

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

Debora Francisco Lalo

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EVOLUCIONÁRIA DE ESTRUTURAS SUBMETIDAS À  
MÚLTIPLOS CASOS DE CARREGAMENTO**

Belo Horizonte

2015

L212o

Lalo, Débora Francisco.

Otimização topológica evolucionária de estruturas submetidas à múltiplos casos de carregamento [manuscrito] / Débora Francisco Lalo. - 2015.

xviii, 109 f., enc.: il.

Orientador: Marcelo Greco.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f.101-109.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Otimização estrutural - Teses. I. Greco, Marcelo. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)

Debora Francisco Lalo

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EVOLUCIONÁRIA DE ESTRUTURAS SUBMETIDAS À  
MÚLTIPLOS CASOS DE CARREGAMENTO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Marcelo Greco

Belo Horizonte

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EVOLUCIONÁRIA DE ESTRUTURAS  
SUBMETIDAS À MULTIPLOS CASOS DE CARREGAMENTO"**

Debora Francisco Lalo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

---

Prof. Dr. Marcelo Greco  
DEES - UFMG (Orientador)

---

Prof. Dr. Rodney Rezende Saldanha  
DELE - UFMG

---

Prof. Dr. William Manjud Maluf Filho  
Centro Universitário da FEI

Belo Horizonte, 27 de novembro de 2015

*A persistência é o menor caminho do êxito.*  
*(Charles Chaplin)*

## **DEDICATÓRIA**

*Ao meu querido esposo*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por me dar forças nesta jornada e me fazer nunca desistir. Agradeço aos meus pais por terem me dado educação e valores essenciais para a ascensão do meu crescimento pessoal e intelectual.

Agradeço aos meus amigos da Ford que me acolheram ainda na graduação e me apresentaram esse fantástico mundo da simulação computacional. Obrigada não somente pelos momentos de alegria e risadas, mas principalmente pelos conceitos fundamentais que me foram ensinados com paciência e dedicação.

Agradeço a todos os meus amigos e familiares, em especial os meus colegas de mestrado pelo companheirismo e discussões de assuntos que elevaram meu grau de conhecimento. Não citarei nomes, para não me esquecer de ninguém.

Agradeço a todos do departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, principalmente os professores pela dedicação com que conduzem o ofício e pelo conhecimento transmitido. Agradeço especialmente o meu orientador, Professor Dr. Marcelo Greco, pela confiança, apoio e amizade, além de sua extrema dedicação e paciência, obrigada pela contribuição de seus comentários e sugestões para aprimoramento deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas da Smarttech Engenharia pelo apoio, mesmo que no final desta jornada, e também ao restante da equipe, por disponibilizar softwares comerciais que contribuíram positivamente com a validação dos exemplos estudados.

E por fim, dedico este trabalho ao Felipe, meu esposo, amigo e companheiro, por caminhar ao meu lado, ter me ensinado a sonhar e abraçado meus sonhos como se fossem seus. Sem o seu amor e dedicação nada seria possível.

## RESUMO

A otimização estrutural vem recebendo cada vez mais atenção em todas as áreas da engenharia e tem sido identificada como um dos maiores desafios em projeto estrutural. Em resultado aos computadores de alta velocidade, vários métodos de otimização topológica foram desenvolvidos, incluindo aqueles que aplicam procedimentos heurísticos nas análises e atuam de maneira evolucionária. Neste contexto, pretende-se desenvolver, implementar e validar uma metodologia para a Otimização Topológica Evolucionária aplicada à componentes estruturais utilizando-se técnicas computacionais eficientes. Essa metodologia corresponde a um procedimento evolutivo onde os elementos finitos com baixos níveis de tensão são progressivamente removidos da estrutura. O presente trabalho irá propor alguns exemplos de otimização aplicados em estruturas com comportamento elastoplástico sob condições dinâmicas, de forma a avaliar a influência da variação da taxa de amortecimento no movimento oscilatório e conseqüentemente no resultado final da solução ótima. O algoritmo implementado também é capaz de realizar estudos de otimização em estruturas sob múltiplas condições de carregamento, onde através do método proposto podem ser combinados diferentes tipos de análises, podendo-se considerar análises lineares ou não lineares em condições estáticas ou dinâmicas. A implementação foi realizada através de um algoritmo em linguagem de programação Python, devido a sua interface com o software de análise de problemas multifísicos Abaqus<sup>®</sup>. A eficiência dessa nova abordagem do procedimento evolucionário de otimização será demonstrada através da comparação com exemplos clássicos da literatura. Alguns exemplos numéricos não contidos na literatura também foram adicionados e validados em softwares comerciais.

**Palavras-chave:** Otimização Topológica, Otimização Estrutural Evolucionária (ESO), Análise Elastoplástica, Múltiplos Casos de Carregamento.



## ABSTRACT

Structural optimization has received ever increasing attention in all engineering areas and it has been identified as the most challenging task in structural design. As a result of high speed computers, several topology optimization methods have been developed, including those that apply heuristic procedures in the analyses and act in an evolutionary manner. In this context, it is intended to develop, implement and validate a methodology for Evolutionary Topology Optimization applied for structural components by using efficient computational techniques. This methodology represents an evolutionary procedure in which the finite elements with low levels of stress are progressively removed from the structure. This paper will propose some optimization examples applied to structures with elastoplastic behavior under dynamic conditions in order to evaluate the influence of the damping ratio variation in the oscillatory motion and consequently in the outcome of the optimal solution. The implemented algorithm is also able to perform optimization studies for structures under multiple load cases, where by using the proposed method it will be possible to combine different types of analyses, which may be considered either linear or non-linear analyses under either static or dynamic conditions. The implementation was accomplished through an algorithm in Python programming language, due to its interface with the analysis software for multiphysics problems Abaqus<sup>®</sup>. The effectiveness of this new approach by evolutionary procedure optimization will be demonstrated through the comparison with classical examples from literature. Some numerical examples not contained in the literature have also been added and validated by commercial softwares.

**Keywords:** Topology Optimization, Evolutionary Structural Optimization (ESO), Elastoplastic Analysis, Multiples Load Cases.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{x}$  – vetor de variáveis de otimização

$f(\vec{x})$  – função objetivo

$\vec{x}^*$  – argumento mínimo da função objetivo

$g_i(\vec{x})$  e  $h_j(\vec{x})$  – restrições de projeto para os parâmetros  $a_i$  e  $b_j$

$\rho$  – campo das pseudo-densidades dentro do domínio de projeto

$E_0$  – módulo de elasticidade longitudinal do material isotrópico sólido

$\eta$  – fator de penalização para as densidades intermediárias

$\sigma_e^{vm}$  – tensão equivalente de von Mises do elemento

$\sigma_{max}^{vm}$  – máxima tensão equivalente de von Mises da estrutura

$RR_i$  – razão de rejeição ( $RR$ ) na iteração  $i$

$RR_0$  – razão de rejeição inicial

$RR_f$  – razão de rejeição final

$ER$  – razão de evolução

$V_f$  – volume final prescrito

$U_d$  – densidade de energia de distorção

$E$  – módulo de elasticidade longitudinal do material

$G$  – módulo de elasticidade transversal do material

$\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  – componentes de tensões principais

$(U_d)_{esc}$  – densidade de energia de distorção no momento do escoamento

$\sigma_{esc}$  – tensão limite de escoamento

$\sigma^{vm}$  – tensão equivalente de von Mises

$\sigma_x, \sigma_y$  e  $\sigma_z$  – tensões normais nas direções x, y e z

$\tau_{xy}, \tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  – tensões de cisalhamento

$\Phi$  – função de escoamento para comportamento elastoplástico

$S$  – tensor desviatório de tensões

$k$  – variável interna que descreve o encruamento isotrópico

$\sigma_y$  – limite de escoamento do modelo elastoplástico inicial

$\sigma_k$  – novo limite de escoamento corrigido pela variável interna

$E^h$  – módulo de encruamento isotrópico

$\gamma$  – multiplicador plástico

$d\varepsilon^{el}$  e  $d\varepsilon^{pl}$  – incrementos de deformações das parcelas elástica e plástica

$d\varepsilon$  – incremento de deformação total

$D$  – tensor elástico do material

$d\sigma$  – incremento de tensão

$D_{ep}$  – tensor elastoplástico tangente

$d$  – amortecimento por unidade de volume

$m$  – massa do sistema amortecido

$k$  – constante elástica de rigidez do sistema

$c$  – coeficiente de amortecimento viscoso

$t$  – instante de tempo

$\zeta$  – taxa de amortecimento

$\alpha$  – contribuição da parcela de massa no amortecimento

$\beta$  – contribuição da parcela de rigidez no amortecimento

$\omega_n$  – frequência natural da estrutura

$[K]$  – matriz de rigidez global

$[M]$  – de massa global

$\omega_i$  –  $i$ -ésima frequência natural

$\{u_i\}$  – autovetor de deslocamentos correspondente a  $\omega_i$

$k_i$  – rigidez modal

$m_i$  – massa modal

$[K^e]$  – matrizes de rigidez do elemento removido

$[M^e]$  – matrizes de massa do elemento removido

$\alpha_i^e$  – número de sensibilidade do elemento para análise de frequência natural

$\{f\}$  – vetor de forças nodais

$\{\eta\}$  – vetor deslocamento por superposição modal

$\Omega$  – frequência de excitação

$\{\bar{u}\}$  – matriz modal do sistema

$\{y\}$  – vetor amplitude da resposta modal descrita em termos das coordenadas principais

$[\bar{K}]^{-1}$  – inversa da nova matriz de rigidez equivalente por superposição modal

$\{\bar{f}\}$  – vetor de forças transientes por superposição modal

$\alpha_{e,k}$  – número de sensibilidade do elemento devido ao modo  $k$

$\alpha_{e,j}$  – número de sensibilidade do elemento devido ao modo  $j$

$\alpha_{e,jk}$  – número de sensibilidade do elemento devido à diferença entre os modos  $k$  e  $j$

## LISTA DE SIGLAS

AESO – Additive Evolutionary Structural Optimization

BESO – Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization

C3D4 – Elemento tridimensional tetraedro linear de 4 nós

EPT – Estado Plano de Tensões

ER – Evolution Ratio

ESO – Evolutionary Structural Optimization

GESO – Genetic Evolutionary Structural Optimization

M3D4 – Elemento tridimensional de membrana quadrilátero de 4 nós

MEF – Método dos Elementos Finitos

RR – Rejection Ratio

SESO – Smoothing Evolutionary Structural Optimization

SIMP – Solid Isotropic Material with Penalization

STRI65 – Elemento triangular de espessura fina de 6 nós, usando 5 graus de liberdade por nó

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Desenvolvimento do projeto de engenharia na prática. ....	1
Figura 1.2: Desenvolvimento otimizado do projeto de engenharia. ....	2
Figura 2.1: Classificação geral dos principais métodos determinísticos.....	9
Figura 2.2: Ramificações da Computação Natural. ....	10
Figura 2.3: Exemplo de Otimização Paramétrica. ....	12
Figura 2.4: Exemplo de Otimização de Forma. ....	13
Figura 2.5: Exemplo Otimização Topológica.....	13
Figura 2.6: Exemplo de reforçador utilizado na Otimização Topográfica. ....	14
Figura 2.7: Contribuição dos tipos de otimização estrutural no desenvolvimento de projeto. ....	14
Figura 2.8: Representação do problema de otimização topológica considerando o domínio $\Omega$ . ....	15
Figura 2.9: Representação das regiões com instabilidades do tabuleiro de xadrez. ....	19
Figura 2.10: Representação da topologia final considerando o refinamento da malha (a) 2700 elementos, (b) 4800 elementos e (c) 17200 elementos. ....	20
Figura 2.11: Representação dos pontos ótimos para um domínio limitado. ....	21
Figura 3.1: Domínio de projeto para estrutura do tipo Michell. ....	25
Figura 3.2: Estrutura do tipo Michell. ....	26
Figura 3.3: Estrutura tipo Michell obtida através do método ESO.....	27
Figura 3.4: Estados de tensão associados à energia de deformação armazenada em um elemento de volume (a) estado triaxial de tensões, (b) variação de volume e (c) distorção.....	28
Figura 3.5: Superfície de ruptura de von Mises para o caso plano. ....	29
Figura 3.6: Superfície de ruptura de von Mises para o caso tridimensional. ....	29
Figura 3.7: Representação qualitativa da independência de malha. (a) e (b) critério de tensão máxima, (c) e (d) critério de tensão média. ....	32
Figura 3.8: Modelo elástico-perfeitamente plástico.....	33
Figura 3.9: Modelo elastoplástico com encruamento linear.....	33
Figura 3.10: Curva de histerese típica para amortecimento mecânico ....	36
Figura 3.11: Modelo de um oscilador harmônico amortecido.....	38
Figura 3.12: Contribuição das parcelas de massa e rigidez no efeito da taxa de amortecimento.....	39
Figura 3.13: Sequência do novo processo de aplicação da metodologia ESO para múltiplos casos de carregamento. ....	46

Figura 4.1: Domínio inicial de projeto com a aplicação das condições de contorno para os casos de carregamento 1 e 2. ....	48
Figura 4.2: Topologia ótima da viga em balanço para o caso de carregamento 1.....	48
Figura 4.3: Topologia ótima da viga em balanço para o caso de carregamento 2.....	49
Figura 4.4: Topologia ótima da viga em balanço considerando os casos de carregamento 1 e 2. ....	49
Figura 4.5: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do caso de carregamento 1.....	50
Figura 4.6: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do caso de carregamento 2.....	51
Figura 4.7: Topologia ótima da viga em balanço obtida pela solução de Xie e Steven (1994b) para o caso de carregamento 1. ....	51
Figura 4.8: Topologia ótima da viga em balanço obtida pela solução de Xie e Steven (1994b) para o caso de carregamento 2. ....	52
Figura 4.9: Topologia ótima da viga em balanço obtida pela solução de Xie e Steven (1994b) considerando os casos de carregamento 1 e 2. ....	52
Figura 4.10: Domínio inicial de projeto com a aplicação das condições de contorno para o caso de carregamento 3.....	53
Figura 4.11: Topologia ótima para o caso de carregamento 3 com maximização da frequência fundamental. ....	54
Figura 4.12: Topologia ótima obtida pela solução de Xie e Steven (1996) para o caso de carregamento 3 com maximização da frequência fundamental.....	54
Figura 4.13: Topologia ótima obtida considerando os casos de carregamento 2 e 3. ....	55
Figura 4.14: Topologia ótima obtida considerando os casos de carregamento 1 e 3 .....	56
Figura 4.15: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do caso de carregamento 3.....	57
Figura 4.16: Domínio inicial de projeto com a aplicação das condições de contorno para os casos de carregamento 4 e 5. ....	58
Figura 4.17: Topologia ótima para o caso de carregamento 4 considerando comportamento elastoplástico. ....	59
Figura 4.18: Topologia ótima para o caso de carregamento 5 com maximização da frequência fundamental. ....	59
Figura 4.19: Topologia ótima obtida pela solução de Maute <i>et al.</i> (1998) para o caso de carregamento 4 considerando comportamento elastoplástico. ....	59

Figura 4.20: Topologia ótima obtida pelo OptiStruct <sup>®</sup> para o caso de carregamento 5 com maximização da frequência fundamental. ....	60
Figura 4.21: Topologia ótima obtida considerando os casos de carregamento 4 e 5 .....	61
Figura 4.22: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do caso de carregamento 4.....	62
Figura 4.23: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do caso de carregamento 5.....	62
Figura 4.24: Topologia ótima para o caso de carregamento 5 da “aplicação 2”. .....	63
Figura 4.25: Topologia ótima para o caso de carregamento 5 com maximização da frequência fundamental, considerando seu afastamento máximo em relação a segunda frequência natural. ....	64
Figura 4.26: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do caso de carregamento 5 da “aplicação 2”. .....	65
Figura 4.27: Domínio inicial de projeto para análise transiente com aplicação das condições de contorno.....	66
Figura 4.28: Primeiro modo de vibração da geometria inicial que deverá ser aplicada nos estudos de otimização para as taxas de amortecimento “A” e “B” .....	67
Figura 4.29: Topologia ótima para a análise linear elástica sem taxa de amortecimento. ....	68
Figura 4.30: Topologia ótima obtida pela solução de Jung e Gea (2004) para a análise linear elástica em condição estática de carregamento. ....	68
Figura 4.31: Deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada do modelo linear elástico sem amortecimento. ....	69
Figura 4.32: Topologia ótima para a análise linear elástica com taxa de amortecimento “A”. ....	69
Figura 4.33: Topologia ótima obtida pelo Tosca <sup>®</sup> para a análise linear elástica com taxa de amortecimento “A”. .....	70
Figura 4.34: Níveis máximos de tensões computados ao longo do processo iterativo de otimização para o modelo linear elástico com amortecimento “A”. .....	70
Figura 4.35: Deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada do modelo linear elástico com amortecimento “A”.....	71
Figura 4.36: Topologia ótima para a análise linear elástica com taxa de amortecimento “B”.....	71
Figura 4.37: Topologia ótima obtida pelo Tosca <sup>®</sup> para a análise linear elástica com taxa de amortecimento “B”. .....	72
Figura 4.38: Níveis máximos de tensões computados ao longo do processo iterativo de otimização para o modelo linear elástico com amortecimento “B”. .....	73



Figura 4.39: Deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada do modelo linear elástico com amortecimento “B”.	74
Figura 4.40: Deslocamento do nó de aplicação da carga para análise estática da geometria otimizada do modelo linear elástico sem amortecimento.	74
Figura 4.41: Topologia ótima para a análise linear elástica considerando a combinação do efeito da taxa de amortecimento “A” com “B”.	75
Figura 4.42: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do modelo linear elástico.	76
Figura 4.43: Índice de uniformidade de tensões por fração de volume removida para o modelo linear elástico.	77
Figura 4.44: Topologia ótima para a análise não linear sem taxa de amortecimento.	78
Figura 4.45: Topologia ótima obtida pela solução de Jung e Gea (2004) para a análise não linear em condição estática de carregamento.	78
Figura 4.46: Deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada do modelo não linear sem amortecimento.	79
Figura 4.47: Topologia ótima para a análise não linear com taxa de amortecimento “A”.	79
Figura 4.48: Topologia ótima obtida pelo Tosca <sup>®</sup> para a análise não linear com taxa de amortecimento “A”.	80
Figura 4.49: Níveis máximos de tensões computados ao longo do processo iterativo de otimização para o modelo não linear com amortecimento “A”.	80
Figura 4.50: Deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada do modelo não linear com amortecimento “A”.	81
Figura 4.51: Topologia ótima para a análise não linear com taxa de amortecimento “B”.	81
Figura 4.52: Topologia ótima obtida pelo Tosca <sup>®</sup> para a análise não linear com taxa de amortecimento “B”.	82
Figura 4.53: Níveis máximos de tensões computados ao longo do processo iterativo de otimização para o modelo não linear com amortecimento “B”.	82
Figura 4.54: Deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada do modelo não linear com amortecimento “B”.	83
Figura 4.55: Deslocamento do nó de aplicação da carga para análise estática da geometria otimizada do modelo não linear elástico sem amortecimento.	83
Figura 4.56: Topologia ótima para a análise não linear considerando a combinação do efeito da taxa de amortecimento “A” com “B”.	84

Figura 4.57: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do modelo não linear. ....	85
Figura 4.58: Índice de uniformidade de tensões por fração de volume removida para o modelo não linear.....	86
Figura 4.59: Domínio inicial de projeto do suporte de chassi veicular com aplicação das condições de contorno. ....	87
Figura 4.60: Topologia ótima para a análise linear estática do suporte de chassi veicular.....	88
Figura 4.61: Comportamento mecânico em relação aos níveis de tensões da geometria inicial do suporte de chassi veicular. ....	89
Figura 4.62: Comportamento mecânico em relação aos níveis de tensões da geometria otimizada do suporte de chassi veicular. ....	89
Figura 4.63: Topologia ótima obtida pelo Tosca <sup>®</sup> para a análise linear estática do suporte de chassi veicular. ....	90
Figura 4.64: Níveis máximos de tensões computados ao longo do processo iterativo de otimização para a análise linear estática do suporte de chassi veicular. ....	91
Figura 4.65: Domínio inicial de projeto do suporte de televisão articulado com aplicação das condições de contorno.....	92
Figura 4.66: Topologia ótima para a análise linear estática do suporte de televisão articulado. ....	93
Figura 4.67: Modelo de viga em balanço proposta por Buhl <i>et al.</i> (2000) e utilizada para otimização topológica. ....	93
Figura 4.68: Solução de Buhl <i>et al.</i> (2000) comparando as topologias ótimas obtidas entre a análise linear e não linear geométrica para cada aumento de carregamento. ....	94
Figura 4.69: Comportamento mecânico em relação aos níveis de tensões da geometria inicial do suporte de televisão articulado.....	95
Figura 4.70: Comportamento mecânico em relação aos níveis de tensões da geometria otimizada do suporte de televisão articulado.....	95
Figura 4.71: Topologia ótima obtida pelo Tosca <sup>®</sup> para a análise linear estática do suporte de televisão articulado. ....	96
Figura 4.72: Níveis máximos de tensões computados ao longo do processo iterativo de otimização para a análise linear estática do suporte de televisão articulado.....	97

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 Justificativa .....	4
1.2 Objetivos.....	4
1.3 Organização do trabalho .....	5
<b>2. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL .....</b>	<b>6</b>
2.1 Tipos de otimização.....	12
2.2 Otimização topológica.....	15
2.2.1 Instabilidades numéricas .....	19
<b>3. OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA - ESO.....</b>	<b>22</b>
3.1 Otimização Estrutural Evolucionária Baseada no Critério de Tensão .....	23
3.1.1 Critério de escoamento de von Mises .....	27
3.1.2 Controles de instabilidades aplicados ao ESO .....	30
3.2 Procedimento ESO aplicado em problemas fisicamente não lineares .....	32
3.2.1 Comportamento fisicamente não linear (elastoplástico).....	33
3.2.2 Influência da taxa de amortecimento na plastificação .....	36
3.3 Procedimento ESO aplicado em problemas dinâmicos envolvendo frequências naturais .....	40
3.3.1 Maximização da frequência natural através do critério de tensão .....	42
3.3.2 Maximização do Intervalo entre Duas Frequências.....	43
3.4 Procedimento ESO aplicado em problemas envolvendo múltiplos casos de carregamento ..	44
<b>4. EXEMPLOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>47</b>
4.1 Validação da nova técnica de implementação da metodologia ESO em problemas envolvendo múltiplos casos de carregamento .....	47
4.1.1 Aplicação da metodologia ESO envolvendo a combinação de análises estáticas com análises dinâmicas no domínio da frequência.....	52
4.1.2 Aplicação da metodologia ESO envolvendo a combinação de análises dinâmicas considerando o afastamento entre duas frequências.....	63
4.2 Influência da taxa de amortecimento no efeito da otimização de análises dinâmicas no domínio do tempo. ....	65

4.2.1	Análise linear elástica .....	68
4.2.2	Análise com não linearidade física e geométrica .....	77
4.3	Aplicação da metodologia ESO em componentes industriais. ....	86
4.3.1	Otimização estrutural de um suporte de chassi veicular .....	87
4.3.2	Otimização estrutural de um suporte de televisão articulado .....	91
<b>5.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>98</b>
5.1	Sugestões para trabalhos futuros .....	99
	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS .....</b>	<b>101</b>

# 1

## INTRODUÇÃO

A modelagem e o projeto de sistemas complexos envolvendo a interação de diversos fenômenos físicos é um dos principais paradigmas atuais na área da mecânica computacional. Apesar da existência e nível de maturidade das ferramentas de otimização estrutural, o que se tem observado na prática dentro do ambiente de engenharia, é o projeto baseado fundamentalmente em um processo intuitivo, cujo sucesso depende fortemente da experiência, criatividade, percepção e conhecimentos do engenheiro. A Fig.1.1 demonstra o fluxo desse processo na prática.

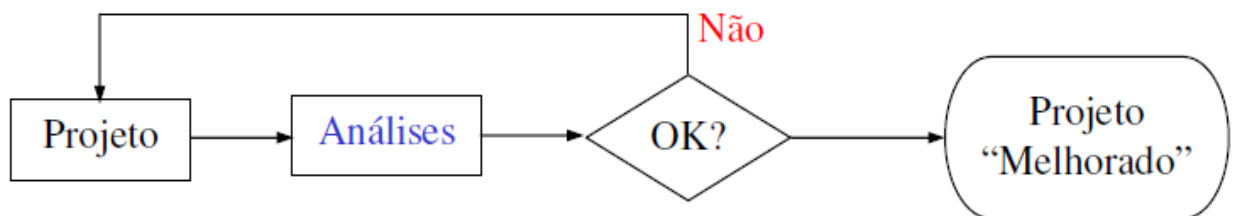


Figura 1.1: Desenvolvimento do projeto de engenharia na prática.

Fonte: Porto (2006)

O processo reproduzido de acordo com a Fig.1.1 acima proporciona um projeto que resolve de maneira satisfatória certo problema de engenharia, porém não representa sua topologia ótima.

Desta forma, a aplicação da otimização topológica representa extrema importância em vários problemas da engenharia, sendo o principal objetivo determinar uma topologia final ótima, dentro do domínio de projeto em relação a uma dada função objetivo, respeitando certas restrições (BENDSØE e SIGMUND, 2003). Assim, é importante eliminar (ou mitigar) o ciclo intuitivo característico do projeto tradicional, através da inclusão de técnicas de otimização conforme ilustra o fluxo da Fig.1.2.

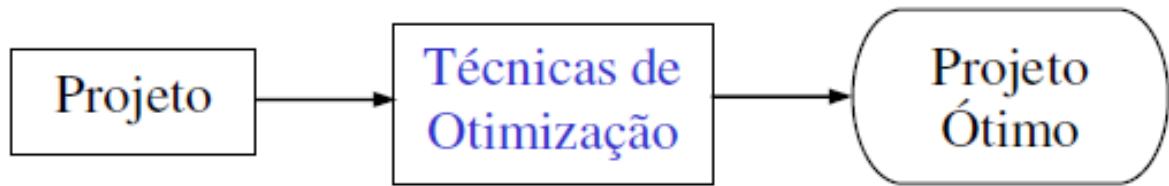


Figura 1.2: Desenvolvimento otimizado do projeto de engenharia.

Fonte: Porto (2006)

Assim como o cálculo estrutural, os primeiros métodos de otimização também consistiam de técnicas analíticas para solução. Esses métodos, entretanto, não eram muito eficientes, pois apenas uma classe bastante limitada de problemas podia ser resolvida, no caso aqueles cujas equações diferenciais eram relativamente simples (HAFTKA e GÜRDAL, 1992).

Neste contexto, devido ao progresso computacional, vários métodos de otimização topológica foram sendo estudados, dentre os quais destaca-se o método de Otimização Estrutural Evolucionária (*Evolutionary Structural Optimization* - ESO), que será o enfoque principal deste trabalho. O procedimento evolucionário é baseado na remoção gradual de material considerado ineficiente na região de projeto, que deve ser discretizada através de uma aproximação polinomial adequada na malha de elementos finitos escolhida, onde a máxima tensão de von Mises será usada como parâmetro de remoção do elemento através de um critério de rejeição (XIE e STEVEN, 1993).

Diferentemente das técnicas tradicionais de otimização, este método não necessita de uma grande quantidade de parâmetros para o início das avaliações, o que viabiliza a sua utilização, já que devido ao aumento da competitividade e conseqüentemente dos curtos prazos para soluções de engenharia, procedimentos de cálculo que demandam menor quantidade de parâmetros tornam-se uma alternativa interessante.

Esta técnica já gerou vários estudos envolvendo ações estáticas em regime linear conforme apresentado nos trabalhos de Huang e Xie (2010) e Xie e Steven (1997). No entanto, pouco se avançou no que diz respeito às outras condições de solicitação. Desta forma, a aplicação da metodologia em análises com diversos casos de carregamento, considerando a estrutura em regime elastoplástico e não linearidade geométrica deverá ser considerada em busca de se obter um projeto de otimização estrutural mais realista.

Na literatura é possível encontrar poucos artigos abordando o problema de otimização estrutural com comportamento elastoplástico, o que é uma necessidade no campo da engenharia, onde as técnicas utilizadas são baseadas em métodos resolvidos através do cálculo dos gradientes (SWAN e KOSAKA, 1997; MAUTE *et al.*, 1998; JUNG e GEA, 2004), acarretando em alto custo do ponto de vista computacional e dificuldades de aplicação em problemas com geometria e condições de contorno mais complexas. O número de trabalhos considerando a não linearidade geométrica é um pouco mais facilmente encontrado, dentre os quais destacam-se: Bruns e Tortorelli (2001), Gea e Luo (2001), Bruns *et al.* (2002), Jung e Gea (2004) e Kemmler *et al.* (2005), também baseados nos métodos dos gradientes. Como exemplo de aplicação de uma técnica baseada na metodologia ESO para problemas envolvendo não linearidade, tem-se o artigo de Fernandes *et al.* (2015).

