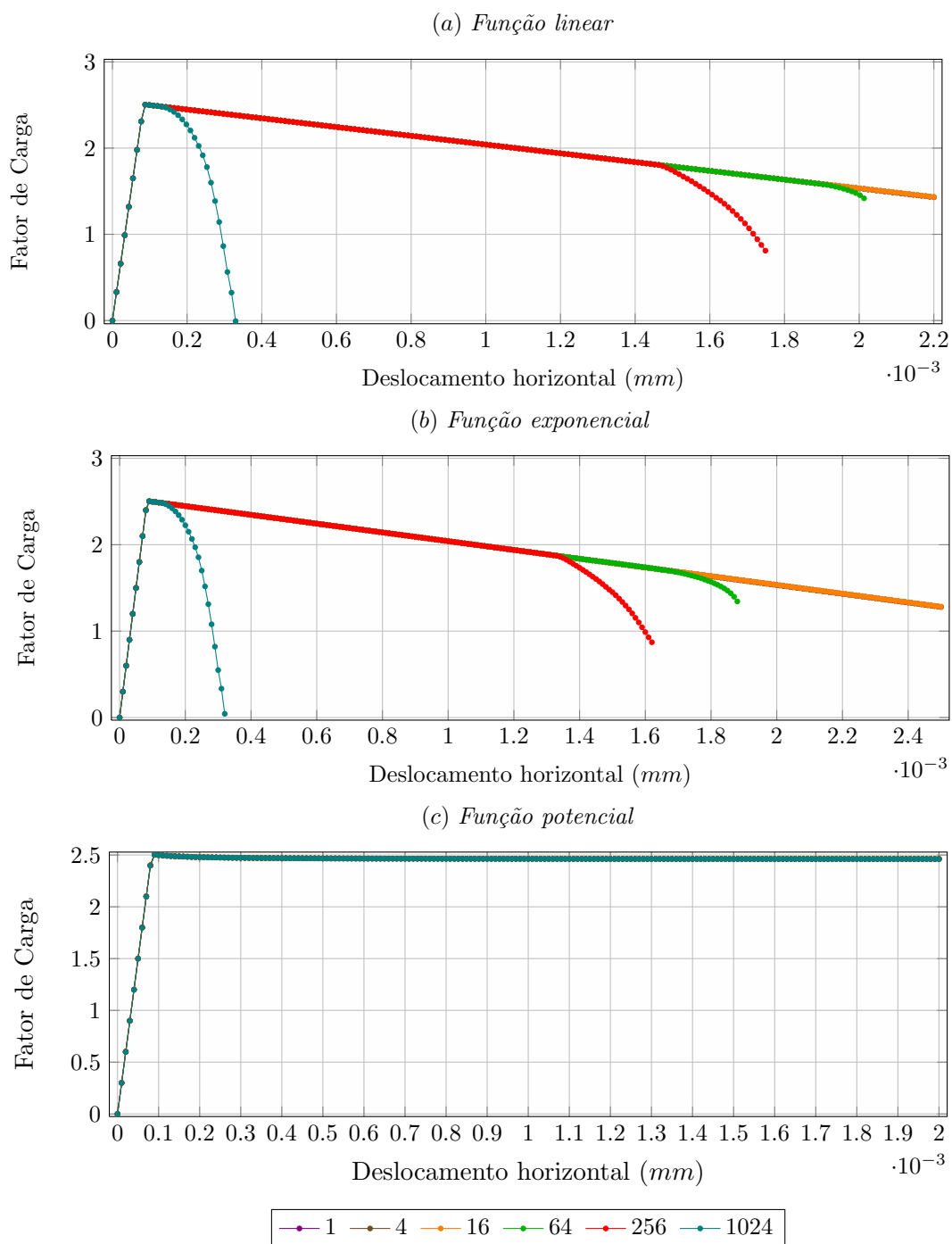


Figura 5.14: Resultados de tração pura com reprodução de amolecimento sem dano: (a) função linear, (b) função exponencial e (c) função potencial.

As Figuras 5.13 e 5.14 ilustram a existência de dependência de malha. Observa-se para ambas as figuras que, em geral, as curvas de amolecimento para as malhas com 1, 4, 16 e 64 elementos finitos são semelhantes.

Observa-se que a consideração de dano (Figura 5.13), assim como ocorreu no

endurecimento, antecipou a localização. Verifica-se para a malha com 256 elementos que, na presença de dano, as trajetórias de equilíbrio foram interrompidas para os deslocamentos horizontais de $5,50 \times 10^{-4}$, $1,10 \times 10^{-3}$ e $8,70 \times 10^{-4}$ mm para as funções linear, exponencial e potencial, respectivamente. Na ausência de dano, as interrupções aconteceram para os deslocamentos horizontais de $1,75 \times 10^{-3}$, $1,62 \times 10^{-3}$ e $2,0 \times 10^{-3}$ mm para as funções linear, exponencial e potencial, respectivamente.

Já para a malha com 1024 elementos, observa-se que, na presença de dano, as trajetórias de equilíbrio foram interrompidas para os deslocamentos horizontais de $9,90 \times 10^{-5}$, $1,0 \times 10^{-4}$ e $1,0 \times 10^{-4}$ mm para as funções linear, exponencial e potencial, respectivamente. Na ausência de dano, a interrupção das trajetórias de equilíbrio aconteceram para os deslocamentos horizontais de $3,30 \times 10^{-4}$, $3,20 \times 10^{-4}$ e $2,0 \times 10^{-3}$ mm para as funções linear, exponencial e potencial, respectivamente.

Em síntese, o dano antecipou a localização de deformações numericamente induzidas pelo refinamento da malha para o endurecimento e o amolecimento.

5.2.2 Localização de Deformações

Uma barra sujeita à tração direta é apresentada na Figura 5.15 com o intuito de ilustrar o fenômeno de localização de deformações induzida e o comportamento do modelo em regiões de carregamento e descarregamento. A indução de tal fenômeno é realizada admitindo-se que há uma região menos resistente, de comprimento c , no interior da barra, representando a degradação do meio material.

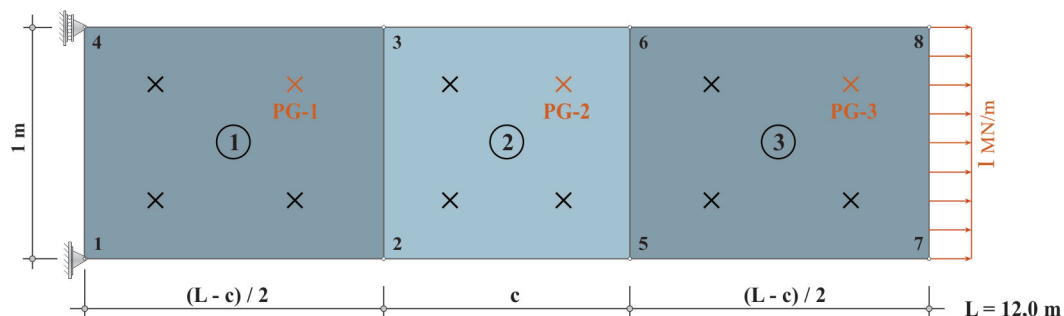


Figura 5.15: Discretização em elementos finitos para um problema de localização de deformações.

Esta barra, de comprimento $L = 12 \text{ m}$, foi discretizada com três elementos finitos quadrilaterais de quatro nós (elementos 1, 2 e 3), sendo reduzida a resistência à tração do elemento 2. Assim, o elemento menos resistente teve seu comprimento reduzido gradualmente, visando localizar o dano em uma região cada vez menor. Para isso, foram analisados modelos com $c = 0,50, 1, 2, 3$ e 4 m .

O material adotado foi o concreto, cujos parâmetros apresentados por Lemaitre (1992) são: módulo de elasticidade de 30000 MPa , coeficiente de Poisson de $0,20$, resistência de dano $r = 2,50 \times 10^{-7} \text{ MPa}$, expoente de dano $S = 1$ e tensão limite inicial de $2,50 \text{ MPa}$. Para o elemento central, adotou-se uma tensão limite inicial igual a $2,0 \text{ MPa}$. A função que descreve o comportamento pós-pico do material é a linear, que reproduz o comportamento de amolecimento do material adotando $\mathcal{H} = -500$. Para a obtenção das trajetórias de equilíbrio, utilizou-se o método de controle direto de deslocamento, sendo controlado o nó 6, com incremento de $0,0000021 \text{ m}$ no deslocamento horizontal deste nó e tolerância de 1×10^{-4} .

Apresentam-se na Figura 5.16 as trajetórias de equilíbrio para o deslocamento horizontal da extremidade da barra (nó 8) para os cinco modelos analisados.

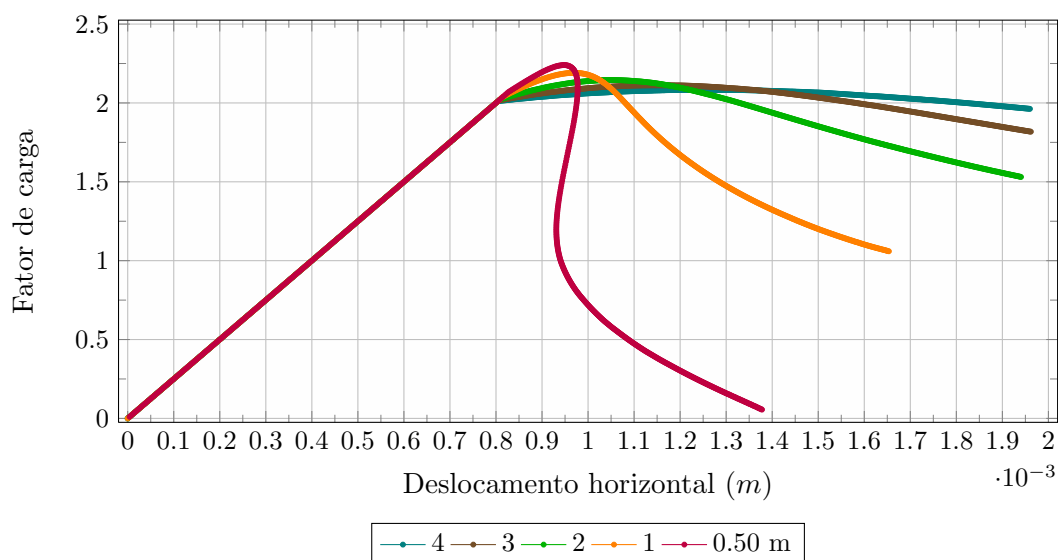


Figura 5.16: Trajetórias de equilíbrio do nó 8 para $c = 4, 3, 2, 1$ e $0,50 \text{ m}$.

É possível observar na Figura 5.16 a ocorrência de perda de ductilidade estrutural

à medida que a região menos resistente da barra foi reduzida. Conforme Fuina (2004), a localização de deformações no elemento menos resistente leva a situações de *snap-back*, e isto é verificado na figura para $c = 0,50 m$.

Para analisar o comportamento do modelo com $c = 0,50 m$, apresentam-se na Figura 5.17 as trajetórias de equilíbrio dos nós 8, 6 e 3.

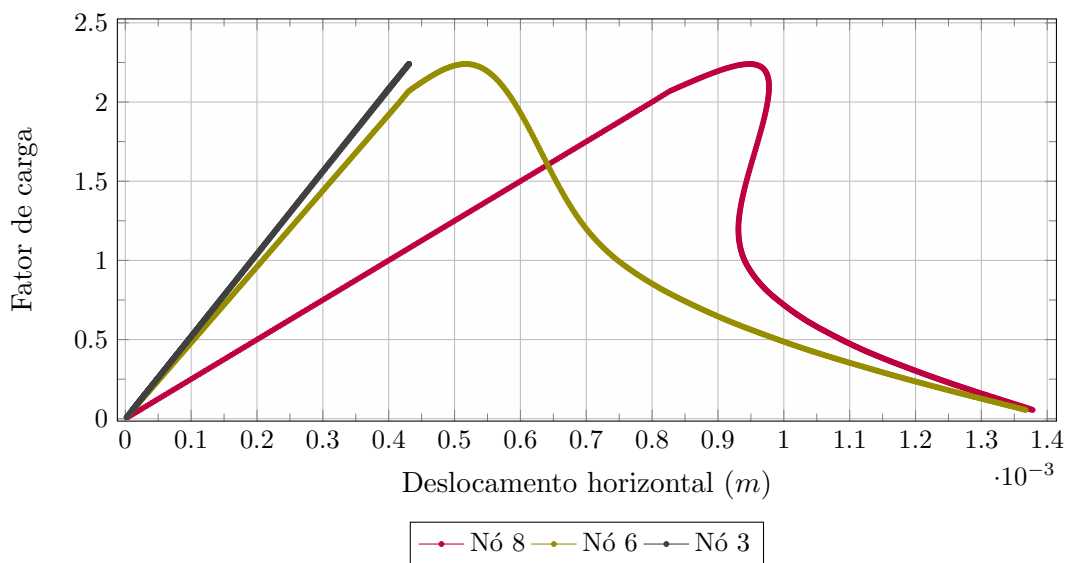


Figura 5.17: Trajetórias de equilíbrio dos nós 8, 6 e 3 para $c = 0,50 m$.

A Figura 5.17 reflete o comportamento global da estrutura e observa-se que o nó 3 sofreu descarregamento elástico. Segundo Penna (2011), o regime de descarregamento pode ser um comportamento induzido, por exemplo, por uma concentração de dano em uma região da estrutura, que perde capacidade de carga, fazendo com que as demais áreas se descarreguem. Nesta simulação, esta concentração foi induzida no elemento central da barra, considerando-se um material menos resistente em relação ao que compõe os demais elementos.

Também se constata que houve *snap-back* para a trajetória de equilíbrio do nó 8, caracterizado pelo decréscimo de deslocamento de um nível de fator de carga para outro, em virtude da localização de deformações no elemento menos resistente. Apesar de sua trajetória de equilíbrio também estar em carregamento inelástico, o nó 6 não apresentou *snap-back*, como aconteceu para o nó 8, o que pode ser justificado

pelo fato de seu comportamento ser influenciado pelos elementos 1 e 2.

