

**ANÁLISE DE TENSÕES TÉRMICAS AUTO-EQUILIBRADAS EM  
CHAPAS PLANAS RETANGULARES ISOTRÓPICAS**

**Tiago de Souza Mendonça**

M539a

Mendonça, Tiago de Souza.

Análise de tensões térmicas auto-equilibradas em chapas planas retangulares isotrópicas [manuscrito] / Tiago de Souza Mendonça. – 2015. xxiv, 201 f., enc.: il.

Orientador: Gabriel de Oliveira Ribeiro.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f.194-201.

Bibliografia: f. 188-193.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Teoria das estruturas - Teses. 3. Tensões térmicas - Teses. 4. Deformações e tensões - Teses.  
I. Ribeiro, Gabriel de Oliveira. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"ANÁLISE DE TENSÕES TÉRMICAS AUTO-EQUILIBRADAS EM  
CHAPAS PLANAS RETANGULARES ISOTRÓPICAS "**

Tiago de Souza Mendonça

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro  
DEES - UFMG (Orientador)

---

Prof. Dr. Marcelo Greco  
DEES - UFMG

---

Prof. Dr. Gray Farias Moita  
CEFET - MG

Belo Horizonte, 25 de setembro de 2015

## DEDICATÓRIA

À minha mãe, que sempre incentivou os meus estudos.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus orientadores Marco Antônio de Mendonça Vecci e Gabriel de Oliveira Ribeiro pela orientação, apoio e conselhos.

Aos professores e funcionários do departamento de engenharia de estruturas que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

# SUMÁRIO

<b>Dedicatória</b>	<b>i</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>ii</b>
<b>Sumário</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Abreviaturas, Siglas e Símbolos</b>	<b>xvii</b>
<b>Resumo</b>	<b>xxiii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xxiv</b>
<b>1 Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>2 Revisão Bibliográfica</b> .....	<b>5</b>
2.1 Introdução .....	5
2.2 Tensões e Deslocamentos Térmicos em Chapas e Barras Considerando o Estado Tridimensional .....	5
2.3 Tensões e Deformações Térmicas em Chapas e Barras Considerando o EPT .....	9
2.4 Tensões e Deformações Térmicas em Chapas, Barras e Tiras Retangulares .....	21
<b>3 Aproximação Polinomial</b> .....	<b>31</b>
3.1 Introdução .....	31
3.2 Método dos Mínimos Quadrados .....	31
3.3 Funções Ortogonais .....	34
3.3.1 Polinômios Ortogonais de Legendre .....	36
3.3.2 Método dos Mínimos Quadrados com Polinômios Ortogonais .....	38
<b>4 Tensões Térmicas Auto-Equilibradas</b> .....	<b>39</b>
4.1 Introdução .....	39
4.2 Tensões Térmicas Auto-Equilibradas em Chapas Planas Retangulares Isotrópicas em EPT .....	39
4.2.1 Determinação da Componente de Tensão $\sigma_x$ .....	42

4.2.2	Determinação das Constantes .....	44
4.2.3	Determinação do Tensor de Tensão Atuante na Chapa .....	46
4.2.4	Determinação do Tensor de Deformação Atuante na Chapa.....	47
4.2.5	Determinação da Componente de Tensão $\sigma_x$ e das Componentes de Deformação $\varepsilon_x$ , $\varepsilon_y$ e $\varepsilon_z$ para Diferentes Distribuições de Temperatura.....	48
4.2.5.1	Distribuição de Temperatura Constante: $T(y) = T_c$ .....	48
4.2.5.2	Distribuição de Temperatura Linear: $T(y) = Ay$ .....	50
4.2.5.3	Distribuição de Temperatura Quadrática: $T(y) = By^2$ .....	51
4.2.5.4	Distribuição de Temperatura Cúbica: $T(y) = Cy^3$ .....	51
4.2.5.5	Distribuição de Temperatura Polinomial Generalizada.....	52
4.3	Tensões Térmicas Auto-Equilibradas em Chapas Planas Retangulares Isotrópicas no Estado Tridimensional .....	54
4.3.1	Análise das Eqs. (4.78), (4.79) e (4.80) .....	57
4.3.2	Determinação das Componentes de Tensão $\sigma_x$ e $\sigma_z$ .....	58
4.3.3	Determinação das Constantes .....	62
4.3.4	Determinação do Tensor de Tensão Atuante na Chapa .....	66
4.3.5	Determinação do Tensor de Deformação Atuante na Chapa.....	66
4.3.6	Determinação das Componentes de Tensão $\sigma_x$ e $\sigma_z$ e das Componentes de Deformação $\varepsilon_x$ , $\varepsilon_y$ e $\varepsilon_z$ para Diferentes Distribuições de Temperatura.....	68
4.3.6.1	Distribuição de Temperatura Constante: $T(y) = T_c$ .....	68
4.3.6.2	Distribuição de Temperatura Linear: $T(y) = Ay$ .....	70
4.3.6.3	Distribuição de Temperatura Quadrática: $T(y) = By^2$ .....	71
4.3.6.4	Distribuição de Temperatura Cúbica: $T(y) = Cy^3$ .....	71
4.3.6.5	Distribuição de Temperatura Polinomial Generalizada.....	72
4.3.7	Tensões Térmicas Auto-Equilibradas Desacopladas .....	74
<b>5</b>	<b>Resultados</b> .....	<b>76</b>
5.1	Introdução .....	76
5.2	Método dos Elementos Finitos (MEF) .....	76
5.2.1	Introdução.....	76
5.2.2	MEF via Ansys .....	77
5.2.3	Elemento Utilizado na Análise para o EPT .....	77
5.2.4	Elemento Utilizado na Análise para o Estado Tridimensional .....	79
5.3	Chapa Plana Retangular Isotrópica em EPT .....	81
5.3.1	Processo de Resfriamento Forçado.....	81

5.3.1.1	Equação Diferencial e Considerações Acerca do Problema.....	82
5.3.1.2	Material e Parâmetros Utilizados .....	83
5.3.1.3	Raízes da Equação Diferencial Homogênea e Solução Particular da Equação Diferencial Não Homogênea .....	84
5.3.1.4	Determinação do Perfil de Temperatura Atuante na Chapa .....	85
5.3.1.4.1	Determinação das Raízes $r_1$ e $r_2$ e da Solução Particular $T_p(y^*)$ .....	85
5.3.1.4.2	Determinação das Constantes $c_1^*$ e $c_2^*$ Pertencentes à Solução da Equação Diferencial.....	86
5.3.1.4.3	Perfil de Temperatura Atuante na Chapa .....	87
5.3.1.4.3.1	Aproximação Polinomial para o Perfil de Temperatura Encontrado .....	88
5.3.2	Determinação da Componente de Tensão $\sigma_x$ .....	92
5.3.3	Determinação da Componente de Deformação $\varepsilon_x$ .....	93
5.3.4	Determinação da Componente de Deformação $\varepsilon_y$ .....	94
5.3.5	Determinação da Componente de Deformação $\varepsilon_z$ .....	95
5.3.6	Valores Numéricos Obtidos Através do MEF .....	96
5.3.6.1	Modelagem da Chapa no Programa Ansys.....	96
5.3.6.2	Componente de Tensão $\sigma_x$ .....	98
5.3.6.3	Componente de Deformação $\varepsilon_x$ .....	98
5.3.6.4	Componente de Deformação $\varepsilon_y$ .....	99
5.3.6.5	Componente de Deformação $\varepsilon_z$ .....	100
5.3.7	Comparação dos Resultados Analíticos Aproximados e Numéricos.....	101
5.3.7.1	Comparação dos Resultados para a Seção em $x = 0,0 m$ .....	102
5.3.7.1.1	Análise dos Gráficos Apresentados para a Seção em $x = 0,0 m$ .....	105
5.3.7.2	Comparação dos Resultados para a Seção em $x = 0,5 m$ .....	105
5.3.7.2.1	Análise dos Gráficos Apresentados para a Seção em $x = 0,5 m$ .....	107
5.3.7.3	Comparação dos Resultados para a Seção em $x = 1,0 m$ .....	107
5.3.7.3.1	Análise dos Gráficos Apresentados para a Seção em $x = 1,0 m$ .....	110
5.3.7.4	Comparação dos Resultados para a Seção em $x = 1,5 m$ .....	110
5.3.7.4.1	Análise dos Gráficos Apresentados para a Seção em $x = 1,5 m$ .....	112
5.3.7.5	Comparação dos Resultados para a Seção em $x = 2,0 m$ .....	113
5.3.7.5.1	Análise dos Gráficos Apresentados para a Seção em $x = 2,0 m$ .....	115
5.3.7.6	Comparação dos Resultados para a Seção em $x = 2,5 m$ .....	116
5.3.7.6.1	Análise dos Gráficos Apresentados para a Seção em $x = 2,5 m$ .....	118
5.3.8	Avaliação Comparativa entre as Soluções.....	118



5.3.8.1	Avaliação Comparativa para a Componente de Tensão $\sigma_x$ .....	119
5.3.8.2	Avaliação Comparativa para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ .....	120
5.3.8.3	Avaliação Comparativa para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ .....	121
5.3.8.4	Avaliação Comparativa para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ .....	122
5.3.9	Análise de Resultados ao Longo do Eixo $x$ .....	123
5.3.10	Análise dos Resultados.....	126
5.3.10.1	Análise dos Resultados para a Componente de Tensão $\sigma_x$ .....	126
5.3.10.2	Análise dos Resultados para as Componentes de Deformação $\varepsilon_x$ e $\varepsilon_y$ .....	127
5.3.10.3	Análise dos Resultados para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ .....	127
5.4	Chapa Plana Retangular Isotrópica no Estado Tridimensional.....	128
5.4.1	Processo de Têmpera.....	128
5.4.1.1	Determinação das Equações que Regem o Problema de Condução de Calor.....	129
5.4.1.2	Solução Exata e Aproximada para a Distribuição de Temperatura.....	133
5.4.1.3	Determinação da Distribuição de Temperatura.....	134
5.4.1.3.1	Escolha do Perfil de Temperatura.....	136
5.4.1.3.2	Aproximação Polinomial para o Perfil de Temperatura Encontrado.....	138
5.4.2	Determinação da Componente de Tensão $\sigma_x$ .....	140
5.4.3	Determinação da Componente de Tensão $\sigma_z$ .....	142
5.4.4	Determinação da Componente de Deformação $\varepsilon_x$ .....	143
5.4.5	Determinação da Componente de Deformação $\varepsilon_y$ .....	144
5.4.6	Determinação da Componente de Deformação $\varepsilon_z$ .....	145
5.4.7	Valores Numéricos Obtidos Através do MEF.....	146
5.4.7.1	Modelagem da Chapa no Programa Ansys.....	146
5.4.7.2	Componente de Tensão $\sigma_x$ .....	147
5.4.7.3	Componente de Tensão $\sigma_z$ .....	148
5.4.7.4	Componente de Deformação $\varepsilon_x$ .....	149
5.4.7.5	Componente de Deformação $\varepsilon_y$ .....	150
5.4.7.6	Componente de Deformação $\varepsilon_z$ .....	151
5.4.8	Comparação dos Resultados Analíticos Aproximados e Numéricos.....	152
5.4.8.1	Comparação dos Resultados para o Segmento em $x = 0,0 \text{ cm}$ .....	153
5.4.8.1.1	Análise dos Gráficos Apresentados para o Segmento em $x = 0,0 \text{ cm}$ .....	156
5.4.8.2	Comparação dos Resultados para o Segmento em $x = 1,0 \text{ cm}$ .....	156
5.4.8.2.1	Análise dos Gráficos Apresentados para o Segmento em $x = 1,0 \text{ cm}$ .....	159

5.4.8.3	Comparação dos Resultados para o Segmento em $x = 2,0 \text{ cm}$ .....	159
5.4.8.3.1	Análise dos Gráficos Apresentados para o Segmento em $x = 2,0 \text{ cm}$ .....	162
5.4.8.4	Comparação dos Resultados para o Segmento em $x = 3,0 \text{ cm}$ .....	162
5.4.8.4.1	Análise dos Gráficos Apresentados para o Segmento em $x = 3,0 \text{ cm}$ .....	165
5.4.8.5	Comparação dos Resultados para o Segmento em $x = 3,5 \text{ cm}$ .....	166
5.4.8.5.1	Análise dos Gráficos Apresentados para o Segmento em $x = 3,5 \text{ cm}$ .....	169
5.4.8.6	Comparação dos Resultados para o Segmento em $x = 4,0 \text{ cm}$ .....	169
5.4.8.6.1	Análise dos Gráficos Apresentados para o Segmento em $x = 4,0 \text{ cm}$ .....	172
5.4.9	Avaliação Comparativa entre as Soluções.....	173
5.4.9.1	Avaliação Comparativa para a Componente de Tensão $\sigma_x$ .....	173
5.4.9.2	Avaliação Comparativa para a Componente de Tensão $\sigma_z$ .....	174
5.4.9.3	Avaliação Comparativa para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ .....	175
5.4.9.4	Avaliação Comparativa para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ .....	176
5.4.9.5	Avaliação Comparativa para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ .....	177
5.4.10	Análise de Resultados ao Longo do Eixo $x$ .....	178
5.4.11	Análise dos Resultados .....	181
5.4.11.1	Análise dos Resultados para a Componente de Tensão $\sigma_x$ .....	181
5.4.11.2	Análise dos Resultados para a Componente de Tensão $\sigma_z$ .....	182
5.4.11.3	Análise dos Resultados para as Componentes de Deformação $\varepsilon_x$ e $\varepsilon_y$ .....	183
5.4.11.4	Análise dos Resultados para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ .....	183
<b>6</b>	<b>Considerações Finais .....</b>	<b>185</b>
6.1	Conclusões.....	185
6.2	Trabalhos Futuros .....	187
<b>7</b>	<b>Referências Bibliográficas.....</b>	<b>188</b>
<b>APÊNDICE A</b>	<b>.....</b>	<b>195</b>
<b>APÊNDICE B</b>	<b>.....</b>	<b>197</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 - (a) Chapa Plana Retangular Isotrópica em EPT, (b) Distribuições Típicas de Temperatura e Tensão .....	40
Figura 4.2 - (a) Seção Transversal da Chapa, (b) Elemento Infinitesimal de Força $dF$ .....	44
Figura 4.3 - (a) Chapa Plana Retangular Isotrópica no Estado Tridimensional, (b) Distribuições Típicas de Temperatura e Tensão.....	54
Figura 4.4 - (a) Vista Encurtada da Seção que é Definida pelo Plano $yz$ , (b) Elemento Infinitesimal de Força $dF$ Provocado pela Componente de Tensão $\sigma_x$ .....	61
Figura 4.5 - (a) Vista Encurtada da Seção que é Definida pelo Plano $xy$ , (b) Elemento Infinitesimal de Força $dF$ Provocado pela Componente de Tensão $\sigma_z$ .....	61
Figura 5.1 - Geometria do Elemento PLANE183 (Fonte: ANSYS, 2012) .....	78
Figura 5.2 - Geometria do Elemento SOLID186 (Fonte: ANSYS, 2012) .....	79
Figura 5.3 - Processo de Resfriamento Forçado na Laminação a Quente (Fonte: Adaptado de OLIVEIRA et al., 2004) .....	81
Figura 5.4 - Perfil de Temperatura Original Atuante na Chapa em EPT .....	88
Figura 5.5 - Perfil de Temperatura Polinomial Aproximado Atuante na Chapa em EPT .....	91
Figura 5.6 - Perfis de Temperatura Original e Polinomial Aproximado Atuantes na Chapa em EPT .....	91
Figura 5.7 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Tensão $\sigma_x$ na Chapa em EPT .....	93
Figura 5.8 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Deformação $\varepsilon_x$ na Chapa em EPT .....	94
Figura 5.9 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Deformação $\varepsilon_y$ na Chapa em EPT .....	95
Figura 5.10 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Deformação $\varepsilon_z$ na Chapa em EPT .....	96
Figura 5.11 - Modelo Esquemático Mostrando a Condição de Contorno de Simetria na Chapa em EPT .....	97
Figura 5.12 - Modelo Ampliado Mostrando a Borda Esquerda da Chapa em EPT .....	97
Figura 5.13 - Solução pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ na Chapa em EPT .....	98

Figura 5.14 - Solução pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ na Chapa em EPT..	99
Figura 5.15 - Solução pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ na Chapa em EPT.....	100
Figura 5.16 - Solução pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ na Chapa em EPT.....	101
Figura 5.17 - Seções Transversais de Coleta de Dados Numéricos Obtidos pelo MEF .....	102
Figura 5.18 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ na Seção Definida por $x = 0,0 m$ .....	103
Figura 5.19 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ na Seção Definida por $x = 0,0 m$ .....	103
Figura 5.20 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ na Seção Definida por $x = 0,0 m$ .....	104
Figura 5.21 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ na Seção Definida por $x = 0,0 m$ .....	104
Figura 5.22 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ na Seção Definida por $x = 0,5 m$ .....	105
Figura 5.23 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ na Seção Definida por $x = 0,5 m$ .....	106
Figura 5.24 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ na Seção Definida por $x = 0,5 m$ .....	106
Figura 5.25 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ na Seção Definida por $x = 0,5 m$ .....	107
Figura 5.26 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ na Seção Definida por $x = 1,0 m$ .....	108
Figura 5.27 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ na Seção Definida por $x = 1,0 m$ .....	108
Figura 5.28 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ na Seção Definida por $x = 1,0 m$ .....	109
Figura 5.29 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ na Seção Definida por $x = 1,0 m$ .....	109
Figura 5.30 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ na Seção Definida por $x = 1,5 m$ .....	110
Figura 5.31 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ na Seção Definida por $x = 1,5 m$ .....	111
Figura 5.32 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ na Seção Definida por $x = 1,5 m$ .....	111

Figura 5.33 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ na Seção Definida por $x = 1,5 m$ .....	112
Figura 5.34 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ na Seção Definida por $x = 2,0 m$ .....	113
Figura 5.35 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ na Seção Definida por $x = 2,0 m$ .....	114
Figura 5.36 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ na Seção Definida por $x = 2,0 m$ .....	114
Figura 5.37 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ na Seção Definida por $x = 2,0 m$ .....	115
Figura 5.38 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ na Seção Definida por $x = 2,5 m$ .....	116
Figura 5.39 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ na Seção Definida por $x = 2,5 m$ .....	117
Figura 5.40 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ na Seção Definida por $x = 2,5 m$ .....	117
Figura 5.41 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ na Seção Definida por $x = 2,5 m$ .....	118
Figura 5.42 - Comparação de Resultados da Componente de Tensão $\sigma_x$ na Chapa em EPT.....	124
Figura 5.43 - Comparação de Resultados da Componente de Deformação $\varepsilon_x$ na Chapa em EPT .....	124
Figura 5.44 - Comparação de Resultados da Componente de Deformação $\varepsilon_y$ na Chapa em EPT .....	125
Figura 5.45 - Comparação de Resultados da Componente de Deformação $\varepsilon_z$ na Chapa em EPT .....	125
Figura 5.46 - Chapa Plana Isotrópica em Estado Tridimensional Submetida ao Processo de Têmpera .....	129
Figura 5.47 - Distribuições de Temperatura na Chapa em Estado Tridimensional para Diferentes Instantes de Tempo .....	136
Figura 5.48 - Distribuição de Temperatura na Chapa em Estado Tridimensional no Instante de Tempo $t = 5s$ .....	137
Figura 5.49 - Perfil de Temperatura Polinomial Aproximado Atuante na Chapa em Estado Tridimensional.....	139
Figura 5.50 - Perfis de Temperatura Original e Polinomial Aproximado Atuantes na Chapa em Estado Tridimensional .....	140

Figura 5.51 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Tensão $\sigma_x$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	142
Figura 5.52 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Tensão $\sigma_z$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	143
Figura 5.53 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Deformação $\varepsilon_x$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	144
Figura 5.54 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Deformação $\varepsilon_y$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	145
Figura 5.55 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Deformação $\varepsilon_z$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	146
Figura 5.56 - Modelo Utilizado na Aplicação do MEF para a Chapa em Estado Tridimensional.....	147
Figura 5.57 - Solução pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	148
Figura 5.58 - Solução pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_z$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	149
Figura 5.59 - Solução pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	150
Figura 5.60 - Solução pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	151
Figura 5.61 - Solução pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	152
Figura 5.62 - Segmentos de Coleta de Dados Numéricos Obtidos pelo MEF .....	153
Figura 5.63 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ no Segmento Definido por $x = 0,0 \text{ cm}$ .....	154
Figura 5.64 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_z$ no Segmento Definido por $x = 0,0 \text{ cm}$ .....	154
Figura 5.65 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ no Segmento Definido por $x = 0,0 \text{ cm}$ .....	155
Figura 5.66 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ no Segmento Definido por $x = 0,0 \text{ cm}$ .....	155
Figura 5.67 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ no Segmento Definido por $x = 0,0 \text{ cm}$ .....	156
Figura 5.68 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ no Segmento Definido por $x = 1,0 \text{ cm}$ .....	157
Figura 5.69 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_z$ no Segmento Definido por $x = 1,0 \text{ cm}$ .....	157

Figura 5.70 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ no Segmento Definido por $x = 1,0 \text{ cm}$ .....	158
Figura 5.71 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ no Segmento Definido por $x = 1,0 \text{ cm}$ .....	158
Figura 5.72 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ no Segmento Definido por $x = 1,0 \text{ cm}$ .....	159
Figura 5.73 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ no Segmento Definido por $x = 2,0 \text{ cm}$ .....	160
Figura 5.74 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_z$ no Segmento Definido por $x = 2,0 \text{ cm}$ .....	160
Figura 5.75 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ no Segmento Definido por $x = 2,0 \text{ cm}$ .....	161
Figura 5.76 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ no Segmento Definido por $x = 2,0 \text{ cm}$ .....	161
Figura 5.77 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ no Segmento Definido por $x = 2,0 \text{ cm}$ .....	162
Figura 5.78 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ no Segmento Definido por $x = 3,0 \text{ cm}$ .....	163
Figura 5.79 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_z$ no Segmento Definido por $x = 3,0 \text{ cm}$ .....	163
Figura 5.80 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ no Segmento Definido por $x = 3,0 \text{ cm}$ .....	164
Figura 5.81 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ no Segmento Definido por $x = 3,0 \text{ cm}$ .....	164
Figura 5.82 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ no Segmento Definido por $x = 3,0 \text{ cm}$ .....	165
Figura 5.83 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ no Segmento Definido por $x = 3,5 \text{ cm}$ .....	166
Figura 5.84 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_z$ no Segmento Definido por $x = 3,5 \text{ cm}$ .....	167
Figura 5.85 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ no Segmento Definido por $x = 3,5 \text{ cm}$ .....	167
Figura 5.86 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ no Segmento Definido por $x = 3,5 \text{ cm}$ .....	168
Figura 5.87 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ no Segmento Definido por $x = 3,5 \text{ cm}$ .....	168

Figura 5.88 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_x$ no Segmento Definido por $x = 4,0 \text{ cm}$ .....	170
Figura 5.89 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão $\sigma_z$ no Segmento Definido por $x = 4,0 \text{ cm}$ .....	170
Figura 5.90 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$ no Segmento Definido por $x = 4,0 \text{ cm}$ .....	171
Figura 5.91 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$ no Segmento Definido por $x = 4,0 \text{ cm}$ .....	171
Figura 5.92 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$ no Segmento Definido por $x = 4,0 \text{ cm}$ .....	172
Figura 5.93 - Comparação de Resultados da Componente de Tensão $\sigma_x$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	179
Figura 5.94 - Comparação de Resultados da Componente de Tensão $\sigma_z$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	179
Figura 5.95 - Comparação de Resultados da Componente de Deformação $\varepsilon_x$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	180
Figura 5.96 - Comparação de Resultados da Componente de Deformação $\varepsilon_y$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	180
Figura 5.97 - Comparação de Resultados da Componente de Deformação $\varepsilon_z$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	181
Figura A.1 - Convergência dos Polinômios de Legendre para a Distribuição de Temperatura na Chapa em EPT .....	195
Figura A.2 - Convergência dos Polinômios de Legendre para a Distribuição de Temperatura na Chapa em Estado Tridimensional .....	196
Figura B.1 - Convergência da Componente de Tensão $\sigma_x$ em $x = 0,0 \text{ m}$ na Chapa em EPT.....	197
Figura B.2 - Convergência da Componente de Deformação $\varepsilon_x$ em $x = 0,0 \text{ m}$ na Chapa em EPT .....	198
Figura B.3 - Convergência da Componente de Deformação $\varepsilon_y$ em $x = 0,0 \text{ m}$ na Chapa em EPT .....	198
Figura B.4 - Convergência da Componente de Deformação $\varepsilon_z$ em $x = 0,0 \text{ m}$ na Chapa em EPT .....	199
Figura B.5 - Convergência da Componente de Tensão $\sigma_x$ em $x = z = 0,0 \text{ cm}$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	199
Figura B.6 - Convergência da Componente de Tensão $\sigma_z$ em $x = z = 0,0 \text{ cm}$ na Chapa em Estado Tridimensional.....	200



Figura B.7 - Convergência da Componente de Deformação $\varepsilon_x$ em $x = z = 0,0 \text{ cm}$ na Chapa em Estado Tridimensional .....	200
Figura B.8 - Convergência da Componente de Deformação $\varepsilon_y$ em $x = z = 0,0 \text{ cm}$ na Chapa em Estado Tridimensional .....	201
Figura B.9 - Convergência da Componente de Deformação $\varepsilon_z$ em $x = z = 0,0 \text{ cm}$ na Chapa em Estado Tridimensional .....	201

## LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1 - Parâmetros da Equação Diferencial e Condições de Contorno no Processo de Resfriamento Forçado.....	82
Tabela 5.2 - Propriedades Térmicas e Massa Específica do Aço SAE 1020 .....	83
Tabela 5.3 - Valores dos Parâmetros Utilizados no Processo de Resfriamento Forçado .....	84
Tabela 5.4 - Polinômios de Legendre Utilizados na Aproximação da Distribuição de Temperatura na Chapa em EPT .....	89
Tabela 5.5 - Constantes da Eq. (5.26).....	90
Tabela 5.6 - Propriedades Mecânicas do Aço SAE 1020.....	92
Tabela 5.7 - Coeficientes Polinomiais do Perfil de Temperatura Polinomial Aproximado na Chapa em EPT .....	92
Tabela 5.8 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente $\sigma_x$ nas Seções Transversais da Chapa em EPT .....	119
Tabela 5.9 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente $\sigma_x$ nas Seções Transversais da Chapa em EPT .....	120
Tabela 5.10 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente $\varepsilon_x$ nas Seções Transversais da Chapa em EPT .....	120
Tabela 5.11 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente $\varepsilon_x$ nas Seções Transversais da Chapa em EPT .....	121
Tabela 5.12 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente $\varepsilon_y$ nas Seções Transversais da Chapa em EPT .....	121
Tabela 5.13 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente $\varepsilon_y$ nas Seções Transversais da Chapa em EPT .....	122
Tabela 5.14 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente $\varepsilon_z$ nas Seções Transversais da Chapa em EPT .....	122
Tabela 5.15 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente $\varepsilon_z$ nas Seções Transversais da Chapa em EPT .....	123
Tabela 5.16 - Parâmetros no Processo de Têmpera Apresentados pela Fig. 5.46 .....	129
Tabela 5.17 - Parâmetros da Equação Diferencial e Condições de Contorno no Processo de Têmpera .....	131

Tabela 5.18 - Parâmetros da Equação Diferencial e Condições de Contorno no Formato Adimensional.....	133
Tabela 5.19 - Valores dos Parâmetros Utilizados no Processo de Têmpera na Chapa em Estado Tridimensional.....	134
Tabela 5.20 - Valores das Raízes $\zeta_n^*$ e Constantes $C_n^*$ (Fonte: INCROPERA et al., 2008)....	135
Tabela 5.21 - Polinômios de Legendre Utilizados na Aproximação da Distribuição de Temperatura na Chapa em Estado Tridimensional.....	138
Tabela 5.22 - Constantes da Eq. (5.57).....	139
Tabela 5.23 - Coeficientes Polinomiais do Perfil de Temperatura Polinomial Aproximado na Chapa em Estado Tridimensional.....	141
Tabela 5.24 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente $\sigma_x$ nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional .....	173
Tabela 5.25 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente $\sigma_x$ nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional .....	174
Tabela 5.26 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente $\sigma_z$ nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional .....	174
Tabela 5.27 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente $\sigma_z$ nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional .....	175
Tabela 5.28 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente $\varepsilon_x$ nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional .....	175
Tabela 5.29 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente $\varepsilon_x$ nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional .....	176
Tabela 5.30 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente $\varepsilon_y$ nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional .....	176
Tabela 5.31 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente $\varepsilon_y$ nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional .....	177
Tabela 5.32 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente $\varepsilon_z$ nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional .....	177
Tabela 5.33 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente $\varepsilon_z$ nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional .....	178

## LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

$\langle f, g \rangle$	- Produto escalar entre as funções $f$ e $g$
$[a, b]$	- Intervalo de aproximação
$a_i$	- Coeficientes polinomiais do perfil de temperatura polinomial aproximado
$a_l$	- Dimensão da chapa ao longo da coordenada $x$
$a_{mn}$	- Coeficientes da série representante da função de tensão
$a_{2n}$	- Coeficientes polinomiais pares
$a_{2n+1}$	- Coeficientes polinomiais ímpares
$A$	- Constante multiplicadora da distribuição de temperatura linear
$A_v$	- Área da seção transversal da barra
$b_l$	- Dimensão da chapa ao longo da coordenada $y$
$b_{mn}$	- Coeficientes da série representante do Laplaciano da temperatura
$B$	- Constante multiplicadora da distribuição de temperatura quadrática
$B_k$	- Coeficiente da relação recursiva para determinação dos polinômios ortogonais
$Bi$	- Número de Biot
$c_j$	- Constantes da função de aproximação para $j = 1, \dots, n$
$c_p$	- Calor específico
$c_1^*, c_2^*$	- Constantes da equação diferencial ordinária homogênea
$c(n)$	- Coeficiente resultante do produto escalar da função $g_n(y)$ por ela mesma com relação à função peso $w(y)$
$\cos$	- Função cosseno
$C$	- Constante multiplicadora da distribuição de temperatura cúbica
$C_k$	- Coeficiente da relação recursiva para determinação dos polinômios ortogonais

$C_1, C_2, C_3,$ $C_4, C_5$ e $C_6$	- Constantes pertencentes às soluções das componentes de tensões térmicas auto-equilibradas
$C_n^*$	- Constantes da série representante da variável $\theta^*$
$dF$	- Elemento infinitesimal de força
$D_{XT}$	- Parcela do operador diferencial parcial linear que não possui derivadas com relação à variável $y$
$D_{YT}$	- Parcela do operador diferencial parcial linear que não possui derivadas com relação à variável $x$
$D_{XYT}$	- Parcela do operador diferencial parcial linear que possui apenas derivadas cruzadas com relação às variáveis $x$ e $y$
$exp$	- Função exponencial
$E$	- Módulo de elasticidade
EPT	- Estado plano de tensão
$f, f(y)$	- Função original a ser aproximada
$f_e, f_e(y)$	- Função genérica na variável $y$
$f_p(x)$	- Função de aproximação na variável $x$ para a função de tensão
$F_k$	- Componente do vetor de forças de corpo atuante na direção de $k$ para $k = x, y$ e $z$
$F_o$	- Número de Fourier
$F(x, y, t)$	- Função genérica dependente apenas das variáveis $x, y$ e $t$
$F_i(x, y, t)$	- Parcela $i$ de $F(x, y, t)$
$\mathbf{F}$	- Vetor das forças de corpo
$g, g(y)$	- Função de aproximação para a função original
$g_e, g_e(y)$	- Função genérica na variável $y$
$g_k(y)$	- Família de funções ortogonais
$g_m(y), g_n(y)$	- Funções pertencentes à família de funções ortogonais $g_k(y)$
$g_p(y)$	- Função de aproximação na variável $y$ para a função de tensão
$h^*$	- Coeficiente de convecção
$I_v$	- Momento de inércia da área da seção transversal da barra
$I_1$	- Primeiro invariante do tensor de tensão
$k$	- Condutividade térmica
$k_r$	- Número de raízes reais e distintas do polinômio $P_k(y)$ no intervalo $[a, b]$

$L_v$	- Comprimento da barra
$M$ ,	- Função erro quadrático como função dos coeficientes $c_1, c_2, \dots, c_n$
$M(c_1, c_2, \dots, c_n)$	
MEF	- Método dos elementos finitos
$n_x, n_y$ e $n_z$	- Cossenos diretores
$P_i(x)$	- Polinômio componente da tensão cisalhante $\tau_{mn}^*(x, y)$ como função apenas da variável $x$
$P_j(y)$	- Polinômios na variável $y$ que são previamente conhecidos
$P_k(y)$	- Polinômio ortogonal
$P_m(y), P_n(y)$	- Polinômios ortogonais de Legendre
PLANE183	- Elemento utilizado na análise numérica para o EPT
$\dot{q}$	- Geração de energia interna
$Q_j(y)$	- Polinômio componente da tensão cisalhante $\tau_{mn}^*(x, y)$ como função apenas da variável $y$
$r, r(y)$	- Resíduo da aproximação
$r^2, r^2(y)$	- Resíduo quadrático da aproximação
$r_1, r_2$	- Raízes da equação $T_h(y^*)$
$sen$	- Função seno
$S_j(x)$	- Função genérica na variável $x$
SOLID186	- Elemento utilizado na análise numérica para o estado tridimensional
$t$	- Variável temporal
$t^*$	- Variável temporal adimensional para o processo de têmpera
$t_{ij}^*$	- Tensão cisalhante adimensional
$tan$	- Função tangente
$T$	- Distribuição de temperatura
$T_c$	- Distribuição de temperatura constante
$T_i$	- Temperatura no nó $i$
$T_s$	- Parcela constante da distribuição de temperatura
$T_0$	- Temperatura da chapa no resfriamento forçado na posição $y^* = 0$
$T_\infty$	- Temperatura do meio refrigerante
$T_i^*$	- Temperatura inicial da chapa no processo de têmpera
$T_h(y^*)$	- Solução da equação diferencial ordinária homogênea

$T_p(y^*)$	- Solução particular da equação diferencial ordinária não homogênea
$T_1(x), T_2(x)$	- Parcela na variável $x$ da distribuição de temperatura
$T^e(\xi, \eta)$	- Distribuição de temperatura no elemento plano
$T^e(\xi, \eta, \zeta)$	- Distribuição de temperatura no elemento tridimensional
$u_{xi}$	- Deslocamento em $x$ do nó $i$
$u_{yi}$	- Deslocamento em $y$ do nó $i$
$u_{zi}$	- Deslocamento em $z$ do nó $i$
$v$	- Velocidade de laminação
$w(y)$	- Função peso
$x^*$	- Coordenada auxiliar no processo de resfriamento forçado
$X(x)$	- Parcela na variável $x$ da distribuição de temperatura
$y^a$	- Coordenada espacial adimensional no processo de têmpera
$y^*$	- Coordenada auxiliar no processo de resfriamento forçado
$Y(y)$	- Parcela na variável $y$ da distribuição de temperatura
$z_d, z_d(x, y, t)$	- Variável dependente da equação diferencial parcial linear
$z_{di}$	- Parcela $i$ de $z_d$
$z_{di}(x, y, t)$	- Parcela $i$ de $z_d(x, y, t)$
$\alpha$	- Coeficiente de expansão térmica
$\alpha_T$	- Difusividade térmica
$\beta_c$	- Razão entre a altura e o comprimento da barra
$\delta_{ij}$	- Delta de Kronecker
$\nabla^2$	- Operador Laplaciano
$\nabla^4$	- Operador Biharmônico
$\nabla$	- Operador Gradiente
$\varepsilon_x$	- Componente de deformação normal atuante na direção de $x$
$\varepsilon_y$	- Componente de deformação normal atuante na direção de $y$
$\varepsilon_z$	- Componente de deformação normal atuante na direção de $z$
$\varepsilon_{xy}$	- Componente de deformação cisalhante atuante no plano $xy$
$\varepsilon_{xz}$	- Componente de deformação cisalhante atuante no plano $xz$
$\varepsilon_{yz}$	- Componente de deformação cisalhante atuante no plano $yz$
$\varepsilon$	- Tensor de deformação
$\zeta$	- Coordenada no domínio natural

$\zeta_n^*$	- Raízes positivas da equação transcendental
$\eta$	- Coordenada no domínio natural
$\eta_a$	- Variável adimensional atuante na direção da coordenada $y$
$\eta_c$	- Coordenada adimensional na direção da altura da barra
$\theta$	- Diferença entre $T$ e $T_\infty$
$\theta_i$	- Diferença entre a variável $T_i^*$ e a variável $T_\infty$
$\theta^*$	- Forma adimensional da variável dependente $T$ no processo de têmpera
$\nu$	- Coeficiente de Poisson
$\xi$	- Coordenada no domínio natural
$\xi_a$	- Variável adimensional atuante na direção da coordenada $x$
$\rho_e$	- Massa específica
$\sigma_x$	- Componente de tensão normal atuante na direção de $x$
$\sigma_y$	- Componente de tensão normal atuante na direção de $y$
$\sigma_z$	- Componente de tensão normal atuante na direção de $z$
$\sigma_{xy}$	- Componente de tensão cisalhante atuante no plano $xy$
$\sigma_{xz}$	- Componente de tensão cisalhante atuante no plano $xz$
$\sigma_{yz}$	- Componente de tensão cisalhante atuante no plano $yz$
$\sigma_{ij}$	- Componentes de tensão para $i, j = x, y, z$
$\sigma$	- Tensor de tensão
$\tau_{mn}^*(x, y)$	- Aproximação para a tensão cisalhante no ponto $(x, y)$
$\varphi$	- Função de tensão de Airy
$\varphi_i$	- Componentes da função $\varphi$
$\varphi^{(T)}$	- Solução da equação de Poisson
$\varphi^*$	- Solução da equação Biharmônica
$\varphi_i^*$	- Componentes da função $\varphi^*$
$\varphi'_j, \varphi'_j(y)$	- Funções preestabelecidas que compõem a função de aproximação para $j = 1, \dots, n$
$\Phi_m(\xi_a)$	- Função característica na variável $\xi_a$ representante dos modos normais de vibração de uma barra uniforme fixada em ambos os lados
$\psi_n(\eta_a)$	- Função característica na variável $\eta_a$ representante dos modos normais de vibração de uma barra uniforme fixada em ambos os lados.
$2b$	- Espessura da chapa



- 2h* - Altura da seção da barra; largura da chapa (chapa em EPT); lado da chapa (chapa em estado tridimensional)
- 2l* - Comprimento da chapa (chapa em EPT); lado da chapa (chapa em estado tridimensional)

## RESUMO

Neste trabalho foi analisada uma metodologia para a determinação das tensões térmicas auto-equilibradas e das deformações térmicas em chapas planas retangulares isotrópicas que são solicitadas no estado plano de tensão (EPT) e no estado tridimensional. A consideração de algumas hipóteses básicas simplificadoras resultou na condição de tensão térmica auto-equilibrada, onde os esforços resultantes são nulos. Deste modo, foi possível determinar expressões, em termos polinomiais, para as tensões térmicas auto-equilibradas e deformações térmicas atuantes nas chapas para os dois casos. As chapas são livres de carregamentos externos em suas bordas e foram submetidas a distribuições não lineares de temperatura. As distribuições de temperatura foram obtidas através da resolução de dois problemas de condução de calor. A metodologia proposta consistiu em aproximar estas distribuições não lineares de temperatura por polinômios. Deste modo, os campos de tensão e de deformação ficaram completamente determinados através dos coeficientes polinomiais do campo de temperatura polinomial aproximado utilizando-se as expressões obtidas em termos polinomiais. Os resultados obtidos através dessa metodologia foram comparados com os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos (MEF). A comparação dos resultados analíticos aproximados e dos resultados obtidos através do MEF apresentou elevado nível de concordância para pontos afastados das bordas livres das chapas. Deste modo, foram determinadas expressões que representam satisfatoriamente os campos de tensão e deformação em pontos afastados das bordas livres das chapas, ou seja, em regiões onde as hipóteses básicas simplificadoras são satisfeitas.

**Palavras-chaves:** Análise Estrutural Térmica; Tensões Térmicas Auto-Equilibradas; Deformações Térmicas.

## ABSTRACT

In the present work it is presented a methodology to determine the self-balanced thermal stresses and thermal strains in isotropic rectangular flat plates that are under plane stress state and three-dimensional state. The consideration of some basic simplifying assumptions resulted in the condition of self-balanced thermal stress, where the resulting efforts are null. Thus, there are determined expressions, in polynomial terms, to the self-balanced thermal stresses and thermal strains acting on the plates for the two cases. The plates are free of external loads at their ends and are subjected to nonlinear temperature distributions. The temperature distributions were obtained by solving two problems of heat conduction. The proposed methodology was to approach these nonlinear temperature distributions by polynomials approximations. Thus, the stress and strain fields were completely determined by the polynomial coefficients of the approximate polynomial temperature field through the use of the expressions obtained in polynomial terms. The results obtained by this method were compared with the results obtained by the finite element method. The comparison of approximate analytical results and the results obtained by the finite element method showed high level of agreement to locations away from the free ends of the plates. Thus, there are determined certain expressions that satisfactorily represent the stress and strain fields to distant points of the free ends of the plates, that is, in regions where the basic simplifying assumptions are met.

**Keywords:** Thermal Structural Analysis; Self-Balanced Thermal Stresses; Thermal Strains.

# 1

## INTRODUÇÃO

Durante o século XX houve o advento de diversos tipos de estruturas que são comumente submetidas a distribuições não lineares de temperatura. Estruturas como aeronaves supersônicas, aeronaves hipersônicas, fornos industriais, usinas termoelétricas, usinas termonucleares, chapas submetidas aos diversos tratamentos térmicos na indústria, dentre outras, estão sujeitas a variados gradientes térmicos em seus regimes de trabalho. Estes gradientes térmicos, por sua vez, dão origem a campos não lineares de temperatura que podem ser avaliados, em alguns casos, através das equações de condução de calor. As equações de condução de calor são equações diferenciais parciais de alta ordem que podem ser resolvidas analiticamente para apenas poucos problemas de geometria simplificada. Deste modo, é possível a utilização dos mais variados métodos numéricos para realizar a avaliação dos campos de temperatura em estruturas de geometrias mais complexas. Estas estruturas, quando submetidas a estas distribuições de temperatura, estão sujeitas a campos de tensão e deformação térmicas. Desta forma, torna-se necessária a avaliação dos campos de temperatura para realizar os diversos projetos estruturais de forma eficiente.

O estudo de estruturas que trabalham submetidas a carregamentos térmicos é bastante limitado, sendo a área termo-estrutural ainda pouco estudada. A pesquisa se apresenta ainda mais limitada no que se refere à determinação de soluções analíticas para os campos de tensão

e deformação térmicas. Como para as equações de condução de calor, as equações que descrevem os campos de tensão e deformação também possuem solução analítica para apenas alguns casos específicos. Contudo, as soluções disponíveis ainda podem ser investigadas permitindo a elaboração de um procedimento generalizado que permita obter as distribuições de tensão e deformação de forma rápida e precisa em estruturas de geometria simples.

Soluções analíticas para os campos de tensão e deformação em estruturas de geometria simplificada foram desenvolvidas. Levando-se em consideração apenas os efeitos térmicos, tem-se a solução encontrada por Boley e Weiner (1960). Esta solução foi desenvolvida para a determinação das tensões e deformações térmicas em uma barra de seção transversal retangular que é submetida a uma distribuição de temperatura ao longo da altura da seção. Esta barra é livre de carregamentos externos em suas bordas e admite-se que ela seja solicitada em EPT pelo fato da sua espessura ser considerada muito pequena. A solução é aplicável em barras cujo comprimento é muito maior que a altura da seção. Para chegar a esta solução, Boley e Weiner (1960) consideram um conjunto de hipóteses básicas simplificadoras que resultam na condição de tensão térmica auto-equilibrada, onde os esforços resultantes são nulos na seção transversal da barra. Deste modo, eles encontram expressões para as componentes de tensão e para as componentes de deformação em função da distribuição de temperatura.

A grande maioria das distribuições de temperatura, encontradas através das soluções das equações de condução de calor, possuem a forma de funções exponenciais, logarítmicas, cossenoidais, dentre outras. Deste modo, Vecci (1995) determinou um procedimento, em termos de uma distribuição de temperatura polinomial generalizada, para a determinação dos campos de tensão e deformação térmicas em chapas. Em seu procedimento, parte-se da solução encontrada por Boley e Weiner (1960), obtida para barras, e considera-se uma distribuição de temperatura polinomial generalizada atuante ao longo da largura de uma chapa que é livre de carregamentos externos em seu contorno. Deste modo, encontram-se expressões para os campos de tensão e deformação térmicas em termos dos coeficientes polinomiais da distribuição de temperatura. Desta maneira, utilizando-se de uma aproximação polinomial para as distribuições não lineares de temperatura, que são obtidas através das soluções das equações de condução de calor, torna-se possível a utilização das expressões em termos de polinômios obtidas para os campos de tensão e deformação térmicas. Desta forma, determinou-se um procedimento generalizado que permite a obtenção de tensões e

deformações térmicas de forma rápida e precisa. Além disto, o procedimento adotado por Vecci (1995) é facilmente estendido a chapas que são solicitadas termicamente em outras configurações.

O presente trabalho tem como objetivo a obtenção de tensões térmicas auto-equilibradas e deformações térmicas em chapas planas retangulares isotrópicas que são livres de carregamentos externos em suas bordas, ou seja, estas chapas estão completamente livres. Inicialmente, será analisada a metodologia proposta por Vecci (1995) através do método dos elementos finito e, posteriormente, será estendida esta metodologia a chapas que são solicitadas termicamente no estado tridimensional (quando considerado o carregamento térmico). Neste último caso, considera-se uma chapa quadrada de lado muito maior que a espessura. Esta chapa será submetida a uma distribuição de temperatura variável ao longo da espessura e constante ao longo dos lados. Desta forma, admite-se que a chapa seja solicitada termicamente no estado tridimensional.

Os resultados analíticos aproximados e numéricos para os campos de tensão e deformação térmicas apresentaram uma concordância bastante satisfatória para pontos afastados das bordas que estão livres de restrições. Com relação à chapa solicitada em EPT, verificou-se que as soluções analíticas aproximadas são satisfatórias em pontos situados a distâncias maiores ou iguais à largura da chapa a partir das duas bordas livres que são ortogonais à direção do comprimento e paralelas à direção da largura. E para a chapa quadrada, verificou-se que as soluções analíticas aproximadas encontradas são satisfatórias em pontos situados a distâncias maiores ou iguais à espessura da chapa a partir das quatro bordas livres que são paralelas à direção da espessura.

No capítulo 2 apresenta-se uma breve revisão bibliográfica no que se refere à determinação dos campos de tensão e deformação térmicas em chapas planas retangulares, barras de seção transversal retangular e tiras retangulares que são submetidas a distribuições adversas de temperatura. No capítulo 3 apresenta-se o método de obtenção das funções polinomiais que serão utilizadas como funções de aproximação para os campos não lineares de temperatura que são encontrados a partir das equações de condução de calor. No capítulo 4 é apresentada a metodologia para a determinação das tensões térmicas auto-equilibradas e deformações térmicas nas chapas para os dois casos estudados. No capítulo 5 são apresentados os resultados encontrados de forma analítica aproximada e de forma numérica para os campos de

tensão e deformação térmicas. E por fim, no capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões obtidas neste trabalho juntamente com algumas propostas de trabalhos futuros.

# 2

## REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 - Introdução

Este capítulo é destinado à revisão bibliográfica dos diversos trabalhos encontrados na literatura relacionados à determinação dos campos de tensão, deformação e deslocamentos térmicos em chapas planas retangulares, barras de seção transversal retangular e tiras retangulares. Para uma melhor apresentação e entendimento, o capítulo foi dividido em três subseções: tensões e deslocamentos térmicos em chapas e barras considerando o estado tridimensional; tensões e deformações térmicas em chapas e barras considerando o EPT; e tensões e deformações térmicas em chapas, barras e tiras retangulares.

### 2.2 - Tensões e Deslocamentos Térmicos em Chapas e Barras Considerando o Estado Tridimensional

Os trabalhos apresentados nesta seção são relativos à determinação dos campos de tensão e deslocamentos térmicos em chapas planas retangulares e barras com seção transversal retangular considerando-se estado tridimensional de tensões. Estes trabalhos têm em comum o



fato de que eles partem de um determinado estado térmico, ao qual a chapa ou barra é submetida, para determinar o campo de temperatura. O campo de temperatura é obtido a partir de técnicas de transformação aplicadas à equação diferencial do problema de condução de calor. A partir do campo de temperatura encontrado são determinadas as tensões térmicas por meio da função de tensão de Airy. Para isso, substitui-se a expressão para o campo de temperatura na equação diferencial do problema termoelástico. A principal diferença entre estes trabalhos consiste no estado térmico à qual a chapa ou barra é submetida e no tipo de técnica de transformação utilizada para a determinação do campo de temperatura.

Quando uma estrutura é submetida a um determinado estado térmico ela também estará submetida a um determinado campo de temperatura. Para o caso em que a estrutura é uma chapa plana retangular ou barra de seção retangular, diversos estados térmicos são possíveis. Nos trabalhos apresentados por Ghume et al. (2013); Jadhav (2013); Jadhav et al. (2013); Lamba e Khobragade (2012b) e Sutar et al. (2012) resolve-se o problema transiente inverso termoelástico em uma chapa plana retangular e em uma barra de seção transversal retangular devido a fontes de calor internas. Os trabalhos são apresentados para uma barra retangular semi-infinita devido à geração de calor, para uma chapa retangular sólida semi-infinita com fonte de calor interna, para uma chapa retangular com geração de calor interna, para um objeto retangular fino e para uma chapa retangular com geração de calor interna, respectivamente. A principal característica apresentada por estes problemas inversos é que determinadas condições de contorno são tratadas como incógnitas do problema. A distribuição de temperatura e condições de contornos incógnitas para estes problemas são obtidas a partir da aplicação de técnicas de transformação como a transformada finita de Marchi-Fasulo, transformada de Laplace, transformada de Fourier, transformada finita dos cossenos de Fourier e suas respectivas transformadas inversas. Estas técnicas são aplicadas na equação diferencial governante do problema de condução de calor. Os campos de temperatura e tensão foram obtidos na forma de séries simples, séries duplas e séries triplas infinitas. Nestes trabalhos não foram mencionadas as condições de contorno do problema termoelástico, contudo pode-se atestar que as chapas e barras estão livres de carregamentos externos em suas bordas. Estes trabalhos são muito específicos com relação às condições de contorno do problema de condução de calor e eles dão muita ênfase na demonstração das técnicas de transformação para a obtenção do campo de temperatura. No trabalho apresentado por Jadhav et al. (2013) é considerada uma chapa retangular fina, contudo não há menção sobre uma possível consideração do EPT, ou seja, calculam-se as tensões considerando o

estado tridimensional. O estado tridimensional também é considerado pelos outros quatro trabalhos. Para todos os casos, também são calculados os deslocamentos térmicos normais nos três eixos coordenados.

Nos trabalhos apresentados por Khobragade e Parveen (2012) e Roy et al. (2013) é resolvido o problema termoelástico em uma barra semi-infinita. A principal diferença entre os dois trabalhos reside nas condições de contorno do problema de condução de calor. É importante observar que no trabalho de Roy et al. (2013) a barra em estudo é fina, porém nada é dito a respeito sobre a possível consideração do EPT. Desta forma, ele trata o problema como Jadhav et al. (2013), ou seja, pela consideração do estado tridimensional. Nestes trabalhos o campo de temperatura é obtido em termos de séries infinitas simples e séries duplas pela aplicação de transformadas finitas de Marchi-Fasulo, transformadas dos senos de Fourier e suas respectivas transformadas inversas. Determina-se o campo de tensão pela substituição do campo de temperatura na equação diferencial do problema termoelástico, tal como o realizado pelos trabalhos anteriores. Nestes trabalhos também não se faz menção sobre as condições de contorno do problema termoelástico, contudo é possível averiguar que as barras são livres de carregamentos em todas as bordas. Nestes dois trabalhos poderia ser realizada uma abordagem mais detalhada no que se refere ao problema termoelástico para se avaliar com maior clareza os resultados apresentados para as tensões e deslocamentos térmicos.

Um problema térmico distinto dos apresentados até aqui foi desenvolvido por Lamba e Khobragade (2012a) e Patil et al. (2012). Nestes trabalhos é resolvido o problema termoelástico em uma chapa retangular devido ao fornecimento de calor parcialmente distribuído. No trabalho de Patil et al. (2012) ainda é assumida a presença de geração interna de calor na chapa. Deste modo, evidencia-se uma diferença em relação à abordagem adotada por Lamba e Khobragade (2012a). Outra diferença entre os dois trabalhos é com relação às condições de contorno do problema de condução de calor. As distribuições de temperatura nestes trabalhos são obtidas a partir da aplicação da transformada finita de Marchi-Fasulo, da transformada finita de Fourier em cossenos e da transformada de Laplace na equação diferencial do problema de condução de calor. O campo de tensão é determinado como nos outros trabalhos, ou seja, através da substituição do campo de temperatura na equação diferencial governante do problema termoelástico. Tal como em outros trabalhos apresentados, não é mencionado se a chapa é livre de carregamentos externos, porém pode-se averiguar que não há qualquer tipo de carregamento atuante nas bordas das chapas.

Nos trabalhos apresentados por Gaikwad e Ghadle (2009) e Gaikwad e Ghadle (2011) é utilizada uma técnica de transformação diferente das apresentadas até aqui. Os campos de temperatura são calculados através da aplicação da transformada integral-tripla na equação diferencial governante do problema de condução de calor. Em Gaikwad e Ghadle (2009) as tensões térmicas quase estáticas são calculadas para uma chapa retangular espessa e em Gaikwad e Ghadle (2011) são determinadas as tensões térmicas em uma chapa retangular espessa para um problema de condução de calor não homogêneo devido à geração de calor interna. Como anteriormente, o campo de tensão é obtido a partir da função de tensão de Airy pela substituição do campo de temperatura na equação diferencial governante do problema termoelástico e as condições de contorno são assumidas como aquelas apresentadas em uma chapa plana retangular que é livre de carregamentos externos em suas bordas. Também foram calculados os deslocamentos térmicos devidos à distribuição de temperatura.

Tensões térmicas transientes foram calculadas no trabalho de Dange (2014). O método de solução apresentado neste trabalho é similar aos dos trabalhos anteriores, ou seja, pela utilização de técnicas de transformação. Neste trabalho são aplicadas, sucessivamente, a transformada dos senos de Fourier, a transformada dos cossenos de Fourier, a transformada de Laplace e suas inversas para a obtenção do campo de temperatura. A obtenção do campo de tensão é análoga ao realizado pelos trabalhos anteriores, ou seja, pela substituição do campo de temperatura na equação diferencial governante do problema termoelástico.

Neste ponto é importante mencionar que os trabalhos apresentados até aqui dão um grande enfoque ao problema térmico de condução de calor, ou seja, na aplicação das técnicas de transformação às equações de condução de calor para a obtenção do campo de temperatura. Na maior parte dos trabalhos não foram mencionadas as condições de contorno do problema termoelástico, porém nestes trabalhos pode ser averiguado que as chapas e barras analisadas estão livres de carregamentos externos em suas bordas. Esta averiguação é obtida através de uma avaliação sucinta dos resultados. É também importante mencionar que a solução para o campo de temperatura, campo de tensão e campo de deslocamentos é realizada utilizando-se apenas alguns termos das séries infinitas que representam estas variáveis. Deste modo, as soluções são obtidas em termos aproximados.

### **2.3 - Tensões e Deformações Térmicas em Chapas e Barras Considerando o EPT**

Nesta seção é apresentada uma série de trabalhos onde são determinadas as tensões térmicas em chapas planas retangulares e em barras com seção transversal retangular. Estes trabalhos consideram que as chapas e barras possuem espessura muito pequena, portanto, considera-se o EPT. Nestes trabalhos o campo de temperatura se encontra distribuído no plano da chapa ou barra e, além disto, considera-se que a temperatura seja constante ao longo da espessura.

Nos trabalhos apresentados por Bhongade e Durge (2013) e Bhongade e Durge (2014) são determinadas as tensões térmicas quase estáticas, tal como realizado por Gaikwad e Ghadle (2009) para o caso tridimensional. Considera-se uma chapa retangular fina com geração de calor interna solicitada em EPT. Um processo quase estático se trata de um processo que ocorre muito lentamente. Neste caso, a variabilidade das tensões térmicas com relação à variável temporal é muito pequena. Como para a série de artigos apresentados na seção anterior, estes trabalhos fazem uso de técnicas de transformação que são aplicadas às equações de condução de calor para a obtenção do campo de temperatura. A principal diferença entre os trabalhos apresentados por Bhongade e Durge (2013) e Bhongade e Durge (2014) se apresenta nas condições de contorno do problema de condução de calor e nos tipos de transformadas utilizadas na resolução do problema. São utilizadas as transformadas integrais dos senos, a transformada de Laplace e suas inversas em Bhongade e Durge (2014) e a transformada dos cossenos, a transformada de Laplace e suas inversas em Bhongade e Durge (2013). A chapa é livre de carregamentos externos nas suas bordas e o campo de tensão é obtido pela substituição da distribuição de temperatura na equação diferencial governante do problema termoelástico. Os campos de temperatura e tensão são representados em termos de séries duplas infinitas e as soluções são esboçadas utilizando-se de apenas alguns termos.

Um trabalho similar ao apresentado por Bhongade e Durge (2013) e Bhongade e Durge (2014) é desenvolvido por Salve (2010). Neste trabalho é resolvido o problema inverso para determinação das tensões transientes quase estáticas em uma chapa retangular fina considerando-se o EPT. Como para o trabalho apresentado por Bhongade e Durge (2013); Bhongade e Durge (2014) e Gaikwad e Ghadle (2009), as tensões encontradas são quase estáticas e assim como nos trabalhos de Ghume et al. (2013); Jadhav (2013); Jadhav et al.

(2013); Lamba e Khobragade (2012b) e Sutar et al. (2012), resolve-se o problema inverso, ou seja, condições de contorno também são consideradas incógnitas do problema. Para a determinação do campo de temperatura é aplicada a transformada finita de Fourier e a transformada de Laplace à equação diferencial do problema de condução de calor. O campo de tensão é obtido de forma similar aos trabalhos apresentados anteriormente e a abordagem adotada para a obtenção dos resultados também é a mesma.

O trabalho apresentado por Patil e Prasad (2013) é caracterizado pela resolução de dois problemas termoelásticos planos estacionários para uma chapa retangular fina. Neste caso, por se tratar de um campo de temperatura estacionário, mostra-se que esta distribuição satisfaz a equação de Laplace. O primeiro problema tratado neste trabalho é o problema termoelástico estacionário inverso para a determinação da temperatura, deslocamentos e tensões térmicas. O segundo é o problema termoelástico estacionário direto para a determinação das mesmas variáveis do primeiro caso. Neste trabalho é analisada a forma correta de se resolver problemas estacionários relacionados à obtenção da função de tensão a partir da equação diferencial do problema termoelástico. Para os dois problemas analisados são utilizadas as transformadas finitas em senos de Fourier, as transformadas finitas de Fourier e suas inversas para a obtenção do campo de temperatura. Neste caso, mostra-se que a maneira correta de obtenção da função de tensão se dá através da substituição do campo de temperatura na equação diferencial do problema termoelástico em sua forma simplificada e não em sua forma generalizada.

Um problema análogo aos apresentados até aqui é tratado no trabalho de Sugano (1983). Neste trabalho parte-se de um determinado estado térmico, o qual a chapa é submetida, para posterior obtenção dos campos de temperatura e tensão. Um método é apresentado para a determinação da temperatura e tensões térmicas transientes em uma chapa retangular fina e livre com temperatura inicial nula. Esta chapa é subitamente submetida a uma temperatura distinta envolvendo seus quatro lados através de diferentes coeficientes de transferência de calor. O problema é tratado expressando-se a equação diferencial do problema de condução de calor e a equação diferencial do problema termoelástico, juntamente com as condições de contorno, em termos adimensionais. Para a solução da equação diferencial do problema de condução de calor aplicam-se, sucessivamente, a transformada generalizada finita de Fourier e a transformada generalizada de Laplace. Deste modo, é obtido o campo de temperatura na chapa. O campo de tensão na chapa é obtido em termos da função de tensão de Airy pela

substituição do campo de temperatura na equação diferencial do problema termoelástico em um processo análogo ao efetuado pelos trabalhos anteriores. Pode-se ressaltar que este trabalho trata de um problema muito específico de condução de calor e que uma pequena variação nas condições de contorno alteraria de forma bastante acentuada a metodologia de resolução do problema.

Os trabalhos apresentados até aqui se caracterizam por partirem de determinados estados térmicos, os quais as chapas e barras são submetidas, para posterior determinação do campo de temperatura. A partir do campo de temperatura são obtidas as tensões térmicas em termos da função de tensão de Airy através da equação diferencial do problema termoelástico. Nos trabalhos apresentados a seguir foi utilizado o método da colocação para a obtenção do campo de tensão em uma chapa plana retangular. O método da colocação se trata de uma solução numérica aproximada. Segundo Antunes (2010), este método tem como princípio tornar zero o resíduo da aproximação da solução nos pontos conhecidos como pontos de colocação. Estes trabalhos resolvem o problema em termos de uma aproximação para a função de tensão de Airy através de uma série finita de termos. Um fato importante verificado nestes trabalhos é que eles partem de uma distribuição genérica de temperatura, ou seja, estes trabalhos não se preocupam com o problema de condução de calor. Deste modo, dá-se enfoque total ao problema termoelástico.

Soluções numéricas aproximadas para o campo de tensão são apresentadas nos trabalhos de Mendelson e Hirschberg (1956) e Roberts (1962). Em Mendelson e Hirschberg (1956) são calculadas as tensões térmicas em uma chapa retangular fina, finita e de espessura variável considerando-se o EPT. Neste trabalho considera-se que a temperatura e a espessura da chapa podem variar nos sentidos longitudinal e transversal. O método da colocação é utilizado também nos trabalhos de Roberts (1962) e Roberts e Mendelson (1963). Contudo, enquanto em Roberts e Mendelson (1963) admite-se uma solução aproximada para a tensão cisalhante na solução da equação integro-diferencial, em Mendelson e Hirschberg (1956) é assumida uma solução aproximada para a função de tensão que apresenta a seguinte forma:

$$\varphi = \sum_{j=1}^n P_j(y) S_j(x) \quad (2.1)$$

Na Eq. (2.1) os termos  $P_j(y)$  representam polinômios na variável  $y$  que são previamente conhecidos. Neste caso, a equação diferencial será satisfeita em todo o domínio ao longo de  $x$  e apenas em um número finito de valores  $n$  ao longo de  $y$ . A aproximação para a função de tensão é substituída na equação diferencial do problema termoelástico e é avaliada nos  $n$  pontos ao longo da coordenada  $y$ . A partir da aplicação do método da colocação é gerado um conjunto de equações diferenciais ordinárias com relação às funções  $S_j(x)$ . A solução para o campo de tensão é obtida a partir da função de tensão que, por sua vez, é obtida pela solução do conjunto de equações diferenciais ordinárias.

No trabalho apresentado por Roberts (1962) também é aplicado o método da colocação. Neste trabalho são apresentados gráficos para o projeto elástico de chapas finas livres admitindo-se o EPT. Deste modo, adotam-se variações de temperatura ao longo da direção longitudinal e transversal das chapas. Os gráficos apresentados por este trabalho permitem a determinação rápida do estado elástico de tensão em qualquer ponto de uma chapa retangular fina e plana e de espessura uniforme que é carregada por gradientes térmicos nas direções longitudinal e transversal. A solução desenvolvida pelo método da colocação está na forma de funções tabeladas que podem ser facilmente combinadas linearmente para produzir, com muita precisão, a distribuição de tensão elástica em chapas que possuem a razão entre o comprimento e a largura na faixa de 0,1 até 5,0. Contudo, o método apresentado por este trabalho apresenta uma limitação. Para a obtenção de resultados precisos é necessário que a distribuição de temperatura não varie de forma acentuada entre os pontos escolhidos para se aplicar o método da colocação. Além disto, deve ser possível a separação da função que representa a distribuição de temperatura na soma de uma função na variável  $x$  com uma função na variável  $y$ . Outro fato relevante a ser observado é que as soluções obtidas por este método são aproximadas e sua precisão dependerá do número de pontos escolhidos para se aplicar o método da colocação.