Para problemas envolvendo múltiplos casos de carregamento, o trabalho de Xie e Steven (1994) foi utilizado como referência, sendo a metodologia ESO aplicada de forma que os elementos eram removidos a cada iteração somente se a condição de rejeição fosse satisfeita por todos os casos presentes no modelo, tornando-se inviável em situações onde cada caso de carregamento requiera um tipo de análise diferente. Desta forma, o presente trabalho irá propor uma nova técnica de aplicação desta metodologia, tornando a implementação do processo de otimização mais simples e rápida, com a vantagem de se combinar problemas com diferentes tipos de análises, podendo ser linear ou não linear em condições estáticas ou dinâmicas.

Outro aspecto importante que deverá ser estudado neste trabalho, é a influência dos efeitos da taxa de amortecimento na otimização de componentes estruturais, e através da nova técnica de aplicação da metodologia ESO, também poderá ser investigada suas possíveis combinações considerando-se as topologias obtidas para cada taxa de amortecimento distinta, devido à incerteza de sua obtenção exata. Portanto, o amortecimento considerado inicialmente no projeto, se determinado com certo grau de incerteza, poderá acarretar em uma solução ótima diferente da que deveria ser a real, principalmente para frequências mais altas de operação.

## 1.1 Justificativa

Com a evolução da capacidade computacional e do processamento paralelo, foi possível o desenvolvimento de softwares comerciais de alto desempenho que possibilitam a implementação de rotinas personalizadas para análises complementares. A metodologia de otimização topológica ESO considera que o algoritmo evolucionário deve ser executado após análise estrutural, via Método dos Elementos Finitos (MEF), possibilitando, desta forma, a sua implementação em plataformas comerciais, e assim viabilizando sua aplicação em estruturas sujeitas às diversas condições de contorno e solicitações. É muito importante mencionar que o uso de softwares comerciais homologados, vem sendo uma exigência das empresas para regulamentar as aplicações das diversas áreas da engenharia.

As grandes vantagens da metodologia ESO são a possibilidade de acompanhar o formato do componente analisado a cada estágio da otimização, simplicidade de implementação e execução, possibilidade de aplicação em diversos tipos de análises e a facilidade de integração com qualquer programa comercial, o que proporciona uma excelente alternativa de utilização.

## 1.2 Objetivos

O principal propósito deste trabalho é a adaptação de um *script* em linguagem de programação Python que possui interface com o software de problemas multifísicos Abaqus<sup>®</sup>, considerando o comportamento mecânico de análises estruturais para as seguintes aplicações:

- Implementação e validação de um algoritmo simples capaz de obter estruturas ótimas para múltiplos casos de carregamento;
- Avaliação da influência dos efeitos de amortecimento na otimização de estruturas lineares e não lineares submetidas às ações dinâmicas;
- Adequação da frequência fundamental em uma faixa de frequências visando evitar os efeitos de ressonância decorrentes na estrutura.



### **1.3 Organização do trabalho**

A organização deste trabalho será realizada da seguinte forma:

No presente capítulo 1, são feitas algumas considerações introdutórias, de forma a se destacar a relevância do tema, considerando às devidas justificativas, objetivos e organização do texto.

No capítulo 2, será apresentada uma revisão bibliográfica sobre os métodos e tipos de otimização estrutural, e em seguida será descrito alguns dos mais conhecidos métodos aplicados em otimização topológica. Uma breve explanação sobre as instabilidades numéricas enfrentadas também será realizada.

Após uma abordagem geral sobre otimização estrutural, no capítulo 3 será descrita a formulação clássica da metodologia ESO baseada no critério de nível de tensão, contemplando um tradicional exemplo da literatura para melhor demonstração e entendimento do processo. As soluções adotadas para os problemas de instabilidade, assim como as principais aplicações consideradas no presente trabalho com suas respectivas formulações também serão descritas neste capítulo.

No capítulo 4, será apresentada uma sequência de resultados numéricos, considerando alguns casos clássicos da literatura para a validação da nova técnica de aplicação da metodologia ESO em múltiplos casos de carregamento, assim como do algoritmo implementado. Outros exemplos, não encontrados na literatura, também serão propostos e solucionados, incluindo casos de não-linearidade física e geométrica, considerando ações estáticas ou dinâmicas.

Por fim, no capítulo 5, serão feitas as considerações finais sobre o presente trabalho, considerando sugestões e propostas para trabalhos futuros.

# 2

## OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL

A otimização estrutural corresponde à tentativa de se fazer com que um dado sistema suporte as condições iniciais impostas da melhor maneira possível, podendo ser representada pela minimização ou maximização de determinados parâmetros de projeto. Algumas minimizações ou maximizações das características do sistema não podem ocorrer sem que sejam respeitadas certas restrições. Por exemplo, em se tratando da minimização do volume de um dado sistema, torna-se evidente a necessidade de uma limitação da quantidade de material que pode ser removida, pois de outra forma a minimização desse volume não teria limite e o problema de otimização não estaria bem definido (CHRISTENSEN e KLARBRING, 2008).

Portanto, o problema de otimização pode ser escrito na forma de minimização ou maximização de uma função objetivo sujeita a uma série de restrições. Dessa forma, para a formulação do problema de otimização estrutural de um sistema pode-se escolher alguma medida de desempenho como função objetivo e selecionar outras como restrições para o processo.

A descrição matemática geral de um problema de otimização, pode ser expressa conforme indicado na Eq. (2.1), onde por convenção, o problema é frequentemente representado como minimização da função objetivo (ARORA, 2004).

$$\vec{x}^* = \arg \min f(\vec{x}) \tag{2.1}$$

$$\text{sujeito a: } \begin{cases} g_i(\vec{x}) = a_i, & i = 1, \dots, p \\ h_j(\vec{x}) \leq b_j, & j = 1, \dots, q \end{cases}$$

O vetor  $\vec{x}$ , corresponde ao vetor de variáveis de otimização que representa o conjunto das variáveis cujos valores procuram-se especificar através do processo de otimização.

A função objetivo corresponde à  $f(\vec{x})$  e representa o índice de desempenho do sistema. As restrições podem ser de igualdade ou desigualdade, e significam o conjunto dos requisitos que o resultado do projeto deve atender para ser admissível enquanto solução, sendo neste caso, representadas por  $g_i(\vec{x})$  e  $h_j(\vec{x})$  respectivamente.

Os parâmetros  $a_i$  e  $b_j$  são as componentes dos vetores que correspondem, respectivamente, aos valores das restrições de igualdade e de desigualdade para cada posição  $i$  e  $j$ .

Alguns problemas mais simples de otimização, correspondem a problemas sem vinculações, em que o valor ótimo da função objetivo pode ser alcançado sem qualquer entrave dentro do domínio, ou seja,  $f(\vec{x}') \leq f(\vec{x})$  para todo  $\vec{x}$  contido no espaço de busca.

Eventualmente, um problema de otimização com restrições também pode ser convertido em um problema de otimização sem restrição e, então, ser resolvido explicitamente, por eliminação de variáveis ou substituição direta. Porém, caso as condições de restrição não sejam completamente eliminadas, estratégias específicas para a solução do problema devem ser abordadas (QUERIN, 1997).

Existem diversos métodos de otimização estrutural, podendo ser classificados em dois grandes grupos: determinísticos e heurísticos (QUERIN, 1997).

#### **a) Métodos determinísticos:**

Os métodos de otimização baseados nos algoritmos determinísticos – maioria dos métodos clássicos – geram uma sequência determinística de possíveis soluções, requerendo por muitos dos métodos, o uso de pelo menos a primeira derivada da função objetivo em relação às variáveis de projeto.

Nesta metodologia, a função objetivo e as restrições são dadas como funções matemáticas e relações funcionais. Além disso, a função objetivo deve ser contínua e diferenciável ou, em alguns casos, sub-diferenciável no espaço de busca.

Estes métodos apresentam teoremas que lhes garantem a convergência para uma solução ótima que não é necessariamente a solução ótima global, sendo a solução encontrada extremamente dependente do ponto de partida fornecido, podendo convergir para um ótimo local, e por isso não possuem bom desempenho em otimizar funções multimodais, isto é, funções que possuem vários ótimos locais.

De acordo com Haftka e Gürdal (1992) e Olivieri (2004), os problemas de otimização abordados pelos métodos clássicos podem ser classificados em duas classes, conforme as características da função objetivo e das restrições:

#### *a.1) Programação Linear*

Quando a função objetivo e as restrições são funções lineares das variáveis de projeto. O Método Simplex, proposto por Dantzig (1951) foi o primeiro método efetivo desenvolvido para resolver um problema de programação linear. Após o Simplex, surgiram outras classes de algoritmos com complexidade inferior. Um deles, com complexidade polinomial e que funciona bem na prática, é o método de pontos interiores, publicado por Karmarkar (1984).

#### *a.2) Programação Não-Linear*

Quando a função objetivo, ou pelo menos uma das restrições, é uma função não-linear das variáveis de projeto. Nesta classe, os métodos que mais se destacam são: Método de Programação Linear Sequencial, Método de Programação Quadrática Sequencial, Método do Gradiente Reduzido, entre outros.

Através da Fig. 2.1 verificam-se os principais métodos determinísticos e suas ramificações.

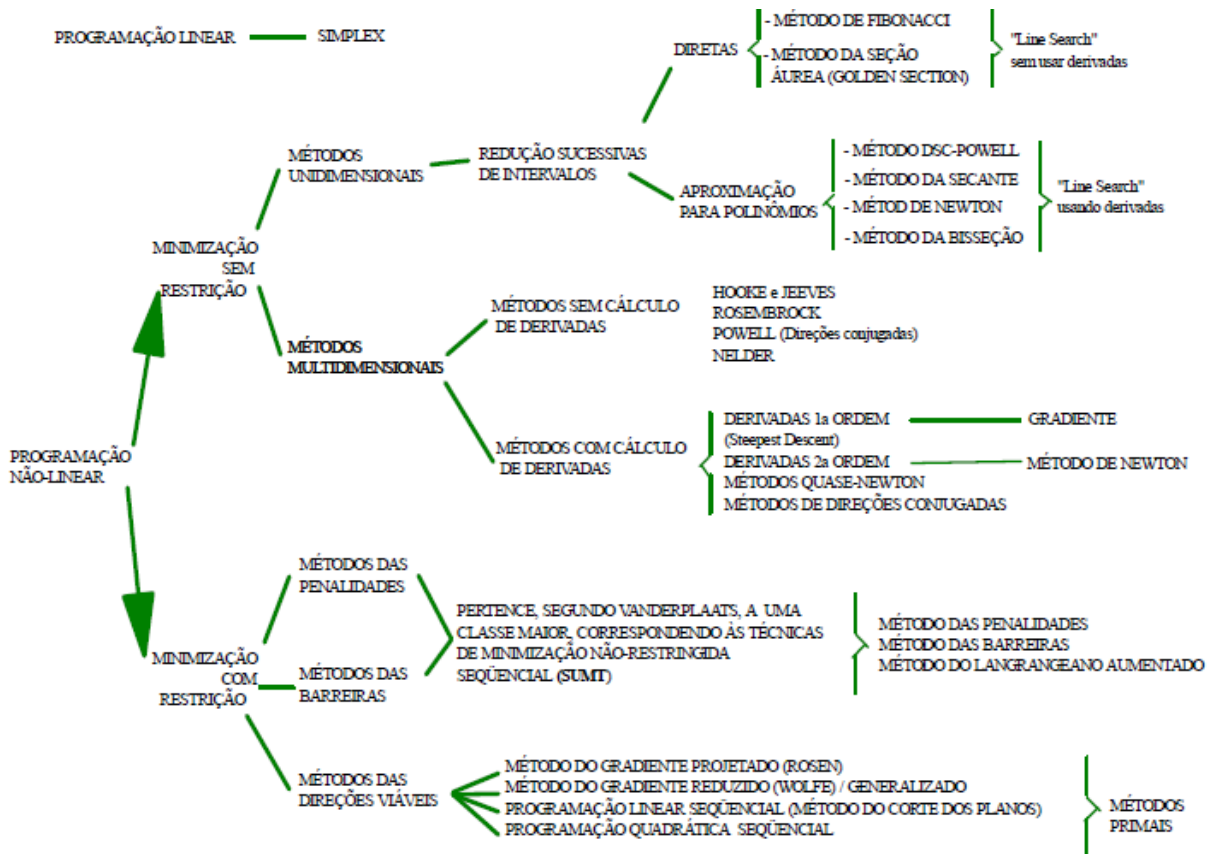


Figura 2.1: Classificação geral dos principais métodos determinísticos.

Fonte: Neves (1997)

## b) Métodos Heurísticos:

Os métodos heurísticos de otimização, se baseiam em regras, simplificações e aproximações de forma a possibilitar a busca de soluções em conjuntos não-convexos com funções objetivo também não-convexas e não-diferenciáveis, podendo-se trabalhar simultaneamente com variáveis reais, lógicas e inteiras. Vale ressaltar também que esses métodos não são facilmente presos a mínimos locais como é o caso dos usuais algoritmos dos métodos determinísticos, sendo que suas características podem levar à descoberta de soluções não convencionais que não poderiam ser vislumbradas por serem contra intuitivas. É um paradigma que não exige conhecimento prévio de uma maneira de como encontrar a solução. De acordo com Querin (1997), são métodos rápidos e práticos baseados em estratégias que se aproximam, porém não garantem a condução da solução ótima final, uma vez que não há prova de convergência.

Para a utilização desta abordagem em problemas de otimização com restrições, uma das possibilidades é utilizar um método de penalização, onde um indivíduo é simplesmente eliminado da população quando violar as restrições ou quando não for possível avaliar seu desempenho, por isso possui a desvantagem de poder estar descartando um indivíduo potencialmente útil ao processo evolutivo.

Outra forma de solução que contempla essa abordagem é a utilização de procedimentos probabilísticos, que usam somente a avaliação da função objetivo e introduzem no processo de otimização dados e parâmetros estocásticos, realizando buscas simultâneas no espaço de possíveis soluções através de uma população de indivíduos. Esse tipo de metodologia também engloba técnicas que imitam, de forma simplificada, fenômenos ou processos encontrados na natureza e, por esse motivo, é denominada Computação Natural (OLIVIERI, 2004).

As ramificações da Computação Natural são apresentadas de acordo com a Fig. 2.2.

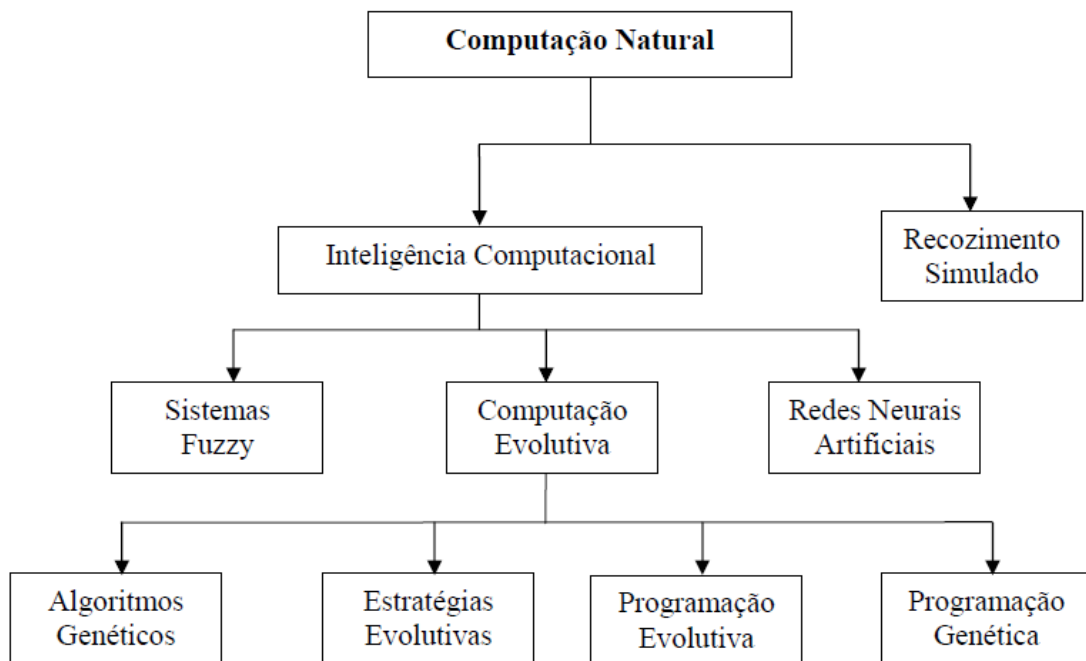


Figura 2.2: Ramificações da Computação Natural.

Fonte: Olivieri (2004)

As principais técnicas empregadas são Busca Tabu, Recozimento Simulado e métodos baseados em população (Algoritmos Genéticos, Evolução Diferencial, Otimização por colônia

de formigas, Otimização por bando de pássaros, etc). Essas técnicas trabalham com um conjunto de pontos e necessitam de muitas avaliações da função objetivo, por isso sua maior desvantagem é o custo computacional.

As principais vantagens dos algoritmos heurísticos em relação aos algoritmos determinísticos são:

- A função objetivo e as restrições não precisam necessariamente ter uma representação matemática;
- Não requerem que a função objetivo seja contínua ou diferenciável;
- Trabalham adequadamente, tanto com parâmetros contínuos quanto com discretos, ou ainda com uma combinação deles;
- Não necessitam de formulações complexas ou reformulações para o problema;
- Não há restrição alguma quanto ao ponto de partida dentro do espaço de busca da solução;
- Otimizam um grande número de variáveis, desde que a avaliação da função objetivo não tenha um custo computacional demasiadamente alto.

Desta forma, baseando-se nos mais diversos métodos e critérios, e considerando a utilização das leis matemáticas e mecânicas do processo de otimização estrutural, é possível originar estruturas completas e eficientes, proporcionando a obtenção de uma ferramenta poderosa durante a fase de projeto do produto.

## 2.1 Tipos de otimização

O problema de otimização estrutural pode ser dividido conforme as mudanças que acarreta na geometria do sistema a ser otimizado. Existem essencialmente três abordagens principais em problemas de otimização estrutural:

### a) Otimização Paramétrica ou Dimensional

Neste tipo de abordagem, as variáveis de projeto descrevem as características geométricas da estrutura, podendo ser a espessura, o tamanho de um furo, a dimensão transversal, entre outros parâmetros geométricos.

O processo busca encontrar, por exemplo, a melhor área da seção transversal de modo que se obtenha a maximização da rigidez com o menor volume possível de material. Sendo que a forma e a topologia da estrutura são mantidas fixas. Maiores detalhes teóricos podem ser encontrados em Rozvany *et al.* (1995), e através da Fig. 2.3 é possível visualizar um exemplo sobre este tipo de otimização.



Figura 2.3: Exemplo de Otimização Paramétrica.

Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund (2003)

### b) Otimização de Forma

Caracteriza-se por modificar as regiões dos contornos dos segmentos ou as posições das cavidades. Sua principal desvantagem é associada à distorção da malha de elementos finitos durante o processo de alteração da forma, exigindo um remalhamento do domínio durante a otimização.

A implementação para esse tipo de otimização exige uma maior sofisticação computacional quando comparada com a otimização Paramétrica. Um detalhamento da teoria para este tipo



de otimização pode ser encontrado em Haftka e Grandhi (1986), onde sua exemplificação é demonstrada de acordo com a Fig. 2.4.

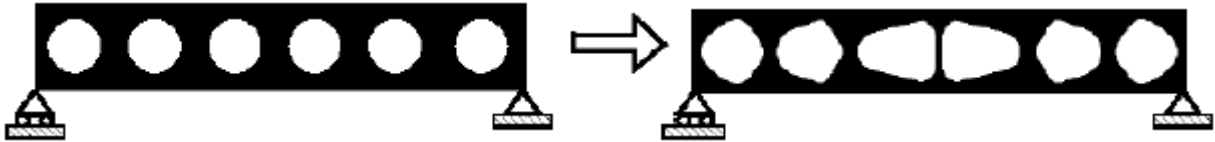


Figura 2.4: Exemplo de Otimização de Forma.

Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund (2003)

### c) Otimização Topológica

Representa uma das formas mais robustas de otimização estrutural, permitindo projetar a topologia ótima da estrutura de acordo com uma função objetivo proposta através da distribuição do material no interior de um domínio fixo, o que possibilita o aparecimento de novas cavidades no interior da estrutura ou alteração das cavidades já existentes no domínio. Diferentemente da otimização de Forma não há necessidade do remalhamento, uma vez que os limites do domínio permanecem fixos, evitando problemas de discretização no modelo.

Devido à boa integração com os softwares comerciais de análise estrutural, a otimização topológica esta cada vez mais presente nas indústrias automotivas, aeronáuticas, naval, civil, entre outras. Uma revisão da literatura sobre a teoria de otimização topológica pode ser encontrada nos trabalhos de Hassani e Hinton (1999) e Bendsøe e Sigmund (2003), sendo seu o exemplo ilustrado conforme Fig. 2.5.



Figura 2.5: Exemplo Otimização Topológica.

Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund (2003)

Mais recentemente, surgiu uma nova técnica de otimização conhecida como “Otimização Topográfica”, que está sendo muito utilizada na indústria automobilística e consiste em

encontrar a distribuição de um padrão de reforçador (nervuras) nas estruturas de placas e cascas através da combinação das técnicas de otimização de Forma, Paramétrica e Topológica (ZHOU *et al.*, 2004).

Um exemplo de variáveis de projeto na otimização topográfica são os parâmetros indicados na Fig. 2.6, onde o conceito da otimização paramétrica é utilizado para modificar apenas a razão de aspecto ao longo da placa e as otimizações de forma e topológica encontram o formato e a topologia ótima do reforçador ao longo da estrutura.

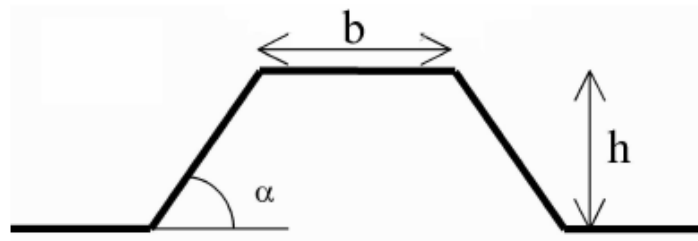


Figura 2.6: Exemplo de reforçador utilizado na Otimização Topográfica.

Fonte: Silva (2001)

A integração dessas três abordagens possui extrema importância no projeto de componentes mecânicos, a fim de se executar o melhor de cada tipo de otimização, para obtenção do projeto final atingindo seu maior nível de eficiência.

A Fig. 2.7 demonstra as contribuições que cada abordagem propõe para a engenharia de produto, desde a sua concepção até a execução das fases do projeto.

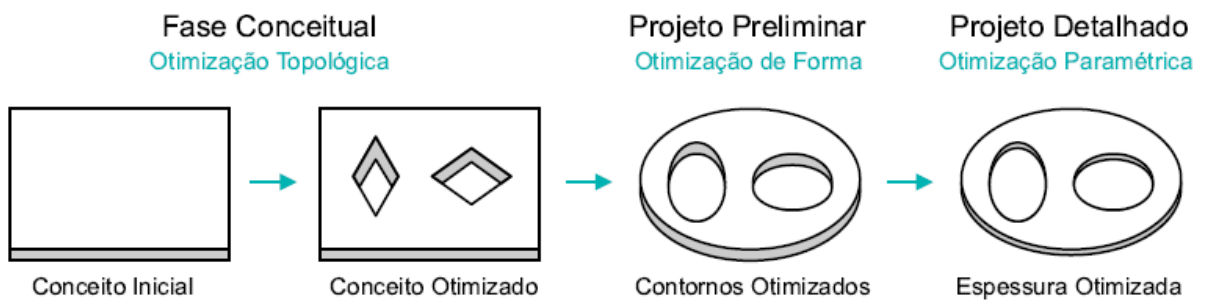


Figura 2.7: Contribuição dos tipos de otimização estrutural no desenvolvimento de projeto.

Fonte: Porto (2006)

Diante todos os tipos de otimização estrutural, o grande potencial da otimização topológica está na capacidade de auxílio na fase de concepção do produto, o que a torna uma ferramenta muito valiosa no estágio inicial do desenvolvimento estrutural. Atualmente, esse tipo de otimização tem sido muito utilizada em diversas áreas da engenharia, e por esse motivo será o enfoque principal desse trabalho.

## 2.2 Otimização topológica

A otimização topológica, pode ser definida como a distribuição ótima de material em um domínio de projeto pré-fixado. De acordo com Bendsøe (1995), essa distribuição ótima de material consiste em se verificar quais pontos do domínio deverão conter material e quais pontos estarão vazios, caracterizando-o como um problema pontual material/vazio.

A distribuição do material é modificada levando em consideração alterações em algum comportamento mecânico da estrutura, tal como flexibilidade, frequências naturais, tensão, entre outros. Esse conceito está representado na Fig. 2.8.

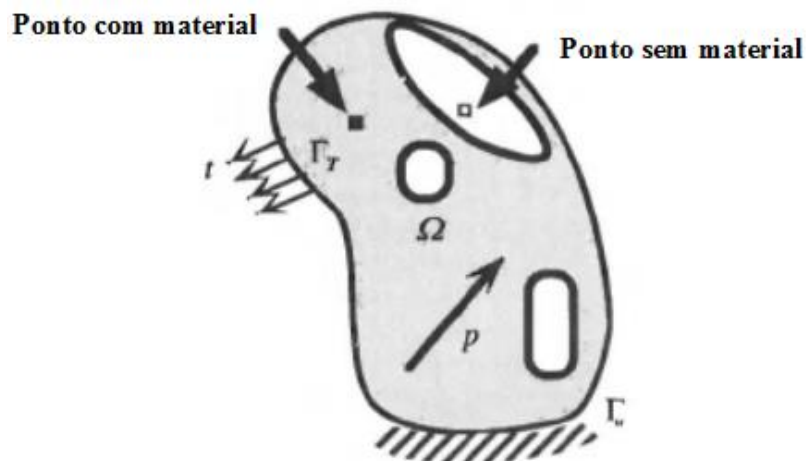


Figura 2.8: Representação do problema de otimização topológica considerando o domínio  $\Omega$ .

Fonte: Adaptado de Bendsøe (1995)

Existem vários métodos sobre a concepção do material para aplicação da otimização topológica que foram propostos ao longo das últimas três décadas. Dentre eles, destacam-se, os métodos da microestrutura-base (método da homogeneização e o método da densidade

variável SIMP – *Solid Isotropic Material with Penalization*) e os métodos de otimização estrutural evolucionária (ESO e suas extensões).

No método de homogeneização, introduzido inicialmente por Bendsøe e Kikuchi (1988), um modelo de material com vazios em micro-escala é introduzido e o problema de otimização topológica é definido pela busca da porosidade média ótima, sendo o comportamento do material constante de célula para célula. Basicamente, o método torna possível uma descrição contínua de meios não contínuos e desta forma é possível o tratamento de propriedades físicas descontínuas que oscilam muito rapidamente, como o peso específico e o módulo de elasticidade.

Ao transformar o difícil problema de topologia de projeto em um problema de tamanho relativamente “menor”, a técnica de homogeneização é capaz de produzir furos internos sem o conhecimento prévio de sua existência. Ou seja, ela oferece uma ferramenta que otimiza, simultaneamente, forma e topologia. No entanto, o método de homogeneização pode não produzir os resultados pretendidos para alguns objetivos na modelagem matemática de projetos estruturais, pois frequentemente produz projetos com poros infinitesimais nos materiais, o que torna a estrutura não fabricável. Além disso, instabilidades numéricas podem introduzir artefatos “não físicos” nos resultados e tornar o projeto sensível às variações no carregamento (WANG *et al.*, 2003).

A abordagem SIMP, inicialmente proposta por Bendsøe e Kikuchi (1988) e posteriormente por Bendsøe (1989) é baseada no conceito de microestruturas e técnicas de homogeneização. Nesta abordagem, a existência ou não de material é tratada através do uso de um modelo de material fictício, que pode adotar comportamento intermediário entre sólido e vazio. Assim, ao se utilizar o método SIMP o comportamento constitutivo do material intermediário (artificial) é definido por uma função paramétrica  $E(\rho)$ , onde  $\rho = 1$  corresponde ao material sólido e  $\rho = 0$  ao material vazio, sendo essa função associada com a densidade do material em cada ponto do domínio e utilizada para a determinação do tensor constitutivo  $E(\rho)$ , que é definido pela Eq. (2.2).

$$E(\rho) = \rho^n \cdot E_0 \quad (2.2)$$

onde  $E_0$  representa o módulo de elasticidade longitudinal do material isotrópico sólido e  $\eta$  denota um fator de penalização para as densidades intermediárias.

Quando  $\eta > 1$ , obtém-se a penalização das densidades intermediárias de forma que grande parte da estrutura possua apenas elementos sólidos ou vazios, tornando a formulação não convexa. Sob o ponto de vista matemático, o aparecimento de densidades intermediárias é importante para que se possa obter a relaxação do problema, mas não é conveniente para o projetista, que deverá interpretar os resultados para definir o projeto da estrutura.