Além da apresentação do comportamento global da estrutura na Figura 5.17, é possível verificar o comportamento dos elementos 1, 2 e 3 através dos gráficos *tensão x deformação* para os Pontos de Gauss (PG) indicados na Figura 5.15. Os resultados são apresentados na Figura 5.18 para $c = 0,50 m$.

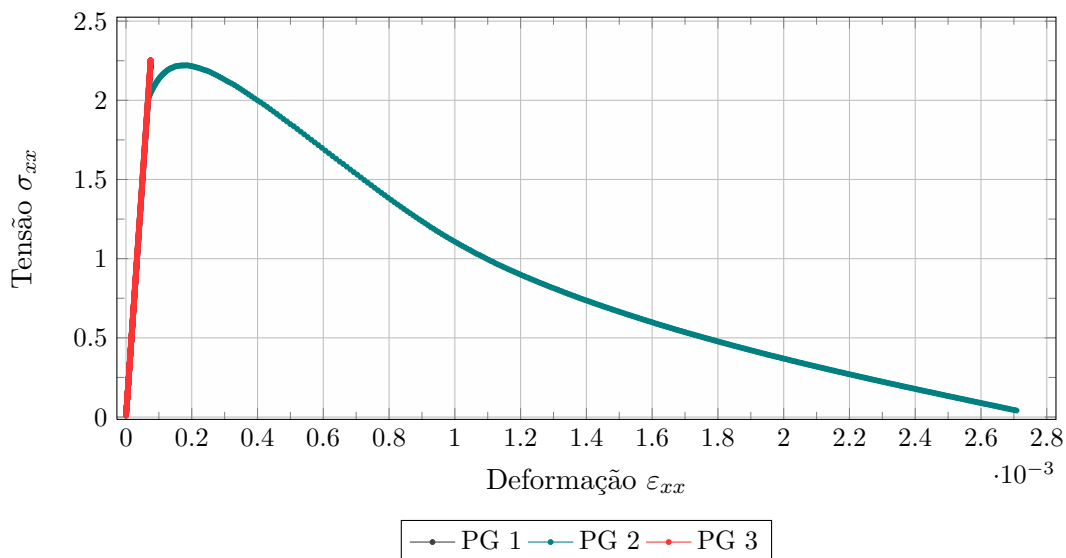


Figura 5.18: *Tensão* (σ_{xx}) x *deformação* (ε_{xx}) de Pontos de Gauss dos elementos 1, 2 e 3 para $c = 0,50 m$.

Esta figura mostra que houve o carregamento inelástico da região degradada (elemento 2) e o descarregamento elástico das regiões íntegras (elementos 1 e 3). O comportamento global da estrutura é governado pelo elemento central da barra e, sendo menos resistente que os demais (sua tensão de escoamento inicial é 20% menor), ele é carregado seguindo o ramo descendente da lei constitutiva (regime de amolecimento), enquanto os outros elementos sofrem descarregamento elástico, cuja consequência é o comportamento em *snap-back* mostrado na Figura 5.17.

Com base nestas observações, ilustram-se nas Figuras 5.19 e 5.20, respectivamente, a localização de deformações e o estado de dano do último passo de cada simulação para: (a) $c = 4 m$, com fator de carga de 1,9626; (b) $c = 3 m$, com fator de carga de 1,8178; (c) $c = 2 m$, com fator de carga de 1,5306; (d) $c = 1 m$, com

fator de carga de 1,0608 e (e) $c = 0,50 m$, com fator de carga de 0,0557.

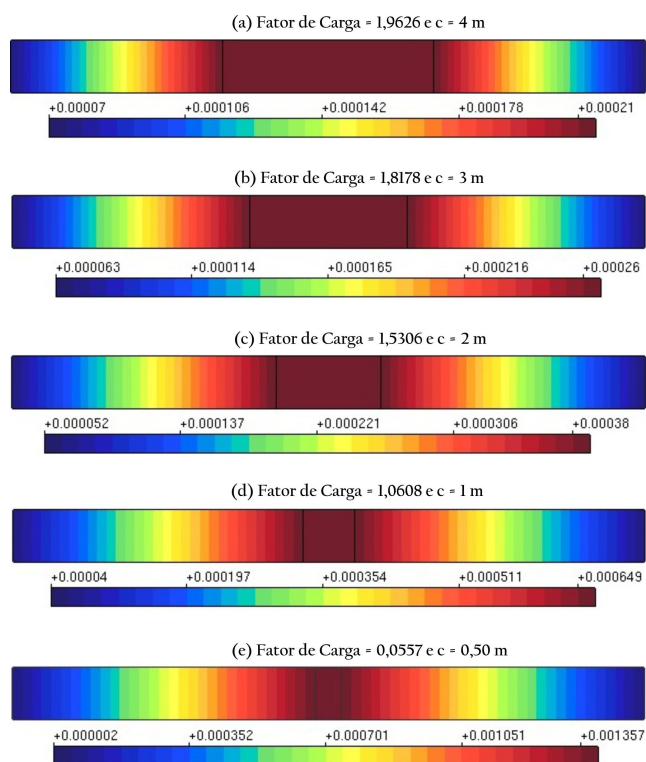


Figura 5.19: Localização de deformações axiais ε_{xx} .

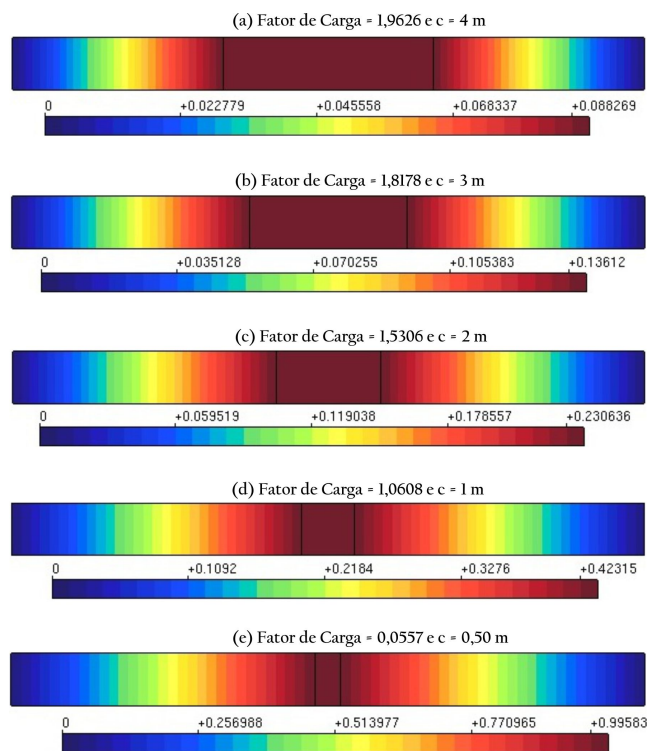


Figura 5.20: Estado de dano.

Das Figuras 5.19 e 5.20, observa-se que houve a concentração das deformações ε_{xx} e do dano à medida que se diminuiu o comprimento da região central menos resistente da barra, caracterizando a ocorrência do fenômeno de localização de deformações. Deste modo, constata-se que o dano no elemento 2 para $c = 0,50 \text{ m}$ obteve um valor de $D \cong 1$. Para evidenciar a evolução do dano na barra para os diferentes comprimentos do elemento menos resistente, a Figura 5.21 mostra a relação entre a deformação axial ε_{xx} e o dano D no nó 6 para $c = 0,50, 1, 2, 3$ e 4 m .

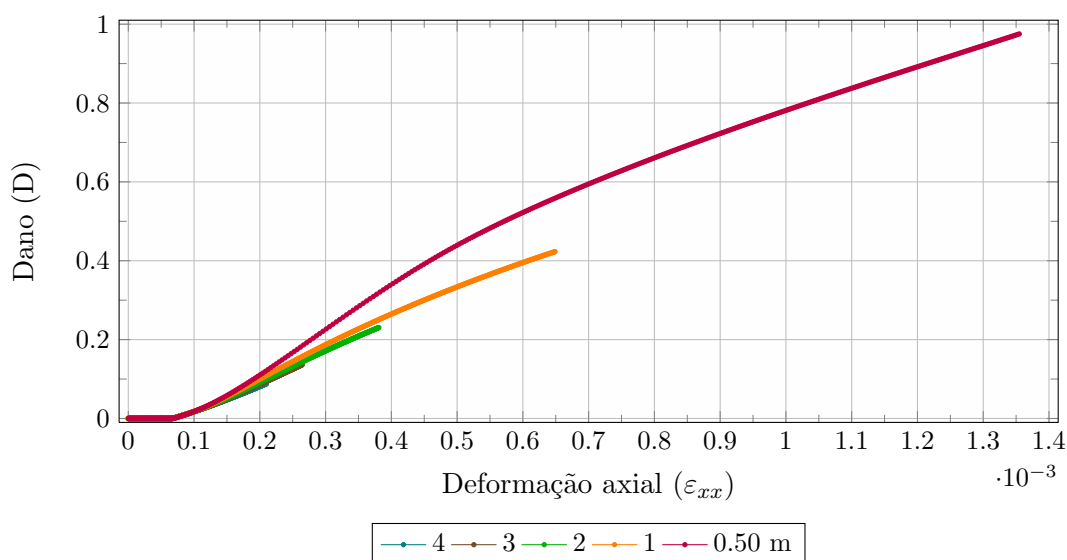


Figura 5.21: Dano (D) x deformação (ε_{xx}) para o nó 6 e diferentes comprimentos c do elemento central.

É possível verificar, a partir da Figura 5.21, que os valores de dano e deformação aumentaram conforme o comprimento da região central da barra foi sendo reduzido gradualmente. Deste modo, o dano e a deformação foram localizados em uma região cada vez menor, alcançando os maiores valores para $c = 0,50 \text{ m}$.

5.3 Exemplos de Validação

A implementação do modelo de Lemaitre (1985a,b) é validada com a reprodução de exemplos de diferentes características, cujos resultados são comparados aos presentes na literatura.

Os exemplos apresentados são: ensaio de tração direta, ensaio de flexão pura e ensaio de flexão em três pontos.

5.3.1 Ensaio de Tração Direta

De acordo com Mashayekhi et al. (2005), ensaios de tração são realizados tanto em análises numéricas quanto em experimentais, visando ao estudo de fratura dúctil. Desta forma, o ensaio de tração clássico foi adotado para a aplicação do modelo implementado.

Vaz Jr. e Owen (2001) apresentaram um algoritmo de integração das equações constitutivas que compreende duas equações e de Souza Neto (2002) mostrou como este sistema pode ser simplificado levando a um algoritmo de uma única equação. Neste contexto, Mashayekhi et al. (2005) optaram por utilizar este algoritmo em suas análises, enquanto este trabalho é baseado em Vaz Jr. e Owen (2001), conforme visto na seção 3.2.

O corpo-de-prova, apresentado na Figura 5.22, foi analisado com um modelo discreto bidimensional neste trabalho. Já os resultados apresentados por Mashayekhi et al. (2005) referem-se ao modelo tridimensional. De acordo com Hancock e Mackenzie (1976) *apud* Mashayekhi et al. (2005), este elemento sob tração experimenta um comportamento *tensão-deformação* característico, que induz a iniciação da fratura no centro e a sua propagação em direção à borda exterior.

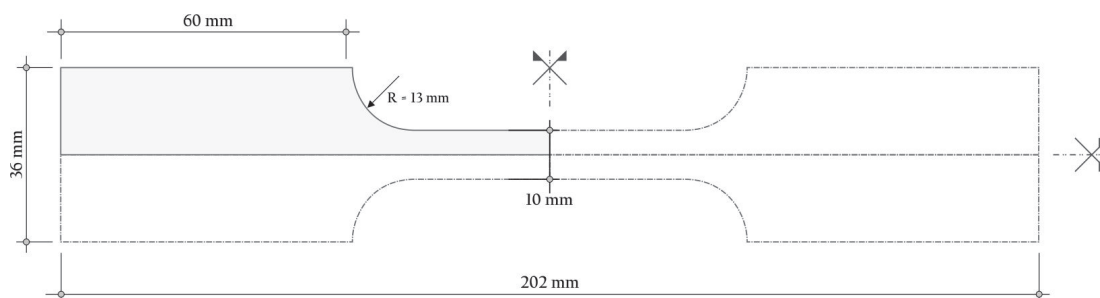


Figura 5.22: Dimensões do corpo-de-prova.

A malha de elementos finitos discretiza um quarto da geometria do elemento e

as condições de contorno apropriadas são impostas nas bordas, conforme ilustra a Figura 5.23. Para a simulação numérica, adotou-se a análise em EPT, elementos finitos quadrilaterais de quatro nós, espessura de 5 mm e método de controle de deslocamento generalizado, com fator de carga inicial de 0,50, tolerância de 1×10^{-4} e carga de referência de -860 N/mm , conforme indicação da Figura 5.23.

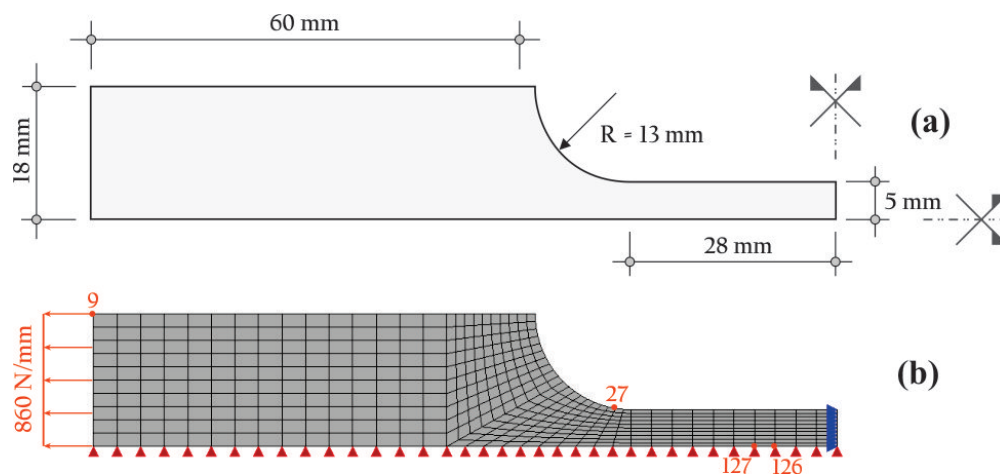


Figura 5.23: Ensaio de tração direta: (a) modelo de um quarto da geometria usando condição de simetria; (b) malha de elementos finitos.