Nos trabalhos apresentados por Laura e Gutierrez (1978) e Rossit e Laura (1997) também são adotadas funções aproximadas para a representação da função de tensão. Nestes trabalhos a aproximação é realizada utilizando séries finitas em termos de funções polinomiais. Cada termo da série é composto pelo produto de uma função polinomial na variável  $x$ , uma função polinomial na variável  $y$  e uma constante multiplicadora. Ambas as variáveis  $x$  e  $y$  são independentes. No entanto, vale ressaltar que o objetivo principal do trabalho de Rossit e

Laura (1997) é propor uma abordagem polinomial unificada para tratar dois problemas termoelásticos distintos. Neste trabalho primeiramente é resolvido o problema de determinação das tensões e deslocamentos termoelásticos em uma chapa retangular fina com os lados restringidos elasticamente quanto à rotação aplicando-se da teoria de pequenos deslocamentos. Além disto, são desprezadas as tensões resultantes no plano médio da chapa. A partir desta solução é resolvido o problema termoelástico em EPT para uma chapa retangular com os lados livres, que é submetida a uma distribuição de temperatura simétrica em relação aos dois eixos coordenados. Ou seja, enquanto o trabalho de Rossit e Laura (1997) está preocupado em estabelecer uma formulação geral para a solução de determinada classe de problemas, o trabalho de Laura e Gutierrez (1978) é totalmente dedicado ao problema termoelástico plano na determinação das tensões térmicas em uma chapa retangular fina e livre de carregamentos externos.

Através da análise do trabalho de Laura e Gutierrez (1978) foi observado que as funções pertencentes a cada termo da série satisfazem às condições de contorno de chapa livre em suas bordas. A função de tensão aproximada é substituída na equação diferencial do problema termoelástico juntamente com o Laplaciano do campo de temperatura. Deste modo, é gerada uma função erro residual em termos de séries duplas finitas. As constantes incógnitas da função de tensão são obtidas a partir da condição de que a função erro residual é ortogonal com relação a cada função polinomial pertencente à série representante da função de tensão. Uma vez que é feito uso de condições de ortogonalidade de Galerkin, é gerado um sistema linear de equações para as constantes da série. A resolução deste sistema gera a função de tensão aproximada e, a partir desta, é encontrado o campo de tensão no formato adimensional. Os resultados obtidos neste trabalho são comparados com os obtidos por Przemieniecki (1959) e com os obtidos através do MEF mostrando boa concordância entre eles.

Outro trabalho que utiliza uma abordagem variacional aproximada é o trabalho apresentado por Heldenfels e Roberts (1952). Neste trabalho são calculadas as tensões térmicas em uma chapa retangular fina solicitada em EPT. Esta chapa é submetida a um carregamento térmico não uniforme. Resolve-se o problema em termos da função de tensão de Airy utilizando-se um método variacional aproximado para avaliar as tensões térmicas na chapa. A função de tensão é expressa em termos do produto de duas funções, ou seja, uma função na variável  $x$  e uma na variável  $y$ :



$$\varphi = f_p(x)g_p(y) \quad (2.2)$$

Mostra-se que a solução do problema se dá através da escolha apropriada de uma função  $g_p(y)$  e, a partir desta, é utilizado o princípio da mínima energia complementar para determinar a função  $f_p(x)$  que dá a melhor aproximação para a solução exata da equação diferencial do problema termoelástico que é dada por:

$$\nabla^4 \varphi = -E\alpha \nabla^2 T \quad (2.3)$$

Na Eq. (2.3) o termo  $\nabla^4$  representa o operador biarmônico,  $\nabla^2$  representa o Laplaciano,  $\varphi$  representa a função de tensão,  $E$  representa o módulo de elasticidade e  $\alpha$  representa o coeficiente de expansão térmica.

Mostra-se ainda que um bom critério de seleção para a função  $g_p(y)$  é através da escolha de uma função proporcional à função de tensão para uma chapa infinita que é submetida a uma distribuição de temperatura em sua direção transversal. A partir desta escolha é determinada a função  $f_p(x)$  pela minimização da energia complementar na chapa aquecida igualando-se a zero a primeira variação da energia complementar. De posse das duas funções determina-se a função de tensão e, por conseguinte, o campo de tensão no plano da chapa. Vale ressaltar que este método é aproximado e que a precisão deste depende da escolha apropriada da função  $g_p(y)$ . Outra questão relevante apresentada é que o campo de temperatura neste problema deve ser expresso em termos do produto de uma função em  $x$  e outra em  $y$  para que o método seja aplicado, ou seja:

$$T = T_s + X(x)Y(y) \quad (2.4)$$

Na Eq. (2.4)  $X(x)$  representa a parcela em  $x$  da distribuição de temperatura,  $Y(y)$  representa a parcela em  $y$  e  $T_s$  representa a parcela constante. Desta forma, este método fica limitado a distribuições de temperatura que possam ser expressas conforme a Eq. (2.4).

Em Argyris e Kelsey (1954) são determinadas as tensões térmicas em chapas planas retangulares finitas, finas, livres de carregamentos externos e de dimensões genéricas. A solução é obtida de maneira aproximada pela utilização do princípio das forças virtuais. Neste

caso, considera-se uma distribuição de temperatura simétrica com relação ao eixo longitudinal da chapa. Desta forma, constrói-se um modelo para a componente de tensão longitudinal na chapa finita em termos da função que representa a componente de tensão térmica auto-equilibrada atuante em uma chapa infinita. O modelo adotado para a tensão na chapa finita é composto pelo produto de duas funções. Cada uma destas funções é expressa em termos de coordenadas da chapa na forma adimensional. A partir da integração da componente de tensão longitudinal para a chapa finita, chega-se a um formato para a função de tensão de Airy. A partir desta função, determinam-se as componentes de tensão atuantes no plano da chapa finita. Para a obtenção das funções incógnitas pertencentes à função de tensão, são aplicadas as condições de contorno de chapa livre; deste modo, determina-se a função em  $y$ . Para a obtenção da função em  $x$ , aplica-se à função de tensão o princípio das forças virtuais desenvolvido em Argyris (1954). A partir da aplicação do princípio das forças virtuais, chega-se a uma equação diferencial que tem como solução a função em  $x$ . Com as funções incógnitas determinadas, o campo de tensão também fica completamente determinado. Vale ressaltar que se trata de um método aproximado e que sua aplicação neste trabalho ficou restrita a campos de temperatura unidimensionais que são distribuídos na direção transversal e que ainda possuem simetria com relação ao eixo longitudinal. Além disto, a precisão dos resultados dependerá da função adotada para a componente de tensão longitudinal na chapa finita.

Uma metodologia que difere um pouco das apresentadas até aqui foi desenvolvida por Roberts e Mendelson (1963) e Vihak et al. (1998). Nestes trabalhos o problema de determinação das tensões em uma chapa retangular livre é reduzido à solução de apenas uma equação integro-diferencial que governa o problema termoelástico. Em Vihak et al. (1998) a equação integro-diferencial é obtida em termos de uma das tensões normais utilizando a equação de equilíbrio, a equação de compatibilidade e pela consideração das condições de contorno nas quatro bordas e em Roberts e Mendelson (1963) a equação integro-diferencial, no formato adimensional, é obtida a partir da equação de compatibilidade adimensional, expressa em termos das tensões cisalhantes, utilizando-se das equações de tensão-deformação e das equações de equilíbrio. A diferença entre os dois métodos reside principalmente na variável incógnita da equação integro-diferencial e no método de solução desta equação. Em Vihak et al. (1998) a variável pode ser qualquer uma das tensões normais e em Roberts e Mendelson (1963) a variável considerada na solução do problema é a componente de tensão cisalhante. Conforme o trabalho de Roberts e Mendelson (1963), em relação ao método de

solução da equação integro-diferencial, adota-se uma solução aproximada utilizando-se do método da colocação. Esta solução possui o formato de um somatório duplo dado em termos do produto de uma função polinomial na variável  $x$  ( $P_i(x)$ ), uma função polinomial na variável  $y$  ( $Q_j(y)$ ) e um termo representante da tensão cisalhante adimensional em um dado ponto sobre a chapa ( $t_{ij}^*$ ). A aproximação para a tensão cisalhante é representada por:

$$\tau^*_{mn}(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P_i(x) Q_j(y) t_{ij}^* \quad (2.5)$$

A partir desta aproximação, chega-se a um sistema de equações lineares que é obtido através da substituição desta aproximação na equação integro-diferencial e também pela consideração de que o erro seja nulo nos  $m$  por  $n$  pontos escolhidos sobre a chapa. Neste caso, o método da colocação é aplicado ao longo dos dois eixos sobre a chapa. Em Vihak et al. (1998) a solução da equação integro-diferencial se dá pela expansão do campo de temperatura e do campo de tensão em séries trigonométricas utilizando-se um conjunto ortogonal completo de autofunções e funções associadas. Neste trabalho é adotado um método analítico para a obtenção das tensões, em termos de séries infinitas, onde se mostra que, para poucos termos, consegue-se uma precisão satisfatória para os resultados. Ainda neste trabalho mostra-se que se pode chegar à solução de Boley e Weiner (1960) (obtida para barras de seção transversal retangular com distribuição de temperatura ao longo da altura da seção), a partir da solução geral encontrada, quando é considerada uma chapa plana retangular com uma dimensão muito maior que a outra e que é submetida a uma distribuição de temperatura ao longo do seu lado menor.

Uma abordagem um pouco diferente é estabelecida no trabalho apresentado por Vigak (1997). Neste trabalho propõe-se um método de separação de variáveis para a resolução de problemas termoelásticos em uma região retangular com forças genéricas prescritas no contorno. Parte-se das equações diferenciais de equilíbrio e das condições de contorno para encontrar relações integrais adicionais em termos de apenas uma das componentes de tensão normal. A partir destas relações, expande-se o campo de temperatura e a componente de tensão normal escolhida sob a forma de expansões em séries trigonométricas não periódicas utilizando-se um sistema completo de funções ortogonais. A resolução é obtida a partir da substituição destas relações na equação de continuidade para a obtenção das constantes pertencentes às

séries. É importante observar que este método pode ser aplicado para a obtenção das tensões térmicas em chapas planas retangulares livres. Neste caso, basta considerar as forças prescritas no contorno como nulas.

No trabalho de Przemieniecki (1959) são determinadas as tensões térmicas de forma analítica aproximada em uma chapa retangular isotrópica livre que possui espessura constante e dimensões genéricas. Esta chapa é submetida a uma distribuição de temperatura arbitrária em seu plano e é considerado o EPT. A solução para o problema é desenvolvida em termos da função de tensão. Deste modo, expressam-se a função de tensão e o Laplaciano do campo de temperatura como expansões generalizadas de Fourier na forma de séries duplas. Estas séries são esboçadas em termos de funções características que representam os modos normais de vibração de uma barra uniforme fixada em ambos os lados. A representação da função de tensão e do Laplaciano da temperatura é realizada da seguinte maneira:

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \Phi_m(\xi_a) \psi_n(\eta_a) \quad (2.6)$$

$$-\alpha E \nabla^2 T = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \Phi_m(\xi_a) \psi_n(\eta_a) \quad (2.7)$$

As funções característica são representadas pelas funções  $\Phi_m(\xi_a)$  e  $\psi_n(\eta_a)$  nas séries acima. Encontram-se os coeficientes  $b_{mn}$  a partir da propriedade de ortogonalidade das funções características. A partir da substituição da função de tensão e do Laplaciano da temperatura na equação diferencial do problema termoelástico, o problema fica reduzido à solução de um conjunto de equações lineares para a obtenção dos coeficientes  $a_{mn}$  pertencentes à função de tensão. De posse destas constantes, determinam-se as tensões no plano da chapa em termos da função de tensão de Airy, ou seja:

$$\sigma_x = \frac{1}{b_l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \Phi_m(\xi_a) \psi_n(\eta_a)'' \quad (2.8)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{a_l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \Phi_m(\xi_a)'' \psi_n(\eta_a) \quad (2.9)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{-1}{a_l b_l} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \Phi_m(\xi_a)' \psi_n(\eta_a)' \quad (2.10)$$

Nas expressões acima  $a_l$  e  $b_l$  representam as dimensões da chapa nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Uma das conclusões obtidas pela aplicação deste método em chapas longas (chapas com uma dimensão muito maior que a outra) é que a distribuição de tensões cisalhantes e tensão normal transversal ficam confinadas apenas nas regiões próximas dos extremos longitudinais livres, sendo seus valores praticamente nulos em regiões afastadas destes extremos.

Na mesma linha do trabalho de Przemieniecki (1959), tem-se a solução desenvolvida por Iyengar e Chandrashekara (1966). Neste trabalho são determinadas as tensões térmicas em uma chapa retangular fina e livre que é solicitada em EPT. Esta chapa é submetida a uma distribuição de temperatura arbitrária em seu plano. A solução é obtida em termos da função de tensão de Airy que satisfaz a equação diferencial do problema termoelástico, dada por:

$$\nabla^4 \varphi + E\alpha \nabla^2 T = 0 \quad (2.11)$$

As componentes de tensão são encontradas em termos da função de tensão de Airy a partir das seguintes relações:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2.12)$$

Resolve-se o problema para chapas finitas e chapas longas (chapas que possuem uma dimensão muito maior que a outra). Para o problema da chapa finita, a distribuição arbitrária de temperatura é dividida na soma de funções pares e ímpares em duas variáveis; estas funções, por sua vez, são expressas em termos de séries duplas de Fourier. Utiliza-se a expressão para a função de tensão, em termos de séries simples e duplas, apresentada por Teodorescu (1961)<sup>1</sup> *apud* Iyengar e Chandrashekara (1966). Mostra-se que esta expressão

---

<sup>1</sup> TEODORESCU, P.P. *Probleme Plane in Theoria Elasticitati*. Rumania, Editura Academiei Republicii Populare, v.1, p.558, 1961.

satisfaz a equação diferencial termoelástica e a condição de contorno para a componente de tensão  $\sigma_{xy}$  nas bordas livres. As constantes incógnitas, nas séries pertencentes à função de tensão, são determinadas pela solução do sistema de equações que é gerado pela aplicação das condições de contorno para  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  nas bordas e pela aplicação da transformada finita de Fourier. Determinam-se ainda as tensões em uma chapa longa restringida em um de seus lados menores e que, além disto, é submetida a uma variação de temperatura ao longo de sua direção transversal. Os resultados obtidos para esta chapa são comparados com os resultados obtidos para a chapa finita. Mostra-se que a solução para o campo de tensão em chapas que possuem uma dimensão pelo menos duas vezes a outra, sendo a distribuição de temperatura ao longo do lado menor, pode ser obtida considerando-se a chapa como uma tira semi-infinita. Deve-se ressaltar que apenas alguns termos foram considerados na solução do sistema de equações para as constantes das séries e que há um trabalho demasiado na divisão do campo de temperatura em funções pares e ímpares para a obtenção das soluções.

Uma solução alternativa para a resolução de problemas termoelásticos é desenvolvida nos trabalhos de Meleshko (2005) e Meleshko (2011). Nestes trabalhos são determinadas as tensões térmicas em chapas planas retangulares livres e isotrópicas que são submetidas a uma distribuição de temperatura arbitrária em seu plano. Neste caso, não há variação de temperatura ao longo da espessura da chapa e são consideradas apenas as componentes de tensão no plano  $xy$ . A chapa é definida no intervalo:

$$\begin{aligned} -a_l/2 < x < a_l/2 \\ -b_l/2 < y < b_l/2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

A chapa é considerada livre de carregamentos externos em suas bordas. As tensões são obtidas em termos da função de tensão de Airy através da Eq. (2.12). Neste caso, mostra-se que a função de tensão deve satisfazer a função biarmônica não homogênea e as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \sigma_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad x = \pm a_l/2, \quad |y| \leq b_l/2 \\ \sigma_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad y = \pm b_l/2, \quad |x| \leq a_l/2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para a solução da equação diferencial biharmônica não homogênea, considera-se uma solução do tipo:

$$\varphi = \varphi^* + \varphi^{(T)} \quad (2.15)$$

Onde a função  $\varphi^*$  é considerada a solução da equação biharmônica dada por:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi^* = 0 \quad (2.16)$$

E  $\varphi^{(T)}$  é considerada a solução da equação de Poisson (para o EPT) dada por:

$$\nabla^2 \varphi^{(T)} + E\alpha T = 0 \quad (2.17)$$

Mostra-se que pela escolha adequada de uma solução particular para  $\varphi^{(T)}$ , o problema fica reduzido à solução do problema linear elástico que pode ser resolvido utilizando-se a função de tensão de Airy  $\varphi^*$  com determinadas condições de contornos prescritas. Assim, pela linearidade da equação biharmônica e suas respectivas condições de contorno e pela simetria geométrica do domínio considerado no problema, pode-se representar a solução do problema pela solução de quatro subproblemas que são representados por:

$$\varphi^* = \varphi_1^* + \varphi_2^* + \varphi_3^* + \varphi_4^* \quad (2.18)$$

Sendo que cada um dos subproblemas possui as suas respectivas condições de contorno. Deste modo, aplica-se o método da superposição para a resolução do problema. Neste caso, utiliza-se a soma de duas séries de Fourier em termos de conjuntos completos de funções trigonométricas nas coordenadas  $x$  e  $y$  para a representação da função de tensão. Mostra-se que estas séries satisfazem à equação biharmônica no respectivo domínio e que seus coeficientes são suficientes para a representação das condições de contorno nos lados da chapa. Pela não ortogonalidade das funções pertencentes às séries, existirá uma interdependência entre os coeficientes das séries fazendo com que seja necessária a solução de um sistema linear de infinitas equações algébricas que descrevem a relação entre os coeficientes de Fourier e a carga aplicada. Este método apresenta muitas dificuldades relacionadas ao infinito número de variáveis e infinitas equações. A solução deste sistema de

equações lineares infinitas se dá pelo método da redução simples, onde o sistema infinito é considerado como a forma limite do chamado sistema finito normal. Conclui-se que entre as principais vantagens do método da superposição estão a quantidade relativamente pequena de cálculos necessários para se chegar a resultados satisfatórios e a alta precisão que os mesmos apresentam.

Os trabalhos analisados nesta seção foram voltados principalmente à determinação de tensões térmicas em chapas planas de dimensões genéricas submetidas a distribuições genéricas de temperatura em seu plano. Em contraste com os trabalhos analisados até então, na próxima seção serão analisados trabalhos que tem seu enfoque voltado à determinação das tensões térmicas em chapas longas, barras longas e tiras retangulares. A geometria das tiras é similar à das chapas longas, ou seja, elas também possuem uma dimensão muito maior do que a outra.

#### **2.4 - Tensões e Deformações Térmicas em Chapas, Barras e Tiras Retangulares**

Nesta seção apresentam-se trabalhos relacionados à determinação do campo de tensão em chapas planas retangulares longas, barras longas e tiras retangulares. Para estes casos, a componente de tensão normal longitudinal é predominante. Como o esboçado no trabalho de Przemieniecki (1959), a componente de tensão normal transversal e a componente de tensão cisalhante possuem seus valores praticamente nulos em regiões afastadas das bordas longitudinais e seus valores são relevantes apenas em regiões próximas a estas bordas. Esta conclusão refere-se a chapas que possuem uma dimensão pelo menos duas vezes maior que a outra, ou seja, para chapas longas. Outra conclusão importante de ser mencionada é a obtida no trabalho apresentado por Iyengar e Chandrashekhara (1966) mostrando que a distribuição de tensão em chapas com o comprimento pelo menos duas vezes maior que a largura, sendo a distribuição de temperatura variável ao longo da largura, pode ser obtida tratando a chapa como uma tira retangular semi-infinita. Ou seja, os resultados obtidos para tiras retangulares podem ser estendidos para chapas longas.

No trabalho apresentado por Kolyano et al. (1985) são calculadas as tensões térmicas em uma chapa retangular fina e infinita na forma de tira retangular. Esta chapa é livre de



carregamentos externos em suas bordas. A chapa é aquecida pelo ambiente em uma região retangular contida em seu plano. Convecção de calor ocorre através dos planos da chapa enquanto os extremos transversais da chapa são isolados termicamente. O campo de temperatura é obtido através de uma mudança de variável na equação diferencial de condução de calor aplicando-se a transformada de Fourier. O campo de tensão na chapa é obtido como no trabalho de Kolyano e Pakula (1967), ou seja, utilizando-se a função biarmônica e a função representativa do potencial termoelástico dos deslocamentos para a representação da função de tensão e posterior aplicação de transformadas e suas inversas para o cálculo da função de tensão.

No trabalho apresentado por Kolyano e Pakula (1967) são determinadas as tensões térmicas em uma chapa em forma de uma tira retangular infinita. Esta chapa é fina, isotrópica e aquecida por fontes de calor. As soluções são obtidas para uma configuração simétrica e uma antissimétrica e considera-se que a chapa seja livre de carregamentos externos em suas bordas. As faces da chapa, nos extremos transversais, são isoladas termicamente e a troca de calor ocorre através das superfícies laterais com o meio exterior que se mantém a temperatura nula. Os problemas não estacionários de condução de calor, para os problemas simétricos e antissimétricos, são resolvidos pela aplicação das transformadas de Laplace, da transformada de Fourier e suas inversas na equação diferencial de condução de calor e nas suas respectivas condições de contorno. Deste modo, são obtidos os campos de temperatura para os dois casos. Demonstra-se que, a partir das soluções para os problemas não estacionários, pode-se chegar à solução para os respectivos problemas estacionários e que também pode-se chegar à solução para o problema não estacionário em uma chapa semi-infinita e chapa infinita tomando-se o limite no infinito para o comprimento transversal da chapa. As tensões na chapa são obtidas a partir da função de tensão utilizando-se a função biarmônica e a função representativa do potencial termoelástico dos deslocamentos e posterior aplicação da transformada de Fourier, da transformada de Laplace e suas inversas. Formula-se o problema em termos gerais, a partir das equações para o campo de temperatura e tensões, considerando-se o caso simétrico e antissimétrico. A partir desta formulação geral, calculam-se os campos de temperatura e tensão para um sistema de fontes de calor igualmente espaçado, um sistema de fontes de calor distribuído longitudinalmente e para um sistema de fontes de calor distribuído de forma harmônica na direção longitudinal para o caso simétrico e antissimétrico. Vale ressaltar que neste trabalho e no trabalho apresentado por Kolyano et al. (1985), os campos de temperatura encontrados foram essencialmente funções da coordenada longitudinal das tiras e que foram

calculadas as três componentes de tensão no plano da chapa. Neste caso, não se fez menção sobre as regiões de maior predominância das componentes de tensão como o mencionado no trabalho de Przemieniecki (1959).

Nos trabalhos apresentados por Kolyano e Gromovyk (1976) e Yavorskii (1982) é determinada a componente de tensão térmica longitudinal para uma chapa retangular na forma de uma tira retangular. Para estes casos, o comprimento da chapa é muito maior que a largura, ou seja, existirá apenas uma componente não nula de tensão. Nestes trabalhos considera-se o problema de transferência de calor onde a troca de calor ocorre através das superfícies do plano da tira retangular enquanto suas bordas localizadas nos extremos transversais são isoladas termicamente. No trabalho de Yavorskii (1982) são consideradas fontes de calor no formato de áreas distribuídas transversalmente ao longo da tira. O campo de temperatura é obtido através da aplicação da transformada integral de Laplace e do teorema da convolução à equação diferencial de condução de calor. No trabalho de Kolyano e Gromovyk (1976) assume-se uma distribuição uniforme de calor ao longo de uma área longitudinal posicionada a uma determinada distância do centro da chapa. Considera-se ainda que o coeficiente de troca de calor seja variável ao longo da direção transversal da chapa. O campo de temperatura é obtido pela resolução da equação diferencial de condução de calor. Para ambos os casos, o campo de temperatura obtido é função apenas da coordenada transversal. Deste modo, aplica-se a equação encontrada por Boley e Weiner (1960) (obtida para barras de seção transversal retangular com distribuição de temperatura ao longo da altura da seção) para determinar a única componente de tensão não nula atuante na chapa. Vale ressaltar que esta fórmula é aplicável pelo fato de se tratar de uma chapa na forma de tira retangular que ainda é livre de carregamentos externos em suas bordas.

No trabalho apresentado por Iyengar e Alwar (1962) é resolvido um problema mais específico. Neste trabalho são determinadas as tensões térmicas em uma chapa retangular longa, fina e engastada em um de seus lados menores e que ainda é submetida a uma variação uniforme de temperatura. Resolve-se o problema em termos da função de tensão de Airy tratando-se a chapa retangular como uma tira retangular semi-infinita. Expressam-se as tensões normais e cisalhantes, atuantes ao longo do lado engastado, em termos de séries de Fourier e a função de tensão, que satisfaz a equação biharmônica e as condições de contorno, em termos de integrais e séries de Fourier. A partir da função de tensão, determinam-se as tensões atuantes no plano da chapa. As constantes pertencentes às séries são obtidas através

da aplicação das condições de contorno. Calculam-se ainda os deslocamentos, a partir da função de tensão, e utiliza-se um número finito de termos nas séries para expressar os resultados. Este trabalho é limitado a distribuições de temperaturas uniformes sobre o plano da chapa e uma formulação diferente deve ser adotada caso a chapa se encontre completamente livre.

Em Boley e Weiner (1960) apresenta-se a solução para as tensões térmicas atuantes no plano de uma barra submetida a uma distribuição de temperatura arbitrária. Neste trabalho admite-se o EPT e a solução é aplicável para barras que possuam uma dimensão muito maior que as outras. Resolve-se o problema em termos da função de tensão de Airy aplicando-se o método de resolução de equações diferenciais desenvolvido por Boley (1956) para a solução da equação diferencial do problema termoelástico. Desta forma, obtém-se a função de tensão da seguinte forma:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \dots \quad (2.19)$$

Ele mostra que as funções  $\varphi_i$  na Eq. (2.19) devem satisfazer as seguintes equações:

$$\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} = -\alpha E \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial y^4} = -\alpha E \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial y^4} = -2 \frac{\partial^4 \varphi_{i-1}}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 \varphi_{i-2}}{\partial x^4}, \quad i = 3, 4, \dots \quad (2.22)$$

Neste trabalho são exibidos os resultados para as três primeiras funções  $\varphi_i$  considerando-se o caso geral, o caso de temperatura independente da direção transversal e o caso de variação linear de temperatura na direção transversal. Os resultados apresentados neste trabalho são utilizados e analisados no trabalho apresentado por Boley (1956). Neste último trabalho é mostrada a maneira correta de utilização desta solução, bem como a validade da mesma.

No trabalho apresentado por Boley (1956) são determinadas a temperatura, as tensões e os deslocamentos térmicos em barras e chapas longas. Na introdução deste trabalho é apresentada a equação para a tensão térmica normal longitudinal atuante em uma barra ou

chapa longa submetida a uma distribuição de temperatura em seu plano. Esta equação é dada por:

$$\sigma_x = -\alpha ET + (1/A_v)\alpha E \int T dA_v + (y/I_v)\alpha E \int Ty dA_v \quad (2.23)$$

Nesta equação  $A_v$  representa a área da seção transversal da barra e  $I_v$  representa o momento de inércia da área da seção transversal da barra. Mostra-se que esta solução é válida para o caso em que não há gradientes acentuados de temperatura na direção longitudinal da chapa ou barra. Além disto, mostra-se que esta expressão é obtida em termos de uma expressão mais geral, dada em termos adimensionais, onde se consideram derivadas de ordens maiores do campo de temperatura com relação à variável  $x$  (direção longitudinal). A expressão geral é dada através da seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\alpha E} = & \left\{ -T + \oint T d\eta_c + 12\eta_c \oint T\eta_c d\eta_c \right\} + \\ & \beta_c^2 \frac{\partial^2}{\partial \left(\frac{x}{L_v}\right)^2} \left\{ 4\eta_c \int T d\eta_c - 4 \int T\eta_c d\eta_c - \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{6}\right) (1 + 12\eta_c + 24\eta_c^2) \oint T d\eta_c + \right. \\ & \left. \left(\frac{2}{5}\right) (5 + 21\eta_c - 40\eta_c^3) \oint T\eta_c d\eta_c - 2 \oint T\eta_c^2 d\eta_c - 8\eta_c \oint T\eta_c^3 d\eta_c \right\} + \\ & \{ \text{termos contendo derivadas de ordens superiores} \} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nesta equação  $L_v$  representa o comprimento da barra,  $\beta_c$  representa a razão entre a altura e o comprimento da barra e  $\eta_c$  representa a coordenada adimensional na direção da altura da barra. Mostra-se que a Eq. (2.23) retorna valor nulo para o caso da distribuição de temperatura ser independente da coordenada  $y$  (direção transversal) e para o caso em que o campo de temperatura é linear com relação à variável  $y$ , ou seja:

$$T = T_1(x) + yT_2(x) \quad (2.25)$$

Neste caso, deve-se considerar o segundo termo da equação geral que agora será o termo predominante. Este termo é proporcional a  $\frac{\partial^2}{\partial (x/L_v)^2}$  na Eq. (2.24). Na segunda parte do

trabalho apresenta-se um método de solução passo a passo de equações diferenciais parciais lineares para resolver problemas de condução de calor e problemas termoelásticos. As equações apresentadas anteriormente (Eqs. (2.23) e (2.24)) são obtidas através deste método e são apresentadas em Boley e Weiner (1960). O método proposto consiste em ordenar a equação diferencial em estudo na seguinte forma:

$$(D_{YT} + D_{XYT} + D_{XT})z_d = F(x, y, t) \quad (2.26)$$

Na Eq. (2.26) o termo  $z_d$  representa a variável dependente e a parcela  $(D_{YT} + D_{XYT} + D_{XT})$  representa o operador diferencial parcial linear. Divide-se o operador de tal modo que a parcela  $D_{YT}$  não possua derivadas com relação à  $x$ ,  $D_{XT}$  não possua derivadas com relação à  $y$  e  $D_{XYT}$  possua apenas derivadas cruzadas com relação à  $x$  e  $y$ . Obtém-se então a solução para a equação diferencial acima (Eq. (2.26)) em termos de uma série infinita, ou seja:

$$z_d(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} z_{di}(x, y, t) \quad (2.27)$$

São assumidas condições iniciais e de contorno, com relação à variável  $z_d$ , de tal forma que, substituindo-se a Eq. (2.27) na Eq. (2.26), obtém-se a seguinte expressão:

$$(D_{YT} + D_{XYT} + D_{XT})(z_{d0}) + D_{YT}(z_{d1}) + \sum_{i=2}^{\infty} [D_{YT}(z_{di}) + (D_{XYT} + D_{XT})z_{d(i-1)}] = F(x, y, t) \quad (2.28)$$

Mostra-se que a equação diferencial acima (Eq. (2.28)) é satisfeita se a escolha das funções  $z_{di}$  for feita de tal forma que as seguintes relações sejam atendidas:

$$D_{YT}z_{d1} = F_1(x, y, t) \quad (2.29)$$

$$D_{YT}(z_{di}) = -(D_{XYT} + D_{XT})z_{d(i-1)} + F_i(x, y, t), \quad i = 2, 3, 4 \dots \quad (2.30)$$

$$(D_{YT} + D_{XYT} + D_{XT})z_{d0} = 0 \quad (2.31)$$

Mostra-se que outra maneira possível de se escolher as funções  $z_{di}$  é de tal forma que elas satisfaçam as seguintes relações:

$$D_{YT}z_{d1} = F_1(x, y, t) \quad (2.32)$$

$$D_{YT}z_{d2} = D_{XYT}z_{d1} + F_2(x, y, t) \quad (2.33)$$

$$D_{YT}z_{di} = -D_{XYT}z_{d(i-1)} - D_{XT}z_{d(i-2)} + F_i(x, y, t), \quad i = 3, 4, 5 \dots \quad (2.34)$$

$$(D_{YT} + D_{XYT} + D_{XT})z_{d0} = 0 \quad (2.35)$$

Onde a seguinte relação é válida:

$$F(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x, y, t) \quad (2.36)$$

Mostra-se ainda que a aplicação desta solução para o caso de uma chapa ou barra livre de carregamentos externos e de dimensões genéricas, satisfazendo exatamente as condições de contorno, é bastante trabalhosa. Contudo, a solução para chapas longas ou barras longas pode ser obtida de maneira aproximada. Deste modo, como exemplo, determina-se inicialmente o campo de temperatura em uma chapa longa ou barra longa. Nesta chapa ou barra, o calor é transmitido em um de seus lados maiores a uma determinada razão, mantendo-se os outros lados isolados termicamente. A partir do campo de temperatura, encontram-se as tensões térmicas pela utilização das equações dadas na primeira parte do trabalho (Eqs. (2.23) e (2.24)) e que são apresentadas em Boley e Weiner (1960). A partir das tensões, determinam-se os deslocamentos atuantes na barra. Vale ressaltar que se deve ter cuidado na aplicação deste método, pois gradientes de temperatura mais acentuados na direção longitudinal podem gerar resultados errôneos quando o método não é aplicado de maneira correta.

Uma solução alternativa às soluções apresentadas por Boley (1956) e Boley e Weiner (1960) é desenvolvida no trabalho apresentado por Wah (1966). Neste trabalho são calculadas as tensões e deslocamentos térmicos em uma barra livre de espessura pequena que é submetida a uma distribuição de temperatura arbitrária em seu plano. Resolve-se o problema em termos da função de tensão em barras cujo comprimento seja muito maior que as dimensões da seção transversal. A formulação proposta requer ainda que as derivadas segundas do campo de temperatura tenham apenas um número finito de descontinuidades para que seja possível a sua expansão em séries de Fourier. Deste modo, se expressa o Laplaciano do campo de temperatura em termos de uma série dupla infinita de Fourier. Considera-se ainda a função de tensão como a soma de duas outras funções, sendo a primeira função uma solução particular

da equação diferencial do problema termoelástico na forma de uma série dupla de Fourier. A partir da substituição desta função, juntamente com o Laplaciano do campo de temperatura, na equação diferencial, encontram-se os coeficientes incógnitos da série pertencente à primeira função. A outra função é assumida como sendo uma função biharmônica em forma de uma série simples, cujos coeficientes são encontrados em termos das condições de contorno de bordas livres e de tensões térmicas auto-equilibradas atuantes na barra. Com a obtenção das funções componentes da função de tensão, determinam-se as tensões e deslocamentos no plano da barra. Compara-se este método com o de Boley e Weiner (1960) para uma distribuição de temperatura ao longo do comprimento mostrando que as duas soluções apresentam concordância satisfatória em pontos distantes do centro da barra. Ele ainda conclui que a solução de Boley e Weiner (1960) é particularmente mais atrativa quando a distribuição de temperatura pode ser expressa na forma de um polinômio.

Nos trabalhos apresentados por Born e Horvay (1955) e Horvay (1954) são calculadas as tensões e deformações térmicas em uma tira retangular que é submetida a uma distribuição de temperatura longitudinal. No trabalho apresentado por Horvay (1954) é considerada uma tira retangular submetida a uma distribuição de temperatura do tipo degrau que se encontra afastada do fim da tira. No trabalho apresentado por Born e Horvay (1955) dá-se continuação ao trabalho realizado por Horvay (1954). No trabalho de Born e Horvay (1955) são desenvolvidas soluções para o caso de uma distribuição de temperatura do tipo degrau inclinado e para o caso onde há uma parada do gradiente de temperatura. As soluções são desenvolvidas para os casos onde as distribuições de temperaturas ocorrem próximas do fim da tira e para regiões afastadas do final da tira retangular. Nos dois trabalhos os problemas são resolvidos em termos de integrais de Fourier, em termos de expansões em autofunções biharmônicas e em termos de expansão em funções auto-equilibradas. Este último método é desenvolvido em Horvay (1953). No método em termos de integrais de Fourier, a função de tensão de Airy e, por conseguinte, os campos de tensão e de deslocamentos, são expressos em termos de integrais de Fourier. Estas integrais são avaliadas numericamente mostrando bons resultados para valores pequenos de  $x$  (coordenada longitudinal da tira retangular). No segundo método a função de tensão de Airy é expressa em termos de expansões em autofunções biharmônicas. Deste modo, a partir da função de tensão é determinado o campo de tensão. Mostra-se que este segundo método é preferível com relação ao primeiro para valores de  $x$  moderadamente grandes. No terceiro método a função de tensão de Airy é expressa em termos de expansão em funções auto-equilibradas. Mostra-se que este método é

preferível com relação ao anterior pelo fato de cada termo da série satisfazer individualmente as condições de contorno do problema e pelo fato das funções auto-equilibradas formarem um conjunto ortogonal. Mostra-se também que o último método é preferível com relação ao primeiro pelo fato de apresentar menor trabalho numérico para se chegar aos mesmos resultados. Vale lembrar que os métodos desenvolvidos neste trabalho são limitados a distribuições longitudinais de temperatura. Em Born e Horvay (1955) os três métodos são utilizados para se determinar os campos de tensão e de deslocamentos na tira. Conclui-se que, a partir destas soluções básicas, chega-se a soluções onde o campo de temperatura toma uma forma mais complexa utilizando-se a superposição. Os problemas em questão são bem específicos, porém mostra-se que a formulação adotada na resolução deles proporciona a obtenção de ferramental para a análise de problemas mais genéricos.

Boley e Weiner (1960) determinam as tensões térmicas atuantes em uma barra de seção transversal retangular que é completamente livre. Além disto, esta barra é submetida a uma distribuição de temperatura ao longo da altura da seção transversal. Esta solução também se aplica a chapas longas e tiras retangulares. São consideradas as seguintes hipóteses básicas simplificadoras:

- A barra se encontra em EPT por apresentar espessura muito pequena.
- A barra apresenta o comprimento muito maior que a altura da seção, logo as tensões na direção transversal da barra podem ser desprezadas. Deste modo, a componente de tensão normal atuante na direção longitudinal será a única componente de tensão atuante na barra.
- Pelo fato da distribuição de temperatura ser função apenas da coordenada transversal, assume-se que a componente de tensão longitudinal também seja função apenas da coordenada transversal.

Denotando-se por  $\sigma_x$  a componente de tensão normal atuante na direção longitudinal e de  $y$  a coordenada ao longo da altura da seção da barra, mostra-se que a equação diferencial do problema termoelástico fica reduzida à seguinte expressão:

$$\frac{d^2}{dy^2}(\sigma_x + \alpha ET) = 0 \quad (2.37)$$



Mostra-se ainda que a Eq. (2.37) tem como solução geral a seguinte expressão:

$$\sigma_x = -\alpha ET + C_1 y + C_2 \quad (2.38)$$

A obtenção das constantes da Eq. (2.38) é realizada através da consideração de tensão térmica auto-equilibrada atuante na barra, ou seja, os esforços resultantes são nulos na seção transversal da barra. A partir desta consideração, chega-se à expressão final para a componente de tensão  $\sigma_x$ , ou seja:

$$\sigma_x = \alpha E \left\{ -T + \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T dy + \frac{3y}{2h^3} \int_{-h}^h T y dy \right\} \quad (2.39)$$

Na expressão acima  $2h$  representa a altura da seção da barra e a origem do sistema de coordenadas se encontra no centro da barra. A solução acima também foi obtida por Noda et al. (2003) e Timoshenko e Goodier (1951). Nestes trabalhos são utilizadas outras metodologias para se chegar à solução.

Por fim, destaca-se o trabalho de Vecci (1995). Neste trabalho é utilizada a solução de Boley e Weiner (1960) para a determinação dos campos de tensão e deformação térmicas em chapas que possuem comprimento muito maior que a largura. Considera-se uma distribuição polinomial generalizada de temperatura ao longo da largura da chapa e os campos de tensão e deformação térmicas são obtidos a partir dos coeficientes polinomiais do campo de temperatura. O mesmo procedimento adotado por Vecci (1995) foi também empregado por Noda et al. (2003) para a determinação das tensões e deslocamentos térmicos em barras.

# 3

## APROXIMAÇÃO POLINOMIAL

### 3.1 - Introdução

Neste capítulo é descrito o procedimento empregado na determinação das funções polinomiais que serão utilizadas como funções de aproximação para os campos de temperatura não lineares. As chapas que serão descritas através do capítulo 4 estarão sujeitas a estes campos de temperatura. As funções polinomiais utilizadas na aproximação serão obtidas através do método dos mínimos quadrados através da combinação linear dos polinômios ortogonais de Legendre.

### 3.2 - Método dos Mínimos Quadrados

O método dos mínimos quadrados será utilizado na obtenção das funções polinomiais de aproximação para os campos de temperatura não lineares atuantes nas chapas descritas através do capítulo 4. Este método é empregado pela sua grande utilização em problemas práticos e pela sua grande simplicidade na determinação dos coeficientes incógnitos (CUNHA, 2000). Para a demonstração do método dos mínimos quadrados, considera-se inicialmente uma função  $f(y)$  que deve ser aproximada por uma função de aproximação  $g(y)$ . Pode-se dizer

que a função original  $f(y)$  está sendo aproximada por uma função  $g(y)$  do tipo (CUNHA, 2000):

$$f(y) \cong g(y) = c_1\varphi'_1(y) + c_2\varphi'_2(y) + \dots + c_n\varphi'_n(y) \quad (3.1)$$

Na Eq. (3.1) as funções  $\varphi'_j(y)$  são preestabelecidas (CUNHA, 2000). Deste modo, pode-se dizer que o método dos mínimos quadrados tem como objetivo a obtenção dos coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  da função  $g(y)$  que minimiza o resíduo quadrático  $r^2$  no intervalo de aproximação  $[a, b]$ . Sendo assim, considerando que a função  $f(y)$  é contínua no intervalo  $[a, b]$ , o resíduo quadrático da aproximação será dado por:

$$\int_a^b r^2(y)dy = \int_a^b [f(y) - g(y)]^2 dy \quad (3.2)$$

Substituindo o valor de  $g(y)$  na Eq. (3.2), tem-se a seguinte relação:

$$\int_a^b r^2(y)dy = \int_a^b [f(y) - (c_1\varphi'_1(y) + c_2\varphi'_2(y) + \dots + c_n\varphi'_n(y))]^2 dy \quad (3.3)$$

Para demonstrar o método de uma forma mais geral, introduz-se a notação de produto escalar através das seguintes definições (CUNHA, 2000):

$$\langle f, g \rangle = \langle f(y), g(y) \rangle = \int_a^b f(y)g(y)dy \quad (3.4)$$

$$\langle r, r \rangle = \langle r(y), r(y) \rangle = \int_a^b r(y)^2 dy \quad (3.5)$$

O objetivo do método é a minimização do erro quadrático que agora pode ser escrito da seguinte maneira (CUNHA, 2000):

$$M(c_1, c_2, \dots, c_n) = \langle r, r \rangle = \langle f(y) - c_1\varphi'_1(y) - \dots - c_n\varphi'_n(y), f(y) - c_1\varphi'_1(y) - \dots - c_n\varphi'_n(y) \rangle \quad (3.6)$$

Na Eq. (3.6) o termo  $M(c_1, c_2, \dots, c_n)$  representa a função erro quadrático como função dos coeficientes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . As condições necessárias de pontos críticos são obtidas a partir da derivação da função erro quadrático com relação a cada um dos coeficientes  $c_j$ . A condição de ponto crítico leva ao ponto de mínimo pelo fato de se estar minimizando uma função que é quadrática em suas incógnitas (CUNHA, 2000). Deste modo, a derivação da função erro quadrático resulta na seguinte condição (CUNHA, 2000):

$$\frac{\partial M}{\partial c_j} = -2 \langle f(y) - c_1 \varphi'_1(y) - \dots - c_n \varphi'_n(y), \varphi'_j(y) \rangle = 0 \quad (3.7)$$

$$j = 1:n$$

A partir da distribuição do produto escalar, encontra-se a seguinte equação genérica:

$$c_1 \langle \varphi'_1, \varphi'_j \rangle + c_2 \langle \varphi'_2, \varphi'_j \rangle + \dots + c_n \langle \varphi'_n, \varphi'_j \rangle = \langle f, \varphi'_j \rangle \quad (3.8)$$

$$j = 1:n$$

Resolvendo a equação acima para os valores de  $j$  de 1 até  $n$ , encontra-se o sistema normal que é dado através da seguinte relação (CUNHA, 2000):

$$\begin{cases} c_1 \langle \varphi'_1, \varphi'_1 \rangle + c_2 \langle \varphi'_2, \varphi'_1 \rangle + \dots + c_n \langle \varphi'_n, \varphi'_1 \rangle = \langle f, \varphi'_1 \rangle \\ c_1 \langle \varphi'_1, \varphi'_2 \rangle + c_2 \langle \varphi'_2, \varphi'_2 \rangle + \dots + c_n \langle \varphi'_n, \varphi'_2 \rangle = \langle f, \varphi'_2 \rangle \\ \vdots \\ c_1 \langle \varphi'_1, \varphi'_n \rangle + c_2 \langle \varphi'_2, \varphi'_n \rangle + \dots + c_n \langle \varphi'_n, \varphi'_n \rangle = \langle f, \varphi'_n \rangle \end{cases} \quad (3.9)$$

A partir da resolução do sistema normal são determinados os parâmetros  $c_j$  que definem a melhor aproximação para a função  $f(y)$ . Através da observação do sistema normal, pode-se observar que, sendo  $\langle \varphi'_i, \varphi'_j \rangle = \langle \varphi'_j, \varphi'_i \rangle$  quaisquer que sejam  $i$  e  $j$ , o sistema normal é simétrico (CUNHA, 2000). Também é observado que, se as funções  $\varphi'_j(y)$  forem linearmente independentes, é garantida a existência de uma única solução para o sistema. Esta conclusão é válida pelo fato da matriz das incógnitas do sistema normal ser positiva definida para este caso (CUNHA, 2000).

### 3.3 - Funções Ortogonais

Duas funções são ditas ortogonais no intervalo  $[a, b]$  se o produto escalar entre estas duas funções for nulo no intervalo  $[a, b]$ . O produto escalar das funções  $f_e(y)$  e  $g_e(y)$  no intervalo  $[a, b]$ , como mostrado anteriormente, é definido pela seguinte relação:

$$\langle f_e, g_e \rangle = \int_a^b f_e(y)g_e(y)dy \quad (3.10)$$

De uma forma mais geral, dadas duas funções definidas por  $g_n(y)$  e  $g_m(y)$ , pertencentes a uma família de funções definidas por  $g_k(y)$ , diz-se que as funções  $g_n(y)$  e  $g_m(y)$  são ortogonais com relação à função peso  $w(y)$  no intervalo  $[a, b]$  se as seguintes relações forem válidas (CARNAHAN et al., 1969):

$$\int_a^b w(y)g_n(y)g_m(y)dy = 0, \quad n \neq m \quad (3.11)$$

$$\int_a^b w(y)[g_n(y)]^2 dy = c(n) \neq 0 \quad (3.12)$$

Sendo que, em geral,  $c$  depende de  $n$  (CARNAHAN et al., 1969). A família de funções  $\{g_k(y)\}$  constitui um conjunto de funções ortogonais se as relações acima forem válidas para todo  $n$  (CARNAHAN et al., 1969). A família de funções definidas por  $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$  não satisfaz as Eqs. (3.11) e (3.12) e, portanto, ela não constitui uma família de funções ortogonais. Contudo, existe um grande número de famílias de polinômios que possuem a propriedade de ortogonalidade, como os polinômios de Legendre, Laguerre, Chebyshev e Hermite (CARNAHAN et al., 1969). Os polinômios ortogonais possuem importantes propriedades. Duas de suas mais importantes propriedades podem ser dadas por (CUNHA, 2000):

**Propriedade 1:** Se  $P_k(y)$  for pertencente a uma família de polinômios ortogonais no intervalo  $[a, b]$ , então  $P_k(y)$  possui  $k_r$  raízes reais distintas no intervalo  $[a, b]$  (CUNHA, 2000).

**Propriedade 2:** Os polinômios ortogonais podem ser obtidos através de relações recursivas (CUNHA, 2000). Deste modo, se os polinômios  $\{P_0(y), P_1(y), \dots, P_n(y)\}$  formarem uma família de polinômios ortogonais no intervalo  $[a, b]$  com relação ao peso  $w(y)$ , pode-se escrever (BURDEN e FAIRES, 2010):

$$P_0(y) \equiv 1 \quad (3.13)$$

$$P_1(y) = y - B_1 \quad (3.14)$$

As Eqs. (3.13) e (3.14) são válidas para cada  $y$  no intervalo  $[a, b]$ . O termo  $B_1$  pertencente à Eq. (3.14) é dado através da seguinte relação:

$$B_1 = \frac{\int_a^b yw(y)[P_0(y)]^2 dy}{\int_a^b w(y)[P_0(y)]^2 dy} \quad (3.15)$$

Para valores de  $k \geq 2$ , tem-se a seguinte relação:

$$P_k(y) = (y - B_k)P_{k-1}(y) - C_k P_{k-2}(y) \quad (3.16)$$

A Eq. (3.16) é válida para cada  $y$  no intervalo  $[a, b]$ . Os valores dos termos  $B_k$  e  $C_k$ , pertencentes à Eq. (3.16), são dados através das seguintes relações:

$$B_k = \frac{\int_a^b yw(y)[P_{k-1}(y)]^2 dy}{\int_a^b w(y)[P_{k-1}(y)]^2 dy} \quad (3.17)$$

$$C_k = \frac{\int_a^b yw(y)P_{k-1}(y)P_{k-2}(y)dy}{\int_a^b w(y)[P_{k-2}(y)]^2 dy} \quad (3.18)$$

A Propriedade 2 se trata de um procedimento recursivo para a construção de um conjunto de polinômios ortogonais (BURDEN e FAIRES, 2010).

### 3.3.1 - Polinômios Ortogonais de Legendre

Os polinômios de Legendre são uma classe de polinômios que são ortogonais no intervalo  $[-1,1]$  com relação à função peso  $w(y)$  que é definida por:

$$w(y) \equiv 1 \tag{3.19}$$

Ou seja, os polinômios de Legendre satisfazem as seguintes relações:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(y)P_m(y)dy = 0, \quad n \neq m \tag{3.20}$$

$$\int_{-1}^{+1} [P_n(y)]^2 dy = c(n) \neq 0 \tag{3.21}$$

Os polinômios ortogonais de Legendre foram escolhidos para efetuar a aproximação polinomial nos problemas analisados neste trabalho. Eles foram escolhidos pelo fato de formarem uma família de polinômios ortogonais, o que representa uma vantagem em termos numéricos quando aplicado o método dos mínimos quadrados, ou seja, na aplicação deste método a matriz a ser resolvida é diagonal. Além disto, estes polinômios possuem peso constante e unitário, ou seja, o grau de aproximação é o mesmo ao longo do intervalo de aproximação (BURDEN e FAIRES, 2010).

A família de polinômios de Legendre pode ser obtida a partir da relação recursiva geral que é dada através da propriedade 2. Pela definição clássica dos polinômios de Legendre, tem-se que o polinômio  $P_n(y)$  deve ser igual a 1 para  $n = 0$  (BURDEN e FAIRES, 2010). Para  $n \geq 2$ , a relação recursiva é utilizada para gerar o restante dos polinômios (BURDEN e FAIRES, 2010). Deste modo, tem-se que:

$$P_0(y) \equiv 1 \tag{3.22}$$

O valor de  $B_1$  é dado por:

$$B_1 = \frac{\int_a^b yw(y)[P_0(y)]^2 dy}{\int_a^b w(y)[P_0(y)]^2 dy} = \frac{\int_{-1}^1 y dy}{\int_{-1}^1 dy} = 0 \quad (3.23)$$

Sendo o valor de  $P_1(y)$  dado através da seguinte relação:

$$P_1(y) = (y - B_1)P_0(y) = y \quad (3.24)$$

Os valores de  $B_2$  e  $C_2$  podem ser calculados através das seguintes relações:

$$B_2 = \frac{\int_{-1}^1 y^3 dy}{\int_{-1}^1 y^2 dy} = 0 \quad (3.25)$$

$$C_2 = \frac{\int_{-1}^1 y^2 dy}{\int_{-1}^1 1 dy} = \frac{1}{3} \quad (3.26)$$

Deste modo, mostra-se que o valor de  $P_2(y)$  será (BURDEN e FAIRES, 2010):

$$P_2(y) = (y - B_2)P_1(y) - C_2P_0(y) = (y - 0)y - \frac{1}{3} \cdot 1 = y^2 - \frac{1}{3} \quad (3.27)$$

Efetuando-se procedimento análogo para  $P_3(y)$ ,  $P_4(y)$ , ... ,  $P_n(y)$ , pode-se encontrar os primeiros polinômios de Legendre. Os polinômios de Legendre obtidos foram multiplicados por uma constante para a realização de uma padronização de modo que os valores dos polinômios em  $y = 1$  fossem sempre igual 1. Desta forma, os cinco primeiros polinômios de Legendre são dados por:

$$P_0(y) = 1 \quad (3.28)$$

$$P_1(y) = y \quad (3.29)$$

$$P_2(y) = \frac{1}{2}(3y^2 - 1) \quad (3.30)$$

$$P_3(y) = \frac{1}{2}(5y^3 - 3y) \quad (3.31)$$

$$P_4(y) = \frac{1}{8}(35y^4 - 30y^2 + 3) \quad (3.32)$$



### 3.3.2 - Método dos Mínimos Quadrados com Polinômios Ortogonais

A aplicação do método dos mínimos quadrados a uma função  $f(y)$  que deve ser aproximada por uma função  $g(y)$  que possui a forma da Eq. (3.1) resulta no sistema que é dado através da Eq. (3.9). Se o conjunto de funções  $\varphi'_1(y), \varphi'_2(y), \dots, \varphi'_n(y)$  na Eq. (3.1) caracterizar uma família de funções ortogonais no intervalo  $[a, b]$ , ou seja:

$$\langle \varphi'_i, \varphi'_j \rangle = \int_a^b \varphi'_i(y)\varphi'_j(y)dy = 0, \quad i \neq j \quad (3.33)$$

O sistema dado através da Eq. (3.9) se reduz ao seguinte sistema simplificado:

$$\begin{cases} c_1 \langle \varphi'_1, \varphi'_1 \rangle & = \langle f, \varphi'_1 \rangle \\ c_2 \langle \varphi'_2, \varphi'_2 \rangle & = \langle f, \varphi'_2 \rangle \\ \vdots & \vdots \\ c_n \langle \varphi'_n, \varphi'_n \rangle & = \langle f, \varphi'_n \rangle \end{cases} \quad (3.34)$$

Ou seja, o sistema será diagonal o que caracteriza uma vantagem em termos de avaliação numérica. Deste modo, os coeficientes  $c_j$  podem ser calculados diretamente através da seguinte relação (CUNHA, 2000):

$$c_j = \frac{\langle f, \varphi'_j \rangle}{\langle \varphi'_j, \varphi'_j \rangle}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.35)$$

# 4

## TENSÕES TÉRMICAS AUTO-EQUILIBRADAS

### 4.1 - Introdução

Neste capítulo serão demonstradas as soluções analíticas, em termos de polinômios, para os campos de tensão e deformação térmicas atuantes em chapas planas retangulares isotrópicas que são livres de carregamentos externos em suas bordas. Serão analisadas duas configurações distintas. Na primeira configuração assume-se que a chapa seja solicitada em EPT e na segunda assume-se que a chapa seja solicitada no estado tridimensional.

### 4.2 - Tensões Térmicas Auto-Equilibradas em Chapas Planas Retangulares Isotrópicas em EPT

Nesta seção serão desenvolvidas expressões para os campos de tensão e deformação térmicas atuantes em uma chapa plana retangular longa, fina e isotrópica que é solicitada em EPT. Esta chapa é submetida a uma distribuição de temperatura polinomial ao longo de sua largura e, além disto, a chapa é livre de carregamentos externos em suas bordas.

Para chegar às expressões para os campos de tensão e deformação, utiliza-se a metodologia proposta por Vecchi (1995) através da qual algumas hipóteses básicas simplificadoras são aplicadas à equação de compatibilidade em termos das tensões para o EPT. A partir destas simplificações, chega-se à solução obtida por Boley e Weiner (1960). A partir desta solução apresentada por Vecchi (1995), desenvolvem-se expressões em termos de polinômios para os campos de tensão e deformação térmicas.

Inicialmente, considera-se uma chapa plana retangular longa, fina e isotrópica como mostrado na Fig. 4.1.

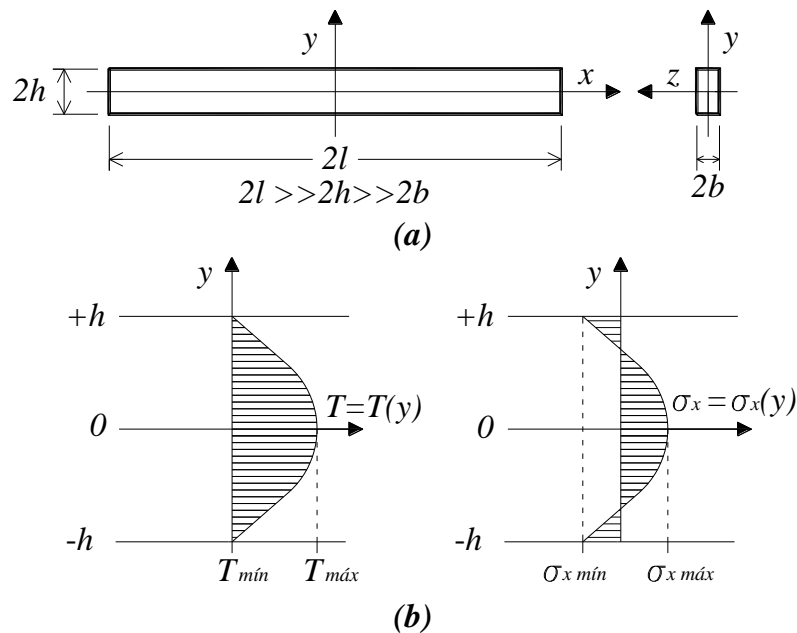


Figura 4.1 - (a) Chapa Plana Retangular Isotrópica em EPT, (b) Distribuições Típicas de Temperatura e Tensão

Esta chapa possui espessura muito pequena (dimensão  $2b$  na Fig. 4.1) com uma distribuição de temperatura ao longo de sua largura, portanto, assume-se o EPT. Além disto, considera-se que o comprimento da chapa (dimensão  $2l$ ) seja muito maior que a sua largura (dimensão  $2b$ ). Os campos de tensão e deformação térmicas atuantes nesta chapa são obtidos a partir da solução de Boley e Weiner (1960). Esta solução foi obtida a partir da equação de compatibilidade em termos das tensões (Equação de Beltrami-Mitchell) para o EPT. Esta equação é representada pela seguinte expressão (VECCHI, 1995):

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu)\nabla \cdot \mathbf{F} - E\alpha\nabla^2 T \quad (4.1)$$

Na ausência de forças de corpo atuantes na chapa, a Eq. (4.1) fica reduzida à seguinte expressão:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -E\alpha\nabla^2 T \quad (4.2)$$

As hipóteses básicas simplificadoras adotadas por Vecci (1995), para chegar à solução de Boley e Weiner (1960), são descritas a seguir.

Hipóteses Básicas:

1. A distribuição de temperatura na chapa se dá ao longo da direção de  $y$  e é constante nas direções de  $x$  e  $z$ . Ou seja:

$$T = T(y) \quad (4.3)$$

2. No contorno, nas bordas  $y = \pm h$ , a chapa deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y &= 0 \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_y n_y &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Onde  $n_x = 0$  e  $n_y = \pm 1$ . Assim, deve-se ter  $\sigma_y = 0$  e  $\sigma_{xy} = 0$  no contorno. Desta forma, estende-se a hipótese de que  $\sigma_y = \sigma_{xy} = 0$  para pontos afastados das bordas livres em  $x = \pm l$ . Esta consideração é válida pelo fato do comprimento da chapa ser muito maior que a largura.

3. No contorno, nas bordas  $x = \pm l$ , a condição de contorno é relaxada, admitindo-se que a componente de tensão  $\sigma_x$  seja auto-equilibrada, ou seja, os esforços resultantes são nulos na seção transversal da chapa pelo fato de não haver carregamentos externos nas bordas da chapa. Deste modo, as seguintes relações devem ser satisfeitas na seção transversal da chapa:

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x(2b)dy = \int_{-h}^{+h} \sigma_x dA = 0 \quad (4.5)$$

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x y(2b)dy = \int_{-h}^{+h} \sigma_x y dA = 0 \quad (4.6)$$

4. Admite-se que a componente de tensão  $\sigma_x$  seja função somente da coordenada  $y$ , ou seja:

$$\sigma_x = \sigma_x(y) \quad (4.7)$$

5. O material da chapa é isotrópico e homogêneo e suas propriedades não variam com a temperatura, isto é, as variações de temperatura são suficientemente moderadas.

#### 4.2.1 - Determinação da Componente de Tensão $\sigma_x$

Pela consideração da hipótese 2, a componente de tensão  $\sigma_y$  é nula. Assim, reescreve-se a Eq. (4.2) na seguinte forma simplificada:

$$\nabla^2 \sigma_x = -E\alpha \nabla^2 T \quad (4.8)$$

Rearranjando-se os termos da Eq. (4.8), obtém-se a seguinte expressão:

$$\nabla^2 (\sigma_x + E\alpha T) = 0 \quad (4.9)$$

Aplicando-se o operador Laplaciano aos termos entre colchetes na equação acima, pode-se escrever a equação anterior como:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E\alpha T) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sigma_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (E\alpha T) = 0 \quad (4.10)$$

Pela consideração da hipótese 5, o material da chapa é homogêneo e, portanto, a equação anterior pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sigma_x + E\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} T + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sigma_x + E\alpha \frac{\partial^2}{\partial y^2} T = 0 \quad (4.11)$$

Pela consideração da hipótese 1, a distribuição de temperatura é função apenas da coordenada  $y$  e pela consideração da hipótese 4, admite-se que a componente de tensão  $\sigma_x$  seja função apenas da coordenada  $y$ . Desta forma, a equação anterior se reduz à seguinte expressão:

$$\frac{d^2}{dy^2} \sigma_x + E\alpha \frac{d^2}{dy^2} T = 0 \quad (4.12)$$

A Eq. (4.12) pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2}{dy^2} (\sigma_x + E\alpha T) = 0 \quad (4.13)$$

Integrando-se a equação acima sucessivamente com relação à variável  $y$ , obtém-se:

$$\sigma_x + E\alpha T = C_1 y + C_2 \quad (4.14)$$

A Eq. (4.14) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\sigma_x = -E\alpha T + C_1 y + C_2 \quad (4.15)$$

Esta equação foi obtida por Boley e Weiner (1960). A componente de tensão  $\sigma_x$  dada pela equação acima (Eq. (4.15)) é a componente de tensão térmica normal auto-equilibrada atuante na chapa. Esta é a única componente de tensão atuante na chapa. Esta solução (Eq. (4.15)) é válida para pontos distantes das bordas livres que são interceptadas pelo eixo  $x$ . Pelo princípio de Saint-Venant, pode-se dizer que a solução é válida para distâncias maiores ou iguais a  $2h$  (largura da chapa) das bordas livres em  $x = \pm l$ , para esta configuração de chapa, porque o campo de tensão apresenta-se bastante distorcido próximo a estas bordas.

No trabalho apresentado por Boley e Weiner (1960) mostra-se que as constantes  $C_1$  e  $C_2$  da Eq. (4.15) são obtidas a partir da consideração da hipótese 3, admitindo-se que a componente de tensão  $\sigma_x$  seja auto-equilibrada, ou seja, os esforços resultantes são nulos na seção

transversal da chapa. A Fig. 4.2 mostra a seção transversal da chapa, onde se destaca um elemento infinitesimal de força  $dF$  decorrente da componente de tensão  $\sigma_x$ .