Os métodos de otimização estrutural evolucionária, foram inicialmente propostos por Xie e Steven em 1993 através da introdução da metodologia ESO, onde a ideia básica consiste na aplicação de um algoritmo heurístico com remoção gradual de regiões menos eficientes do domínio. Inicialmente foi proposto um critério de remoção baseado nos níveis de tensão de cada elemento, permitindo a obtenção de uma estrutura com rigidez ótima para um determinado volume remanescente.

Em 1996, Chu *et al.* apresentaram uma abordagem da metodologia ESO conhecida como ESO em nível de deslocamentos, onde uma restrição de rigidez era associada a um número de sensibilidade dependente das matrizes de rigidez e deslocamento, sendo essa abordagem baseada na igualdade das energias total (*compliance*) e de deformação.

Em 1998, a coerência dos resultados encontrados para casos de otimização sob o nível de tensão e sob o nível de deslocamentos pode ser constatada por Zhao *et al.*. Porém, Zhou e Rozvany (2001) realizaram contestações a respeito de sua validação e questionamentos relacionados à escassez de embasamento matemático para o seu estabelecimento. Em seguida Tanskanen (2002) pode concluir que o método ESO era capaz de proporcionar uma base teórica equivalente ao método de otimização baseado em Programação Linear Sequencial.

Com a consolidação do método ESO, foram propostas outras variações do algoritmo, visando suprimir algumas de suas limitações, em especial, o problema das instabilidades numéricas.

No trabalho de Liu *et al.* (2008), por exemplo, foi proposto o método GESO (*Genetic Evolutionary Structural Optimization*), que consiste em um algoritmo que integra operações da Genética, tais como seleção, cruzamento e mutação, ao ESO original. Segundo o conceito

de “sobrevivência do mais apto”, de Charles Darwin, o processo evolutivo conserva os elementos mais fortes e exclui os elementos mais fracos, sendo o número de sensibilidade o parâmetro responsável pela determinação dos mais aptos. De acordo com Liu *et al.* (2008), essa natureza estatística do procedimento favorece maiores chances de se obter ótimos globais, apesar de existirem casos excepcionais.

Assim como o GESO, surgiram também outros procedimentos híbridos com grande destaque, como o método ESO Aditivo, denominado por AESO (*Additive Evolutionary Structural Optimization*) e o método BESO (*Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization*), que foram propostos por Querin *et al.* (2000a) e Querin *et al.* (2000b). O primeiro adiciona elementos ao sistema em regiões de alta concentração de tensão, enquanto que o segundo adiciona e remove elementos ao sistema. Surgiu, também, a técnica SESO (*Smoothing Evolutionary Structural Optimization*), proposta por Simonetti (2009), com o objetivo de suavizar o processo de remoção do método ESO, atribuindo aos elementos menos solicitados um valor de rigidez menor, com redução progressiva da sua matriz constitutiva ao longo do processo. A diferença entre os métodos ESO e SESO, é que no segundo os candidatos à exclusão ficam em uma espécie de quarentena e suas exclusões são efetivamente confirmadas nos passos subsequentes de otimização.

Muitos estudos envolvendo otimização topológica são aplicados em problemas estáticos. Porém, a aplicação em problemas dinâmicos também vem evoluindo em pesquisas de grande relevância acadêmica para diferentes métodos. Alguns artigos de destaque são: Díaz e Kikuchi (1992), Jensen e Pedersen (2006), Jog (2002), Kang *et al.* (2012), Lee *et al.* (2009), Ma *et al.* (1995), Min *et al.* (1999), e Yoon (2010).

O primeiro trabalho abordando a aplicação da metodologia ESO em problemas dinâmicos foi proposto por Xie e Steven (1994a). A partir dessa publicação, outras envolvendo o algoritmo ESO, e suas variações, em análises dinâmicas foram possíveis como nos trabalhos de Xie e Steven (1996), Huang *et al.* (2010), Rong *et al.* (2000), Xie *et al.* (2012), Zuo *et al.* (2010) e Zuo *et al.* (2011).

No presente trabalho será utilizado o procedimento evolucionário ESO para a otimização topológica de estruturas. Esta escolha se deve ao grande potencial deste tipo de otimização cuja metodologia aplicada será descrita no capítulo 3.

### 2.2.1 Instabilidades numéricas

Apesar da simplicidade conceitual, a implementação do problema de otimização topológica requer, entretanto, o uso de algoritmos de otimização discreta, o que em geral resulta em problemas relacionados às instabilidades numéricas. De acordo com Sigmund e Petersson (1998) estas instabilidades podem ser classificadas em três categorias: irregularidades do tabuleiro de xadrez, dependência de malha e problemas dos ótimos locais.

#### a) Irregularidades do tabuleiro de xadrez:

As irregularidades do tabuleiro de xadrez, conhecido na literatura como *checkerboard*, caracteriza-se pela configuração estrutural alternada entre elementos sólidos e vazios que sub ou supervalorizam a rigidez da estrutura divergindo da solução ótima. Díaz e Sigmund (1995) e Jog e Haber (1996) afirmam que a origem do problema está associada a erros numéricos característicos dos processos de aproximação do elemento finito, não representando, portanto, uma característica ótima de projeto. A utilização de elementos com função interpoladora de ordem superior é sugerida para se evitar este tipo de instabilidade, uma vez que esses elementos podem simular de maneira mais precisa o campo de deslocamentos, reduzindo a ocorrência das regiões em xadrez. A Figura 2.9 apresenta um exemplo de uma região com este tipo de instabilidade numérica.



Figura 2.9: Representação das regiões com instabilidades do tabuleiro de xadrez.

Fonte: Adaptado de Sigmund e Petersson (1998)

#### b) Dependência de malha:

A dependência de malha é uma anomalia inerente à divisão do domínio, onde a solução obtida não é qualitativamente a mesma para diferentes discretizações. Intuitivamente espera-se que

uma malha mais refinada deva resultar em uma melhor modelagem para a mesma estrutura ótima e uma melhor descrição do contorno, porém o que se obtém em muitos problemas é uma estrutura mais detalhada e qualitativamente diferente. Outro aspecto negativo em relação ao refinamento excessivo da malha diz respeito à análise de problemas dinâmicos, nos quais a malha muito refinada gera contribuições de modos de vibração espúrios nas análises.

Observa-se que com o aumento do número de elementos, há uma tendência de aumento dos espaços vazios. A explicação para isto é que à medida que a densidade da malha aumenta, o projeto final passa a ter um número crescente de elementos com tamanhos bastante reduzidos, o que acarreta na inexistência de soluções.

Para se reduzir essa dependência nos processos de otimização, alguns trabalhos foram realizados considerando a utilização de alguns métodos atenuantes, como descrito por Jog e Haber (1996), Sigmund (1997), Sigmund e Petersson (1998) e Zhou *et al.* (2001). Sigmund e Petersson (1998) identificaram que as aproximações feitas para redução da dependência de malha, reduziam também os efeitos do tabuleiro de xadrez.

Uma representação de como a dependência de malha pode influenciar na topologia final é mostrada na Fig. 2.10.

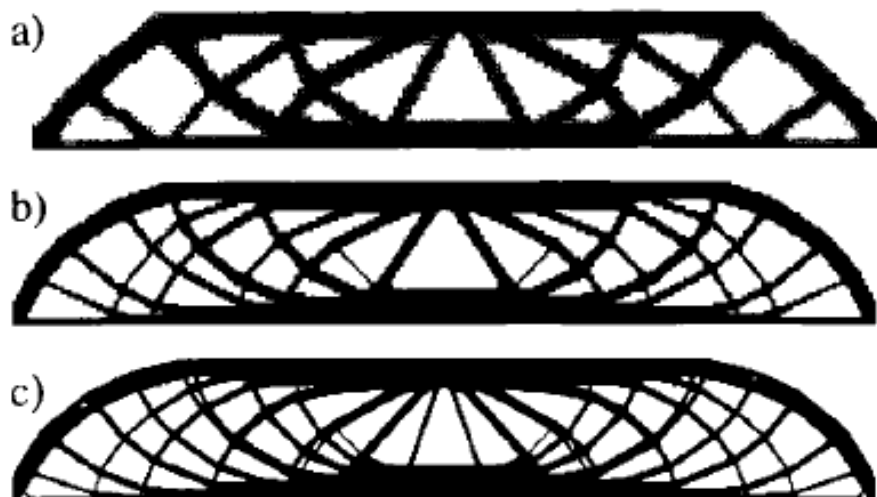


Figura 2.10: Representação da topologia final considerando o refinamento da malha (a) 2700 elementos, (b) 4800 elementos e (c) 17200 elementos.

Fonte: Bendsøe e Sigmund (2003)



### c) Mínimos Locais:

O problema de ótimos locais está relacionado à natureza não convexa dos projetos de otimização topológica, propícios a inúmeros resultados com soluções localizadas (ARORA, 2004; COUTINHO, 2006). Assim, a não convexidade do problema possibilita que diversas soluções ótimas sejam encontradas dependendo da escolha dos parâmetros iniciais, tais como, número de elementos, geometria do domínio de projeto, coeficientes de aproximação iterativos ou estocásticos, entre outros (SIGMUND e PETERSSON, 1998). Isto ocorre porque as provas de convergência dos algoritmos funcionam apenas para programação convexa, enquanto que para programação não convexa está apenas garantida a convergência para pontos estacionários, que não são necessariamente mínimos globais (COUTINHO, 2006).

Para Simonetti (2009), este é um problema importante, uma vez que a solução é extremamente sensível às mudanças em seus parâmetros. No entanto, os sistemas de controles aplicados para as outras instabilidades numéricas tendem a tornar convexos os problemas e propor projetos reproduzíveis (SIGMUND e PETERSSON, 1998).

A diferença entre um mínimo local e um mínimo global de um domínio limitado é mostrado conforme Fig. 2.11.

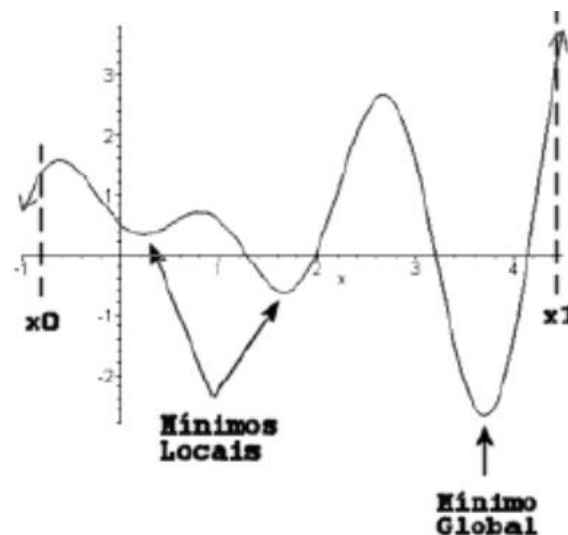


Figura 2.11: Representação dos pontos ótimos para um domínio limitado.

Fonte: Adaptado de Arora (2004).

# 3

## OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL EVOLUCIONÁRIA - ESO

Na década de 1990, o método ESO foi proposto no trabalho de Xie e Steven (1993), sendo o procedimento baseado na simples remoção gradual de material menos eficiente da estrutura, cuja análise deve ser feita através do MEF. A ideia básica é analisar o domínio completo em que possa existir estrutura, ou seja, domínio de projeto, e a seguir, baseado na função objetivo escolhida avalia-se a eficiência de cada elemento na estrutura e retiram-se ou penalizam-se gradualmente os elementos menos eficientes.

Como principal vantagem, esses métodos não necessitam do cálculo do gradiente da função objetivo, resultando geralmente em uma convergência mais rápida. O cálculo do gradiente é caro computacionalmente e para casos onde a função objetivo apresenta descontinuidades ou represente funções complexas esse cálculo nem sempre é fácil de ser obtido (Das *et al.*, 2011).

Estes métodos heurísticos (aproximados) apresentam ainda uma importante característica que é a tendência de encontrar o ótimo global, evitando a convergência para ótimos locais, mesmo quando a solução inicial está distante do ótimo global.

A desvantagem dessa categoria de método de otimização é o fato de não poder assegurar que o projeto final convergirá para a solução ótima do problema devido a alguns possíveis problemas de instabilidade. Entretanto, com a aplicação de técnicas de controle dessas instabilidades esses métodos tendem a convergir rapidamente para uma forma ótima ou próxima à forma ótima. Detalhes sobre instabilidades numéricas podem ser encontrados nos trabalhos de Sigmund e Petersson (1998).

Para cada tipo de análise existirá um ou mais tipos de critério de remoção do material, os quais podem ser: critérios de rigidez, deslocamento, pressão, nível de tensão, frequência natural, condução de calor, carga crítica, flambagem entre outros.

Neste trabalho foi utilizado o critério de nível de tensão para a otimização topológica de sistemas estruturais através de um código computacional feito em linguagem de programação Python por Lanes (2013) que foi adaptado para a resolução dos problemas sob múltiplos casos de carregamento propostos.

### 3.1 Otimização Estrutural Evolucionária Baseada no Critério de Tensão

A otimização de uma estrutura com base no seu nível de tensão é um processo utilizado em diversas áreas da mecânica estrutural. Através da análise pelo MEF é possível determinar o nível de tensão de toda a estrutura, sendo que o nível de tensão, por sua vez, pode ser utilizado como um indicador de eficiência de cada elemento dentro da estrutura. Com isso, pode-se estabelecer um critério de rejeição baseado no máximo nível de tensão, no qual o material sob baixa tensão é considerado subutilizado e, assim, pode ser removido da estrutura (Xie e Steven, 1997).

Sendo a estrutura discretizada em uma malha de elementos finitos adequada, a remoção de material é convenientemente representada ao se excluir os elementos da malha em função do critério de projeto adotado. O nível de tensão em cada ponto pode ser mensurado como uma média geral das componentes de tensão. Com este propósito, a tensão equivalente de von Mises tem sido utilizada mais frequentemente para materiais isotrópicos (Xie e Steven, 1997; Tanskanen, 2002).

Desta forma, finalizada a análise da estrutura pelo MEF, o nível de tensão em cada elemento é determinado ao se comparar a tensão equivalente de von Mises do elemento  $\sigma_e^{vm}$  com a máxima tensão equivalente de von Mises em toda a estrutura  $\sigma_{max}^{vm}$ , de tal forma que todos os elementos que satisfazem a condição representada pela Eq. (3.1) são excluídos do modelo.

$$\frac{\sigma_e^{vm}}{\sigma_{max}^{vm}} < RR_i \quad (3.1)$$

sendo  $RR_i$  a razão de rejeição ( $RR$ ) na iteração  $i$ .

O ciclo de análise via MEF com a respectiva remoção dos elementos ocorre utilizando o mesmo valor de  $RR$  até que um estado de equilíbrio seja atingido, isto é, em que não haja mais elemento a ser removido pela atual  $RR$  (Xie e Steven, 1997). Isto implica que o número de elementos retirados a cada análise não será necessariamente o mesmo para todas as iterações. Alcançando-se esse estado de equilíbrio, mas não alcançado algum critério de parada do processo iterativo (configuração ótima pelo método ESO), o processo evolutivo é redefinido, adicionando a  $RR_i$  uma razão de evolução  $ER$ . Assim, um novo ciclo de evolução se inicia, até que não existam mais elementos a serem eliminados com essa nova razão de rejeição.

Dessa maneira sempre que o equilíbrio for alcançado, a  $ER$  será adicionada a  $RR_i$  conforme mostra Eq. (3.2):

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad (3.2)$$

A razão de rejeição inicial geralmente está condicionada a valores prescritos no intervalo  $0 < RR_i < 1\%$ , porém há casos em que dependendo do tipo de análise e da discretização da malha de elementos finitos adotada pode ser necessária a utilização de valores acima de  $1\%$ , devido a não remoção dos elementos. O valor inicial de  $RR_i$  é definido de maneira empírica conforme experiência do usuário para cada tipo de problema.

Segundo Querin (1997), para garantir uma melhor convergência, devem ser adotados pequenos valores de  $ER$ , sendo aproximadamente  $1\%$ .

Dois critérios de parada do processo evolucionário podem ser estabelecidos, sendo eles: a obtenção de um volume final prescrito ( $V_f$ ), ou o estabelecimento de uma razão de rejeição final ( $RR_f$ ). Isso implica que a estrutura otimizada terá uma distribuição de tensão mais homogênea do que a estrutura inicial, pois o percentual de variação de tensão de um elemento para outro será reduzido.

Este processo evolucionário pode ser resumido nos seguintes passos (Huang e Xie, 2010):

- *Passo 1:* Discretizar o domínio inicial da estrutura utilizando uma malha adequada de elementos finitos com aplicação das condições de contorno e ações prescritas;
- *Passo 2:* Analisar a estrutura utilizando o MEF;
- *Passo 3:* Remover os elementos que satisfaçam a equação (3.1);
- *Passo 4:* Aumentar a razão de rejeição de acordo com a equação (3.2) caso o equilíbrio seja atingido, senão, repita os passos 2 e 3;
- *Passo 5:* Repetir os passos 2 a 4 até que o critério de parada estabelecido seja alcançado.

Para a verificação do procedimento evolucionário, Xie e Steven (1993) propôs a aplicação do método em uma estrutura do tipo Michell cujo processo de otimização foi solucionado analiticamente por Michell (1904). O domínio de projeto inicial foi considerado conforme Fig. 3.1 e o resultado teórico ótimo para essa estrutura é mostrado de acordo com a Fig. 3.2.

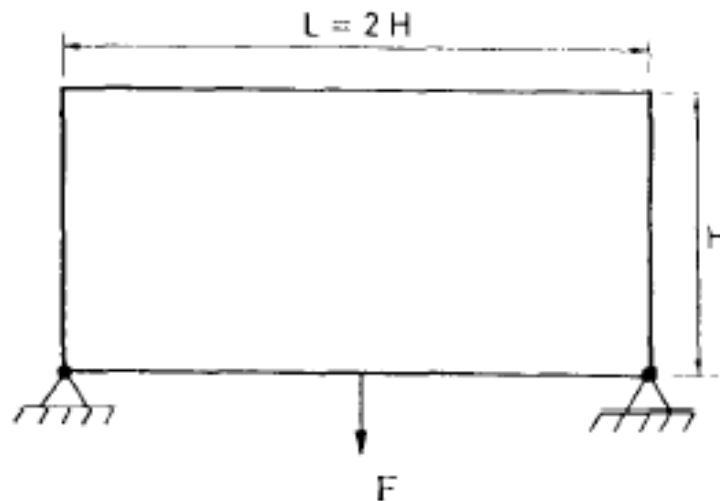


Figura 3.1: Domínio de projeto para estrutura do tipo Michell.

Fonte: Xie e Steven (1993).

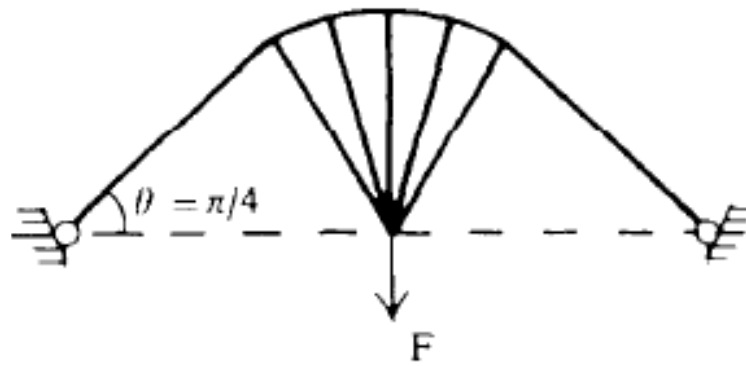
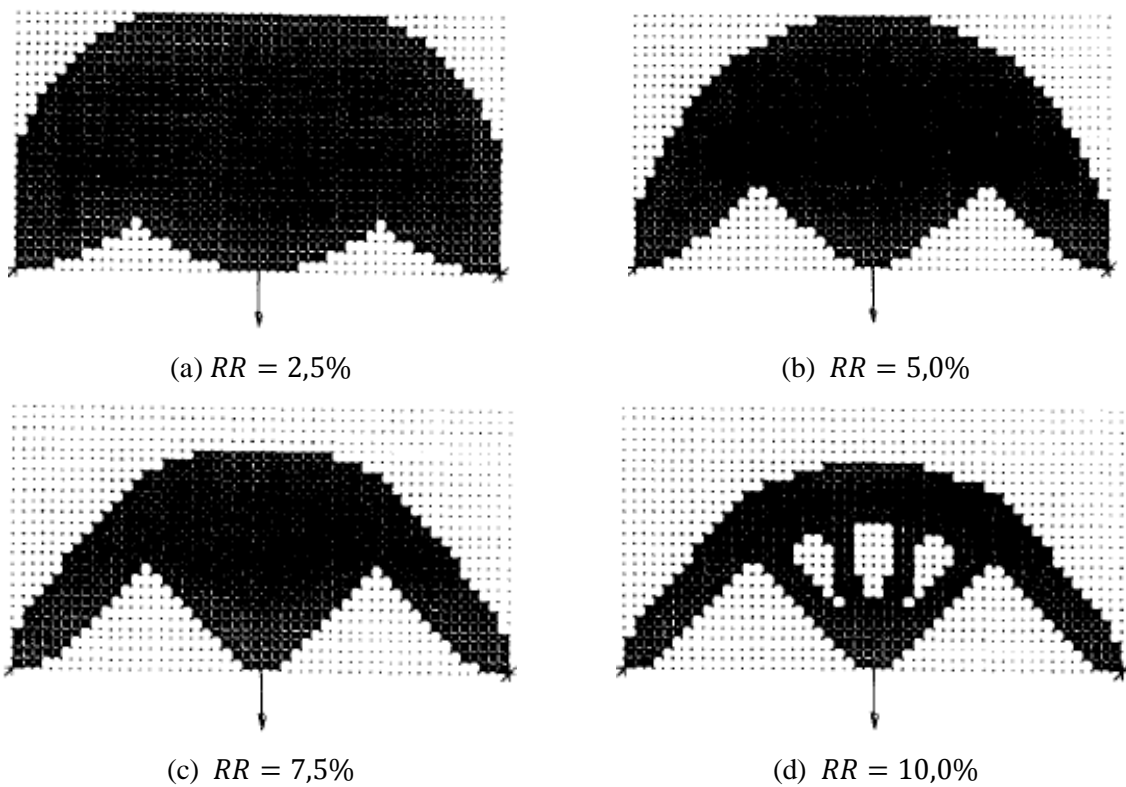


Figura 3.2: Estrutura do tipo Michell.

Fonte: Xie e Steven (1993).

A Fig. 3.3 corresponde ao caminho da solução ótima percorrido pelo do método ESO até que o critério de parada seja atingido, neste caso  $RR_f = 25\%$ .



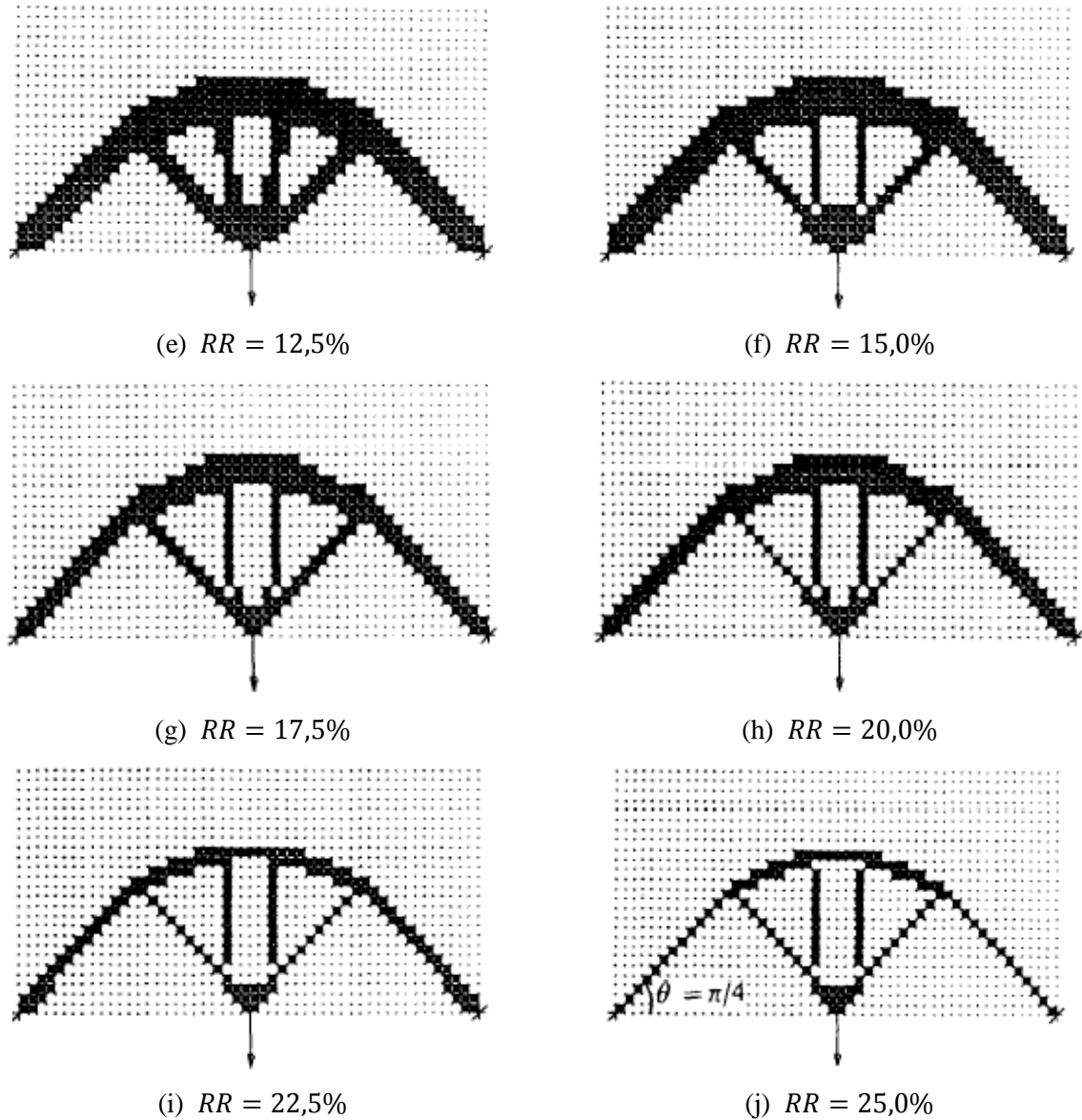


Figura 3.3: Estrutura tipo Michell obtida através do método ESO.

Fonte: Adaptado de Xie e Steven (1993)

### 3.1.1 Critério de escoamento de von Mises

O critério de escoamento desenvolvido por von Mises em 1913, baseia-se na teoria da energia de distorção máxima. Nesta teoria, considera-se que o escoamento ocorre quando a energia associada à mudança de forma de um corpo sob carregamento multiaxial for igual à energia de distorção em um corpo de prova sob tração no momento do escoamento.

Estados de tensão associados à energia de deformação armazenada em um elemento de volume podem ser representados na Fig. 3.4.

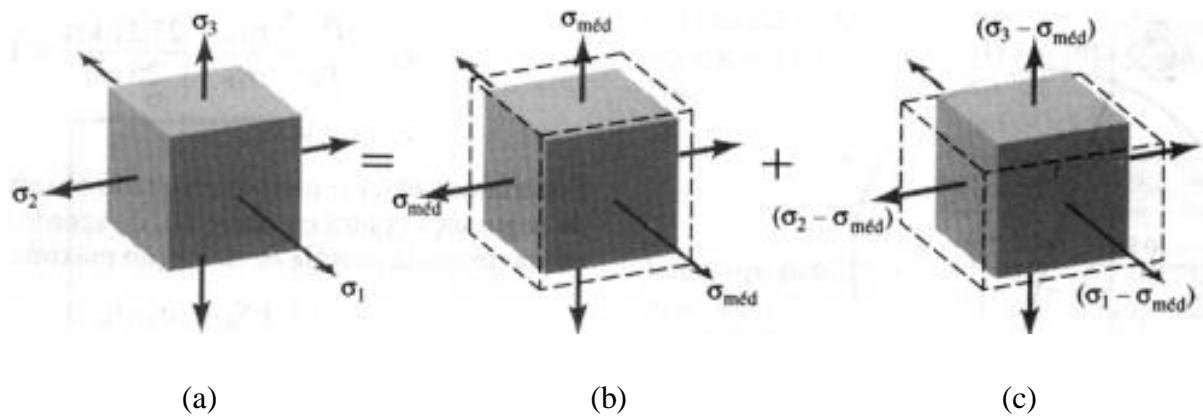


Figura 3.4: Estados de tensão associados à energia de deformação armazenada em um elemento de volume (a) estado triaxial de tensões, (b) variação de volume e (c) distorção.

Fonte: Adaptado de Beer e Johnston (2006).

Desta forma, é possível se obter a expressão para a densidade de energia de distorção  $U_d$ , conforme Eq. (3.3).

$$U_d = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (3.3)$$

onde  $G$ , corresponde ao módulo de elasticidade transversal do material e  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  as componentes de tensões principais.