O material utilizado é o aço AISI 1010, cujos parâmetros foram apresentados na Tabela 5.1. Ressalta-se que foi empregada a função inelástica exponencial.

Mashayekhi et al. (2005) definiram a carga limite para a tensão de escoamento como $P_L = -15500 \text{ N}$. Assim, é possível obter uma carga adimensional normalizada pela relação P/P_L . Os autores avaliaram a reprodução do comportamento do material com e sem dano e estas duas análises também foram realizadas com o modelo de Lemaitre (1985a,b). Na primeira, foram utilizados todos os parâmetros apresentados na Tabela 5.1, capazes de reproduzir o comportamento do material com dano. Posteriormente, considerou-se $r \rightarrow \infty$, com o objetivo de reproduzir o comportamento do material desprezando a influência do dano.

As respostas de *carga normalizada x deslocamento horizontal* para o nó 9 para o modelo de Lemaitre (1985a,b) são ilustradas na Figura 5.24 (gráficos (a) e (b)), juntamente com os resultados de Mashayekhi et al. (2005) (gráficos (c) e (d)).

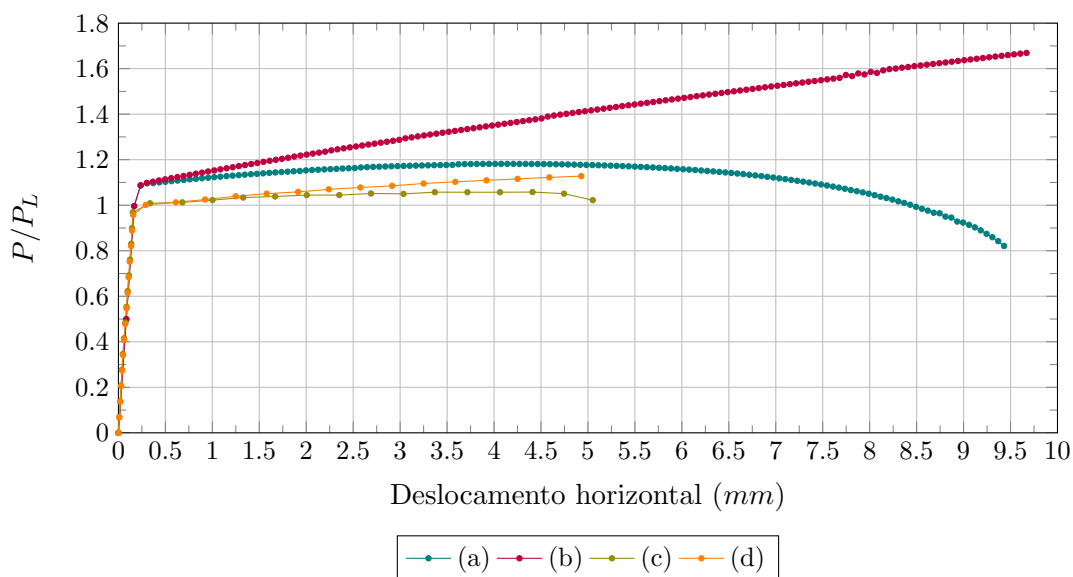


Figura 5.24: Curvas carga normalizada (P/P_L) x deslocamento horizontal (d_x) : do modelo de Lemaitre (1985a,b) (a) com dano e (b) sem dano; do modelo apresentado por Mashayekhi et al. (2005) (c) com dano e (d) sem dano.

Verifica-se no gráfico (a) a influência do processo de dano no comportamento global da estrutura. O endurecimento cessou a partir do deslocamento horizontal de $4,47$ mm, correspondente a $P/P_L = 1,1809$. Com a ocorrência de amolecimento, a capacidade de carga do corpo-de-prova diminuiu e, para o deslocamento horizontal de $9,43$ mm, a carga normalizada foi de $P/P_L = 0,8209$. Já no gráfico (b), o que se observou foi o endurecimento do material sem a perda da capacidade de carga, em razão da desconsideração do dano. Nota-se que os comportamentos dos gráficos (a) e (b) nos trechos lineares foram iguais até o valor de $P/P_L \cong 1,10$.

Para os gráficos (c) e (d), os trechos lineares foram similares até, aproximadamente, $P/P_L \cong 1,0$. No gráfico (c) também se observa a perda da capacidade de carga no corpo-de-prova em razão da influência do dano, enquanto no gráfico (d), em que o dano é desprezado, ocorreu o endurecimento do material. Comparando-se os resultados numéricos apresentados por Mashayekhi et al. (2005) com os obtidos pela aplicação do modelo de Lemaitre (1985a,b), verifica-se que os comportamentos dos modelos são semelhantes. Os deslocamentos máximos e as correspondentes cargas

normalizadas foram, para cada um dos gráficos: (a) $d_x = 9,43 \text{ mm}$ e $P/P_L = 0,8209$; (b) $d_x = 9,67 \text{ mm}$ e $P/P_L = 1,6691$; (c) $d_x = 5,05 \text{ mm}$ e $P/P_L = 1,022$ e (d) $d_x = 4,93 \text{ mm}$ e $P/P_L = 1,1278$. As diferenças entre as respostas podem ser explicadas pelo fato de que as análises realizadas neste trabalho utilizaram elementos planos e o algoritmo de integração de Vaz Jr. e Owen (2001), enquanto Mashayekhi et al. (2005) utilizaram elementos sólidos e o algoritmo de de Souza Neto (2002).

A partir dos resultados apresentados no gráfico (a), é possível verificar na Figura 5.25 como ocorre a evolução do dano e o comportamento da tensão σ_{xx} em relação à deformação ε_{xx} , para o nó 126. Os gráficos possibilitam observar, entre outros aspectos, o crescimento do dano e dos valores de tensão e a queda destes últimos no decorrer do processo de carregamento, em virtude da influência do dano.

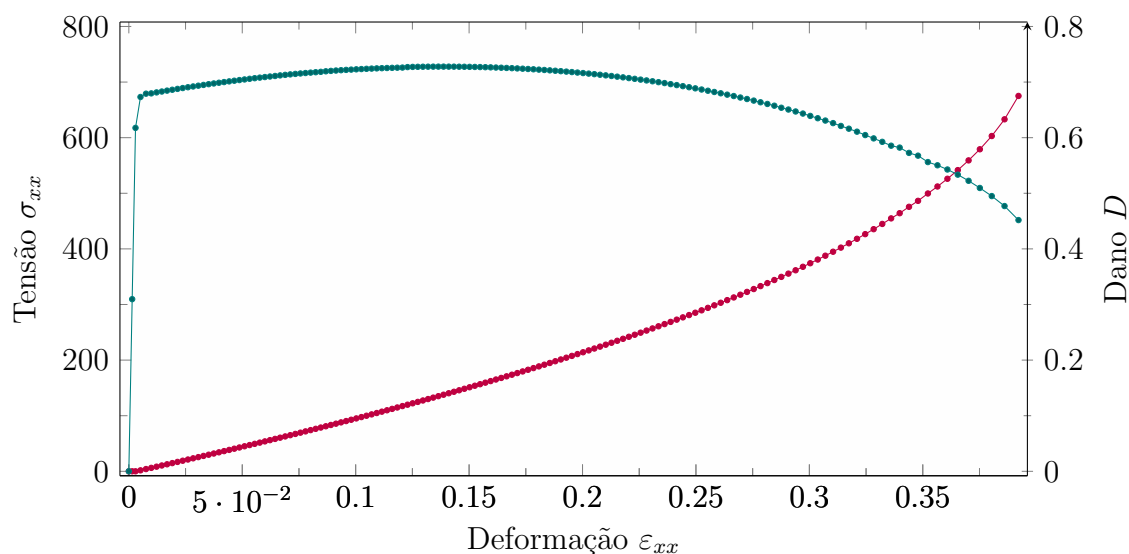


Figura 5.25: Tensão (σ_{xx}) x deformação (ε_{xx}) e dano (D) x deformação (ε_{xx}).

A curva *tensão x dano* para o nó 126, apresentada na Figura 5.26, destaca as considerações anteriores. A princípio, houve endurecimento do material até, aproximadamente, $D = 0,15$ e os maiores valores de tensão foram alcançados para baixos valores de dano. No decorrer do processo de carregamento, o aumento do dano culminou com a perda gradual de resistência do material e com a ocorrência de amolecimento e seu valor máximo foi $D = 0,675$.

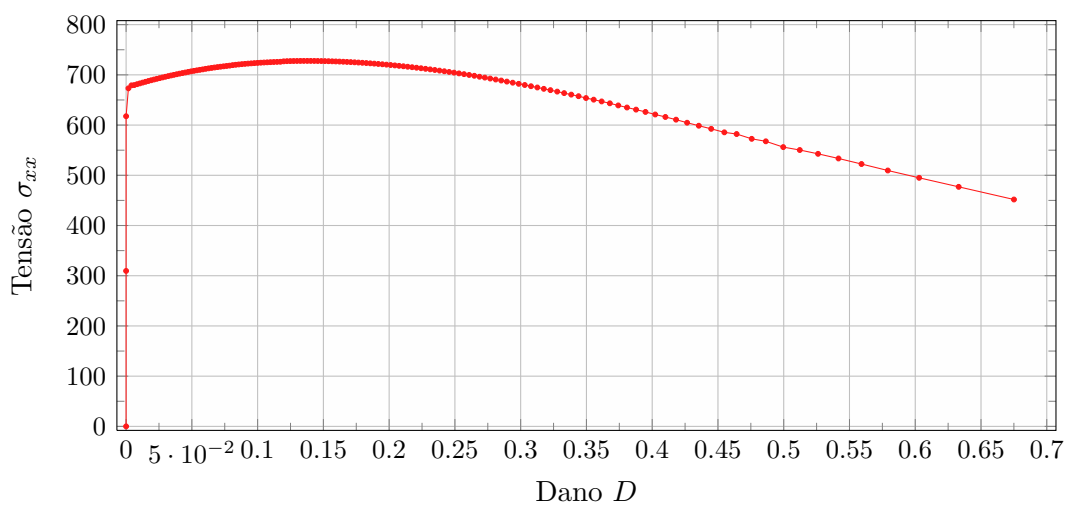


Figura 5.26: Tensão (σ_{xx}) x dano (D).

Em relação à distribuição do dano no corpo-de-prova ao longo da análise, tem-se na Figura 5.27 as isofaixas de valores para o dano ocorrido ao longo da análise.

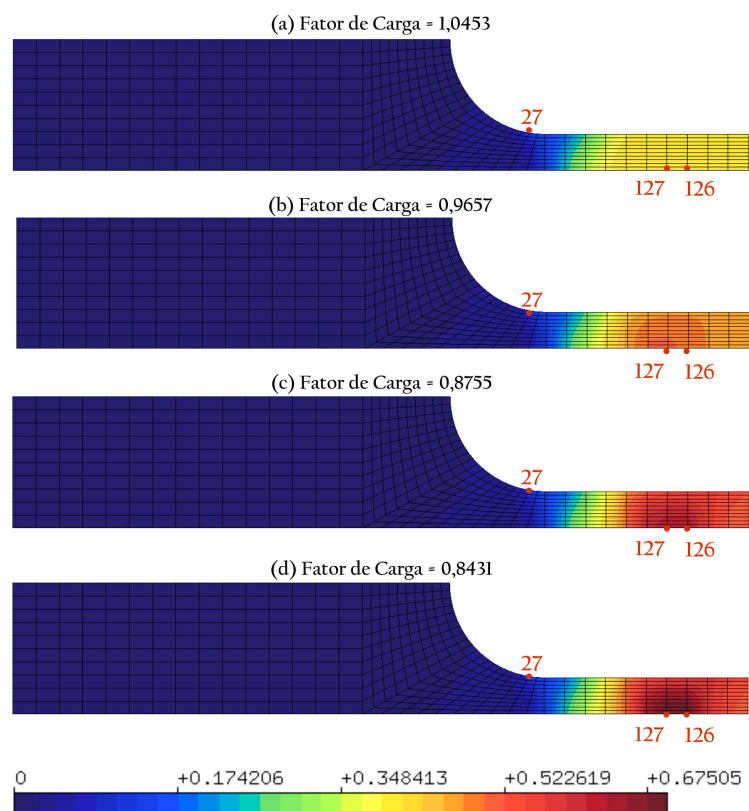


Figura 5.27: Isofaixas de valores de dano para a simulação de tração em uma barra.

No início do processo de carregamento, o dano apresentou valores na faixa de $D =$

0,34 na região dos nós 126 e 127 (Figura 5.27-a). Posteriormente, ele se distribuiu na região central do corpo-de-prova (Figura 5.27-b, c). Ao final do processo, o dano estava altamente localizado nas proximidades dos nós 126 e 127, atingindo o valor máximo de $D = 0,675$ (Figura 5.27-d). Este fato sugere que houve a estricção do corpo-de-prova e seu rompimento nessa região. Neste sentido, Hancock e Mackenzie (1976) *apud* Mashayekhi et al. (2005) mostraram que para certos corpos-de-prova com entalhe submetidos à tração, o fraturamento é iniciado no centro e se propaga em direção à borda mais externa do elemento.

Complementando a apresentação das isofaixas de dano, avalia-se, através da Figura 5.43, a distribuição de tensões σ_{xx} para diferentes pontos da análise.