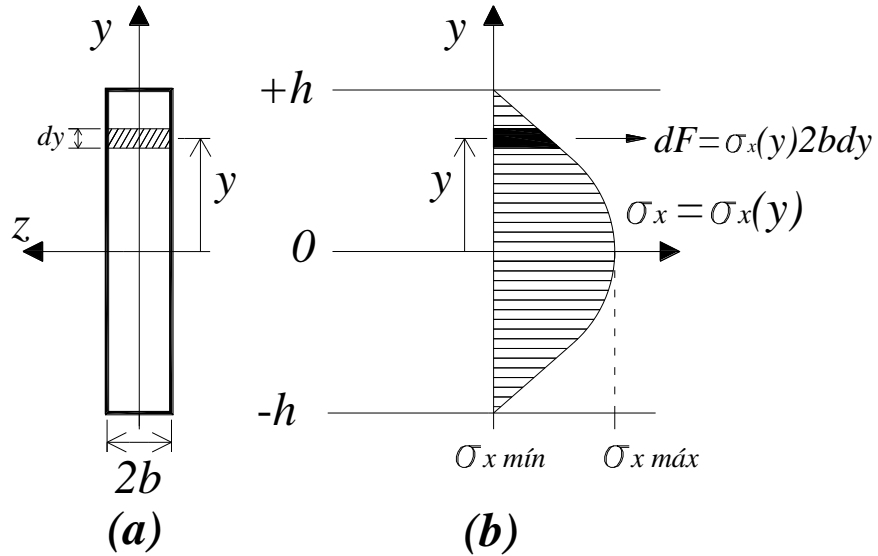


Figura 4.2 - (a) Seção Transversal da Chapa, (b) Elemento Infinitesimal de Força  $dF$

#### 4.2.2 - Determinação das Constantes

Para que a resultante de forças atuantes na seção transversal da chapa seja nula, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x dA = \int_{-h}^{+h} \sigma_x (2b) dy = 2b \int_{-h}^{+h} \sigma_x dy = 0$$

$$\int_{-h}^{+h} \sigma_x dy = 0 \quad (4.16)$$

Substituindo-se na Eq. (4.16) a expressão para a componente de tensão  $\sigma_x$  (Eq. (4.15)), obtém-se:

$$\int_{-h}^{+h} [-E\alpha T(y) + C_1 y + C_2] dy = 0 \quad (4.17)$$

Reordenando os termos na Eq. (4.17), obtém-se:

$$\int_{-h}^{+h} -E\alpha T(y)dy + \int_{-h}^{+h} C_1 y dy + \int_{-h}^{+h} C_2 dy = 0 \quad (4.18)$$

Na Eq. (4.18) as seguintes relações são válidas:

$$\int_{-h}^{+h} C_1 y dy = 0 \quad (4.19)$$

$$\int_{-h}^{+h} C_2 dy = 2C_2 h \quad (4.20)$$

Substituindo-se as Eqs. (4.19) e (4.20) na Eq. (4.18), encontra-se a seguinte relação:

$$\int_{-h}^{+h} -E\alpha T(y)dy + 2C_2 h = 0 \quad (4.21)$$

Para que a resultante de momentos atuantes na seção transversal da chapa seja nula, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{+h} \sigma_x y dA &= \int_{-h}^{+h} \sigma_x y (2b) dy = 2b \int_{-h}^{+h} \sigma_x y dy = 0 \\ \int_{-h}^{+h} \sigma_x y dy &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Substituindo-se na Eq. (4.22) a expressão para a componente de tensão  $\sigma_x$  (Eq. (4.15)), obtém-se:

$$\int_{-h}^{+h} [-E\alpha T(y) + C_1 y + C_2] y dy = 0 \quad (4.23)$$

Reordenando os termos na Eq. (4.23), obtém-se:

$$\int_{-h}^{+h} -E\alpha T(y) y dy + \int_{-h}^{+h} C_1 y^2 dy + \int_{-h}^{+h} C_2 y dy = 0 \quad (4.24)$$



Na Eq. (4.24) as seguintes relações são válidas:

$$\int_{-h}^{+h} C_1 y^2 dy = \frac{2}{3} C_1 h^3 \quad (4.25)$$

$$\int_{-h}^{+h} C_2 y dy = 0 \quad (4.26)$$

Substituindo-se as Eqs. (4.25) e (4.26) na Eq. (4.24), encontra-se a seguinte relação:

$$\int_{-h}^{+h} -E\alpha T(y)y dy + \frac{2}{3} C_1 h^3 = 0 \quad (4.27)$$

### 4.2.3 - Determinação do Tensor de Tensão Atuante na Chapa

A chapa da Fig. 4.1 encontra-se por hipótese em EPT, portanto, as componentes de tensão  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$  e  $\sigma_z$  são nulas. Ou seja:

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_z = 0 \quad (4.28)$$

Pela consideração da hipótese 2, as componentes de tensão na direção de  $y$  são nulas. Assim, pode-se escrever:

$$\sigma_y = \sigma_{xy} = 0 \quad (4.29)$$

Através da Eq. (4.15) obtém-se a componente de tensão  $\sigma_x$  expressa pela seguinte equação:

$$\sigma_x = -E\alpha T + C_1 y + C_2 \quad (4.30)$$

Portanto, o tensor de tensão atuante na chapa, para pontos distantes das bordas livres que são interceptadas pelo eixo  $x$ , é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

#### 4.2.4 - Determinação do Tensor de Deformação Atuante na Chapa

Sendo as componentes de tensão  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  nulas, tem-se que as componentes de deformação  $\varepsilon_{xz}$  e  $\varepsilon_{yz}$  também serão nulas. Portanto, com base na Lei de Hooke para o EPT, encontram-se as componentes de deformação:

$$\varepsilon_{xz} = \left( \frac{1 + \nu}{E} \right) \sigma_{xz} = 0 \quad (4.32)$$

$$\varepsilon_{yz} = \left( \frac{1 + \nu}{E} \right) \sigma_{yz} = 0 \quad (4.33)$$

Considerando-se a hipótese 2, a componente de tensão  $\sigma_{xy}$  é nula, portanto, a componente de deformação  $\varepsilon_{xy}$  também será nula, ou seja:

$$\varepsilon_{xy} = \left( \frac{1 + \nu}{E} \right) \sigma_{xy} = 0 \quad (4.34)$$

As componentes de deformação  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  são obtidas por meio da Lei de Hooke e expressas como:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \alpha T \quad (4.35)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \alpha T \quad (4.36)$$

Sendo a componente de tensão  $\sigma_y$  nula, as Eqs. (4.35) e (4.36) ficam da seguinte maneira:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha T \quad (4.37)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \alpha T \quad (4.38)$$

A componente de deformação  $\varepsilon_z$  fica então expressa como:

$$\varepsilon_z = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \alpha T \quad (4.39)$$

Como as componentes de tensão  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  são nulas, a Eq. (4.39) se reduz a:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \alpha T \quad (4.40)$$

Ou seja, as componentes de deformação  $\varepsilon_y$  (Eq. (4.38)) e  $\varepsilon_z$  (Eq. (4.40)) são iguais para este caso. Portanto, o tensor de deformação atuante na chapa, para pontos distantes das bordas livres que são interceptadas pelo eixo  $x$ , é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

#### 4.2.5 - Determinação da Componente de Tensão $\sigma_x$ e das Componentes de Deformação $\varepsilon_x$ , $\varepsilon_y$ e $\varepsilon_z$ para Diferentes Distribuições de Temperatura

A partir da Eq. (4.15) ou Eq. (4.30), para a componente de tensão  $\sigma_x$ , e das Eqs. (4.37), (4.38) e (4.40), para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ , determinaram-se as distribuições de tensão e deformação para diferentes perfis de temperatura atuantes na chapa. Inicialmente, são determinadas as constantes  $C_1$  e  $C_2$ . A partir destas constantes, determina-se a componente de tensão  $\sigma_x$  e, a partir desta, determinam-se as componentes de deformação. As soluções são mostradas a seguir.

##### 4.2.5.1 - Distribuição de Temperatura Constante: $T(y) = T_c$

Nesta seção é considerada uma distribuição de temperatura constante. Deste modo, a partir da Eq. (4.21), obtém-se a constante  $C_2$ :

$$\int_{-h}^{+h} -E\alpha T dy + 2C_2 h = -E\alpha T_c \int_{-h}^{+h} dy + 2C_2 h = 0$$

$$C_2 = E\alpha T_c \quad (4.42)$$

A partir da Eq. (4.27), obtém-se a constante  $C_1$ :

$$\int_{-h}^{+h} -E\alpha T y dy + \frac{2}{3} C_1 h^3 = -E\alpha T_c \int_{-h}^{+h} y dy + \frac{2}{3} C_1 h^3 = 0$$

$$C_1 = 0 \quad (4.43)$$

Substituindo-se as constantes  $C_1$  e  $C_2$  na Eq. (4.15) ou Eq. (4.30), encontra-se a componente de tensão  $\sigma_x$ , ou seja:

$$\sigma_x = -E\alpha T + C_1 y + C_2$$

$$\sigma_x = -E\alpha T_c + 0 + E\alpha T_c$$

$$\sigma_x = 0 \quad (4.44)$$

Substituindo-se a componente de tensão  $\sigma_x$  na Eq. (4.37), encontra-se a componente de deformação  $\varepsilon_x$ , ou seja:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha T$$

$$\varepsilon_x = 0 + \alpha T_c$$

$$\varepsilon_x = \alpha T_c \quad (4.45)$$

Substituindo-se a componente de tensão  $\sigma_x$  na Eq. (4.38), obtém-se a componente de deformação  $\varepsilon_y$ , ou seja:

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \alpha T$$

$$\varepsilon_y = 0 + \alpha T_c$$

$$\varepsilon_y = \alpha T_c \quad (4.46)$$

Substituindo-se a componente de tensão  $\sigma_x$  na Eq. (4.40), encontra-se a componente de deformação  $\varepsilon_z$ , ou seja:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \varepsilon_y \\ \varepsilon_z &= \alpha T_c\end{aligned}\tag{4.47}$$

#### 4.2.5.2 - Distribuição de Temperatura Linear: $T(y) = Ay$

Nesta seção é considerada uma distribuição de temperatura linear em  $y$ . Por procedimentos inteiramente análogos aos da seção anterior, obtém-se a constante  $C_2$ :

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{+h} -E\alpha T dy + 2C_2 h &= -E\alpha A \int_{-h}^{+h} y dy + 2C_2 h = 0 \\ C_2 &= 0\end{aligned}\tag{4.48}$$

A partir da Eq. (4.27), obtém-se a constante  $C_1$ :

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{+h} -E\alpha T y dy + \frac{2}{3} C_1 h^3 &= -E\alpha A \int_{-h}^{+h} y^2 dy + \frac{2}{3} C_1 h^3 = 0 \\ C_1 &= AE\alpha\end{aligned}\tag{4.49}$$

A partir das constantes  $C_1$  e  $C_2$ , determinam-se as componentes de tensão e deformação:

$$\sigma_x = 0\tag{4.50}$$

$$\varepsilon_x = A\alpha y\tag{4.51}$$

$$\varepsilon_y = A\alpha y\tag{4.52}$$

$$\varepsilon_z = A\alpha y\tag{4.53}$$

#### 4.2.5.3 - Distribuição de Temperatura Quadrática: $T(y) = By^2$

Nesta seção considera-se uma distribuição de temperatura quadrática em  $y$ . Por procedimentos inteiramente análogos aos das seções anteriores, obtém-se a constante  $C_2$ :

$$\int_{-h}^{+h} -E\alpha T dy + 2C_2 h = -E\alpha B \int_{-h}^{+h} y^2 dy + 2C_2 h = 0$$

$$C_2 = \frac{BE\alpha h^2}{3} \quad (4.54)$$

A partir da Eq. (4.27), obtém-se a constante  $C_1$ :

$$\int_{-h}^{+h} -E\alpha T y dy + \frac{2}{3} C_1 h^3 = -E\alpha B \int_{-h}^{+h} y^3 dy + \frac{2}{3} C_1 h^3 = 0$$

$$C_1 = 0 \quad (4.55)$$

A partir das constantes  $C_1$  e  $C_2$ , determinam-se as componentes de tensão e deformação:

$$\sigma_x = BE\alpha \left( \frac{h^2}{3} - y^2 \right) \quad (4.56)$$

$$\varepsilon_x = B\alpha \frac{h^2}{3} \quad (4.57)$$

$$\varepsilon_y = -\nu B\alpha \frac{h^2}{3} + (\nu + 1) B\alpha y^2 \quad (4.58)$$

$$\varepsilon_z = -\nu B\alpha \frac{h^2}{3} + (\nu + 1) B\alpha y^2 \quad (4.59)$$

#### 4.2.5.4 - Distribuição de Temperatura Cúbica: $T(y) = Cy^3$

Nesta seção considera-se uma distribuição de temperatura cúbica em  $y$ . Por procedimentos inteiramente análogos aos das seções anteriores, obtém-se a constante  $C_2$ :

$$\int_{-h}^{+h} -E\alpha T dy + 2C_2 h = -E\alpha C \int_{-h}^{+h} y^3 dy + 2C_2 h = 0$$

$$C_2 = 0 \quad (4.60)$$

A partir da Eq. (4.27), obtém-se a constante  $C_1$ :

$$\int_{-h}^{+h} -E\alpha T y dy + \frac{2}{3} C_1 h^3 = -E\alpha C \int_{-h}^{+h} y^4 dy + \frac{2}{3} C_1 h^3 = 0$$

$$C_1 = \frac{3}{5} CE\alpha h^2 \quad (4.61)$$

A partir das constantes  $C_1$  e  $C_2$ , determinam-se as componentes de tensão e deformação:

$$\sigma_x = CE\alpha \left( \frac{3}{5} h^2 y - y^3 \right) \quad (4.62)$$

$$\varepsilon_x = \frac{3}{5} C\alpha h^2 y \quad (4.63)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{3}{5} \nu C\alpha h^2 y + (\nu + 1) C\alpha y^3 \quad (4.64)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{3}{5} \nu C\alpha h^2 y + (\nu + 1) C\alpha y^3 \quad (4.65)$$

#### 4.2.5.5 - Distribuição de Temperatura Polinomial Generalizada

Generalizando-se os casos anteriores, considera-se uma distribuição de temperatura polinomial qualquer expressa como:

$$T = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n \quad (4.66)$$

A partir da Eq. (4.21), obtém-se a constante  $C_2$ :

$$\int_{-h}^{+h} -E\alpha (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n) dy + 2C_2 h = 0$$

$$-E\alpha \left( a_0 y + a_1 \frac{y^2}{2} + a_2 \frac{y^3}{3} + \dots + a_n \frac{y^{n+1}}{n+1} \right) \Big|_{-h}^{+h} + 2C_2 h = 0$$

$$\begin{aligned}
-E\alpha \left( 2a_0h + 2a_2 \frac{h^3}{3} + \dots + 2a_{2n} \frac{h^{2n+1}}{2n+1} \right) + 2C_2h &= 0 \\
C_2 &= E\alpha \left( a_0 + a_2 \frac{h^2}{3} + \dots + a_{2n} \frac{h^{2n}}{2n+1} \right)
\end{aligned} \tag{4.67}$$

A partir da Eq. (4.27), obtém-se a constante  $C_1$ :

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{+h} -E\alpha(a_0y + a_1y^2 + a_2y^3 + \dots + a_ny^{n+1})dy + \frac{2}{3}C_1h^3 &= \\
-E\alpha \left( a_0 \frac{y^2}{2} + a_1 \frac{y^3}{3} + a_2 \frac{y^4}{4} + \dots + a_n \frac{y^{n+2}}{n+2} \right) \Big|_{-h}^{+h} + \frac{2}{3}C_1h^3 &= 0 \\
-E\alpha \left( 2a_1 \frac{h^3}{3} + 2a_3 \frac{h^5}{5} + \dots + 2a_{2n+1} \frac{h^{2n+3}}{2n+3} \right) + \frac{2}{3}C_1h^3 &= 0 \\
C_1 &= 3E\alpha \left( \frac{a_1}{3} + a_3 \frac{h^2}{5} + \dots + a_{2n+1} \frac{h^{2n}}{2n+3} \right)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Assim, substituindo-se as constantes  $C_1$  e  $C_2$  na Eq. (4.15) ou Eq. (4.30), obtém-se a componente de tensão  $\sigma_x$ , ou seja:

$$\sigma_x = E\alpha \sum_{n=0}^N \left( \frac{a_{2n}h^{2n}}{2n+1} + \frac{3a_{2n+1}h^{2n}y}{2n+3} - a_ny^n \right) \tag{4.69}$$

Substituindo-se a componente de tensão  $\sigma_x$  na Eq. (4.37), obtém-se a componente de deformação  $\varepsilon_x$ :

$$\varepsilon_x = \alpha \sum_{n=0}^N \left( \frac{a_{2n}h^{2n}}{2n+1} + \frac{3a_{2n+1}h^{2n}y}{2n+3} \right) \tag{4.70}$$

Substituindo-se a componente de tensão  $\sigma_x$  na Eq. (4.38), obtém-se a componente de deformação  $\varepsilon_y$ , ou seja:

$$\varepsilon_y = -\nu\alpha \sum_{n=0}^N \left( \frac{a_{2n}h^{2n}}{2n+1} + \frac{3a_{2n+1}h^{2n}y}{2n+3} \right) + \alpha(\nu+1) \sum_{n=0}^N (a_ny^n) \tag{4.71}$$



Finalmente, obtém-se a componente de deformação  $\varepsilon_z$ :

$$\varepsilon_z = -\nu\alpha \sum_{n=0}^N \left( \frac{a_{2n}h^{2n}}{2n+1} + \frac{3a_{2n+1}h^{2n}y}{2n+3} \right) + \alpha(\nu+1) \sum_{n=0}^N (a_n y^n) \quad (4.72)$$

### 4.3 - Tensões Térmicas Auto-Equilibradas em Chapas Planas Retangulares Isotrópicas no Estado Tridimensional

Nesta seção serão desenvolvidas as soluções analíticas, em termos de polinômios, para os campos de tensão e deformação térmicas atuantes em chapas planas retangulares isotrópicas que são livres de carregamentos externos em suas bordas e que são submetidas a uma distribuição de temperatura polinomial ao longo de sua espessura. Deste modo, considera-se a chapa plana retangular isotrópica mostrada através da Fig. 4.3.

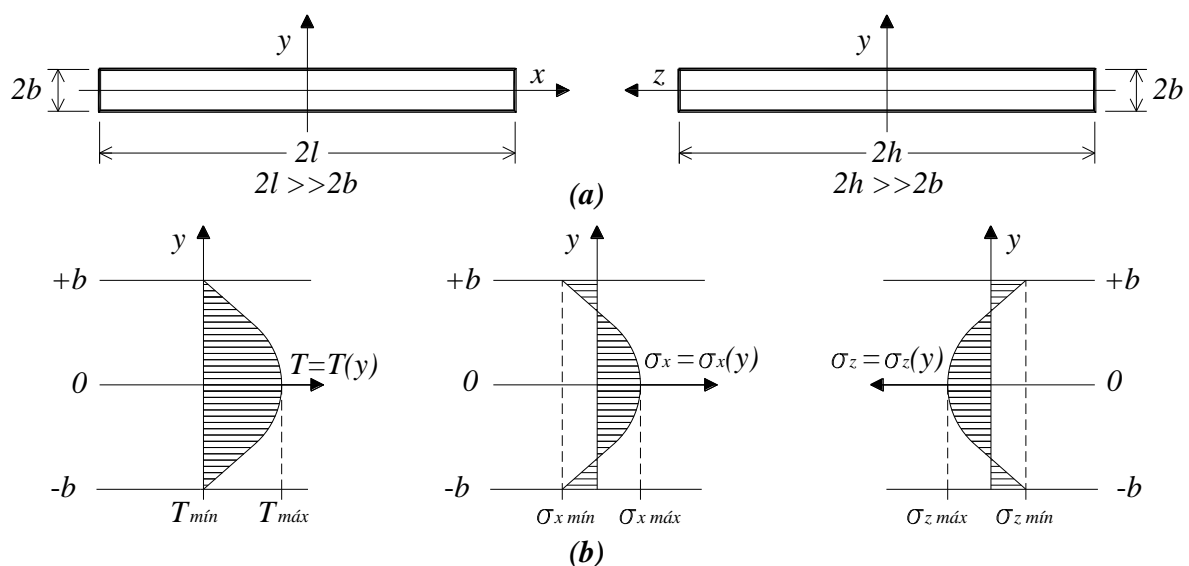


Figura 4.3 - (a) Chapa Plana Retangular Isotrópica no Estado Tridimensional, (b) Distribuições Típicas de Temperatura e Tensão

Esta chapa possui os lados (dimensões  $2l$  e  $2h$  na Fig. 4.3) muito maiores que a espessura (dimensão  $2b$ ) e, pelo fato de haver um carregamento térmico ao longo de sua espessura, considera-se que ela seja solicitada no estado tridimensional. Os campos de tensão e deformação térmicas atuantes nesta chapa são obtidos a partir da equação de compatibilidade

em termos das tensões (Equação de Beltrami-Michell) para o caso tridimensional. Esta equação é dada no formato indicial através da seguinte expressão (VECCI, 1995):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,kk} + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\sigma_{kk,ij} + \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)F_{k,k}\delta_{ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + \\ \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)T_{,kk}\delta_{ij} + \left(\frac{E\alpha}{1+\nu}\right)T_{,ij} = 0 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Na ausência de forças de corpo atuantes na chapa, a Eq. (4.73) fica reduzida à seguinte expressão:

$$\sigma_{ij,kk} + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\sigma_{kk,ij} + \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)T_{,kk}\delta_{ij} + \left(\frac{E\alpha}{1+\nu}\right)T_{,ij} = 0 \quad (4.74)$$

Expandindo-se a equação acima (Eq. (4.74)), encontram-se as seis componentes da equação de compatibilidade, ou seja:

$$\nabla^2\sigma_x + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} + \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\nabla^2 T + \left(\frac{E\alpha}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (4.75)$$

$$\nabla^2\sigma_y + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2} + \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\nabla^2 T + \left(\frac{E\alpha}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4.76)$$

$$\nabla^2\sigma_z + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} + \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\nabla^2 T + \left(\frac{E\alpha}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (4.77)$$

$$\nabla^2\sigma_{xy} + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 I_1}{\partial x\partial y} + \left(\frac{E\alpha}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y} = 0 \quad (4.78)$$

$$\nabla^2\sigma_{yz} + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 I_1}{\partial y\partial z} + \left(\frac{E\alpha}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial y\partial z} = 0 \quad (4.79)$$

$$\nabla^2\sigma_{zx} + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 I_1}{\partial z\partial x} + \left(\frac{E\alpha}{1+\nu}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial z\partial x} = 0 \quad (4.80)$$

Nas Eqs. (4.75), (4.76), (4.77), (4.78), (4.79) e (4.80) o termo  $I_1$  representa o primeiro invariante do tensor de tensão. Este termo é dado através da seguinte relação:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (4.81)$$

Para a solução da Eq. (4.74), ou das Eqs. (4.75), (4.76), (4.77), (4.78), (4.79) e (4.80), são assumidas hipóteses básicas simplificadoras análogas às adotadas por Vecci (1995) para a chapa em EPT. A partir destas hipóteses, chega-se à solução de Boley e Weiner (1960).

Hipóteses Básicas:

1. A distribuição de temperatura se dá ao longo da direção de  $y$  e é constante ao longo das direções de  $x$  e  $z$ . Ou seja:

$$T = T(y) \quad (4.82)$$

2. No contorno, nas bordas  $y = \pm b$ , devem ser satisfeitas as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z &= 0 \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \sigma_{yz} n_z &= 0 \\ \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_z n_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Tem-se  $n_x = 0$ ,  $n_y = \pm 1$  e  $n_z = 0$ . Assim, deve-se ter  $\sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0$  no contorno. Como a chapa possui as dimensões em  $x$  e  $z$  muito maiores que a dimensão em  $y$ , estende-se a hipótese de que  $\sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0$  para pontos afastados das bordas livres que são interceptadas pelos eixos  $x$  e  $z$ .

3. No contorno, nas bordas  $x = \pm l$  e  $z = \pm h$ , a condição de contorno é relaxada, admitindo-se que as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  sejam auto-equilibradas. Ou seja:

$$\int_{-b}^{+b} \sigma_x dA = \int_{-b}^{+b} \sigma_z dA = 0 \quad (4.84)$$

$$\int_{-b}^{+b} \sigma_x y dA = \int_{-b}^{+b} \sigma_z y dA = 0 \quad (4.85)$$

4. Admite-se que as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  sejam função somente da coordenada  $y$ , ou seja:

$$\sigma_x = \sigma_x(y) \quad (4.86)$$

$$\sigma_z = \sigma_z(y) \quad (4.87)$$

5. O material da chapa é isotrópico e homogêneo e suas propriedades não variam com a temperatura.
6. Assume-se que a componente de tensão  $\sigma_{xz}$  seja nula devido ao fato da distribuição de temperatura acontecer ao longo da coordenada  $y$  e ser constante nas direções de  $x$  e  $z$  (BOLEY e WEINER, 1960).

#### 4.3.1 - Análise das Eqs. (4.78), (4.79) e (4.80)

Pela consideração da hipótese 2, as componentes de tensão  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{yz}$  são nulas e pela consideração da hipótese 6, a componente de tensão  $\sigma_{xz}$  também é nula. Deste modo, as Eqs. (4.78), (4.79) e (4.80) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$0 + \left(\frac{1}{1+\nu}\right) \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_z)}{\partial x \partial y} + \left(\frac{E\alpha}{1+\nu}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.88)$$

$$0 + \left(\frac{1}{1+\nu}\right) \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_z)}{\partial y \partial z} + \left(\frac{E\alpha}{1+\nu}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} = 0 \quad (4.89)$$

$$0 + \left(\frac{1}{1+\nu}\right) \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_z)}{\partial z \partial x} + \left(\frac{E\alpha}{1+\nu}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x} = 0 \quad (4.90)$$

Pela consideração da hipótese 1, a distribuição de temperatura é função apenas da coordenada  $y$ . Deste modo, as Eqs. (4.88), (4.89) e (4.90) podem ser escritas como:

$$0 + \left(\frac{1}{1+\nu}\right) \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_z)}{\partial x \partial y} + 0 = 0 \quad (4.91)$$

$$0 + \left(\frac{1}{1+\nu}\right) \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_z)}{\partial y \partial z} + 0 = 0 \quad (4.92)$$

$$0 + \left(\frac{1}{1+\nu}\right) \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_z)}{\partial z \partial x} + 0 = 0 \quad (4.93)$$

Pela consideração da hipótese 4, assume-se que as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  sejam função apenas da coordenada  $y$ . Deste modo, as Eqs. (4.91), (4.92) e (4.93) resultam na seguinte identidade:

$$0 = 0 \quad (4.94)$$

#### 4.3.2 - Determinação das Componentes de Tensão $\sigma_x$ e $\sigma_z$

Para a determinação das componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$ , parte-se das Eqs. (4.75) e (4.77), ou seja:

$$\nabla^2 \sigma_x + \left( \frac{1}{1+\nu} \right) \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) \nabla^2 T + \left( \frac{E\alpha}{1+\nu} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (4.95)$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \left( \frac{1}{1+\nu} \right) \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) \nabla^2 T + \left( \frac{E\alpha}{1+\nu} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (4.96)$$

Expandindo-se as Eqs. (4.95) e (4.96), e substituindo o valor do primeiro invariante do tensor de tensão ( $I_1$ ), encontram-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \left( \frac{1}{1+\nu} \right) \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial x^2} + \\ \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{E\alpha}{1+\nu} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \left( \frac{1}{1+\nu} \right) \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial z^2} + \\ \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{E\alpha}{1+\nu} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

Pela consideração da hipótese 1, a distribuição de temperatura é função apenas da coordenada  $y$  da chapa. Deste modo, as Eqs. (4.97) e (4.98) podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \left( \frac{1}{1+\nu} \right) \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial x^2} + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (4.99)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \left( \frac{1}{1+\nu} \right) \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{\partial z^2} + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (4.100)$$

Pela consideração da hipótese 2, a componente de tensão  $\sigma_y$  é nula. Deste modo, as Eqs. (4.99) e (4.100) ficam da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \left( \frac{1}{1+\nu} \right) \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_z)}{\partial x^2} + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (4.101)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \left( \frac{1}{1+\nu} \right) \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_z)}{\partial z^2} + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (4.102)$$

A partir da hipótese 4, as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  são funções apenas da coordenada  $y$ . Desta forma, as Eqs. (4.101) e (4.102) se reduzem a:

$$\frac{d^2 \sigma_x}{dy^2} + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (4.103)$$

$$\frac{d^2 \sigma_z}{dy^2} + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (4.104)$$

As Eqs. (4.103) e (4.104) podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[ \sigma_x + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T \right] = 0 \quad (4.105)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[ \sigma_z + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T \right] = 0 \quad (4.106)$$

Integrando-se sucessivamente as Eqs. (4.105) e (4.106) com relação à variável  $y$ , encontram-se:

$$\sigma_x + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T = C_3 y + C_4 \quad (4.107)$$

$$\sigma_z + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T = C_5 y + C_6 \quad (4.108)$$

As Eqs. (4.107) e (4.108) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\sigma_x = - \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T + C_3 y + C_4 \quad (4.109)$$

$$\sigma_z = - \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T + C_5 y + C_6 \quad (4.110)$$

As componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$ , dadas através das equações acima (Eqs. (4.109) e (4.110)), representam as componentes de tensão atuantes na chapa da Fig. 4.3. Estas expressões foram encontradas por Boley e Weiner (1960). Estas soluções são válidas para pontos distantes das bordas livres da chapa. Pelo princípio de Saint-Venant, pode-se dizer que as soluções são válidas para pontos a distâncias maiores ou iguais que  $2b$  (espessura da chapa) das bordas livres situadas em  $x = \pm l$  e  $z = \pm h$  para esta configuração de chapa. As constantes  $C_3$  e  $C_4$  na Eq. (4.109) e as constantes  $C_5$  e  $C_6$  na Eq. (4.110) são obtidas a partir da consideração da hipótese 3, onde admite-se que as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  sejam auto-equilibradas. Deste modo, os esforços resultantes nas seções da chapa devem ser nulos. A Fig. 4.4 mostra a seção definida pelo plano  $yz$ , destacando-se um elemento infinitesimal de força  $dF$  decorrente da componente de tensão  $\sigma_x$ .

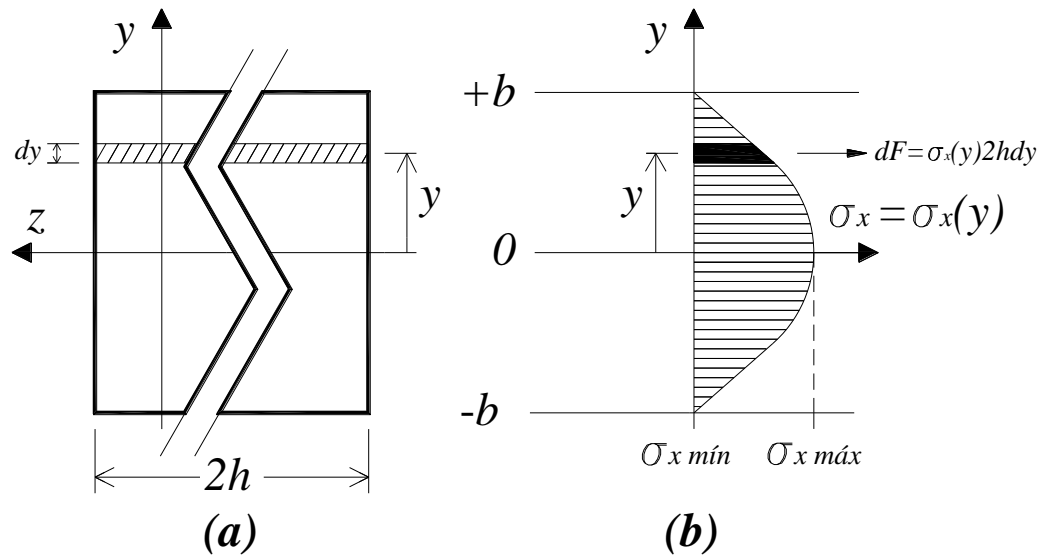


Figura 4.4 - (a) Vista Encurtada da Seção que é Definida pelo Plano  $yz$ , (b) Elemento Infinitesimal de Força  $dF$  Provocado pela Componente de Tensão  $\sigma_x$

E a Fig. 4.5 mostra a seção definida pelo plano  $xy$ , destacando-se um elemento infinitesimal de força  $dF$  decorrente da componente de tensão  $\sigma_z$ .

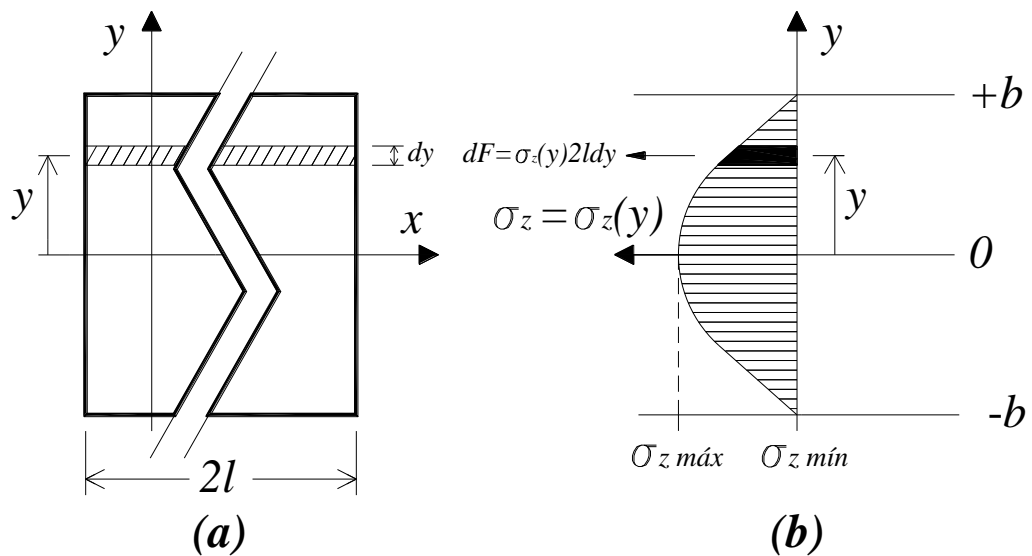


Figura 4.5 - (a) Vista Encurtada da Seção que é Definida pelo Plano  $xy$ , (b) Elemento Infinitesimal de Força  $dF$  Provocado pela Componente de Tensão  $\sigma_z$



### 4.3.3 - Determinação das Constantes

Para que a força resultante na seção definida pelo plano  $yz$  seja nula, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\int_{-b}^{+b} \sigma_x dA = \int_{-b}^{+b} \sigma_x 2h dy = 2h \int_{-b}^{+b} \sigma_x dy = 0$$

$$\int_{-b}^{+b} \sigma_x dy = 0 \quad (4.111)$$

Substituindo-se na Eq. (4.111) a expressão para a componente de tensão  $\sigma_x$  (Eq. (4.109)), obtém-se:

$$\int_{-b}^{+b} \left[ -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) T(y) + C_3 y + C_4 \right] dy = 0 \quad (4.112)$$

Reordenando-se os termos da Eq. (4.112), encontra-se:

$$\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) T(y) dy + \int_{-b}^{+b} C_3 y dy + \int_{-b}^{+b} C_4 dy = 0 \quad (4.113)$$

Na Eq. (4.113) as seguintes relações são válidas:

$$\int_{-b}^{+b} C_3 y dy = 0 \quad (4.114)$$

$$\int_{-b}^{+b} C_4 dy = 2C_4 b \quad (4.115)$$

Substituindo-se as Eqs. (4.114) e (4.115) na Eq. (4.113), encontra-se a seguinte relação:

$$\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) T(y) dy + 2C_4 b = 0 \quad (4.116)$$

Para que a força resultante na seção definida pelo plano  $xy$  seja nula, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\int_{-b}^{+b} \sigma_z dA = \int_{-b}^{+b} \sigma_z 2l dy = 2l \int_{-b}^{+b} \sigma_z dy = 0$$

$$\int_{-b}^{+b} \sigma_z dy = 0 \quad (4.117)$$

Substituindo-se na Eq. (4.117) a expressão para a componente de tensão  $\sigma_z$  (Eq. (4.110)), obtém-se:

$$\int_{-b}^{+b} \left[ -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) T(y) + C_5 y + C_6 \right] dy = 0 \quad (4.118)$$

Reordenando-se os termos na Eq. (4.118), encontra-se:

$$\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) T(y) dy + \int_{-b}^{+b} C_5 y dy + \int_{-b}^{+b} C_6 dy = 0 \quad (4.119)$$

Na Eq. (4.119) as seguintes relações são válidas:

$$\int_{-b}^{+b} C_5 y dy = 0 \quad (4.120)$$

$$\int_{-b}^{+b} C_6 dy = 2C_6 b \quad (4.121)$$

Substituindo-se as Eqs. (4.120) e (4.121) na Eq. (4.119), encontra-se a seguinte relação:

$$\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) T(y) dy + 2C_6 b = 0 \quad (4.122)$$

Sendo as Eqs. (4.116) e (4.122) iguais, tem-se que as constantes  $C_4$  e  $C_6$  também são iguais, ou seja:

$$C_4 = C_6 \quad (4.123)$$

Para que o momento resultante na seção definida pelo plano  $yz$  seja nulo, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{+b} \sigma_x y dA &= \int_{-b}^{+b} \sigma_x y 2h dy = 2h \int_{-b}^{+b} \sigma_x y dy = 0 \\ \int_{-b}^{+b} \sigma_x y dy &= 0 \end{aligned} \quad (4.124)$$

Substituindo-se na Eq. (4.124) a expressão para a componente de tensão  $\sigma_x$  (Eq. (4.109)), obtém-se:

$$\int_{-b}^{+b} \left[ -\left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T(y) + C_3 y + C_4 \right] y dy = 0 \quad (4.125)$$

Reordenando-se os termos na Eq. (4.125), encontra-se:

$$\int_{-b}^{+b} -\left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T(y) y dy + \int_{-b}^{+b} C_3 y^2 dy + \int_{-b}^{+b} C_4 y dy = 0 \quad (4.126)$$

Na Eq. (4.126) as seguintes relações são válidas:

$$\int_{-b}^{+b} C_3 y^2 dy = \frac{2}{3} C_3 b^3 \quad (4.127)$$

$$\int_{-b}^{+b} C_4 y dy = 0 \quad (4.128)$$

Substituindo-se as Eqs. (4.127) e (4.128) na Eq. (4.126), encontra-se a seguinte relação:

$$\int_{-b}^{+b} -\left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T(y) y dy + \frac{2}{3} C_3 b^3 = 0 \quad (4.129)$$

Para que o momento resultante na seção definida pelo plano  $xy$  seja nulo, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{+b} \sigma_z y dA &= \int_{-b}^{+b} \sigma_z y 2l dy = 2l \int_{-b}^{+b} \sigma_z y dy = 0 \\ \int_{-b}^{+b} \sigma_z y dy &= 0 \end{aligned} \quad (4.130)$$

Substituindo-se na Eq. (4.130) a expressão para a componente de tensão  $\sigma_z$  (Eq. (4.110)), obtém-se:

$$\int_{-b}^{+b} \left[ -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) T(y) + C_5 y + C_6 \right] y dy = 0 \quad (4.131)$$

Reordenando-se os termos na Eq. (4.131), encontra-se:

$$\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) T(y) y dy + \int_{-b}^{+b} C_5 y^2 dy + \int_{-b}^{+b} C_6 y dy = 0 \quad (4.132)$$

Na Eq. (4.132) as seguintes relações são válidas:

$$\int_{-b}^{+b} C_5 y^2 dy = \frac{2}{3} C_5 b^3 \quad (4.133)$$

$$\int_{-b}^{+b} C_6 y dy = 0 \quad (4.134)$$

Substituindo-se as Eqs. (4.133) e (4.134) na Eq. (4.132), encontra-se a seguinte relação:

$$\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) T(y) y dy + \frac{2}{3} C_5 b^3 = 0 \quad (4.135)$$

Sendo as Eqs. (4.129) e (4.135) iguais, tem-se que as constantes  $C_3$  e  $C_5$  também são iguais, ou seja:

$$C_3 = C_5 \quad (4.136)$$

#### 4.3.4 - Determinação do Tensor de Tensão Atuante na Chapa

Pela consideração da hipótese 2, as componentes de tensão  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{yz}$  são nulas, ou seja:

$$\sigma_y = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0 \quad (4.137)$$

Pela consideração da hipótese 6, a componente de tensão  $\sigma_{xz}$  é nula, ou seja:

$$\sigma_{xz} = 0 \quad (4.138)$$

E as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  são dadas através da relação:

$$\sigma_x = \sigma_z = -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)T + C_3y + C_4 \quad (4.139)$$

Deste modo, o tensor de tensão atuante na chapa, para pontos distantes das bordas livres que são interceptadas pelos eixos  $x$  e  $z$ , é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.140)$$

#### 4.3.5 - Determinação do Tensor de Deformação Atuante na Chapa

Pela consideração da hipótese 2, as componentes de tensão  $\sigma_{xy}$  e  $\sigma_{yz}$  são nulas. Portanto, com base na Lei de Hooke Generalizada, as componentes de deformação  $\varepsilon_{xy}$  e  $\varepsilon_{yz}$  também serão nulas:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} = 0 \quad (4.141)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{yz} = 0 \quad (4.142)$$

Pela consideração da hipótese 6, a componente de tensão  $\sigma_{xz}$  é nula e, portanto, a componente de deformação  $\varepsilon_{xz}$  também será nula, ou seja:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xz} = 0 \quad (4.143)$$

Aplicando-se a Lei de Hooke Generalizada, as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  são obtidas das seguintes relações:

$$\varepsilon_x = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \alpha T \quad (4.144)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \alpha T \quad (4.145)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \alpha T \quad (4.146)$$

Pela consideração da hipótese 2, a componente de tensão  $\sigma_y$  é nula. Assim, as Eqs. (4.144), (4.145) e (4.146) ficam como:

$$\varepsilon_x = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) + \alpha T \quad (4.147)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) + \alpha T \quad (4.148)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) + \alpha T \quad (4.149)$$

Rearranjando-se os termos nas Eqs. (4.147), (4.148) e (4.149), encontram-se as seguintes relações para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ , ou seja:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_z + \alpha T \quad (4.150)$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) + \alpha T \quad (4.151)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\sigma_x + \alpha T \quad (4.152)$$

Como as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  são iguais, as componentes de deformação  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_z$  também serão iguais, ou seja:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z \quad (4.153)$$

Deste modo, o tensor de deformação atuante na chapa, para pontos distantes das bordas livres que são interceptadas pelos eixos  $x$  e  $z$ , é dado por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (4.154)$$

#### 4.3.6 - Determinação das Componentes de Tensão $\sigma_x$ e $\sigma_z$ e das Componentes de Deformação $\varepsilon_x$ , $\varepsilon_y$ e $\varepsilon_z$ para Diferentes Distribuições de Temperatura

A partir da Eq. (4.139), para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$ , e das Eqs. (4.150), (4.151) e (4.152), para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ , determinam-se as distribuições de tensão e deformação para diferentes perfis de temperatura atuantes na chapa. Inicialmente, são determinadas as constantes  $C_3$  e  $C_4$ . A partir destas constantes, determinam-se as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e, a partir destas, determinam-se as componentes de deformação. As soluções são mostradas a seguir.

##### 4.3.6.1 - Distribuição de Temperatura Constante: $T(y) = T_c$

Nesta seção é considerada uma distribuição de temperatura constante. Deste modo, a partir da Eq. (4.116), obtém-se a constante  $C_4$ :

$$\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)T dy + 2C_4b = -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)T_c \int_{-b}^{+b} dy + 2C_4b = 0$$

$$C_4 = \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T_c \quad (4.155)$$

A partir da Eq. (4.129), obtém-se a constante  $C_3$ :

$$\int_{-b}^{+b} -\left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T y dy + \frac{2}{3} C_3 b^3 = -\left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T_c \int_{-b}^{+b} y dy + \frac{2}{3} C_3 b^3 = 0$$

$$C_3 = 0 \quad (4.156)$$

Substituindo-se as constantes  $C_3$  e  $C_4$  na Eq. (4.139), encontra-se a componente de tensão  $\sigma_x$ , ou seja:

$$\sigma_x = -\left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T + C_3 y + C_4$$

$$\sigma_x = -\left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T_c + 0 + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) T_c$$

$$\sigma_x = 0 \quad (4.157)$$

A componente de tensão  $\sigma_z$  será dada por:

$$\sigma_z = \sigma_x$$

$$\sigma_z = 0 \quad (4.158)$$

Substituindo-se as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  na Eq. (4.150), encontra-se a componente de deformação  $\varepsilon_x$ , ou seja:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_z + \alpha T$$

$$\varepsilon_x = 0 - 0 + \alpha T_c$$

$$\varepsilon_x = \alpha T_c \quad (4.159)$$

Substituindo-se as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  na Eq. (4.151), encontra-se a componente de deformação  $\varepsilon_y$ , ou seja:



$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z) + \alpha T \\ \varepsilon_y &= 0 + \alpha T_c \\ \varepsilon_y &= \alpha T_c\end{aligned}\tag{4.160}$$

E a componente de deformação  $\varepsilon_z$  será dada por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \varepsilon_x \\ \varepsilon_z &= \alpha T_c\end{aligned}\tag{4.161}$$

#### 4.3.6.2 - Distribuição de Temperatura Linear: $T(y) = Ay$

Nesta seção é considerada uma distribuição de temperatura linear em  $y$ . Por procedimentos inteiramente análogos aos da seção anterior, obtém-se a constante  $C_4$ :

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)Tdy + 2C_4b &= -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)A \int_{-b}^{+b} ydy + 2C_4b = 0 \\ C_4 &= 0\end{aligned}\tag{4.162}$$

A partir da Eq. (4.129), obtém-se a constante  $C_3$ :

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)Tydy + \frac{2}{3}C_3b^3 &= -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)A \int_{-b}^{+b} y^2dy + \frac{2}{3}C_3b^3 = 0 \\ C_3 &= \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)A\end{aligned}\tag{4.163}$$

A partir das constantes  $C_3$  e  $C_4$ , determinam-se as componentes de tensão e deformação:

$$\sigma_x = 0\tag{4.164}$$

$$\sigma_z = 0\tag{4.165}$$

$$\varepsilon_x = A\alpha y\tag{4.166}$$

$$\varepsilon_y = A\alpha y\tag{4.167}$$

$$\varepsilon_z = A\alpha y\tag{4.168}$$

#### 4.3.6.3 - Distribuição de Temperatura Quadrática: $T(y) = By^2$

Nesta seção é considerada uma distribuição de temperatura quadrática em  $y$ . Por procedimentos inteiramente análogos aos das seções anteriores, obtém-se a constante  $C_4$ :

$$\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)Tdy + 2C_4b = -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)B \int_{-b}^{+b} y^2dy + 2C_4b = 0$$

$$C_4 = \frac{Bb^2}{3} \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) \quad (4.169)$$

A partir da Eq. (4.129), obtém-se a constante  $C_3$ :

$$\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)Tydy + \frac{2}{3}C_3b^3 = -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)B \int_{-b}^{+b} y^3dy + \frac{2}{3}C_3b^3 = 0$$

$$C_3 = 0 \quad (4.170)$$

A partir das constantes  $C_3$  e  $C_4$ , determinam-se as componentes de tensão e deformação:

$$\sigma_x = B \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) \left(\frac{b^2}{3} - y^2\right) \quad (4.171)$$

$$\sigma_z = B \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) \left(\frac{b^2}{3} - y^2\right) \quad (4.172)$$

$$\varepsilon_x = \left(\frac{B\alpha}{1-\nu}\right) \left(\frac{b^2}{3} - y^2\right) (1-\nu) + B\alpha y^2 \quad (4.173)$$

$$\varepsilon_y = -\left(\frac{2\nu B\alpha}{1-\nu}\right) \left(\frac{b^2}{3} - y^2\right) + B\alpha y^2 \quad (4.174)$$

$$\varepsilon_z = \left(\frac{B\alpha}{1-\nu}\right) \left(\frac{b^2}{3} - y^2\right) (1-\nu) + B\alpha y^2 \quad (4.175)$$

#### 4.3.6.4 - Distribuição de Temperatura Cúbica: $T(y) = Cy^3$

Nesta seção considera-se uma distribuição de temperatura cúbica em  $y$ . Por procedimentos inteiramente análogos aos das seções anteriores, obtém-se a constante  $C_4$ :

$$\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)Tdy + 2C_4b = -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)C \int_{-b}^{+b} y^3dy + 2C_4b = 0$$

$$C_4 = 0 \quad (4.176)$$

A partir da Eq. (4.129), obtém-se a constante  $C_3$ :

$$\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)Tydy + \frac{2}{3}C_3b^3 = -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)C \int_{-b}^{+b} y^4dy + \frac{2}{3}C_3b^3 = 0$$

$$C_3 = \frac{3}{5}Cb^2\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right) \quad (4.177)$$

A partir das constantes  $C_3$  e  $C_4$ , determinam-se as componentes de tensão e deformação:

$$\sigma_x = C\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\left(\frac{3}{5}b^2y - y^3\right) \quad (4.178)$$

$$\sigma_z = C\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\left(\frac{3}{5}b^2y - y^3\right) \quad (4.179)$$

$$\varepsilon_x = \left(\frac{C\alpha}{1-\nu}\right)\left(\frac{3}{5}b^2y - y^3\right)(1-\nu) + C\alpha y^3 \quad (4.180)$$

$$\varepsilon_y = -\left(\frac{2\nu C\alpha}{1-\nu}\right)\left(\frac{3}{5}b^2y - y^3\right) + C\alpha y^3 \quad (4.181)$$

$$\varepsilon_z = \left(\frac{C\alpha}{1-\nu}\right)\left(\frac{3}{5}b^2y - y^3\right)(1-\nu) + C\alpha y^3 \quad (4.182)$$

#### 4.3.6.5 - Distribuição de Temperatura Polinomial Generalizada

Generalizando-se os casos anteriores, considera-se uma distribuição de temperatura polinomial qualquer expressa como:

$$T = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_ny^n \quad (4.183)$$

A partir da Eq. (4.116), obtém-se a constante  $C_4$ :

$$\int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)(a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_ny^n)dy + 2C_4b = 0$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\left(a_0y + a_1\frac{y^2}{2} + a_2\frac{y^3}{3} + \dots + a_n\frac{y^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_{-b}^{+b} + 2C_4b = 0 \\
& -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\left(2a_0b + 2a_2\frac{b^3}{3} + \dots + 2a_{2n}\frac{b^{2n+1}}{2n+1}\right) + 2C_4b = 0 \\
& C_4 = \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\left(a_0 + a_2\frac{b^2}{3} + \dots + a_{2n}\frac{b^{2n}}{2n+1}\right)
\end{aligned} \tag{4.184}$$

A partir da Eq. (4.129), obtém-se a constante  $C_3$ :

$$\begin{aligned}
& \int_{-b}^{+b} -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)(a_0y + a_1y^2 + a_2y^3 + \dots + a_ny^{n+1})dy + \frac{2}{3}C_3b^3 = 0 \\
& -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\left(a_0\frac{y^2}{2} + a_1\frac{y^3}{3} + a_2\frac{y^4}{4} + \dots + a_n\frac{y^{n+2}}{n+2}\right)\Big|_{-b}^{+b} + \frac{2}{3}C_3b^3 = 0 \\
& -\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\left(2a_1\frac{b^3}{3} + 2a_3\frac{b^5}{5} + \dots + 2a_{2n+1}\frac{b^{2n+3}}{2n+3}\right) + \frac{2}{3}C_3b^3 = 0 \\
& C_3 = 3\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\left(\frac{a_1}{3} + a_3\frac{b^2}{5} + \dots + a_{2n+1}\frac{b^{2n}}{2n+3}\right)
\end{aligned} \tag{4.185}$$

Assim, substituindo-se as constantes  $C_3$  e  $C_4$  na Eq. (4.139), obtém-se a componente de tensão  $\sigma_x$ , ou seja:

$$\sigma_x = \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\sum_{n=0}^N\left(\frac{a_{2n}b^{2n}}{2n+1} + \frac{3a_{2n+1}b^{2n}y}{2n+3} - a_ny^n\right) \tag{4.186}$$

A componente de tensão  $\sigma_z$  será dada por:

$$\sigma_z = \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\sum_{n=0}^N\left(\frac{a_{2n}b^{2n}}{2n+1} + \frac{3a_{2n+1}b^{2n}y}{2n+3} - a_ny^n\right) \tag{4.187}$$

Substituindo-se as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  na Eq. (4.150), encontra-se a componente de deformação  $\varepsilon_x$ , ou seja:

$$\varepsilon_x = \alpha \sum_{n=0}^N \left( \frac{a_{2n} b^{2n}}{2n+1} + \frac{3a_{2n+1} b^{2n} y}{2n+3} \right) \quad (4.188)$$

Substituindo-se as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  na Eq. (4.151), obtém-se a componente de deformação  $\varepsilon_y$ , ou seja:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y = -2 \left( \frac{\nu \alpha}{1-\nu} \right) \sum_{n=0}^N \left( \frac{a_{2n} b^{2n}}{2n+1} + \frac{3a_{2n+1} b^{2n} y}{2n+3} \right) + \\ \left( \frac{2\nu}{1-\nu} + 1 \right) \alpha \sum_{n=0}^N (a_n y^n) \end{aligned} \quad (4.189)$$

Finalmente, a componente de deformação  $\varepsilon_z$  será dada por:

$$\varepsilon_z = \alpha \sum_{n=0}^N \left( \frac{a_{2n} b^{2n}}{2n+1} + \frac{3a_{2n+1} b^{2n} y}{2n+3} \right) \quad (4.190)$$

#### 4.3.7 - Tensões Térmicas Auto-Equilibradas Desacopladas

Foi mostrado através da seção 4.3.1 que as Eqs. (4.78), (4.79) e (4.80) retornam uma identidade nula quando são consideradas as hipóteses básicas simplificadoras. Deste modo, restaram apenas as Eqs. (4.75), (4.76) e (4.77) para determinar o campo de tensão atuante na chapa. Aplicando as hipóteses básicas simplificadoras às Eqs. (4.75) e (4.77), chegaram-se às seguintes relações:

$$\frac{d^2 \sigma_x}{dy^2} + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (4.191)$$

$$\frac{d^2 \sigma_z}{dy^2} + \left( \frac{E\alpha}{1-\nu} \right) \frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \quad (4.192)$$

A partir das Eqs. (4.191) e (4.192) foram determinadas as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$ . Se forem aplicadas as hipóteses básicas simplificadoras à terceira equação restante, ou seja, à Eq. (4.76), chega-se à seguinte expressão:

$$\frac{d^2\sigma_x}{dy^2} + \frac{d^2\sigma_z}{dy^2} + \left(\frac{2E\alpha}{1-\nu}\right)\frac{d^2T}{dy^2} = 0 \quad (4.193)$$

Se as Eqs. (4.191) e (4.192) forem somadas, tem-se o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{d^2\sigma_x}{dy^2} + \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2\sigma_z}{dy^2} + \left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\frac{d^2T}{dy^2} = 0 \quad (4.194)$$

$$\frac{d^2\sigma_x}{dy^2} + \frac{d^2\sigma_z}{dy^2} + \left(\frac{2E\alpha}{1-\nu}\right)\frac{d^2T}{dy^2} = 0 \quad (4.195)$$

O resultado acima mostra que a Eq. (4.193) é a soma das Eqs. (4.191) e (4.192), ou seja, quando as hipóteses básicas simplificadoras são consideradas, a Eq. (4.76) é a combinação linear das Eqs. (4.75) e (4.77). Deste modo, a componente de tensão  $\sigma_x$  fica completamente determinada pela Eq. (4.75) e a componente de tensão  $\sigma_z$  fica completamente determinada pela Eq. (4.77) sem haver nenhuma equação adicional que estabeleça algum vínculo entre elas, ou seja, estas duas componentes de tensão estão desacopladas.

# 5

## RESULTADOS

### 5.1 - Introdução

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos para os campos de tensão e deformação atuantes em chapas planas retangulares isotrópicas consideradas em EPT e em estado tridimensional. Estas chapas foram submetidas a distribuições não lineares de temperatura através da resolução de dois problemas de condução de calor. Estas distribuições de temperatura foram aproximadas por polinômios e as soluções obtidas no capítulo 4 foram utilizadas. Serão apresentados os resultados analíticos aproximados, bem como os resultados numéricos obtidos através do MEF utilizando-se o programa computacional Ansys. Ao final de cada seção é apresentada uma breve análise dos resultados.

### 5.2 - Método dos Elementos Finitos (MEF)

#### 5.2.1 - Introdução

Sendo a grande maioria dos problemas em análise de estruturas governados por equações diferenciais ordinárias e parciais que possuem solução analítica para apenas poucos casos de

geometria simplificada, é de extrema importância a aplicação dos métodos numéricos para a averiguação e investigação do comportamento das estruturas quando estas são submetidas aos diversos tipos de carregamentos e condições de contorno. Em particular, o MEF é um método de extrema utilidade prática e de fácil implementação computacional, que vem sendo amplamente estudado e que é encontrado em diversos programas comercialmente disponíveis. Em se tratando o estudo em questão de uma abordagem analítica aproximada, o MEF se torna um procedimento alternativo de investigação para averiguar a precisão dos resultados obtidos. Deste modo, o MEF é empregado neste trabalho como base de comparação para os resultados analíticos aproximados.

### **5.2.2 - MEF via Ansys**

Na análise numérica utiliza-se o programa Ansys que é baseado no MEF. Este programa será utilizado para as análises que servirão como base de comparação para as respostas analíticas aproximadas obtidas neste trabalho. A análise do problema através do programa Ansys pode ser dividida em três etapas:

- Pré-processamento: Nesta etapa são definidas as características geométricas, as condições de contorno do problema, as propriedades do material, o carregamento e o tipo de elemento utilizado. A geometria é preparada com os recursos gráficos por meio da criação do modelo sólido, envolvendo a geração de pontos-chaves (*keypoints*), linhas, áreas e volumes. A partir desse modelo sólido, é gerada a malha de pontos e elementos representativos do problema a ser analisado.
- Processamento: Nesta etapa são calculados os deslocamentos incógnitos.
- Pós-Processamento: Nesta etapa são calculadas as deformações e tensões ao longo do modelo.

### **5.2.3 - Elemento Utilizado na Análise para o EPT**

Para a solução numérica do primeiro problema em estudo, deve ser efetuada uma análise estrutural mecânica onde são considerados apenas os efeitos térmicos. Deste modo, o elemento escolhido deve possuir a capacidade de efetuar tal análise, bem como ser capaz de



representar o EPT. Além disto, a geometria em estudo é retangular, tornando mais conveniente a escolha de um elemento quadrilateral. Um elemento possuidor destas características é o elemento PLANE183. A geometria deste elemento é mostrada na Fig. 5.1.

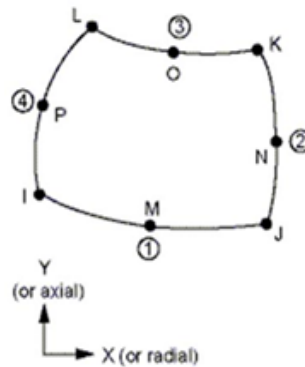


Figura 5.1 - Geometria do Elemento PLANE183 (Fonte: ANSYS, 2012)

Em Ansys (2012) foi verificado que o elemento PLANE183 pode ser utilizado como:

- Elemento plano de tensão.
- Elemento plano de deformação.
- Elemento plano de deformação generalizada.

Além disto, este elemento pode ser utilizado como elemento axissimétrico. Este elemento é paramétrico e pertencente à família Serendipity. Existe a opção de utilizá-lo como um elemento triangular de 6 nós ou como um elemento quadrilateral de 8 nós. Na Fig. 5.1 é mostrado o elemento de 8 nós. Este elemento possui dois graus de liberdade por nó, ou seja:

- Deslocamento em  $x$  do nó  $i$  -  $u_{xi}$ .
- Deslocamento em  $y$  do nó  $i$  -  $u_{yi}$ .

A distribuição de temperatura no elemento plano quadrilateral apresenta a seguinte forma (ANSYS, 2012):

$$\begin{aligned}
 T^e(\xi, \eta) = & \frac{1}{4} \{ [T_1(1 - \xi)(1 - \eta)(-\xi - \eta - 1)] + \\
 & [T_2(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1)] + [T_3(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1)] + \\
 & [T_4(1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1)] \} + \frac{1}{2} \{ T_5(1 - \xi^2)(1 - \eta) + \\
 & T_6(1 + \xi)(1 - \eta^2) + T_7(1 - \xi^2)(1 + \eta) + T_8(1 - \xi)(1 - \eta^2) \}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Nesta equação  $\xi$  e  $\eta$  representam as coordenadas naturais e  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$  e  $T_8$  representam os valores de temperatura nos nós 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, respectivamente.

#### 5.2.4 - Elemento Utilizado na Análise para o Estado Tridimensional

Para a solução numérica relacionada ao caso tridimensional deve ser efetuada, como para o EPT, uma análise estrutural mecânica onde são considerados apenas os efeitos térmicos. Deste modo, o elemento escolhido deve possuir a capacidade de efetuar tal análise, bem como ser capaz de representar uma geometria tridimensional. Além disto, a geometria em estudo possui o formato de um paralelepípedo, tornando mais conveniente a escolha de um elemento de forma hexagonal. Um elemento adequado às características deste problema é o elemento SOLID186. A geometria deste elemento é ilustrada na Fig. 5.2.

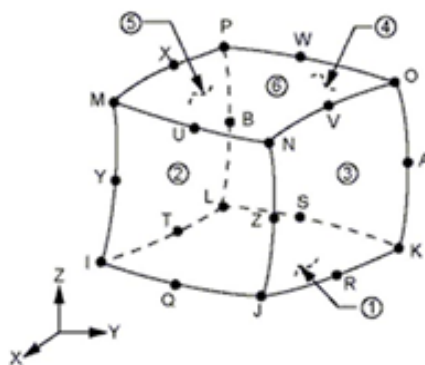


Figura 5.2 - Geometria do Elemento SOLID186 (Fonte: ANSYS, 2012)

O elemento SOLID186 é um elemento sólido tridimensional que em sua forma hexagonal possui 20 nós. Além disto, ele é um elemento da família Serendipity que apresenta uma aproximação quadrática (ANSYS, 2012). Este elemento pode ser utilizado na forma de um tetraedro, na forma de uma pirâmide, na forma de um prisma e na forma hexagonal. Na Fig.

5.2 é mostrado o elemento na forma hexagonal. O elemento SOLID186 possui três graus de liberdade por nó, ou seja:

- Deslocamento em  $x$  do nó  $i$  -  $u_{xi}$ .
- Deslocamento em  $y$  do nó  $i$  -  $u_{yi}$ .
- Deslocamento em  $z$  do nó  $i$  -  $u_{zi}$ .

A distribuição de temperatura no elemento tridimensional hexagonal apresenta a seguinte forma (ANSYS, 2012):

$$\begin{aligned}
 T^e(\xi, \eta, \zeta) = & \frac{1}{8} \{ [T_1(1 - \eta)(1 - \xi)(1 - \zeta)(-\eta - \xi - \zeta - 2)] + \\
 & [T_2(1 + \eta)(1 - \xi)(1 - \zeta)(\eta - \xi - \zeta - 2)] + \\
 & [T_3(1 + \eta)(1 + \xi)(1 - \zeta)(\eta + \xi - \zeta - 2)] + \\
 & [T_4(1 - \eta)(1 + \xi)(1 - \zeta)(-\eta + \xi - \zeta - 2)] + \\
 & [T_5(1 - \eta)(1 - \xi)(1 + \zeta)(-\eta - \xi + \zeta - 2)] + \\
 & [T_6(1 + \eta)(1 - \xi)(1 + \zeta)(\eta - \xi + \zeta - 2)] + \\
 & [T_7(1 + \eta)(1 + \xi)(1 + \zeta)(\eta + \xi + \zeta - 2)] + \\
 & [T_8(1 - \eta)(1 + \xi)(1 + \zeta)(-\eta + \xi + \zeta - 2)] \} + \\
 & \frac{1}{4} \{ T_9(1 - \eta^2)(1 - \xi)(1 - \zeta) + T_{10}(1 + \eta)(1 - \xi^2)(1 - \zeta) + \\
 & T_{11}(1 - \eta^2)(1 + \xi)(1 - \zeta) + T_{12}(1 - \eta)(1 - \xi^2)(1 - \zeta) + \\
 & T_{13}(1 - \eta^2)(1 - \xi)(1 + \zeta) + T_{14}(1 + \eta)(1 - \xi^2)(1 + \zeta) + \\
 & T_{15}(1 - \eta^2)(1 + \xi)(1 + \zeta) + T_{16}(1 - \eta)(1 - \xi^2)(1 + \zeta) + \\
 & T_{17}(1 - \eta)(1 - \xi)(1 - \zeta^2) + T_{18}(1 + \eta)(1 - \xi)(1 - \zeta^2) + \\
 & T_{19}(1 + \eta)(1 + \xi)(1 - \zeta^2) + T_{20}(1 - \eta)(1 + \xi)(1 - \zeta^2) \}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Nesta equação  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}, T_{16}, T_{17}, T_{18}, T_{19}$  e  $T_{20}$  representam os valores de temperatura nos nós 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 20, respectivamente.