A densidade de energia de distorção em um corpo de prova sob tração no momento em que atinge a tensão limite de escoamento  $\sigma_{esc}$ , é descrita conforme Eq. (3.4).

$$(U_d)_{esc} = \frac{1}{6G} \sigma_{esc}^2 \quad (3.4)$$

pois  $\sigma_1 = \sigma_{esc}$  e  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ . Deste modo, o escoamento ocorre quando a energia de distorção para um carregamento geral, dado pela Eq. (3.3), iguala ou excede o valor de



$(U_a)_{esc}$  correspondente a Eq. (3.4). Assim, o critério de falha da energia de distorção máxima pode ser enunciado em termos das três componentes de tensões principais conforme Eq. (3.5).

$$\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \sigma_{esc}^2 \quad (3.5)$$

A Fig. 3.5 ilustra a elipse do critério de von Mises para o caso plano,  $\sigma_3 = 0$ , e a Fig. 3.6, a sua visualização tridimensional, onde no plano anti-esférico, a superfície de ruptura de von Mises se aproxima a forma de uma circunferência.

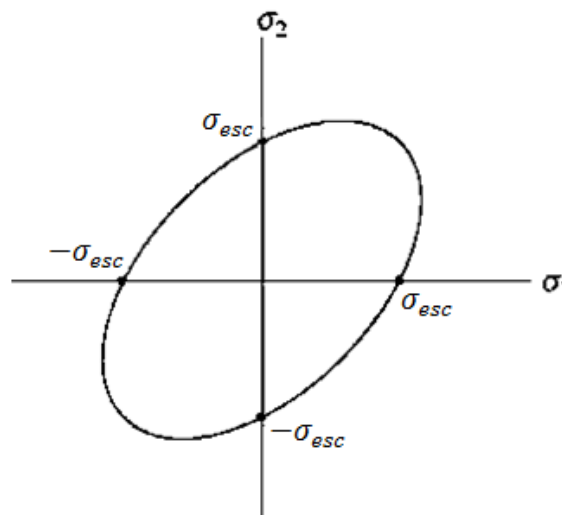


Figura 3.5: Superfície de ruptura de von Mises para o caso plano.

Fonte: Adaptado de Hibbeler (2004)

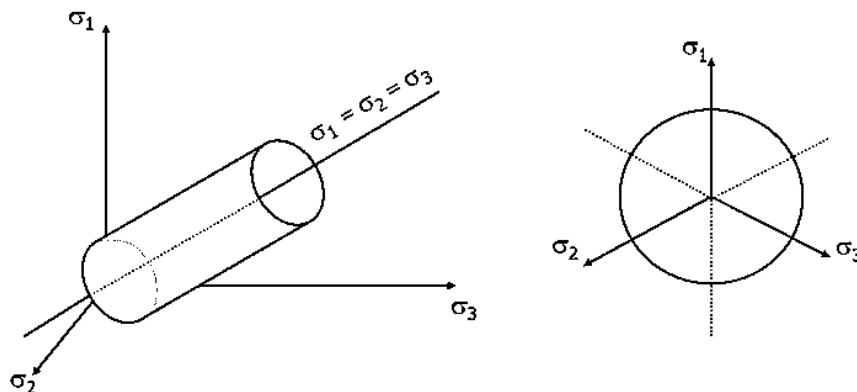


Figura 3.6: Superfície de ruptura de von Mises para o caso tridimensional.

Fonte: Adaptado de Hibbeler (2004)

Para se obter uma quantidade equivalente de tensão no elemento, deve-se supor que o escoamento ocorra para uma dada tensão no elemento, neste caso, chamada de tensão equivalente de von Mises, que está descrita de acordo com a Eq. (3.6).

$$\sigma^{vm} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (3.6)$$

Para o caso de tensão plana, onde  $\sigma_3 = 0$ , a tensão equivalente de von Mises apresenta-se conforme Eq. (3.7).

$$\sigma^{vm} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \quad (3.7)$$

As Equações (3.6) e (3.7) também podem ser representadas em termos das componentes arbitrárias do tensor de tensões, conforme mostra as Eqs. (3.8) e (3.9) respectivamente para o estado tridimensional e Estado Plano de Tensões (EPT).

$$\sigma^{vm} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]} \quad (3.8)$$

$$\sigma^{vm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (3.9)$$

sendo  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  as tensões normais nas direções x, y e z, respectivamente, e  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  as tensões de cisalhamento.

### 3.1.2 Controles de instabilidades aplicados ao ESO

O método ESO, naturalmente, cria cavidades na estrutura devido ao processo de remoção dos elementos ineficientes, independentemente da sua localização no domínio, o que pode acarretar em instabilidade numérica do tipo tabuleiro de xadrez.

Neste trabalho, para atenuar as irregularidades do tabuleiro de xadrez foi utilizada a técnica *Nibbling* ESO, que é uma adaptação do método ESO com características de otimização de

forma para controle das cavidades. Esta técnica avalia o campo de tensões e verifica a possibilidade de abertura de cavidades dentro do domínio de projeto, atuando na eliminação somente dos elementos que estão presentes nos contornos da estrutura, evitando vazios excessivos e desnecessários no processo de otimização (QUERIN, 1997; LANES e GRECO, 2013).

A cada iteração é verificada a necessidade de criação de uma nova cavidade no interior do domínio e caso seja necessário, o método ESO é aplicado, caso contrário, o método *Nibbling* ESO segue com a remoção somente dos elementos que estão presentes nos contornos da estrutura, modificando sua forma e tamanho até haver necessidade da abertura de uma nova cavidade.

O algoritmo de aplicação do método *Nibbling* ESO é implementado adicionando-se o seguinte condicional ao processo evolucionário:

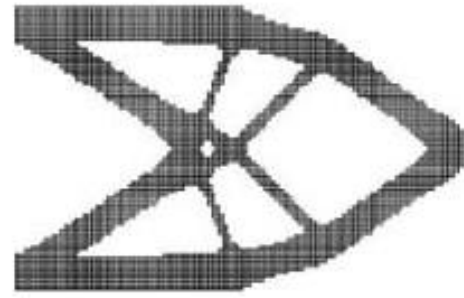
- Se o elemento satisfaz a Eq. (3.1), remova este elemento somente se ao menos uma de suas arestas não esteja conectada a outros elementos na estrutura (com exceção dos elementos adjacentes as condições de contorno aplicadas na estrutura).

Em relação ao problema de dependência de malha foi utilizada a abordagem de Kim *et al.* (2002), que considera a utilização da tensão média do elemento finito como critério de remoção na análise dos níveis de tensão. Quando a tensão máxima do elemento era utilizada, os resultados tornavam-se muito dependentes da malha devido às singularidades que ocorriam próximas as condições de contorno. No entanto, com a utilização do critério de remoção baseado na tensão média do elemento, o efeito de influência de malha passava a ser reduzido.

A Fig. 3.7 mostra alguns resultados obtidos no trabalho de Kim *et al.* (2002). Observa-se que com a utilização de tensões máximas, em vez de tensões médias, o resultado final torna-se mais dependente da malha de elementos finitos para um mesmo problema de análise estrutural.



(a) Malha com 2560 elementos



(b) Malha com 7840 elementos



(c) Malha com 2560 elementos



(d) Malha com 7840 elementos

Figura 3.7: Representação qualitativa da independência de malha. (a) e (b) critério de tensão máxima, (c) e (d) critério de tensão média.

Fonte: Adaptado de Kim *et al.* (2002)

### 3.2 Procedimento ESO aplicado em problemas fisicamente não lineares

A aplicação do procedimento ESO em estruturas que apresentam não linearidade não difere em relação às estruturas lineares, sendo que a análise não linear de elementos finitos deve ser utilizada (HUANG e XIE, 2010). No entanto o cálculo das tensões passa a depender dos modelos constitutivos utilizados para os materiais.

Entre os objetivos propostos pelo presente trabalho está à influência dos efeitos de amortecimento na otimização de estruturas elastoplásticas, dessa maneira torna-se muito importante um conhecimento prévio de não linearidade física, assim como a sua influência nos efeitos de amortecimento.

### 3.2.1 Comportamento fisicamente não linear (elastoplástico)

O comportamento elastoplástico é caracterizado por uma resposta do material, inicialmente elástica e, a partir de um determinado nível de tensão, por um comportamento essencialmente plástico (NATAL JORGE e DINIS, 2005).

Os modelos utilizados pelo trabalho proposto simulam o comportamento elástico perfeitamente plástico e o elastoplástico com encruamento linear representados pelas Figs. 3.8 e 3.9 respectivamente.

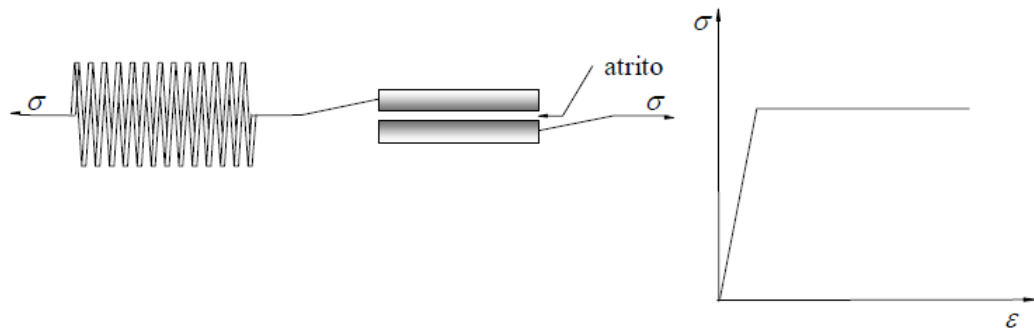


Figura 3.8: Modelo elástico-perfeitamente plástico.

Fonte: Natal Jorge e Dinis (2005)

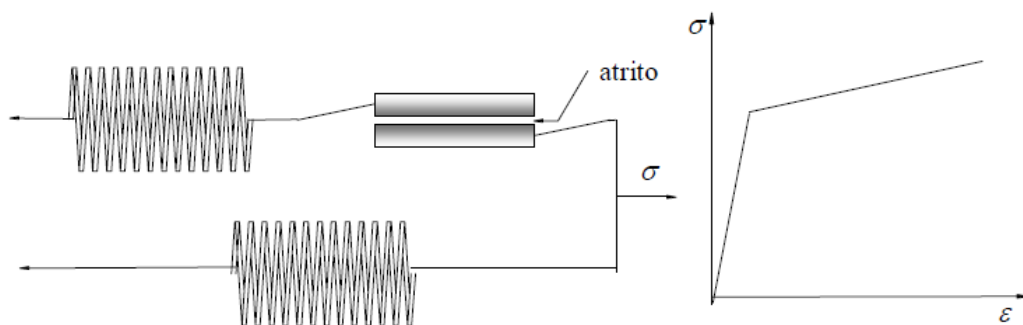


Figura 3.9: Modelo elastoplástico com encruamento linear.

Fonte: Natal Jorge e Dinis (2005)

O comportamento não linear do material será descrito pelo critério de von Mises, adequado para materiais metálicos com ductilidade. Neste critério a função de escoamento  $\Phi(S, k)$  inclui o tensor desviatório de tensões  $S$  e o encruamento isotrópico descrito como função da

variável interna  $k$  que é relacionada à deformação plástica, (MAUTE *et al.*, 1998). Para melhor descrever esse critério são apresentadas as Eqs. (3.10) a (3.12).

$$\phi(S, k) = |S| - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sigma_k \quad (3.10)$$

$$\sigma_k = \sigma_y + E^h \cdot k \quad (3.11)$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \gamma \quad (3.12)$$

sendo  $E^h$  o módulo de encruamento isotrópico,  $\gamma$  o multiplicador plástico e  $\sigma_y$  o limite de escoamento.

Assumindo a condição de pequenas deformações, podem-se dividir os incrementos de deformação em parcelas plástica e elástica. Assim, a regra de decomposição aditiva pode ser aplicada conforme Eqs. (3.13) a (3.16):

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{el} + d\varepsilon^{pl} \quad (3.13)$$

$$d\varepsilon^{el} = D^{-1} \cdot d\sigma \quad (3.14)$$

$$d\varepsilon^{pl} = d\gamma \left| \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right. \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma} = \frac{S}{|S|} \quad (3.16)$$

onde  $d\varepsilon^{el}$  e  $d\varepsilon^{pl}$  correspondem aos incrementos de parcelas elástica e plástica respectivamente e  $D$  denota o tensor elástico do material.

O gradiente  $\frac{\partial \phi}{\partial \sigma}$  é avaliado ao fim de cada iteração do passo considerando um algoritmo implícito de Euler. Para haver deformação plástica a função de escoamento deve ser nula

$\emptyset(S, k) = 0$ , se  $\emptyset(S, k) < 0$  tem-se somente regime elástico e portanto  $d\varepsilon^{pl} = 0$ , porém quando  $\emptyset(S, k) > 0$  tem-se um estado inadmissível de tensões e deve-se encontrar a resposta para  $\emptyset(S, k) = 0$  através de um algoritmo iterativo. Diversos algoritmos foram desenvolvidos de forma a representar um mapeamento de retorno para integrar as equações elastoplásticas. Maiores detalhes sobre algoritmos de retorno podem ser encontrados em Simo e Hughes (1998).

Através do método iterativo de Newton-Raphson o tensor elastoplástico de flexibilidade deve ser rescrito por uma aproximação linear consistente considerando as condições de EPT (RAMM e MATZENMILLER, 1988).

Dessa forma, através da Eq. (3.17) é possível representar a somatória do tensor elástico de flexibilidade com a matriz hessiana para a condição de escoamento  $\emptyset$ .

$$H = D^{-1} + d\gamma \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial \sigma^2} \quad (3.17)$$

Para o processo de obtenção da matriz hessiana existem dois algoritmos implícitos baseados em formulações tangentes, o de Newton-Raphson completo e o de Newton-Raphson modificado (GRECO, 2004).

No algoritmo de Newton-Raphson completo a matriz hessiana é atualizada a cada iteração, o que implica um maior custo computacional, porém apresenta menos iterações para convergir. No algoritmo de Newton-Raphson modificado a matriz hessiana permanece constante, o que é uma vantagem para problemas com plastificação avançada onde a matriz hessiana se torna singular em algum momento da análise, porém necessita de mais iterações para convergir.

Com isso, através da relação entre as variações de tensão e deformação apresentada pela Eq. (3.18) é possível definir o tensor elastoplástico tangente do material  $D_{ep}$ .

$$d\sigma = \left( H^{-1} - \frac{H^{-1} \frac{\partial \emptyset}{\partial \sigma} \frac{\partial \emptyset^T}{\partial \sigma} H^{-1}}{\frac{2}{3} A + \frac{\partial \emptyset^T}{\partial \sigma} H^{-1} \frac{\partial \emptyset}{\partial \sigma}} \right) \cdot d\varepsilon = D_{ep} \cdot d\varepsilon \quad \text{com} \quad A = \frac{E^h}{1 - \frac{2}{3} E^h \cdot d\gamma} \quad (3.18)$$

Esta hipótese é admissível para o modelo de material apresentado, considerando o encruamento linear e será verificada por meio de exemplos numéricos.

### 3.2.2 Influência da taxa de amortecimento na plastificação

O amortecimento é o fenômeno pelo qual a energia mecânica de um sistema é dissipada (principalmente pela geração de calor ou energia). Ele determina a amplitude de vibração na ressonância e o tempo de persistência da vibração depois de cessada a excitação.

Um modelo elastoplástico pode apresentar um amortecimento interno devido aos efeitos da curva de histerese que é demonstrada conforme Fig. 3.10.

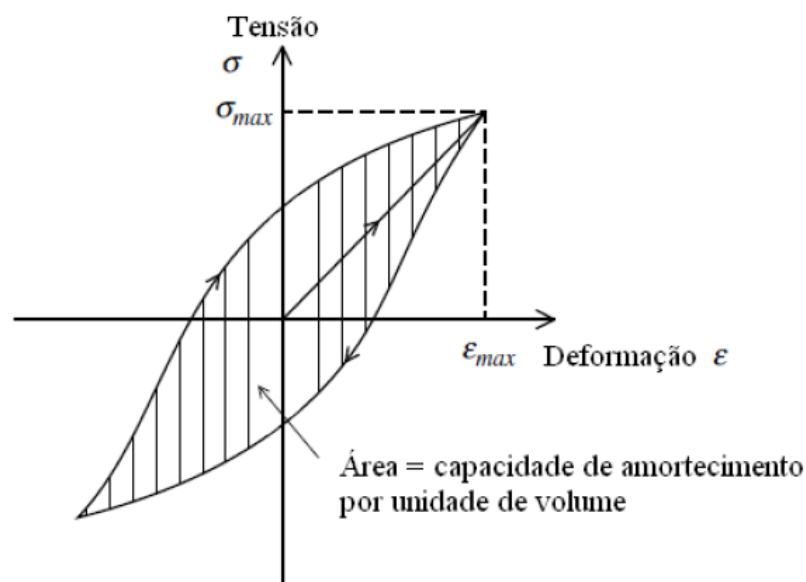


Figura 3.10: Curva de histerese típica para amortecimento mecânico

Fonte: Cossolino e Pereira (2010).

Para qualquer dispositivo amortecedor há uma curva de histerese correspondente, sendo que a área desta curva é igual ao trabalho feito pela força de amortecimento, o que resulta em energia dissipada por ciclo de movimento. Logo a capacidade de amortecimento, quando dividida pelo volume do material, fornece a capacidade de amortecimento por unidade de volume (COSSOLINO e PEREIRA, 2010).



Desta forma, a capacidade de amortecimento por unidade de volume, chamada de  $d$ , é dada por uma integral cíclica representada pela Eq. (3.19):

$$d = \oint \sigma d\varepsilon^{el} \quad (3.19)$$

Em problemas elastoplásticos, através da decomposição aditiva pode-se ser reescrever a Eq. (3.19), conforme mostra as Eqs. (3.20) a (3.22):

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (3.20)$$

$$d = \oint D(\varepsilon - \varepsilon_p) d\varepsilon \quad (3.21)$$

$$d = \frac{D}{2} (\varepsilon^2 - 2\varepsilon_p \cdot \varepsilon) \quad (3.22)$$

Os efeitos de amortecimento associados à plastificação geralmente não são considerados de maneira conjunta em problemas dinâmicos com não linearidade física (HAITIAN *et al.*, 2001).

Quando uma taxa de amortecimento é aplicada em um modelo fisicamente não linear os deslocamentos residuais causados pela plastificação da estrutura diminuem à medida que taxa de amortecimento aumenta. Este comportamento pode ser explicado uma vez que menores níveis de deslocamentos provocam menores níveis de deformações e conseqüentemente menores níveis de tensões (PINHEIRO *et al.*, 2014).

Dentre as principais formas de dissipação de energia em um sistema oscilatório, o amortecimento viscoso é o mais utilizado. Seu modelo parte do pressuposto de que a natureza do amortecimento é viscosa e a força de atrito é proporcional à velocidade, representando uma oposição ao movimento (COSSOLINO e PEREIRA, 2010).

Para exemplificar um modelo com amortecimento, considera-se o sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade como ilustrado na Fig. 3.11.

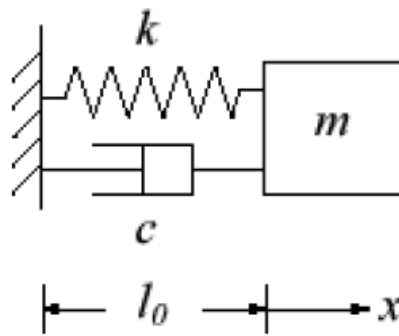


Figura 3.11: Modelo de um oscilador harmônico amortecido.

Fonte: Cossolino e Pereira (2010).

Sendo  $m$  a massa,  $k$  a constante elástica da mola e  $c$  o coeficiente de amortecimento viscoso, este sistema pode ser representado pela Eq. (3.23), chamada de equação de movimento para o instante de tempo  $t$ :

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \quad (3.23)$$

Esta equação diferencial parcial tem solução homogênea que corresponde fisicamente a uma resposta transiente de movimento, ou seja, não duradoura.

Partindo da solução da equação de movimento é possível obter a taxa de amortecimento  $\zeta$ , conforme Eq. (3.24).

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k \cdot m}} \quad (3.24)$$

O movimento oscilatório ocorre para  $0 \leq \zeta < 1$  que corresponde ao chamado caso sub-amortecido.

Em problemas estruturais dinâmicos com amortecimento, o equacionamento pode ser iniciado a partir do modelo reológico do material para introduzir na estrutura a influência da parcela do amortecimento relacionada à rigidez e/ou à massa. O modelo de amortecimento utilizado pelo software de problemas multifísicos Abaqus<sup>®</sup> é do tipo Rayleigh, proporcional à massa e à rigidez, conforme Eq. (3.25).

$$c = \alpha \cdot m + \beta \cdot k \quad (3.25)$$

Desta forma, a representação da taxa de amortecimento passa a ser descrita em função da contribuição das parcelas de massa e rigidez conforme Eq. (3.26).

$$\zeta = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta \cdot \omega_n}{2} \quad (3.26)$$

onde  $\omega_n$  representa a frequência natural da estrutura.

O efeito da taxa de amortecimento considerando a combinação das parcelas de massa e rigidez é ilustrado conforme Fig. 3.12.

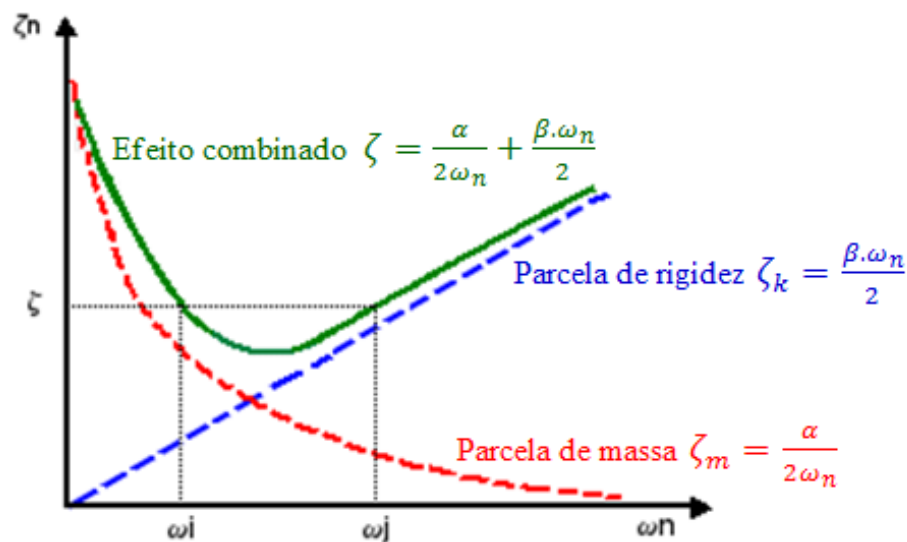


Figura 3.12: Contribuição das parcelas de massa e rigidez no efeito da taxa de amortecimento.

Fonte: Adaptado de Simulia (2010)

A influência da taxa de amortecimento na rigidez de estruturas de modelos elásticos e elastoplásticos poderá acarretar em alterações da solução final de um dado problema de otimização, uma vez que a estrutura elástica pode apresentar maior rigidez que a estrutura elastoplástica para uma dada taxa de amortecimento, porém o contrário poderá ocorrer se outra taxa de amortecimento for adotada (PINHEIRO, *et al.*, 2014; OLIVEIRA e GRECO, 2014).

### 3.3 Procedimento ESO aplicado em problemas dinâmicos envolvendo frequências naturais

O procedimento ESO aplicado em problemas envolvendo frequências naturais corresponde a uma solução dos problemas de autovalores (XIE e STEVEN, 1994a; XIE e STEVEN, 1996), e trata-se de um recurso obtido através da utilização direta das matrizes e dos vetores do MEF.

De acordo com Xie e Steven (1996) os locais ótimos de remoção de material são determinados através de um número de sensibilidade que estuda os efeitos das modificações estruturais e pode ser facilmente calculado para cada elemento.

O comportamento dinâmico de uma estrutura, para problemas não amortecidos, pode ser representado, matematicamente, pela Eq. (3.27) que corresponde à solução geral dos problemas de autovalores:

$$([K] - \omega_i^2[M])\{u_i\} = \{0\} \quad (3.27)$$

onde  $[K]$  corresponde a matriz de rigidez global,  $[M]$  a matriz de massa global,  $\omega_i$  a  $i$ -ésima frequência natural e  $\{u_i\}$  o autovetor de deslocamentos correspondente a  $\omega_i$ .

A frequência natural e seu respectivo autovetor estão relacionados pela relação de Rayleigh, conforme Eq. (3.28).

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i} \quad (3.28)$$

onde a rigidez modal  $k_i$  e massa modal  $m_i$  são definidas respectivamente pelas Eqs. (3.29) e (3.30):

$$k_i = \{u_i\}^T [K] \{u_i\} \quad (3.29)$$

$$m_i = \{u_i\}^T [M] \{u_i\} \quad (3.30)$$

Supondo-se que seja removido um elemento arbitrário da estrutura original, a mudança na frequência natural devido à remoção desse elemento pode ser determinada conforme mostra as Eqs. (3.31) e (3.32):

$$\Delta(\omega_i^2) = \frac{\Delta k_i}{m_i} - \frac{k_i \Delta m_i}{m_i^2} \quad (3.31)$$

$$\Delta(\omega_i^2) = \frac{1}{m_i} (\Delta k_i - \omega_i^2 \Delta m_i) \quad (3.32)$$

Para a obtenção do valor de  $\Delta(\omega_i^2)$  a partir da solução de autovalor anterior, assume-se que o autovetor  $\{u_i\}$  é aproximadamente o mesmo, antes e após a remoção do elemento. Essa hipótese significa dizer que o modo de vibração não se altera significativamente durante o processo evolutivo. Desta forma, obtêm-se as Eqs. (3.33) e (3.34).

$$\Delta k_i \approx -\{u_i^e\}^T [K^e] \{u_i^e\} \quad (3.33)$$

$$\Delta m_i \approx -\{u_i^e\}^T [M^e] \{u_i^e\} \quad (3.34)$$

onde  $[K^e]$  e  $[M^e]$  são respectivamente as matrizes de rigidez e massa do elemento removido.

O autovetor do elemento  $\{u_i^e\}$  contém a entrada de  $\{u_i\}$  que corresponde ao elemento removido.

Logo através destas aproximações, tem-se a Eq. (3.35) que representa a mudança de frequência natural devido à remoção de um elemento arbitrário, o que corresponde ao número de sensibilidade do elemento  $\alpha_i^e$ .

$$\Delta(\omega_i^2) = \alpha_i^e = \frac{1}{m_i} \{u_i^e\}^T (\omega_i^2 [M^e] - [K^e]) \{u_i^e\} \quad (3.35)$$

Para se aumentar a frequência natural da estrutura será mais efetivo, de acordo com a definição do número de sensibilidade, remover os elementos com os máximos valores de  $\alpha_i^e$ , similarmente para a redução da frequência natural o ideal será remover os elementos com os mínimos valores de  $\alpha_i^e$ . Caso queira se manter a frequência natural, porém reduzir a massa da

estrutura deve-se remover os elementos com valores de sensibilidade aproximadamente nulos (XIE e STEVEN, 1994a; XIE e STEVEN, 1996). No entanto, observa-se que se deve considerar um critério de remoção complementar de tensões, que não permita a retirada de elementos próximos aos apoios rígidos que apresentam deslocamentos e números de sensibilidade iguais à zero.

### 3.3.1 Maximização da frequência natural através do critério de tensão

Os critérios utilizados para a otimização dos modos de vibrar de uma estrutura podem ser os mesmos utilizados para a otimização estática, então de forma a simplificar o processo de solução dos problemas de autovalores, Lanes e Greco (2013) consideraram que o critério de remoção baseado no nível de tensão aplicado em estruturas estáticas também poderia ser utilizado na otimização de problemas dinâmicos envolvendo a maximização das frequências naturais.

Para validar a aplicação deste critério, tem-se a equação de movimento de um sistema não amortecido discreto, conforme mostra a Eq. (3.36):

$$[M]\{\ddot{\eta}\} + [K]\{\eta\} = \{f\} \cdot \cos(\Omega t) \quad (3.36)$$

onde  $[M]$  e  $[K]$  são respectivamente as matrizes de massa e rigidez,  $\{\eta\}$  o vetor deslocamento,  $\{f\}$  o vetor de forças nodais e  $\Omega$  a frequência de excitação.

Utilizando-se o método de superposição modal, a solução para o sistema pode ser expressa pela Eq. (3.37).

$$\{\eta\} = \{\bar{u}\}\{y\} \cdot \cos(\Omega t) \quad (3.37)$$

onde  $\{\bar{u}\}$  corresponde a matriz modal e  $\{y\}$  o vetor amplitude da resposta modal descrita em termos das coordenadas principais.