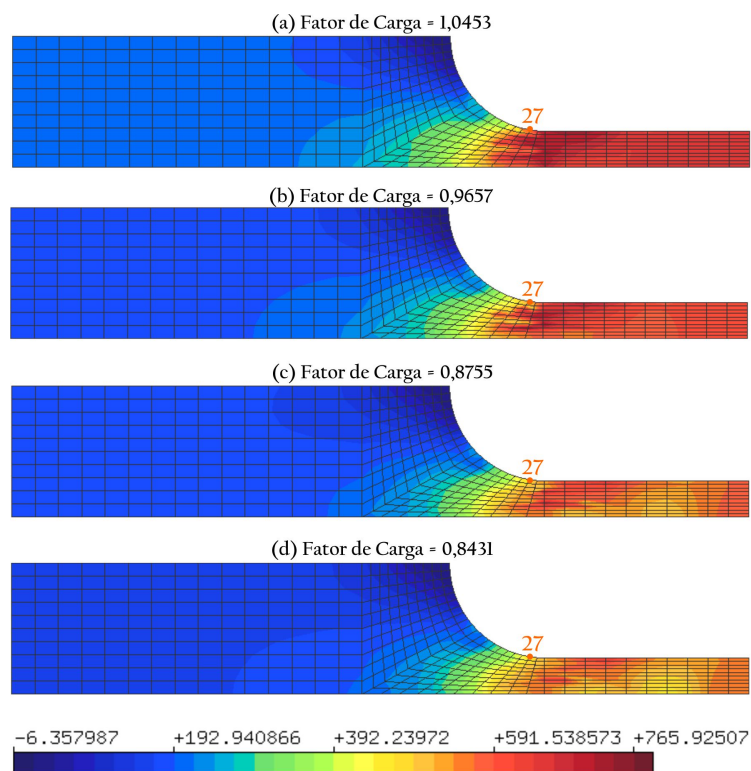


Figura 5.28: Isofaixas de valores de tensão σ_{xx} para a simulação de tração em uma barra.

Da Figura 5.28, nota-se que a tensão desde o princípio do processo de carregamento foi elevada nas proximidades do nó 27, se distribuindo com mais intensidade na região central do corpo-de-prova no decorrer da simulação.

5.3.2 Flexão Pura de uma Barra

O colapso de uma barra retangular metálica contendo um entalhe em V de 90° e sujeita a flexão pura foi analisado por de Souza Neto et al. (2008). As características do problema são ilustradas na Figura 5.29.

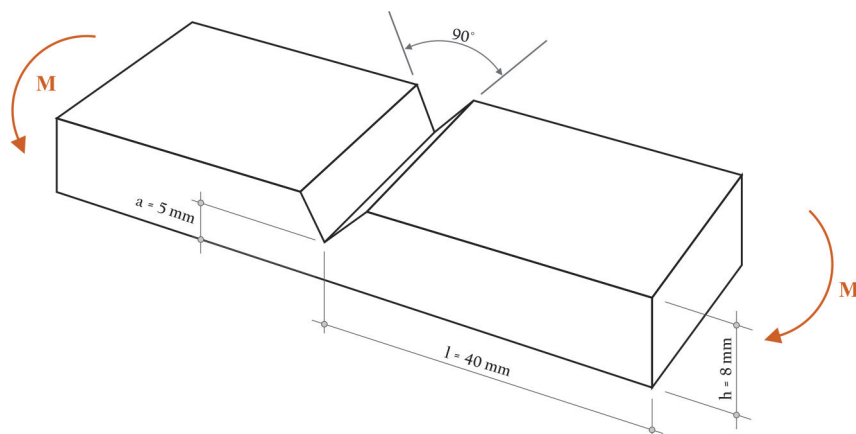


Figura 5.29: Flexão de uma barra com entalhe em V : definição do problema. Adaptado de de Souza Neto et al. (2008).

Um valor superior analítico para o limite de carregamento deste problema foi obtido por Green (1953) *apud* de Souza Neto et al. (2008) e estes compararam seus resultados com a referida resposta analítica. O objetivo da análise realizada neste item é comparar o resultado analítico de Green (1953) *apud* de Souza Neto et al. (2008) com os resultados obtidos com o modelo de Lemaitre (1985*a,b*), aplicando-se as funções inelásticas linear e exponencial.

Para um ângulo de entalhe de 90° , o limite superior do momento por unidade de largura da barra, obtido por Green (1953) *apud* de Souza Neto et al. (2008), é definido por:

$$M_u \approx 0,623ca^2, \quad (5.1)$$

sendo possível escrever:

$$\frac{M_u}{ca^2} \approx 0,623, \quad (5.2)$$

em que a é a espessura da barra medida a partir da ponta do entalhe e c é a coesão (ou resistência ao cisalhamento), definida como:

$$c = \frac{\sigma_0}{2}, \quad (5.3)$$

onde σ_0 é a tensão de escoamento do material.

A malha de elementos finitos adotada para a simulação é apresentada na Figura 5.30. Somente metade da barra foi discretizada em virtude da simetria existente. O momento M foi aplicado através de um binário de forças opostas de intensidade $F = 233625 \text{ N}$ prescritas nos nós 3 e 4, indicados na Figura 5.30.

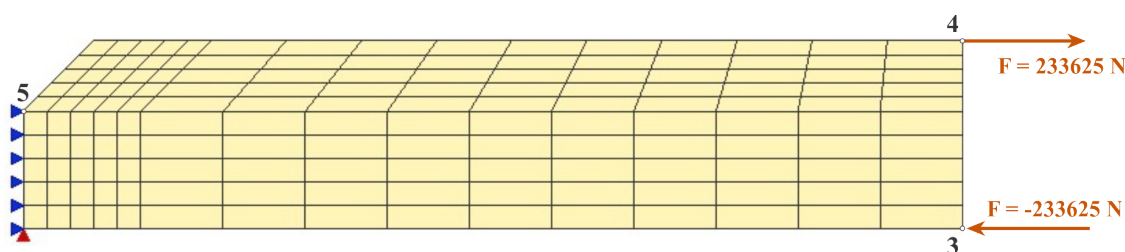


Figura 5.30: Modelo de elementos finitos de uma barra com entalhe em V .

Os parâmetros do material utilizado na análise são apresentados na Tabela 5.8.

Tabela 5.8: Parâmetros do material utilizado. Adaptado de de Souza Neto et al. (2008).

Módulo de Elasticidade	$E = 210000 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Tensão de Escoamento Inicial	$\sigma_0 = 240 \text{ MPa}$
Módulo Pós-Crítico	$\mathcal{H} = 0$

Estes parâmetros e as medidas que definem a geometria da barra, quando substituídos na equação (5.1), resultam no valor limite para o momento:

$$M_u \approx 1869 \text{ N.m.} \quad (5.4)$$

É possível escrever a seguinte equação para o momento:

$$M = Fh, \quad (5.5)$$

definindo a força por:

$$F = \frac{M}{h}. \quad (5.6)$$

Substituindo-se o valor do momento calculado na equação (5.4) e a altura h da barra, encontra-se:

$$F = 233625 \text{ N}, \quad (5.7)$$

sendo este valor adotado como carga de referência nas simulações, conforme ilustrado na Figura 5.30.

Uma vez estabelecidas as condições da simulação, empregou-se o modelo de Lemaitre (1985*a,b*) com a função inelástica linear e em EPT. Para que esta função e o modelo de Lemaitre (1985*a,b*) fossem capazes de reproduzir a plasticidade perfeita sem o presença de dano, foram adotados o módulo pós-crítico $\mathcal{H} = 0$, a resistência de dano $r \rightarrow \infty$ e o expoente de dano $S = 1$, visto que Lemaitre (1985*b*) afirmou, fundamentado em resultados de vários ensaios experimentais, que geralmente S assume esse valor.

Na solução, foram adotados elementos finitos quadrilaterais de quatro nós e o método de controle de deslocamento generalizado, com fator de carga de $2,50 \times 10^{-5}$ e tolerância de 1×10^{-3} . Na Figura 5.31 é ilustrada a comparação da resposta de Green (1953) *apud* de Souza Neto et al. (2008) com o resultado obtido com o modelo implementado, sendo apresentado o gráfico *deslocamento vertical* x *momento fletor normalizado por unidade de largura* (M/ca^2) do nó 4.

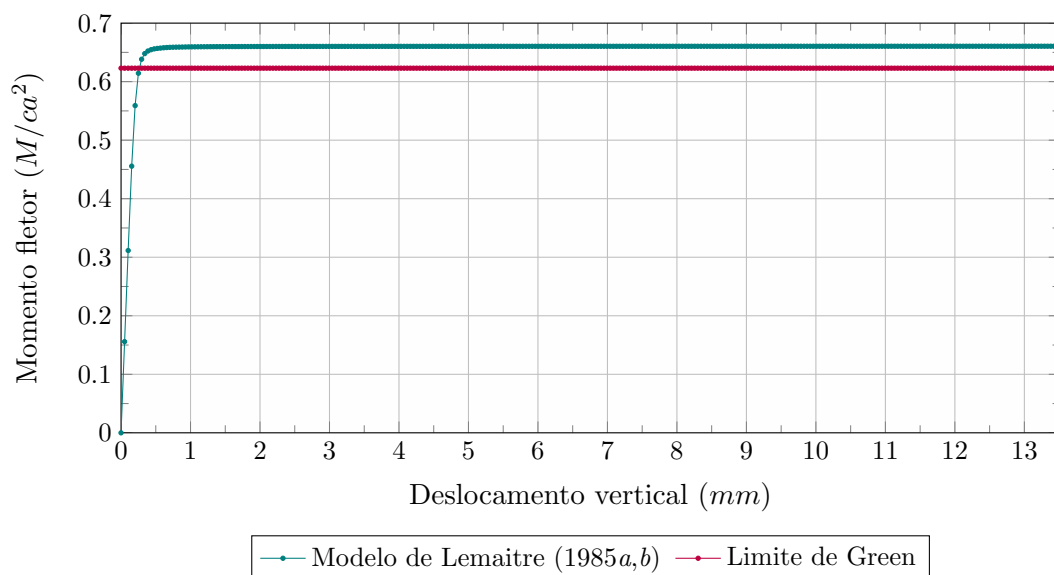


Figura 5.31: Comparação entre o resultado de Green (1953) e o resultado obtido pelo modelo de Lemaitre (1985a,b) com utilização da função linear.

O valor máximo de flexão M/ca^2 obtido com a aplicação do modelo de Lemaitre (1985a,b) foi de aproximadamente 0,66051, sendo 5,68% maior que o limite estabelecido por Green (1953) *apud* de Souza Neto et al. (2008). Isto permite concluir que o resultado obtido com o modelo implementado, adequadamente adaptado para reproduzir o comportamento de plasticidade perfeita sem o efeito de dano e aplicado com a função linear, aproximou-se bem do limite analítico estabelecido.

A título de verificar o comportamento do material considerando-se a atuação do dano, utilizou-se a função exponencial. A constante r teve que ser ajustada a partir da variação de valores e análise dos comportamentos obtidos para esta simulação. Assim, além dos parâmetros do material apresentados na Tabela 5.8, a Tabela 5.9 elenca outros, necessários à definição da função adotada.

Tabela 5.9: Parâmetros do material para a função exponencial.

a / b	1500 / 0,34
Resistência / Expoente de Dano	$r = 0,50 \text{ MPa} / S = 1$
Tensão de Escoamento	$\sigma(\kappa) = 240 + 1500 [1 - e^{(-0,34\kappa)}]$
Módulo Pós-Crítico	$H(\kappa) = 510e^{(-0,34\kappa)}$.

Na solução, foi adotado o método de controle de deslocamento generalizado, com fator de carga de $2,50 \times 10^{-5}$ e tolerância de 1×10^{-3} . A Figura 5.32 apresenta as curvas obtidas com a aplicação da função exponencial, para o nó 4, com diferentes considerações: (a) reprodução do comportamento de plasticidade perfeita sem dano, realizada admitindo-se que $r \rightarrow \infty$ e que os parâmetros da função inelástica assumam os valores de $a = 0$ e $b = 0$; (b) reprodução do comportamento de endurecimento do material com dano, obtida mantendo-se os valores dos parâmetros do material de acordo com a Tabela 5.9; e (c) reprodução do comportamento do material sem a presença de dano, em que todos os parâmetros da função permaneceram com seus valores originais, exceto a resistência de dano, cujo valor tendeu ao infinito.

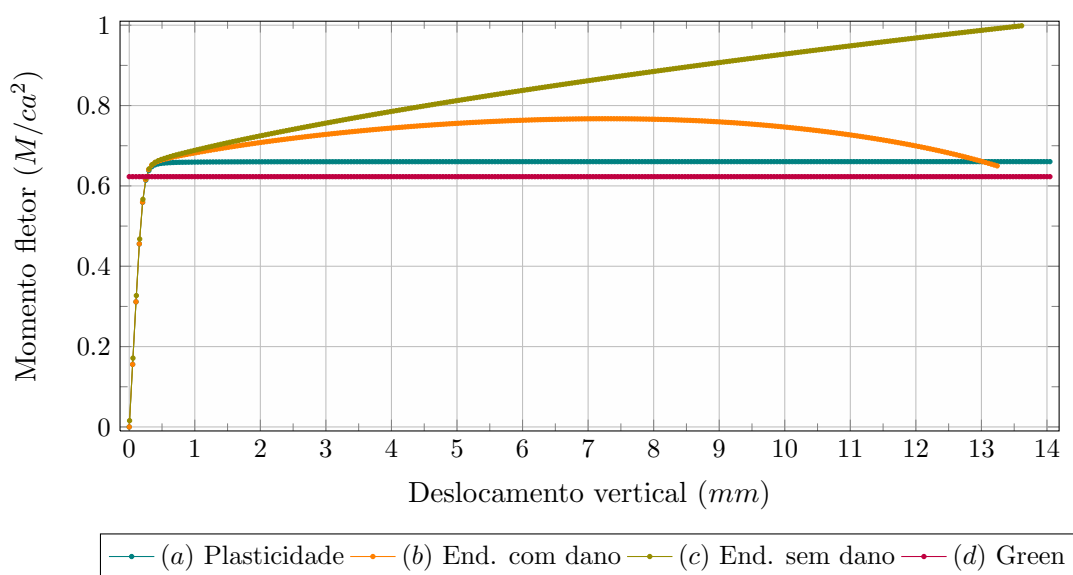


Figura 5.32: Comparação entre os resultados obtidos pelo modelo Lemaitre (1985a,b) com a função exponencial reproduzindo (a) plasticidade perfeita, (b) endurecimento com dano e (c) endurecimento sem dano com o resultado analítico de Green (1953) (d).

Analisando-se os resultados apresentados na Figura 5.32, verifica-se que no gráfico (c) houve o endurecimento do material e quando o efeito do dano foi considerado, de acordo com o gráfico (b), o endurecimento foi afetado, ocorrendo o amolecimento a partir do deslocamento vertical de 7,3048 mm. Quanto ao gráfico (a), o valor máximo de flexão M/ca^2 obtido foi de aproximadamente 0,66041, sendo 5,66% maior que o limite de Green (1953) *apud* de Souza Neto et al. (2008), apresentado no gráfico (d), sendo considerado um resultado adequado.