### 5.3 - Chapa Plana Retangular Isotrópica em EPT

#### 5.3.1 - Processo de Resfriamento Forçado

Nesta seção serão determinados os campos de tensão e deformação em uma chapa plana retangular isotrópica submetida ao processo de resfriamento forçado após esta passar pelo processo de laminação a quente. No processo de resfriamento forçado, a chapa estará submetida a uma distribuição de temperatura ao longo de sua largura (coordenada  $y^*$  mostrada através da Fig. 5.3). Pelo fato da chapa ser muito fina, a distribuição de temperatura é considerada constante ao longo de sua espessura e, além disto, assume-se que a chapa seja solicitada em EPT. O processo de resfriamento forçado é descrito através da Fig. 5.3.

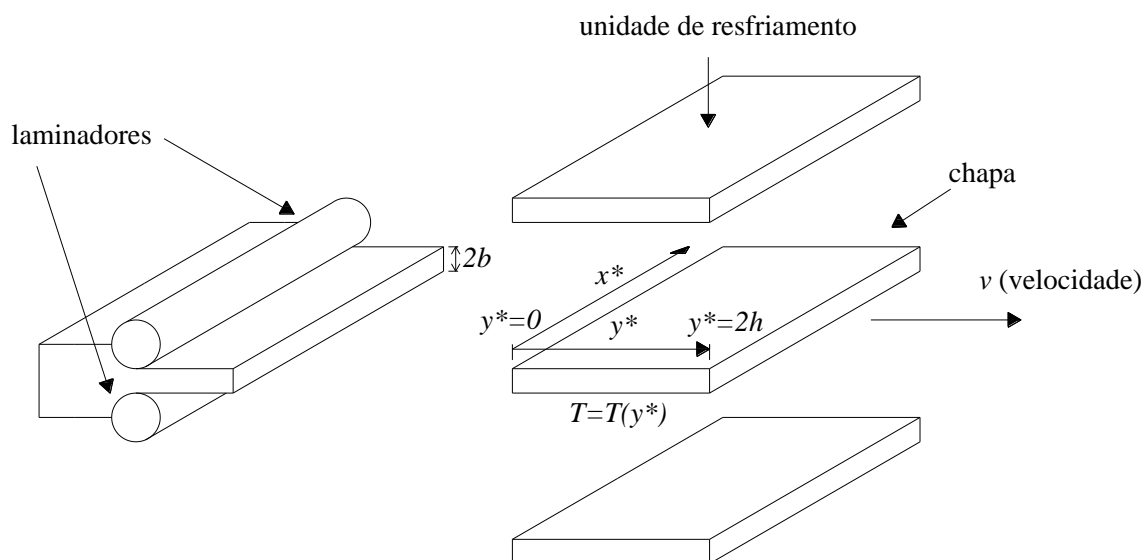


Figura 5.3 - Processo de Resfriamento Forçado na Laminação a Quente (Fonte: Adaptado de OLIVEIRA et al., 2004)

Para determinação da temperatura na chapa, resolve-se o problema de condução de calor em regime permanente e sem geração de energia, onde a transferência de calor na chapa se dá por condução e convecção (OLIVEIRA et al., 2004).

### 5.3.1.1 - Equação Diferencial e Considerações Acerca do Problema

A solução analítica para a distribuição de temperatura na chapa que é submetida ao processo de resfriamento forçado foi encontrada por Oliveira et al. (2004). A distribuição de temperatura é descrita pela seguinte equação diferencial e condições de contorno:

$$\frac{d^2T(y^*)}{dy^{*2}} - \frac{h^*}{kb} [T(y^*) - T_\infty] = \frac{v}{\alpha_T} \frac{dT(y^*)}{dy^*}, \quad 0 < y^* < 2h \quad (5.3)$$

$$T(y^*)|_{y^*=0} = T_0 \quad (5.4)$$

$$\frac{dT(y^*)}{dy^*} = 0, \quad y^* = 2h \quad (5.5)$$

Os parâmetros da equação diferencial e das condições de contorno são mostrados através da Tab. 5.1.

Tabela 5.1 - Parâmetros da Equação Diferencial e Condições de Contorno no Processo de Resfriamento Forçado

Descrição	Símbolo
Temperatura Atual na Chapa	$T(y^*)$
Coefficiente de Convecção do Meio Refrigerante	$h^*$
Condutividade Térmica do Material da Chapa	$k$
Espessura da Chapa	$2b$
Temperatura do Meio Refrigerante	$T_\infty$
Velocidade de Laminação	$v$
Difusividade Térmica do Material da Chapa	$\alpha_T$
Temperatura da Chapa em $y^* = 0$	$T_0$
Largura da Chapa	$2h$

Serão levadas em conta algumas considerações para a determinação da distribuição de temperatura na chapa:

- A dimensão da chapa ao longo da coordenada  $y^*$  é tal que possui o mesmo valor que a dimensão em  $y^*$  da unidade de resfriamento, ou seja, em um dado instante de tempo a chapa fica completamente imersa pela zona de resfriamento.
- A determinação do campo de temperatura se dá no instante em que a chapa fica completamente imersa pela zona de resfriamento.
- A chapa, no instante em que está completamente imersa pela zona de resfriamento, possui temperatura em  $y^* = 0$  igual a  $T_0$ .
- A chapa, no instante em que está totalmente imersa pela zona de resfriamento, apresenta variação nula de temperatura em  $y^* = 2h$ .

### 5.3.1.2 - Material e Parâmetros Utilizados

Para a determinação da distribuição de temperatura é considerado o aço SAE 1020 como o material constituinte da chapa. As propriedades térmicas e a massa específica deste aço são apresentadas através da Tab. 5.2.

Tabela 5.2 - Propriedades Térmicas e Massa Específica do Aço SAE 1020

Descrição	Símbolo	Valor (Propriedades a 25 °C)
Condutividade Térmica	$k$	51,9 $W/m \cdot K$
Massa Específica	$\rho_e$	7872,0 $kg/m^3$
Calor Específico	$c_p$	486 $J/kg \cdot K$
Difusividade Térmica	$\alpha_T$	$1,3566 \times 10^{-5} m^2/s$

Considera-se que o resfriamento forçado é realizado utilizando-se uma cortina de água de dimensão  $2h = 1 m$ . Desta forma, a chapa também possuirá a dimensão ao longo da coordenada  $y^*$  igual a  $1 m$ . Deste modo, serão considerados os valores para os parâmetros do processo que são mostrados através da Tab. 5.3.

Tabela 5.3 - Valores dos Parâmetros Utilizados no Processo de Resfriamento Forçado

Descrição	Símbolo	Valor
Largura da Chapa (Dimensão em $y^*$ )	$2h$	1 m
Temperatura do Meio Refrigerante	$T_\infty$	25 °C
Temperatura em $y^* = 0$	$T_0$	300 °C
Condutividade Térmica do Aço SAE 1020	$k$	51,9 W/m · K
Espessura da Chapa	$2b$	0,01 m
Difusividade Térmica do Aço SAE 1020	$\alpha_T$	$1,3566 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Coefficiente de Convecção do Meio Refrigerante	$h^*$	100 W/m <sup>2</sup> · K
Velocidade de Laminação	$v$	0,001 m/s
Comprimento da Chapa (Dimensão em $x^*$ )	$2l$	5 m

Como mostrado através da Tab. 5.3, será considerada uma chapa de comprimento 5 vezes maior que a largura. Deste modo, as soluções para os campos de tensão e deformação desenvolvidas no capítulo 4 podem ser aplicadas.

### 5.3.1.3 - Raízes da Equação Diferencial Homogênea e Solução Particular da Equação Diferencial Não Homogênea

O perfil de temperatura atuante na chapa é determinado através da solução da equação diferencial e das condições de contorno que são dadas através das Eqs. (5.3), (5.4) e (5.5). A Eq. (5.3) se trata de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não homogênea que tem como solução geral a seguinte expressão:

$$T(y^*) = T_h(y^*) + T_p(y^*) = c_1^* e^{r_1 y^*} + c_2^* e^{r_2 y^*} + T_p(y^*) \quad (5.6)$$

Na Eq. (5.6) o valor de  $T_h(y^*)$  é dado através da seguinte relação:

$$T_h(y^*) = c_1^* e^{r_1 y^*} + c_2^* e^{r_2 y^*} \quad (5.7)$$

As expressões  $c_1^* e^{r_1 y^*}$  e  $c_2^* e^{r_2 y^*}$  representam soluções linearmente independentes da equação homogênea associada e a expressão dada por  $T_p(y^*)$ , que aparece na Eq. (5.6), representa

uma solução particular da equação diferencial ordinária não homogênea (OLIVEIRA et al., 2004). As raízes da equação homogênea, dadas por  $r_1$  e  $r_2$ , podem ser calculadas através das seguintes relações (OLIVEIRA et al., 2004):

$$r_1 = \frac{\frac{v}{\alpha_T} + \sqrt{\left(\frac{v}{\alpha_T}\right)^2 + \frac{4h^*}{kb}}}{2} \quad (5.8)$$

$$r_2 = \frac{\frac{v}{\alpha_T} - \sqrt{\left(\frac{v}{\alpha_T}\right)^2 + \frac{4h^*}{kb}}}{2} \quad (5.9)$$

A solução particular da equação diferencial ordinária não homogênea, dada por  $T_p(y^*)$ , pode ser encontrada através dos parâmetros utilizados no processo utilizando-se da seguinte relação (OLIVEIRA et al., 2004):

$$T_p(y^*) = \frac{\frac{T_\infty h^*}{kb}}{r_2 - r_1} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (5.10)$$

A substituição dos valores de  $r_1$  e  $r_2$  na Eq. (5.10) resulta na seguinte simplificação para  $T_p(y^*)$  (OLIVEIRA et al., 2004):

$$T_p(y^*) = T_\infty \quad (5.11)$$

### 5.3.1.4 - Determinação do Perfil de Temperatura Atuante na Chapa

#### 5.3.1.4.1 - Determinação das Raízes $r_1$ e $r_2$ e da Solução Particular $T_p(y^*)$

A determinação da distribuição de temperatura atuante na chapa é realizada com base nos valores fornecidos através da Tab. 5.3. Deste modo, a substituição dos parâmetros  $v$ ,  $\alpha_T$ ,  $h^*$ ,  $k$  e  $2b$  nas Eqs. (5.8) e (5.9) resultam nos seguintes valores para as raízes  $r_1$  e  $r_2$ :

$$r_1 = 78,615 \text{ m}^{-1} \quad (5.12)$$

$$r_2 = -4,902 \text{ m}^{-1} \quad (5.13)$$



A substituição do parâmetro  $T_\infty$  na Eq. (5.11) resulta no seguinte valor para  $T_p(y^*)$ :

$$T_p(y^*) = 25 \text{ °C} \quad (5.14)$$

#### 5.3.1.4.2 - Determinação das Constantes $c_1^*$ e $c_2^*$ Pertencentes à Solução da Equação Diferencial

A determinação das constantes  $c_1^*$  e  $c_2^*$  se dá através das condições de contorno do problema, ou seja:

$$T(y^*)|_{y^*=0} = T_0 = 300 \text{ °C} \quad (5.15)$$

$$\frac{dT(y^*)}{dy^*} = 0, \quad y^* = 2h = 1 \text{ m} \quad (5.16)$$

Deste modo, a aplicação da condição de contorno dada pela Eq. (5.15) na Eq. (5.6) resulta na seguinte relação:

$$c_1^* + c_2^* = 275 \quad (5.17)$$

A aplicação da condição de contorno dada pela Eq. (5.16) na Eq. (5.6) resulta na seguinte relação:

$$c_1^* 78,615 e^{78,615} - c_2^* 4,902 e^{-4,902} = 0 \quad (5.18)$$

As Eqs. (5.17) e (5.18) podem ser expressas de forma matricial da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 78,615 e^{78,615} & -4,902 e^{-4,902} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1^* \\ c_2^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 275 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

Desta forma, as constantes  $c_1^*$  e  $c_2^*$  ficam completamente definidas pela resolução do sistema de equações dado através da Eq. (5.19). A solução deste sistema resulta nos seguintes valores para as constantes  $c_1^*$  e  $c_2^*$ :

$$c_1^* = 9,185 \times 10^{-36} \text{ } ^\circ\text{C} \quad (5.20)$$

$$c_2^* = 275 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (5.21)$$

#### 5.3.1.4.3 - Perfil de Temperatura Atuante na Chapa

A substituição das raízes  $r_1$  e  $r_2$ , das constantes  $c_1^*$  e  $c_2^*$  e de  $T_p(y^*)$  na Eq. (5.6) resulta na seguinte equação para o perfil de temperatura atuante na chapa:

$$T(y^*) = 9,185 \times 10^{-36} e^{78,615y^*} + 275e^{-4,902y^*} + 25 \quad (5.22)$$

O perfil de temperatura representado pela Eq. (5.22) tem como referência a coordenada  $y^*$  que é mostrada através da Fig. 5.3. Deste modo, o valor de  $y^*$  varia de 0 a  $2h = 1 \text{ m}$ . Contudo, para uma melhor adequação ao método proposto no capítulo 4, considera-se o sistema de eixos coordenados mostrado através da Fig. 4.1 com a origem do sistema de coordenadas no centro da chapa. Portanto, é realizada uma mudança de variável para que seja considerado o novo sistema de eixos com a origem do sistema de coordenadas no centro da chapa. Desta forma, chamando de  $y$  a nova variável, tem-se a seguinte relação:

$$y^* = y + 0,5 \quad (5.23)$$

Substituindo a Eq. (5.23) na Eq. (5.22), encontra-se a seguinte relação para o perfil de temperatura atuante ao longo da largura da chapa, ou seja:

$$T(y) = 9,185 \times 10^{-36} e^{78,615(y+0.5)} + 275e^{-4,902(y+0.5)} + 25 \quad (5.24)$$

Este perfil de temperatura é mostrado através da Fig. 5.4, ou seja:

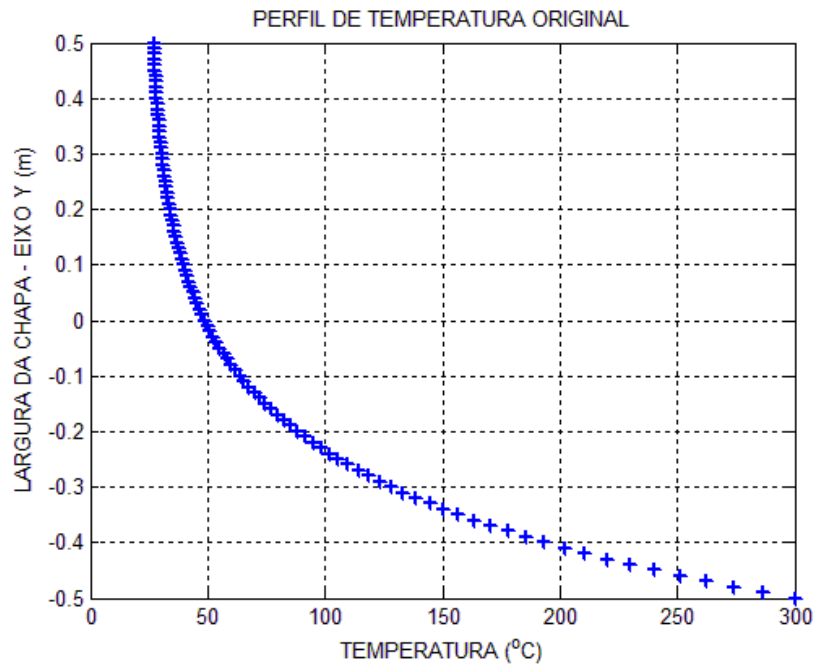


Figura 5.4 - Perfil de Temperatura Original Atuante na Chapa em EPT

#### 5.3.1.4.3.1 - Aproximação Polinomial para o Perfil de Temperatura Encontrado

A expressão representante do perfil de temperatura na chapa (Eq. (5.24)) é aproximada por um polinômio que é obtido pela combinação linear dos primeiros polinômios de Legendre. Como esboçado no capítulo 3, a aproximação por polinômios ortogonais representa uma vantagem em termos numéricos e a escolha dos polinômios de Legendre está relacionada ao fato destes polinômios possuírem peso constante e unitário, ou seja, o grau de aproximação será o mesmo ao longo de todo o intervalo porque não há necessidade de haver regiões com maior ou menor grau de aproximação. Desta forma, foram escolhidos os nove primeiros polinômios de Legendre para se realizar a aproximação sendo que, a utilização de um número maior de polinômios, refletiria em demasiado tempo de processamento numérico sem contabilizar grandes ganhos em termos de precisão. A convergência dos polinômios de Legendre é mostrada no apêndice A. Além disto, foi verificado que com a utilização de seis polinômios de Legendre já seria possível realizar uma aproximação com elevado nível de precisão numérica.

O perfil de temperatura a ser aproximado é representado através da função  $f(y)$ , ou seja:

$$f(y) = T(y) = 9,185 \times 10^{-36} e^{78,615(y+0.5)} + 275 e^{-4,902(y+0.5)} + 25 \quad (5.25)$$

A função de aproximação é representada da seguinte maneira:

$$g(y) = c_1 \varphi'_1(y) + c_2 \varphi'_2(y) + c_3 \varphi'_3(y) + c_4 \varphi'_4(y) + c_5 \varphi'_5(y) + c_6 \varphi'_6(y) + c_7 \varphi'_7(y) + c_8 \varphi'_8(y) + c_9 \varphi'_9(y) \quad (5.26)$$

Na Eq. (5.26) as funções  $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_9$  representam os nove primeiros polinômios de Legendre. Estes polinômios são mostrados através da Tab. 5.4.

Tabela 5.4 - Polinômios de Legendre Utilizados na Aproximação da Distribuição de Temperatura na Chapa em EPT

<b>Função</b> $\varphi'_j$	<b>Polinômio</b> $P_n(y)$	<b>Polinômio</b>
$\varphi'_1(y)$	$P_0(y)$	1
$\varphi'_2(y)$	$P_1(y)$	$y$
$\varphi'_3(y)$	$P_2(y)$	$1/2 (3y^2 - 1)$
$\varphi'_4(y)$	$P_3(y)$	$1/2 (5y^3 - 3y)$
$\varphi'_5(y)$	$P_4(y)$	$1/8 (35y^4 - 30y^2 + 3)$
$\varphi'_6(y)$	$P_5(y)$	$1/8 (63y^5 - 70y^3 + 15y)$
$\varphi'_7(y)$	$P_6(y)$	$1/16 (231y^6 - 315y^4 + 105y^2 - 5)$
$\varphi'_8(y)$	$P_7(y)$	$1/16 (429y^7 - 693y^5 + 315y^3 - 35y)$
$\varphi'_9(y)$	$P_8(y)$	$1/128 (6435y^8 - 12012y^6 + 6930y^4 - 1260y^2 + 35)$

Aplicando-se o método dos mínimos quadrados entre as funções  $f(y)$  e  $g(y)$  e minimizando-se o erro quadrático da aproximação, encontram-se os valores para as constantes  $c_j$ . Os resultados para estas constantes são apresentados através da Tab. 5.5, ou seja:

Tabela 5.5 - Constantes da Eq. (5.26)

Constante $c_j$	Valor da Constante
$c_1$	356,648
$c_2$	-749,297
$c_3$	857,450
$c_4$	-579,942
$c_5$	379,431
$c_6$	-141,131
$c_7$	75,237
$c_8$	-12,696
$c_9$	7,361

A substituição dos valores das constantes  $c_j$  e dos polinômios  $\varphi'_j$  na Eq. (5.26) resulta no seguinte polinômio aproximado para o campo de temperatura:

$$g(y) = 370,082y^8 - 340,417y^7 + 395,420y^6 - 561,505y^5 + 577,323y^4 - 464,912y^3 + 284,591y^2 - 116,233y + 48,711 \quad (5.27)$$

O campo de temperatura polinomial aproximado é mostrado através da Fig. 5.5, ou seja:

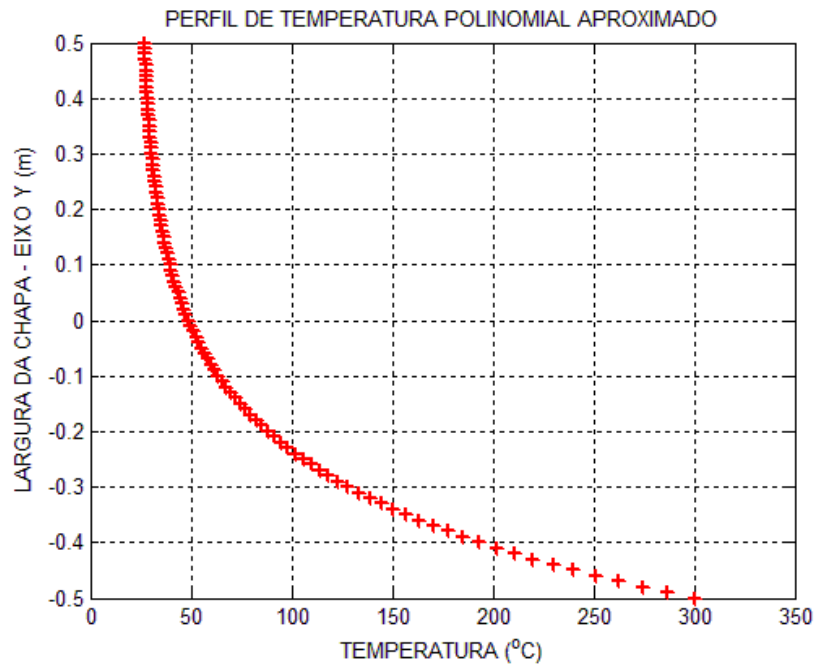


Figura 5.5 - Perfil de Temperatura Polinomial Aproximado Atuante na Chapa em EPT

Para efeito de comparação os dois perfis de temperatura, o original e o aproximado, são mostrados em um mesmo gráfico. Este gráfico é mostrado na Fig. 5.6.

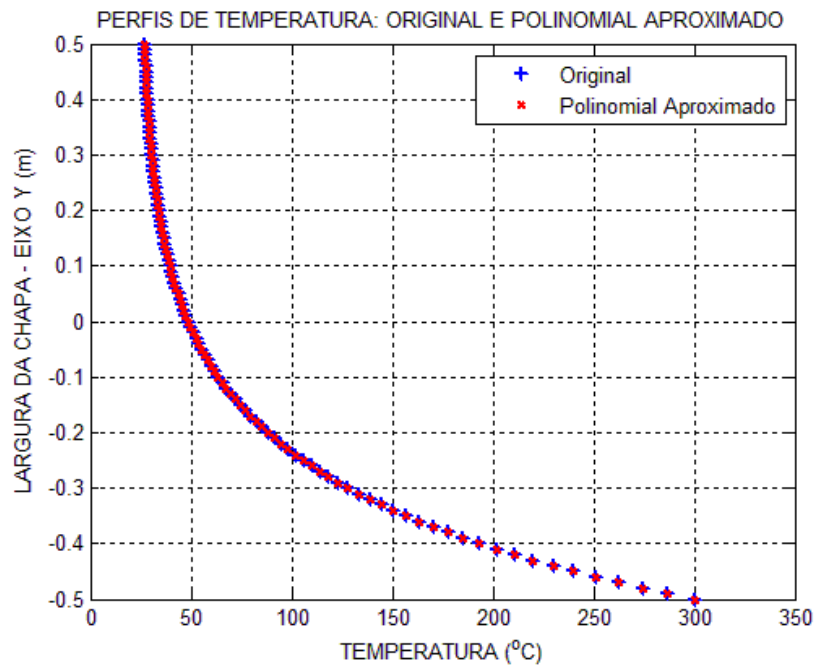


Figura 5.6 - Perfis de Temperatura Original e Polinomial Aproximado Atuantes na Chapa em EPT

### 5.3.2 - Determinação da Componente de Tensão $\sigma_x$

Para a determinação da componente de tensão  $\sigma_x$  devem ser consideradas as propriedades mecânicas do aço SAE 1020. As propriedades mecânicas deste aço são mostradas através da Tab. 5.6.

Tabela 5.6 - Propriedades Mecânicas do Aço SAE 1020

Nome	Símbolo	Valor (Propriedades a 25 °C)
Módulo de Elasticidade	$E$	$200 \times 10^9 \text{ Pa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0,3
Coefficiente de Expansão Térmica	$\alpha$	$14,8 \times 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$

A distribuição de temperatura atuante na chapa é dada de forma aproximada pelo polinômio  $g(y)$  que é representado pela Eq. (5.27). Os coeficientes polinomiais do perfil de temperatura aproximado são mostrados através da Tab. 5.7.

Tabela 5.7 - Coeficientes Polinomiais do Perfil de Temperatura Polinomial Aproximado na Chapa em EPT

Coeficiente Polinomial	Valor
$a_0$	48,711
$a_1$	-116,233
$a_2$	284,591
$a_3$	-464,912
$a_4$	577,323
$a_5$	-561,505
$a_6$	395,420
$a_7$	-340,417
$a_8$	370,082

A componente de tensão  $\sigma_x$  atuante na chapa da Fig. 5.3 é encontrada a partir da Eq. (4.69). Nesta expressão  $a_{2n}$  representam os coeficientes pares e  $a_{2n+1}$  representam os coeficientes

ímpares. Substituindo-se os coeficientes polinomiais da Tab. 5.7, o valor de  $E$ , o valor de  $\alpha$  e o valor de  $h$  nesta equação, encontra-se o seguinte polinômio para a componente de tensão  $\sigma_x$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x(y) = & -1,095444043088441 \times 10^9 y^8 + 1,007634045542952 \times 10^9 y^7 - \\ & 1,170441732643745 \times 10^9 y^6 + 1,662053325850107 \times 10^9 y^5 - \\ & 1,708876939516558 \times 10^9 y^4 + 1,376138605048975 \times 10^9 y^3 - \\ & 8,423893341429004 \times 10^8 y^2 - 2,561881702583913 \times 10^8 y + \\ & 9,464811921945623 \times 10^7 \end{aligned} \quad (5.28)$$

A distribuição da componente de tensão  $\sigma_x$  é mostrada através da Fig. 5.7.

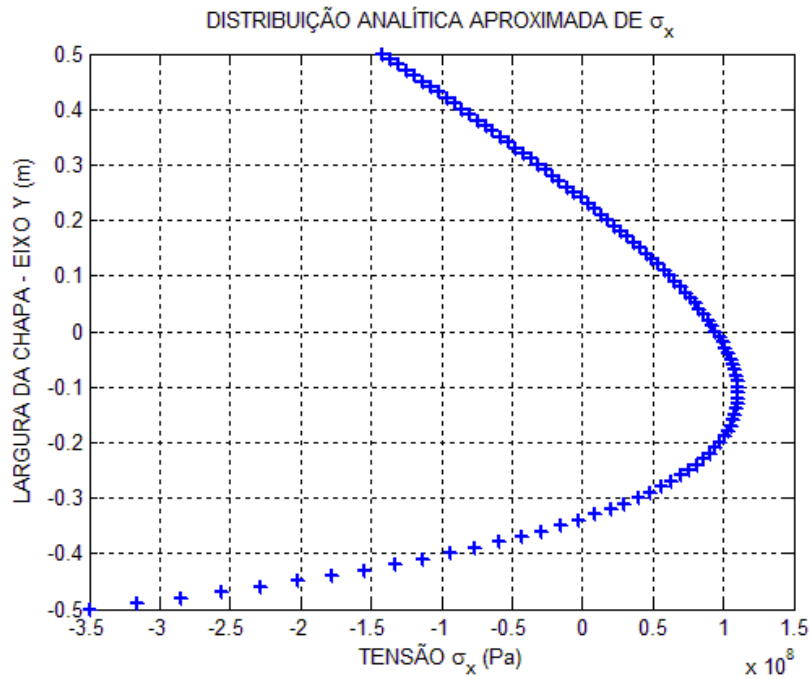


Figura 5.7 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Tensão  $\sigma_x$  na Chapa em EPT

### 5.3.3 - Determinação da Componente de Deformação $\epsilon_x$

A componente de deformação  $\epsilon_x$  é determinada através da Eq. (4.70). Substituindo-se os coeficientes polinomiais da Tab. 5.7, o valor de  $\alpha$  e o valor de  $h$  nesta equação, encontra-se o seguinte polinômio para a componente de deformação  $\epsilon_x$ :



$$\varepsilon_x(y) = -0,00300y + 0,00119 \quad (5.29)$$

A distribuição da componente de deformação  $\varepsilon_x$  é mostrada através da Fig. 5.8.

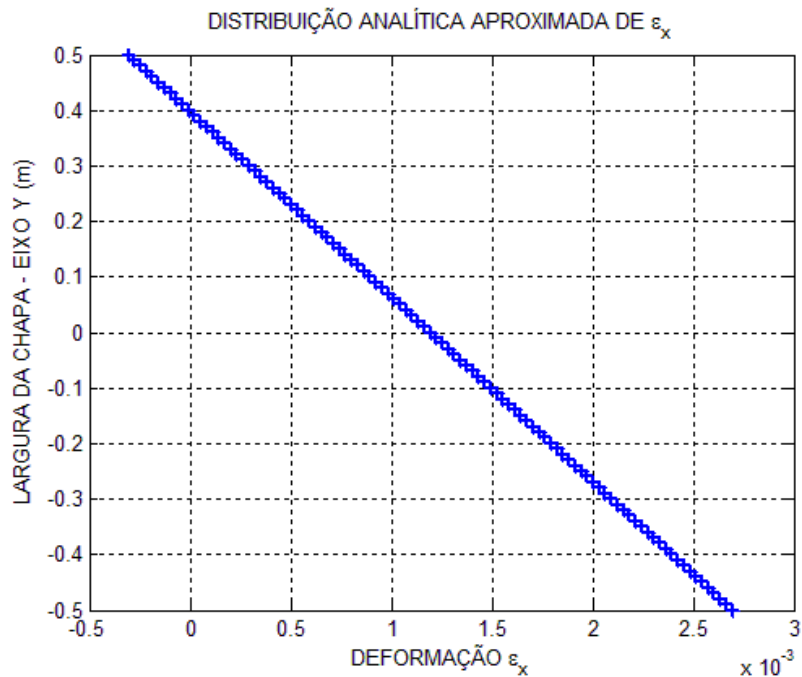


Figura 5.8 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Deformação  $\varepsilon_x$  na Chapa em EPT

### 5.3.4 - Determinação da Componente de Deformação $\varepsilon_y$

A componente de deformação  $\varepsilon_y$  é determinada através da Eq. (4.71). Substituindo-se os coeficientes polinomiais da Tab. 5.7, o valor de  $\alpha$ , o valor de  $\nu$  e o valor de  $h$  nesta equação, encontra-se o seguinte polinômio para a componente de deformação  $\varepsilon_y$ :

$$\varepsilon_y(y) = 0,00712y^8 - 0,00655y^7 + 0,00761y^6 - 0,0108y^5 + 0,0111y^4 - 0,00894y^3 + 0,00548y^2 - 0,00134y + 0,000579 \quad (5.30)$$

A distribuição da componente de deformação  $\varepsilon_y$  é mostrada através da Fig. 5.9.

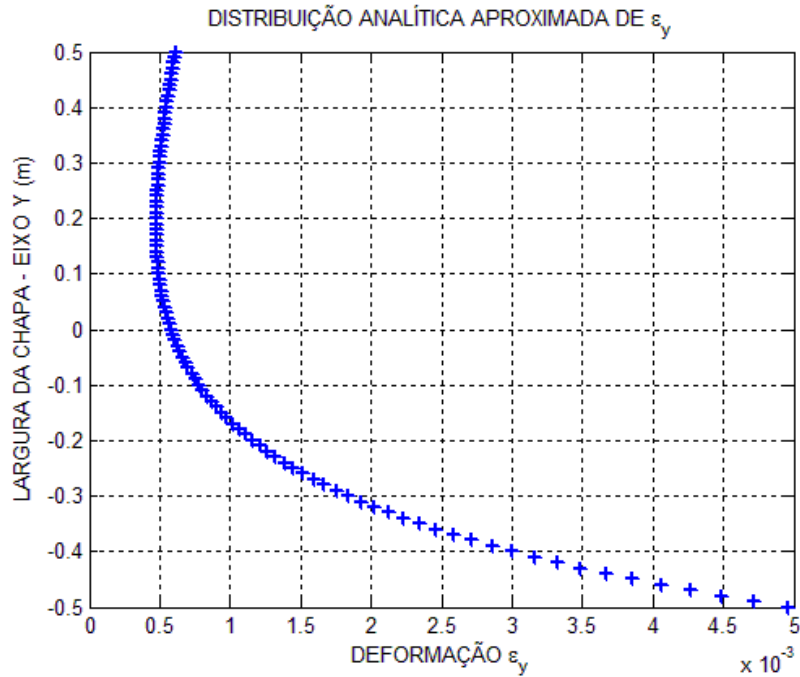


Figura 5.9 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Deformação  $\varepsilon_y$  na Chapa em EPT

### 5.3.5 - Determinação da Componente de Deformação $\varepsilon_z$

A componente de deformação  $\varepsilon_z$  é determinada através da Eq. (4.72). Deste modo, a componente de deformação  $\varepsilon_z$  possui o mesmo perfil que a componente de deformação  $\varepsilon_y$ , ou seja:

$$\varepsilon_z(y) = 0,00712y^8 - 0,00655y^7 + 0,00761y^6 - 0,0108y^5 + 0,0111y^4 - 0,00894y^3 + 0,00548y^2 - 0,00134y + 0,000579 \quad (5.31)$$

A distribuição da componente de deformação  $\varepsilon_z$  é mostrada através da Fig. 5.10.

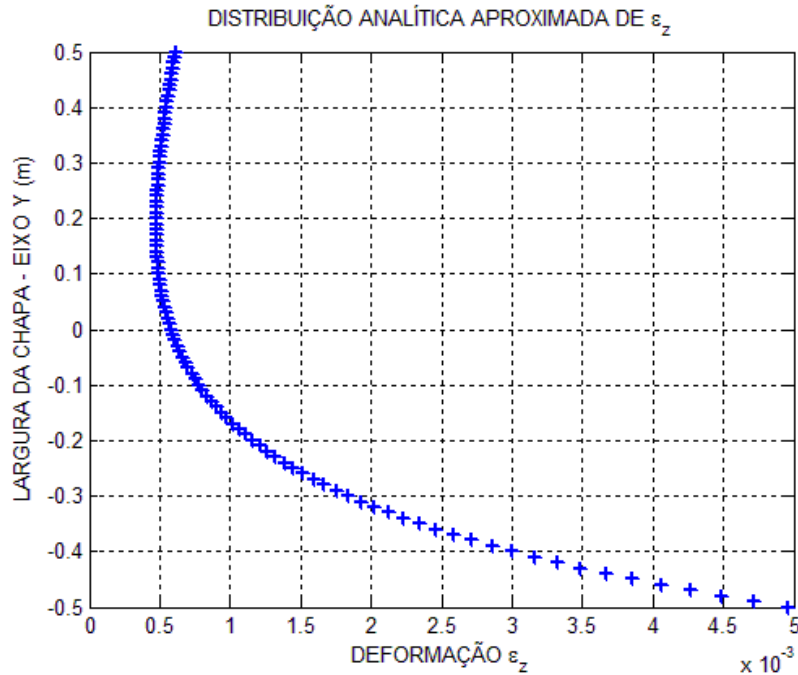


Figura 5.10 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  na Chapa em EPT

### 5.3.6 - Valores Numéricos Obtidos Através do MEF

Nesta seção são obtidos os resultados numéricos para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  através do MEF utilizando o programa Ansys.

#### 5.3.6.1 - Modelagem da Chapa no Programa Ansys

A chapa a ser modelada possui a largura (dimensão  $2h$ ) igual a 1 metro e o comprimento (dimensão  $2l$ ) igual a 5 metros. Sendo a distribuição de temperatura na chapa função apenas da coordenada  $y$ , leva-se em consideração a condição de simetria da chapa com relação ao eixo transversal que passa pelo eixo  $y$  na coordenada  $x = 0$ . Deste modo, apenas a metade direita da chapa é modelada aproveitando-se das condições de simetria do problema. Para a modelagem da chapa é utilizado o elemento designado por PLANE183 como mostrado no início deste capítulo. Este elemento é mostrado através da Fig. 5.1. Na aplicação do método foram utilizados 100.000 elementos. Um desenho esquemático da chapa, mostrando a condição de contorno de simetria, é mostrado através da Fig. 5.11.

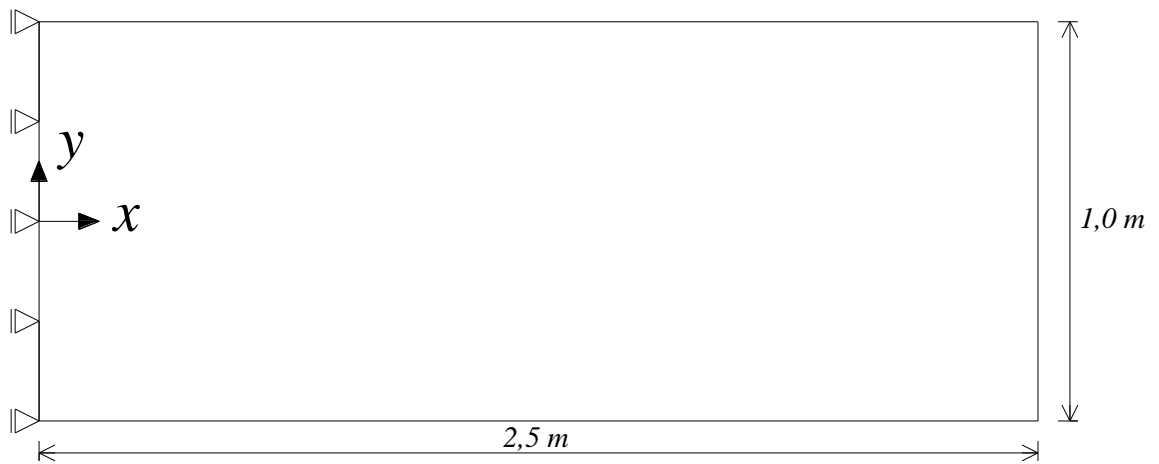


Figura 5.11 - Modelo Esquemático Mostrando a Condição de Contorno de Simetria na Chapa em EPT

Uma vista ampliada do modelo de elementos finitos, mostrando a borda esquerda, é mostrada através da Fig. 5.12.

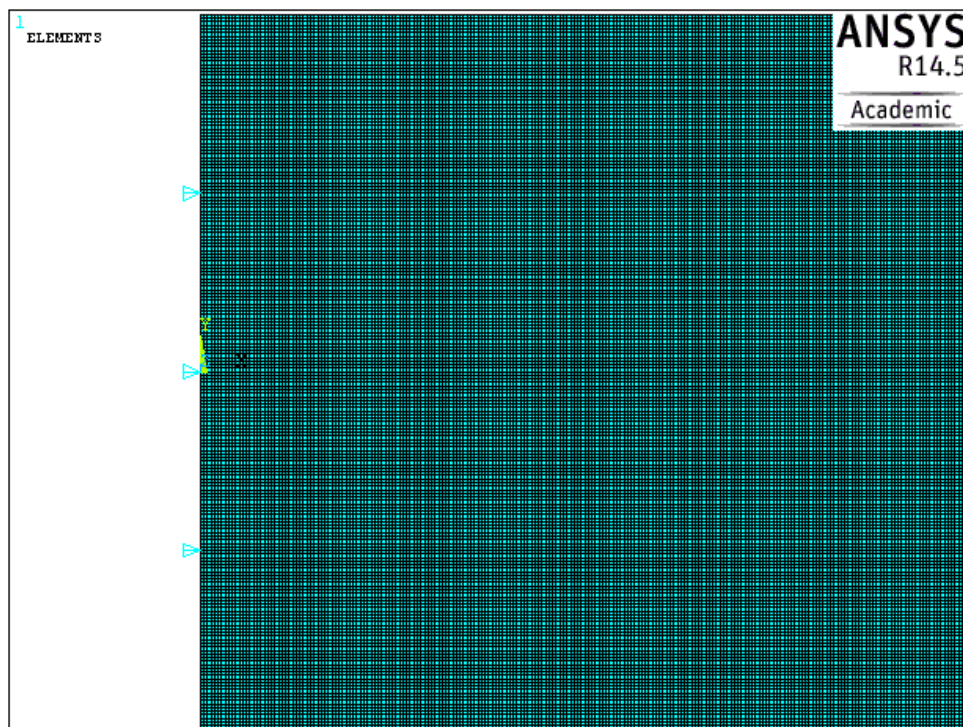


Figura 5.12 - Modelo Ampliado Mostrando a Borda Esquerda da Chapa em EPT

### 5.3.6.2 - Componente de Tensão $\sigma_x$

Na aplicação do MEF o modelo da chapa foi submetido à distribuição de temperatura exponencial original (Eq. (5.24)), utilizando-se o editor de funções (Function Editor) do programa Ansys. A partir da aplicação desta distribuição de temperatura foi encontrada a distribuição para a componente de tensão  $\sigma_x$  mostrada através da Fig. 5.13.

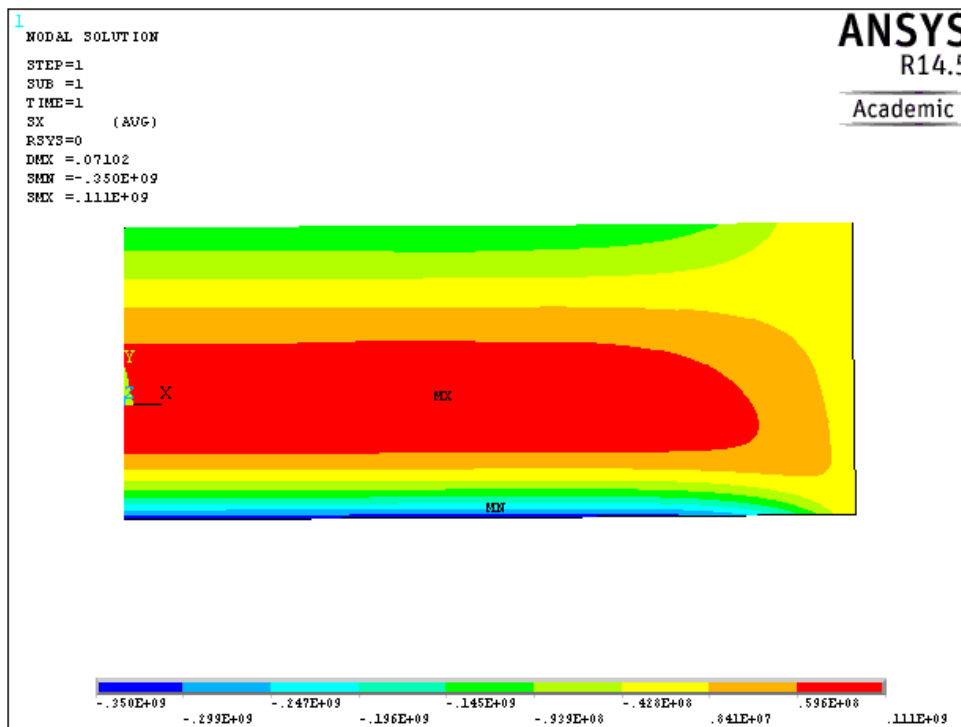


Figura 5.13 - Solução pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  na Chapa em EPT

Observa-se através da Fig. 5.13 que a distribuição da componente de tensão  $\sigma_x$  é função apenas da coordenada  $y$  para pontos afastados da borda livre interceptada pelo eixo  $x$ . Para pontos próximos desta borda, a componente de tensão  $\sigma_x$  decai até atingir valor nulo na borda livre. Portanto, não se pode garantir a validade da solução em pontos próximos desta borda.

### 5.3.6.3 - Componente de Deformação $\epsilon_x$

Foi encontrada na chapa a distribuição para a componente de deformação  $\epsilon_x$  mostrada através da Fig. 5.14.

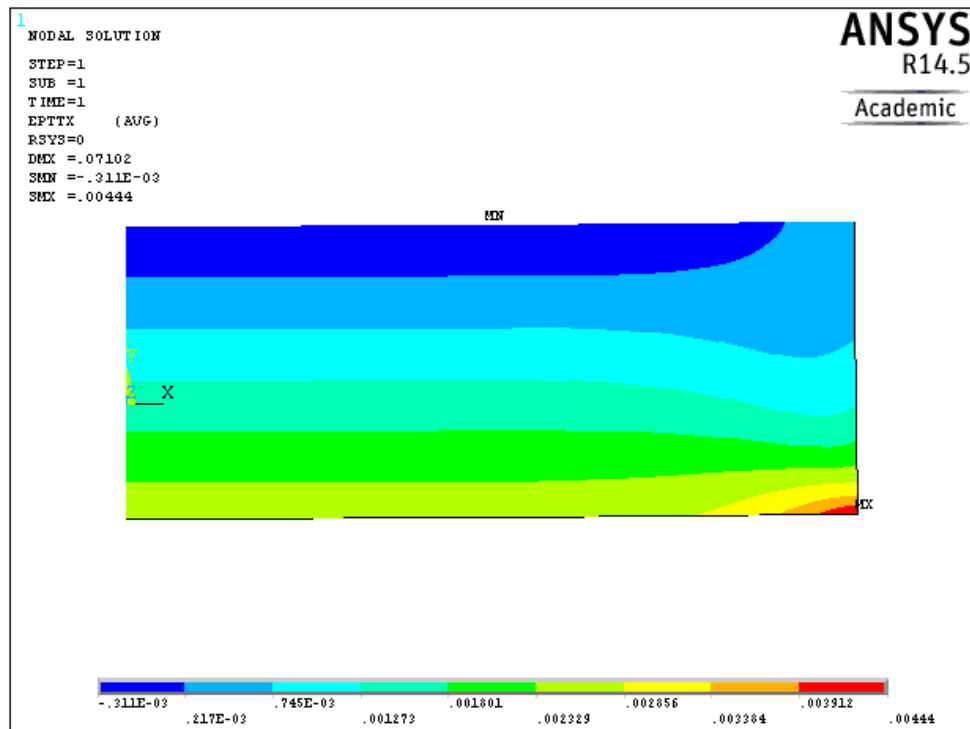


Figura 5.14 - Solução pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_x$  na Chapa em EPT

Observa-se através da Fig. 5.14 que a distribuição da componente de deformação  $\varepsilon_x$  é função apenas da coordenada  $y$  para pontos afastados da borda livre interceptada pelo eixo  $x$ . Também nota-se que a componente de deformação  $\varepsilon_x$  é muito influenciada por esta borda. Este acontecimento pode ser explicado pelo fato de que a componente de deformação  $\varepsilon_x$  é dependente do campo de tensão que, nesta região, apresenta-se significativamente afetado pela borda livre.

#### 5.3.6.4 - Componente de Deformação $\varepsilon_y$

Foi encontrada na chapa a distribuição para a componente de deformação  $\varepsilon_y$ , mostrada através da Fig. 5.15.

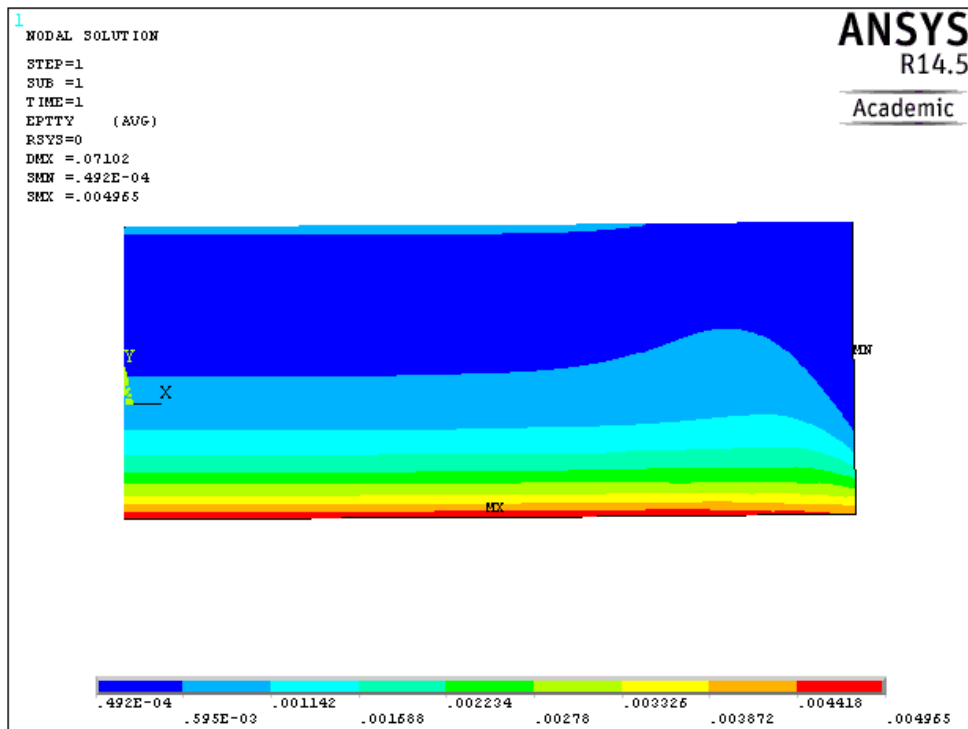


Figura 5.15 - Solução pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_y$  na Chapa em EPT

Pela Fig. 5.15 nota-se que a distribuição da componente de deformação  $\varepsilon_y$  é função apenas da coordenada  $y$  para pontos afastados da borda livre interceptada pelo eixo  $x$ . Também observa-se que a componente de deformação  $\varepsilon_y$  é muito influenciada por esta borda. Como dito anteriormente, este acontecimento pode ser explicado pelo fato da componente de deformação  $\varepsilon_y$  ser dependente do campo de tensão que, nesta região, apresenta-se influenciado pela borda livre.

### 5.3.6.5 - Componente de Deformação $\varepsilon_z$

Foi encontrada na chapa a distribuição para a componente de deformação  $\varepsilon_z$  mostrada na Fig. 5.16.

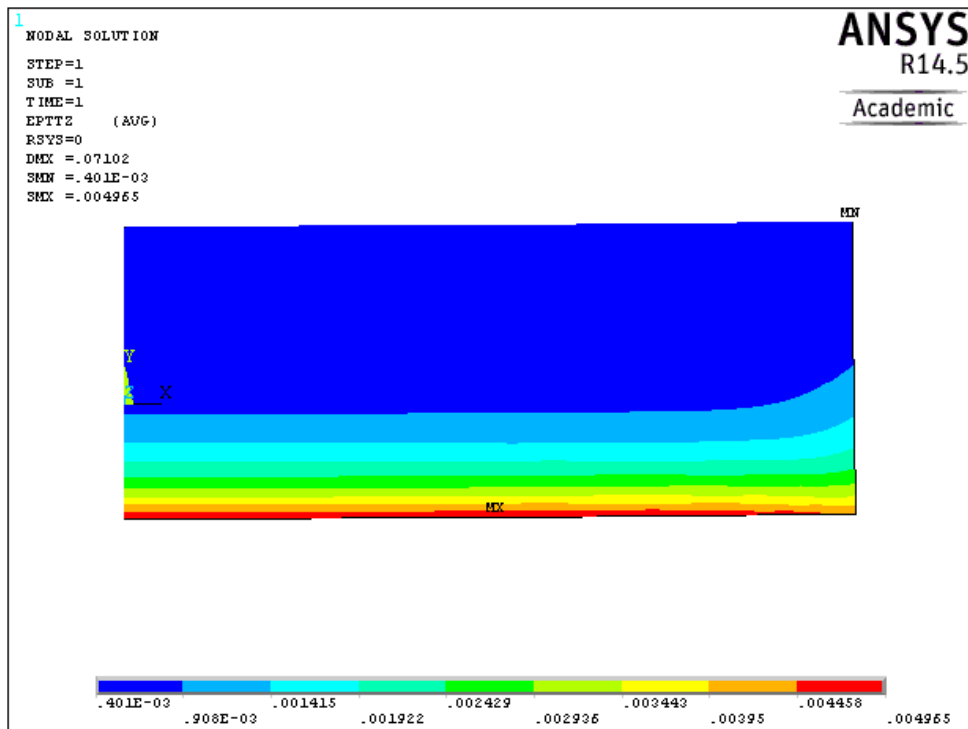


Figura 5.16 - Solução pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  na Chapa em EPT

Observa-se na Fig. 5.16 que a distribuição da componente de deformação  $\varepsilon_z$  é função apenas da coordenada  $y$  para pontos afastados da borda livre interceptada pelo eixo  $x$ . Também se observa que existe uma leve distorção do campo de deformação para regiões próximas a esta borda. Mais uma vez este acontecimento pode ser explicado pelo fato da componente de deformação  $\varepsilon_z$  ser dependente do campo de tensão nesta borda.

### 5.3.7 - Comparação dos Resultados Analíticos Aproximados e Numéricos

Os resultados numéricos para a componente de tensão  $\sigma_x$ , bem como para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ , foram obtidos para diferentes distâncias da borda livre direita da chapa. Os resultados foram obtidos em seções transversais definidas por coordenadas ao longo do eixo  $x$  iguais a  $x = 0,0 \text{ m}$ ,  $x = 0,5 \text{ m}$ ,  $x = 1,0 \text{ m}$ ,  $x = 1,5 \text{ m}$ ,  $x = 2,0 \text{ m}$  e  $x = 2,5 \text{ m}$ . As seções transversais onde foram coletados os dados numéricos são mostradas através da Fig. 5.17.



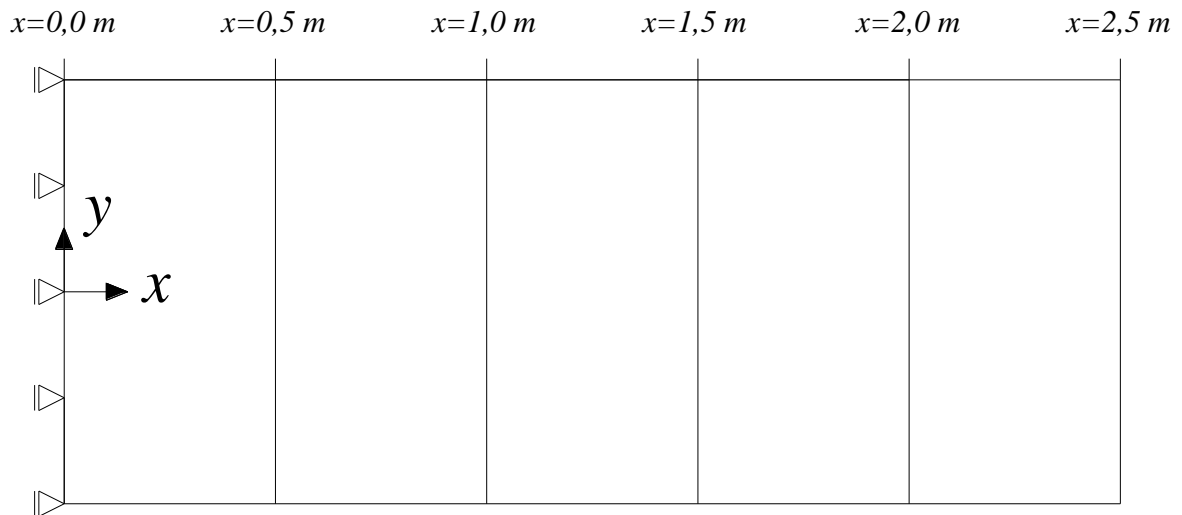


Figura 5.17 - Seções Transversais de Coleta de Dados Numéricos Obtidos pelo MEF

Os resultados numéricos obtidos para cada seção foram comparados com os resultados analíticos aproximados. Os valores numéricos em cada seção foram obtidos através do comando PATH do programa Ansys. Os resultados comparativos são mostrados a seguir.

#### 5.3.7.1 - Comparação dos Resultados para a Seção em $x = 0,0\text{ m}$

Através das Figs. 5.18, 5.19, 5.20 e 5.21 são mostrados os resultados comparativos para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  na seção transversal definida por  $x = 0,0\text{ m}$ .

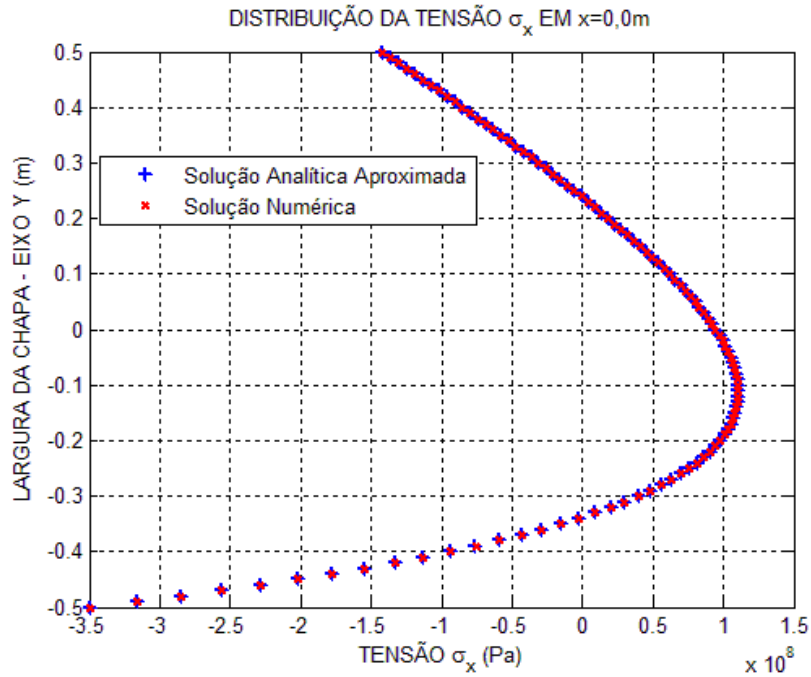


Figura 5.18 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  na Seção Definida por  $x = 0,0 m$

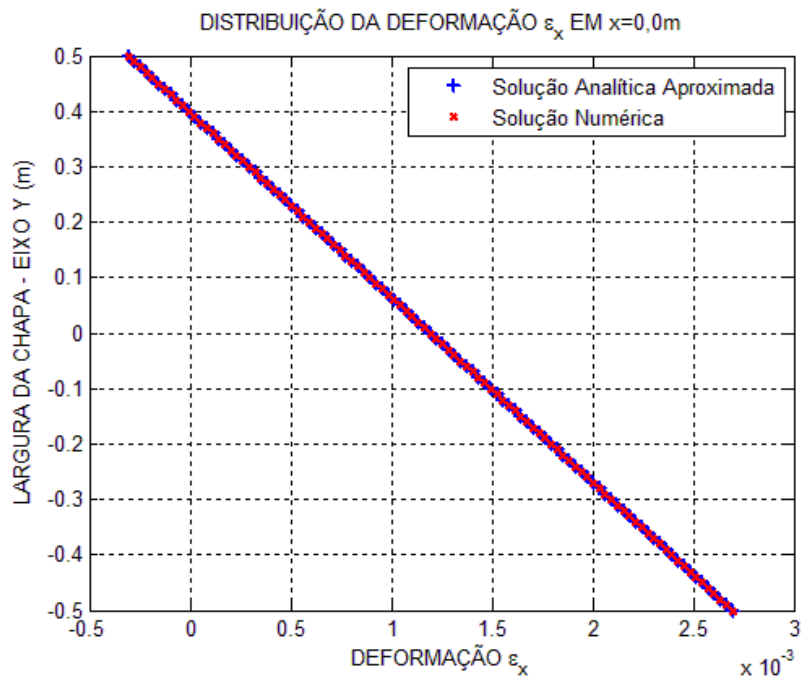


Figura 5.19 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_x$  na Seção Definida por  $x = 0,0 m$

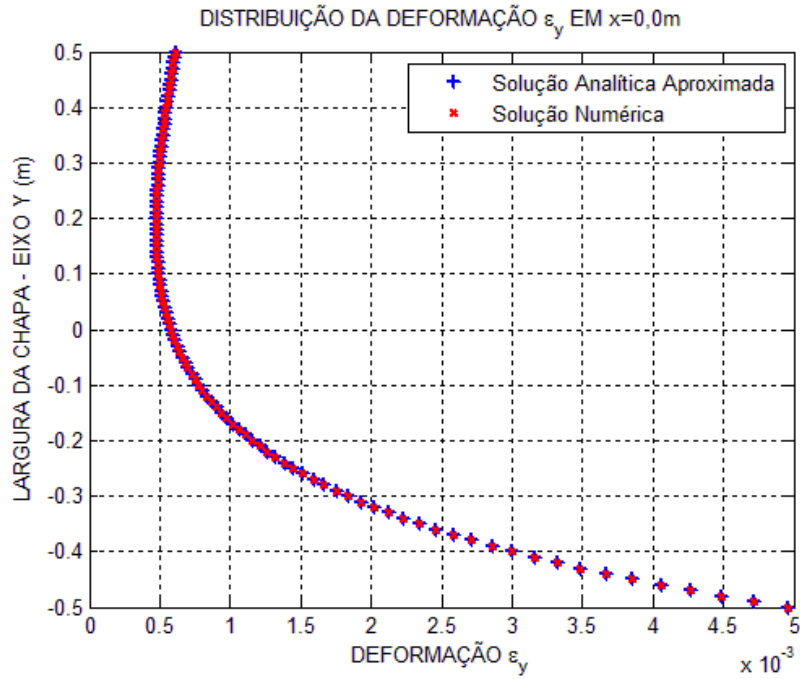


Figura 5.20 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_y$  na Seção Definida por  $x = 0,0 m$

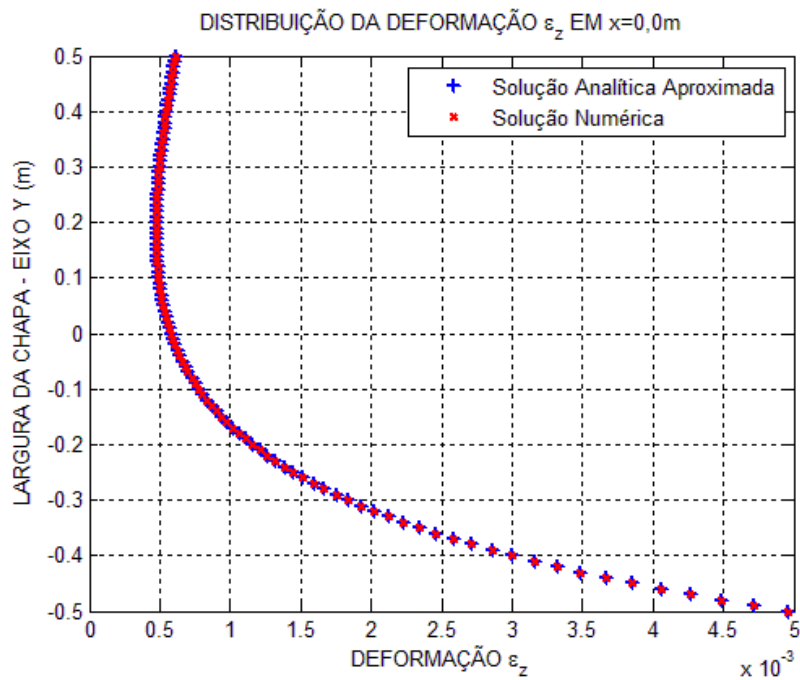


Figura 5.21 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  na Seção Definida por  $x = 0,0 m$

### 5.3.7.1.1 - Análise dos Gráficos Apresentados para a Seção em $x = 0,0 m$

A seção transversal definida por  $x = 0,0 m$  está a uma distância igual a 2,5 vezes a largura da chapa da borda livre. Assim, espera-se que haja uma boa concordância entre ambas as soluções para esta seção, o que de fato pode ser observado através dos gráficos apresentados pelas Figs. 5.18, 5.19, 5.20 e 5.21. As soluções numéricas são praticamente idênticas às soluções analíticas aproximadas. Portanto, conclui-se que as duas soluções apresentam uma ótima concordância para todas as componentes de tensão e deformação na seção analisada.