Incluindo-se uma matriz com funções ponderadoras igual à matriz transposta dos modos de vibrar, na equação do movimento, obtém-se a Eq. (3.38):

$$(\{\bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\} - \Omega^2 \cdot \{\bar{u}\}^T [M] \{\bar{u}\}) \{y\} \cdot \cos(\Omega t) = \{\bar{u}\}^T \{f\} \cdot \cos(\Omega t) \quad (3.38)$$

A solução desse novo sistema é demonstrada de acordo com a Eq. (3.39):

$$\{\eta\} = \{\bar{u}\} \{y\} \cdot \cos(\Omega t) = \{\bar{u}\} (\{\bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\} - \Omega^2 \cdot \{\bar{u}\}^T [M] \{\bar{u}\})^{-1} \cdot \{\bar{u}\}^T \{f\} \cdot \cos(\Omega t) \quad (3.39)$$

Simplificando, a Eq. (3.40) é obtida:

$$\{\eta\} = [\bar{K}]^{-1} \{\bar{f}\} \rightarrow [\bar{K}] \{\eta\} = \{\bar{f}\} \quad (3.40)$$

onde  $[\bar{K}]^{-1} = \{\bar{u}\} (\{\bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\} - \Omega^2 \cdot \{\bar{u}\}^T [M] \{\bar{u}\})^{-1} \cdot \{\bar{u}\}^T$  significa a inversa da nova matriz de rigidez equivalente e  $\{\bar{f}\} = \{f\} \cdot \cos(\Omega t)$  o vetor de forças transientes.

Essas equações correlacionam os deslocamentos com as forças aplicadas e indiretamente as tensões, validando a adoção do critério de remoção baseado no nível de tensão para os casos de otimização envolvendo frequências naturais, sem a necessidade do acesso direto das matrizes de massa e rigidez.

A grande vantagem desta abordagem é que ela pode ser estendida a problemas transientes com comportamento linear ou não linear.

### 3.3.2 Maximização do Intervalo entre Duas Frequências

De acordo com as abordagens aqui já mencionadas é possível alcançar um valor ótimo para uma determinada frequência natural de interesse sem se preocupar com as demais frequências naturais da estrutura. Porém, há casos de engenharia, em que é necessário se avaliar mais de uma frequência natural.

Baseando-se no trabalho de Xie e Steven (1996), é possível otimizar o intervalo entre duas frequências naturais da estrutura, de forma que para se alcançar esse objetivo, é necessário remover os elementos que apresentam maior diferença entre os valores de sensibilidade para cada modo de interesse, conforme Eq. (3.41).

$$\alpha_{e,jk} = \Delta(\omega_k^2 - \omega_j^2) = \alpha_{e,k} - \alpha_{e,j} \quad (3.41)$$

onde  $i$  e  $j$  correspondem aos modos a serem avaliados, sendo  $k > j$ .

Para a aplicação desse recurso também pode ser utilizado o critério de remoção baseado no nível de tensão, onde os elementos ineficientes serão os que apresentarem menor diferença de tensões entre os modos de interesse, conforme mostra Eq. (3.42).

$$\frac{\sigma_{e,k}^{vm} - \sigma_{e,j}^{vm}}{\sigma_{max,k}^{vm} - \sigma_{max,j}^{vm}} < RR_i \quad (3.42)$$

sendo,  $\sigma_{e,k}^{vm}$  e  $\sigma_{e,j}^{vm}$  as tensões de von Mises do elemento e  $\sigma_{max,k}^{vm}$  e  $\sigma_{max,j}^{vm}$  as tensões máximas de von Mises em toda a estrutura, para os modos  $k$  e  $j$  respectivamente.

### 3.4 Procedimento ESO aplicado em problemas envolvendo múltiplos casos de carregamento

A maioria das estruturas aplicadas em engenharia estão sujeitas a vários casos de carga, onde cada um destes casos pode atuar sobre a estrutura em diferentes momentos.

A aplicação do método ESO para otimizar a estrutura sujeita a vários casos de carregamento não será muito mais trabalhosa do que a sua aplicação para um único caso de carga, uma vez que a matriz de rigidez global precisa ser decomposta somente uma vez, independente de quantos casos de carregamento sejam considerados na análise.

No trabalho apresentado por Xie e Steven (1994b) a metodologia ESO é aplicada para diversos casos de carregamento baseando-se no conceito de superposição dos efeitos para ações estáticas, de forma que os elementos são removidos a cada iteração somente se a condição de rejeição for satisfeita por todos os casos presentes no modelo, resultando em algoritmos mais complexos e combinação limitada das análises mecânicas.

O algoritmo que descreve a metodologia abordada por Xie e Steven (1994b) pode ser resumido nos seguintes passos:



- *Passo 1:* Discretizar o domínio inicial da estrutura utilizando uma malha adequada de elementos finitos com aplicação das condições de contorno e ações prescritas;
- *Passo 2:* Analisar a estrutura utilizando o MEF para cada ação aplicada;
- *Passo 3:* Aplicar a metodologia ESO para determinar, a cada iteração os elementos ineficientes para todos os casos de carregamento em estudo;
- *Passo 4:* Remover todos os elementos que atendem o Passo 3;
- *Passo 5:* Repetir os passos 2 a 4 até que o projeto ótimo seja alcançado.

O presente trabalho propõe uma nova técnica de aplicação desta metodologia, tornando a implementação do processo de otimização mais simples e rápida, com a vantagem de se combinar análises com diferentes tipos de solução, podendo ser linear ou não linear em condições estáticas ou dinâmicas.

Essa nova forma de aplicação da metodologia parte do princípio de que os elementos podem ser removidos para cada caso de análise de forma independente, e para se obter a geometria ótima considerando todos os casos, basta, ao final da execução de todas as análises, desconsiderar a remoção dos elementos que não foram removidos por todos os casos, o que garante a permanência dos elementos mais solicitados, para qualquer caso de análise, na estrutura.

Para melhor demonstração desse processo é apresentada uma sequência considerando dois casos fictícios de análise conforme Fig. 3.13. É importante observar que para os blocos em paralelo pode haver estruturas iterativas omitidas na figura.

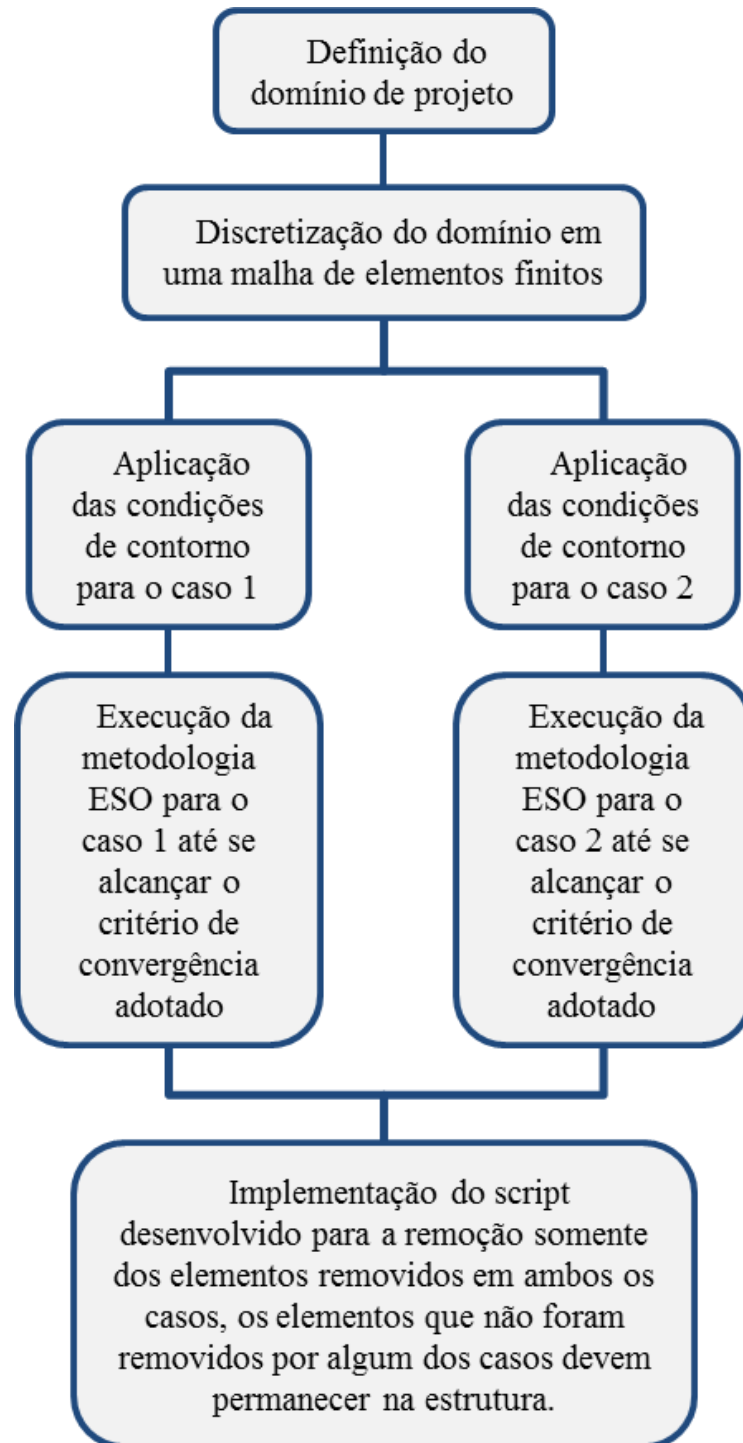


Figura 3.13: Sequência do novo processo de aplicação da metodologia ESO para múltiplos casos de carregamento.

# 4

## EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações considerando a metodologia ESO para solução de problemas estáticos e dinâmicos, envolvendo as possíveis não linearidades físicas e geométricas. Alguns exemplos estudados são comparados com os resultados fornecidos pela literatura, como forma de validação do algoritmo implementado e sua técnica de utilização. Outros exemplos, não encontrados na bibliografia, também são solucionados e comparados com os mais conhecidos softwares comerciais de otimização.

### 4.1 Validação da nova técnica de implementação da metodologia ESO em problemas envolvendo múltiplos casos de carregamento

Para a resolução do processo de otimização dos exemplos contidos nessa seção, considerou-se um domínio inicial de projeto constituído por uma chapa retangular com dimensões de 16,0m x 10,0m e espessura de 1m. O domínio de projeto adotado foi discretizado em uma malha de elementos finitos com 64x40 elementos do tipo M3D4 do Abaqus<sup>®</sup>. O material adotado possui características de um aço estrutural e, portanto as propriedades foram assumidas como módulo de elasticidade de 210GPa, densidade de 7850kg/m<sup>3</sup> e coeficiente de Poisson de 0,30. Os parâmetros iniciais adotados para a otimização foram:  $RR_0 = 1\%$  e  $ER = 0,5\%$ .

Inicialmente, com o objetivo de validar a eficiência desta nova abordagem do procedimento evolucionário de otimização em estruturas submetidas a múltiplos casos de carregamento foi utilizado um modelo clássico apresentado pelo trabalho de Xie e Steven (1994b). Este exemplo consiste em uma chapa em balanço submetida a dois casos de carregamento, sendo solicitada por uma ação distribuída de 1N/m na superfície superior para o caso 1 e uma carga concentrada de 16N no canto superior direito para o caso 2, conforme ilustra Fig. 4.1.

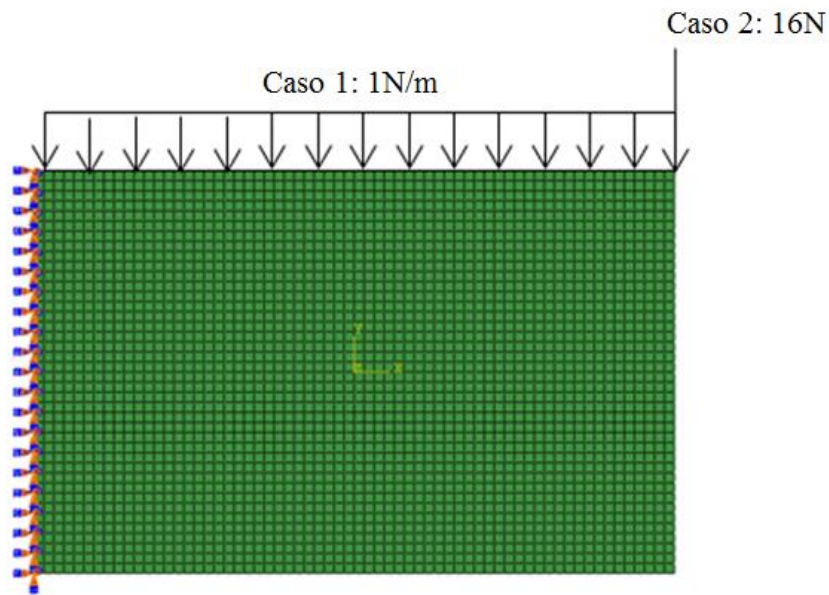


Figura 4.1: Domínio inicial de projeto com a aplicação das condições de contorno para os casos de carregamento 1 e 2.

A estrutura deverá ser otimizada até que uma razão de rejeição final “ $RR_f$ ” de 7% seja atingida, com controle de cavidades para abertura de no máximo três furos durante o processo evolutivo.

As Figs. 4.2 e 4.3 apresentam a topologia final ótima obtida para os casos de carregamento 1 e 2 respectivamente. Para o critério de parada adotado pode-se notar que a topologia obtida pelo caso 1 requer muito mais material que a obtida pelo caso 2.

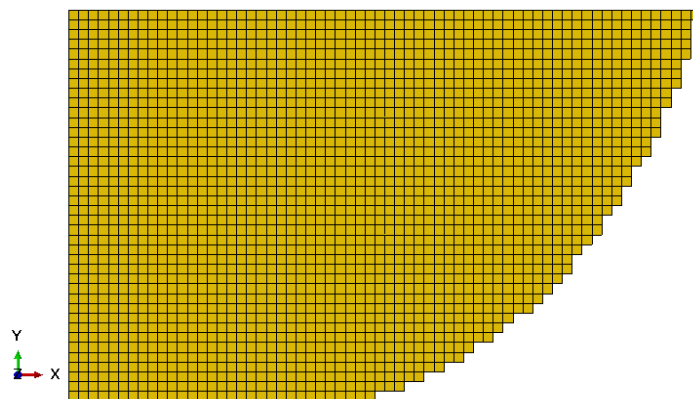


Figura 4.2: Topologia ótima da viga em balanço para o caso de carregamento 1.

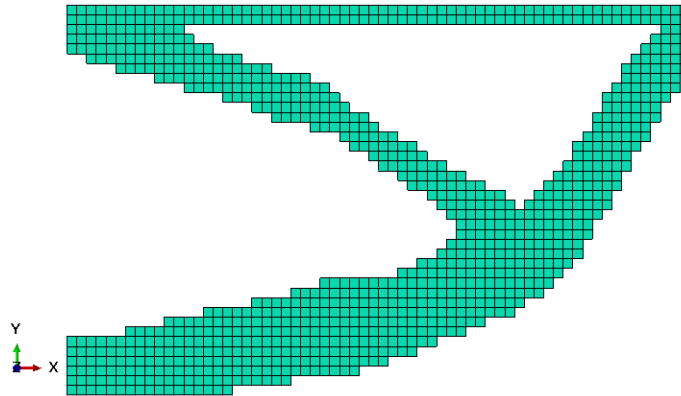


Figura 4.3: Topologia ótima da viga em balanço para o caso de carregamento 2.

A topologia final combinando-se a atuação de cada caso de carregamento pode ser ilustrada de acordo com a Fig. 4.4.

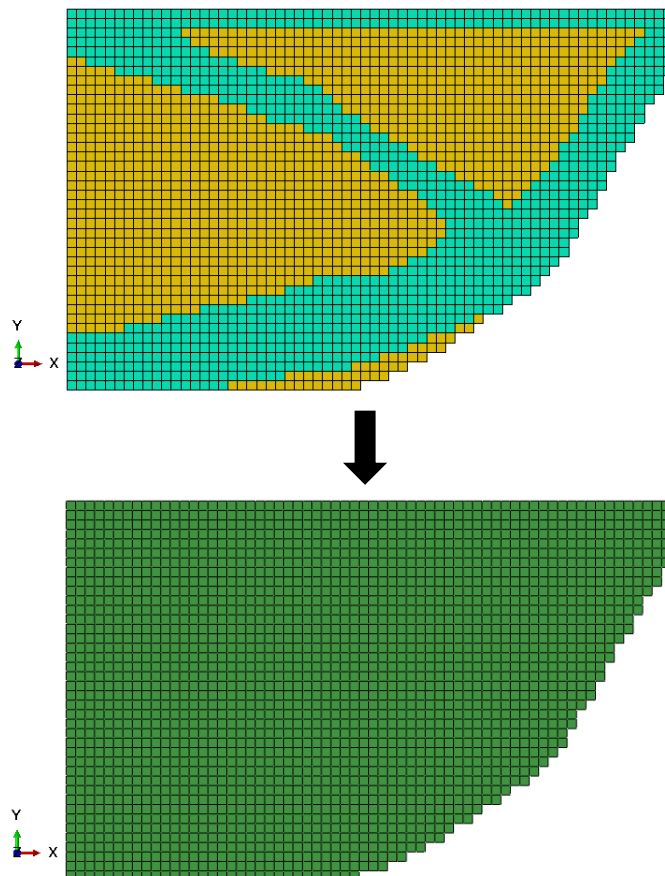


Figura 4.4: Topologia ótima da viga em balanço considerando os casos de carregamento 1 e 2.

Para assegurar que o processo evolutivo está otimizando a estrutura, foi criada uma taxa de otimização. Esta taxa consiste em uma relação entre fração de volume removido pela máxima tensão equivalente de von Mises obtida considerando todos os elementos finitos que atuam na estrutura, de tal forma que esta máxima tensão pode ocorrer em diferentes elementos finitos durante o processo evolutivo, proporcionando assim uma performance global para a otimização estrutural. Os valores apresentados são considerados adimensionais e por isso foram normalizados para facilitar o entendimento e possíveis comparações.

É importante salientar que quanto maior a taxa de otimização, melhor a performance estrutural em relação aos níveis de tensão para um determinado volume remanescente, e consequentemente a estrutura estará alcançando sua topologia ótima.

As taxas de otimização por iteração para os casos de carregamento 1 e 2 são apresentadas respectivamente pelas Figs. 4.5 e 4.6.

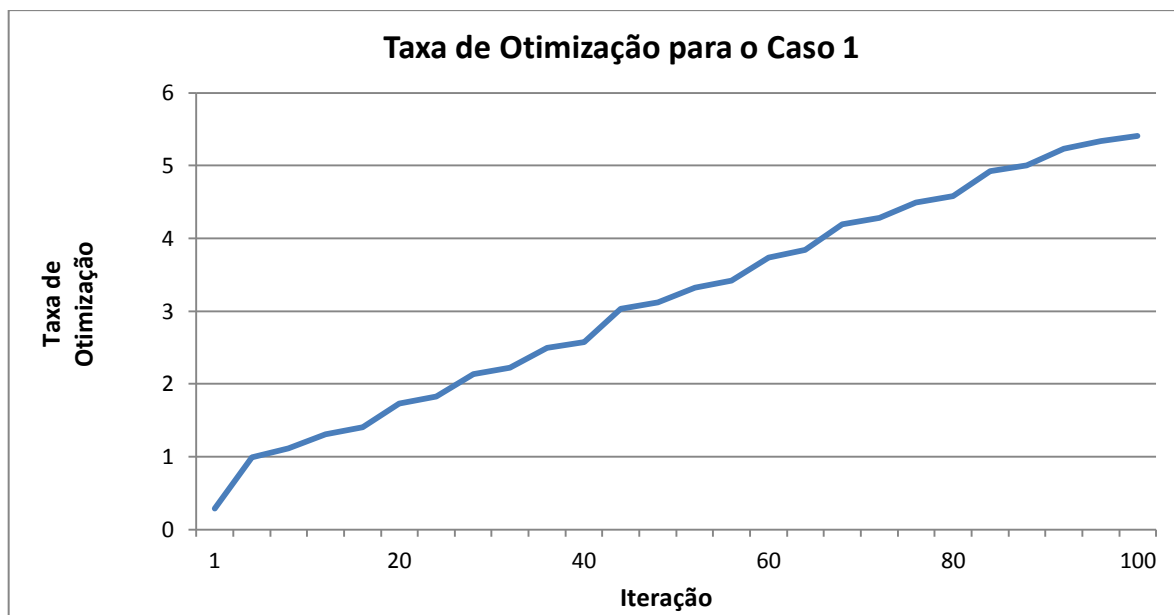


Figura 4.5: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do caso de carregamento 1.

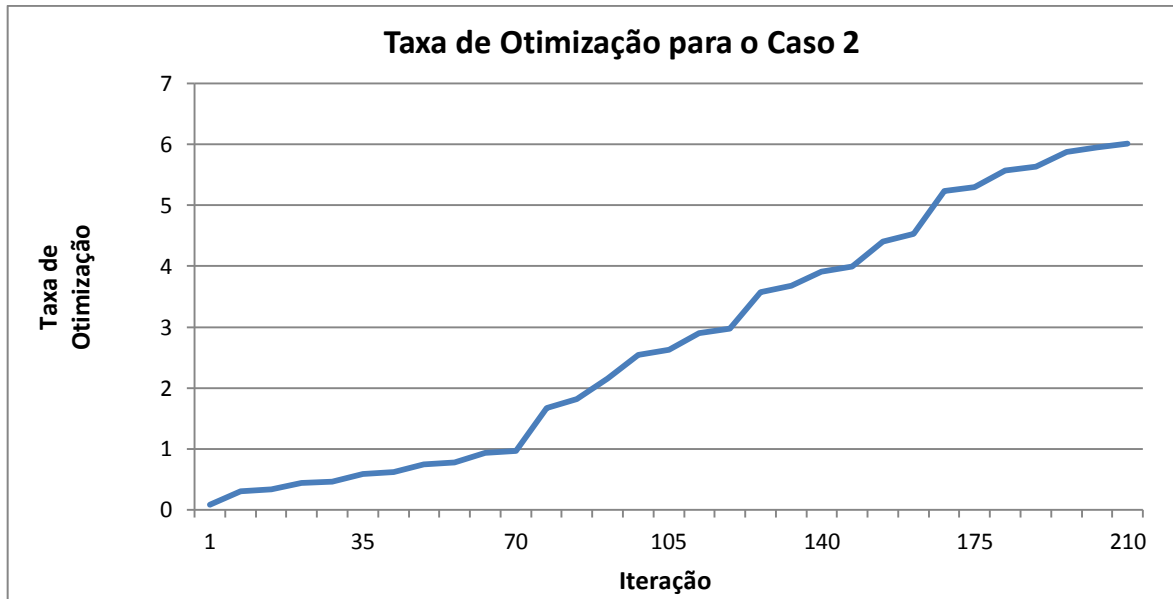


Figura 4.6: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do caso de carregamento 2.

Para validar a eficiência da nova técnica de aplicação da metodologia implementada, é ilustrada a solução proposta por Xie and Steven (1994b), conforme Figs. 4.7 e 4.8 para os casos de carregamento 1 e 2 respectivamente, e pela Fig. 4.9 representando a combinação de ambos os casos.

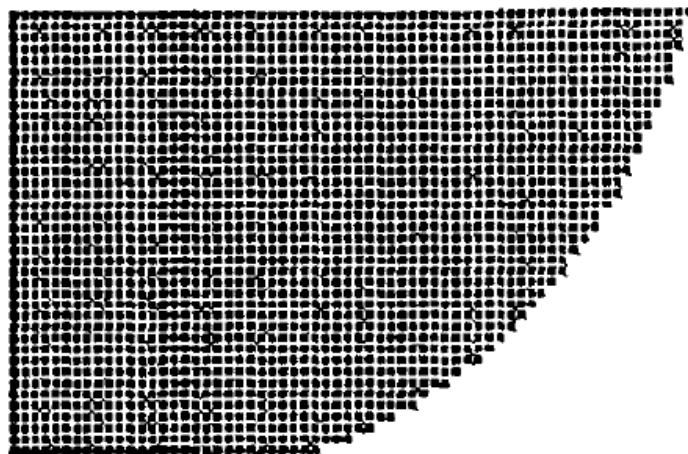


Figura 4.7: Topologia ótima da viga em balanço obtida pela solução de Xie e Steven (1994b) para o caso de carregamento 1.

Fonte: Adaptado de Xie e Steven (1994b)



Figura 4.8: Topologia ótima da viga em balanço obtida pela solução de Xie e Steven (1994b) para o caso de carregamento 2.

Fonte: Adaptado de Xie e Steven (1994b)

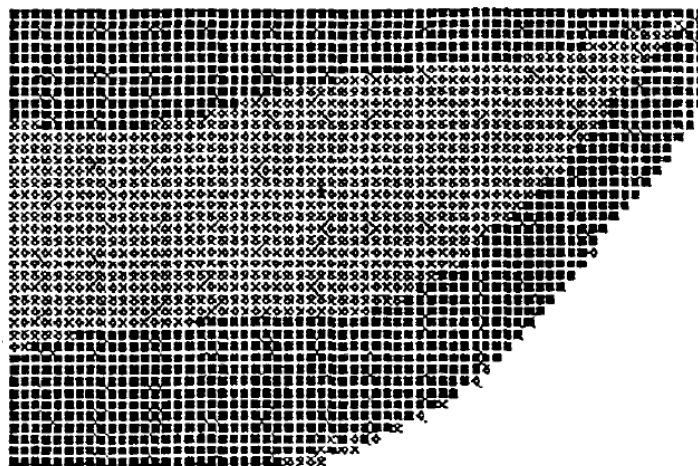


Figura 4.9: Topologia ótima da viga em balanço obtida pela solução de Xie e Steven (1994b) considerando os casos de carregamento 1 e 2.

Fonte: Adaptado de Xie e Steven (1994b)

#### 4.1.1 Aplicação da metodologia ESO envolvendo a combinação de análises estáticas com análises dinâmicas no domínio da frequência.

Conforme já mencionado neste trabalho, através da nova abordagem de implementação da metodologia ESO, é possível combinar diferentes tipos de análise para um dado modelo estrutural a ser otimizado, assim, a fim de demonstrar essa capacidade, alguns novos



exemplos numéricos devem ser apresentados, dentre os quais uma análise modal estudada no artigo de Xie e Steven (1996) será adicionada como um terceiro caso para melhor representar esta proposta, sendo consideradas somente as vibrações no plano.

Para este terceiro caso, o domínio de projeto retangular foi fixado em suas extremidades opostas de acordo com a Fig. 4.10.

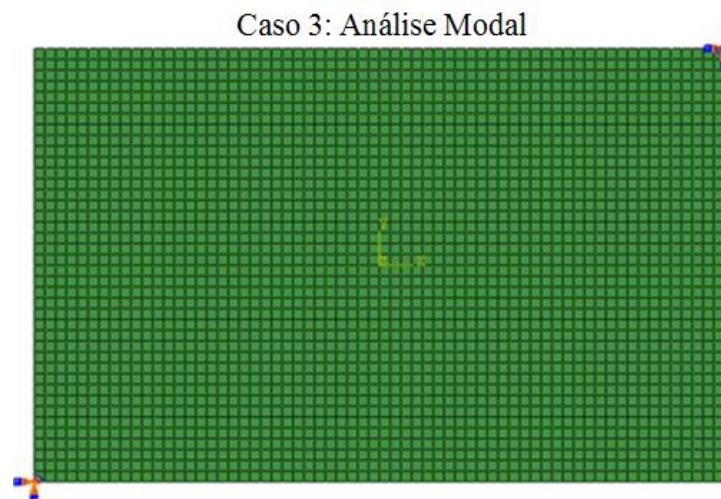


Figura 4.10: Domínio inicial de projeto com a aplicação das condições de contorno para o caso de carregamento 3.

O objetivo dessa otimização consiste em aumentar o valor do primeiro modo de frequência natural, onde o processo evolutivo deverá otimizar a estrutura de até que 50% de seu material inicial seja removido.

A concepção estrutural ótima correspondente a este caso de carregamento é mostrada na Fig. 4.11, sendo quase idêntica à da solução obtida por Xie e Steven (1996) que está apresentada na Fig. 4.12.

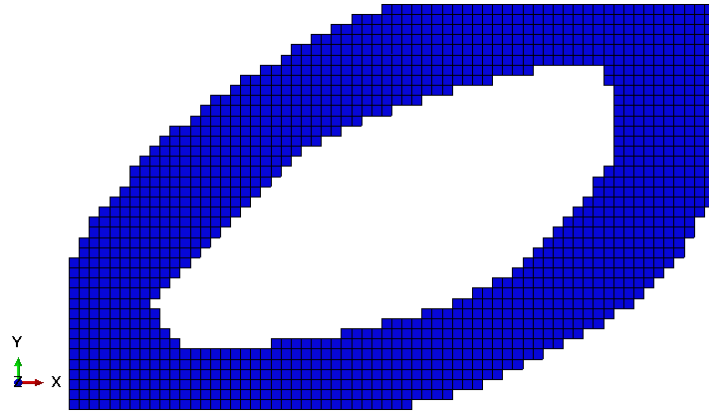


Figura 4.11: Topologia ótima para o caso de carregamento 3 com maximização da frequência fundamental.