A partir dessas observações e considerando a reprodução do endurecimento com dano e aplicação da função exponencial, é possível avaliar através da Figura 5.33 como ocorre a evolução do dano e o comportamento da tensão σ_{xx} , ambos em relação à deformação ε_{xx} , para o nó 5. Estas duas relações são apresentadas e é possível observar o crescimento do dano e dos valores de tensão e a queda destes no decorrer do processo de carregamento, em razão da consideração do dano.

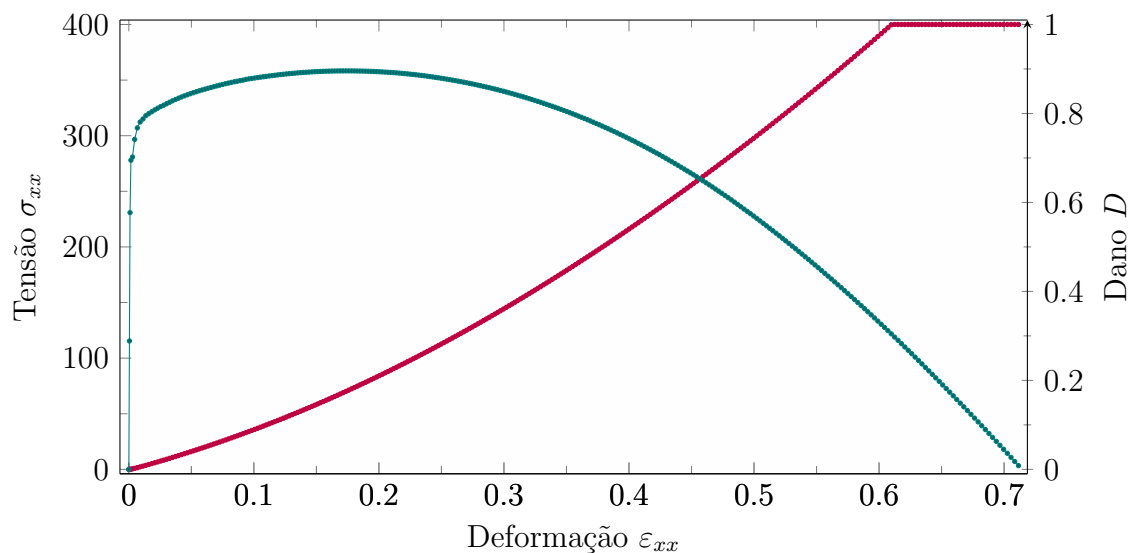


Figura 5.33: Tensão (σ_{xx}) x deformação (ε_{xx}) e dano (D) x deformação (ε_{xx}).

Neste contexto, a Figura 5.34 evidencia as constatações anteriores, apresentando a curva *tensão x dano* para o nó 5. Verifica-se que inicialmente houve o endurecimento do material e que os maiores valores de tensão ocorreram para baixos níveis de dano. À medida que o elemento foi carregado e os valores de dano aumentaram, seu

efeito influenciou intensamente o comportamento do material, o que foi verificado pela ocorrência de amolecimento.

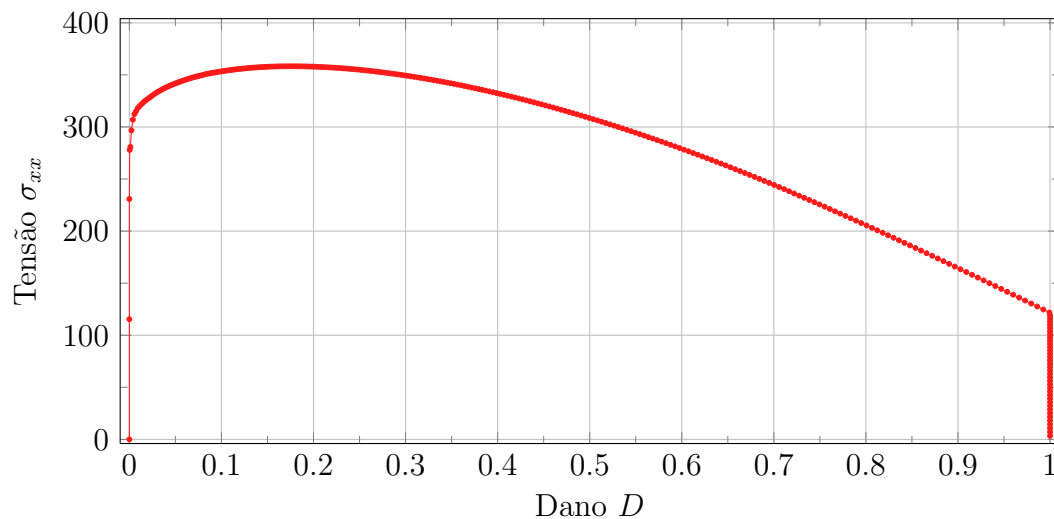


Figura 5.34: Tensão (σ_{xx}) x dano (D) para o nó 5.

De modo a ilustrar a distribuição do dano no elemento, têm-se na Figura 5.35 as isofaixas de valores para o dano ocorrido ao longo da trajetória de equilíbrio. Nela, destaca-se que $D = 1$, ao final do processo, ocorreu nas proximidades do nó 5.

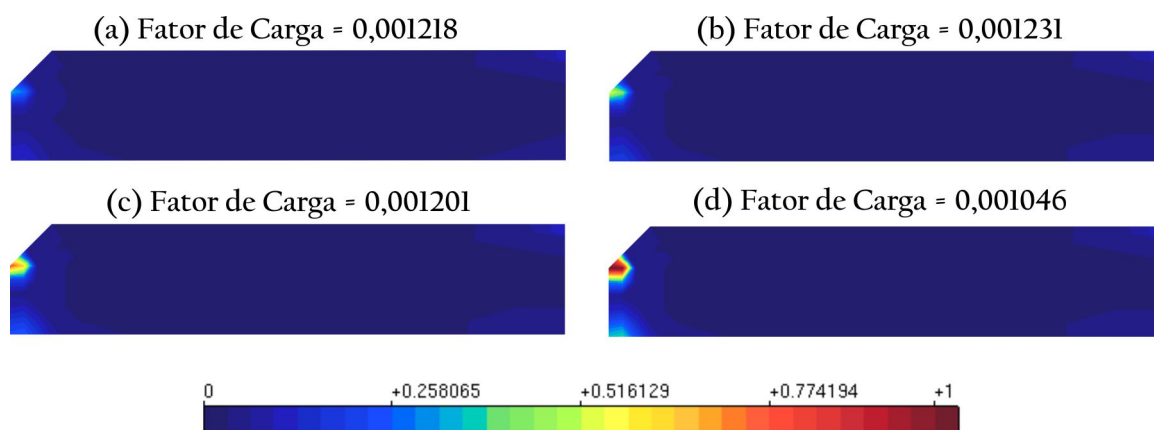


Figura 5.35: Isofaixas de valores de dano.

Adicionalmente, concluídas as análises referentes à aplicação do modelo implementado com as diferentes funções, pretendeu-se investigar o comportamento do modelo com a função linear reproduzindo plasticidade perfeita sob as condições de:

(1) EPT, admitindo-se espessura unitária da barra; (2) Estado Plano de Deformação (EPD), sendo considerado o efeito de confinamento ($\sigma_z \neq 0$); e (3) EPD, sem a consideração do efeito de confinamento ($\sigma_z = 0$).

Estas análises foram motivadas porque de Souza Neto et al. (2008) avaliaram o problema sob condições de EPD, sob a justificativa de que a barra é suficientemente larga para tal, e o material foi modelado por eles com o comportamento perfeitamente plástico, adotando-se o *critério de escoamento de Tresca*.

A Figura 5.36 apresenta a comparação da resposta analítica de Green (1953) *apud* de Souza Neto et al. (2008) com os resultados numéricos obtidos com o modelo de Lemaitre (1985*a,b*) e a função linear para as condições (1), (2) e (3). Apresentam-se os gráficos *deslocamento vertical x momento fletor normalizado por unidade de largura* (M/ca^2), do nó 4.

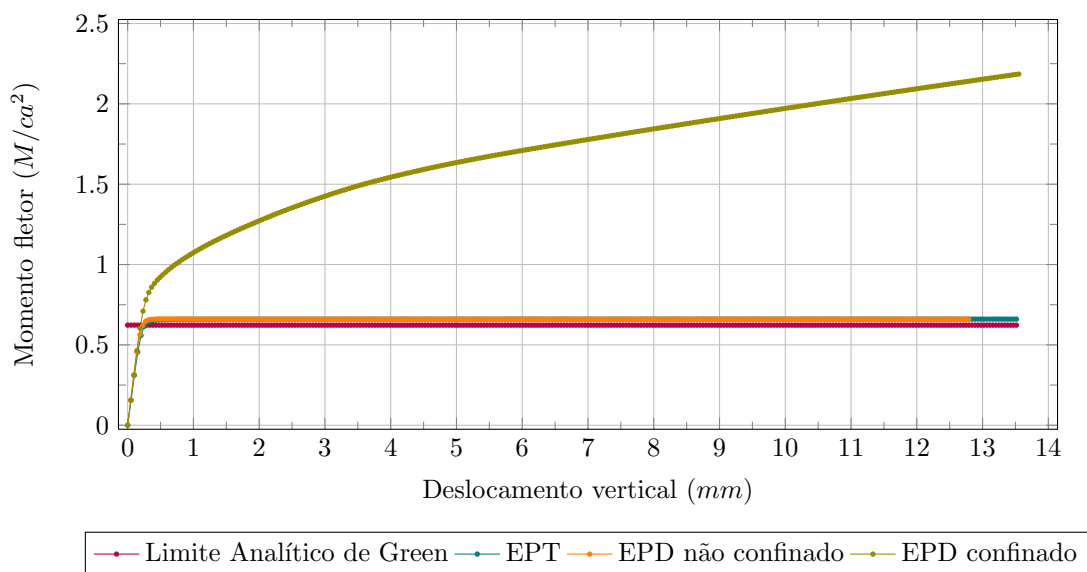


Figura 5.36: Comparação entre o resultado analítico de Green (1953) e os resultados obtidos pelo modelo Lemaitre (1985*a,b*) com a função linear reproduzindo plasticidade perfeita com: EPT, EPD sem confinamento e EPD com confinamento.

É possível verificar que a aplicação do modelo sob condições de EPD com a consideração do efeito de confinamento conduziu ao endurecimento do material, o que,

para este caso, não reproduz o comportamento da solução analítica. Desconsiderando-se o efeito de confinamento sob condições de EPD, o valor máximo de M/ca^2 obtido foi de aproximadamente 0,66033, e sob condições de EPT, este valor foi próximo de 0,66051, sendo 5,65% e 5,68% superiores ao limite de Green (1953) *apud* de Souza Neto et al. (2008), respectivamente.

Deste modo, verifica-se que os resultados obtidos sob as condições de EPD sem o efeito de confinamento e de EPT foram semelhantes e próximos à resposta analítica.

5.3.3 Flexão em Três Pontos

Objetiva-se neste item verificar o comportamento do modelo elastoplástico com dano implementado através de comparações com resultados numéricos obtidos por Mashayekhi et al. (2005) e com o resultado experimental de Giovanola et al. (1999), com o qual Mashayekhi et al. (2005) também fizeram comparativos.

Ressalta-se que os resultados apresentados por Mashayekhi et al. (2005) referem-se ao modelo tridimensional, em que foi empregada a forma simplificada do modelo de Lemaitre (1985*a,b*) apresentada por de Souza Neto (2002), que utiliza um algoritmo de integração das tensões com uma única equação.

A geometria do corpo-de-prova utilizado para a simulação numérica, apresentada na Figura 5.37, baseia-se na norma ASTM Standard E399-90 (1994) *apud* Mashayekhi et al. (2005), exceto por conter um entalhe reto com ponta semicircular ao invés de uma trinca acentuada.

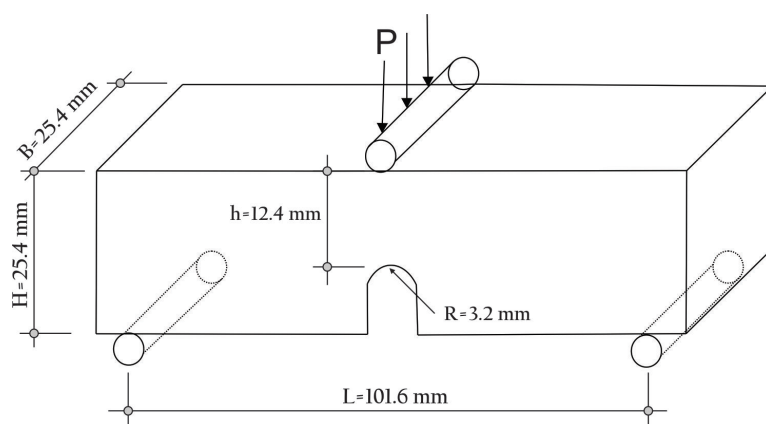


Figura 5.37: Ensaio de flexão em três pontos: geometria e dimensões.

A Figura 5.38 mostra as condições de contorno apropriadas impostas nas bordas, a condição de carregamento e a malha de elementos finitos utilizada, desenvolvida a partir do plano de simetria do corpo-de-prova e com metade dele discretizada.

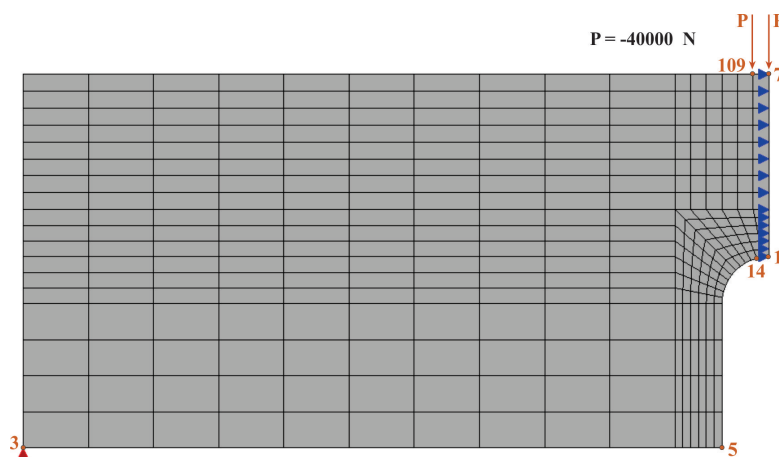


Figura 5.38: Malha de elementos finitos e condição de carregamento para o ensaio de flexão em três pontos.