### 5.3.7.2 - Comparação dos Resultados para a Seção em $x = 0,5 m$

Através das Figs. 5.22, 5.23, 5.24 e 5.25 são mostrados os resultados comparativos para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  na seção transversal definida por  $x = 0,5 m$ .

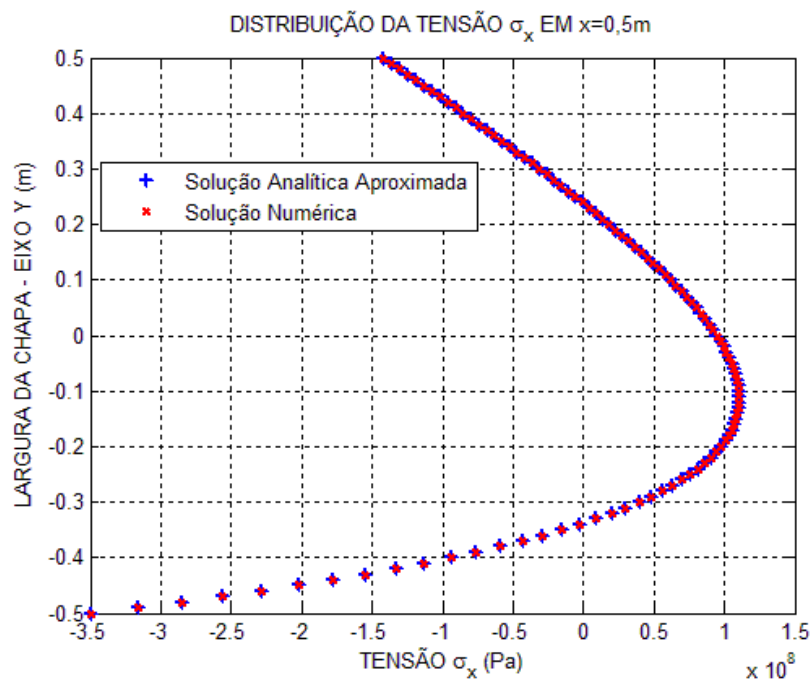


Figura 5.22 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  na Seção Definida por  $x = 0,5 m$

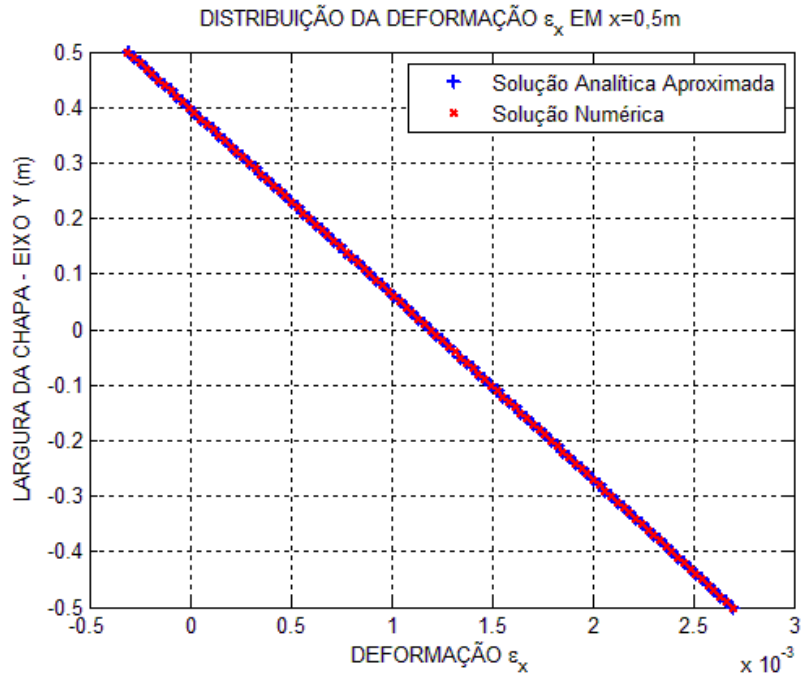


Figura 5.23 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_x$  na Seção Definida por  $x = 0,5 m$

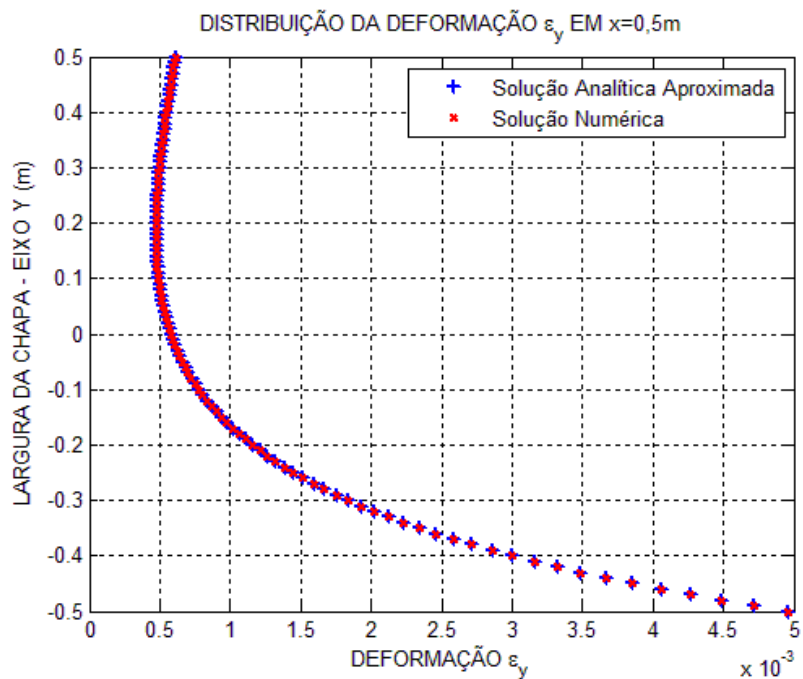


Figura 5.24 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_y$  na Seção Definida por  $x = 0,5 m$

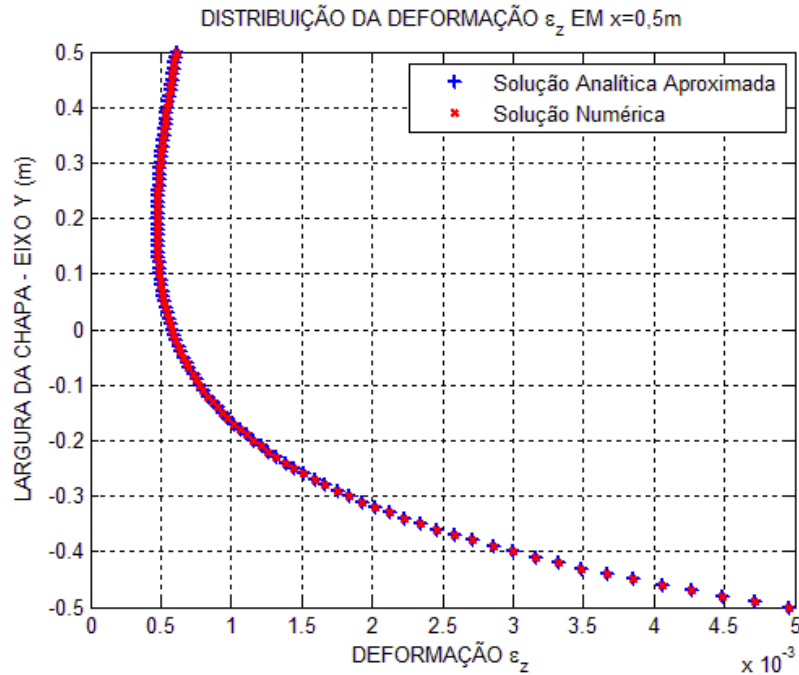


Figura 5.25 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  na Seção Definida por  $x = 0,5 m$

#### 5.3.7.2.1 - Análise dos Gráficos Apresentados para a Seção em $x = 0,5 m$

A seção transversal definida por  $x = 0,5 m$  está a uma distância igual a 2 vezes a largura da chapa em relação à borda livre. Assim, tal como para a seção em  $x = 0,0 m$ , espera-se que haja uma boa concordância entre as soluções nesta seção. Os gráficos apresentados nas Figs. 5.22, 5.23, 5.24 e 5.25 mostram que as soluções analíticas aproximadas e numéricas são praticamente idênticas e apresentam ótima concordância para todas as componentes de tensão e deformação.

#### 5.3.7.3 - Comparação dos Resultados para a Seção em $x = 1,0 m$

Através das Figs. 5.26, 5.27, 5.28 e 5.29 são mostrados os resultados comparativos para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  na seção transversal definida por  $x = 1,0 m$ .

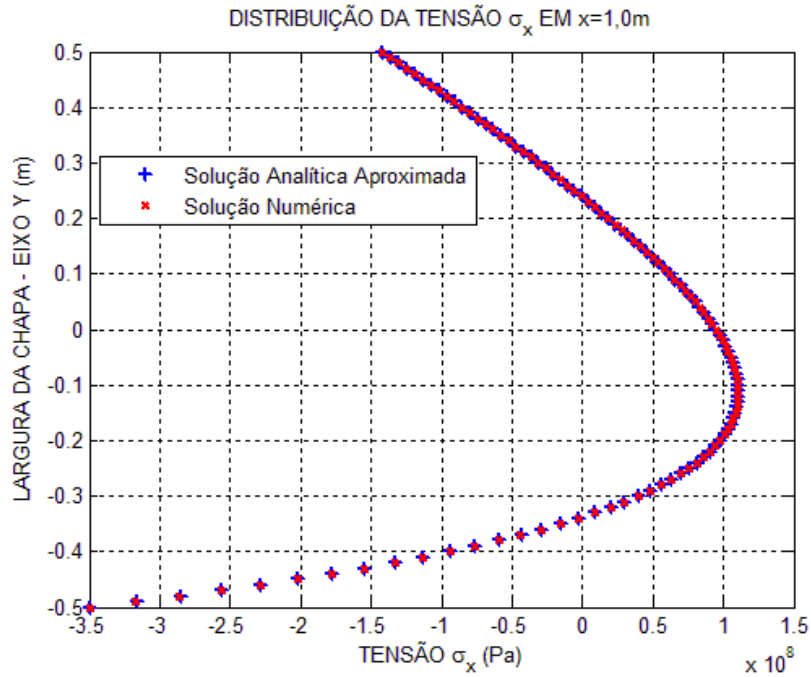


Figura 5.26 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  na Seção Definida por  $x = 1,0 m$

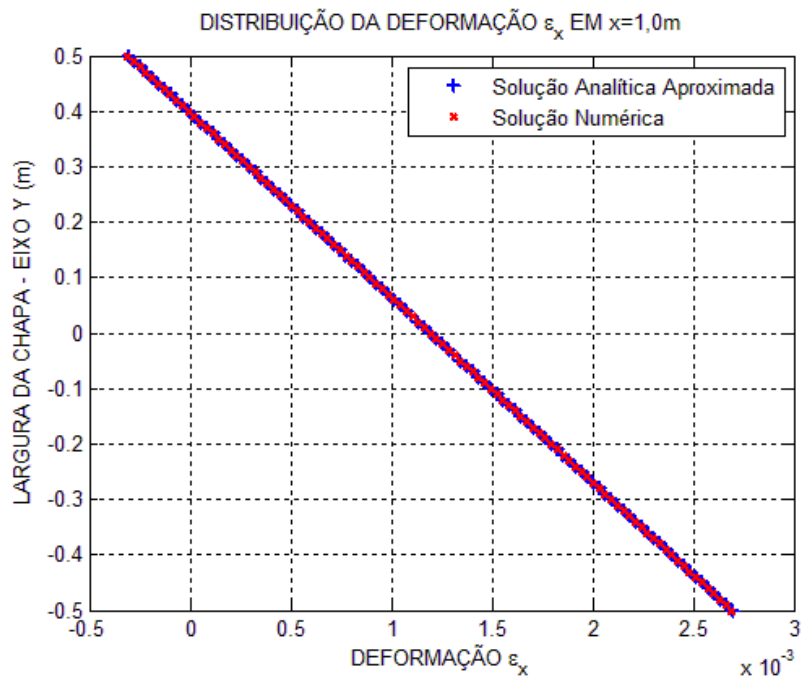


Figura 5.27 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_x$  na Seção Definida por  $x = 1,0 m$

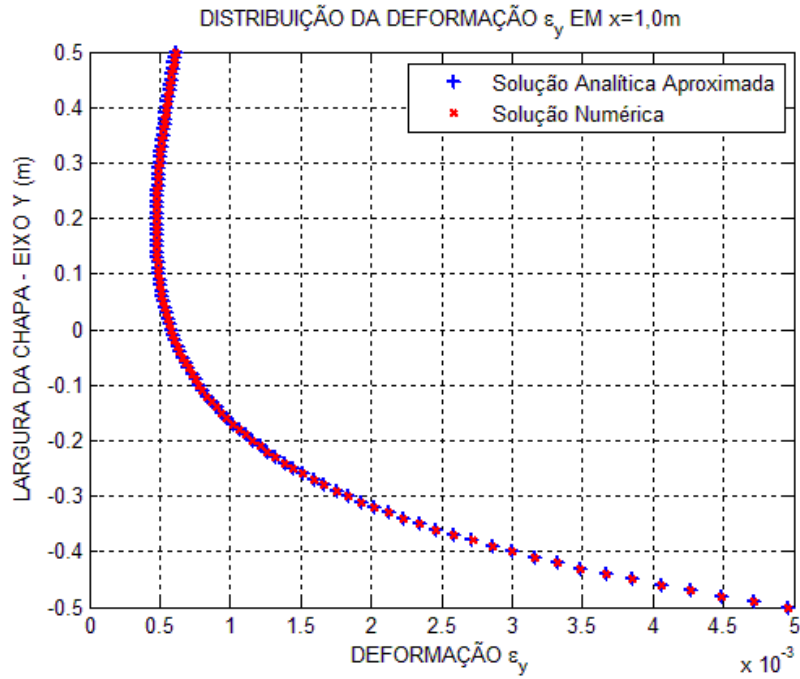


Figura 5.28 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_y$  na Seção Definida por  $x = 1,0 m$

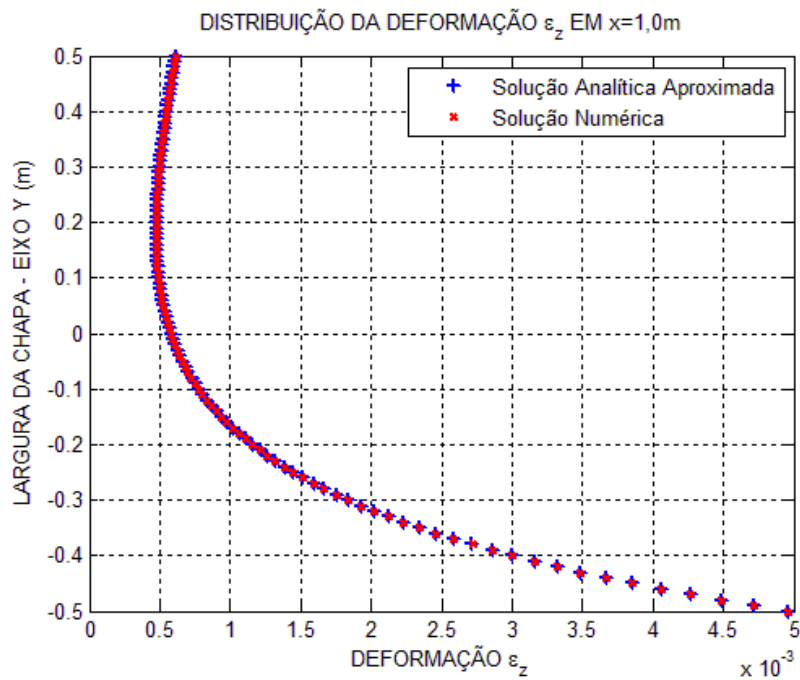


Figura 5.29 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  na Seção Definida por  $x = 1,0 m$



### 5.3.7.3.1 - Análise dos Gráficos Apresentados para a Seção em $x = 1,0 m$

A seção transversal definida por  $x = 1,0 m$  está a uma distância igual a 1,5 vezes a largura da chapa em relação à borda livre. Deste modo, tal como para as seções definidas por  $x = 0,0 m$  e  $x = 0,5 m$ , espera-se que haja uma boa concordância entre ambas as soluções nesta seção. Desta forma, observa-se através dos gráficos apresentados pelas Figs. 5.26, 5.27, 5.28 e 5.29 que as soluções numéricas são praticamente idênticas às soluções analíticas aproximadas. Portanto, mostra-se que as duas soluções se interceptam com ótima concordância para todas as componentes de tensão e deformação em todo o domínio considerado.

### 5.3.7.4 - Comparação dos Resultados para a Seção em $x = 1,5 m$

Nas Figs. 5.30, 5.31, 5.32 e 5.33 são mostrados os resultados comparativos para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  na seção transversal definida por  $x = 1,5 m$ .

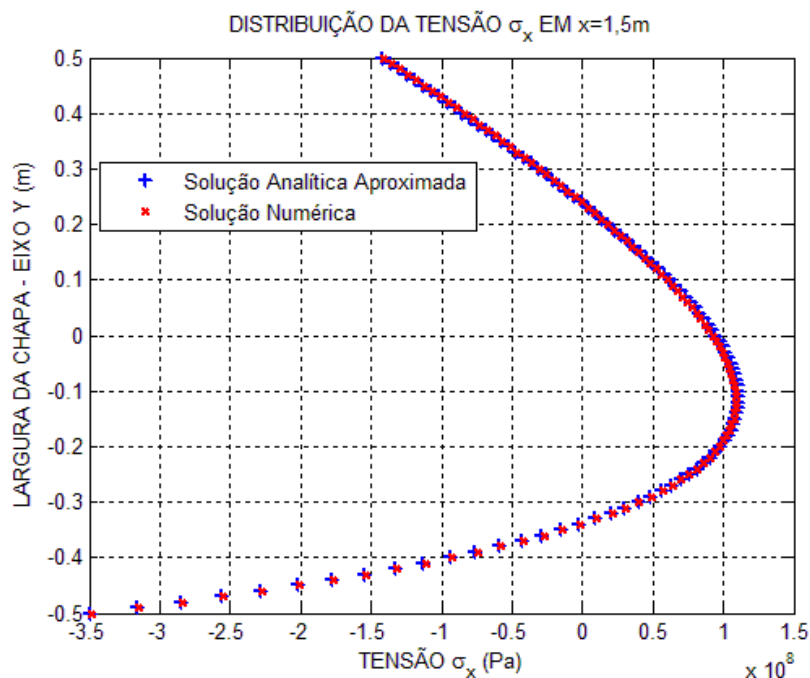


Figura 5.30 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  na Seção Definida por  $x = 1,5 m$

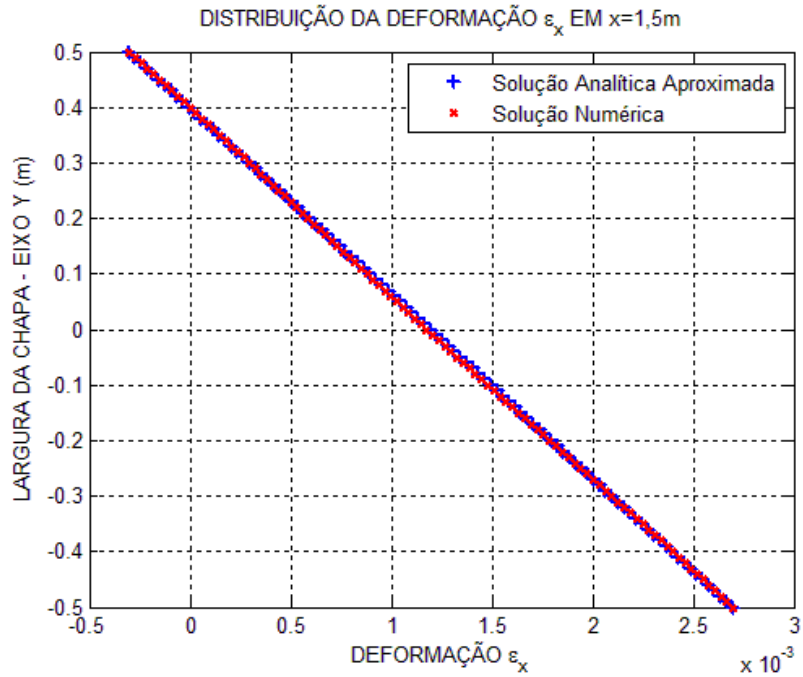


Figura 5.31 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_x$  na Seção Definida por  $x = 1,5 m$

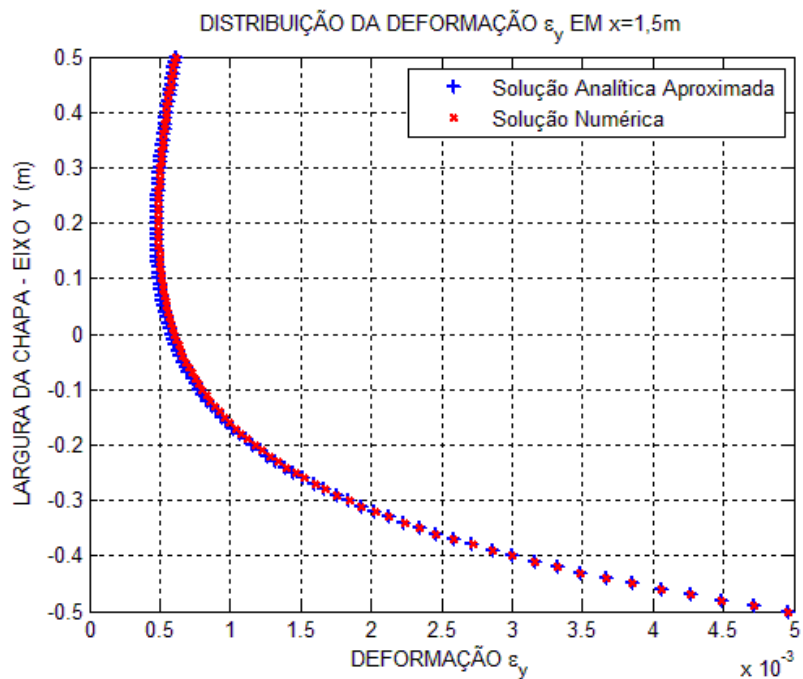


Figura 5.32 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_y$  na Seção Definida por  $x = 1,5 m$

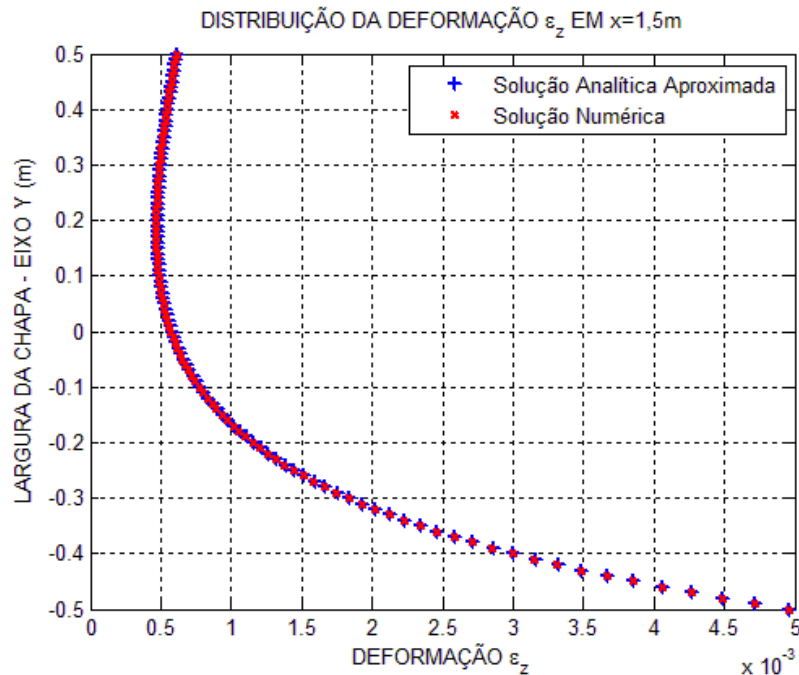


Figura 5.33 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  na Seção Definida por  $x = 1,5 m$

#### 5.3.7.4.1 - Análise dos Gráficos Apresentados para a Seção em $x = 1,5 m$

A seção transversal definida por  $x = 1,5 m$  está a uma distância igual à largura da chapa da borda livre. Deste modo, espera-se que haja uma boa concordância entre as soluções para esta seção, porém uma concordância, talvez, não tão satisfatória quanto para as seções em  $x = 0,0 m$ ,  $x = 0,5 m$  e  $x = 1,0 m$ . Desta forma, observa-se através do gráfico apresentado pela Fig. 5.33 que a solução numérica para a componente de deformação  $\varepsilon_z$  é praticamente idêntica à solução analítica aproximada. O mesmo é observado para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ . Portanto, observa-se que as duas soluções apresentam ótima concordância para todas as componentes de tensão e deformação nesta seção transversal.

### 5.3.7.5 - Comparação dos Resultados para a Seção em $x = 2,0 m$

Através das Figs. 5.34, 5.35, 5.36 e 5.37 são mostrados os resultados comparativos para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  na seção transversal definida por  $x = 2,0 m$ .

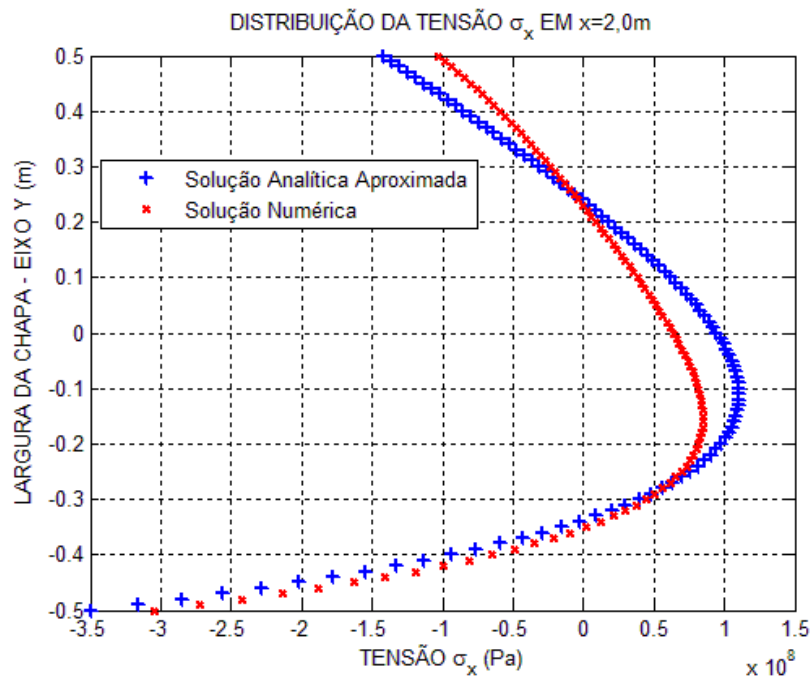


Figura 5.34 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  na Seção Definida por  $x = 2,0 m$

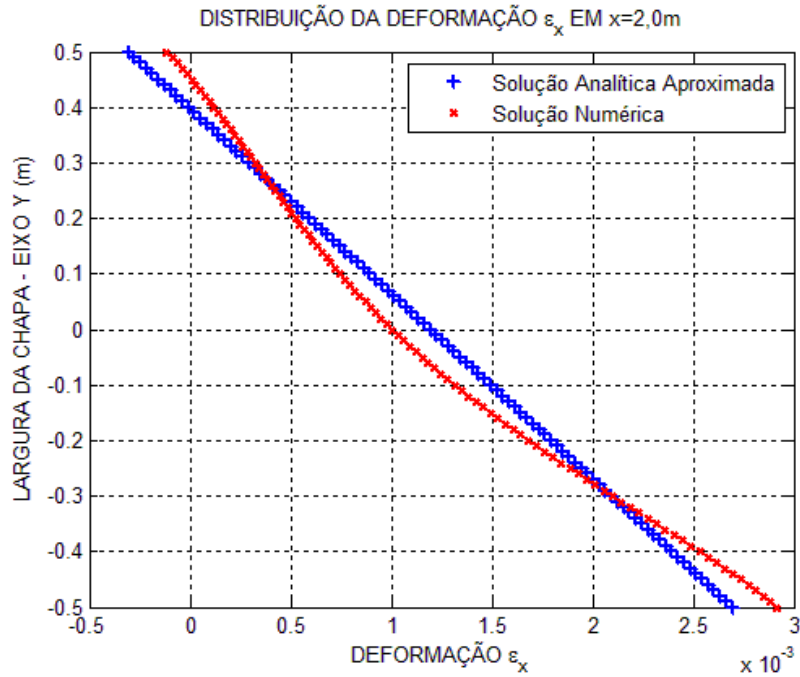


Figura 5.35 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_x$  na Seção Definida por  $x = 2,0 m$

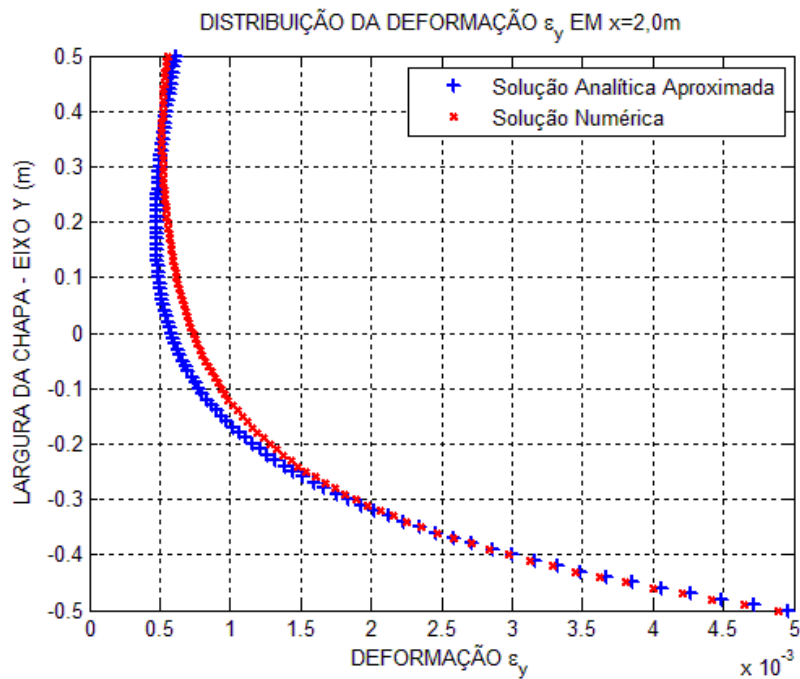


Figura 5.36 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_y$  na Seção Definida por  $x = 2,0 m$

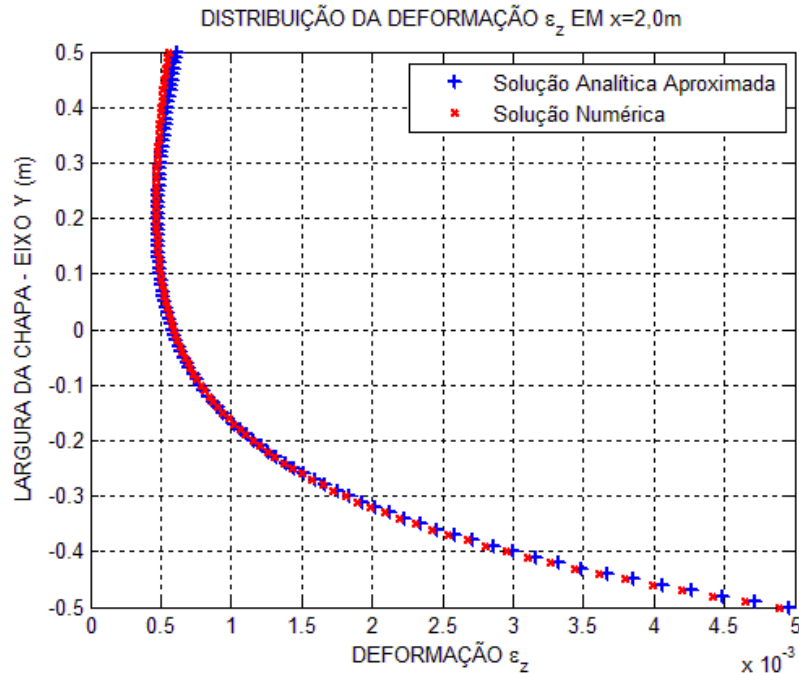


Figura 5.37 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  na Seção Definida por  $x = 2,0 m$

#### 5.3.7.5.1 - Análise dos Gráficos Apresentados para a Seção em $x = 2,0 m$

A seção definida por  $x = 2,0 m$  está a uma distância igual à metade da largura da chapa da borda livre, portanto, as soluções analíticas aproximadas não são válidas nesta seção. Observa-se através dos gráficos apresentados nas Figs. 5.34, 5.35 e 5.36 que as soluções analíticas aproximadas apresentaram níveis de precisão insatisfatórios em relação às respectivas respostas obtidas por meio do MEF/Ansys. Contudo, nota-se que, mesmo estando em uma região fora do limite de validade de solução, a componente de deformação  $\varepsilon_z$  apresenta uma boa aproximação em relação à resposta baseada no MEF. Como se pode observar através da Fig. 5.34, a componente de tensão  $\sigma_x$  está se aproximando de zero devido esta seção estar próxima da borda livre da chapa. Portanto, a resposta analítica aproximada para a componente de deformação  $\varepsilon_z$  apresenta uma boa precisão, ou seja, esta componente é menos influenciada pela borda livre. Entretanto, o mesmo não ocorre para as respostas referentes à componente de tensão  $\sigma_x$  e às componentes de deformação  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  que são mais influenciadas nesta região.

### 5.3.7.6 - Comparação dos Resultados para a Seção em $x = 2,5 m$

Através das Figs. 5.38, 5.39, 5.40 e 5.41 são mostrados os resultados comparativos para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  na seção transversal definida por  $x = 2,5 m$ .

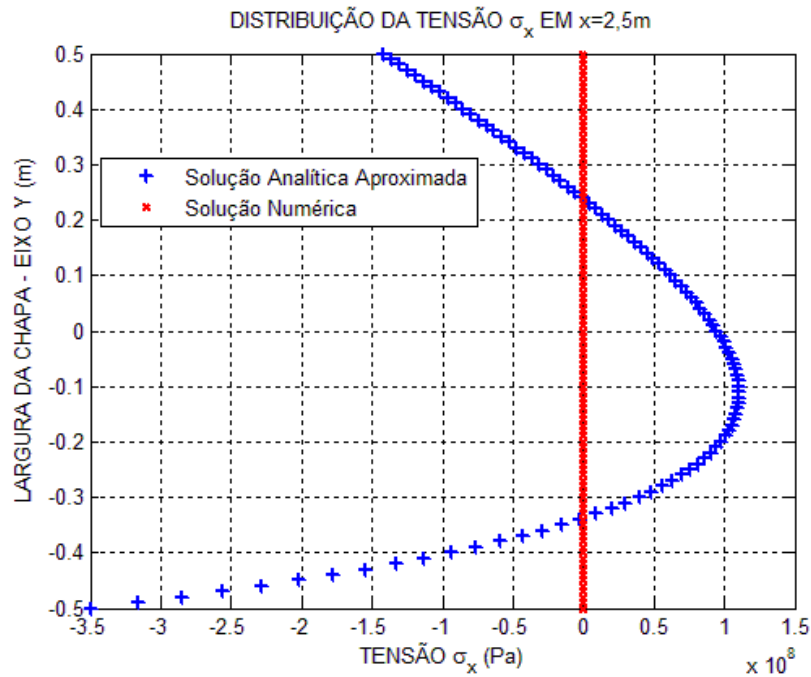


Figura 5.38 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  na Seção Definida por  $x = 2,5 m$

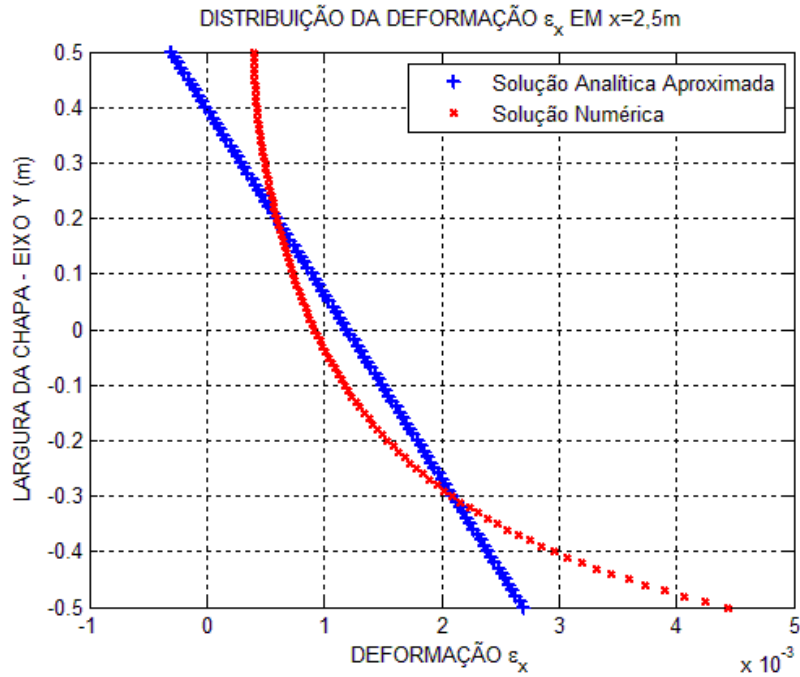


Figura 5.39 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_x$  na Seção Definida por  $x = 2,5 m$

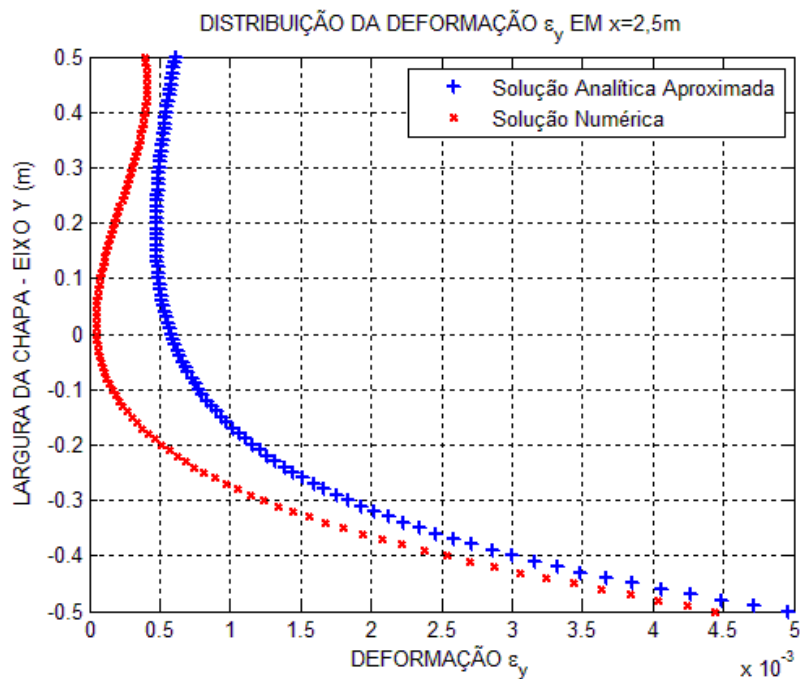


Figura 5.40 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_y$  na Seção Definida por  $x = 2,5 m$



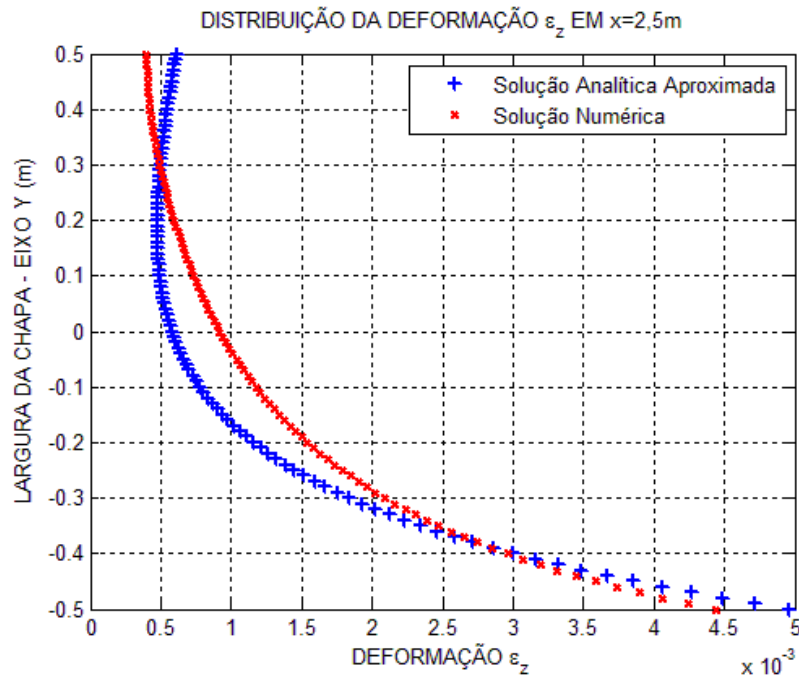


Figura 5.41 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  na Seção Definida por  $x = 2,5 m$

#### 5.3.7.6.1 - Análise dos Gráficos Apresentados para a Seção em $x = 2,5 m$

Esta seção pertence à borda livre da chapa, ou seja, nesta seção as soluções analíticas aproximadas não são válidas porque a borda livre provoca elevado nível de distorção nas componentes de tensão e deformação. Para esta seção a componente de tensão  $\sigma_x$  apresenta valor nulo como indicado através da Fig. 5.38. Observa-se que não há concordância satisfatória entre ambas as soluções para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ . Desta forma, mostra-se que as soluções numéricas para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  apresentam uma aproximação não satisfatória para com as soluções analíticas aproximadas.

#### 5.3.8 - Avaliação Comparativa entre as Soluções

É importante mencionar neste ponto que este trabalho considerou apenas o comportamento linear elástico do material sem preocupar-se com o regime plástico, ou seja, não foi realizada nenhuma análise de falha do material, considerando-se que o aço utilizado nunca entre em

regime de escoamento tanto para a chapa em EPT quanto para a chapa em estado tridimensional. Deste modo, para uma melhor avaliação do grau de precisão da solução analítica aproximada, considera-se uma avaliação comparativa entre as soluções nos pontos onde ocorrem os valores máximos e mínimos para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ . Desta forma, as soluções numéricas são comparadas com as soluções analíticas aproximadas em cada seção onde houve coleta de dados. A avaliação comparativa é mostrada através das Tabs. 5.8 e 5.9 para a componente de tensão  $\sigma_x$  e através das Tabs. 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14 e 5.15 para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ , respectivamente.

### 5.3.8.1 - Avaliação Comparativa para a Componente de Tensão $\sigma_x$

Na Tab. 5.8 são apresentadas as comparações entre as soluções numéricas pelo MEF e analíticas aproximadas nos pontos onde a componente de tensão  $\sigma_x$  apresenta valor máximo pela solução analítica aproximada e na Tab. 5.9 são apresentadas as comparações para o valor mínimo de  $\sigma_x$ .

Tabela 5.8 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente  $\sigma_x$  nas Seções Transversais da Chapa em EPT

Coordenada $x$ da Seção ( $m$ )	Coordenada $y$ do Valor Máximo ( $m$ )	Tensão $\sigma_x$ Analítica ( $MPa$ )	Tensão $\sigma_x$ Numérica ( $MPa$ )	Diferença (%)
0,0	-0,11	110,525	110,530	0,00452
0,5	-0,11	110,525	110,580	0,0498
1,0	-0,11	110,525	110,750	0,204
1,5	-0,11	110,525	109,050	1,335
2,0	-0,11	110,525	82,549	25,312

Tabela 5.9 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente  $\sigma_x$  nas Seções Transversais da Chapa em EPT

Coordenada $x$ da Seção ( $m$ )	Coordenada $y$ do Valor Mínimo ( $m$ )	Tensão $\sigma_x$ Analítica (MPa)	Tensão $\sigma_x$ Numérica (MPa)	Diferença (%)
0,0	-0,50	-349,056	-349,010	0,0131
0,5	-0,50	-349,056	-349,070	0,00407
1,0	-0,50	-349,056	-349,570	0,147
1,5	-0,50	-349,056	-348,510	0,156
2,0	-0,50	-349,056	-304,270	12,831

### 5.3.8.2 - Avaliação Comparativa para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$

Na Tab. 5.10 são apresentadas as comparações entre as soluções numéricas pelo MEF e analíticas aproximadas nos pontos onde a componente de deformação  $\varepsilon_x$  apresenta valor máximo pela solução analítica aproximada e na Tab. 5.11 são apresentadas as comparações para o valor mínimo de  $\varepsilon_x$ .

Tabela 5.10 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente  $\varepsilon_x$  nas Seções Transversais da Chapa em EPT

Coordenada $x$ da Seção ( $m$ )	Coordenada $y$ do Valor Máximo ( $m$ )	Deformação $\varepsilon_x$ Analítica	Deformação $\varepsilon_x$ Numérica	Diferença (%)
0,0	-0,50	0,002694755020302	0,0026948	0,00167
0,5	-0,50	0,002694755020302	0,0026944	0,0132
1,0	-0,50	0,002694755020302	0,002692	0,102
1,5	-0,50	0,002694755020302	0,0026972	0,0907
2,0	-0,50	0,002694755020302	0,0029185	8,303

Tabela 5.11 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente  $\varepsilon_x$  nas Seções Transversais da Chapa em EPT

Coordenada $x$ da Seção ( $m$ )	Coordenada $y$ do Valor Mínimo ( $m$ )	Deformação $\varepsilon_x$ Analítica	Deformação $\varepsilon_x$ Numérica	Diferença (%)
0,0	0,50	-0,00030643241	-0,00030642	0,00405
0,5	0,50	-0,00030643241	-0,00030676	0,107
1,0	0,50	-0,00030643241	-0,00030921	0,906
1,5	0,50	-0,00030643241	-0,00030358	0,931
2,0	0,50	-0,00030643241	-0,00011399	62,801

### 5.3.8.3 - Avaliação Comparativa para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$

Na Tab. 5.12 são apresentadas as comparações entre as soluções numéricas pelo MEF e analíticas aproximadas nos pontos onde a componente de deformação  $\varepsilon_y$  apresenta valor máximo pela solução analítica aproximada e na Tab. 5.13 são apresentadas as comparações para o valor mínimo de  $\varepsilon_y$ .

Tabela 5.12 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente  $\varepsilon_y$  nas Seções Transversais da Chapa em EPT

Coordenada $x$ da Seção ( $m$ )	Coordenada $y$ do Valor Máximo ( $m$ )	Deformação $\varepsilon_y$ Analítica	Deformação $\varepsilon_y$ Numérica	Diferença (%)
0,0	-0,50	0,0049636177	0,0049633	0,00640
0,5	-0,50	0,0049636177	0,0049634	0,00439
1,0	-0,50	0,0049636177	0,0049642	0,0117
1,5	-0,50	0,0049636177	0,0049626	0,0205
2,0	-0,50	0,0049636177	0,0048962	1,358

Tabela 5.13 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente  $\varepsilon_y$  nas Seções Transversais da Chapa em EPT

Coordenada $x$ da Seção ( $m$ )	Coordenada $y$ do Valor Mínimo ( $m$ )	Deformação $\varepsilon_y$ Analítica	Deformação $\varepsilon_y$ Numérica	Diferença (%)
0,0	0,19	0,00047354101	0,0004735	0,00866
0,5	0,19	0,00047354101	0,00047332	0,0467
1,0	0,19	0,00047354101	0,00047381	0,0568
1,5	0,19	0,00047354101	0,00049064	3,611
2,0	0,19	0,00047354101	0,00055965	18,184

#### 5.3.8.4 - Avaliação Comparativa para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$

Na Tab. 5.14 são apresentadas as comparações entre as soluções numéricas pelo MEF e analíticas aproximadas nos pontos onde a componente de deformação  $\varepsilon_z$  apresenta valor máximo pela solução analítica aproximada e na Tab. 5.15 são apresentadas as comparações para o valor mínimo de  $\varepsilon_z$ .

Tabela 5.14 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente  $\varepsilon_z$  nas Seções Transversais da Chapa em EPT

Coordenada $x$ da Seção ( $m$ )	Coordenada $y$ do Valor Máximo ( $m$ )	Deformação $\varepsilon_z$ Analítica	Deformação $\varepsilon_z$ Numérica	Diferença (%)
0,0	-0,50	0,0049636177	0,0049633	0,00640
0,5	-0,50	0,0049636177	0,0049634	0,00439
1,0	-0,50	0,0049636177	0,0049642	0,0117
1,5	-0,50	0,0049636177	0,0049626	0,0205
2,0	-0,50	0,0049636177	0,0048962	1,358

Tabela 5.15 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente  $\varepsilon_z$  nas Seções Transversais da Chapa em EPT

Coordenada $x$ da Seção ( $m$ )	Coordenada $y$ do Valor Mínimo ( $m$ )	Deformação $\varepsilon_z$ Analítica	Deformação $\varepsilon_z$ Numérica	Diferença (%)
0,0	0,19	0,00047354101	0,00047357	0,00612
0,5	0,19	0,00047354101	0,00047358	0,00823
1,0	0,19	0,00047354101	0,00047317	0,0783
1,5	0,19	0,00047354101	0,00046938	0,879
2,0	0,19	0,00047354101	0,00046927	0,902

### 5.3.9 - Análise de Resultados ao Longo do Eixo $x$

A análise de resultados para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ , respectivamente, foi apresentada através das Tabs. 5.8, 5.9, 5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14 e 5.15. Esta mesma análise é apresentada de forma gráfica através das Figs. 5.42, 5.43, 5.44 e 5.45. Nestas figuras também é estabelecida uma margem de diferença máxima tolerável, estipulada como 5%, da solução analítica aproximada em relação à solução baseada no MEF/Ansys. Assume-se este valor por ser bastante utilizado em projetos de engenharia. Também é mostrada a coordenada  $x$  limite de validade da solução analítica aproximada, ou seja, de acordo com o princípio de Saint-Venant, espera-se que as soluções analíticas aproximadas sejam válidas para coordenadas  $x \leq 1,5 m$ .

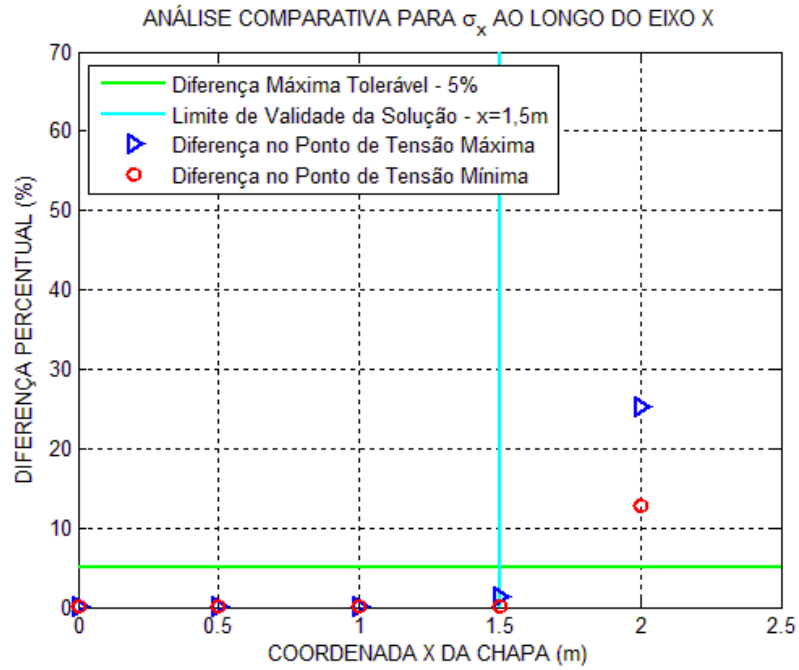


Figura 5.42 - Comparação de Resultados da Componente de Tensão  $\sigma_x$  na Chapa em EPT

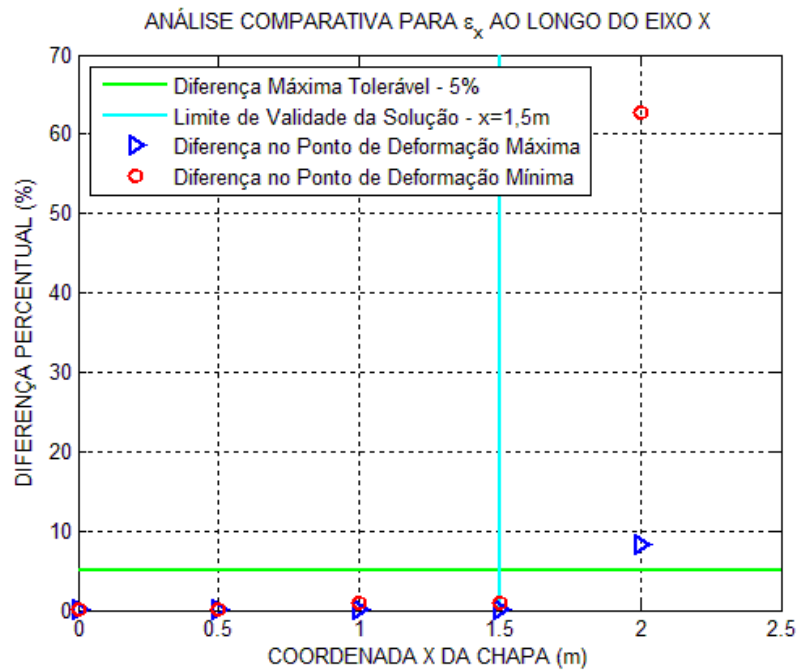


Figura 5.43 - Comparação de Resultados da Componente de Deformação  $\epsilon_x$  na Chapa em EPT

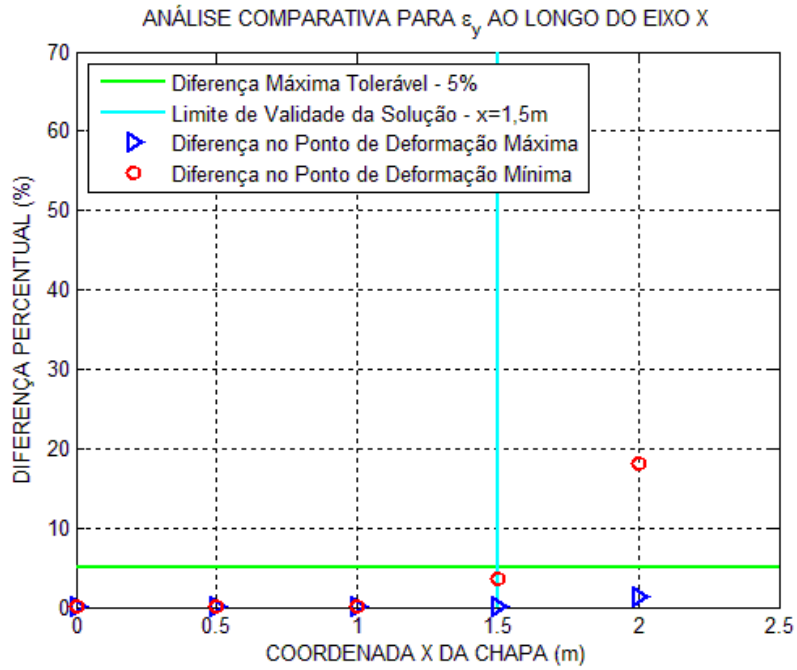


Figura 5.44 - Comparação de Resultados da Componente de Deformação  $\epsilon_y$  na Chapa em EPT

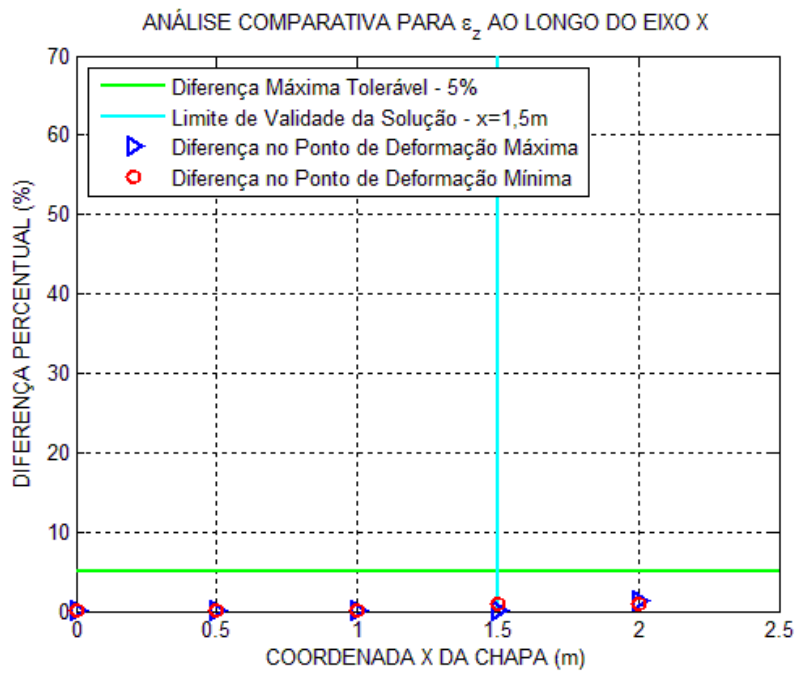


Figura 5.45 - Comparação de Resultados da Componente de Deformação  $\epsilon_z$  na Chapa em EPT



### 5.3.10 - Análise dos Resultados

Inicialmente, salienta-se que a comparação de resultados para a seção situada na coordenada  $x = 2,5 m$  não foi apresentada por se tratar da borda livre da chapa. Outra questão a ser ressaltada é que os resultados na seção definida na coordenada  $x = 2,0 m$  foram apresentados para avaliar a precisão da solução analítica aproximada em pontos próximos á borda livre da chapa, onde as condições de contorno são atendidas de forma relaxada.

#### 5.3.10.1 - Análise dos Resultados para a Componente de Tensão $\sigma_x$

Observa-se através da Fig. 5.42 que as diferenças ficaram abaixo da faixa dos 5% toleráveis para os pontos situados no domínio de validade da solução analítica aproximada. Observa-se através das Tabs. 5.8 e 5.9 que as maiores diferenças em relação à solução analítica aproximada ocorrem na seção situada em  $x = 2,0 m$ . Os pontos desta seção situam-se a uma distância igual à metade da largura da chapa da borda livre. Nesta região, pela consideração do princípio de Saint-Venant, a solução não é válida pelo fato das respostas nesses pontos serem afetadas pelas condições de contorno reais da borda livre da chapa. Nesta região, a componente de tensão  $\sigma_x$  decai de seu valor máximo, para pontos distantes das bordas, até atingir valor nulo na borda livre da chapa. Este fato pode ser verificado através dos valores obtidos através do MEF, apresentados para a componente de tensão  $\sigma_x$ , na seção situada em  $x = 2,0 m$ . Nesta seção, como se pode observar através das Tabs. 5.8 e 5.9, a componente de tensão  $\sigma_x$  apresenta valor numérico 25,312% menor que o valor analítico aproximado no ponto de tensão máxima e valor numérico 12,831% menor em módulo que o valor analítico aproximado no ponto de tensão mínima. Portanto, a seção mais próxima da borda onde a solução ainda é válida é na seção situada em  $x = 1,5 m$ . Esta seção está a uma distância igual à largura da chapa da borda livre. Para esta seção, como se pode observar através das Tabs. 5.8 e 5.9, a componente de tensão  $\sigma_x$  apresenta uma diferença de 1,335% para o ponto de tensão máxima e uma diferença de 0,156% para o ponto de tensão mínima. Estas diferenças estão dentro da margem de 5% que é normalmente utilizada em projetos de engenharia. Nas seções situadas em coordenadas menores que  $x = 1,5 m$ , ou seja, para  $x = 0,0 m$ ,  $x = 0,5 m$  e  $x = 1,0 m$ , as diferenças nos pontos de máxima e mínima tensão não chegaram a atingir

0,3% mostrando que a solução analítica aproximada é satisfatória para pontos situados a distâncias maiores ou iguais à largura da chapa da borda livre.

#### **5.3.10.2 - Análise dos Resultados para as Componentes de Deformação $\varepsilon_x$ e $\varepsilon_y$**

Inicialmente, observa-se através das Figs. 5.43 e 5.44 que as diferenças ficaram abaixo da faixa dos 5% toleráveis para os pontos situados no domínio de validade da solução analítica aproximada tanto para a componente de deformação  $\varepsilon_x$  quanto para a componente de deformação  $\varepsilon_y$ . Observa-se através das Tabs. 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13 que as maiores diferenças em relação à solução analítica aproximada ocorrem na seção situada em  $x = 2,0 m$  para as duas componentes de deformação. As diferenças apresentadas para esta seção são de 8,303% para  $\varepsilon_x$  e 1,358% para  $\varepsilon_y$  no ponto de deformação máxima e de 62,801% para  $\varepsilon_x$  e 18,184% para  $\varepsilon_y$  no ponto de deformação mínima. Para a seção situada em  $x = 1,5 m$  as diferenças foram de 0,0907% para  $\varepsilon_x$  e 0,0205% para  $\varepsilon_y$  no ponto de deformação máxima e de 0,931% para  $\varepsilon_x$  e 3,611% para  $\varepsilon_y$  no ponto de deformação mínima. Estas diferenças estão dentro da margem de 5% que é normalmente utilizada em projetos de engenharia. Nas seções situadas em coordenadas menores que  $x = 1,5 m$ , ou seja, para  $x = 0,0 m$ ,  $x = 0,5 m$  e  $x = 1,0 m$ , as diferenças nos pontos de máxima e mínima deformação não chegaram a atingir 1,0% com relação às duas componentes de deformação mostrando que as soluções analíticas aproximadas são satisfatórias para pontos situados a distâncias maiores ou iguais à largura da chapa da borda livre.

#### **5.3.10.3 - Análise dos Resultados para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$**

Inicialmente, observa-se através da Fig. 5.45 que as diferenças ficaram abaixo da faixa dos 5% toleráveis para os pontos situados no domínio de validade da solução analítica aproximada. Observa-se através das Tabs. 5.14 e 5.15 que as maiores diferenças em relação à solução analítica aproximada ocorrem na seção situada em  $x = 2,0 m$ . Nesta seção a componente de deformação  $\varepsilon_z$  apresenta valor numérico 1,358% menor que o valor analítico aproximado no ponto de deformação máxima e valor numérico 0,902% menor que o valor analítico aproximado no ponto de deformação mínima. Para a seção situada em  $x = 1,5 m$ ,

como se observa através das Tabs. 5.14 e 5.15, a componente de deformação  $\varepsilon_z$  apresenta uma diferença de 0,0205% para o ponto de deformação máxima e uma diferença de 0,879% para o ponto de deformação mínima. Estas diferenças estão dentro da margem de 5% que é normalmente utilizada em projetos de engenharia. Nas seções situadas em coordenadas menores que  $x = 1,5 m$ , ou seja, para  $x = 0,0 m$ ,  $x = 0,5 m$  e  $x = 1,0 m$ , as diferenças nos pontos de máxima e mínima deformação não chegaram a atingir 0,08% mostrando que a solução analítica aproximada é satisfatória para pontos situados a distâncias maiores ou iguais à largura da chapa da borda livre.