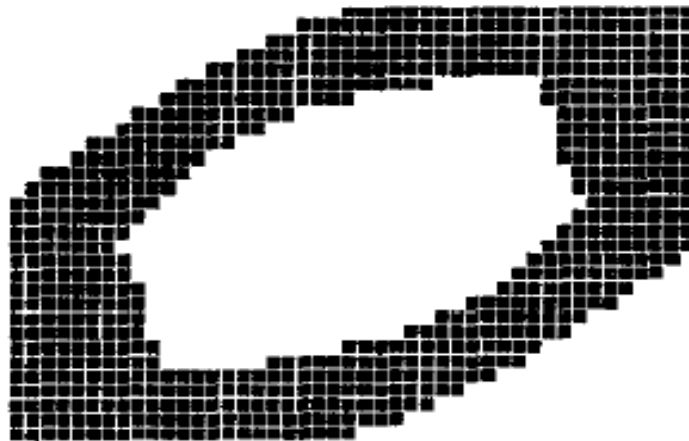


Figura 4.12: Topologia ótima obtida pela solução de Xie e Steven (1996) para o caso de carregamento 3 com maximização da frequência fundamental.

Fonte: Xie e Steven (1996)

Após aplicação do processo de otimização, o primeiro modo de frequência natural foi elevado em 30,2%, passando de 23,5Hz para 30,6Hz. É importante mencionar que como este caso foi introduzido com o objetivo de se obter uma otimização combinada com outros casos de carregamento, as propriedades de material e os parâmetros geométricos do domínio inicial tornam-se diferentes daqueles abordados no trabalho de Xie e Steven (1996) e por este motivo os resultados apresentaram ordens de grandezas diferentes. Como a aplicação deste *script* foi desenvolvida inicialmente por Lanes (2013), este exemplo também foi reproduzido em seu trabalho considerando as mesmas propriedades e dimensões abordadas por Xie e Steven

(1996), de tal forma que é possível verificar resultados muito parecidos, inclusive em sua ordem de grandeza, com os obtidos pela literatura.

Então, baseando-se na utilização da técnica proposta, o problema de otimização já apresentado pelo caso de carregamento 2 pode ser combinado com o problema de otimização obtido pelo atual caso de carregamento 3, mesmo que eles solicitem por diferentes tipos de análises mecânicas.

A Fig. 4.13 apresenta a topologia final, combinando-se o desempenho do caso de carregamento 2 com caso de carregamento 3.

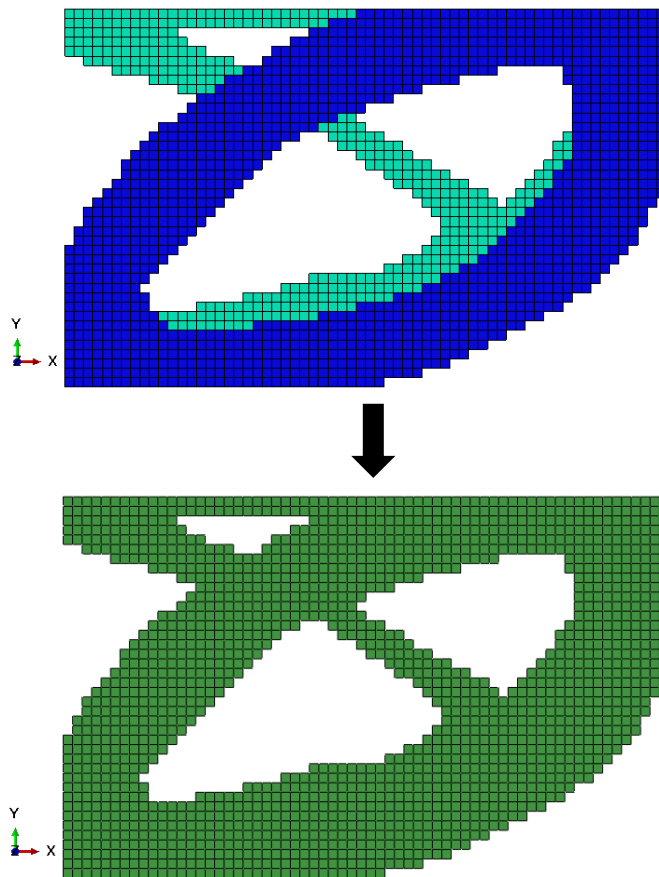


Figura 4.13: Topologia ótima obtida considerando os casos de carregamento 2 e 3.

O atual caso de carregamento 3, também foi combinado com o já apresentado caso de carregamento 1, sendo a sua topologia final ilustrada de acordo com a Fig. 4.14.

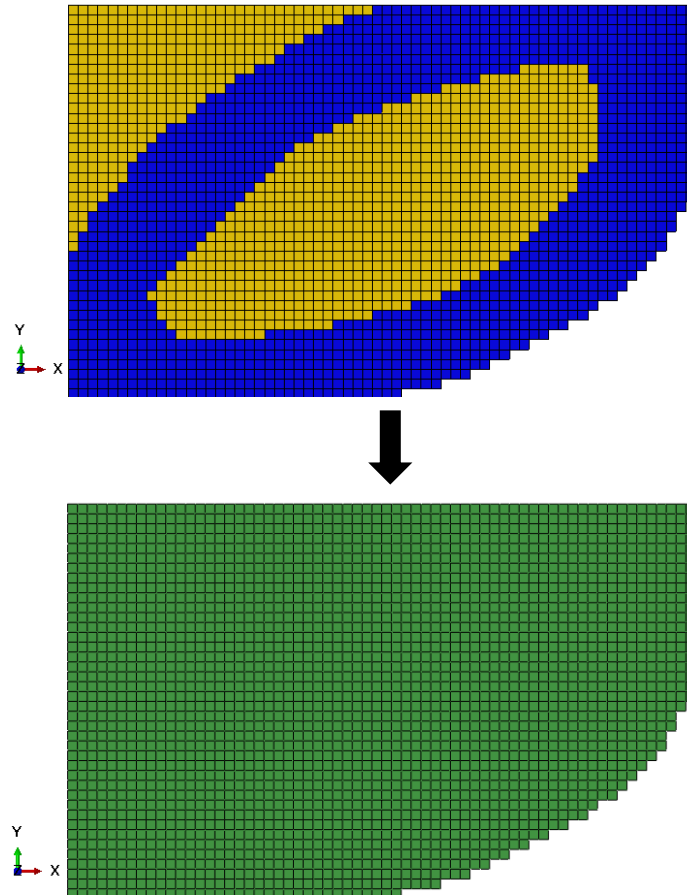


Figura 4.14: Topologia ótima obtida considerando os casos de carregamento 1 e 3 .

É muito importante ressaltar que, também é possível combinar os três casos de carregamento aqui apresentados, porém para a combinação destes três casos em particular, a solução final obtida resultará na mesma topologia já apresentada pela Fig. 4.14.

A taxa de otimização aplicada para a análise modal consiste em uma relação entre fração volumétrica removida pelo inverso da frequência natural a ser maximizada. Assim, a taxa de otimização obtida por iteração, relacionada ao caso de carregamento 3 é mostrada de acordo com a Fig. 4.15.

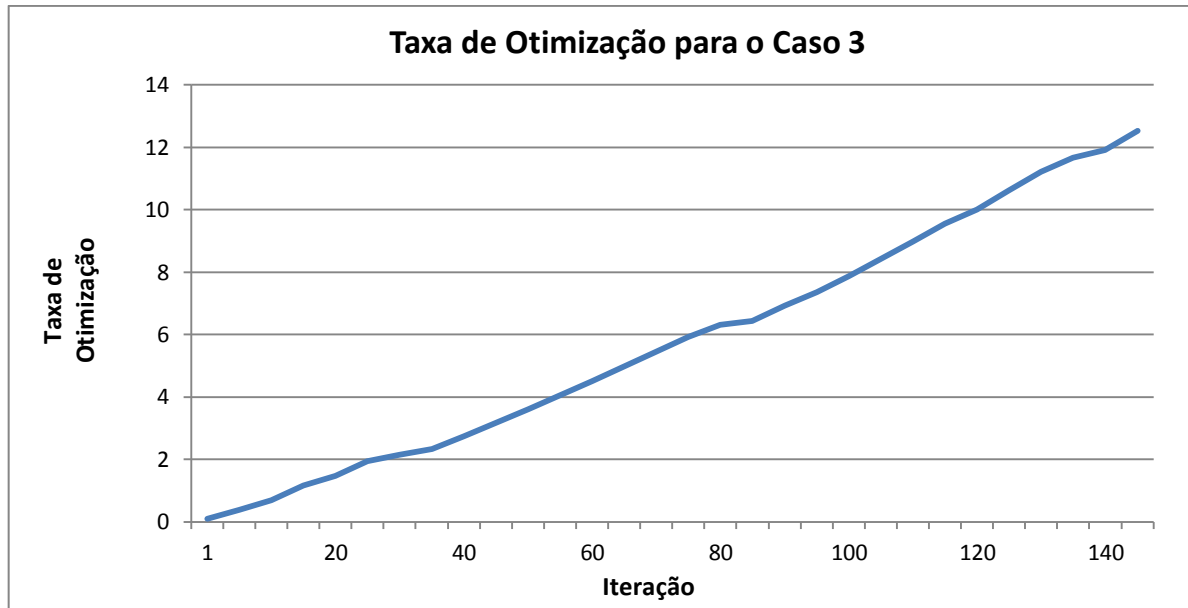


Figura 4.15: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do caso de carregamento 3.

Outro novo exemplo numérico é apresentado a fim de se executar o processo de otimização, considerando o comportamento elastoplástico de uma estrutura sob ação estática combinada com o seu efeito modal.

O problema de otimização proposto com resposta elastoplástica corresponde a um exemplo estudado no artigo de Maute *et al.* (1998), onde a solução do processo de otimização foi baseada em um procedimento adaptativo de parametrização geométrica, considerando o cálculo dos gradientes da função objetivo.

O comportamento elastoplástico adotado será simulado através do modelo de escoamento de von Mises, considerando um material com encruamento isotrópico linear. A tensão de escoamento foi assumida como  $\sigma_y = 280\text{MPa}$  e o módulo de encruamento linear como  $E^h = 500\text{MPa}$ .

A Fig. 4.16 mostra o domínio de projeto inicial com suas condições de contorno, representando o caso de carregamento 4 para o modelo elastoplástico e o caso de carregamento 5 para a sua análise modal.

A carga vertical está distribuída sob um comprimento de 4,0m, sendo que cada engastamento possui 2,0m de comprimento.

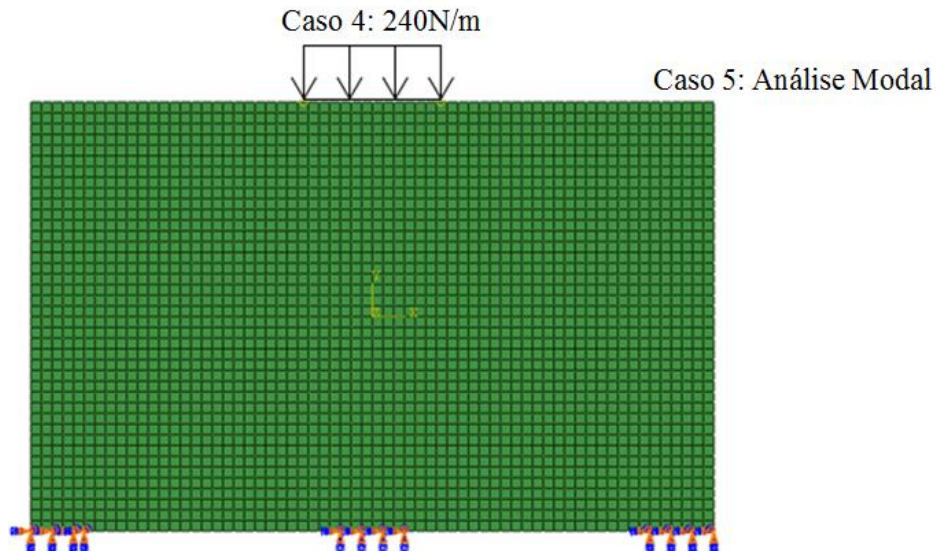


Figura 4.16: Domínio inicial de projeto com a aplicação das condições de contorno para os casos de carregamento 4 e 5.

Assim como foi apresentado pelo caso de carregamento 3, o objetivo da otimização para caso de carregamento 5 corresponde a maximizar o primeiro modo de frequência natural. Para ambos os casos de carga 4 e 5, o processo evolutivo irá otimizar a estrutura até que 70% do material seja removido.

As Figs. 4.17 e 4.18 mostram respectivamente a topologia final ótima obtida pelos casos de carregamento 4 e 5. No modelo elastoplástico ótimo as cargas são sustentadas por três suportes, o que melhora a distribuição da tensão.

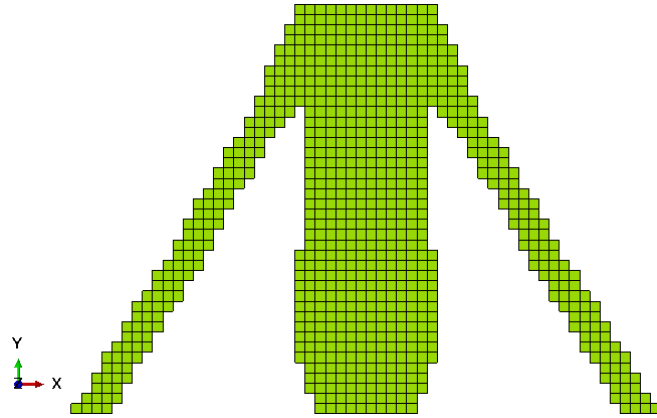


Figura 4.17: Topologia ótima para o caso de carregamento 4 considerando comportamento elastoplástico.

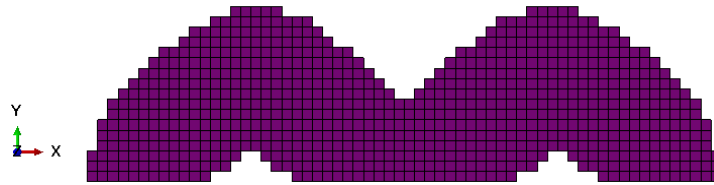


Figura 4.18: Topologia ótima para o caso de carregamento 5 com maximização da frequência fundamental.

A Fig. 4.19 ilustra a solução obtida por Maute *et al.* (1998), onde é possível verificar a semelhança da topologia final ótima com a obtida pela metodologia ESO.

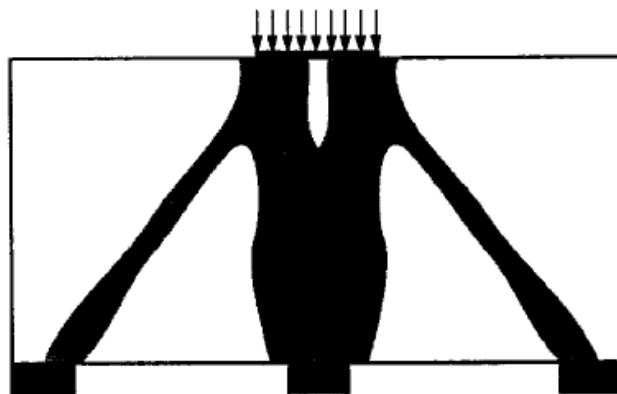


Figura 4.19: Topologia ótima obtida pela solução de Maute *et al.* (1998) para o caso de carregamento 4 considerando comportamento elastoplástico.

Fonte: Maute *et al.* (1998)

O problema de otimização proposto pelo caso de carregamento 5 foi criado pela autora, e por isso não pode ser encontrado na literatura, assim como forma de verificação da sua solução, este mesmo problema foi reproduzido em um software de otimização comercial chamado OptiStruct<sup>®</sup>, sendo sua topologia final ilustrada conforme Fig. 4.20. Este software é baseado na abordagem SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalty*) para o tratamento das densidades intermediárias, onde a função objetivo é calculada pelo método dos gradientes.



Figura 4.20: Topologia ótima obtida pelo OptiStruct<sup>®</sup> para o caso de carregamento 5 com maximização da frequência fundamental.

Após aplicação do processo de otimização, houve um aumento significativo no primeiro modo de frequência natural, passando de 57,04Hz para 153,97 Hz.

A topologia final ótima combinando-se o desempenho do caso de carregamento 4 com caso de carregamento 5 é demonstrada de acordo com a Fig. 4.21.



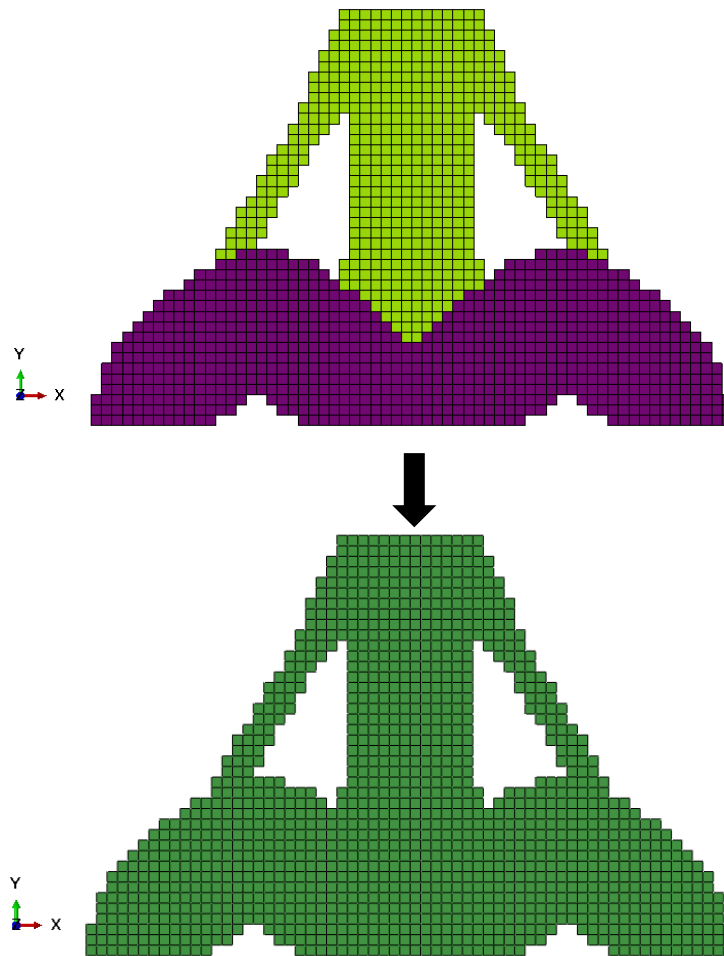


Figura 4.21: Topologia ótima obtida considerando os casos de carregamento 4 e 5 .

As taxas de otimização por iteração para os casos de carregamento 4 e 5 são apresentadas respectivamente pelas Figs. 4.22 e 4.23. Assim, novamente é possível assegurar que o processo evolucionário está otimizando a estrutura.

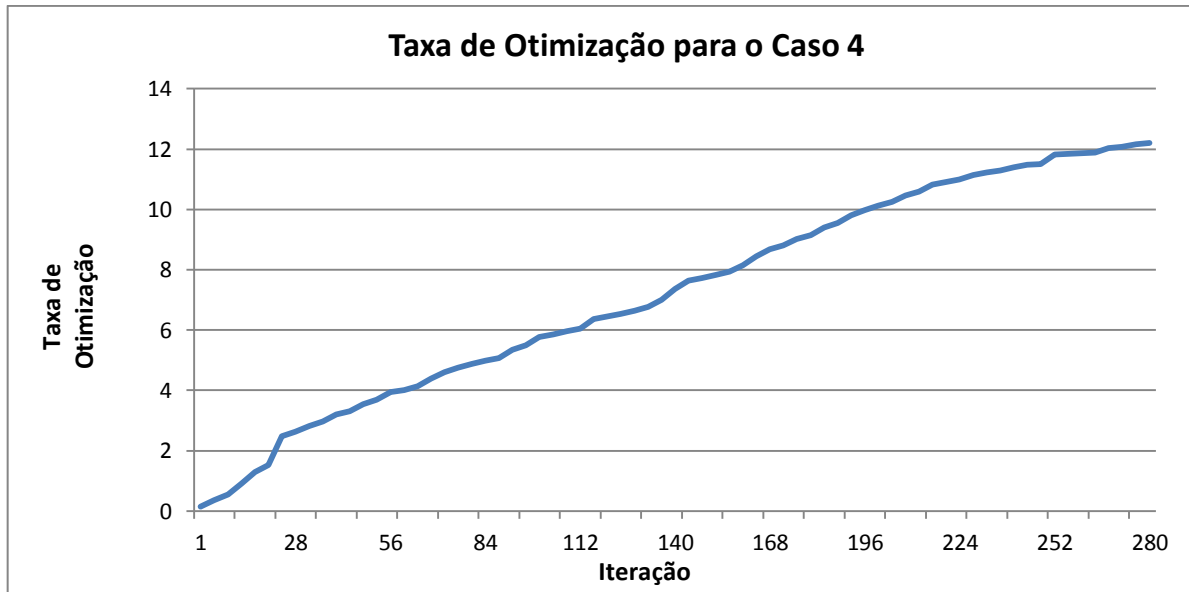


Figura 4.22: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do caso de carregamento 4.

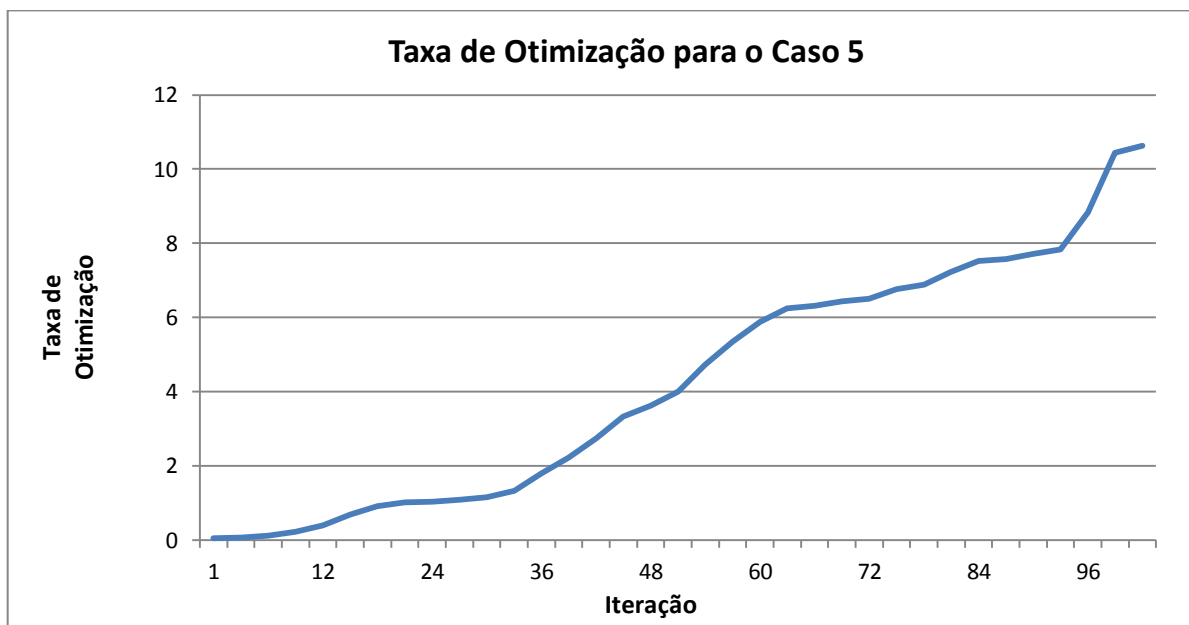


Figura 4.23: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do caso de carregamento 5.

#### 4.1.2 Aplicação da metodologia ESO envolvendo a combinação de análises dinâmicas considerando o afastamento entre duas frequências

Para a aplicação da metodologia ESO em problemas envolvendo a maximização do intervalo entre duas frequências naturais, deverá ser adotada a mesma chapa retangular apresentada pelo caso 5 com as suas respectivas condições de contorno. Neste exemplo, será considerado o afastamento entre a primeira e a segunda frequência natural da estrutura, ou seja,  $\omega_2 - \omega_1$ , onde o processo evolutivo deverá otimizar a estrutura de até que 50% de seu material inicial seja removido.

A concepção estrutural ótima, considerando essa nova aplicação, que aqui será chamada de “aplicação 2”, é ilustrada conforme Fig. 4.24, onde foi possível constatar um aumento de 3,2% no intervalo entre a primeira e a segunda frequência natural da estrutura.

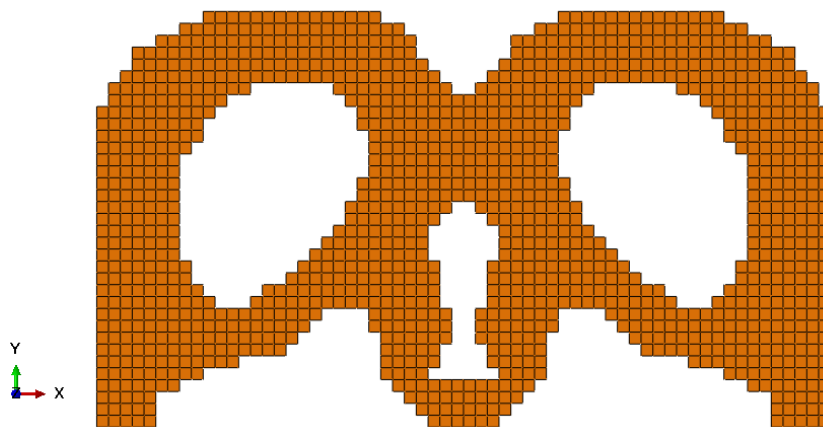


Figura 4.24: Topologia ótima para o caso de carregamento 5 da “aplicação 2”.

Assim, de forma a se obter uma topologia otimizada, considerando a maximização da primeira frequência natural e ao mesmo tempo o seu afastamento máximo em relação ao seu segundo modo, foi utilizada a técnica de combinação proposta, sendo sua concepção final demonstrada de acordo com a Fig. 4.25.

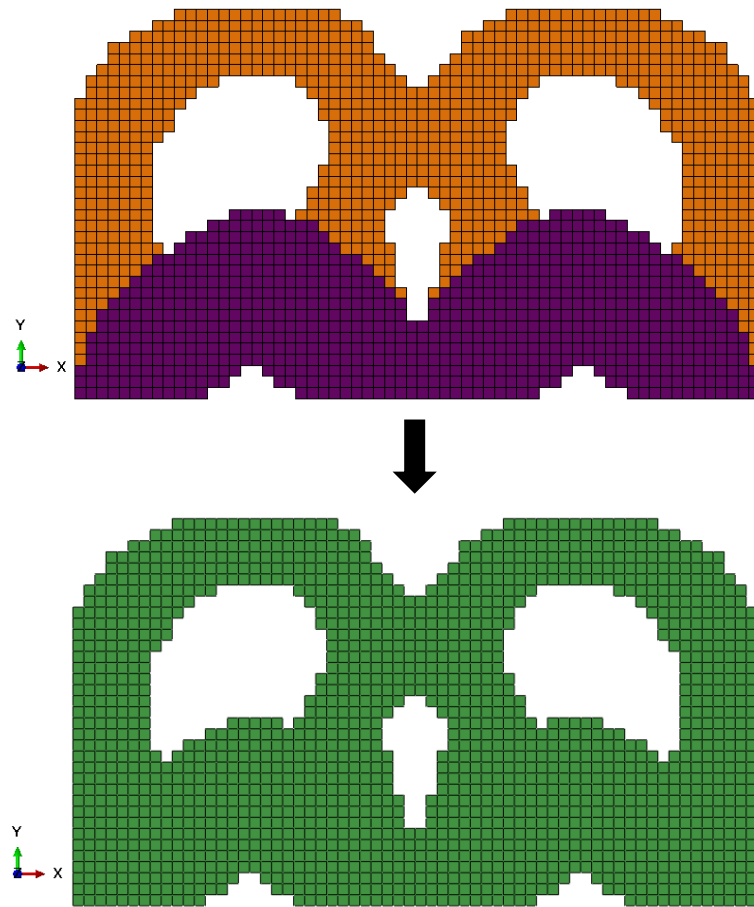


Figura 4.25: Topologia ótima para o caso de carregamento 5 com maximização da frequência fundamental, considerando seu afastamento máximo em relação a segunda frequência natural.

Esta aplicação também pode ser entendida como um problema de otimização multi-objetivo, onde dois objetivos distintos foram aplicados à mesma condição de carregamento da estrutura, sendo considerado, através da técnica de combinação utilizada, um peso de fator unitário para cada objetivo, isto é, cada objetivo possui a mesma proporção de importância no resultado final da otimização.

Comparando-se esta nova combinação, com a topologia obtida através da otimização considerando apenas a maximização da frequência fundamental, houve um aumento significativo no intervalo entre a primeira e a segunda frequência natural, passando esta diferença de 2Hz para 33Hz.

A taxa de otimização por iteração para o caso de carregamento 5 da “aplicação 2”, é apresentada pela Fig. 4.26. Neste caso, a taxa de otimização aplicada consiste em uma relação

entre fração volumétrica removida pelo inverso da diferença entre a primeira e a segunda frequência natural.