As dimensões do corpo-de-prova e propriedades do material foram definidas de acordo com os ensaios experimentais realizados por Giovanola et al. (1999), segundo Mashayekhi et al. (2005). O material utilizado foi o aço de alta resistência HY130 e suas propriedades são descritas na Tabela 5.10. Mashayekhi et al. (2005) ressaltaram que os parâmetros de dano r e S não foram avaliados por Giovanola et al. (1999) para este material. Deste modo, os autores definiram $S = 1$, de acordo com Lemaitre (1996), e para definir r , Mashayekhi et al. (2005) calibraram diferentes valores a

partir de resultados experimentais e adotaram $r = 13 \text{ MPa}$.

Tabela 5.10: Parâmetros do material: aço de alta resistência HY 130. (Mashayekhi et al., 2005).

Módulo de Elasticidade	$E = 176000 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Tensão de Escoamento Inicial	$\sigma_0 = 950 \text{ MPa}$
a	7600
b	0,55
Tensão de Escoamento	$\sigma(\kappa) = 950 + 7600 [1 - e^{(-0,55\kappa)}]$
Módulo Pós-Crítico	$H(\kappa) = 4180 e^{(-0,55\kappa)}$
Resistência de Dano	$r = 13 \text{ MPa}$
Expoente de Dano	$S = 1$

A carga de referência de -80000 N foi dividida igualmente entre os nós 7 e 109, conforme ilustra a Figura 5.38. Kumar et al. (1981) *apud* Giovanola et al. (1999) definiram a carga limite para a tensão de escoamento (P_L) como:

$$P_L = \frac{0,728Bb^2\sigma_0}{L} \rightarrow P_L = 27887,04 \text{ N}. \quad (5.8)$$

Desta forma, foi possível obter uma carga adimensional normalizada dada pela relação P/P_L . Nas simulações, adotou-se a análise em EPT, elementos finitos quadrilaterais de quatro nós e o controle de deslocamento generalizado, com fator de carga inicial de $1,0 \times 10^{-3}$ e tolerância de $1,0 \times 10^{-4}$. Além disso, foram realizadas duas simulações com o modelo de Lemaitre (1985a,b). Na primeira, foram considerados todos os parâmetros apresentados na Tabela 5.10, que reproduzem o comportamento do material com dano. A segunda visou reproduzir o comportamento do material sem dano, adotando-se $r \rightarrow \infty$. Em Mashayekhi et al. (2005) também foi feita a

avaliação do modelo quanto à reprodução do comportamento do material com e sem dano.

As curvas *carga normalizada* x *CTOD* (*Crack Tip Opening Displacement* - abertura da ponta da trinca) para o modelo apresentado nesta dissertação e o utilizado por Mashayekhi et al. (2005), juntamente com os resultados experimentais de Giovanola et al. (1999), são comparados na Figura 5.39.

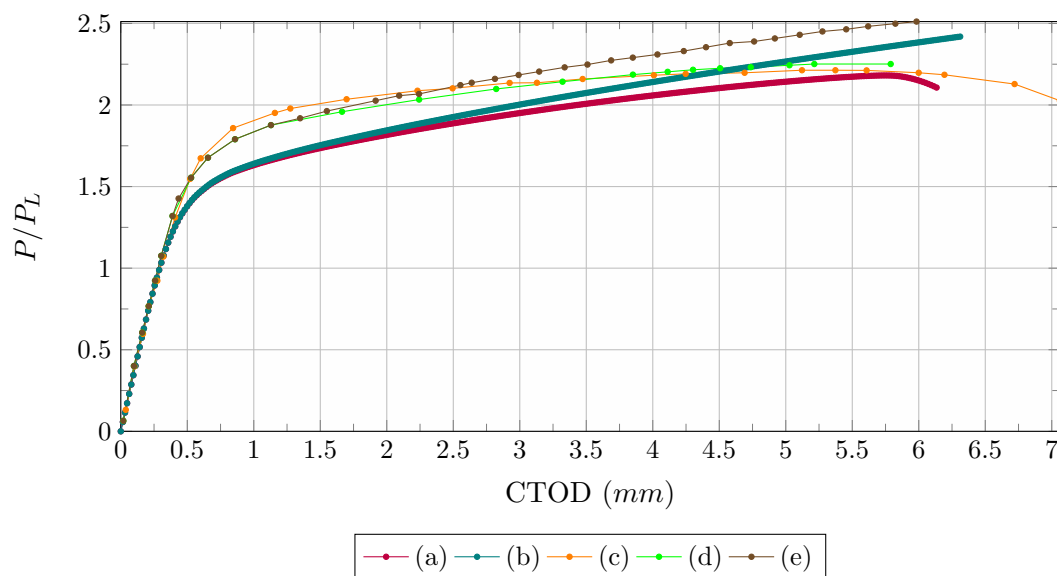


Figura 5.39: Curvas *carga normalizada* (P/P_L) x *CTOD*: do modelo de Lemaitre (1985a,b) (a) com dano e (b) sem dano; (c) experimental de Giovanola et al. (1999); do modelo apresentado por Mashayekhi et al. (2005) (d) com dano e (e) sem dano.

A partir do gráfico (a), observa-se a influência do processo de danificação no comportamento global da estrutura. Isto porque o comportamento de endurecimento foi interrompido a partir do $CTOD = 5,75$ mm, ocorrendo amolecimento causado pelo dano, que diminuiu a capacidade de carga do corpo-de-prova. Houve o endurecimento do material, sem perda de rigidez, quando o efeito do dano foi desprezado no modelo (gráfico b). Nota-se que o comportamento linear-elástico dos gráficos (a) e (b) são semelhantes, com valor máximo de $P/P_L \cong 1,25$, neste trecho.

Qualitativamente, o comportamento apresentado no gráfico (a) é similar ao resultado do gráfico (c), obtido por Giovanola et al. (1999). Para o gráfico (c), o

trecho linear-elástico apresentou o valor máximo de $P/P_L \cong 1,50$, sendo a resistência do material maior do que para os gráficos (a) e (b). A forma dos trechos de amolecimento (observados ao final das trajetórias de equilíbrio da Figura 5.39) para os gráficos (a) e (c) é semelhante, observando-se a atuação do dano na perda progressiva de capacidade de carga do material. O comportamento do gráfico (d) foi similar ao do gráfico (c), exceto no trecho de amolecimento, que para o gráfico (d) foi mais suave.

Comparando-se os resultados numéricos apresentados por Mashayekhi et al. (2005) (gráficos d e e) e experimental de Giovanola et al. (1999) (gráfico c) com os obtidos neste trabalho (gráficos a e b), observa-se semelhança no comportamento do modelo implementado. O valor máximo do CTOD foi de aproximadamente 6,13 mm para o gráfico (a) e de 5,79 mm para o gráfico (d), sendo que o valor obtido no ensaio experimental por Giovanola et al. (1999) foi de 7,06 mm. O comportamento do trecho de amolecimento apresentado no gráfico (d) foi mais suave do que o do gráfico (a). As diferenças existentes podem ser justificadas pelo fato de que as análises feitas neste trabalho utilizaram elementos planos e o algoritmo de integração apresentado por Vaz Jr. e Owen (2001), enquanto Mashayekhi et al. (2005) utilizaram em sua pesquisa elementos sólidos e algoritmo de integração apresentado por de Souza Neto (2002).

Com base nessas análises e considerando a reprodução do endurecimento com dano (gráfico a), é possível verificar na Figura 5.40 como se dá o progresso do dano e o comportamento da tensão σ_{xx} em relação à deformação ε_{xx} no entalhe (nó 14). Observa-se o crescimento do dano e dos valores de tensão e a queda destes no decorrer do processo de carregamento, em razão da influência do dano.

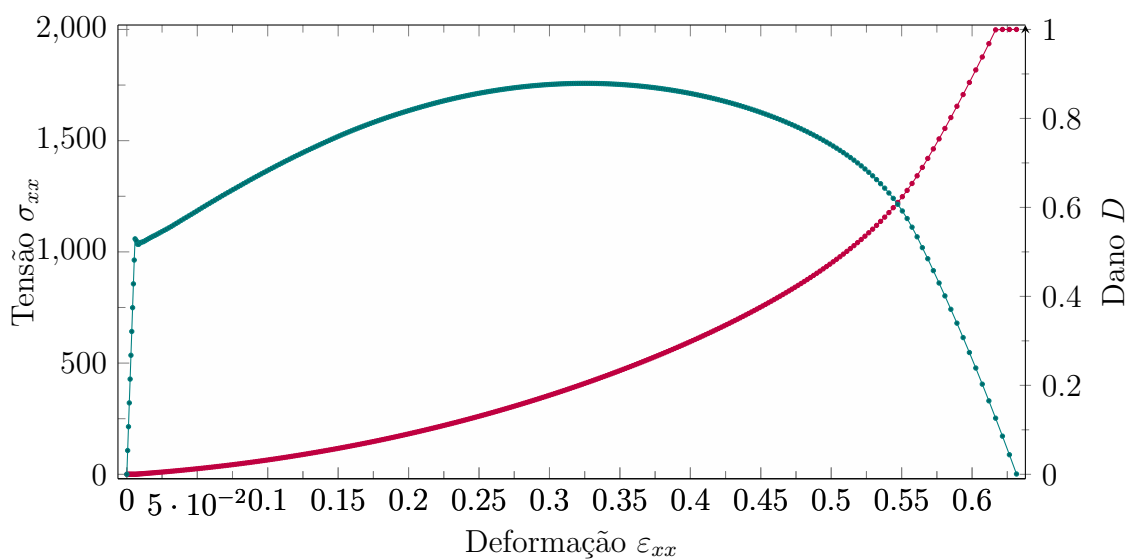


Figura 5.40: Tensão (σ_{xx}) x deformação (ε_{xx}) e dano (D) x deformação (ε_{xx}).

Neste sentido, a curva *tensão* x *dano* do nó 14, apresentada na Figura 5.41, destaca as considerações anteriores. Inicialmente, houve o endurecimento do material até, aproximadamente, $D = 0,20$ e os maiores valores de tensão foram alcançados para baixos valores de dano. No decorrer do processo de carregamento, os valores de dano aumentaram, gerando a perda gradual de resistência do material e a ocorrência de amolecimento.

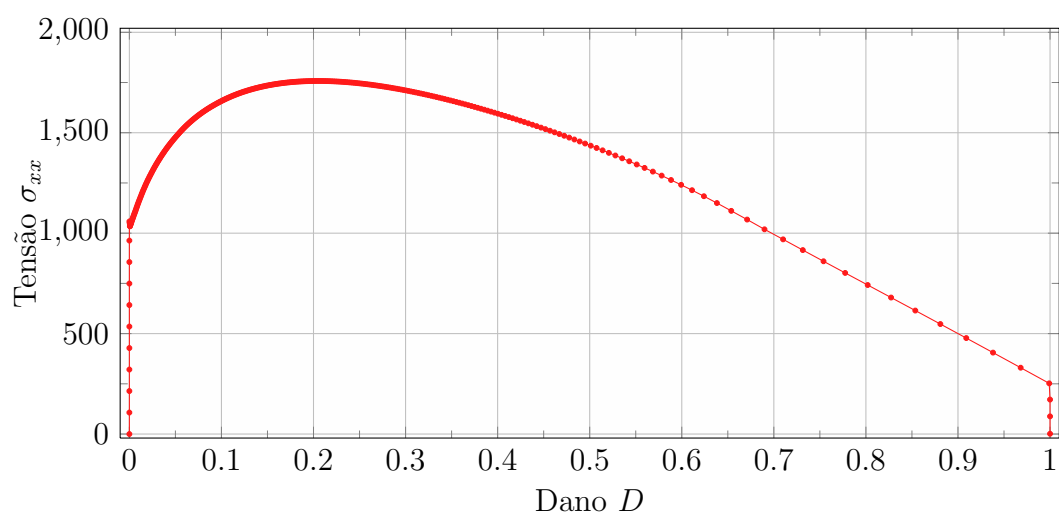


Figura 5.41: Tensão (σ_{xx}) x dano (D).

Com a finalidade de ilustrar a distribuição do dano no elemento, tem-se na Figura

5.42 as isofaixas de valores para o dano ocorrido ao longo da trajetória de equilíbrio. Nela, destaca-se que o valor de dano $D = 1$, ao final do processo, ocorreu no centro do entalhe.

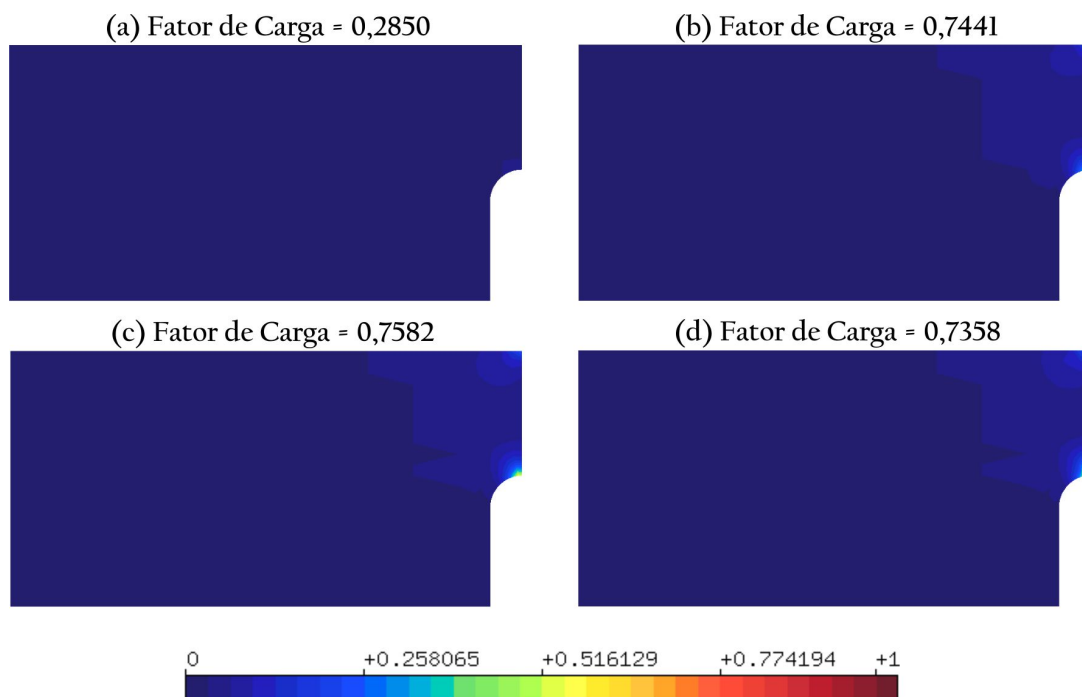


Figura 5.42: Isofaixas de valores de dano para a simulação de flexão em três pontos.