## **5.4 - Chapa Plana Retangular Isotrópica no Estado Tridimensional**

### **5.4.1 - Processo de Têmpera**

Nesta seção será analisada uma chapa plana isotrópica quadrada de lado muito maior que a espessura. Esta chapa é submetida ao processo de têmpera. A têmpera é um processo de fabricação muito utilizado na indústria para aumentar a dureza e resistência mecânica dos materiais. O processo de têmpera é mostrado através da Fig. 5.46. Na aplicação deste processo a chapa é resfriada bruscamente em um meio líquido de temperatura muito inferior à sua temperatura inicial. Neste caso, a maior parte da troca de calor da chapa com o meio líquido ocorre nas superfícies definidas pelos planos  $y = \pm b$ . Pelo fato da espessura, dimensão ao longo da coordenada  $y$ , ser muito inferior aos lados, dimensões ao longo dos eixos  $x$  e  $z$ , considera-se que a condução no interior da chapa se dê exclusivamente na direção de  $y$  (INCROPERA et al., 2008). Neste caso, pode-se considerar que a distribuição de temperatura no interior da chapa seja função apenas da coordenada  $y$ . Com base nestas considerações, aplicam-se as soluções obtidas no capítulo 4 para a determinação dos campos de tensão e deformação térmicas.

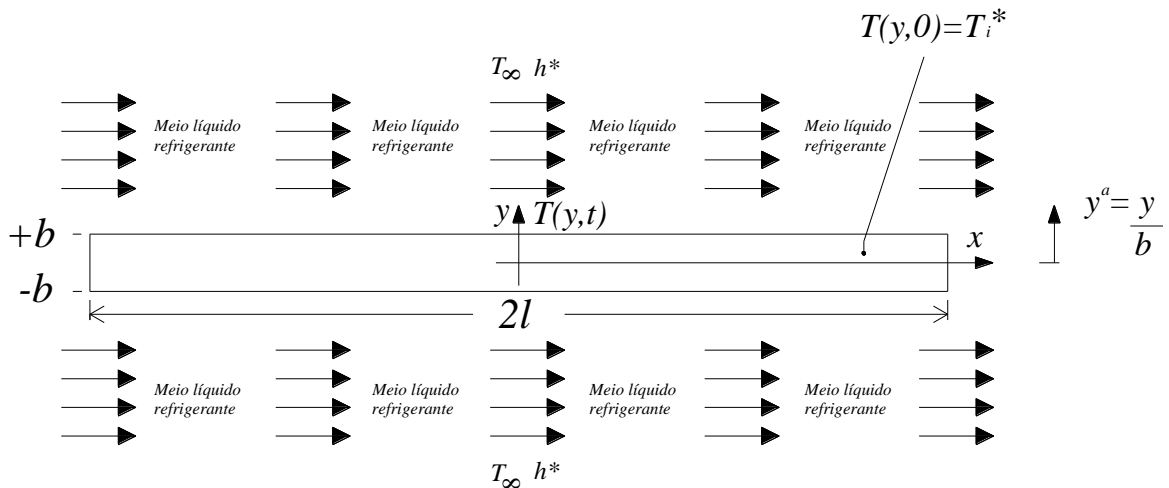


Figura 5.46 - Chapa Plana Isotrópica em Estado Tridimensional Submetida ao Processo de Têmpera

Os parâmetros do processo de têmpera, mostrados através da Fig. 5.46, são definidos através da Tab. 5.16.

Tabela 5.16 - Parâmetros no Processo de Têmpera Apresentados pela Fig. 5.46

Descrição	Símbolo
Temperatura da Chapa em $y$ no Instante de Tempo $t$	$T(y, t)$
Temperatura da Chapa no Instante $t = 0$	$T_i^*$
Coefficiente de Convecção do Meio Refrigerante	$h^*$
Temperatura do Meio Refrigerante	$T_\infty$
Espessura da Chapa	$2b$
Lado da Chapa	$2l$

### 5.4.1.1 - Determinação das Equações que Regem o Problema de Condução de Calor

A distribuição de temperatura atuante na chapa da Fig. 5.46 é encontrada através da solução da equação do calor. Esta equação é representada através da seguinte equação diferencial (INCROPERA et al., 2008):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho_e c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{5.32}$$

Esta equação é a forma geral da equação diferencial da difusão de calor em coordenadas cartesianas e é a ferramenta básica para a análise da condução de calor (INCROPERA et al., 2008). O problema de condução de calor mostrado na Fig. 5.46 se trata de um problema unidimensional onde não há geração de energia interna na chapa ( $\dot{q} = 0$ ). Assume-se ainda que a condutividade térmica do material da chapa seja constante ( $k = \text{constante}$ ). Aplicando-se estas simplificações à equação do calor (Eq. (5.32)), obtém-se (INCROPERA et al., 2008):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.33)$$

Para a solução da Eq. (5.33) é necessário especificar uma condição inicial e duas condições de contorno. Neste caso, a condição inicial será dada por (INCROPERA et al., 2008):

$$T(y, 0) = T_i^* \quad (5.34)$$

Ou seja, no instante de tempo  $t = 0$  assume-se que a chapa possua temperatura constante igual a  $T_i^*$ . A primeira condição de contorno é dada através da seguinte relação (INCROPERA et al., 2008):

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (5.35)$$

Esta condição de contorno representa a simetria do campo de temperatura atuante na chapa. Ou seja, como as condições convectivas são as mesmas nos planos definidos por  $y = \pm b$ , assume-se que a distribuição de temperatura seja simétrica com relação ao plano definido por  $y = 0$  (Fig. 5.46). A segunda condição de contorno é dada pela seguinte expressão (INCROPERA et al., 2008):

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=b} = h^* [T(b, t) - T_\infty] \quad (5.36)$$

Esta condição de contorno se refere à troca de calor que ocorre nas superfícies  $y = \pm b$  para instantes de tempo  $t > 0$ .

Pode-se verificar, através de uma análise das Eqs. (5.33), (5.34) e (5.36), que a distribuição de temperatura  $T(y, t)$ , além de ser função dos parâmetros  $y$  e  $t$ , é também dependente de uma série de outros parâmetros, ou seja:

$$T = T(y, t, T_i^*, T_\infty, b, k, \alpha_T, h^*) \quad (5.37)$$

Estes parâmetros são descritos através da Tab. 5.17.

Tabela 5.17 - Parâmetros da Equação Diferencial e Condições de Contorno no Processo de Têmpera

Descrição	Símbolo
Temperatura da Chapa em $y$ no Instante de Tempo $t$	$T(y, t)$
Tempo	$t$
Temperatura da Chapa no Instante $t = 0$	$T_i^*$
Temperatura do Meio Refrigerante	$T_\infty$
Espessura da Chapa	$2b$
Condutividade Térmica do Material da Chapa	$k$
Difusividade Térmica do Material da Chapa	$\alpha_T$
Coefficiente de Convecção do Meio Refrigerante	$h^*$

Sendo a distribuição de temperatura na chapa ( $T(y, t)$ ) função de vários parâmetros, a forma adimensional das equações que descrevem o processo representaria uma grande vantagem para a solução destas equações (INCROPERA et al., 2008). Deste modo, uma forma adimensional da variável dependente  $T$  é dada através da seguinte relação (INCROPERA et al., 2008):

$$\theta^* \equiv \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i^* - T_\infty}, \quad \text{para } 0 \leq \theta^* \leq 1 \quad (5.38)$$

A coordenada espacial adimensional será dada por (INCROPERA et al., 2008):

$$y^a \equiv \frac{y}{b} \quad (5.39)$$

Na Eq. (5.39) o termo  $b$  representa a meia espessura da chapa. O tempo adimensional será dado pela seguinte relação (INCROPERA et al., 2008):

$$t^* \equiv F_o \equiv \frac{\alpha_T t}{b^2} \quad (5.40)$$

Na Eq. (5.40) o termo  $F_o$  representa o número de Fourier. A substituição dos parâmetros adimensionais (Eqs. (5.38), (5.39) e (5.40)) nas Eqs. (5.33), (5.34), (5.35) e (5.36) resulta na seguinte equação diferencial adimensional (INCROPERA et al., 2008):

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial y^{a^2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial F_o} \quad (5.41)$$

E resulta na seguinte condição inicial e condições de contorno (INCROPERA et al., 2008):

$$\theta^*(y^a, 0) = 1 \quad (5.42)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial y^a} \right|_{y^a=0} = 0 \quad (5.43)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial y^a} \right|_{y^a=1} = -Bi \theta^*(1, t^*) \quad (5.44)$$

Na Eq. (5.44) o termo  $Bi$  representa o número de Biot que é definido como:

$$Bi \equiv \frac{h^* b}{k} \quad (5.45)$$

Agora, a dependência funcional escrita na forma adimensional fica da seguinte forma (INCROPERA et al., 2008):

$$\theta^* = f(y^a, F_o, Bi) \quad (5.46)$$

Os parâmetros que aparecem na Eq. (5.41), na condição inicial (Eq. (5.42)) e nas condições de contorno (Eqs. (5.43) e (5.44)) são mostrados através da Tab. 5.18.

Tabela 5.18 - Parâmetros da Equação Diferencial e Condições de Contorno no Formato Adimensional

Descrição	Símbolo
Temperatura Adimensional	$\theta^*$
Coordenada Espacial Adimensional	$y^a$
Tempo Adimensional	$t^*$
Número de Fourier	$F_o$
Número de Biot	$Bi$

#### 5.4.1.2 - Solução Exata e Aproximada para a Distribuição de Temperatura

A solução exata para a Eq. (5.41), condição inicial (Eq. (5.42)) e condições de contorno (Eqs. (5.43) e (5.44)) tem a seguinte forma (INCROPERA et al., 2008):

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \exp(-\zeta_n^{*2} F_o) \cos(\zeta_n^* y^a) \quad (5.47)$$

Na Eq. (5.47) o coeficiente  $C_n^*$  é dado pela seguinte expressão:

$$C_n^* = \frac{4 \operatorname{sen} \zeta_n^*}{2 \zeta_n^* + \operatorname{sen}(2 \zeta_n^*)} \quad (5.48)$$

Nas Eqs. (5.47) e (5.48) os valores discretos de  $\zeta_n^*$  são dados pelas raízes positivas da seguinte equação transcendental:

$$\zeta_n^* \tan \zeta_n^* = Bi \quad (5.49)$$

Para valores de  $F_o > 0,2$ , a solução dada pela Eq. (5.47) pode ser aproximada pelo primeiro termo da série, ou seja, (INCROPERA et al., 2008):

$$\theta^* = C_1^* \exp(-\zeta_1^{*2} F_o) \cos(\zeta_1^* y^a) \quad (5.50)$$



### 5.4.1.3 - Determinação da Distribuição de Temperatura

Para a determinação da distribuição de temperatura na chapa submetida ao processo de têmpera, considera-se o mesmo aço utilizado na análise feita na seção 5.3 para o EPT, ou seja, será considerado o aço SAE 1020, cujas propriedades mecânicas são apresentadas na Tab. 5.6. Além disto, assumem-se os valores apresentados na Tab. 5.19 para os parâmetros utilizados no processo de têmpera.

A substituição dos parâmetros  $b$ ,  $h^*$  e  $k$ , apresentados através da Tab. 5.19, resulta no seguinte valor para o número de Biot:

$$Bi \equiv \frac{h^*b}{k} = \frac{1038 \times 0,005}{51,9} = 0,1 \quad (5.51)$$

A partir deste valor são encontradas as raízes  $\zeta_n^*$  e constantes  $C_n^*$  presentes nas Eqs. (5.47) e (5.48). Os valores para estas raízes e constantes são apresentados através da Tab. 5.20.

Tabela 5.19 - Valores dos Parâmetros Utilizados no Processo de Têmpera na Chapa em Estado Tridimensional

Descrição	Símbolo	Valor
Temperatura da Chapa no Instante $t = 0$	$T_i^*$	300 °C
Temperatura do Meio Refrigerante	$T_\infty$	25 °C
Espessura da Chapa	$2b$	0,01 m
Lado da Chapa	$2l$	0,08 m
Condutividade Térmica do Material da Chapa	$k$	51,9 W/m · K
Difusividade Térmica do Material da Chapa	$\alpha_T$	$1,3566 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Coefficiente de Convecção do Meio Refrigerante	$h^*$	1038 W/m <sup>2</sup> · K

Tabela 5.20 - Valores das Raízes  $\zeta_n^*$  e Constantes  $C_n^*$  (Fonte: INCROPERA et al., 2008)

Número de Biot ( $Bi$ )	$\zeta_n^*$	$C_n^*$
0,1	0,3111	1,0161
	3,1731	-0,0197
	6,2991	0,00504
	9,4354	-0,00225

Para a determinação da distribuição de temperatura, consideram-se 4 termos da série dada através da Eq. (5.47). Deste modo, o parâmetro  $\theta^*$  será dado através da seguinte relação:

$$\theta^* = C_1^* \exp(-\zeta_1^{*2} F_o) \cos(\zeta_1^* y^a) + C_2^* \exp(-\zeta_2^{*2} F_o) \cos(\zeta_2^* y^a) + C_3^* \exp(-\zeta_3^{*2} F_o) \cos(\zeta_3^* y^a) + C_4^* \exp(-\zeta_4^{*2} F_o) \cos(\zeta_4^* y^a) \quad (5.52)$$

Substituindo-se os valores das raízes  $\zeta_n^*$  e das constantes  $C_n^*$  na Eq. (5.52), encontra-se a seguinte expressão:

$$\theta^* = 1,0161 e^{(-0,0968 F_o)} \cos(0,3111 y^a) - 0,0197 e^{(-10,0686 F_o)} \cos(3,1731 y^a) + 0,00504 e^{(-39,679 F_o)} \cos(6,2991 y^a) - 0,00225 e^{(-89,0268 F_o)} \cos(9,4354 y^a) \quad (5.53)$$

Para obtenção da equação em termos dimensionais, são substituídos os parâmetros adimensionais  $\theta^*$ ,  $F_o$  e  $y^a$  na Eq. (5.53). Deste modo, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{T - T_\infty}{T_i^* - T_\infty} = 1,0161 e^{(-0,0968 \frac{\alpha_T t}{b^2})} \cos\left(0,3111 \frac{y}{b}\right) - 0,0197 e^{(-10,0686 \frac{\alpha_T t}{b^2})} \cos\left(3,1731 \frac{y}{b}\right) + 0,00504 e^{(-39,679 \frac{\alpha_T t}{b^2})} \cos\left(6,2991 \frac{y}{b}\right) - 0,00225 e^{(-89,0268 \frac{\alpha_T t}{b^2})} \cos\left(9,4354 \frac{y}{b}\right) \quad (5.54)$$

Substituindo-se os valores de  $T_i^*$ ,  $T_\infty$ ,  $\alpha_T$  e  $b$  na Eq. (5.54) e rearranjando-se os termos, obtém-se a seguinte distribuição de temperatura atuante na chapa:

$$T(y, t) = 25 + 275 \left[ 1,0161e^{(-0,0525t)} \cos(62,220y) - 0,0197e^{(-5,464t)} \cos(634,620y) + 0,00504e^{(-21,531t)} \cos(1259,820y) - 0,00225e^{(-48,309t)} \cos(1887,080y) \right] \quad (5.55)$$

Conforme apresentado por Incropera et al. (2008), esta solução é satisfatória para números de Fourier maiores que 0,2 ( $F_0 > 0,2$ ), ou seja, para instantes de tempo  $t > 0,369s$ . Assim, mostra-se através da Fig. 5.47 a distribuição de temperatura na chapa para diferentes instantes de tempo, sendo  $t > 0,369s$ .

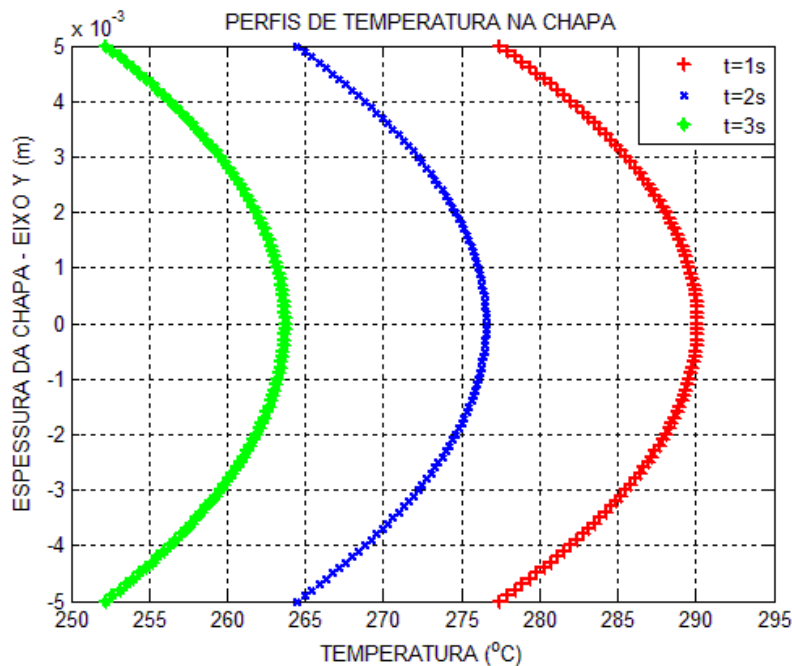


Figura 5.47 - Distribuições de Temperatura na Chapa em Estado Tridimensional para Diferentes Instantes de Tempo

#### 5.4.1.3.1 - Escolha do Perfil de Temperatura

Como mostrado através da Eq. (5.55), a distribuição de temperatura na chapa é uma função transiente. Portanto, os campos de tensão e deformação também serão funções transientes. A

determinação dos campos de tensão e deformação na chapa será efetuada 5 segundos após a chapa ter sido submetida ao processo de têmpera, ou seja, no instante de tempo  $t = 5s$ . Neste trabalho será feita a análise para um único instante de tempo, contudo os campos de tensão e deformação podem ser determinados para quaisquer instantes de tempo  $t$ . A distribuição de temperatura na chapa para o instante de tempo  $t = 5s$ , partindo-se da Eq. (5.55), é dada através da seguinte relação:

$$\begin{aligned}
 T(y, 5) = T(y) = & 25 + 214,895\cos(62,220y) - \\
 & 7,409 \times 10^{-12}\cos(634,620y) + \\
 & 2,439 \times 10^{-47}\cos(1259,820y) - \\
 & 7,741 \times 10^{-106}\cos(1887,080y)
 \end{aligned}
 \tag{5.56}$$

O perfil de temperatura na chapa para o instante de tempo  $t = 5s$  é mostrado através da Fig. 5.48.

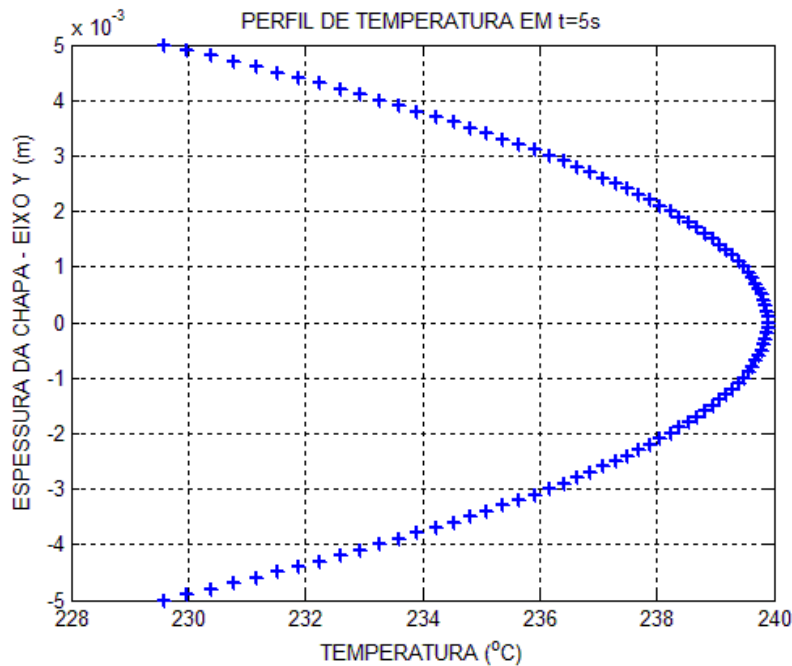


Figura 5.48 - Distribuição de Temperatura na Chapa em Estado Tridimensional no Instante de Tempo  $t = 5s$

### 5.4.1.3.2 - Aproximação Polinomial para o Perfil de Temperatura Encontrado

A expressão representante do perfil de temperatura na chapa é aproximada pela combinação linear dos primeiros polinômios de Legendre utilizando-se o método dos mínimos quadrados. A função a ser aproximada (Eq. (5.56)) se trata de uma função par, ou seja, ela é simétrica com relação ao plano definido por  $y = 0$ . Deste modo, foram utilizados os cinco primeiros polinômios pares de Legendre para efetuar a aproximação. A utilização de um número maior de polinômios mostrou-se desnecessária devido ao elevado nível de precisão numérica obtido utilizando-se poucos polinômios de Legendre. Deste modo, a função a ser aproximada ( $f(y)$ ) é representada pela Eq. (5.56) e a função de aproximação é dada através da seguinte relação:

$$g(y) = c_1\varphi'_1(y) + c_2\varphi'_2(y) + c_3\varphi'_3(y) + c_4\varphi'_4(y) + c_5\varphi'_5(y) \quad (5.57)$$

Na Eq. (5.57) as funções  $\varphi'_1$ ,  $\varphi'_2$ ,  $\varphi'_3$ ,  $\varphi'_4$  e  $\varphi'_5$  representam os cinco primeiros polinômios pares de Legendre que são mostrados através da Tab. 5.21.

Tabela 5.21 - Polinômios de Legendre Utilizados na Aproximação da Distribuição de Temperatura na Chapa em Estado Tridimensional

Função $\varphi'_j$	Polinômio $P_n(y)$	Polinômio
$\varphi'_1(y)$	$P_0(y)$	1
$\varphi'_2(y)$	$P_2(y)$	$1/2 (3y^2 - 1)$
$\varphi'_3(y)$	$P_4(y)$	$1/8 (35y^4 - 30y^2 + 3)$
$\varphi'_4(y)$	$P_6(y)$	$1/16 (231y^6 - 315y^4 + 105y^2 - 5)$
$\varphi'_5(y)$	$P_8(y)$	$1/128 (6435y^8 - 12012y^6 + 6930y^4 - 1260y^2 + 35)$

Aplicando-se o método dos mínimos quadrados às funções  $f(y)$  e  $g(y)$  e minimizando-se o resíduo quadrático da aproximação, encontram-se as constantes  $c_j$ . Estas constantes são apresentadas através da Tab. 5.22.

Tabela 5.22 - Constantes da Eq. (5.57)

Constante $c_j$	Valor da Constante
$c_1$	$1,30229904553884 \times 10^{11}$
$c_2$	$4,74292255027712 \times 10^{11}$
$c_3$	$3,95447783567789 \times 10^{11}$
$c_4$	$1,53188405994014 \times 10^{11}$
$c_5$	$2,37519770882769 \times 10^{10}$

A substituição das constantes  $c_j$  e dos polinômios  $\varphi'_j$  na Eq. (5.57) resulta no seguinte polinômio de aproximação para o campo de temperatura:

$$g(y) = 1,194093535648920 \times 10^{12}y^8 - 1,7316988339410 \times 10^{10}y^6 + 1,34194646922 \times 10^8y^4 - 4,15964652 \times 10^5y^2 + 2,39895 \times 10^2 \quad (5.58)$$

O campo de temperatura polinomial aproximado é mostrado através da Fig. 5.49.

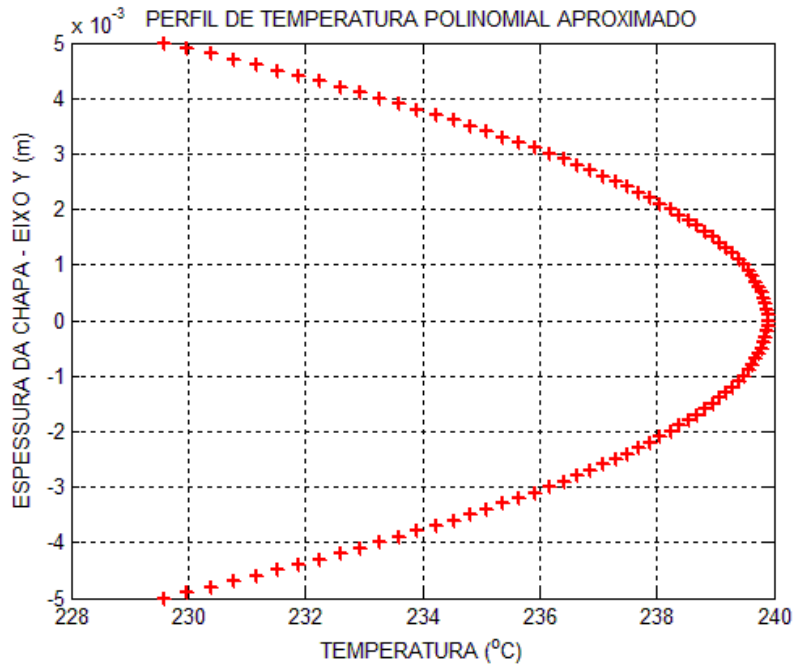


Figura 5.49 - Perfil de Temperatura Polinomial Aproximado Atuante na Chapa em Estado Tridimensional

Para efeito de comparação os dois perfis de temperatura, o original e o aproximado, são mostrados em um mesmo gráfico através da Fig. 5.50.

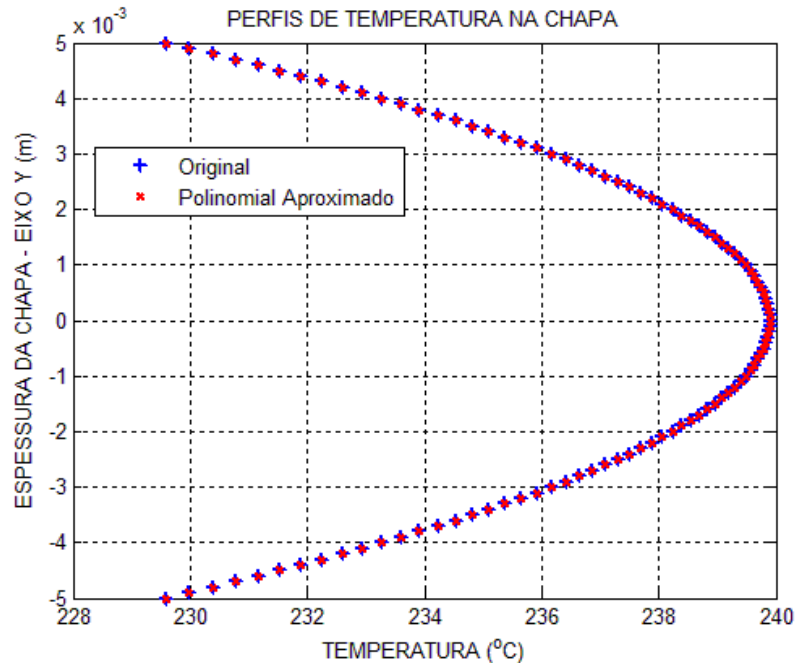


Figura 5.50 - Perfis de Temperatura Original e Polinomial Aproximado Atuantes na Chapa em Estado Tridimensional

#### 5.4.2 - Determinação da Componente de Tensão $\sigma_x$

Para a determinação da componente de tensão  $\sigma_x$  devem ser consideradas as propriedades mecânicas do aço SAE 1020. As propriedades mecânicas deste aço são mostradas através da Tab. 5.6. Além disto, a distribuição de temperatura atuante na chapa é dada de forma aproximada pelo polinômio  $g(y)$  representado pela Eq. (5.58). Os coeficientes polinomiais do perfil de temperatura aproximado são mostrados através da Tab. 5.23.

Tabela 5.23 - Coeficientes Polinomiais do Perfil de Temperatura Polinomial Aproximado na Chapa em Estado Tridimensional

<b>Coeficiente Polinomial</b>	<b>Valor</b>
$a_0$	$2,39895 \times 10^2$
$a_2$	$-4,15964652 \times 10^5$
$a_4$	$1,34194646922 \times 10^8$
$a_6$	$-1,7316988339410 \times 10^{10}$
$a_8$	$1,194093535648920 \times 10^{12}$

A componente de tensão  $\sigma_x$  é encontrada a partir da Eq. (4.186). Substituindo-se os coeficientes polinomiais da Tab. 5.23, o valor de  $E$ , o valor de  $\alpha$  e o valor de  $b$  nesta equação, obtém-se o seguinte polinômio para a componente de tensão  $\sigma_x$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x(y) = & -5,049309807886862 \times 10^{18}y^8 + \\ & 7,322612212093352 \times 10^{16}y^6 - 5,674516498416923 \times 10^{14}y^4 + \\ & 1,758936242509256 \times 10^{12}y^2 - 1,458703379669164 \times 10^7 \end{aligned} \quad (5.59)$$

A distribuição da componente de tensão  $\sigma_x$  é mostrada através da Fig. 5.51.



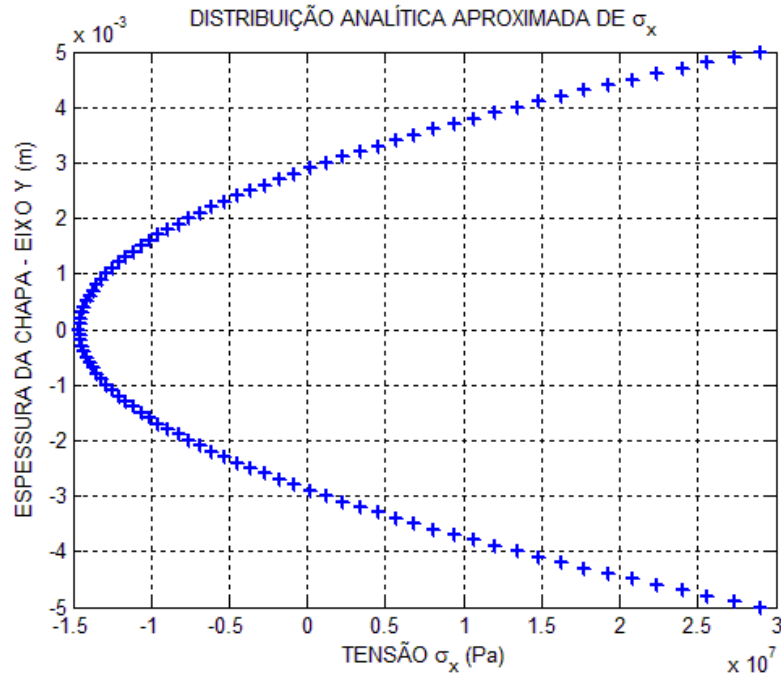


Figura 5.51 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Tensão  $\sigma_x$  na Chapa em Estado Tridimensional

### 5.4.3 - Determinação da Componente de Tensão $\sigma_z$

A componente de tensão  $\sigma_z$  é obtida através da Eq. (4.187). Substituindo-se os coeficientes polinomiais da Tab. 5.23, o valor de  $E$ , o valor de  $\alpha$  e o valor de  $b$  nesta equação, encontra-se o seguinte polinômio para a componente de tensão  $\sigma_z$ :

$$\begin{aligned} \sigma_z(y) = & -5,049309807886862 \times 10^{18}y^8 + \\ & 7,322612212093352 \times 10^{16}y^6 - 5,674516498416923 \times 10^{14}y^4 + \quad (5.60) \\ & 1,758936242509256 \times 10^{12}y^2 - 1,458703379669164 \times 10^7 \end{aligned}$$

A distribuição da componente de tensão  $\sigma_z$  é mostrada através da Fig. 5.52.

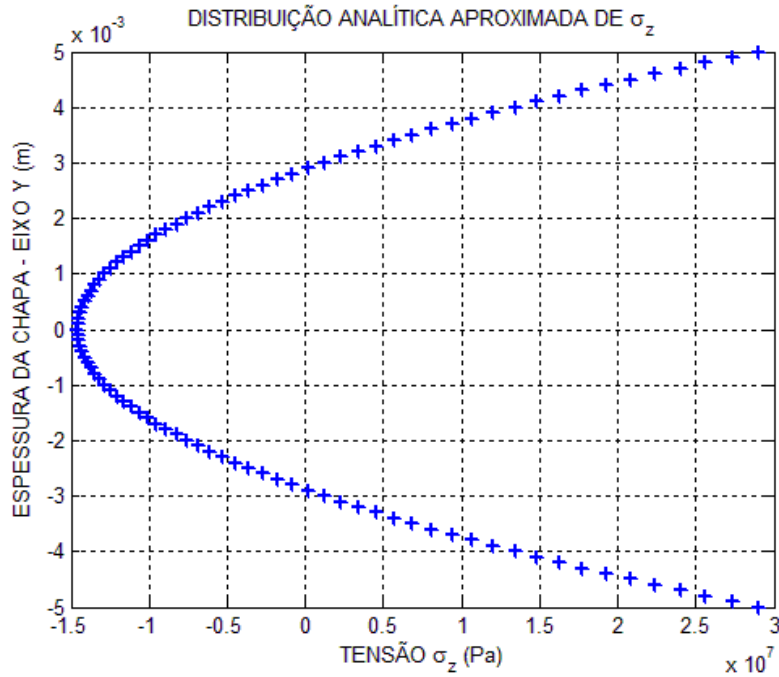


Figura 5.52 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Tensão  $\sigma_z$  na Chapa em Estado Tridimensional

#### 5.4.4 - Determinação da Componente de Deformação $\epsilon_x$

A componente de deformação  $\epsilon_x$  é encontrada através da Eq. (4.188). Substituindo-se os coeficientes polinomiais da Tab. 5.23, o valor de  $\alpha$  e o valor de  $b$  nesta equação, encontra-se o seguinte polinômio para a componente de deformação  $\epsilon_x$ :

$$\epsilon_x(y) = 0,00350 \tag{5.61}$$

Ou seja, a componente de deformação  $\epsilon_x$  é constante para pontos distantes da borda livre da chapa. A distribuição da componente de deformação  $\epsilon_x$  é mostrada através da Fig. 5.53.

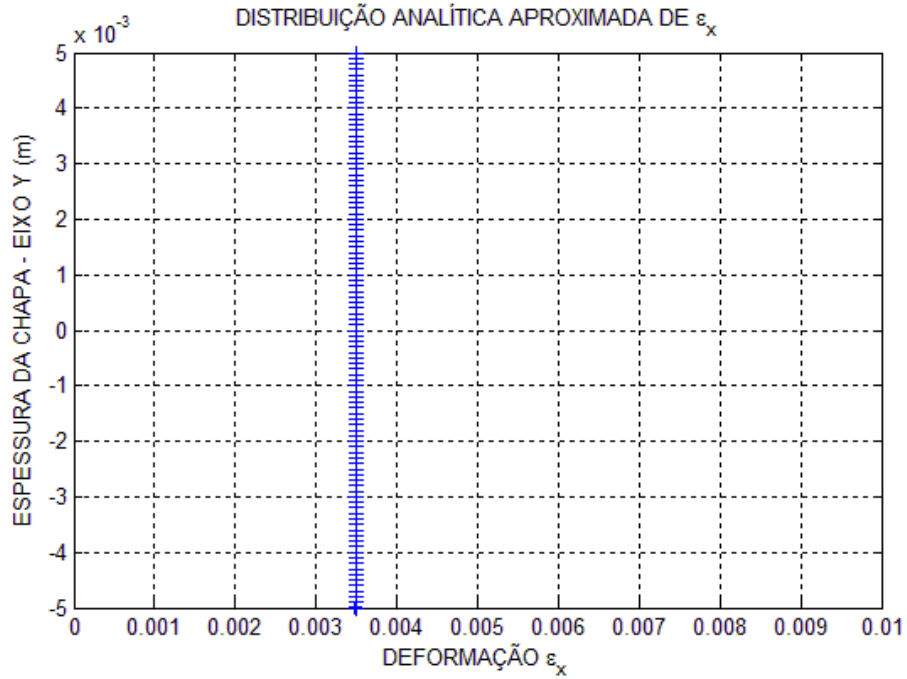


Figura 5.53 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Deformação  $\epsilon_x$  na Chapa em Estado Tridimensional

#### 5.4.5 - Determinação da Componente de Deformação $\epsilon_y$

A componente de deformação  $\epsilon_y$  é determinada através da Eq. (4.189). Substituindo-se os coeficientes polinomiais da Tab. 5.23, o valor de  $\alpha$ , o valor de  $\nu$  e o valor de  $b$  nesta equação, encontra-se o seguinte polinômio para a componente de deformação  $\epsilon_y$ :

$$\epsilon_y(y) = 32820513,751y^8 - 475969,794y^6 + 3688,436y^4 - 11,433y^2 + 0,00359 \quad (5.62)$$

A distribuição da componente de deformação  $\epsilon_y$  é mostrada através da Fig. 5.54.

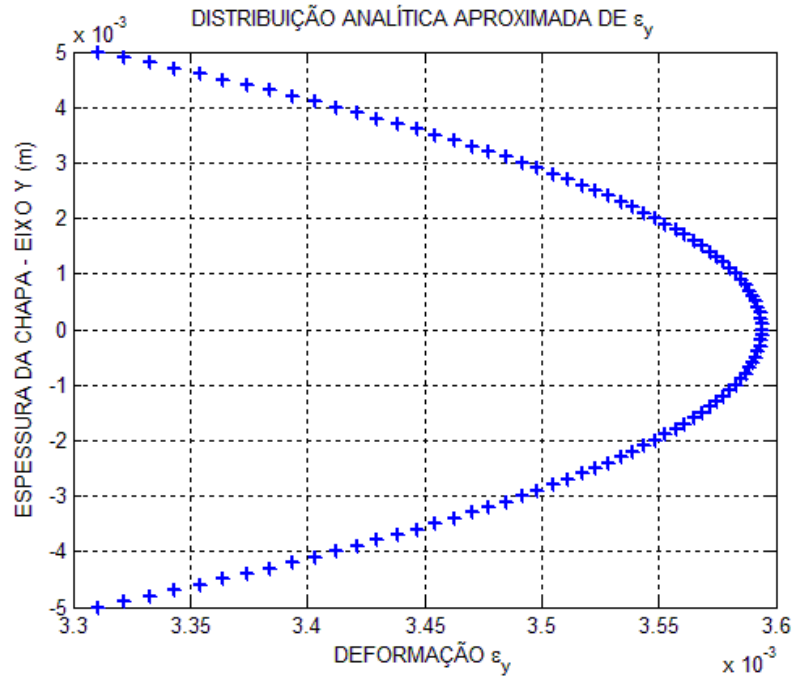


Figura 5.54 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Deformação  $\varepsilon_y$  na Chapa em Estado Tridimensional

#### 5.4.6 - Determinação da Componente de Deformação $\varepsilon_z$

A componente de deformação  $\varepsilon_z$  é determinada através da Eq. (4.190). Substituindo-se os coeficientes polinomiais da Tab. 5.23, o valor de  $\alpha$  e o valor de  $b$  nesta equação, encontra-se o seguinte polinômio para a componente de deformação  $\varepsilon_z$ :

$$\varepsilon_z(y) = 0,00350 \quad (5.63)$$

Ou seja, a componente de deformação  $\varepsilon_z$  é constante e possui o mesmo valor que a componente de deformação  $\varepsilon_x$ . A distribuição da componente de deformação  $\varepsilon_z$  é mostrada através da Fig. 5.55.

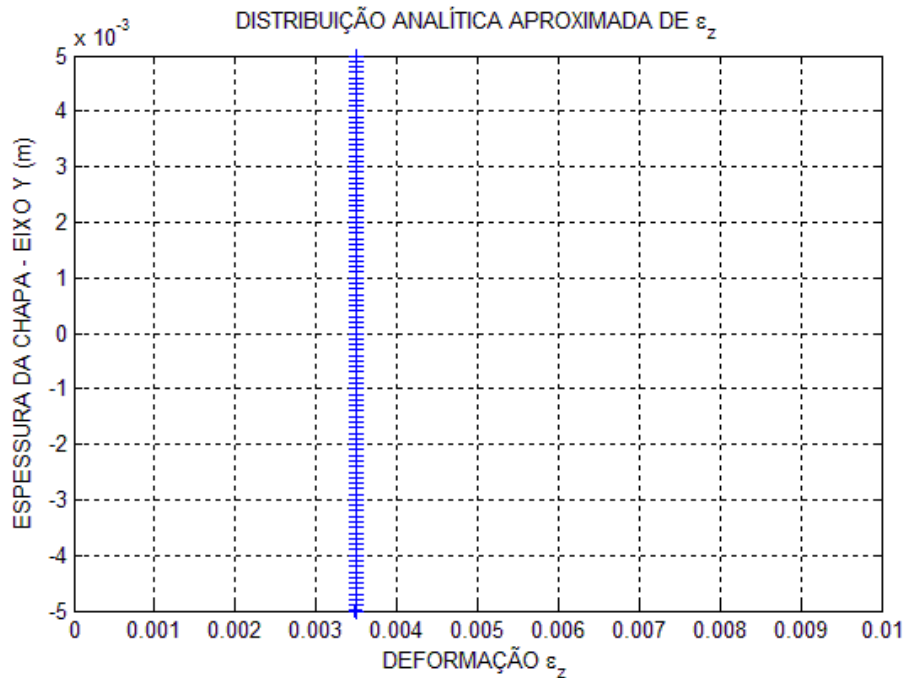


Figura 5.55 - Distribuição Analítica Aproximada da Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  na Chapa em Estado Tridimensional

#### 5.4.7 - Valores Numéricos Obtidos Através do MEF

Nesta seção são obtidos os resultados numéricos para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  através do MEF utilizando o programa Ansys.

##### 5.4.7.1 - Modelagem da Chapa no Programa Ansys

A chapa a ser modelada possui espessura (dimensão  $2b$ ) igual a 1 centímetro e os lados (dimensão  $2l$ ) iguais a 8 centímetros. Sendo a chapa quadrada e a distribuição de temperatura função apenas da coordenada  $y$ , levam-se em consideração duas condições de contorno de simetria: uma condição de simetria com relação ao plano  $z = 0$  e outra condição de simetria com relação ao plano  $x = 0$  (Fig. 5.56). Uma terceira condição de contorno de simetria é obtida através da consideração de que a distribuição de temperatura atuante na chapa é simétrica com relação ao plano  $y = 0$ . Deste modo, apenas a oitava parte da chapa é modelada como mostrado através da Fig. 5.56. Para a análise através do MEF, utiliza-se o elemento tridimensional designado por SOLID186. Este elemento é mostrado na Fig. 5.2. Na

aplicação do método foram utilizados 64.000 elementos. Deste modo, o modelo com a respectiva malha e condições de contorno é mostrado através da Fig. 5.56. Nesta figura as setas em verde representam as restrições de deslocamento devido às condições de contorno de simetria. No modelo as áreas com restrições são aquelas definidas pelos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ . A origem do sistema de coordenadas se encontra no centro da chapa.

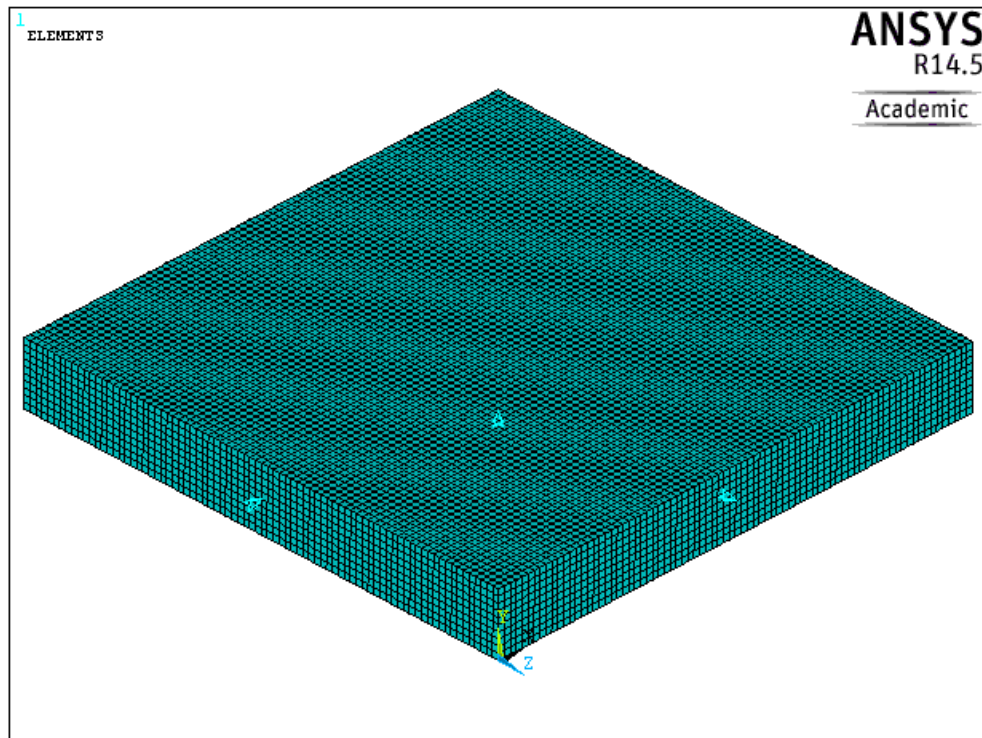


Figura 5.56 - Modelo Utilizado na Aplicação do MEF para a Chapa em Estado Tridimensional

#### 5.4.7.2 - Componente de Tensão $\sigma_x$

Na aplicação do MEF o modelo da chapa foi submetido à distribuição de temperatura original (Eq. (5.56)), utilizando-se o editor de funções (Function Editor) do programa Ansys. A partir da aplicação desta distribuição de temperatura foi encontrada a distribuição para a componente de tensão  $\sigma_x$  mostrada através da Fig. 5.57.

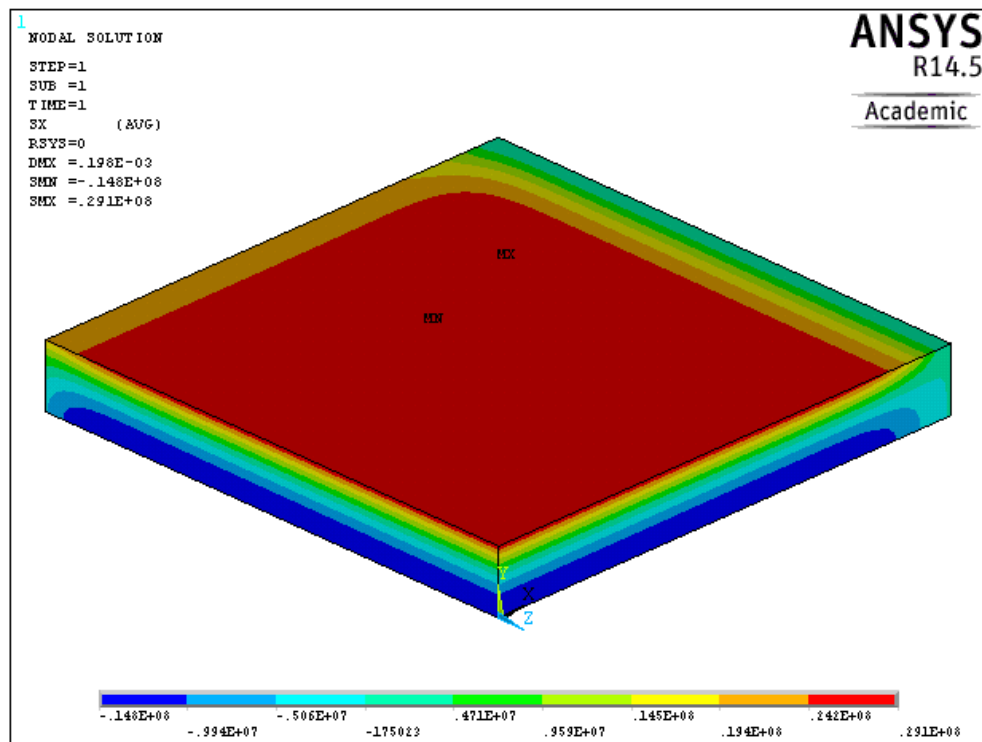


Figura 5.57 - Solução pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  na Chapa em Estado Tridimensional

Observa-se na Fig. 5.57 que a distribuição da componente de tensão  $\sigma_x$  é função apenas da coordenada  $y$  para pontos suficientemente afastados das bordas livres interceptadas pelos eixos  $x$  e  $z$ . Também se observa que a distribuição da componente de tensão  $\sigma_x$  é mais influenciada pela borda livre interceptada pelo eixo  $x$ . Este acontecimento pode ser explicado pelo fato de que a componente de tensão  $\sigma_x$  deve se anular nesta borda, o mesmo não ocorrendo necessariamente para a outra borda livre. Neste caso, não se pode garantir a validade da solução analítica aproximada para pontos próximos destas duas bordas livres.

#### 5.4.7.3 - Componente de Tensão $\sigma_z$

Foi encontrada na chapa a distribuição para a componente de tensão  $\sigma_z$  mostrada através da Fig. 5.58.

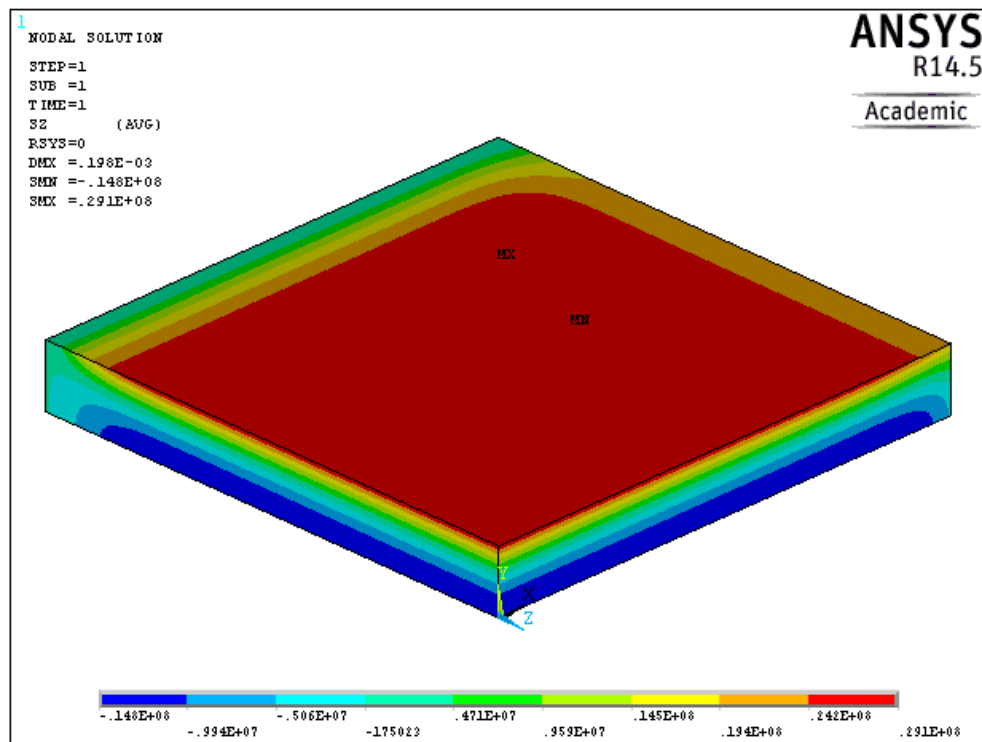


Figura 5.58 - Solução pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_z$  na Chapa em Estado Tridimensional

As mesmas conclusões obtidas para a componente de tensão  $\sigma_x$  podem ser estendidas para a componente de tensão  $\sigma_z$ . A única diferença reside no fato de que a borda livre que mais influencia a distribuição da componente de tensão  $\sigma_z$  é aquela que é interceptada pelo eixo z. Nesta borda a componente de tensão  $\sigma_z$  deve possuir valor nulo, o mesmo não ocorrendo necessariamente para a outra borda. É importante ressaltar que as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  possuem a mesma distribuição na chapa, sendo a única diferença entre elas as direções as quais atuam.

#### 5.4.7.4 - Componente de Deformação $\epsilon_x$

Foi encontrada na chapa a distribuição para a componente de deformação  $\epsilon_x$  mostrada através da Fig. 5.59.



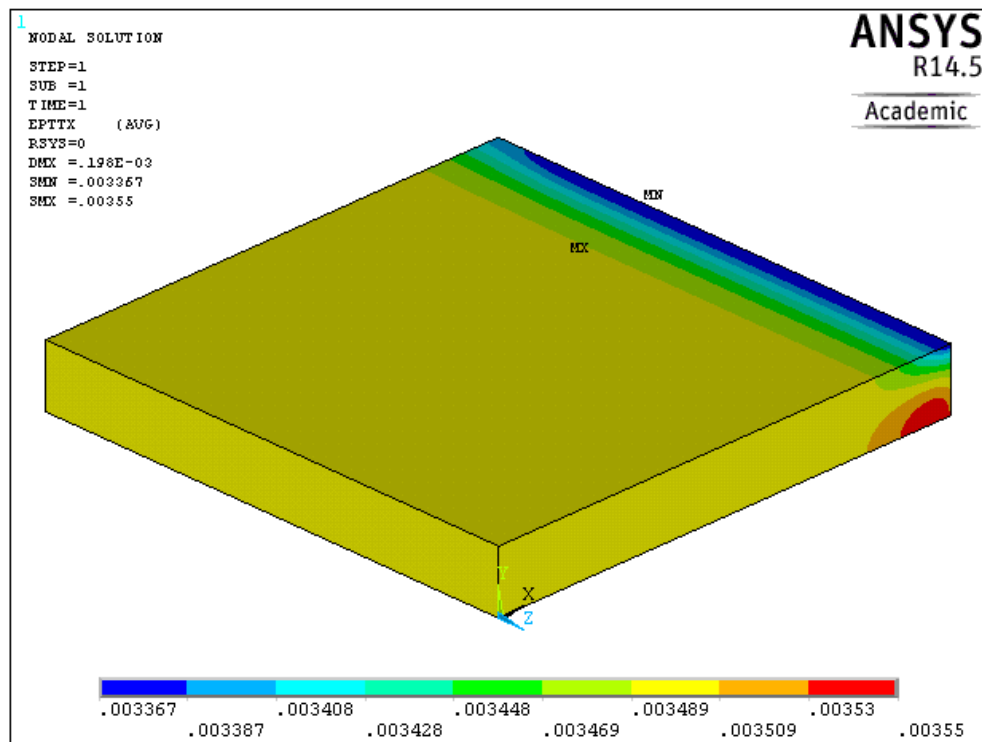


Figura 5.59 - Solução pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_x$  na Chapa em Estado Tridimensional

Observa-se através da Fig. 5.59 que a distribuição da componente de deformação  $\varepsilon_x$  é praticamente constante para pontos afastados da borda livre que é interceptada pelo eixo  $x$ . Também se observa que a borda livre que é interceptada pelo eixo  $z$  possui pouca ou nenhuma influência sobre esta componente de deformação.

#### 5.4.7.5 - Componente de Deformação $\varepsilon_y$

Foi encontrada na chapa a distribuição para a componente de deformação  $\varepsilon_y$  mostrada através da Fig. 5.60.

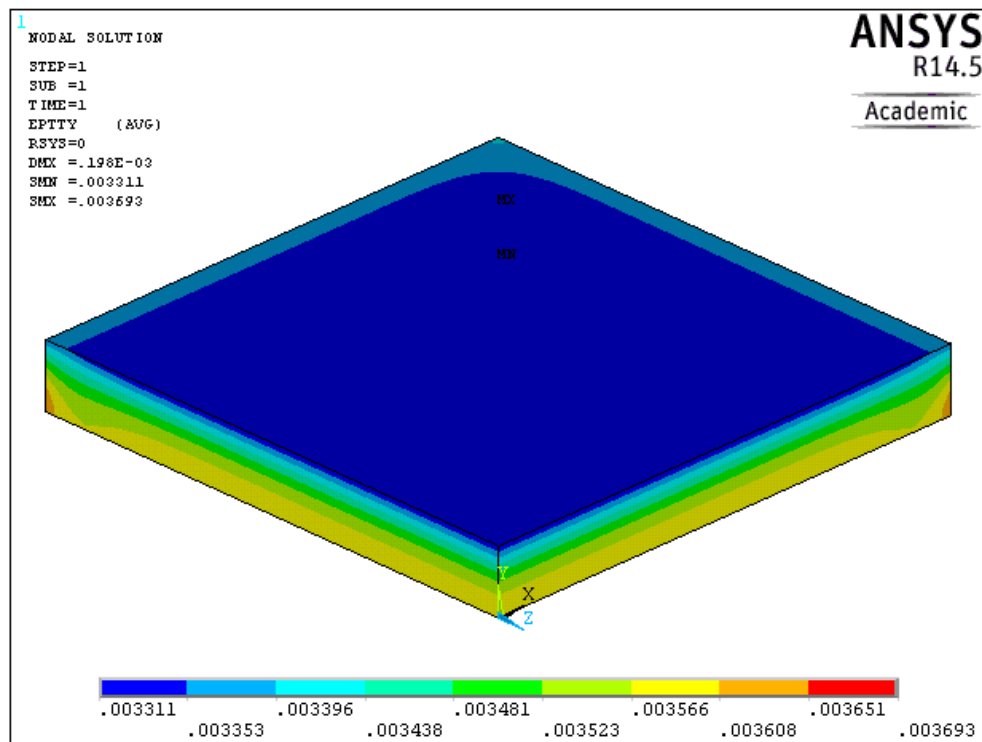


Figura 5.60 - Solução pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_y$  na Chapa em Estado Tridimensional

Observa-se através da Fig. 5.60 que a distribuição da componente de deformação  $\varepsilon_y$  é função apenas da coordenada  $y$  para pontos afastados das bordas livres que são interceptadas pelos eixos  $x$  e  $z$ . Também se observa que a componente de deformação  $\varepsilon_y$  é igualmente influenciada por estas duas bordas.

#### 5.4.7.6 - Componente de Deformação $\varepsilon_z$

Foi encontrada na chapa a distribuição para a componente de deformação  $\varepsilon_z$  mostrada através da Fig. 5.61.

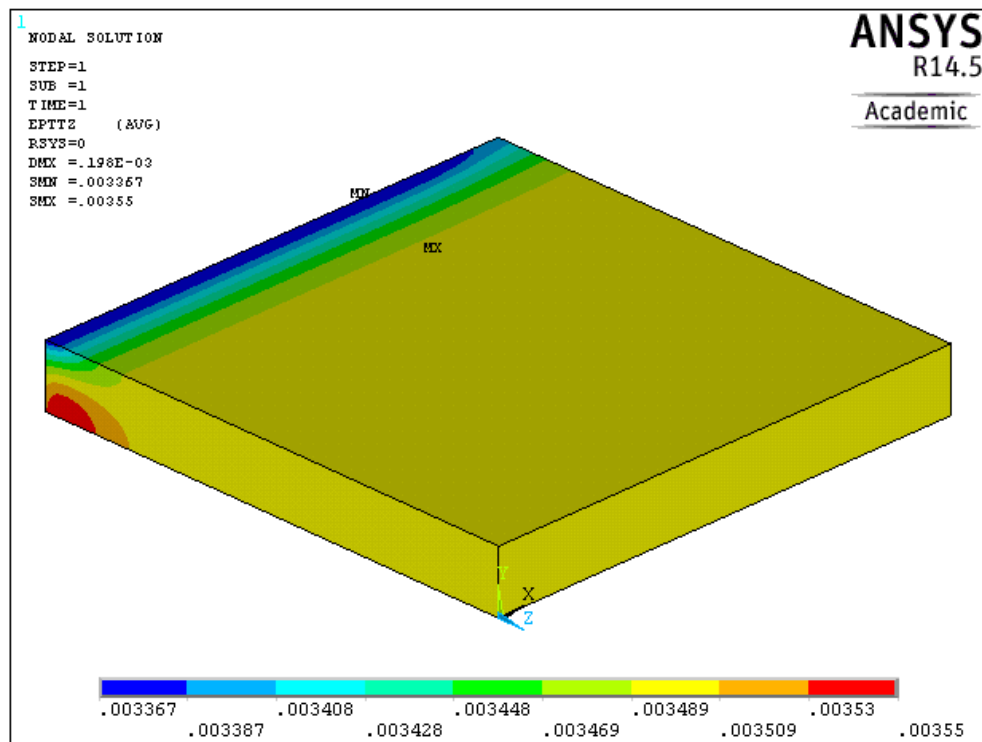


Figura 5.61 - Solução pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  na Chapa em Estado Tridimensional

As mesmas conclusões obtidas para a componente de deformação  $\varepsilon_x$  podem ser aplicadas para a componente de deformação  $\varepsilon_z$ . Neste caso, a borda livre que mais influencia a distribuição da componente de deformação  $\varepsilon_z$  é aquela que é interceptada pelo eixo  $z$ . Como o mencionado para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$ , as componentes de deformação  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_z$  apresentam a mesma distribuição na chapa, sendo a única diferença entre elas as direções as quais atuam.

#### 5.4.8 - Comparação dos Resultados Analíticos Aproximados e Numéricos

Os resultados numéricos para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  foram obtidos para diferentes distâncias da borda livre que é interceptada pelo eixo  $x$ . Os resultados foram obtidos para segmentos ao longo do eixo  $x$  iguais a  $x = 0,0 \text{ cm}$ ,  $x = 1,0 \text{ cm}$ ,  $x = 2,0 \text{ cm}$ ,  $x = 3,0 \text{ cm}$ ,  $x = 3,5 \text{ cm}$  e  $x = 4,0 \text{ cm}$ . Os segmentos de coleta de dados são mostrados através da Fig. 5.62.

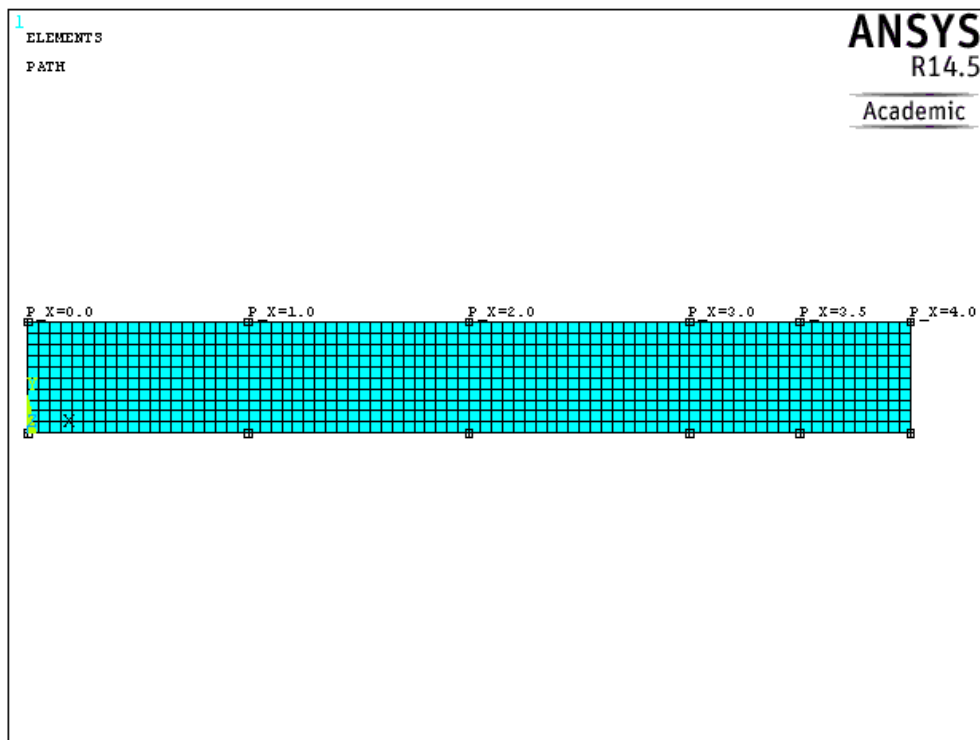


Figura 5.62 - Segmentos de Coleta de Dados Numéricos Obtidos pelo MEF

Os segmentos de coleta de dados apresentados através da Fig. 5.62 situam-se no plano  $z = 0$ . Não foram coletados dados ao longo do plano  $x = 0$  pelo fato das distribuições das componentes  $\sigma_z$  e  $\varepsilon_z$  neste plano serem idênticas às distribuições das componentes  $\sigma_x$  e  $\varepsilon_x$  no plano  $z = 0$ . Explica-se este acontecimento pelo fato da chapa ser quadrada. Deste modo, conclusões obtidas para as componentes com direções em  $x$  podem ser estendidas para as componentes com direções em  $z$ . Os resultados obtidos para os segmentos situados nas diversas posições ao longo do eixo  $x$  foram comparados com os resultados analíticos aproximados. Os resultados comparativos são mostrados a seguir.

#### 5.4.8.1 - Comparação dos Resultados para o Segmento em $x = 0,0 \text{ cm}$

Através das Figs. 5.63, 5.64, 5.65, 5.66 e 5.67 são mostrados os resultados comparativos para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  no segmento definido por  $x = 0,0 \text{ cm}$ .