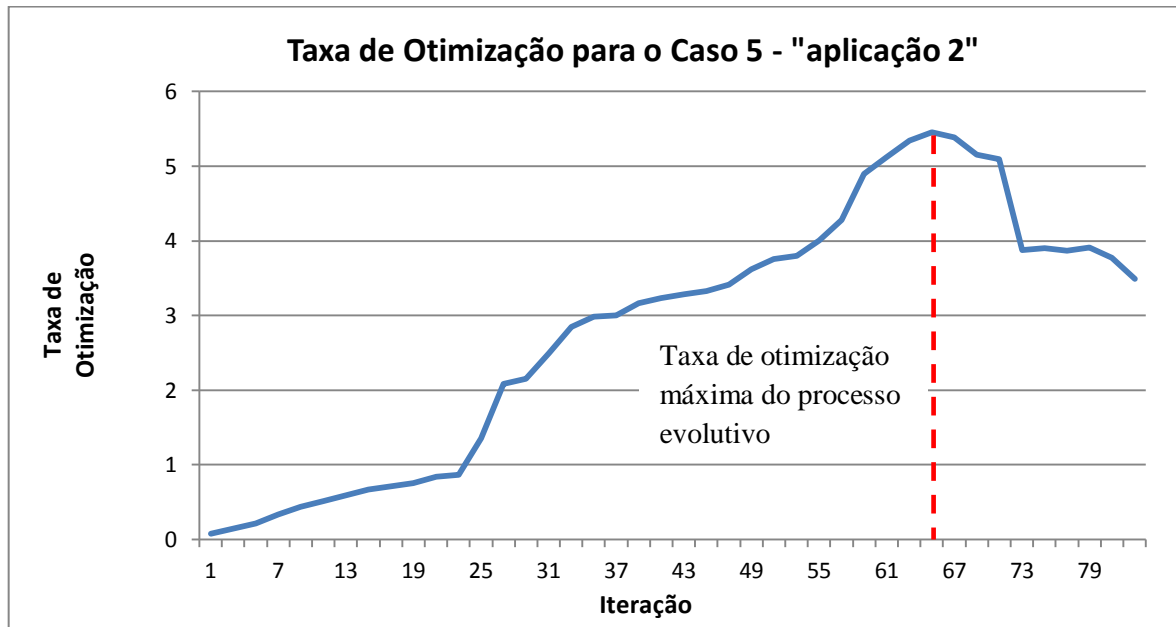


Figura 4.26: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do caso de carregamento 5 da “aplicação 2”.

Através do gráfico apresentado pela Fig. 4.26, é possível observar que, para esse caso de estudo, o ponto de ótimo máximo ocorre na iteração de número 65 com uma taxa de otimização em torno de 5,5, o que corresponde a uma fração volumétrica removida de aproximadamente 40%.

## 4.2 Influência da taxa de amortecimento no efeito da otimização de análises dinâmicas no domínio do tempo.

Nesta seção, será reproduzido um modelo similar ao apresentado por Jung e Gea (2004), que consiste na representação de uma viga esbelta bi-engastada em um domínio de projeto inicial retangular com dimensões 1,6m x 0,2m e espessura de 0,1m. As propriedades do material foram assumidas como módulo de elasticidade de 30MPa, densidade de  $1000\text{kg/m}^3$  e coeficiente de Poisson igual a 0,30.

No modelo estudado por Jung e Gea (2004) a estrutura foi submetida a uma ação correspondente a um carregamento estático, porém para se avaliar os objetivos traçados no presente trabalho, este exemplo deverá simular uma estrutura submetida a uma ação dinâmica no domínio do tempo, solicitada por um carregamento central de 300N durante um período de tempo de 0,01s. O domínio de projeto foi discretizado em uma malha de elementos finitos com 72x10 elementos do tipo M3D4 do Abaqus<sup>®</sup>, conforme mostra a Fig. 4.27.

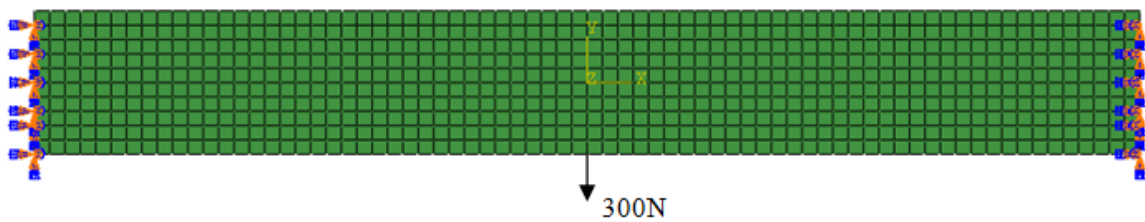


Figura 4.27: Domínio inicial de projeto para análise transiente com aplicação das condições de contorno.

Os parâmetros iniciais utilizados para a otimização foram:  $RR_0 = 10\%$  e  $ER = 0,5\%$ , com controle de cavidades para abertura de no máximo cinco furos durante o processo evolutivo. A alta razão de rejeição inicial foi adotada devido a não remoção de elementos para taxas menores, devido às características da malha utilizada e ao tipo de análise, sendo desta forma possível obter de um bom desempenho durante o processo de remoção dos elementos. Neste exemplo, a estrutura deverá ser otimizada até que uma fração volumétrica de 50% seja removida.

Para se avaliar a influência da taxa de amortecimento no efeito da otimização deverá ser executada dois tipos de análises, uma linear e outra com não linearidade física e geométrica, onde para ambos os casos será considerado um modelo sem amortecimento e outros dois com taxas de amortecimento distintas atribuídas ao material, sendo denominada taxa de amortecimento “A” ( $\zeta_A$ ) para valores de  $\alpha = 10$  e  $\beta = 0,0001$  e taxa de amortecimento “B” ( $\zeta_B$ ) para valores de  $\alpha = 20$  e  $\beta = 0,0002$ .

Então, de forma a se garantir que os coeficientes adotados correspondem ao caso sub-amortecido, que denota o movimento oscilatório, foi executada uma análise modal da

geometria inicial para a obtenção da primeira frequência natural da estrutura, sendo o seu primeiro modo de vibrar apresentado conforme Fig. 4.28.

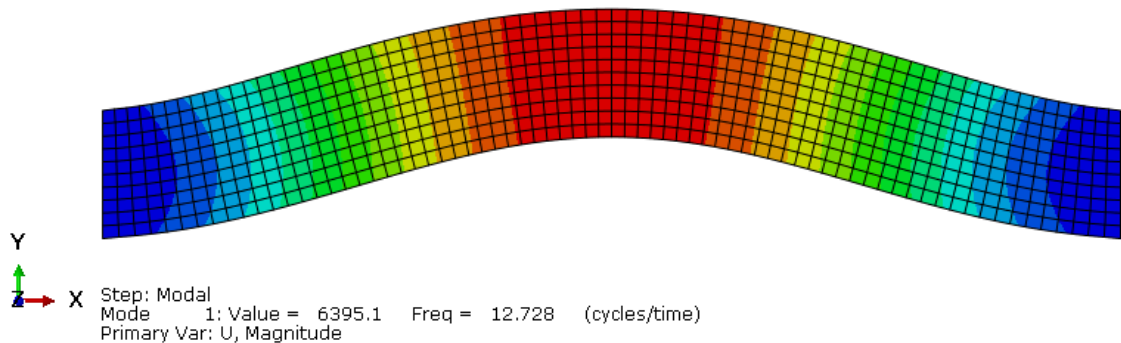


Figura 4.28: Primeiro modo de vibração da geometria inicial que deverá ser aplicada nos estudos de otimização para as taxas de amortecimento “A” e “B”.

Assim, o cálculo realizado para obtenção das respectivas taxas de amortecimento “A” e “B”, pode ser obtido conforme Eqs. (4.1) e (4.2) de acordo com as parcelas de massa e rigidez adotadas como parâmetros de análise e a frequência fundamental,  $\omega_n = 12,728\text{Hz}$ , obtida pela análise modal.

$$\zeta_A = \frac{10}{2 \cdot 12,728} + \frac{0,0001 \cdot 12,728}{2} = 0,393 \quad (4.1)$$

$$\zeta_B = \frac{20}{2 \cdot 12,728} + \frac{0,0002 \cdot 12,728}{2} = 0,787 \quad (4.2)$$

Logo é possível garantir que há movimento oscilatório, uma vez que as taxas de amortecimento encontradas estão no intervalo  $0 \leq \zeta < 1$ .

O método de cálculo utilizado para este tipo de análise corresponde a uma abordagem implícita de convergência, uma vez que o problema representado corresponde a um cenário de longa duração, se aproximando de uma solução quase-estática. Outro fator relevante é a utilização de um modelo simples, com poucos graus de liberdade, viabilizando a inversão da matriz que é proporcional à massa, amortecimento e rigidez.

### 4.2.1 Análise linear elástica

No exemplo de otimização da estrutura com comportamento linear elástico, será considerado três modelos, conforme já mencionado anteriormente, sendo dois deles com taxas de amortecimento distintas “A” e “B” e o outro sem aplicação da taxa de amortecimento.

Através da Fig. 4.29 é possível verificar a topologia final ótima obtida para a análise linear elástica sem taxa de amortecimento aplicada ao material.

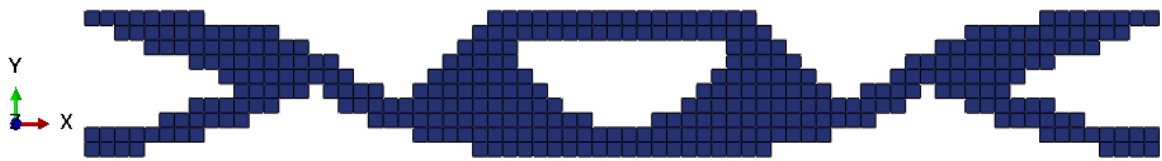


Figura 4.29: Topologia ótima para a análise linear elástica sem taxa de amortecimento.

A concepção estrutural ótima obtida pela abordagem ESO correspondente a este tipo de análise se aproxima da solução obtida por Jung e Gea (2004) mesmo em condições de carregamento diferentes, e está apresentada na Fig. 4.30.



Figura 4.30: Topologia ótima obtida pela solução de Jung e Gea (2004) para a análise linear elástica em condição estática de carregamento.

Fonte: Adaptado de Jung e Gea (2004)

Através da Fig. 4.31 é possível verificar o efeito do deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo como uma curva senoidal, uma vez que não há influência do amortecimento.



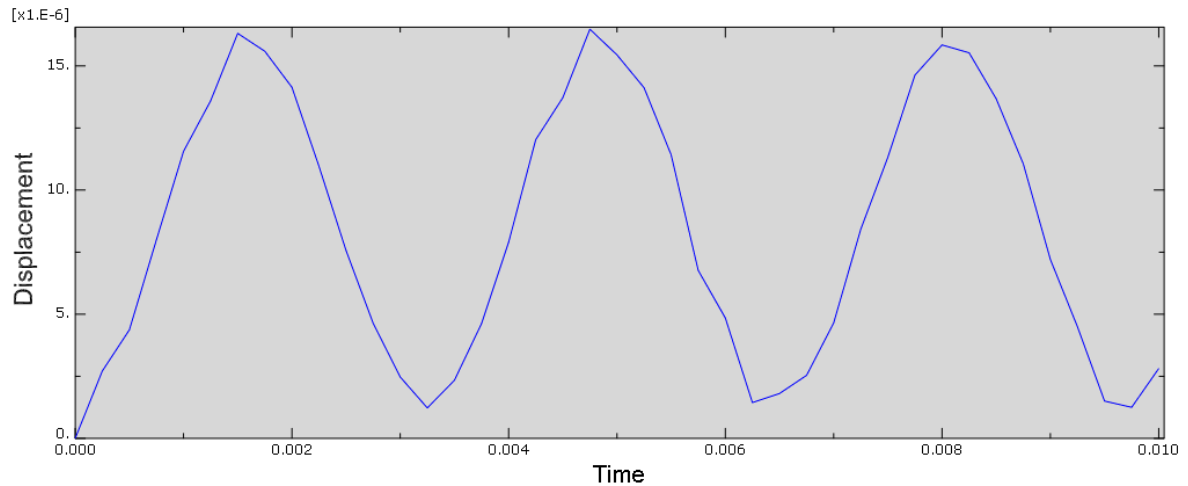


Figura 4.31: Deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada do modelo linear elástico sem amortecimento.

Para o caso envolvendo a aplicação da taxa de amortecimento “A”, a topologia ótima obtida é apresentada conforme Fig. 4.32.

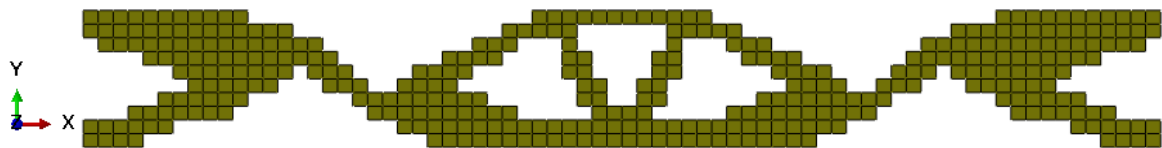


Figura 4.32: Topologia ótima para a análise linear elástica com taxa de amortecimento “A”.

Para validar o resultado obtido pela otimização realizada através da metodologia ESO considerando a taxa de amortecimento “A”, foi executado um estudo de otimização complementar no software comercial Tosca<sup>®</sup> através da metodologia *Controller*, que assim como na metodologia ESO penaliza os elementos de forma binária, não aplicando densidades intermediárias para a penalização dos elementos menos eficientes. A implementação desta metodologia é baseada no artigo de Sigmund (2001), onde a distribuição do material é realizada de acordo com a energia de deformação total do modelo, e por isso utiliza o volume como restrição e a minimização do *compliance* como objetivo.

A topologia final obtida por esta solução é ilustrada conforme a Fig. 4.33.



Figura 4.33: Topologia ótima obtida pelo Tosca® para a análise linear elástica com taxa de amortecimento “A”.

É possível verificar através da solução obtida pela metodologia *Controller* do software Tosca® uma grande semelhança em relação à solução obtida pela metodologia ESO, assegurando assim o resultado da topologia final da otimização executada pelo *script*.

Através do módulo *viewer* do software Tosca®, é possível verificar o comportamento da estrutura em relação aos máximos níveis de tensões computadas ao longo do processo iterativo de otimização, sendo esta representação demonstrada conforme Fig. 4.34.



Figura 4.34: Níveis máximos de tensões computados ao longo do processo iterativo de otimização para o modelo linear elástico com amortecimento “A”.

Vale destacar que as tensões ao longo do processo iterativo não ocorrem necessariamente no mesmo elemento, proporcionando um aspecto global à otimização. Neste caso de análise as tensões se concentraram em regiões próximas as de aplicação de carga.

A Fig. 4.35 mostra o efeito do deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada correspondente a taxa de amortecimento “A”. Logo é possível verificar uma suavização da curva devido ao efeito do amortecimento, minimizando o movimento oscilatório.

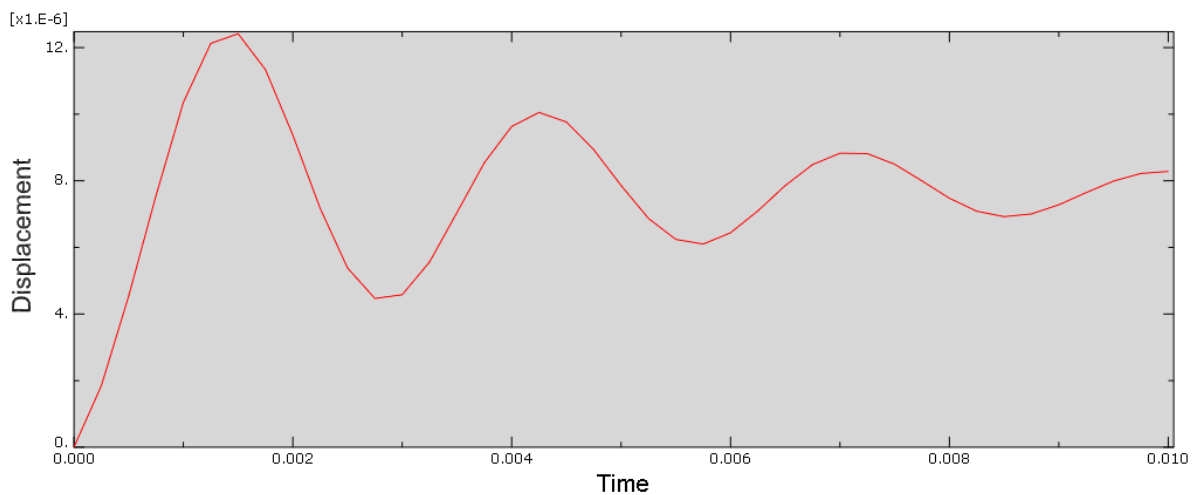


Figura 4.35: Deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada do modelo linear elástico com amortecimento “A”.

Para o caso envolvendo a aplicação da taxa de amortecimento “B”, a topologia ótima obtida é apresentada conforme Fig. 4.36.

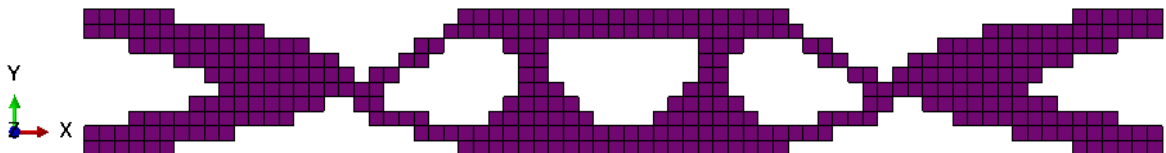


Figura 4.36: Topologia ótima para a análise linear elástica com taxa de amortecimento “B”.

Da mesma forma que foi realizada para a otimização do modelo considerando a taxa de amortecimento “A”, um estudo de otimização complementar foi executado para o modelo considerando a taxa de amortecimento “B” através do software Tosca<sup>®</sup> para a validação do resultado obtido pela metodologia ESO, conforme ilustra a Fig. 4.37.

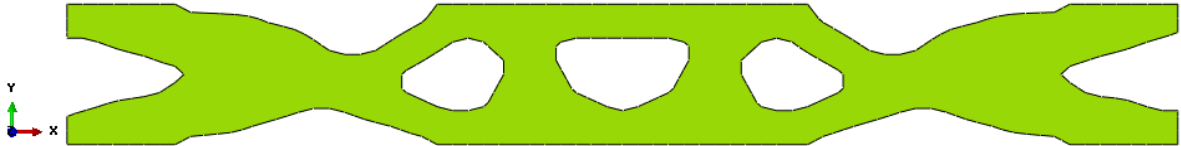


Figura 4.37: Topologia ótima obtida pelo Tosca<sup>®</sup> para a análise linear elástica com taxa de amortecimento “B”.

A solução obtida para o modelo considerando a taxa de amortecimento “B” também apresentou grande semelhança entre as duas abordagens, assegurando da mesma maneira o resultado da topologia final da otimização executada pelo *script*.

O comportamento da estrutura em relação aos máximos níveis de tensões computadas ao longo do processo iterativo de otimização é representado conforme Fig. 4.38.



Figura 4.38: Níveis máximos de tensões computados ao longo do processo iterativo de otimização para o modelo linear elástico com amortecimento “B”.

A Fig. 4.39 mostra o efeito do deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada correspondente a taxa de amortecimento “B”. Para esta condição, é possível perceber uma diminuição do movimento oscilatório em relação ao anterior, pois houve um aumento significativo da taxa de amortecimento.

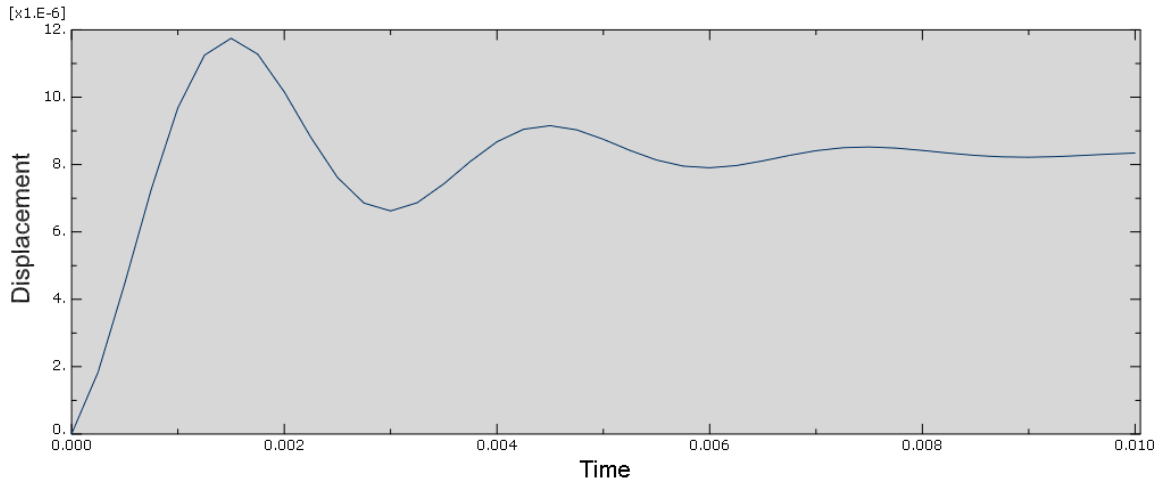


Figura 4.39: Deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada do modelo linear elástico com amortecimento “B”.

De forma a se comparar os resultados obtidos para a análise dinâmica ao longo do tempo com um modelo estático sem amortecimento, tem-se o comportamento da geometria otimizada para a análise estática do modelo linear sem amortecimento apresentado conforme Fig. 4.40.

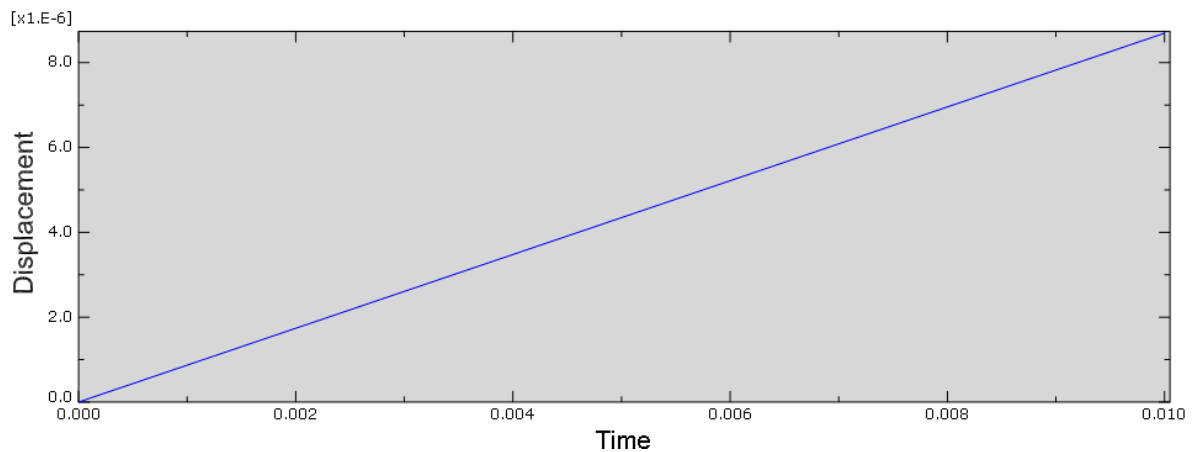


Figura 4.40: Deslocamento do nó de aplicação da carga para análise estática da geometria otimizada do modelo linear elástico sem amortecimento.

É interessante verificar que a resposta dinâmica tanto para a taxa de amortecimento “A” quanto para a taxa de amortecimento “B”, estabiliza próximo ao deslocamento de  $8E-6$ , o que corresponde ao mesmo deslocamento da análise linear estática sem amortecimento durante a aplicação da carga.

De acordo com as diferentes soluções obtidas para os modelos com as respectivas taxas de amortecimento “A” e “B”, é possível considerar uma resposta baseando-se na combinação das topologias finais de cada modelo, conforme apresenta a Fig. 4.41.

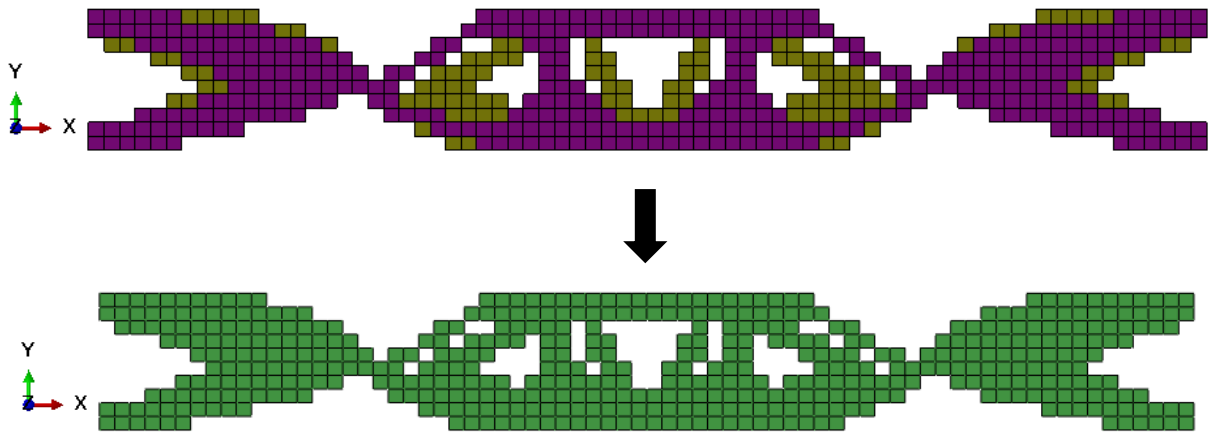


Figura 4.41: Topologia ótima para a análise linear elástica considerando a combinação do efeito da taxa de amortecimento “A” com “B”.

Conforme já mencionado anteriormente, é importante analisar a taxa de otimização por iteração conforme apresentado nas curvas da Fig. 4.42 para as três condições de amortecimento abordadas para o modelo linear elástico, desta forma é possível assegurar que o processo evolucionário está otimizando a estrutura.

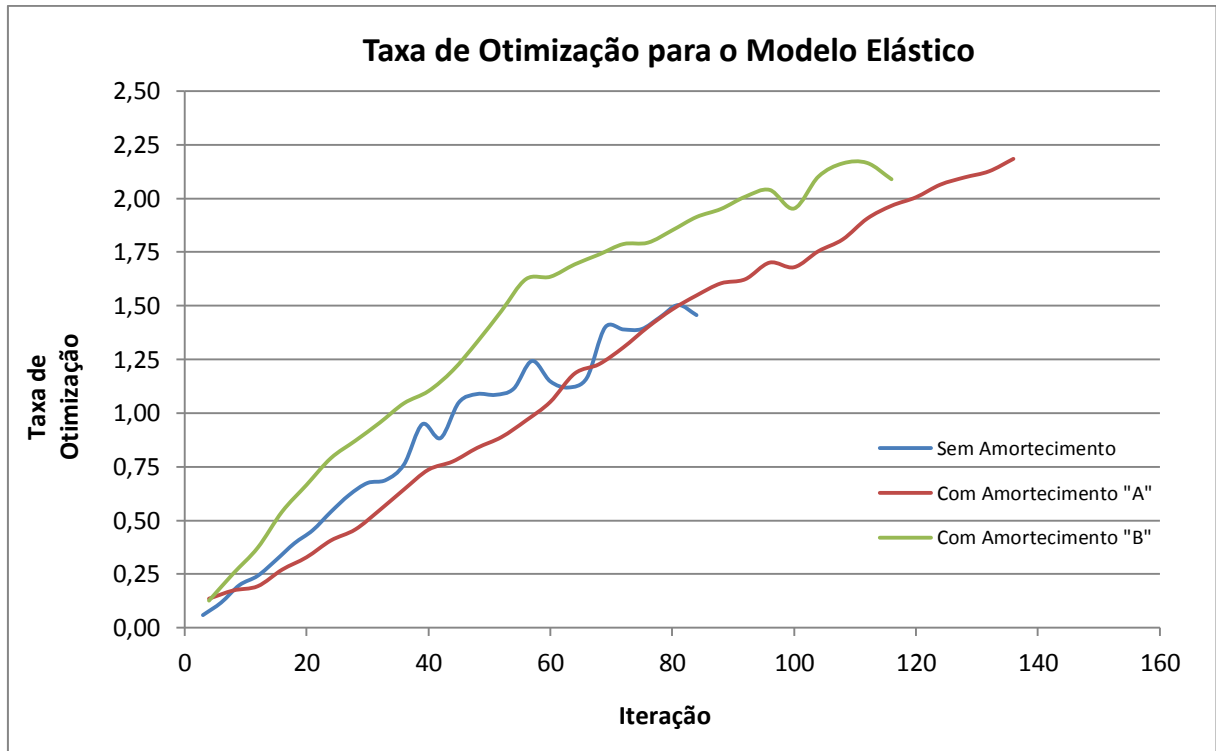


Figura 4.42: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do modelo linear elástico.