Observa-se que durante os estágios iniciais do processo de carregamento, o dano se concentrou no entalhe. No decorrer da simulação, houve o aparecimento de dano na região de aplicação da carga e a sua intensificação no entalhe. Como o corpo-de-prova foi deformado progressivamente, a área de dano máximo se moveu gradualmente em direção ao centro do entalhe, atingindo o valor máximo $D = 1$.

Complementando a apresentação das isofaixas de dano, avalia-se através da Figura 5.43 a distribuição de tensões σ_{xx} para diferentes pontos da análise.

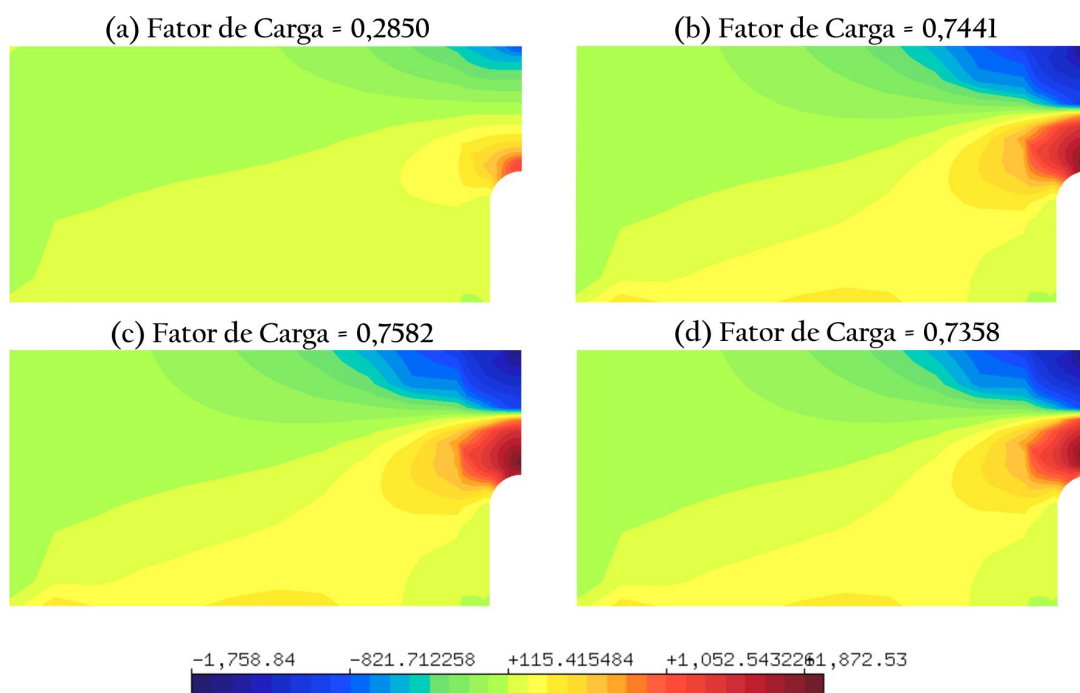


Figura 5.43: Isofaixas de valores de tensão σ_{xx} para a simulação de flexão em três pontos.

Da Figura 5.43 verifica-se que a tensão desde o princípio do processo de carregamento foi elevada no entalhe, se intensificando pelo corpo-de-prova no decorrer do processo de carregamento. Ao final da simulação, o valor da tensão no entalhe foi aproximadamente seis vezes maior do que nas regiões das bordas afastadas dele. Isto resultou na ocorrência antecipada de localização do dano e de deterioração do centro do entalhe em relação às bordas. Diante disto, Mashayekhi et al. (2005) sugeriram que a iniciação da fissuração ocorre nesta região, em concordância com os resultados experimentais obtidos por Giovanola et al. (1999).

Capítulo 6

Considerações Finais

Nesta dissertação apresentou-se a formulação e implementação de um modelo elastoplástico com dano, segundo o Ambiente Teórico-Computacional para Modelos Constitutivos desenvolvido por Penna (2011). Este ambiente, anteriormente testado para outros modelos constitutivos, foi aqui validado para o Modelo Elastoplástico com Dano proposto por Lemaitre (1985*a,b*), generalizando-o para diferentes funções de evolução do módulo inelástico.

A potencialidade da biblioteca de modelos constitutivos do sistema computacional INSANE foi observada em razão da generalidade das implementações dos modelos e dos diversos recursos para modelagem constitutiva existentes nesta plataforma. Essas características orientaram a inclusão do modelo de Lemaitre (1985*a,b*) no sistema, mantendo-se a generalidade.

A formulação do modelo de Lemaitre (1985*a,b*) foi reescrita com base nas equações gerais do ambiente teórico unificado de Penna (2011). O projeto orientado a objetos da inclusão do modelo mostrou-se eficiente e genérico, sendo possível implementar diversas funções de evolução do módulo inelástico.

6.1 Síntese do Conteúdo Apresentado

Os Capítulos 1, 2 e 3 contemplaram as principais características teóricas relacionadas ao Modelo Elastoplástico com Dano de Lemaitre (1985*a,b*), aos fundamentos

da Mecânica do Dano e ao Ambiente Teórico-Computacional para Modelos Constitutivos desenvolvido por Penna (2011).

No Capítulo 4 foram abordados os aspectos de implementação computacional do modelo de Lemaitre (1985*a,b*) realizada no sistema *INSANE*, enfocando, principalmente, o projeto orientado a objetos.

O Capítulo 5 compreendeu as simulações numéricas com o modelo implementado.

6.2 Conclusões

O Modelo Elastoplástico com Dano de Lemaitre (1985*a,b*) foi utilizado nas simulações numéricas apresentadas no Capítulo 5. Em geral, enfocou-se na seção 5.1 a variação da lei inelástica com a utilização das funções linear, exponencial e potencial implementadas.

Na seção 5.2, investigou-se o modelo constitutivo quanto à estabilidade numérica através da análise de dependência de malha de elementos finitos. O fenômeno de localização de deformações e o comportamento do modelo em regiões de carregamento e descarregamento também foram avaliados nesta seção. A validação do modelo foi realizada na seção 5.3 através da reprodução de exemplos com diferentes características, comparando-se os resultados obtidos com os disponíveis na literatura.

Deste modo, esta seção é reservada às conclusões específicas referentes, principalmente, ao Capítulo 5.

6.2.1 Variação da Lei Inelástica

A seção 5.1 foi dividida em duas partes. A primeira tratou da variação da lei inelástica no que tange a aplicação das funções linear, exponencial e potencial para as simulações de tração e cisalhamento puros. Em posse dos parâmetros do material utilizado, procedeu-se com o ajuste dos parâmetros dessas funções para a reprodução adequada dos comportamentos de plasticidade perfeita, endurecimento

e amolecimento.

Na segunda parte, foi ilustrado o processo de ajuste das funções inelásticas através de simulações numéricas de tração pura. Assim, os diferentes parâmetros dessas funções foram sucessivamente alterados, verificando-se o comportamento do modelo através das curvas *fator de carga x deslocamento*. Como os parâmetros do material analisado eram conhecidos somente para a função exponencial de endurecimento, foi necessário realizar ajustes para esta função reproduzir o amolecimento e plasticidade perfeita e para as demais funções reproduzirem esses comportamentos.

A partir da análise dos resultados apresentados nessa seção, conclui-se que:

1. os ajustes mostraram-se adequados, visto que as três funções reproduziram de maneira semelhante os comportamentos de plasticidade perfeita, endurecimento e amolecimento;
2. a parametrização das lei inelásticas mostrou-se fundamental para a avaliação do comportamento do modelo diante das variações dos parâmetros das funções. Assim, estas simulações foram úteis para ajustar os parâmetros do material.

6.2.2 Estabilidade Numérica

Na seção 5.2.1, a investigação do modelo constitutivo quanto à dependência de malha foi realizada através de simulações numéricas de tração pura, sendo adotadas discretizações com 1, 4, 16, 64, 256 e 1024 elementos finitos. Avaliaram-se os comportamentos de endurecimento e amolecimento, com e sem dano.

Deste modo, foi possível concluir que:

1. na reprodução do endurecimento e amolecimento sem dano pela função potencial, os valores dos fatores de carga mantiveram-se praticamente constantes após o trecho elástico, não sendo esses comportamentos tão evidentes, qualitativamente, quanto os apresentados pelas demais funções. Isto leva a concluir

que, além de se definir $r \rightarrow \infty$, a reprodução desses comportamentos sem a presença de dano depende de ajustes nos parâmetros da função potencial;

2. na reprodução de amolecimento sem dano com as funções linear e exponencial, verificou-se a ocorrência de comportamentos de amolecimento acentuados para as malhas de 1024 elementos, o que sugere susceptibilidade à dependência de malha;
3. os comportamentos obtidos com a aplicação das funções linear e exponencial foram semelhantes na reprodução de todos os comportamentos, indicando que os ajustes de parâmetros foram adequados. Já para a função potencial, os comportamentos observados destoam dos obtidos com as demais funções. Essas verificações permitem concluir que há maior facilidade em ajustar os parâmetros das funções linear e exponencial em relação aos da função potencial;
4. a presença de dano antecipou a localização de deformações numericamente induzidas pelo refinamento da malha para o endurecimento e o amolecimento.

Na seção 5.2.2 foram ilustrados o fenômeno de localização de deformações e o comportamento do modelo em regiões de carregamento e descarregamento através da simulação numérica de tração pura em uma barra, composta por uma região menos resistente.

As análises realizadas permitem concluir que:

1. para representar a situação de *snap-back* e descrever completamente as trajetórias de equilíbrio, foram realizadas muitas simulações com diferentes incrementos de deslocamento, adotando-se o valor de $0,0000021 \text{ m}$. Isto evidencia que o modelo é sensível às variações do fator de carga;
2. as trajetórias de equilíbrio permitiram ilustrar o comportamento do modelo em regiões de carregamento e descarregamento e evidenciaram as diferenças

existentes entre o comportamento global da estrutura (Figura 5.17) e o comportamento de cada elemento (Figura 5.18), para $c = 0,50 m$. O comportamento global foi verificado através dos gráficos *fator de carga x deslocamento horizontal* para os nós 8, 6 e 3, sendo o nó 8 influenciado pelos elementos 1, 2 e 3, o nó 6 pelos elementos 1 e 2 e o nó 3 somente pelo elemento 1. Assim, para o nó 3 foi observado o descarregamento elástico, para o nó 8 carregamento inelástico com *snap-back* e para o nó 6 carregamento inelástico mais suave do que para o nó 8 e sem *snap-back*, por ser influenciado por um elemento íntegro e outro degradado. Já o comportamento de cada elemento foi constatado pelas curvas *tensão x deformação* de três pontos de Gauss representativos de cada um dos elementos. Deste modo, para os pontos de Gauss dos elementos 1 e 3 (íntegros) ocorreu descarregamento elástico, enquanto o elemento 2 (degrado) foi carregado seguindo o ramo descendente da lei constitutiva.

6.2.3 Exemplos de Validação

A seção 5.3 é composta por três exemplos que visaram validar o modelo implementado na dissertação. As conclusões relativas a cada um deles são elencadas nos itens: **1.** Ensaio de tração direta; **2.** Flexão pura; e **3.** Flexão em três pontos.