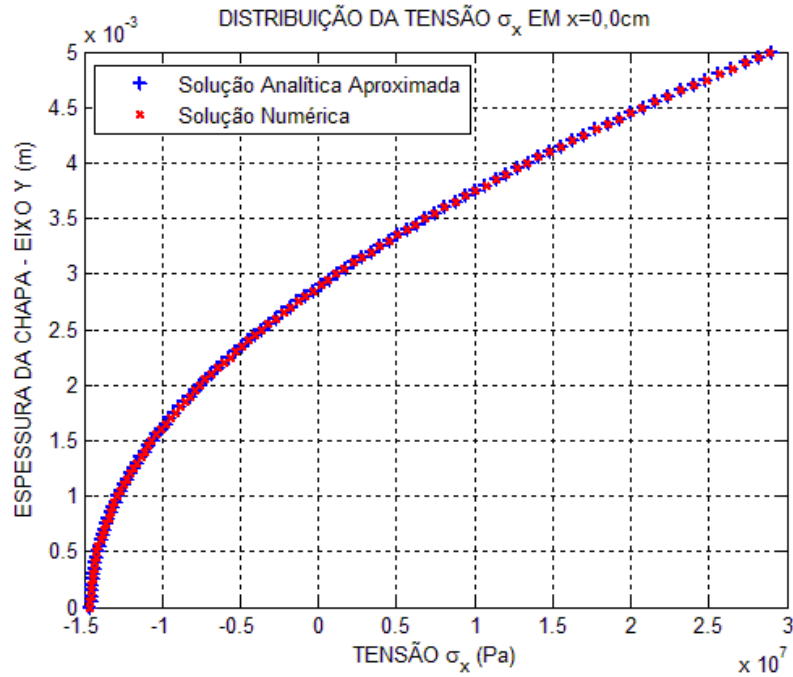


Figura 5.63 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  no Segmento Definido por  $x = 0,0 \text{ cm}$

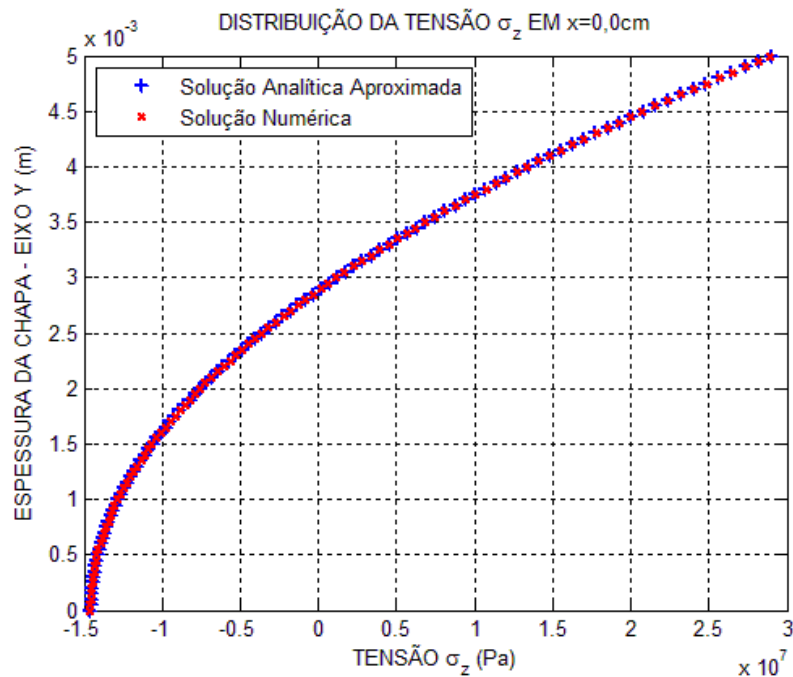


Figura 5.64 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_z$  no Segmento Definido por  $x = 0,0 \text{ cm}$

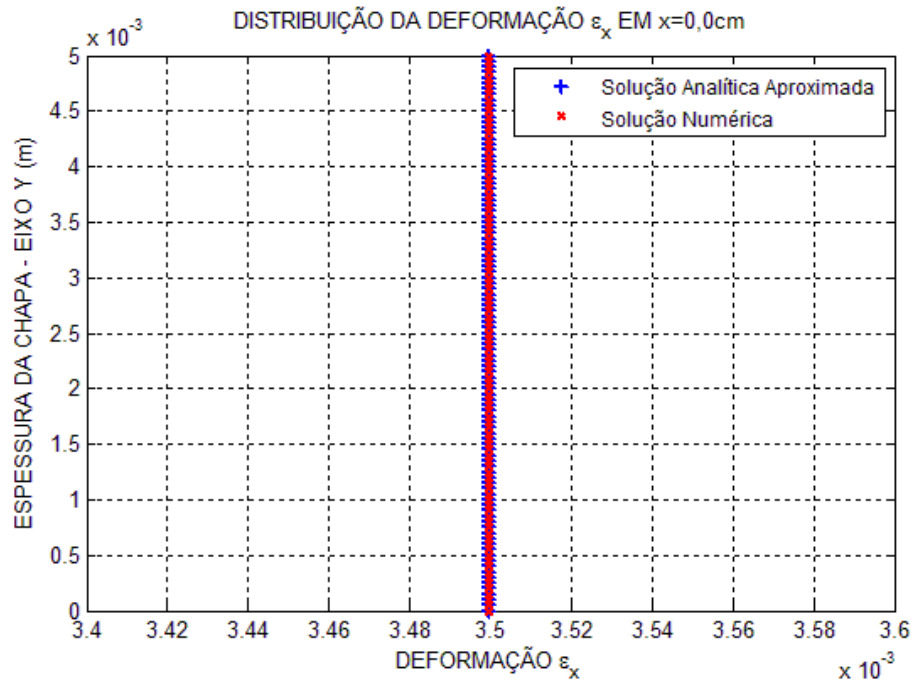


Figura 5.65 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_x$  no Segmento Definido por  $x = 0,0\text{ cm}$

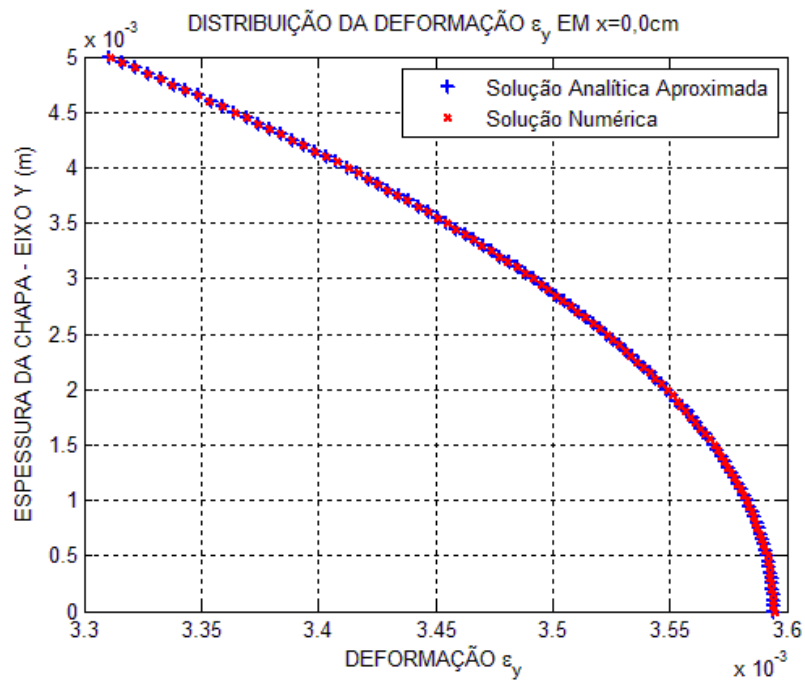


Figura 5.66 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_y$  no Segmento Definido por  $x = 0,0\text{ cm}$

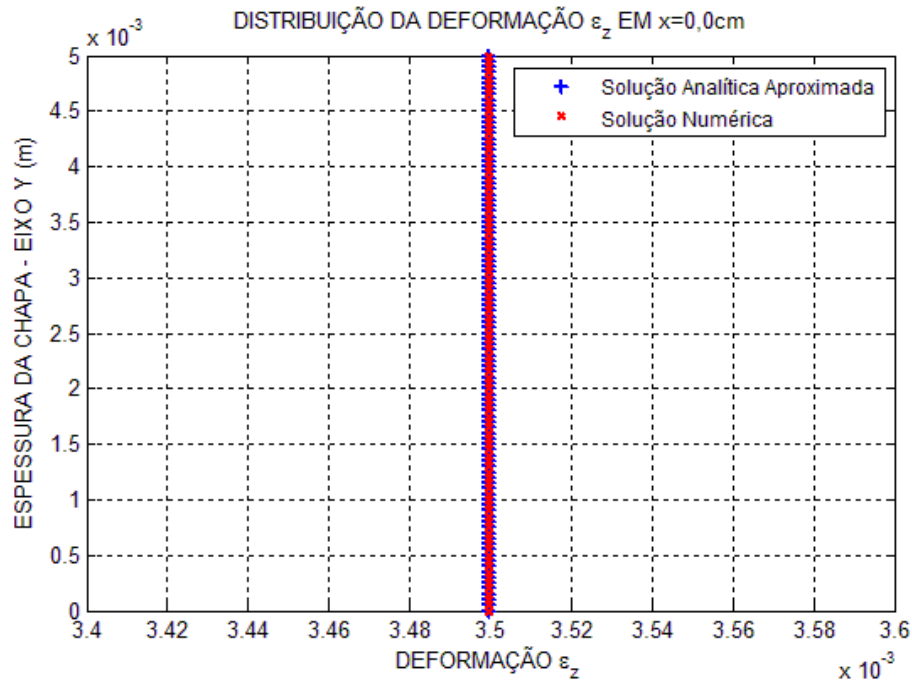


Figura 5.67 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  no Segmento Definido por  $x = 0,0\text{ cm}$

#### 5.4.8.1.1 - Análise dos Gráficos Apresentados para o Segmento em $x = 0,0\text{ cm}$

O segmento definido por  $x = 0,0\text{ cm}$  está a uma distância igual a 4 vezes a espessura da chapa em relação à borda livre que é interceptada pelo eixo  $x$ . Deste modo, espera-se que haja uma boa concordância entre as soluções neste segmento, o que de fato pode ser observado através dos gráficos apresentados pelas Figs. 5.63, 5.64, 5.65, 5.66 e 5.67. Portanto, conclui-se que as duas soluções apresentam uma ótima concordância para todas as componentes de tensão e deformação no segmento analisado.

#### 5.4.8.2 - Comparação dos Resultados para o Segmento em $x = 1,0\text{ cm}$

Através das Figs. 5.68, 5.69, 5.70, 5.71 e 5.72 são mostrados os resultados comparativos para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  no segmento definido por  $x = 1,0\text{ cm}$ .

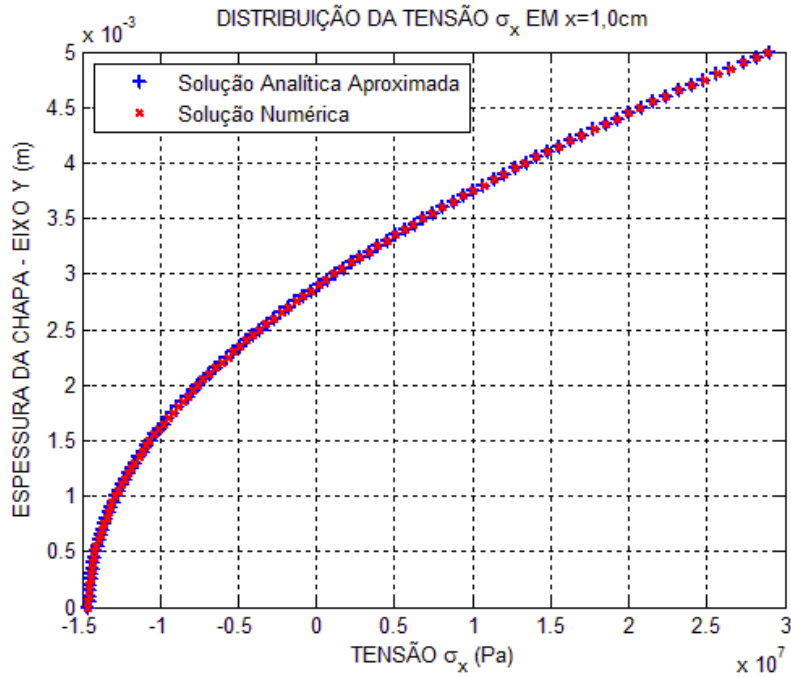


Figura 5.68 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  no Segmento Definido por  $x = 1,0\text{ cm}$

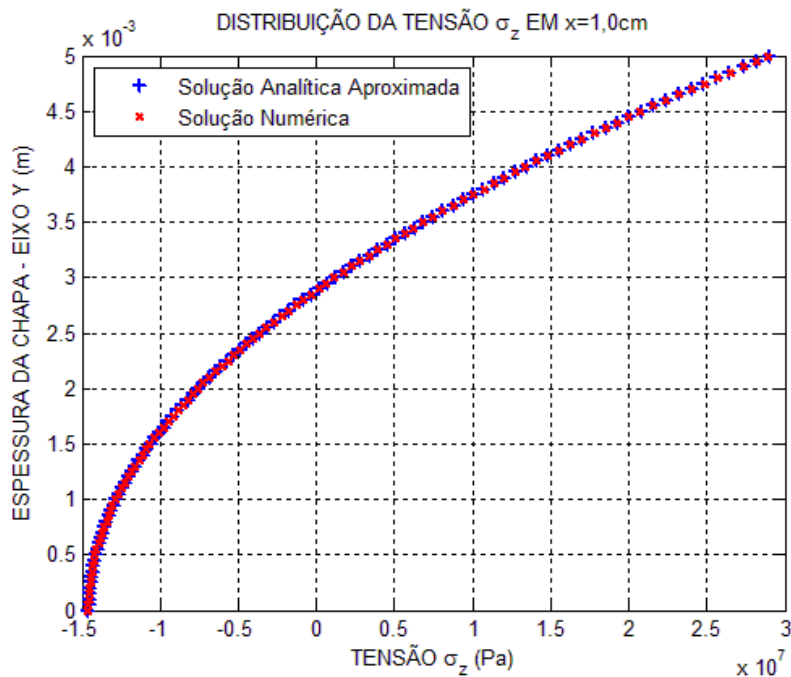


Figura 5.69 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_z$  no Segmento Definido por  $x = 1,0\text{ cm}$



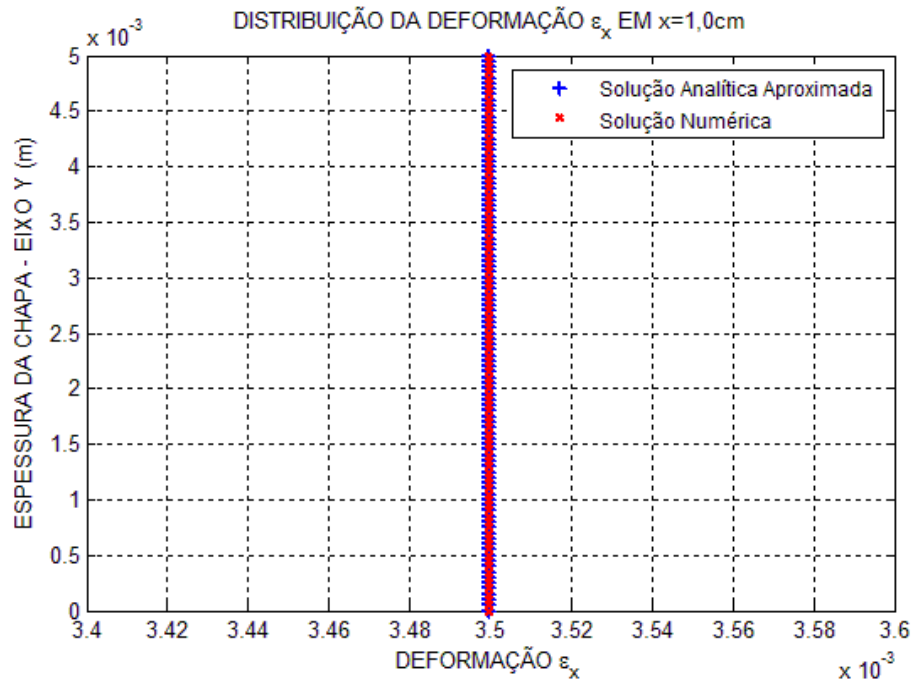


Figura 5.70 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_x$  no Segmento Definido por  $x = 1,0\text{ cm}$

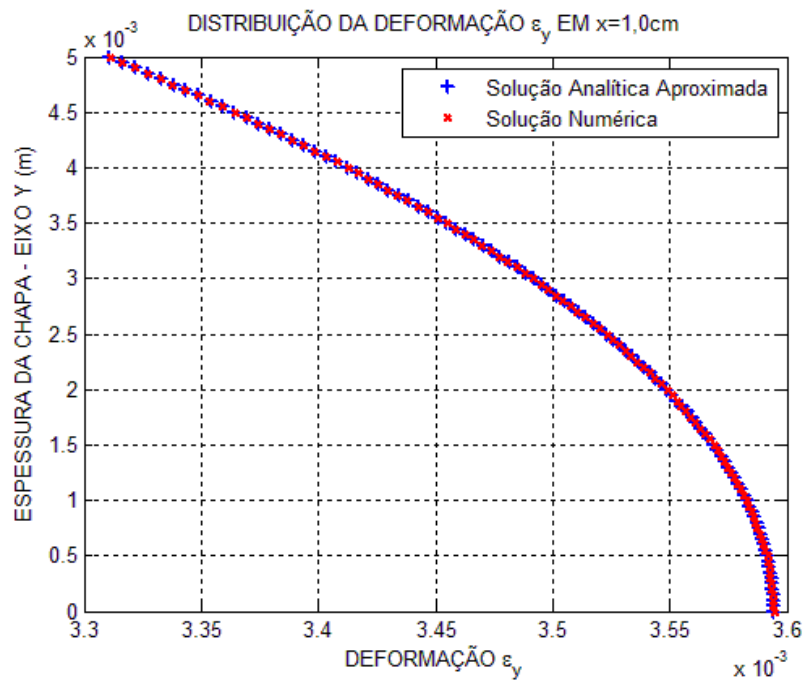


Figura 5.71 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_y$  no Segmento Definido por  $x = 1,0\text{ cm}$

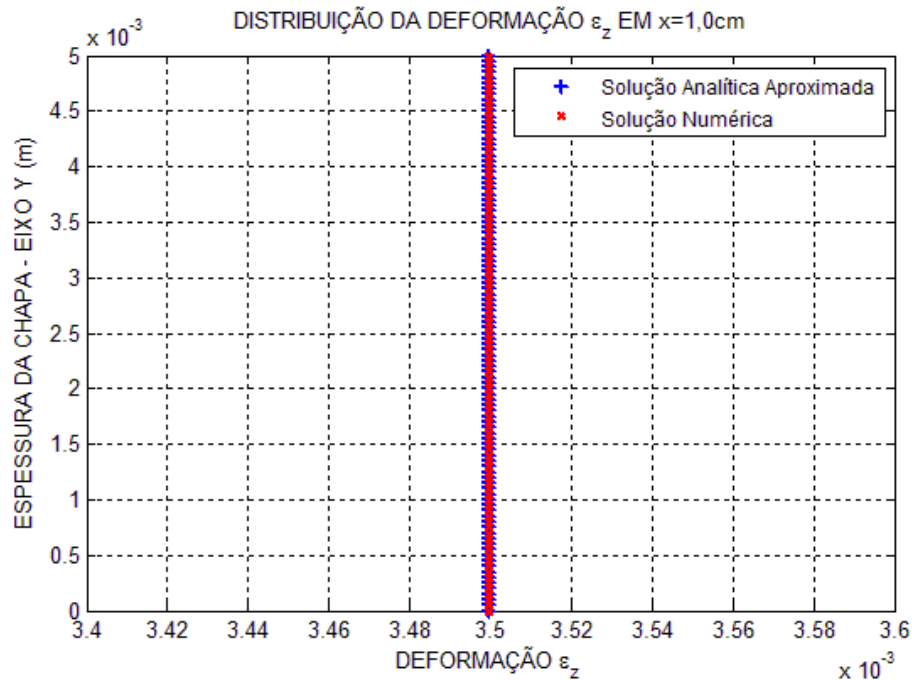


Figura 5.72 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  no Segmento Definido por  $x = 1,0\text{ cm}$

#### 5.4.8.2.1 - Análise dos Gráficos Apresentados para o Segmento em $x = 1,0\text{ cm}$

O segmento definido por  $x = 1,0\text{ cm}$  está a uma distância igual a 3 vezes a espessura da chapa em relação à borda livre que é interceptada pelo eixo  $x$ . Assim, tal como para o segmento em  $x = 0,0\text{ cm}$ , espera-se que haja uma boa concordância entre as soluções para este segmento. Os gráficos apresentados nas Figs. 5.68, 5.69, 5.70, 5.71 e 5.72 mostram que as soluções numéricas são praticamente idênticas às soluções analíticas aproximadas. Neste caso, observou-se ótima concordância entre os resultados para todas as componentes de tensão e deformação.

#### 5.4.8.3 - Comparação dos Resultados para o Segmento em $x = 2,0\text{ cm}$

Através das Figs. 5.73, 5.74, 5.75, 5.76 e 5.77 são mostrados os resultados comparativos para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  no segmento definido por  $x = 2,0\text{ cm}$ .

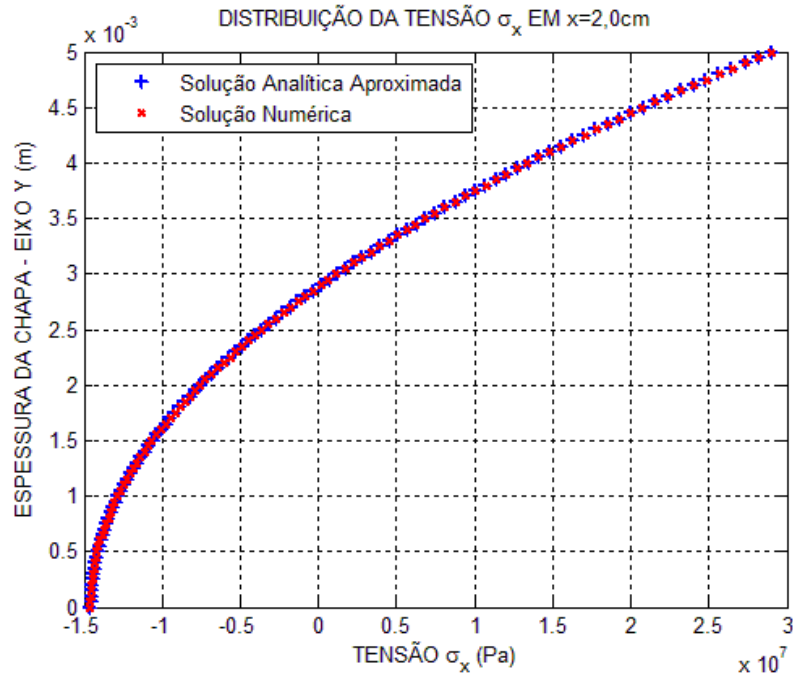


Figura 5.73 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  no Segmento Definido por  $x = 2,0\text{ cm}$

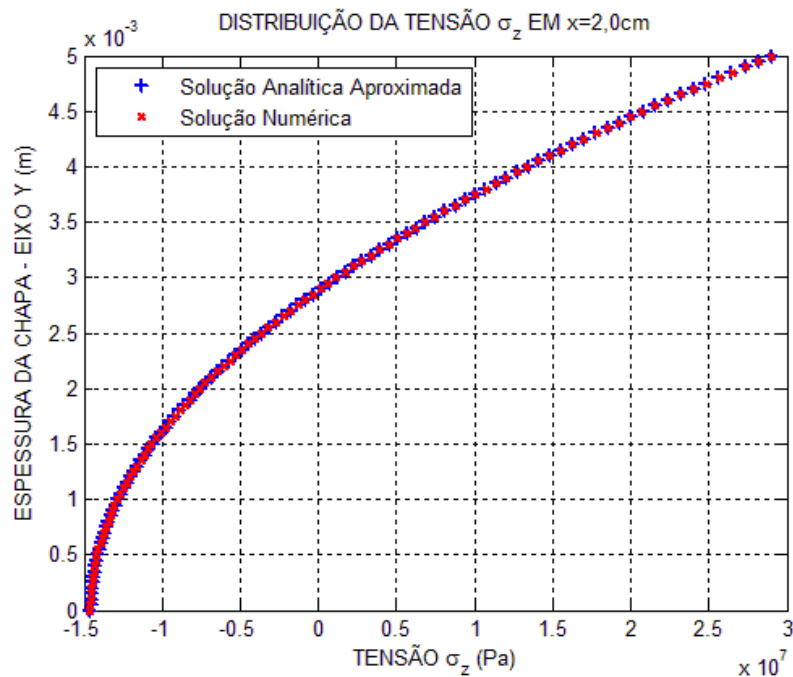


Figura 5.74 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_z$  no Segmento Definido por  $x = 2,0\text{ cm}$

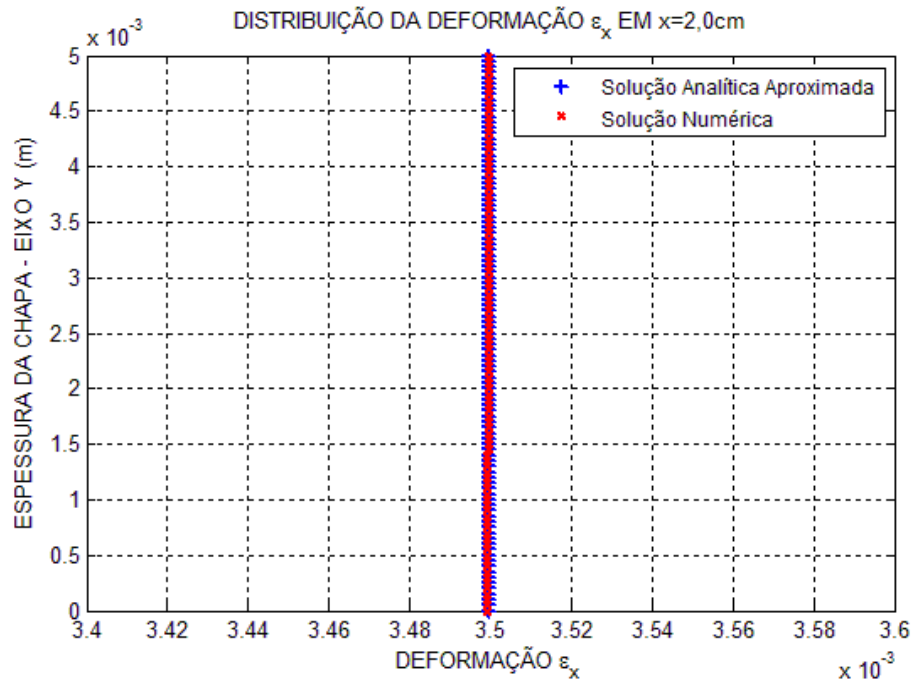


Figura 5.75 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_x$  no Segmento Definido por  $x = 2,0\text{ cm}$

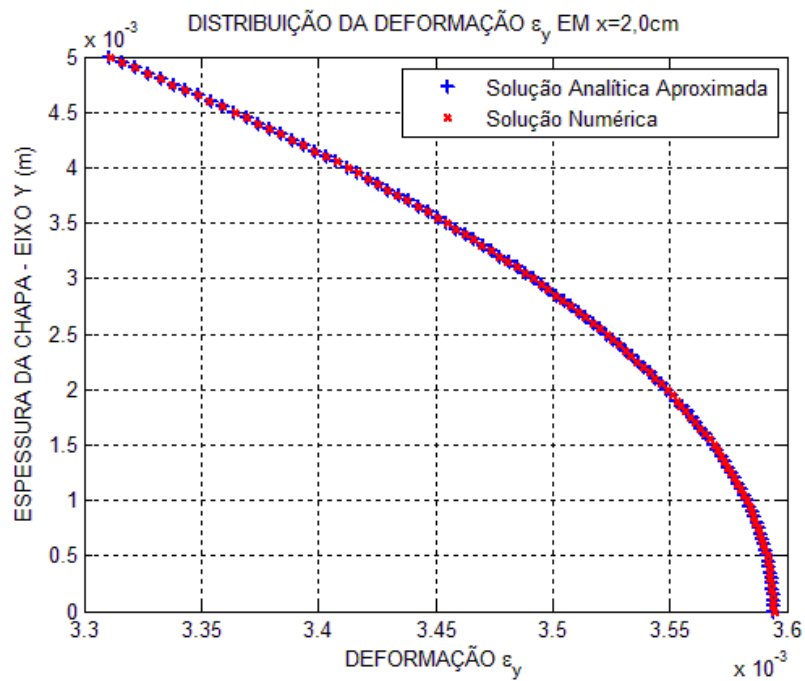


Figura 5.76 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_y$  no Segmento Definido por  $x = 2,0\text{ cm}$

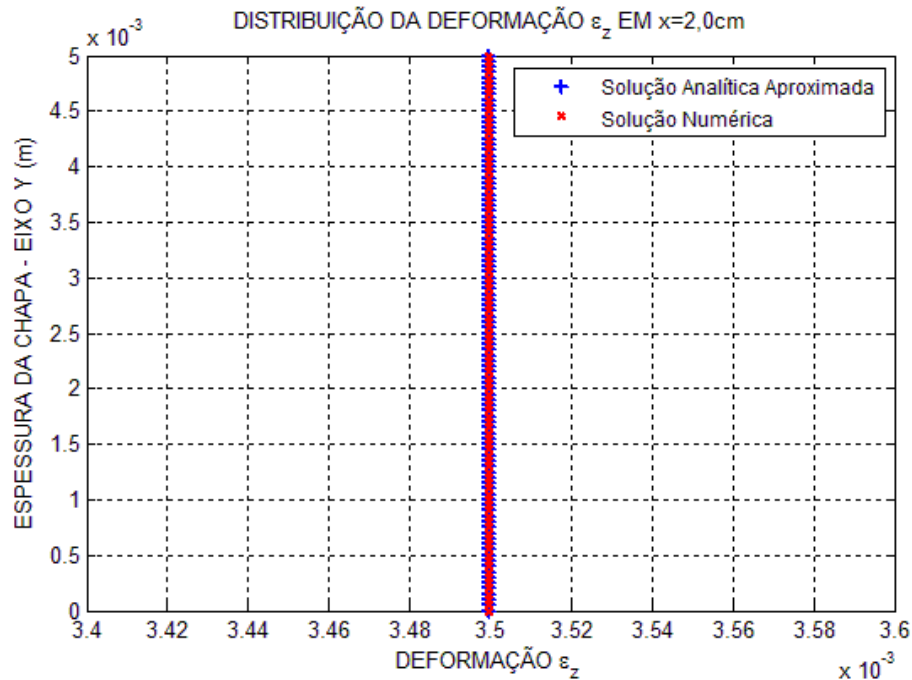


Figura 5.77 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  no Segmento Definido por  $x = 2,0\text{ cm}$

#### 5.4.8.3.1 - Análise dos Gráficos Apresentados para o Segmento em $x = 2,0\text{ cm}$

O segmento definido por  $x = 2,0\text{ cm}$  está a uma distância igual a 2 vezes a espessura da chapa em relação à borda livre que é interceptada pelo eixo  $x$ . Assim, tal como para o segmento definido por  $x = 0,0\text{ cm}$  e  $x = 1,0\text{ cm}$ , espera-se que haja uma boa concordância entre ambas as soluções para este segmento. Desta forma, observa-se através dos gráficos apresentados pelas Figs. 5.73, 5.74, 5.75, 5.76 e 5.77 que as soluções numéricas são praticamente idênticas às soluções analíticas aproximadas. Portanto, mostra-se que as duas soluções se interceptam com ótima concordância para todas as componentes de tensão e deformação.

#### 5.4.8.4 - Comparação dos Resultados para o Segmento em $x = 3,0\text{ cm}$

Através das Figs. 5.78, 5.79, 5.80, 5.81 e 5.82 são mostrados os resultados comparativos para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  no segmento definido por  $x = 3,0\text{ cm}$ .

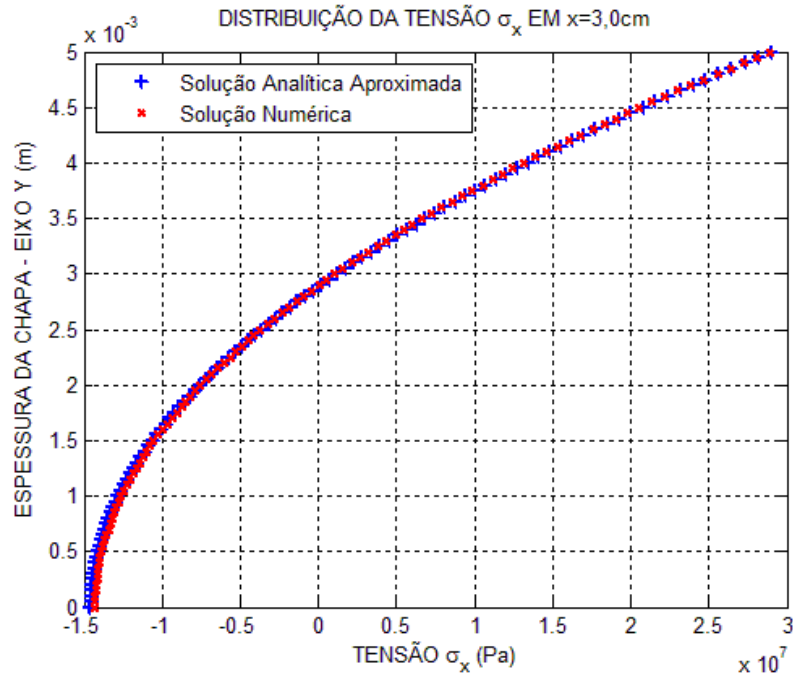


Figura 5.78 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  no Segmento Definido por  $x = 3,0\text{ cm}$

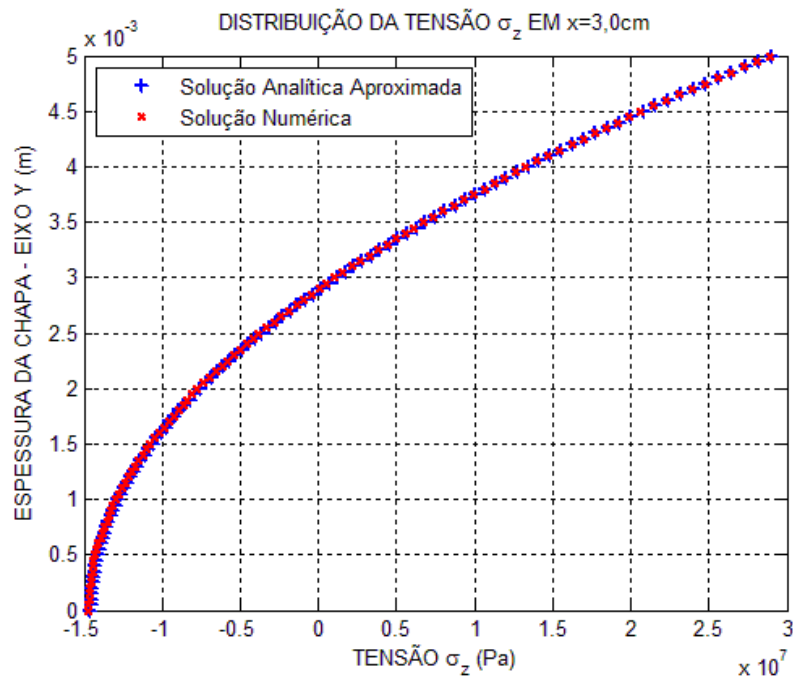


Figura 5.79 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_z$  no Segmento Definido por  $x = 3,0\text{ cm}$

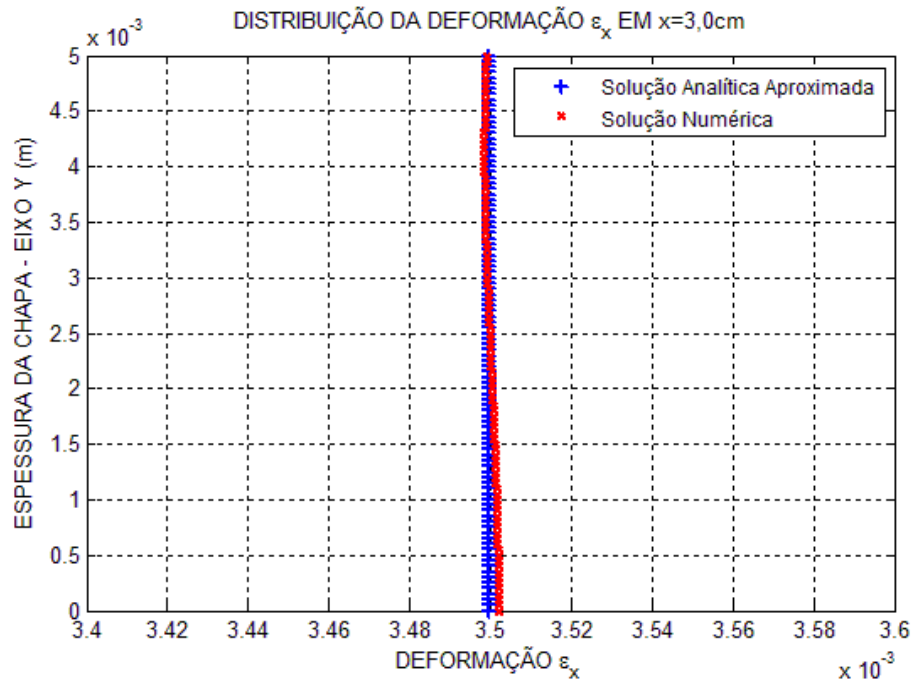


Figura 5.80 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_x$  no Segmento Definido por  $x = 3,0\text{ cm}$

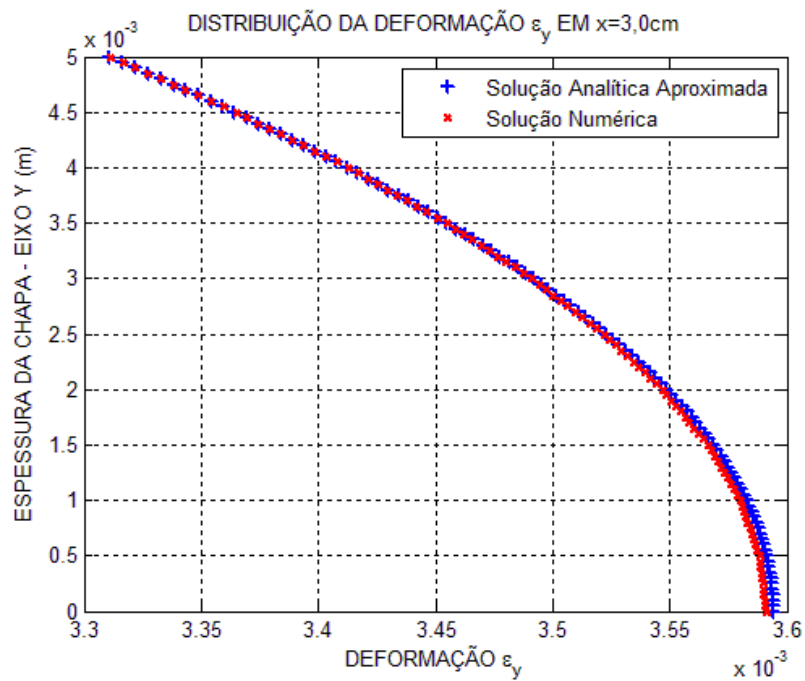


Figura 5.81 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_y$  no Segmento Definido por  $x = 3,0\text{ cm}$

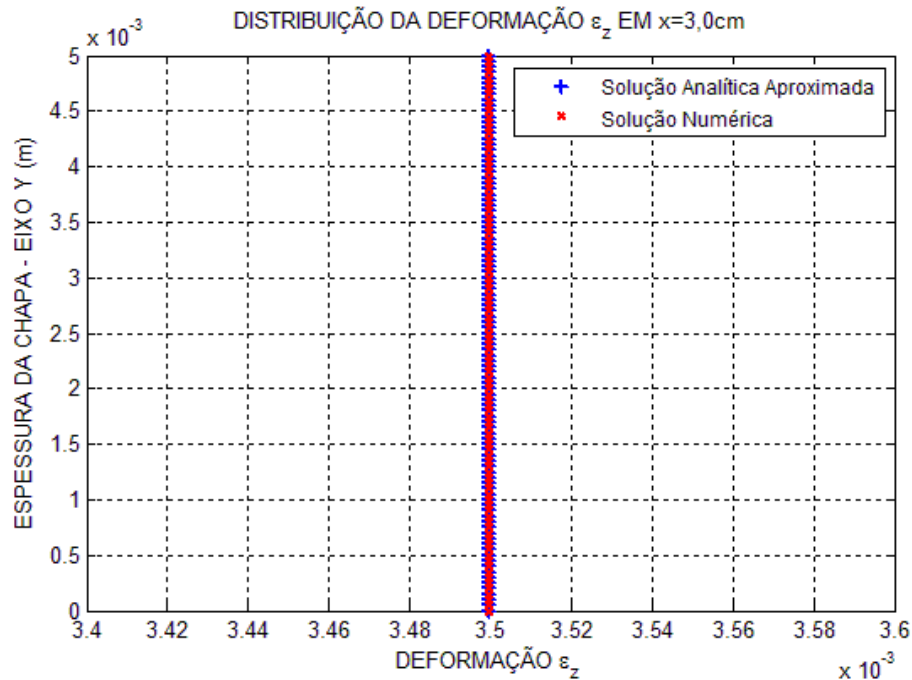


Figura 5.82 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  no Segmento Definido por  $x = 3,0\text{ cm}$

#### 5.4.8.4.1 - Análise dos Gráficos Apresentados para o Segmento em $x = 3,0\text{ cm}$

O segmento definido por  $x = 3,0\text{ cm}$  está a uma distância igual à espessura da chapa da borda livre. Deste modo, espera-se que haja uma boa concordância entre as soluções para este segmento, porém uma concordância, talvez, não tão satisfatória quanto as apresentadas para os segmentos em  $x = 0,0\text{ cm}$ ,  $x = 1,0\text{ cm}$  e  $x = 2,0\text{ cm}$ . Desta forma, observa-se através dos gráficos apresentados nas Figs. 5.79 e 5.82 que as soluções numéricas para a componente de tensão  $\sigma_z$  e para a componente de deformação  $\varepsilon_z$  são praticamente idênticas às soluções analíticas aproximadas. Contudo, para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ , observa-se que as soluções não apresentam uma concordância tão satisfatória em pontos próximos do centro da chapa. Portanto, mostra-se que as soluções apresentam uma ótima concordância para a componente de tensão  $\sigma_z$  e para a componente de deformação  $\varepsilon_z$  e uma boa concordância para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ .



#### 5.4.8.5 - Comparação dos Resultados para o Segmento em $x = 3,5 \text{ cm}$

Através das Figs. 5.83, 5.84, 5.85, 5.86 e 5.87 são mostrados os resultados comparativos para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  no segmento definido por  $x = 3,5 \text{ cm}$ .

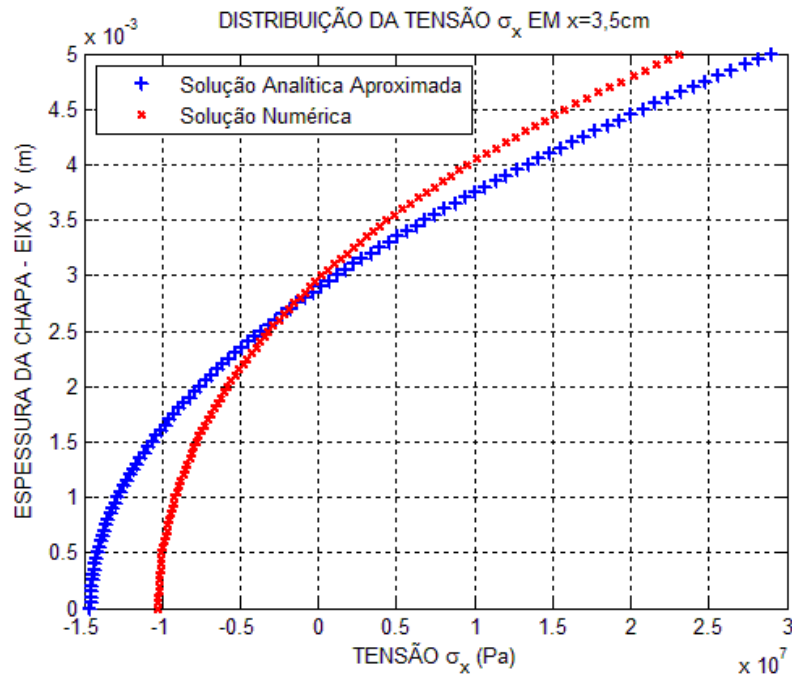


Figura 5.83 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  no Segmento Definido por  $x = 3,5 \text{ cm}$

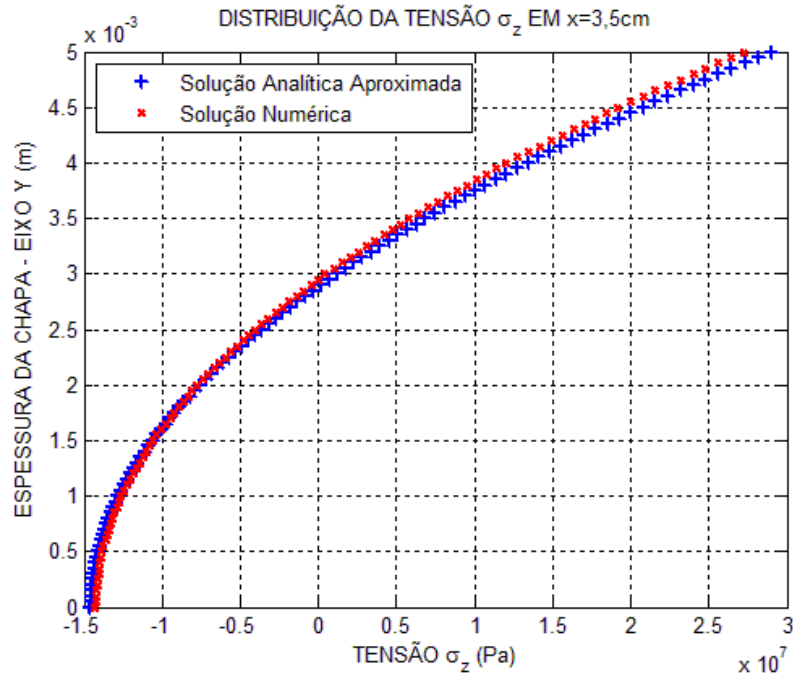


Figura 5.84 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_z$  no Segmento Definido por  $x = 3,5 \text{ cm}$

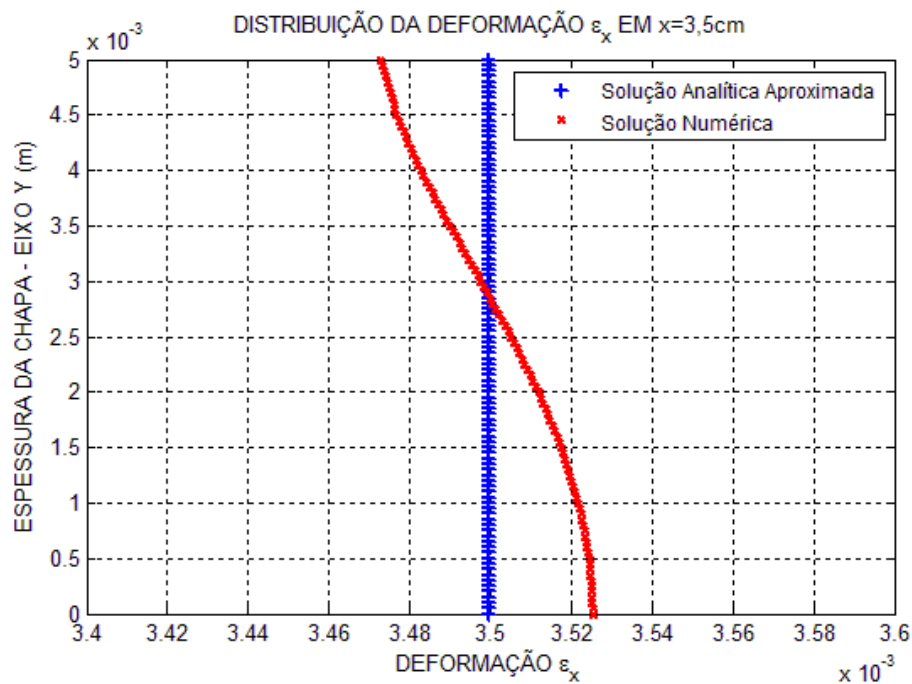


Figura 5.85 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\epsilon_x$  no Segmento Definido por  $x = 3,5 \text{ cm}$

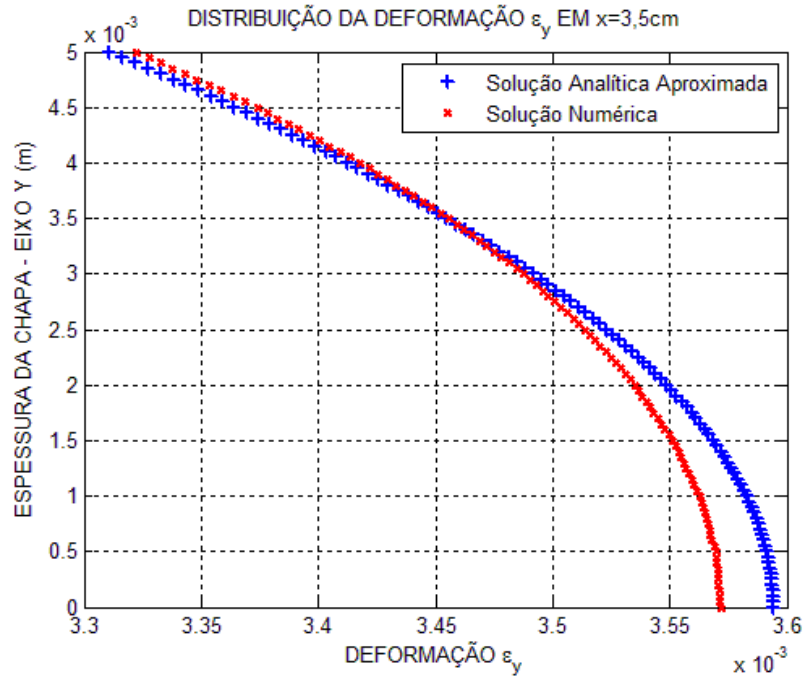


Figura 5.86 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_y$  no Segmento Definido por  $x = 3,5 \text{ cm}$

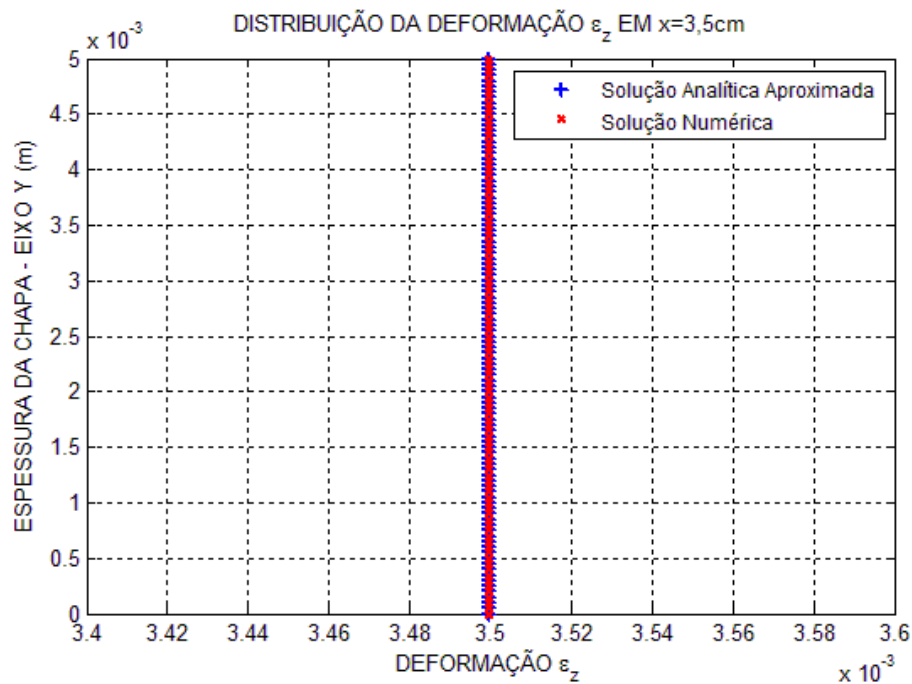


Figura 5.87 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  no Segmento Definido por  $x = 3,5 \text{ cm}$

#### 5.4.8.5.1 - Análise dos Gráficos Apresentados para o Segmento em $x = 3,5 \text{ cm}$

O segmento definido por  $x = 3,5 \text{ cm}$  está a uma distância igual à metade da espessura da chapa em relação à borda livre, ou seja, de acordo com o princípio de Saint-Venant, os campos de tensão e deformação apresentarão elevados níveis de distorção nesta região. Desta forma, as soluções analíticas aproximadas não são válidas neste segmento. Observa-se através dos gráficos apresentados nas Figs. 5.83, 5.85 e 5.86 que as soluções analíticas aproximadas para a componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$  apresentaram níveis de precisão insatisfatórios em relação às respectivas respostas obtidas por meio do MEF/Ansys. Contudo, nota-se que, mesmo estando em uma região fora do limite de validade de solução, a componente de tensão  $\sigma_z$  e a componente de deformação  $\varepsilon_z$  apresentam uma boa aproximação em relação à resposta baseada no MEF, principalmente no que se refere à componente de deformação  $\varepsilon_z$ . Como se pode observar através da Fig. 5.83, a componente de tensão  $\sigma_x$  está se aproximando de zero devido este segmento estar próximo da borda livre da chapa. Portanto, as respostas analíticas aproximadas para a componente de tensão  $\sigma_z$  e para a componente de deformação  $\varepsilon_z$  apresentaram uma boa concordância com as respostas obtidas através do MEF, entretanto o mesmo não ocorre para as respostas referentes à componente de tensão  $\sigma_x$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ .

#### 5.4.8.6 - Comparação dos Resultados para o Segmento em $x = 4,0 \text{ cm}$

Através das Figs. 5.88, 5.89, 5.90, 5.91 e 5.92 são mostrados os resultados comparativos para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$  no segmento definido por  $x = 4,0 \text{ cm}$ .

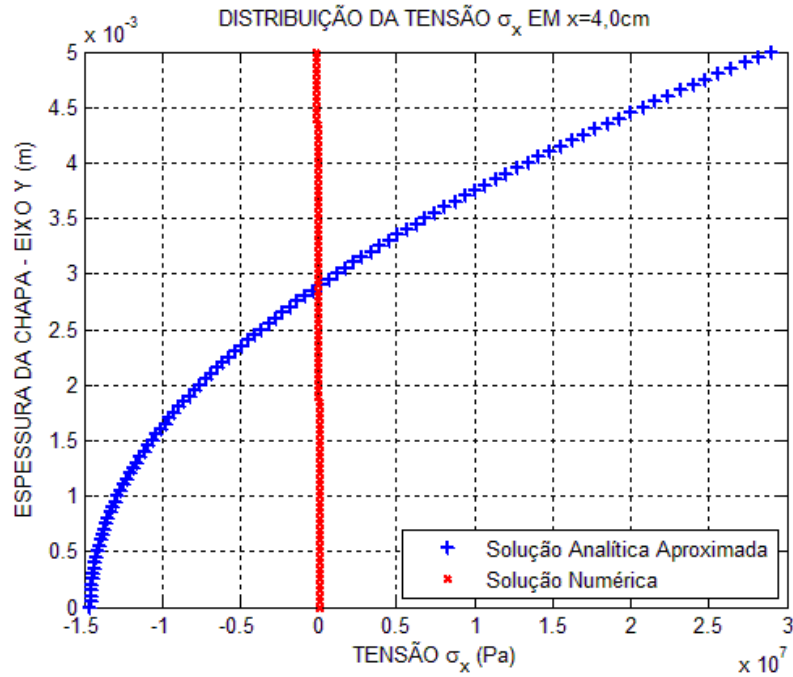


Figura 5.88 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_x$  no Segmento Definido por  $x = 4,0 \text{ cm}$

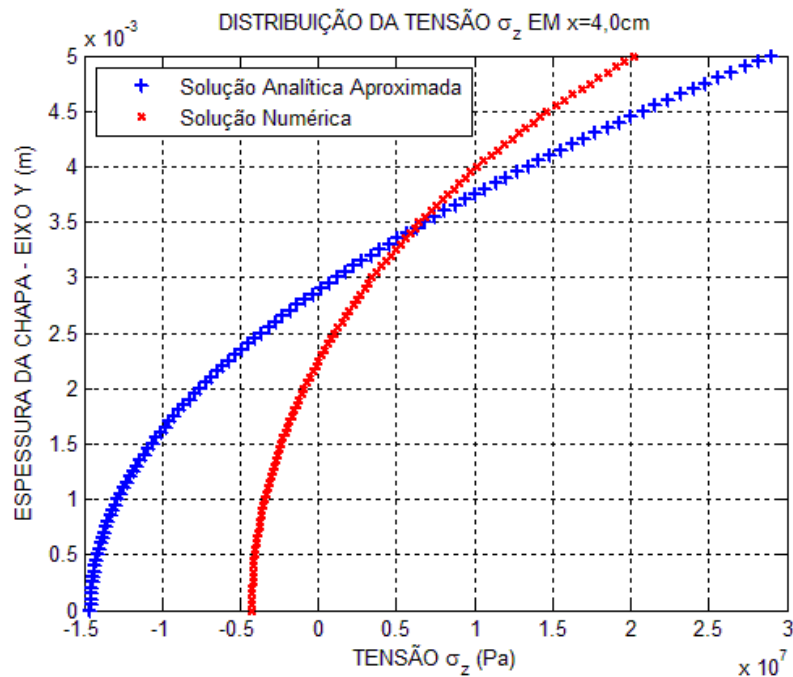


Figura 5.89 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Tensão  $\sigma_z$  no Segmento Definido por  $x = 4,0 \text{ cm}$

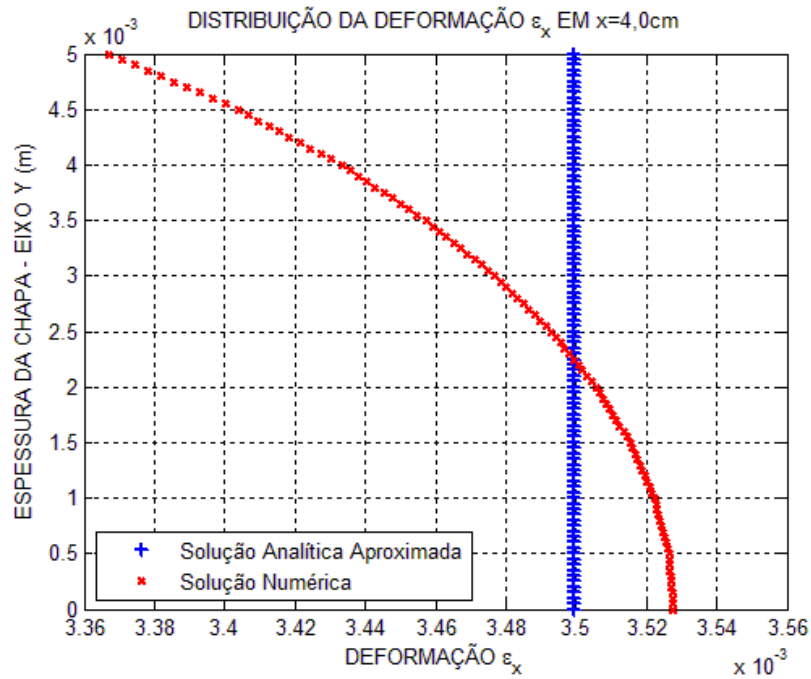


Figura 5.90 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_x$  no Segmento Definido por  $x = 4,0\text{ cm}$

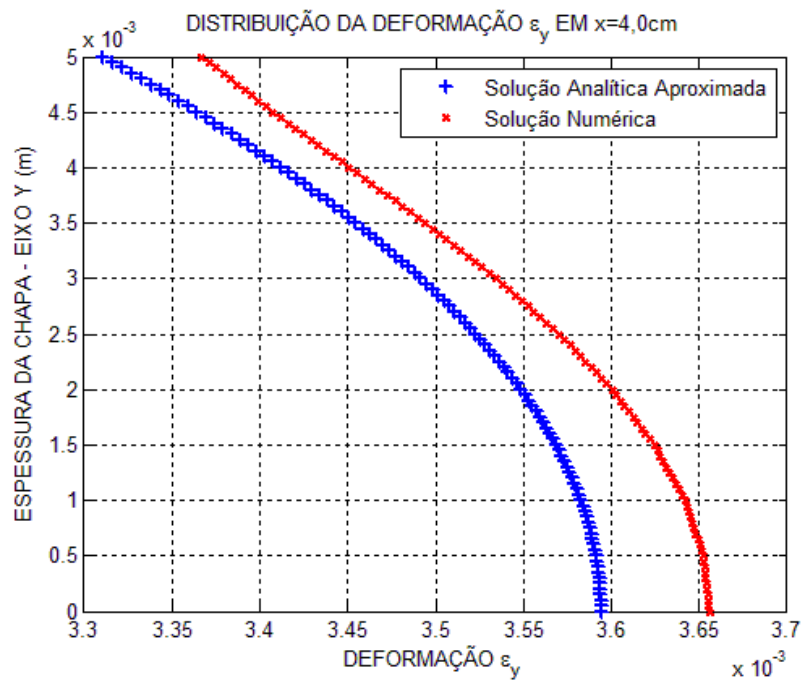


Figura 5.91 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_y$  no Segmento Definido por  $x = 4,0\text{ cm}$

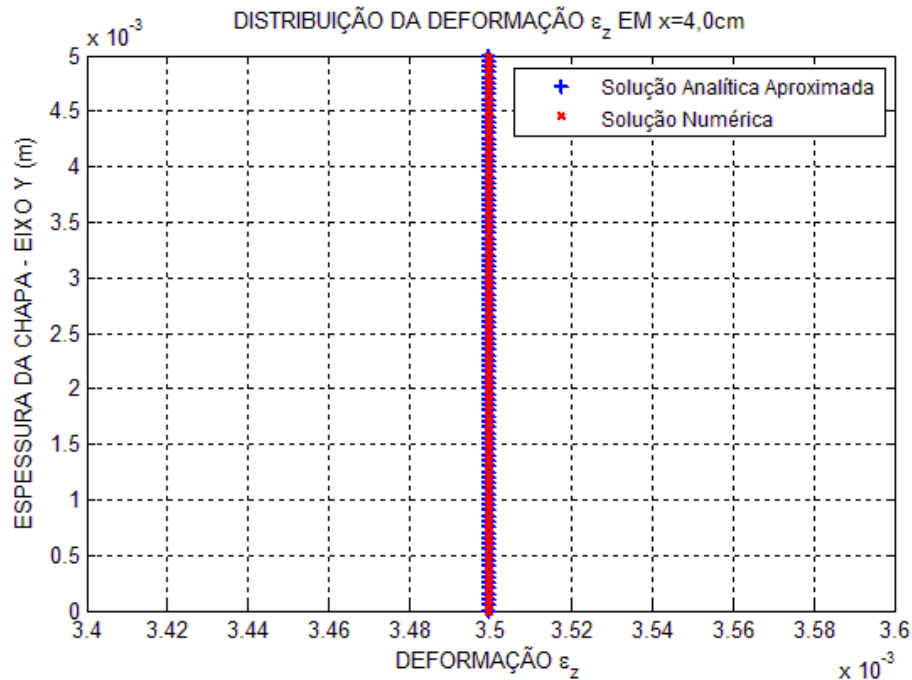


Figura 5.92 - Solução Analítica Aproximada e pelo MEF para a Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  no Segmento Definido por  $x = 4,0\text{ cm}$

#### 5.4.8.6.1 - Análise dos Gráficos Apresentados para o Segmento em $x = 4,0\text{ cm}$

Este segmento pertence à borda livre da chapa, portanto, as soluções analíticas aproximadas não são válidas neste segmento. Para este segmento a componente de tensão  $\sigma_x$  apresenta valor nulo como indicado através da Fig. 5.88. Observa-se que não há concordância satisfatória entre as soluções para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e para com as componentes de deformação  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ , contudo observa-se que a componente de deformação  $\varepsilon_z$  apresentou uma aproximação bastante satisfatória. Portanto, mostra-se que, mesmo estando na borda livre da chapa, a solução numérica para a componente de deformação  $\varepsilon_z$  apresentou uma boa aproximação para com a solução analítica aproximada, entretanto o mesmo não ocorre para as respostas referentes às componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ .

### 5.4.9 - Avaliação Comparativa entre as Soluções

Para uma melhor avaliação do grau de precisão da solução analítica aproximada é considerada uma avaliação comparativa entre as soluções nos pontos onde ocorrem os valores máximos e mínimos para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ . Desta forma, as soluções numéricas são comparadas com as soluções analíticas aproximadas em cada segmento onde houve coleta de dados. A avaliação comparativa é mostrada através das Tabs. 5.24 e 5.25 para a componente de tensão  $\sigma_x$ , através das Tabs. 5.26 e 5.27 para a componente de tensão  $\sigma_z$  e através das Tabs. 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32 e 5.33 para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ , respectivamente.

#### 5.4.9.1 - Avaliação Comparativa para a Componente de Tensão $\sigma_x$

Na Tab. 5.24 são apresentadas as comparações entre as soluções numéricas pelo MEF e analíticas aproximadas nos pontos onde a componente de tensão  $\sigma_x$  apresenta valor máximo pela solução analítica aproximada e na Tab. 5.25 são apresentadas as comparações para o valor mínimo de  $\sigma_x$ .

Tabela 5.24 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente  $\sigma_x$  nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional

Coordenada $x$ do Segmento ( $cm$ )	Coordenada $y$ do Valor Máximo ( $cm$ )	Tensão $\sigma_x$ Analítica ( $MPa$ )	Tensão $\sigma_x$ Numérica ( $MPa$ )	Diferença (%)
0,0	0,005	29,033	28,963	0,241
1,0	0,005	29,033	28,962	0,244
2,0	0,005	29,033	28,971	0,213
3,0	0,005	29,033	28,878	0,533
3,5	0,005	29,033	23,139	20,301



Tabela 5.25 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente  $\sigma_x$  nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional

Coordenada $x$ do Segmento ( <i>cm</i> )	Coordenada $y$ do Valor Mínimo ( <i>cm</i> )	Tensão $\sigma_x$ Analítica ( <i>MPa</i> )	Tensão $\sigma_x$ Numérica ( <i>MPa</i> )	Diferença (%)
0,0	0,0	-14,587	-14,660	0,500
1,0	0,0	-14,587	-14,660	0,500
2,0	0,0	-14,587	-14,669	0,562
3,0	0,0	-14,587	-14,372	1,474
3,5	0,0	-14,587	-10,295	29,424

#### 5.4.9.2 - Avaliação Comparativa para a Componente de Tensão $\sigma_z$

Na Tab. 5.26 são apresentadas as comparações entre as soluções numéricas pelo MEF e analíticas aproximadas nos pontos onde a componente de tensão  $\sigma_z$  apresenta valor máximo pela solução analítica aproximada e na Tab. 5.27 são apresentadas as comparações para o valor mínimo de  $\sigma_z$ .

Tabela 5.26 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente  $\sigma_z$  nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional

Coordenada $x$ do Segmento ( <i>cm</i> )	Coordenada $y$ do Valor Máximo ( <i>cm</i> )	Tensão $\sigma_z$ Analítica ( <i>MPa</i> )	Tensão $\sigma_z$ Numérica ( <i>MPa</i> )	Diferença (%)
0,0	0,005	29,033	28,963	0,241
1,0	0,005	29,033	28,963	0,241
2,0	0,005	29,033	28,967	0,227
3,0	0,005	29,033	28,938	0,327
3,5	0,005	29,033	27,220	6,244

Tabela 5.27 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente  $\sigma_z$  nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional

Coordenada $x$ do Segmento ( $cm$ )	Coordenada $y$ do Valor Mínimo ( $cm$ )	Tensão $\sigma_z$ Analítica (MPa)	Tensão $\sigma_z$ Numérica (MPa)	Diferença (%)
0,0	0,0	-14,587	-14,660	0,500
1,0	0,0	-14,587	-14,660	0,500
2,0	0,0	-14,587	-14,659	0,493
3,0	0,0	-14,587	-14,773	1,275
3,5	0,0	-14,587	-14,298	1,981

#### 5.4.9.3 - Avaliação Comparativa para a Componente de Deformação $\varepsilon_x$

Na Tab. 5.28 são apresentadas as comparações entre as soluções numéricas pelo MEF e analíticas aproximadas nos pontos onde a componente de deformação  $\varepsilon_x$  apresenta valor máximo pela solução numérica e na Tab. 5.29 são apresentadas as comparações para o valor mínimo de  $\varepsilon_x$ . Neste caso, utilizaram-se os valores numéricos como referência, devido ao fato dos valores analíticos aproximados serem iguais em todo o domínio considerado.

Tabela 5.28 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente  $\varepsilon_x$  nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional

Coordenada $x$ do Segmento ( $cm$ )	Coordenada $y$ do Valor Máximo ( $cm$ )	Deformação $\varepsilon_x$ Analítica	Deformação $\varepsilon_x$ Numérica	Diferença (%)
0,0	$y \geq 0$ e $y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
1,0	$y \geq 0$ e $y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
2,0	$y \geq 0,00145$ e $y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
3,0	$y \geq 0$ e $y \leq 0,0002$	0,003499392	0,003502000	0,0745
3,5	0,0	0,003499392	0,003525400	0,743

Tabela 5.29 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente  $\varepsilon_x$  nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional

Coordenada $x$ do Segmento ( $cm$ )	Coordenada $y$ do Valor Mínimo ( $cm$ )	Deformação $\varepsilon_x$ Analítica	Deformação $\varepsilon_x$ Numérica	Diferença (%)
0,0	$y \geq 0$ e $y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
1,0	$y \geq 0$ e $y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
2,0	$y \geq 0$ e $y \leq 0,0014$	0,003499392	0,003499300	0,00263
3,0	$y \geq 0,00395$ e $y \leq 0,0043$	0,003499392	0,003498500	0,0255
3,5	0,005	0,003499392	0,003472900	0,757

#### 5.4.9.4 - Avaliação Comparativa para a Componente de Deformação $\varepsilon_y$

Na Tab. 5.30 são apresentadas as comparações entre as soluções numéricas pelo MEF e analíticas aproximadas nos pontos onde a componente de deformação  $\varepsilon_y$  apresenta valor máximo pela solução analítica aproximada e na Tab. 5.31 são apresentadas as comparações para o valor mínimo de  $\varepsilon_y$ .

Tabela 5.30 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente  $\varepsilon_y$  nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional

Coordenada $x$ do Segmento ( $cm$ )	Coordenada $y$ do Valor Máximo ( $cm$ )	Deformação $\varepsilon_y$ Analítica	Deformação $\varepsilon_y$ Numérica	Diferença (%)
0,0	0,0	0,003594208	0,003594700	0,0137
1,0	0,0	0,003594208	0,003594700	0,0137
2,0	0,0	0,003594208	0,003594700	0,0137
3,0	0,0	0,003594208	0,003591100	0,0865
3,5	0,0	0,003594208	0,003571800	0,623

Tabela 5.31 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente  $\varepsilon_y$  nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional

Coordenada $x$ do Segmento ( $cm$ )	Coordenada $y$ do Valor Mínimo ( $cm$ )	Deformação $\varepsilon_y$ Analítica	Deformação $\varepsilon_y$ Numérica	Diferença (%)
0,0	0,005	0,00331068	0,00331110	0,012728
1,0	0,005	0,00331068	0,00331110	0,0127
2,0	0,005	0,00331068	0,00331110	0,0127
3,0	0,005	0,00331068	0,00331130	0,0188
3,5	0,005	0,00331068	0,00332260	0,360

#### 5.4.9.5 - Avaliação Comparativa para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$

Na Tab. 5.32 são apresentadas as comparações entre as soluções numéricas pelo MEF e analíticas aproximadas nos pontos onde a componente de deformação  $\varepsilon_z$  apresenta valor máximo pela solução analítica aproximada e na Tab. 5.33 são apresentadas as comparações para o valor mínimo de  $\varepsilon_z$ . Para esta componente, as soluções numéricas e analíticas aproximadas foram iguais para todos os segmentos de coleta de dados.

Tabela 5.32 - Avaliação Comparativa dos Valores Máximos da Componente  $\varepsilon_z$  nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional

Coordenada $x$ do Segmento ( $cm$ )	Coordenada $y$ do Valor Máximo ( $cm$ )	Deformação $\varepsilon_z$ Analítica	Deformação $\varepsilon_z$ Numérica	Diferença (%)
0,0	$0 \leq y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
1,0	$0 \leq y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
2,0	$0 \leq y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
3,0	$0 \leq y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
3,5	$0 \leq y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223

Tabela 5.33 - Avaliação Comparativa dos Valores Mínimos da Componente  $\varepsilon_z$  nos Segmentos da Chapa em Estado Tridimensional

Coordenada $x$ do Segmento ( $cm$ )	Coordenada $y$ do Valor Mínimo ( $cm$ )	Deformação $\varepsilon_z$ Analítica	Deformação $\varepsilon_z$ Numérica	Diferença (%)
0,0	$0 \leq y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
1,0	$0 \leq y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
2,0	$0 \leq y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
3,0	$0 \leq y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223
3,5	$0 \leq y \leq 0,005$	0,003499392	0,003499400	0,000223

#### 5.4.10 - Análise de Resultados ao Longo do Eixo $x$

A análise de resultados para as componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$  e para as componentes de deformação  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\varepsilon_z$ , respectivamente, foi apresentada através das Tabs. 5.24, 5.25, 5.26, 5.27, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32 e 5.33. Esta mesma análise é apresentada de forma gráfica através das Figs. 5.93, 5.94, 5.95, 5.96 e 5.97. Assim, como para o EPT, nestas figuras também é estabelecida uma margem de diferença máxima tolerável, estipulada como 5%, da solução analítica aproximada em relação à solução baseada no MEF/Ansys, bem como é mostrada a coordenada  $x$  limite de validade da solução analítica aproximada.

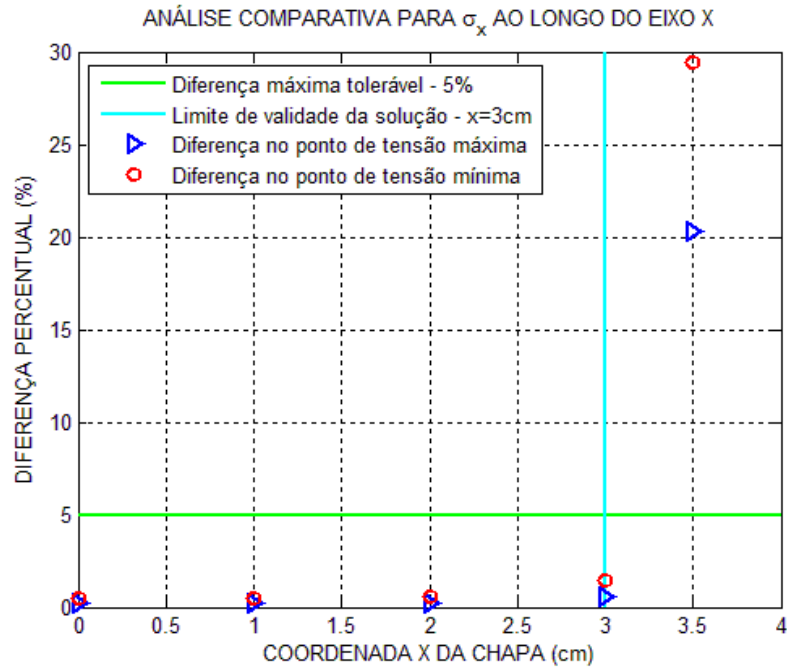


Figura 5.93 - Comparação de Resultados da Componente de Tensão  $\sigma_x$  na Chapa em Estado Tridimensional

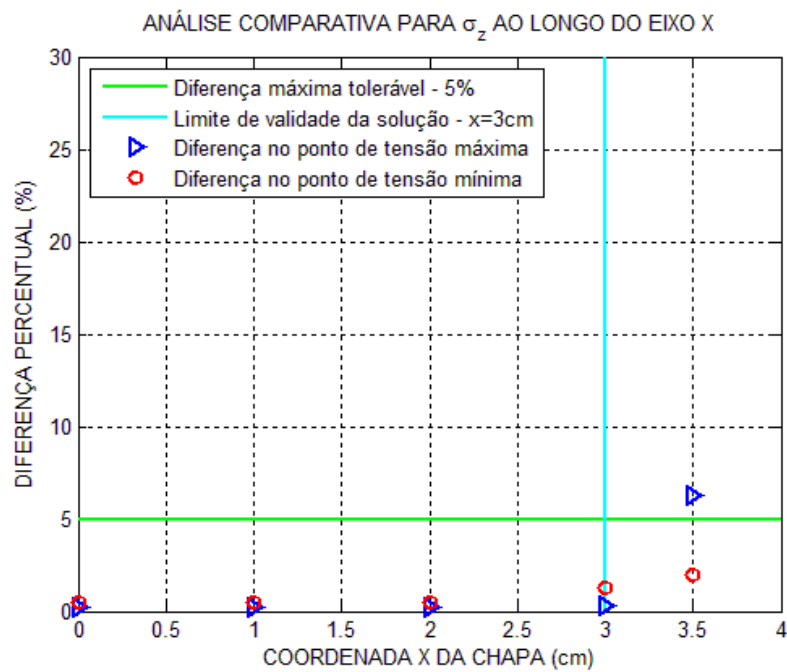


Figura 5.94 - Comparação de Resultados da Componente de Tensão  $\sigma_z$  na Chapa em Estado Tridimensional

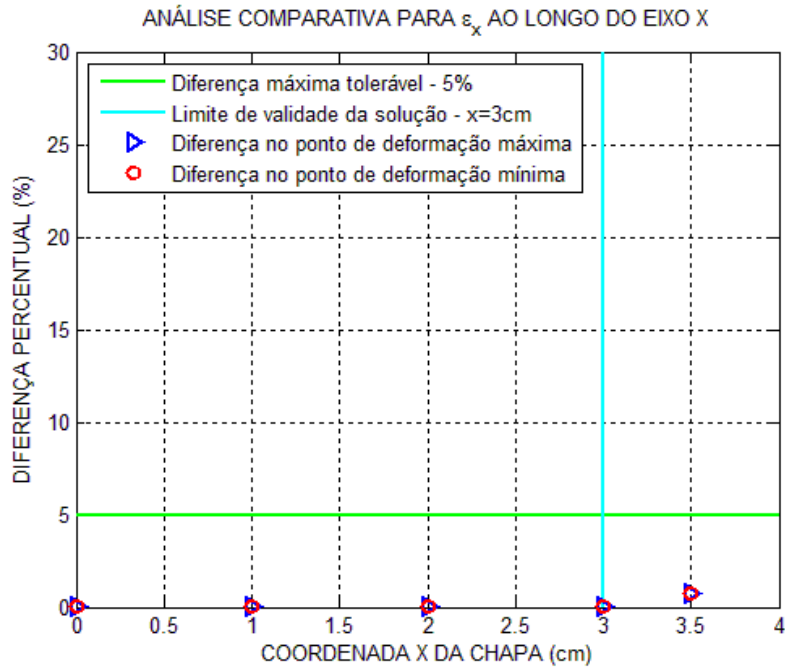


Figura 5.95 - Comparação de Resultados da Componente de Deformação  $\epsilon_x$  na Chapa em Estado Tridimensional

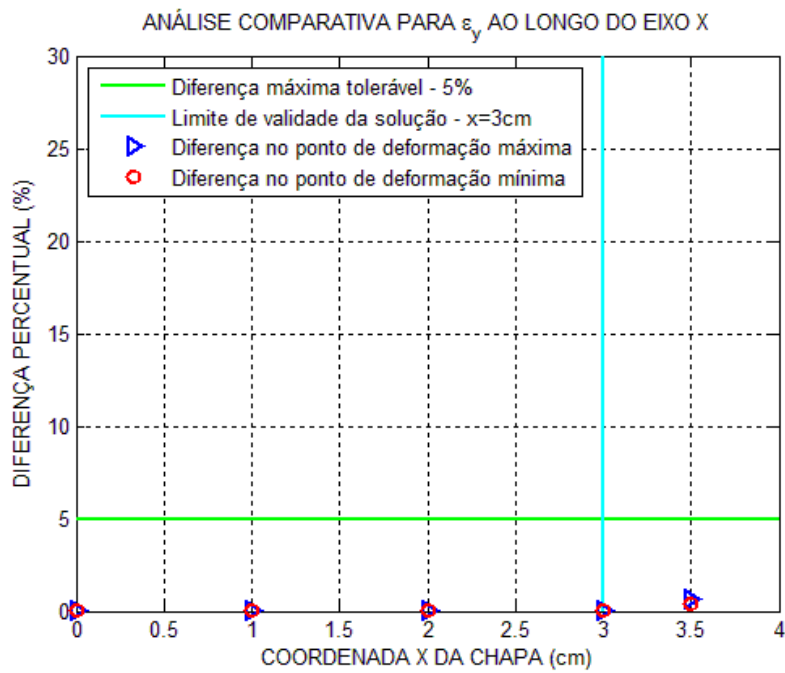


Figura 5.96 - Comparação de Resultados da Componente de Deformação  $\epsilon_y$  na Chapa em Estado Tridimensional

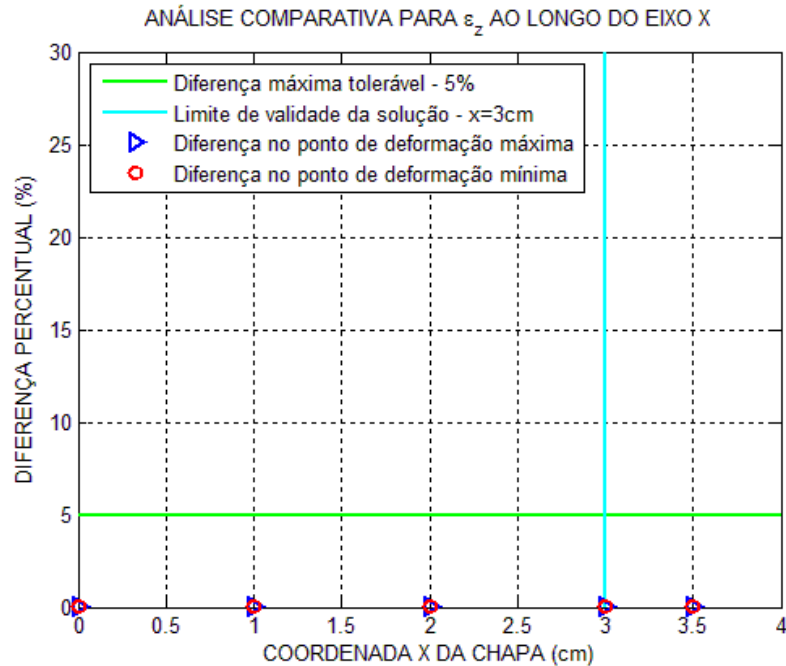


Figura 5.97 - Comparação de Resultados da Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  na Chapa em Estado Tridimensional

#### 5.4.11 - Análise dos Resultados

Inicialmente, salienta-se que a comparação de resultados para o segmento de coordenada  $x = 4,0 \text{ cm}$  não foi apresentada por se tratar da borda livre da chapa. Outra questão a ser ressaltada é que os resultados no segmento de coordenada  $x = 3,5 \text{ cm}$  foram apresentados para avaliar a precisão da solução analítica aproximada em pontos próximos à borda livre da chapa, onde as condições de contorno são atendidas de forma relaxada.

##### 5.4.11.1 - Análise dos Resultados para a Componente de Tensão $\sigma_x$

Observa-se através da Fig. 5.93 que as diferenças ficaram abaixo da faixa dos 5% toleráveis para os pontos situados no domínio de validade da solução analítica aproximada. Observa-se através das Tabs. 5.24 e 5.25 que as maiores diferenças em relação à solução analítica aproximada ocorrem no segmento de coordenada  $x = 3,5 \text{ cm}$ . Os pontos deste segmento situam-se a uma distância igual à metade da espessura da chapa da borda livre. Nesta região, pela consideração do princípio de Saint-Venant, a solução não é válida pelo fato das respostas



nesses pontos serem afetadas pelas condições de contorno reais da borda livre da chapa. Nesta região a componente de tensão  $\sigma_x$  decai de seu valor máximo, para pontos distantes das bordas, até atingir valor nulo na borda livre da chapa. Este fato pode ser verificado através dos valores obtidos através do MEF, apresentados para a componente de tensão  $\sigma_x$ , no segmento de coordenada  $x = 3,5 \text{ cm}$ . Neste segmento, como se pode observar através das Tabs. 5.24 e 5.25, a componente de tensão  $\sigma_x$  apresenta valor numérico 20,301% menor que o valor analítico aproximado no ponto de tensão máxima e valor numérico 29,424% menor em módulo que o valor analítico aproximado no ponto de tensão mínima. Portanto, o segmento mais próximo da borda onde a solução ainda é válida é no definido por  $x = 3,0 \text{ cm}$ . Este segmento está a uma distância igual à espessura da chapa da borda livre. Para este segmento, como se pode observar através das Tabs. 5.24 e 5.25, a componente de tensão  $\sigma_x$  apresenta uma diferença de 0,533% no ponto de tensão máxima e uma diferença de 1,474% no ponto de tensão mínima. Estas diferenças estão dentro da margem de 5% que é normalmente utilizada em projetos de engenharia. Nos segmentos situados em coordenadas menores que  $x = 3,0 \text{ cm}$ , ou seja, para  $x = 0,0 \text{ cm}$ ,  $x = 1,0 \text{ cm}$  e  $x = 2,0 \text{ cm}$ , as diferenças nos pontos de máxima e mínima tensão não chegaram a atingir 0,6% mostrando que a solução analítica aproximada é satisfatória para pontos situados a distâncias maiores ou iguais à espessura da chapa da borda livre.

#### **5.4.11.2 - Análise dos Resultados para a Componente de Tensão $\sigma_z$**

Observa-se através da Fig. 5.94 que as diferenças ficaram abaixo da faixa dos 5% toleráveis para os pontos situados no domínio de validade da solução analítica aproximada. Observa-se através das Tabs. 5.26 e 5.27 que as maiores diferenças em relação à solução analítica aproximada ocorrem no segmento de coordenada  $x = 3,5 \text{ cm}$ . As diferenças apresentadas neste segmento são de 6,244% no ponto de tensão máxima e de 1,981% no ponto de tensão mínima. Estes valores estão bem abaixo dos valores correspondentes obtidos neste mesmo segmento para a componente de tensão  $\sigma_x$ . Este acontecimento pode ser explicado através do fato de que a componente de tensão  $\sigma_z$  não apresenta valor nulo na borda livre que é interceptada pelo eixo  $x$  sendo que, em regiões próximas a esta borda, a componente de tensão  $\sigma_x$  apresenta gradientes mais acentuados. Para o segmento de coordenada  $x = 3,0 \text{ cm}$ , como se pode observar através das Tabs. 5.26 e 5.27, a componente de tensão  $\sigma_z$  apresenta

uma diferença de 0,327% no ponto de tensão máxima e uma diferença de 1,275% no ponto de tensão mínima. Nos segmentos situados em coordenadas menores que  $x = 3,0 \text{ cm}$ , ou seja, para  $x = 0,0 \text{ cm}$ ,  $x = 1,0 \text{ cm}$  e  $x = 2,0 \text{ cm}$ , as diferenças nos pontos de máxima e mínima tensão não chegaram a atingir 0,6% mostrando que a solução analítica aproximada é satisfatória em pontos situados a distâncias maiores ou iguais à espessura da chapa da borda livre.

#### **5.4.11.3 - Análise dos Resultados para as Componentes de Deformação $\varepsilon_x$ e $\varepsilon_y$**

Inicialmente, observa-se através das Figs. 5.95 e 5.96 que as diferenças ficaram abaixo da faixa dos 5% toleráveis para os pontos situados no domínio de validade da solução analítica aproximada para as duas componentes de deformação. Observa-se através das Tabs. 5.28, 5.29, 5.30 e 5.31 que as maiores diferenças ocorrem no segmento definido pela coordenada  $x = 3,5 \text{ cm}$ . As diferenças apresentadas para este segmento são de 0,743% para  $\varepsilon_x$  e 0,623% para  $\varepsilon_y$  no ponto de deformação máxima e de 0,757% para  $\varepsilon_x$  e 0,360% para  $\varepsilon_y$  no ponto de deformação mínima. Para o segmento situado em  $x = 3,0 \text{ cm}$ , como se pode observar através das Tabs. 5.28, 5.29, 5.30 e 5.31, as diferenças foram de 0,0745% para  $\varepsilon_x$  e 0,0865% para  $\varepsilon_y$  no ponto de deformação máxima e de 0,0255% para  $\varepsilon_x$  e 0,0188% para  $\varepsilon_y$  no ponto de deformação mínima. Nos segmentos situados em coordenadas menores que  $x = 3,0 \text{ cm}$ , ou seja, para  $x = 0,0 \text{ cm}$ ,  $x = 1,0 \text{ cm}$  e  $x = 2,0 \text{ cm}$ , as diferenças nos pontos de máxima e mínima deformação não chegaram a atingir 0,02% para as duas componentes de deformação mostrando que as soluções analíticas aproximadas são satisfatórias para pontos situados a distâncias maiores ou iguais à espessura da chapa da borda livre.

#### **5.4.11.4 - Análise dos Resultados para a Componente de Deformação $\varepsilon_z$**

Inicialmente, observa-se através da Fig. 5.97 que as diferenças ficaram abaixo da faixa dos 5% toleráveis para os pontos situados no domínio de validade da solução analítica aproximada. Observa-se através das Tabs. 5.32 e 5.33 que as diferenças foram iguais para todos os segmentos, sendo o seu valor de 0,000223%. Esta diferença também foi apresentada para o segmento em  $x = 3,5 \text{ cm}$  que está fora do limite de validade da solução. Desta forma,

a solução analítica aproximada para a componente de deformação  $\varepsilon_z$  é satisfatória para pontos situados a distâncias maiores ou iguais à espessura da chapa da borda livre. Os resultados analíticos aproximados também poderão ser utilizados em pontos mais próximos das bordas desde que seja efetuada uma análise mais apurada acerca das distribuições de deformação nesta região.

# 6

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 - Conclusões

Abordou-se neste trabalho a metodologia proposta por Vecci (1995) visando à determinação das tensões térmicas auto-equilibradas e deformações térmicas em chapas planas retangulares estaticamente determinadas constituídas por material elástico linear e isotrópico e sujeitas a campos quaisquer de variação de temperatura. A metodologia foi estendida para possibilitar a análise de chapas em estado tridimensional, além da consideração inicialmente proposta como EPT.

A variação de temperatura é representada por uma aproximação polinomial generalizada escrita em termos de polinômios de Legendre possibilitando considerar variações quaisquer tais como as que usualmente ocorrem em chapas submetidas aos processos metalúrgicos de têmpera e resfriamento forçado. Além disto, estruturas de aeronaves supersônicas, fornos industriais, usinas termoelétricas, dentre outras, são compostas por elementos estruturais que podem ser analisados tais como as chapas aqui abordadas. Deste modo, a determinação dos campos de tensão e deformação térmicas nestes elementos estruturais pode ser realizada através da consideração de um campo polinomial aproximado que representa a distribuição de temperatura a que estes elementos estão sujeitos.

Para ilustrar e avaliar a precisão da metodologia proposta, dois exemplos são apresentados. No primeiro exemplo considerou-se uma chapa fina em EPT de comprimento muito maior que a largura. Esta chapa foi submetida ao processo de resfriamento forçado, onde se desenvolveu uma distribuição de temperatura exponencial ao longo de sua largura. No segundo exemplo considerou-se uma chapa quadrada de lado muito maior que a espessura. Esta chapa foi submetida ao processo de têmpera, onde se desenvolveu uma distribuição de temperatura cossenoidal ao longo de sua espessura. Para os dois exemplos considerou-se um conjunto de hipóteses básicas simplificadoras que resultaram na condição de distribuição de tensão térmica auto-equilibrada atuante nas chapas. Desta forma, a partir da aproximação polinomial para os dois campos de temperatura, encontraram-se as distribuições de tensão e deformação na forma analítica aproximada.

A precisão dos resultados obtidos neste trabalho foi aferida pela comparação dos mesmos com as respostas correspondentes obtidas pela aplicação do MEF por meio do programa Ansys. Nos pontos do domínio, onde as hipóteses básicas para a validade da solução analítica aproximada proposta são atendidas, observou-se um excelente nível de precisão entre os resultados deste trabalho e aqueles obtidos pelo MEF. Houve diferenças significativas apenas em pontos próximos às bordas ou superfícies livres em decorrência da influência da adoção da condição de contorno relaxada usada para viabilizar as soluções analíticas aproximadas. Ou seja, em regiões próximas às bordas livres há um elevado nível de distorção dos campos de tensão e deformação. Deste modo, não é possível atender as hipóteses básicas simplificadoras nesta região.

A metodologia proposta limita-se à análise de variações moderadas de temperatura, onde se considera a hipótese de propriedades mecânicas constantes e independentes do campo de temperatura. Nos exemplos aqui estudados adota-se esta hipótese, admitindo-se que as propriedades mecânicas das chapas variem muito pouco com a temperatura garantindo, portanto, comportamento elástico linear. Contudo, ao serem considerados gradientes de temperatura mais acentuados, como em uma espaçonave hipersônica no processo de reentrada na atmosfera, poder-se-ia pensar em análise não linear física e térmica, considerando-se incrementos ou decrementos de variação de temperatura ao longo do tempo. Neste caso, as soluções deste trabalho não poderiam ser empregadas pelo fato de não ser garantida a hipótese de comportamento elástico linear.

A vantagem desta metodologia consiste na precisão e velocidade de obtenção dos resultados. Ou seja, expressando-se qualquer distribuição de temperatura em termos de polinômios, determinam-se de forma rápida e eficiente os campos de tensão e deformação a partir dos coeficientes polinomiais do campo de temperatura aproximado. Além disto, pode-se utilizar desta metodologia quando o campo de temperatura é estimado experimentalmente, ou seja, aproximando-se uma curva polinomial através dos pontos coletados para a temperatura, os campos de tensão e deformação ficam determinados pela utilização das expressões, em termos de polinômios, desenvolvidas neste trabalho.

## **6.2 - Trabalhos Futuros**

Sugestões para trabalhos futuros:

- Estudo acerca da degradação térmica do material da chapa devido aos efeitos da temperatura.
- Desenvolvimento de soluções para regiões próximas das bordas livres das chapas.
- Determinação de um procedimento para estabelecer o grau do polinômio que descreve o campo de temperatura na chapa.
- Realização de experimentos com variação de temperatura na chapa e com medição de deformação.
- Realização de análise da variação do campo de temperatura com o tempo (regime transiente) para determinação do perfil de temperatura crítico.

# 7

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANSYS, INC. CORPORATE. *ANSYS Mechanical APDL*. version 14.5. Canonsburg, PA, USA: ANSYS Inc., 2012.

ANTUNES, E. B. *Modelagem e Simulação de Estruturas Flexíveis: Cabos e Chapas*. 2010. 145 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

ARGYRIS, J.H. Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations - Part I. General Theory. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, v.26, p.347-356, 1954.

ARGYRIS, J.H.; KELSEY, S. Energy Theorems and Structural Analysis: A Generalized Discourse with Applications on Energy Principles of Structural Analysis Including the Effects of Temperature and Non-Linear Stress-Strain Relations - Part II. Applications to Thermal Stress Problems and St. Venant Torsion. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, v.26, p.410-422, 1954.

BHONGADE, C.M.; DURGE, M.H. A Brief Note on Quasi Static Thermal Stresses in a Thin Rectangular Plate with Internal Heat Generation. *American Journal of Engineering Research (AJER)*, v.2, p.388-393, 2013.

BHONGADE, C.M.; DURGE, M.H. Quasi Static Thermal Stresses in Thin Rectangular Plate with Internal Heat Generation. *Asian Journal of Current Engineering and Maths*, v.3, p.1-4, 2014.

BOLEY, B.A. The Determination of Temperature, Stresses, and Deflections in Two-Dimensional Thermoelastic Problems. *Journal of the Aeronautical Sciences (Institute of the Aeronautical Sciences)*, v.23, p.67-75, 1956.

BOLEY, B.A.; WEINER, J.H. *Theory of Thermal Stresses*. 1<sup>a</sup> ed. New York: John Wiley & Sons, 1960. 13 p.

BORN, J.S.; HORVAY, G. Thermal Stresses in Rectangular Strips - II. *Journal of Applied Mechanics*, v.22, p.401-406, 1955.

BURDEN, R.L.; FAIRES, J.D. *Numerical Analysis*. 9<sup>a</sup> ed. Boston: Cengage Learning, 2010. 3 p.

CARNAHAN, B.; LUTHER H.A.; WILKES, J. O. *Applied Numerical Methods*. 1<sup>a</sup> ed. New York: John Wiley & Sons, 1969. 1 p.

CUNHA, M.C.C. *Métodos Numéricos*. 2<sup>a</sup> ed. Campinas: Unicamp, 2000. 6 p.

DANGE, W.K. Determination of Thermal Stresses of a Three Dimensional Transient Thermoelastic Problem of a Square Plate. *International Journal of Physics and Mathematics Sciences*, v.4, p.34-40, 2014.

GAIKWAD, K.R.; GHADLE, K.P. Quasi-Static Thermal Stresses in a Thick Rectangular Plate. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, v.5, p.139-147, 2009.



GAIKWAD, K.R.; GHADLE, K.P. Three Dimensional Non-Homogeneous Thermoelastic Problem in a Thick Rectangular Plate due to Internal Heat Generation. *Southern Africa Journal of Pure and Applied Mathematics (SAJPAM)*, v.5, p.26-38, 2011.

GHUME, R.S.; PAKADE, R.N.; MUGALE, P.V.; KHOBRAGADE, N.W. Inverse Thermo elastic Problem of Semi infinite Rectangular Beam due to Heat Generation. *International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT)*, v.3, p.429-432, 2013.

HELDENFELS, R.R.; ROBERTS, W.M. Experimental and Theoretical Determination of Thermal Stresses in a Flat Plate. *NACA TN 2769*, 1952.

HORVAY, G. The End Problem of Rectangular Strips. *Journal of Applied Mechanics*, v.20, p.87-94, 1953.

HORVAY, G. Thermal Stresses in Rectangular Strips. *In: National Congress of Applied Mechanics. Proceedings of the 2nd National Congress of Applied Mechanics*. Ann Arbor: ASME, 1954. p.313-322.

INCROPERA, F.P.; DEWITT, D.P.; BERGMAN T.L.; LAVINE A.S. *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008. 5 p.

IYENGAR, K.T.S.R.; ALWAR, R.S. Thermal Stresses in a Long Rectangular Plate Constrained at One of the Shorter Edges. *International Journal of Mechanical Sciences*, v.4, p.485-490, 1962.

IYENGAR, K.T.S.R.; CHANDRASHEKHARA, K. Thermal Stresses in Rectangular Plates. *Applied Scientific Research*, v.15, p.141-160, 1966.

JADHAV, C.M. Thermal Stresses In Semi-Infinite Solid Rectangular Plate With Heat Source. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, v.2, p.1579-1584, 2013.

JADHAV, C.M.; AHIRRAO, B.R.; KHOBRADE, N.W. An Inverse Thermoelastic Problem of Thin Finite Rectangular Plate Due to Internal Heat Sources. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*, v.2, p.1009-1019, 2013.

KHOBRADE, N.W.; PARVEEN, H. Thermoelastic Solution of a Semi Infinite Rectangular Beam Due to Heat Generation. *Journal of Statistics and Mathematics*, v.3, p.138-140, 2012.

KOLYANO, Y.M.; DIDYK, V.Z.; KOVAL'CHUK, B.V.; KORDUBA, B.M. Thermal Stress in a Plate Strip Induced by Local Heating. *Strength of Materials*, v.17, p.701-704, 1985.

KOLYANO, Y.M.; GROMOVYK, V.I. Effect of Variable Heat Transfer on Stresses in Plates Induced by Sources of Heat. *Soviet Applied Mechanics*, v.12, p.1286-1290, 1976.

KOLYANO, Y.M.; PAKULA, E.A. Temperature Stresses in a Heat-Source Heated Plate Strip with Heat Transfer. *Soviet Applied Mechanics*, v.3, p.48-54, 1967.

LAMBA, N.K.; KHOBRADE, N.W. Thermoelastic Problem of a Thin Rectangular Plate Due to Partially Distributed Heat Supply. *International Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, v.8, p.1-11, 2012a.

LAMBA, N.K.; KHOBRADE, N.W. Integral Transform Methods for Inverse Problem of Heat Conduction with Known Boundary of a Thin Rectangular Object and its Stresses. *Journal of Thermal Science*, v.21, p.459-465, 2012b.

LAURA, P.A.A.; GUTIERREZ, R.H. Thermal Stresses in Rectangular Plates: Variational and Finite Element Solutions. *Nuclear Engineering and Design*, v.47, p.297-303, 1978.

MELESHKO, V.V. Superposition Method in Thermal-Stress Problems for Rectangular Plates. *International Applied Mechanics*, v.41, p.1043-1058, 2005.

MELESHKO, V.V. Thermal Stresses in an Elastic Rectangle. *Journal of Elasticity*, v.105, p.61-92, 2011.

MENDELSON, A.; HIRSCHBERG, M. Analysis of Elastic Thermal Stresses in Thin Plate with Spanwise and Chordwise Variations of Temperature and Thickness. *NACA TN 3778*, 1956.

NODA, N.; HETNARSKI, R.B.; TANIGAWA, Y. *Thermal Stresses*. 2<sup>a</sup> ed. New York: Taylor & Francis, 2003. 11 p.

OLIVEIRA S.L.G.; ARAÚJO, J.C.; BASTOS I.N.; VASCONCELLOS J.F.V.; NETO A.J.S. Simulação do Resfriamento de Chapas de Aço em Laminação Controlada. *Revista Matéria*, Nova Friburgo, v.9, p.43-54, 2004. Disponível em: <<http://www.materia.coppe.ufrj.br/sarra/artigos/artigo10306>>. Acesso em: 28 de outubro de 2014.

PATIL, S.; PRASAD, J.S.V.R.K. Some Steady-State Thermoelastic Problems of Rectangular Plates. *Applied Mathematical Sciences*, v.7, p.5807-5819, 2013.

PATIL, V.B.; AHIRRAO, B.R.; KHOBRAGADE, N.W. Direct Thermoelastic Problem of Heat Conduction with Internal Heat Generation and Partially Distributed Heat Supply in Rectangular Plate. *Canadian Journal on Science and Engineering Mathematics*, v.3, p.193-197, 2012.

PRZEMIENIECKI, J.S. Thermal Stresses in Rectangular Plates. *The Aeronautical Quarterly*, v.10, p.65-78, 1959.

ROBERTS, E. Elastic Design Charts for Thin Plates with Spanwise and Chordwise Variations in Temperature. *NASA TN D-1182*, 1962.

ROBERTS, E.; MENDELSON, A. A Simplified Method of Determining the Elastic State of Thermal Stress in a Thin Flat Plate of Finite Dimensions. *NASA TN D-1740*, 1963.

ROSSIT, C.A.; LAURA, P.A.A. A Unified, Polynomial Approach for the Approximate Solution of Thermoelastic Problems in Rectangular Plates. *Ocean Engineering*, v.24, p.543-549, 1997.

ROY, H.S.; BAGADE, S.H.; KHOBRAGADE, N.W. Thermal Stresses of a Semi Infinite Rectangular Beam. *International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT)*, v.3, p.442-445, 2013.

SALVE, P.M. Inverse Transient Quasi-Static Thermal Stresses in a Thin Rectangular Plate. *Advances in Theoretical and Applied Mechanics*, v.3, p.221-231, 2010.

SUGANO, Y. Transient Thermal Stresses in a Rectangular Plate Due to Variation of Heat-Transfer Coefficients on Upper and Lower Surfaces. *International Journal of Engineering Sciences*, v.21, p.1203-1214, 1983.

SUTAR, C.S.; AHIRRAO, B.R.; KHOBRAGADE, N.W. An Inverse Thermoelastic Problem of Heat Conduction with Internal Heat Generation for the Rectangular Plate. *Canadian Journal on Science and Engineering Mathematics*, v.3, p.198-201, 2012.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J.N. *Theory of Elasticity*. 2<sup>a</sup> ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951. 3 p.

VECCI, M. A. *Mecânica dos Materiais Avançada*. Belo Horizonte, 1995. 17 p.

VIGAK, V.M. Solution of Two-Dimensional Problems of Elasticity and Thermoelasticity for a Rectangular Region. *Journal of Mathematical Sciences*, v.86, p.2537-2542, 1997.

VIHAK, V.M.; YUZVYAK, M.Y.; YASINSKIJ, A.V. The Solution of the Plane Thermoelasticity Problem for a Rectangular Domain. *Journal of Thermal Stresses*, v.21, p.545-561, 1998.

WAH, T. Thermal Stresses in Thin Beams. *International Journal of Solids and Structures*, v.2, p.293-305, 1966.

YAVORSKII, M.S. Thermal Stress State of Strip-Plate with Heat Sources. *Soviet Applied Mechanics*, v.18, p.929-934, 1982.

# **APÊNDICE**

## APÊNDICE A - CONVERGÊNCIA DOS POLINÔMIOS DE LEGENDRE

O teste de convergência dos polinômios de Legendre empregados na aproximação polinomial para os campos de temperatura foram demonstrados para a chapa em EPT e para a chapa em estado tridimensional. Os resultados gráficos são apresentados a seguir.

### Convergência dos Polinômios de Legendre para a Chapa em EPT

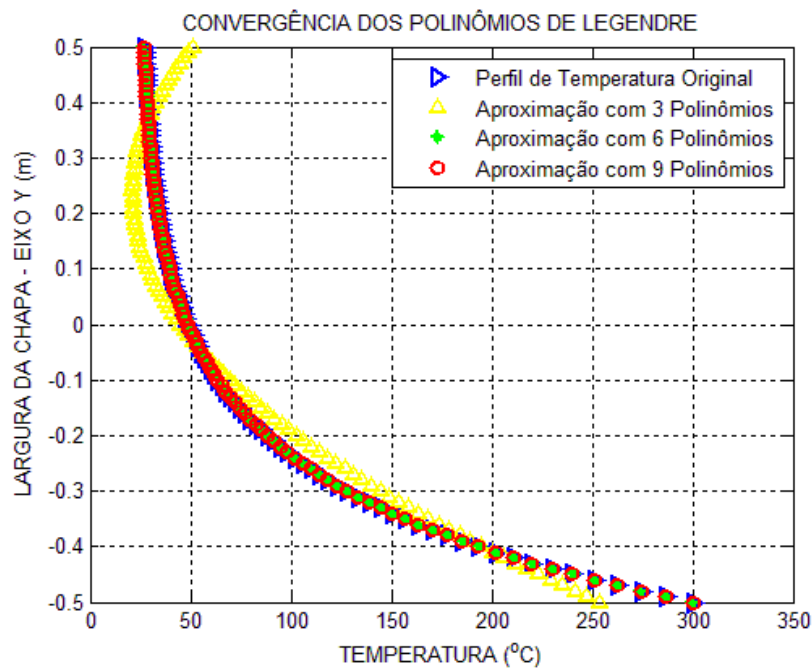


Figura A.1 - Convergência dos Polinômios de Legendre para a Distribuição de Temperatura na Chapa em EPT

## Convergência dos Polinômios de Legendre para a Chapa em Estado Tridimensional

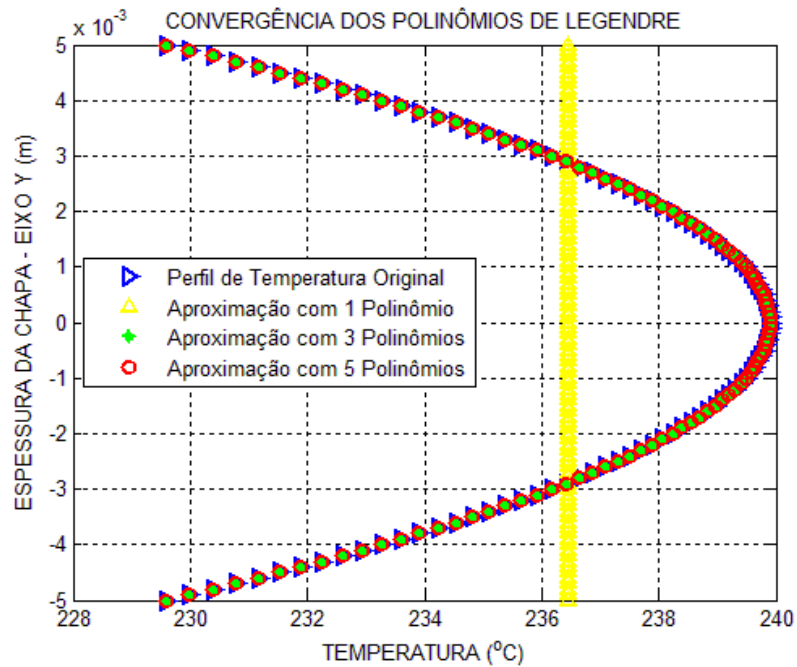


Figura A.2 - Convergência dos Polinômios de Legendre para a Distribuição de Temperatura na Chapa em Estado Tridimensional

## APÊNDICE B - TESTE DE CONVERGÊNCIA DAS SOLUÇÕES OBTIDAS PELO MEF

O teste de convergência para as soluções numéricas obtidas através do MEF foi realizado para as chapas nas duas configurações estudadas. Para a chapa em EPT, realizou-se o teste na seção transversal definida por  $x = 0,0 \text{ m}$  e para a chapa em estado tridimensional, realizou-se o teste no segmento definido por  $x = z = 0,0 \text{ cm}$ . Os resultados gráficos são apresentados a seguir.

### Teste de Convergência para a Chapa em EPT

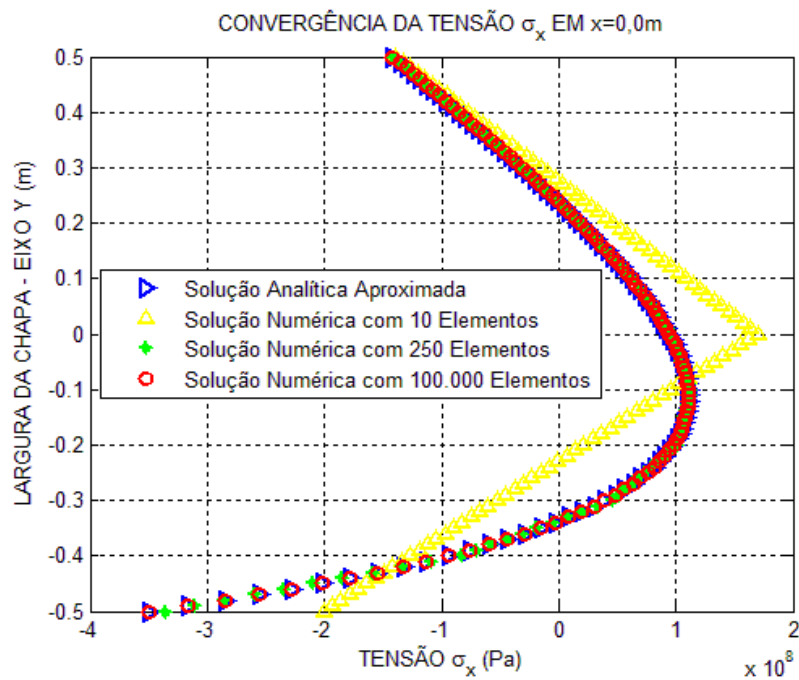


Figura B.1 - Convergência da Componente de Tensão  $\sigma_x$  em  $x = 0,0 \text{ m}$  na Chapa em EPT



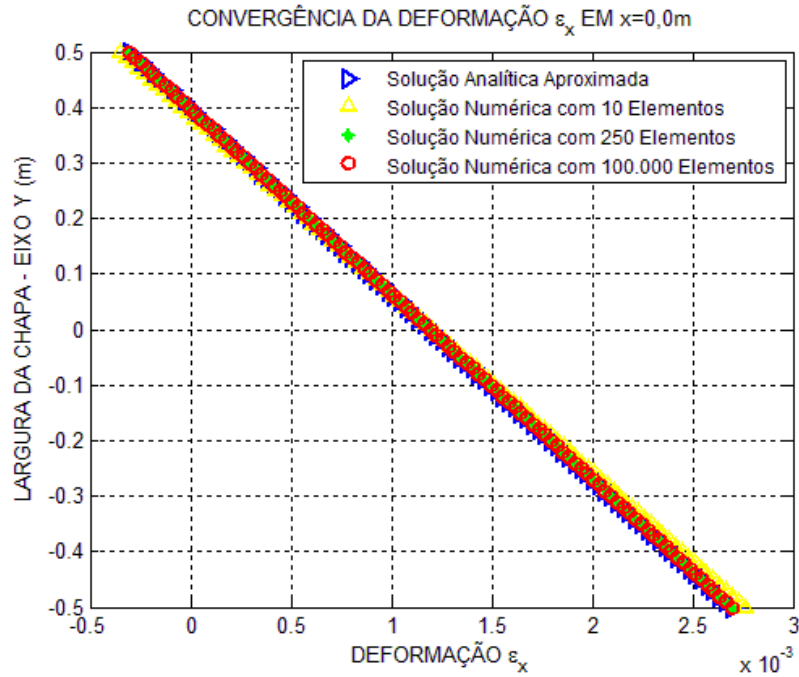


Figura B.2 - Convergência da Componente de Deformação  $\varepsilon_x$  em  $x = 0,0 m$  na Chapa em EPT

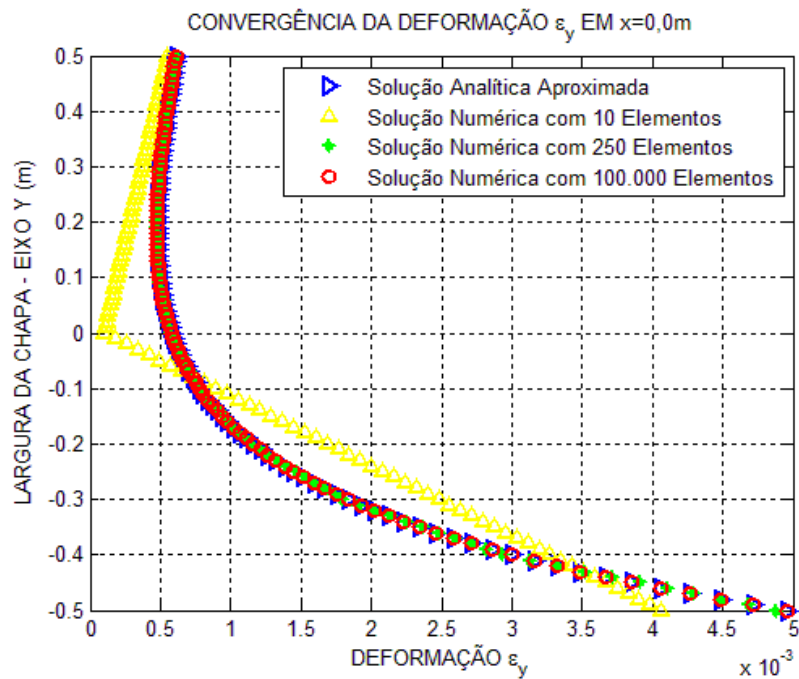


Figura B.3 - Convergência da Componente de Deformação  $\varepsilon_y$  em  $x = 0,0 m$  na Chapa em EPT

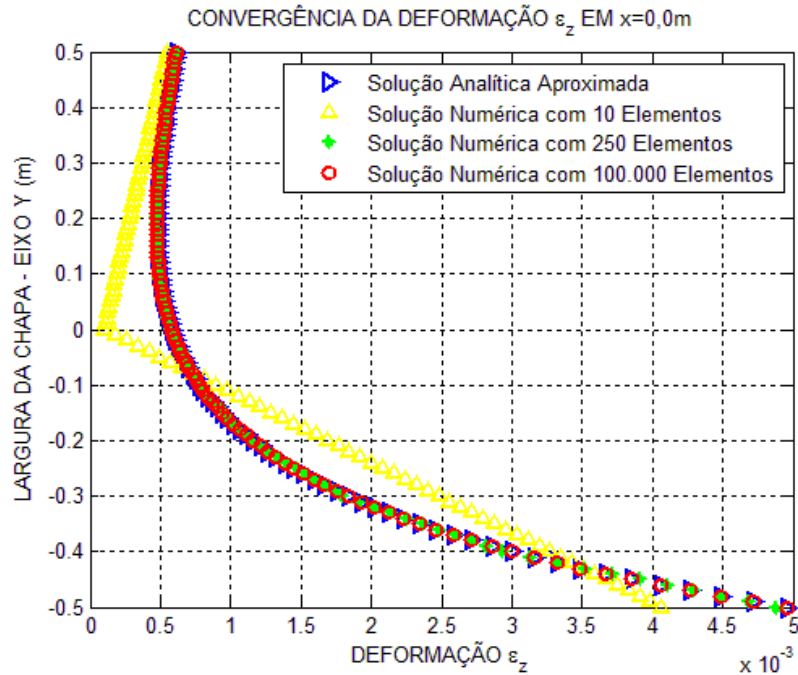


Figura B.4 - Convergência da Componente de Deformação  $\varepsilon_z$  em  $x = 0,0\text{ m}$  na Chapa em EPT

### Teste de Convergência para a Chapa em Estado Tridimensional

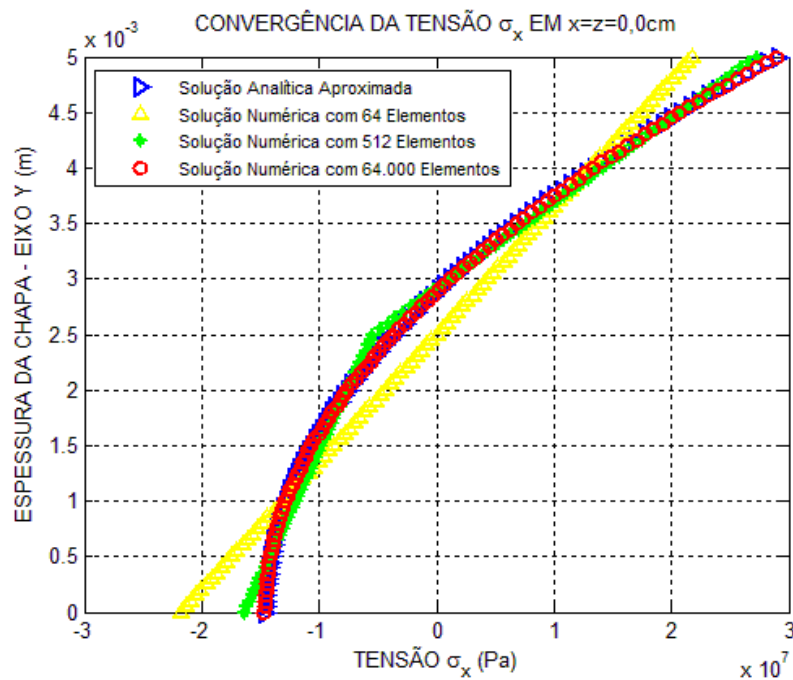


Figura B.5 - Convergência da Componente de Tensão  $\sigma_x$  em  $x = z = 0,0\text{ cm}$  na Chapa em Estado Tridimensional

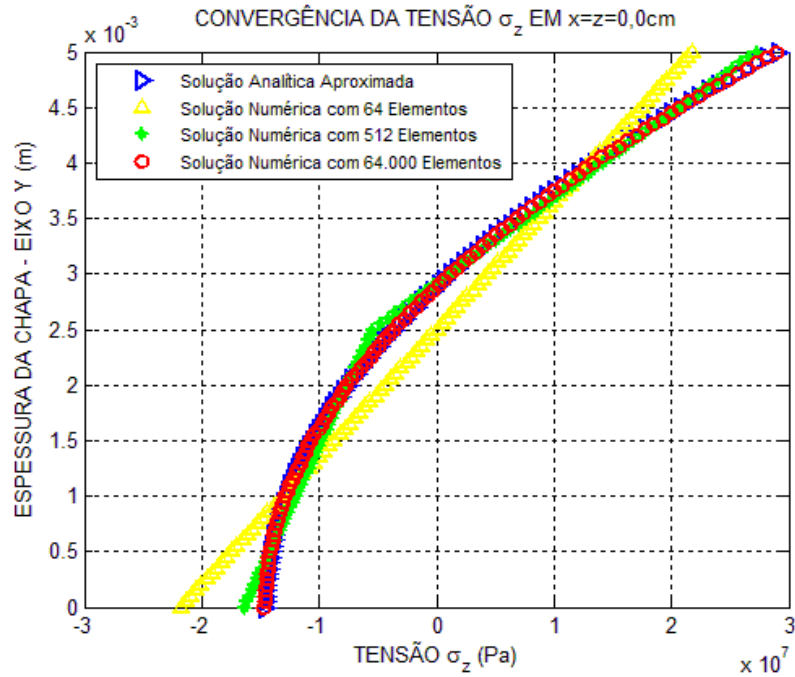


Figura B.6 - Convergência da Componente de Tensão  $\sigma_z$  em  $x = z = 0,0 \text{ cm}$  na Chapa em Estado Tridimensional

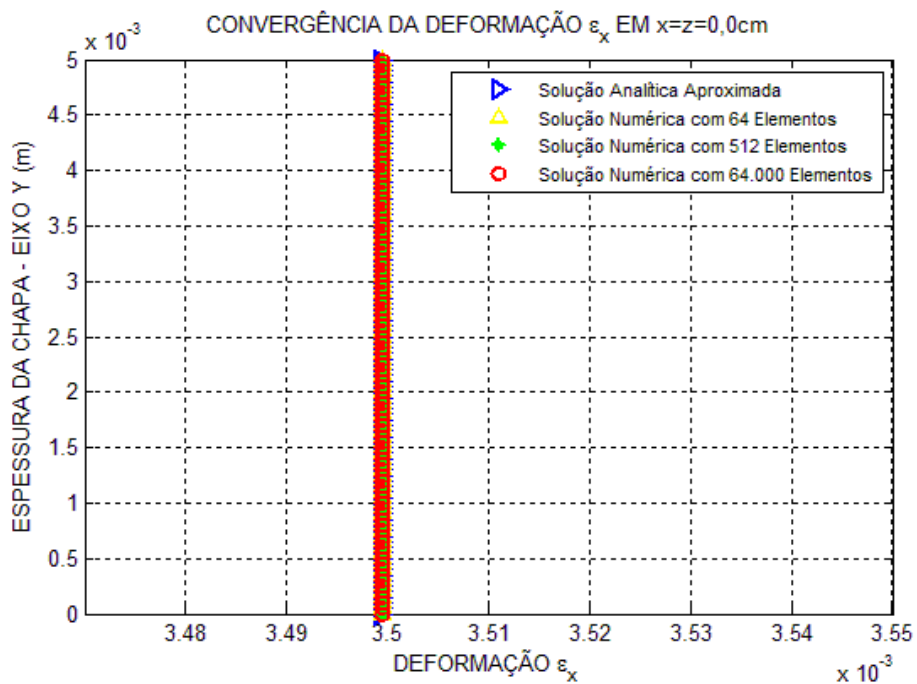


Figura B.7 - Convergência da Componente de Deformação  $\epsilon_x$  em  $x = z = 0,0 \text{ cm}$  na Chapa em Estado Tridimensional

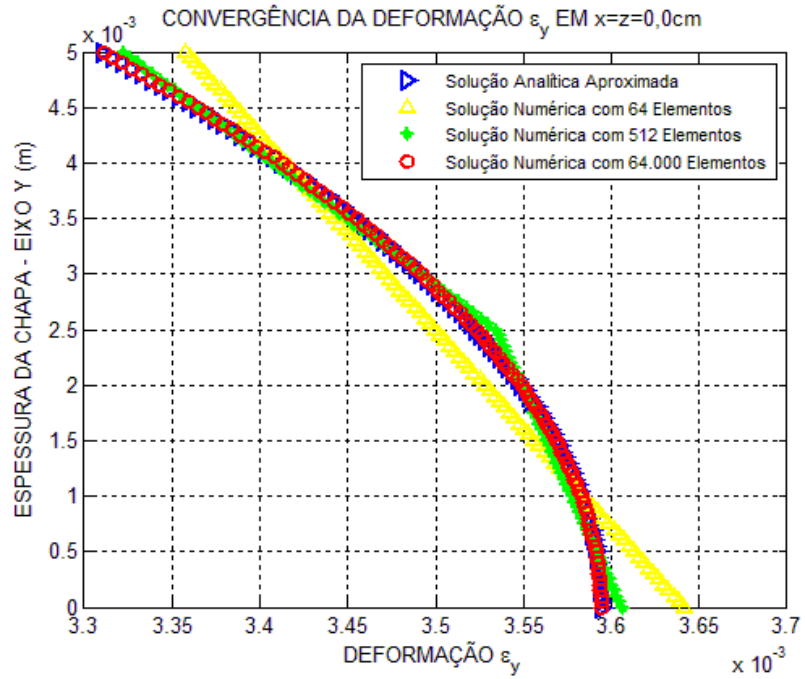


Figura B.8 - Convergência da Componente de Deformação  $\epsilon_y$  em  $x = z = 0,0 \text{ cm}$  na Chapa em Estado Tridimensional

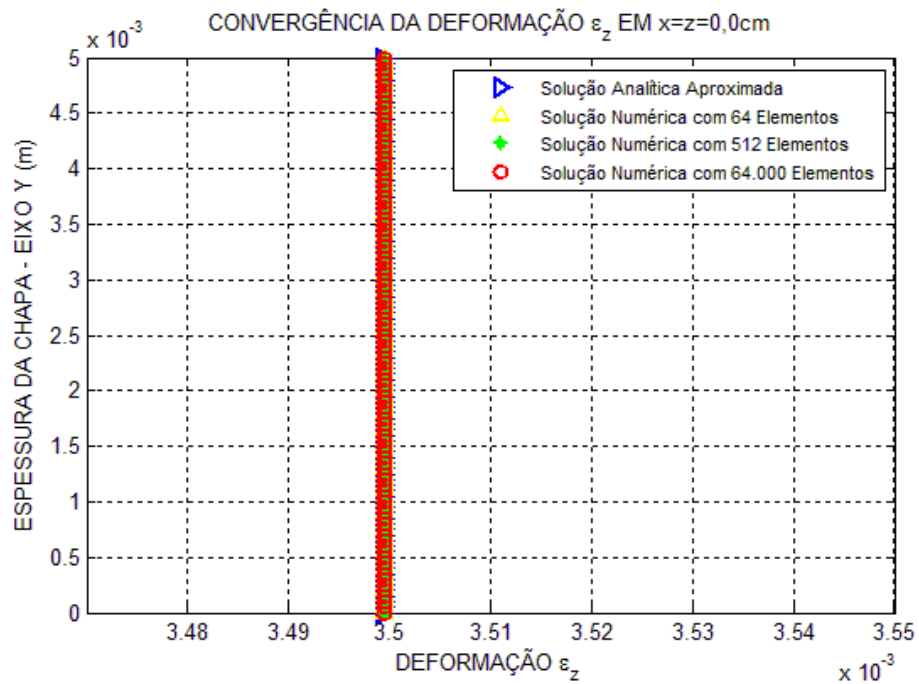


Figura B.9 - Convergência da Componente de Deformação  $\epsilon_z$  em  $x = z = 0,0 \text{ cm}$  na Chapa em Estado Tridimensional