1. **(a)** Inicialmente foi necessário determinar a malha de elementos finitos adequada para discretizar a geometria de um quarto do corpo-de-prova, sendo apresentada na Figura 5.23. Os testes foram iniciados com valores de fator de carga da ordem de 10^{-6} e não sendo obtidos resultados semelhantes aos de Mashayekhi et al. (2005), foram utilizados valores mais altos. O fator de carga adotado foi de 0,50, permitindo concluir que há sensibilidade do modelo quanto a variação do fator de carga; **(b)** os resultados de tração direta foram obtidos com a aplicação do modelo de Lemaitre (1985a,b) e a função inelástica exponencial reproduzindo o endurecimento com e sem dano. Do ponto de

vista qualitativo, estes resultados se assemelharam aos obtidos por Mashayekhi et al. (2005). Porém, os valores máximos de P/P_L no trecho linear-elástico e de deslocamento horizontal ao final do processo de carregamento obtidos com o modelo implementado foram maiores. Deste modo, conclui-se que as diferenças existentes referem-se à utilização de modelos discretos e algoritmos de integração de equações constitutivas distintos nos dois trabalhos. Enquanto Mashayekhi et al. (2005) empregaram um modelo tridimensional e o algoritmo apresentado por de Souza Neto (2002), neste trabalho as análises foram efetuadas com o modelo discreto bidimensional e algoritmo de integração de Vaz Jr. e Owen (2001); **(c)** o modelo implementado foi validado por este exemplo e a localização de dano apresentada na Figura 5.27 permite concluir que houve estricção do corpo-de-prova, conforme citou Hancock e Mackenzie (1976) *apud* Mashayekhi et al. (2005);

2. **(a)** os resultados obtidos com o modelo de Lemaitre (1985*a,b*) e as funções linear e exponencial reproduzindo plasticidade perfeita se aproximaram do limite analítico estabelecido por Green (1953) *apud* de Souza Neto et al. (2008), concluindo-se que este exemplo foi capaz de validar o modelo implementado; **(b)** além de simular a plasticidade, procurou-se verificar o comportamento do modelo na reprodução do endurecimento com dano. Para isso, o ajuste de parâmetros da função exponencial mostrou-se adequado, reproduzindo o endurecimento do material seguido pela redução da capacidade de carga do mesmo devido à atuação do dano, que se concentrou, ao final da análise, nas proximidades do nó 5; **(c)** em complemento às análises efetuadas, investigou-se o comportamento do modelo implementado com a função linear reproduzindo plasticidade perfeita sob as condições de EPT, admitindo-se espessura unitária da barra e EPD com e sem o efeito de confinamento. Concluiu-se que sob

condições de EPD considerando o efeito de confinamento, o modelo não reproduziu o comportamento da solução analítica. Já os resultados obtidos sob condições de EPD sem o efeito de confinamento e de ETP foram semelhantes entre si e próximos ao limite analítico de Green (1953) *apud* de Souza Neto et al. (2008);

- 3. (a)** os resultados da simulação de flexão em três pontos obtidos com a aplicação do modelo de Lemaitre (1985*a,b*) e a função exponencial reproduzindo o endurecimento com e sem dano foram comparados aos resultados numéricos de Mashayekhi et al. (2005) e experimental de Giovanola et al. (1999). Evidenciando somente as respostas do comportamento de endurecimento com dano, verificou-se que no trabalho de Mashayekhi et al. (2005) a carga normalizada P/P_L máxima no trecho linear-elástico aproximou-se da resposta experimental, enquanto para o modelo implementado esse valor foi menor. Entretanto, observou-se que o modelo implementado foi capaz de descrever a perda da capacidade de carga do corpo-de-prova causada pela influência do dano, aproximando-se da resposta experimental de Giovanola et al. (1999). Ocorreu a localização do dano e a deterioração do centro do entalhe em relação às bordas, sugerindo que a iniciação da fissuração aconteceu nesta região, em concordância com os resultados experimentais obtidos por Giovanola et al. (1999). Assim, o modelo de Lemaitre (1985*a,b*) foi validado pela simulação de flexão em três pontos; **(b)** qualitativamente, os comportamentos de endurecimento com e sem dano obtidos com o modelo implementado se assemelharam aos obtidos por Mashayekhi et al. (2005). Entretanto, as trajetórias de equilíbrio do modelo implementado aproximaram-se por baixo das trajetórias apresentados por Mashayekhi et al. (2005). Conforme o que foi explanado no item **1**, conclui-se que essas diferenças estão relacionadas ao emprego de um modelo tridimensional e do algoritmo de de Souza Neto (2002) por Mashayekhi

et al. (2005), enquanto neste trabalho foram utilizados um modelo discreto bidimensional e o algoritmo de Vaz Jr. e Owen (2001).

6.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Em um contexto geral, a pesquisa realizada possibilitou conhecer o conteúdo apresentado dos pontos de vista teórico e computacional. Deste modo, é possível apontar algumas questões que requerem aprofundamento, seja através da realização de novas simulações ou da utilização de outras estratégias para a investigação dos fenômenos aqui apresentados.

Neste trabalho, a maioria das simulações foram realizadas com o modelo sob condições de EPT. Como o modelo foi implementado no ambiente unificado de maneira independente do modelo de análise adotado, propõe-se a simulação de problemas com o uso de outros modelos de análise, tais como: axissimétrico, sólido, entre outros.

Sugere-se que as seguintes propostas de estudos sejam formuladas e implementadas de acordo com o Ambiente Teórico-Computacional para Modelos Constitutivos desenvolvido no trabalho de Penna (2011):

1. A implementação do modelo de Lemaitre (1985*a,b*) foi orientado pelo trabalho de Vaz Jr. e Owen (2001), no qual o algoritmo de integração das equações constitutivas compreende duas equações. Sugere-se estudar e implementar o algoritmo de uma única equação apresentada por de Souza Neto (2002). Segundo o autor, o esquema de integração de uma única equação é altamente eficiente em soluções de elementos finitos. Este algoritmo também é apresentado em de Souza Neto et al. (2008) e utilizado nos trabalhos de Mashayekhi et al. (2005), Vaz Jr et al. (2010) e Vaz Jr. et al. (2011);
2. Lemaitre (1985*a*) afirmou que, juntamente com a hipótese de isotropia, foi assumido em seu trabalho que os efeitos mecânicos das cavidades e microtrincas

são os mesmos tanto para tração quanto para compressão. O autor destacou que, como isto geralmente não ocorre na prática, há a limitação da aplicabilidade da teoria para os casos em que as compressões são pequenas. Neste sentido, Vaz Jr et al. (2010) afirmaram que a introdução de novos parâmetros de tração e compressão possibilitam estender a gama de aplicação do modelo isotrópico de Lemaitre (1985*a*). Assim, sugere-se estudar esta abordagem do modelo, tendo como referência, entre outros, os trabalhos de Vaz Jr et al. (2010) e Vaz Jr. et al. (2011);

3. Sugere-se estudar as diferentes extensões do modelo de Lemaitre (1985*a,b*) que são apresentadas no trabalho de Bouchard et al. (2011). Tais extensões foram propostas com o objetivo de tratar configurações multiaxiais complexas e, de maneira geral, os autores abordaram: a evolução do dano em compressão, os materiais altamente dúcteis, a anisotropia do dano, o efeito de fechamento de trincas, etc.

Referências Bibliográficas

- Ajeje, F. H., 2009. Abordagem orientada a objetos para implementação computacional de elementos finitos de cascas planas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Almeida, M. L., 2005. Elementos finitos paramétricos implementados em java. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Alves, P. D., 2012. Estratégia global-local aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Anacleto, F. E. S., Ribeiro, G. O. e Ribeiro, T. S. A., (2011), Implementation of viscoplastic analysis for multi-region problems using the Boundary Element Method, *in* ‘XII International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques’, Brasília, Brasil.
- Armero, F. e Oller, S., 2000*a*. ‘A general framework for continuum damage models. I. infinitesimal plastic damage models in stress space’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 37, pp. 7409–7436.
- Armero, F. e Oller, S., 2000*b*. ‘A general framework for continuum damage models. II. integration algorithms, with applications to the numerical simulation of porous metals’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 37, pp. 7437–7464.

- ASTM Standard E399-90, 1994, *Standard test for plane-strain fracture toughness of metallic materials. Annual Book of ASTM Standards. American Society for Testing and Materials.*
- Benallal, A., 2001, *Handbook of Materials Behavior Models: Section 9.2 - Elastoplasticity and Viscoplasticity Coupled with Damage*, pp. 797–801.
- Benallal, A., Billardon, R., Doghri, I. e Moret-Bailly, L., (1987), Crack initiation and propagation analyses taking into account initial strain hardening and damage fields, Fourth Int. Conf. of Numerical Methods in Fracture Mechanics, Texas, EUA.
- Bouchard, P.-O., Bourgeon, L., Fayolle, S. e Mocellin, K., 2011. ‘An enhanced Lemaitre model formulation for materials processing damage computation’. *Int J Mater Form*, vol. 4, pp. 299–315.
- Camara, L. S., 2007. Um serviço web para o Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 1994. ‘A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 31, pp. 2835–2865.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 2001. ‘On the formulation of anisotropic elastic degradation. I: Theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. II: Generalized pseudo-Rankine model for tensile damage’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 38, pp. 491–518 e 519–546.
- Carol, I. e Willam, K., 1996. ‘Spurious energy dissipation/generation and stiffness recovery models for elastic degradation and damage’. *International Journal of Solids Structures*, vol. 33, pp. 2939–2957.

- Chaboche, J. L., 1987. 'Continuum damage mechanics: Present state and future trends'. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 105, pp. 19–33.
- Coleman, B. D. e Gurtin, M. E., 1967. 'Thermodynamics with internal state variables'. *Journal of Chemistry and Physics*, vol. 47, pp. 597–613.
- de Borst, R., 1987. 'Smearred cracking, plasticity, creep and thermal loading - a unified approach'. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 62, pp. 89–110.
- de Borst, R., 1999. 'A unified framework for concrete damage and fracture models including size effects'. *International Journal of Solids Structures*, vol. 95, pp. 261–277.
- de Souza Neto, E. A., 2002. 'A fast one-equation integration algorithm for the Lemaitre ductile damage model'. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 18.
- de Souza Neto, E. A., Perić, D. e Owen, D. R. J., 2008. *Computational Methods for Plasticity: Theory and Application*. Wiley.
- Esmaeili, M. e Öchsner, A., 2011. 'A one-dimensional implementation of a coupled elasto-plastic model for ductile damage'. *Mat. -wiss. u. Werkstoffech*, vol. 42, pp. 444–451.
- Ferreira, R. L., 2008. Pré-processador para modelos reticulados e planos do Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, F. T., 2008. Sistema computacional para análise dinâmica geometricamente não linear através do Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

- Fonseca, F. T., Pitangueira, R. L. S. e Filho, A. V., (2004), Implementação de modelos estruturais de barras como casos particulares do Método de Elementos Finitos, *in* ‘Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional - SIMMEC’, Itajubá, MG, Brasil.
- Fonseca, M. T., 2006. Aplicação orientada a objetos para análise fisicamente não-linear com modelos reticulados de seções transversais compostas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., 2009. Formulações de modelos constitutivos de microplanos para contínuos generalizados. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Germanio, L., 2005. Implementação orientada a objetos da solução de problemas estruturais dinâmicos via Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Giovanola, J. H., Kirkpatrick, S. W. e Crocker, J. E., 1999. ‘Fracture of geometrically scaled notched three-point-bend bars of high strength steel’. *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, vol. 62, pp. 291–310.
- Gonçalves, M. A. B., 2004. Geração de malhas bidimensionais de elementos finitos baseada em mapeamentos transfinitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Green, A. P., 1953. ‘The plastic yielding of notched bars due to bending’. *Quart. J. Mech. Appl. Math*, vol. 50, pp. 29–54.

- Hancock, J. W. e Mackenzie, A. C., 1976. ‘On the mechanisms of ductile fracture in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states’. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 24.
- Hansen, E., Willam, K. e Carol, I., (2001), A two-surface anisotropic damage/plasticity model for plain concrete, *in* ‘Proceedings of IV International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures’, FraMCoS-4 Conference, pp. 1–8.
- Kachanov, L. M., 1958. ‘Rupture time under creep conditions’. *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, vol. 8, pp. 26–31. Traduzido e publicado em 1999 por: *International Journal of Fracture*, vol. 97, pp. xi-xvii.
- Kumar, V., German, M. D. e Shih, C. F., (1981), An engineering approach for elasto-plastic fracture analysis, General Electric Company Topical Report 1237-1, Electric Power Research Institute, Schenectady, NY.
- Lemaitre, J., 1984. ‘How to use damage mechanics’. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 80, pp. 233–245.
- Lemaitre, J., 1985a. ‘A continuous damage mechanics model for ductile fracture’. *Journal of Engineering Materials Technology*, vol. 107, pp. 83–89.
- Lemaitre, J., 1985b. ‘Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations’. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, vol. 51, pp. 31–49.
- Lemaitre, J., 1992. *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag, Berlim, Alemanha.
- Lemaitre, J., 1996. *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag, Berlim, Alemanha.

- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L., 1990. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press.
- Lemaitre, J., Desmorat, R. e Sauzay, M., 2000. ‘Anisotropic damage law of evolution’. *Eur. J. Mech. A/Solids*, vol. 19, pp. 187–208.
- Lemaitre, J., Sermage, J. P. e Desmorat, R., 1999. ‘A two scale damage concept applied to fatigue’. *Tech Science Press*, vol. 97, pp. 67–81.
- Malvern, L. E., 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Inc., USA.
- Mashayekhi, M., Ziaei-Rad, S., Parvizian, J., Nikbin, K. e Hadavinia, H., 2005. ‘Numerical analysis of damage evolution in ductile solids’. *Tech Science Press*, vol. 1, pp. 65–82.
- Moreira, R. N., 2006. Sistema gráfico interativo para ensino de análise estrutural através do Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Murakami, S., 2012. *Continuum Damage Mechanics*. Springer, Nagoya, Japão.
- Penna, S. S., 2007. Pós-processador para modelos bidimensionais não-lineares do Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Penna, S. S., 2011. Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: Unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Pitangueira, R. L. S. e Caldas, R. B., (2005), Projeto de software livre para modelos

do Método dos Elementos Finitos, *in* 'XXVI Iberian Latin American Congress on Computational Methods - CILAMCE', Guarapari, ES, Brasil.

Pituba, J. J. C., 2009. 'Método do estado local aplicado na formulação de modelos constitutivos de dano para o concreto'. *Acta Scientiarum. Technology*, vol. 31, pp. 15–23.

Proença, S. P. B., 2001. 'Notas de aula 4: Fundamentos dos mecanismos físicos de deformação e ruptura'. *Universidade de São Paulo, São Carlos*, .

Rabotnov, Y. N., 1969. *Creep problems in structural members*. Amsterdã, Holanda.

Rizzi, E., 1995. Sulla localizzazione delle deformation in materiali e structure. Tese de Doutorado, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano, Milão, Itália.

Saliba, S. S., 2007. Implementação computacional e análise crítica de elementos finitos de placas. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Silva, R. P., 2012. Análise Não-Linear de Estruturas de Concreto por meio do Método Element Free Galerkin. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Vaz Jr, M., de Santi Jr, N. e de Souza Neto, E. A., 2010. 'Numerical prediction of ductile failure onset under tensile and compressive stress states'. *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 19.

Vaz Jr., M., Muñoz-Rojas, P. A. e Langes, M. R., 2011. 'Damage evolution and thermal coupled effects in inelastic solids'. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 53, pp. 387–398.

- Vaz Jr., M. e Owen, D. R. J., 2001. ‘Aspects of ductile fracture and adaptive mesh refinement in damaged elasto-plastic materials’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 50, pp. 29–54.
- Wolenski, A. R. V., 2013. Ambiente Teórico-Computacional Unificado para Modelos Constitutivos: Inclusão de Modelo de Microplanos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Wolff, K. P., 2010. Implementação computacional de um modelo de fissuração para o concreto baseado no Método dos Elementos Finitos Estendido (XFEM). Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Yang, Y. B. e Shieh, M. S., 1990. ‘Solution method for nonlinear problems with multiple critical points’. *AIAA Journal*, vol. 28, pp. 2110–2116.