Uma maneira muito interessante de se avaliar se o processo de otimização foi capaz de gerar uma estrutura mais homogênea em relação aos níveis de tensão, é considerar uma relação entre a média geral das tensões de todos os elementos remanescentes pela máxima tensão de toda a estrutura para cada fração de volume removida.

Desta forma foi criado aqui nesta seção, um índice de uniformidade de tensões por fração de volume removida, conforme mostra Fig. 4.43 para as três condições de amortecimento abordadas para o modelo linear elástico. Quanto maior for esse índice, menores serão as variações dos níveis de tensões e, portanto sua distribuição se dará de forma mais homogênea.



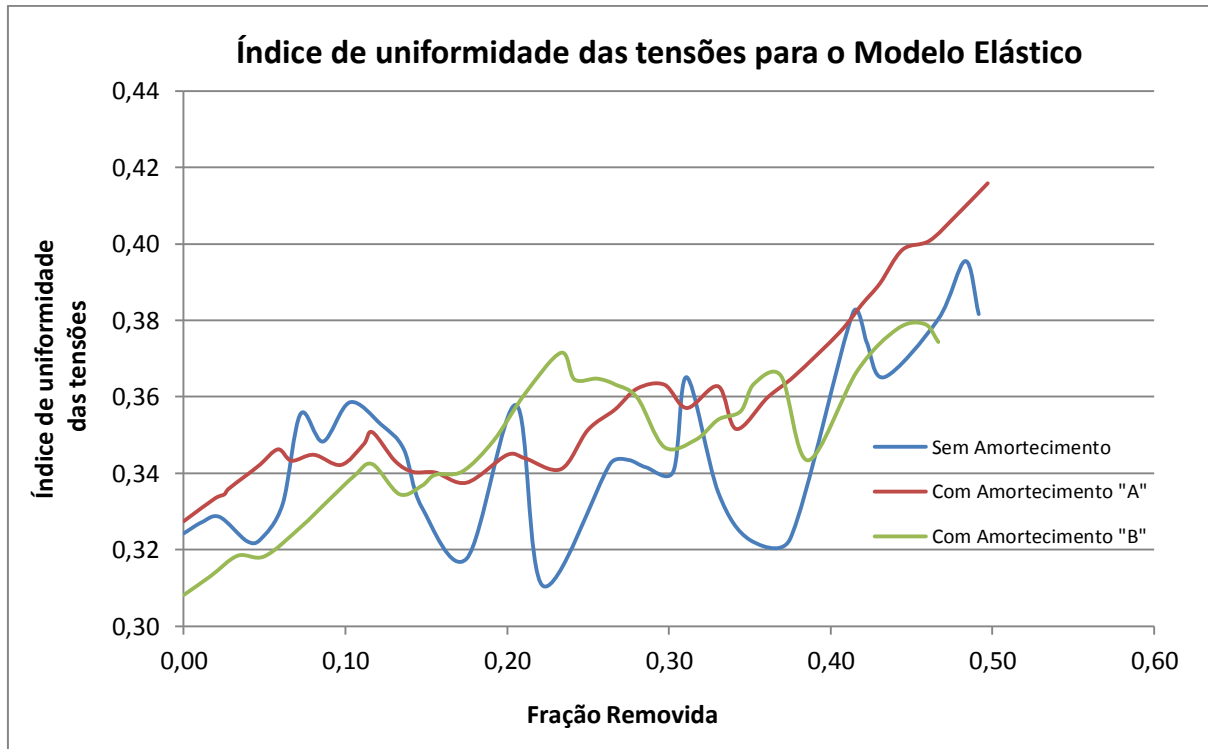


Figura 4.43: Índice de uniformidade de tensões por fração de volume removida para o modelo linear elástico.

Através dos gráficos é possível verificar os melhores estágios de otimização para cada configuração de amortecimento considerada, sendo que as respostas dos gráficos correspondem entre si, apresentando os melhores pontos de otimização em iterações e frações volumétricas equivalentes.

#### 4.2.2 Análise com não linearidade física e geométrica

Para o exemplo de otimização da estrutura com comportamento não linear, foi adotado um modelo com não linearidade geométrica em regime elastoplástico que será simulado através do modelo de escoamento de von Mises, considerando um material com encruamento isotrópico linear. As propriedades elastoplásticas foram assumidas de maneira genérica, onde a tensão de escoamento foi representada por  $\sigma_y = 180\text{KPa}$  e o módulo de encruamento sendo representado como  $E^h = 100\text{KPa}$ . Da mesma forma que foi apresentado para o exemplo com comportamento linear, serão considerados três modelos, sendo dois deles com taxas de amortecimento distintas “A” e “B” e o outro sem aplicação da taxa de amortecimento.

Através da Fig. 4.44 é possível verificar a topologia final ótima obtida para a análise com comportamento não linear sem taxa de amortecimento aplicada ao material.

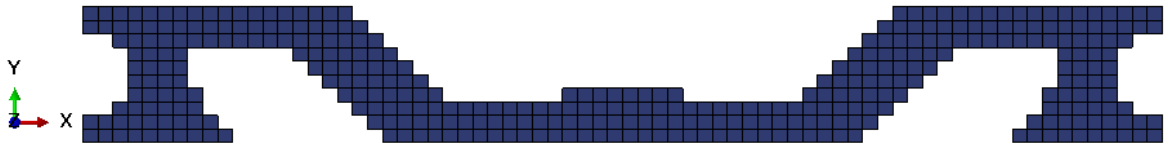


Figura 4.44: Topologia ótima para a análise não linear sem taxa de amortecimento.

A concepção estrutural ótima obtida pela abordagem ESO correspondente à análise não linear também se aproxima da solução obtida por Jung e Gea (2004) mesmo em condições de carregamento diferentes, e está apresentada na Fig. 4.45.



Figura 4.45: Topologia ótima obtida pela solução de Jung e Gea (2004) para a análise não linear em condição estática de carregamento.

Fonte: Adaptado de Jung e Gea (2004)

Através da Fig. 4.46 é possível verificar uma alteração significativa em relação ao modelo linear no efeito do deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo, devido à influência das propriedades elastoplásticas durante a fase de escoamento.

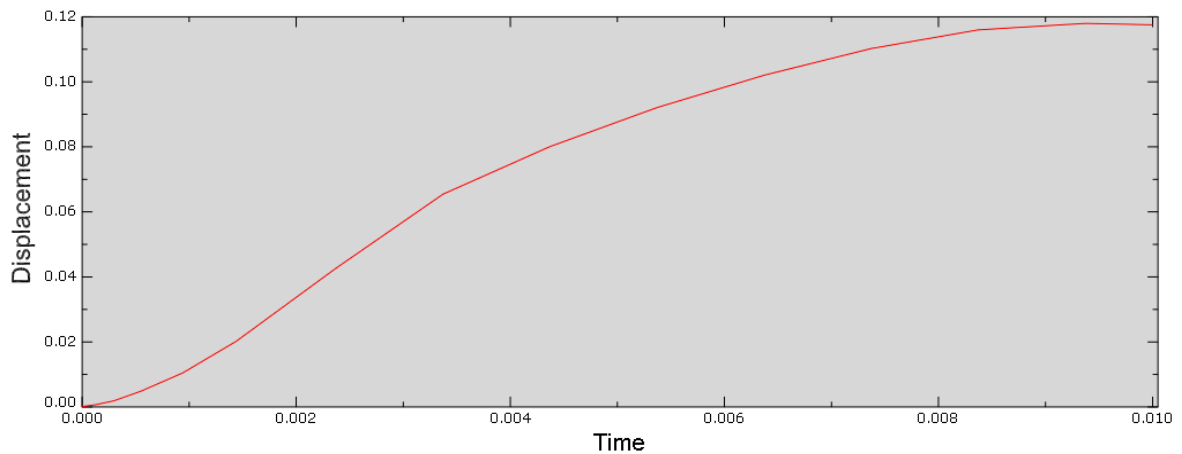


Figura 4.46: Deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada do modelo não linear sem amortecimento.

Para o caso envolvendo a aplicação da taxa de amortecimento “A”, a topologia ótima obtida é apresentada conforme Fig. 4.47.

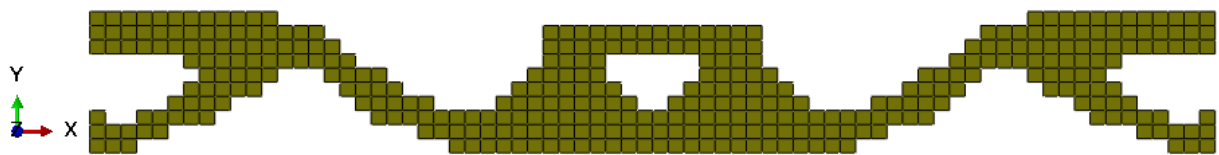


Figura 4.47: Topologia ótima para a análise não linear com taxa de amortecimento “A”.

Assim como no exemplo do modelo anterior, para validar o resultado obtido pela otimização realizada através da metodologia ESO considerando a taxa de amortecimento “A”, foi executado um estudo de otimização complementar no software comercial Tosca<sup>®</sup> através da metodologia *Controller*. A topologia final obtida por esta solução é ilustrada conforme a Fig. 4.48.

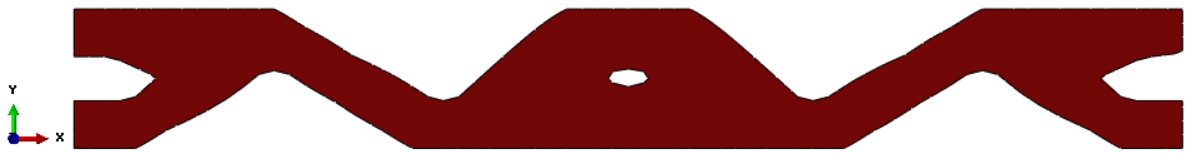


Figura 4.48: Topologia ótima obtida pelo Tosca® para a análise não linear com taxa de amortecimento “A”.

Para este tipo de análise também é possível verificar através da solução obtida pela metodologia *Controller* do software Tosca® uma grande semelhança em relação à solução obtida pela metodologia ESO, assegurando assim o resultado da topologia final da otimização executada pelo *script*.

Através do módulo *viewer* do software Tosca®, é possível verificar o comportamento da estrutura em relação aos máximos níveis de tensões computadas ao longo do processo iterativo de otimização, sendo esta representação demonstrada conforme Fig. 4.49.

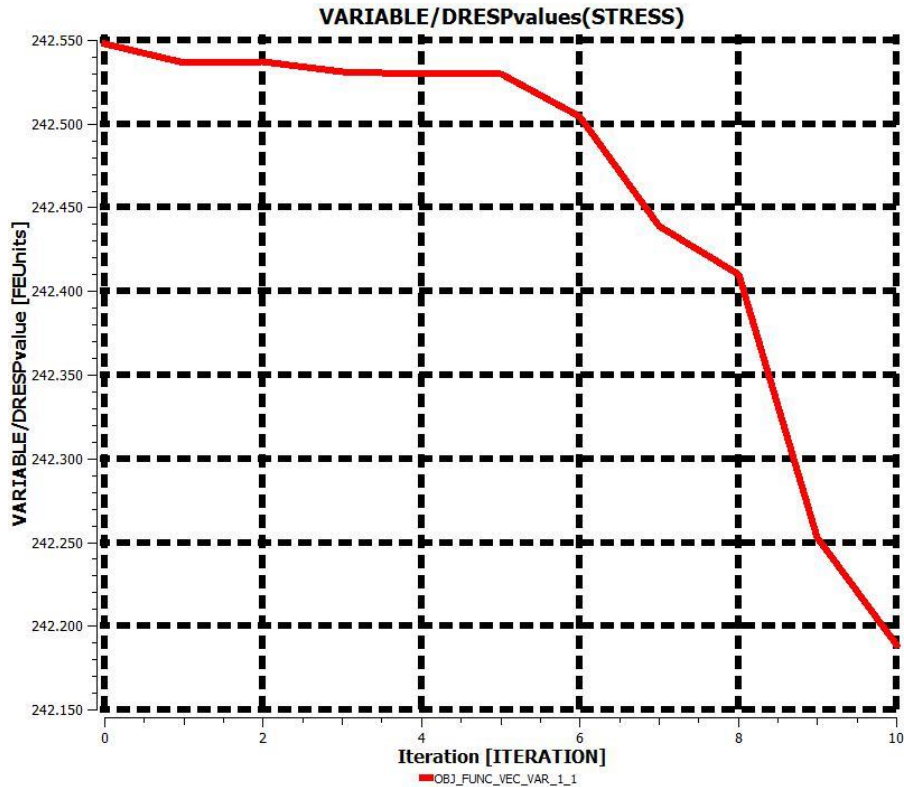


Figura 4.49: Níveis máximos de tensões computados ao longo do processo iterativo de otimização para o modelo não linear com amortecimento “A”.

A Fig. 4.50 mostra o efeito do deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada correspondente a taxa de amortecimento “A”. Logo é possível verificar uma minimização dos deslocamentos devido ao efeito do amortecimento.

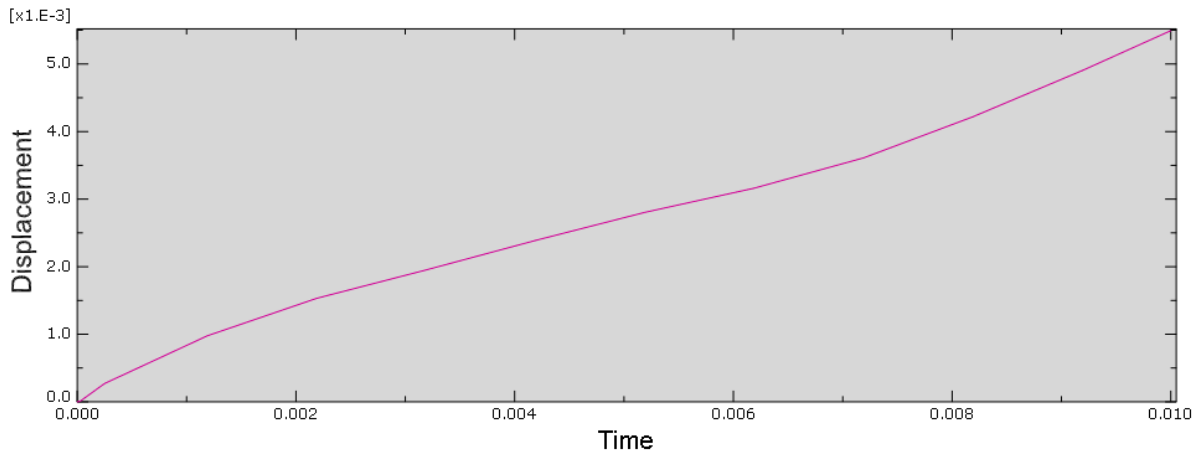


Figura 4.50: Deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada do modelo não linear com amortecimento “A”.

Para o caso envolvendo a aplicação da taxa de amortecimento “B”, a topologia ótima obtida é apresentada conforme Fig. 4.51.

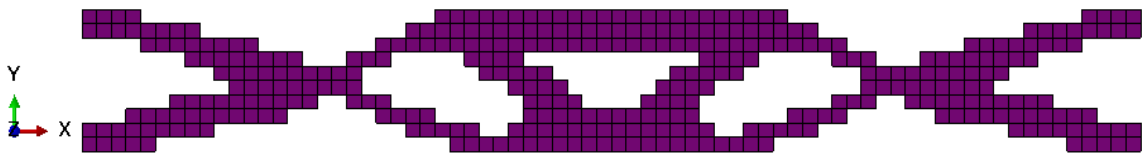


Figura 4.51: Topologia ótima para a análise não linear com taxa de amortecimento “B”.

Da mesma forma que foi realizada para a otimização do modelo considerando a taxa de amortecimento “A”, um estudo de otimização complementar foi executado para o modelo considerando a taxa de amortecimento “B” através do software Tosca<sup>®</sup> para a validação do resultado obtido pela metodologia ESO, conforme ilustra a Fig. 4.52.



Figura 4.52: Topologia ótima obtida pelo Tosca<sup>®</sup> para a análise não linear com taxa de amortecimento “B”.

A solução obtida para o modelo considerando a taxa de amortecimento “B” também apresentou grande semelhança entre as duas abordagens, assegurando da mesma maneira o resultado da topologia final da otimização executada pelo *script*.

O comportamento da estrutura em relação aos máximos níveis de tensões computadas ao longo do processo iterativo de otimização é representado conforme Fig. 4.53, onde é possível perceber um pequeno aumento ao longo do processo iterativo.

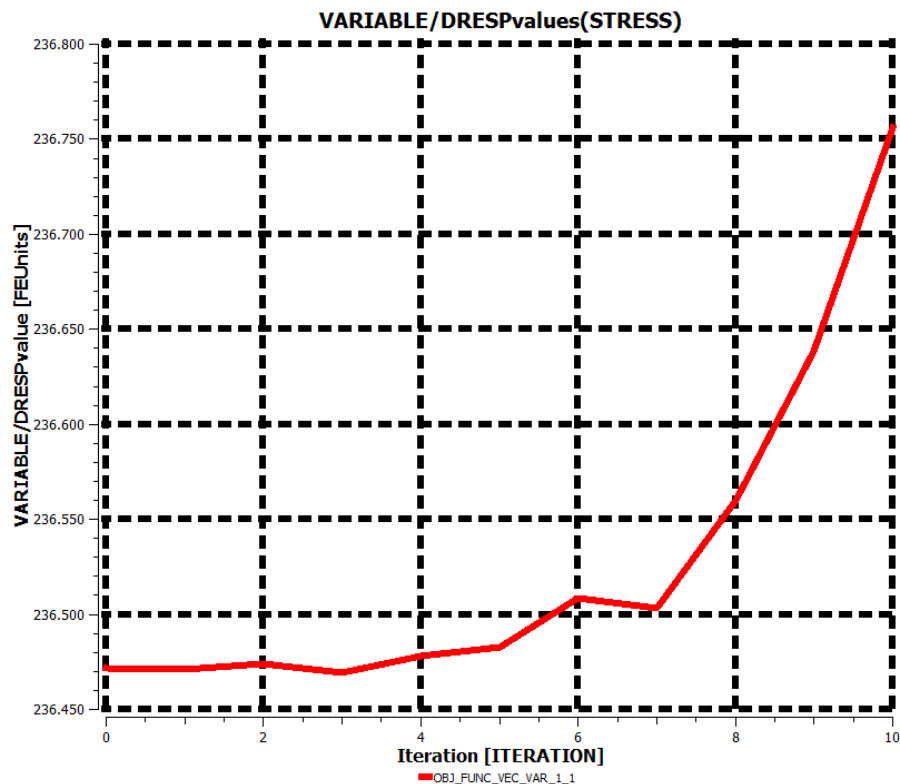


Figura 4.53: Níveis máximos de tensões computados ao longo do processo iterativo de otimização para o modelo não linear com amortecimento “B”.

A Fig. 4.54 mostra o efeito do deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada correspondente a taxa de amortecimento “B”. Para esta condição, é possível perceber um pequeno aumento do deslocamento em relação ao anterior mesmo aumentando significativamente a taxa de amortecimento.

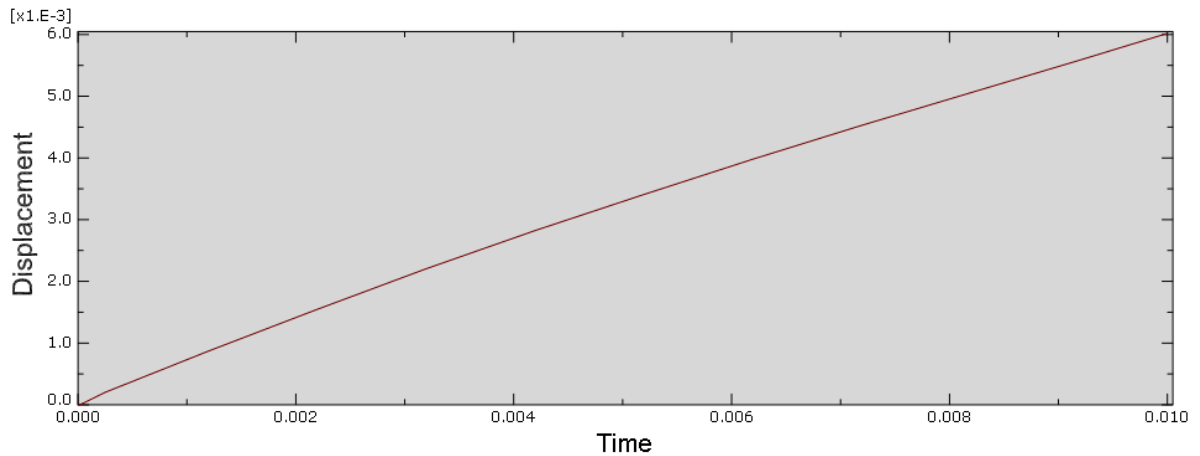


Figura 4.54: Deslocamento do nó de aplicação da carga ao longo do tempo para a geometria otimizada do modelo não linear com amortecimento “B”.

Assim como no modelo linear, foi obtido o comportamento para análise estática da geometria otimizada do modelo não linear sem amortecimento apresentado conforme Fig. 4.55.

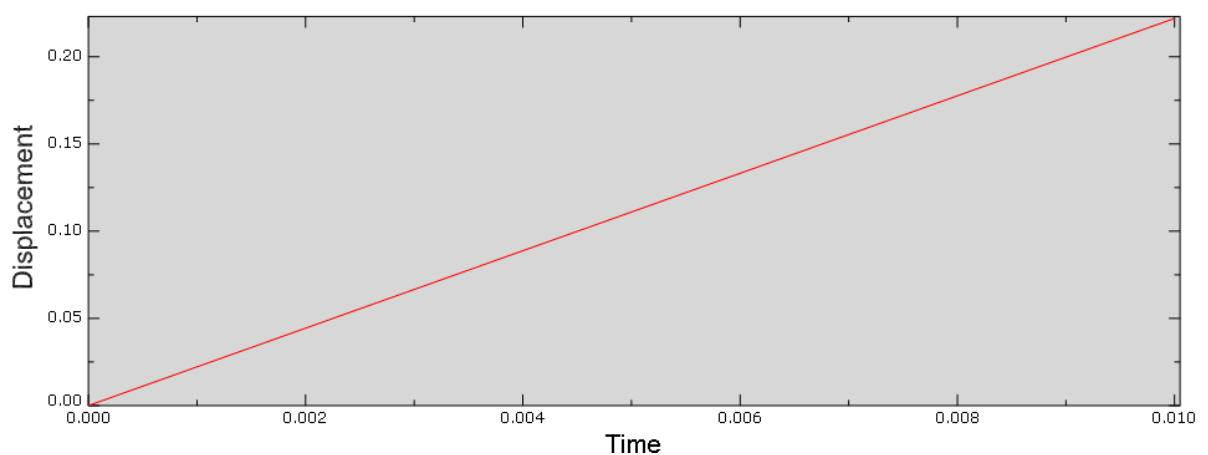


Figura 4.55: Deslocamento do nó de aplicação da carga para análise estática da geometria otimizada do modelo não linear elástico sem amortecimento.

É importante verificar que conforme a taxa de amortecimento aumenta para um modelo elastoplástico, mais próximo de uma resposta estática o modelo dinâmico apresenta, porém com menores deslocamentos, devido à influência do amortecimento.

De acordo com as diferentes soluções obtidas para os modelos com as respectivas taxas de amortecimento “A” e “B”, é possível considerar uma resposta baseando-se na combinação das topologias finais de cada modelo, conforme apresenta a Fig. 4.56.

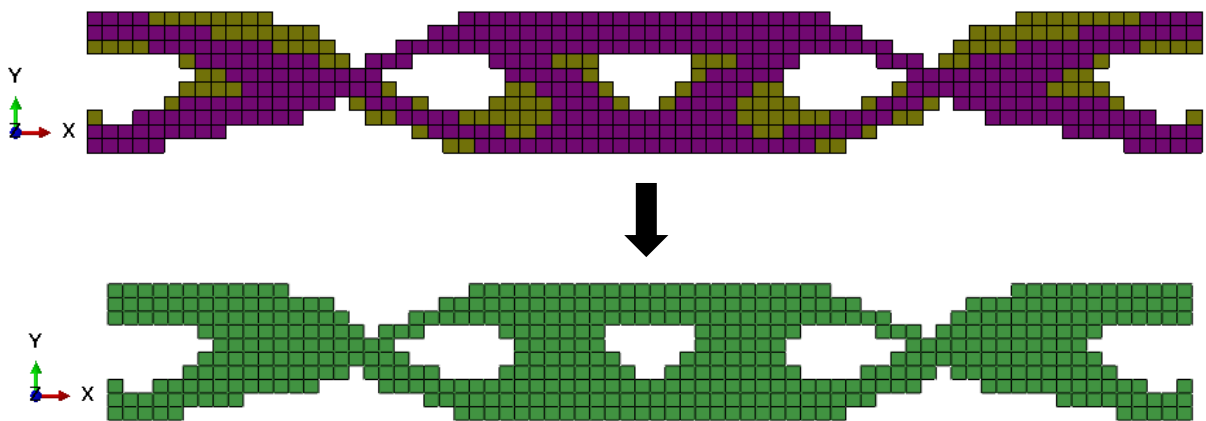


Figura 4.56: Topologia ótima para a análise não linear considerando a combinação do efeito da taxa de amortecimento “A” com “B”.

Conforme já mencionado anteriormente, é importante analisar a taxa de otimização por iteração conforme apresentado nas curvas da Fig. 4.57 para as três condições de amortecimento abordadas para o modelo não linear, desta forma é possível assegurar que o processo evolucionário está otimizando a estrutura.



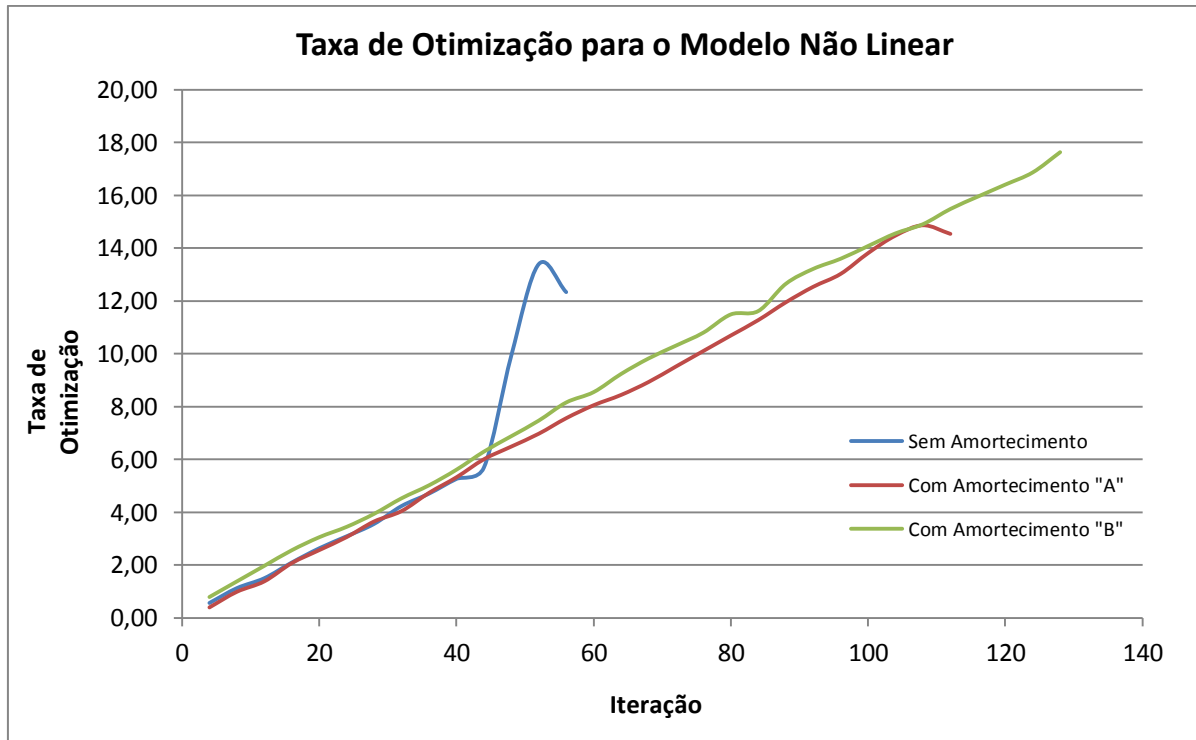


Figura 4.57: Taxa de otimização do processo evolucionário para cada iteração do modelo não linear.

Para a condição sem amortecimento houve um aumento repentino da taxa de otimização próxima à iteração 44, isso se deve ao fato de as tensões não se alterarem significativamente durante o processo de remoção, que se tornou mais agressivo após ser adicionada a razão de evolução  $ER$  a razão de rejeição referente à iteração 44.

Desta maneira, conforme realizado para o exemplo de modelo linear, o índice de uniformidade de tensões por fração de volume removida é apresentado conforme mostra a Fig. 4.58 para as três condições de amortecimento abordadas para o modelo não linear.

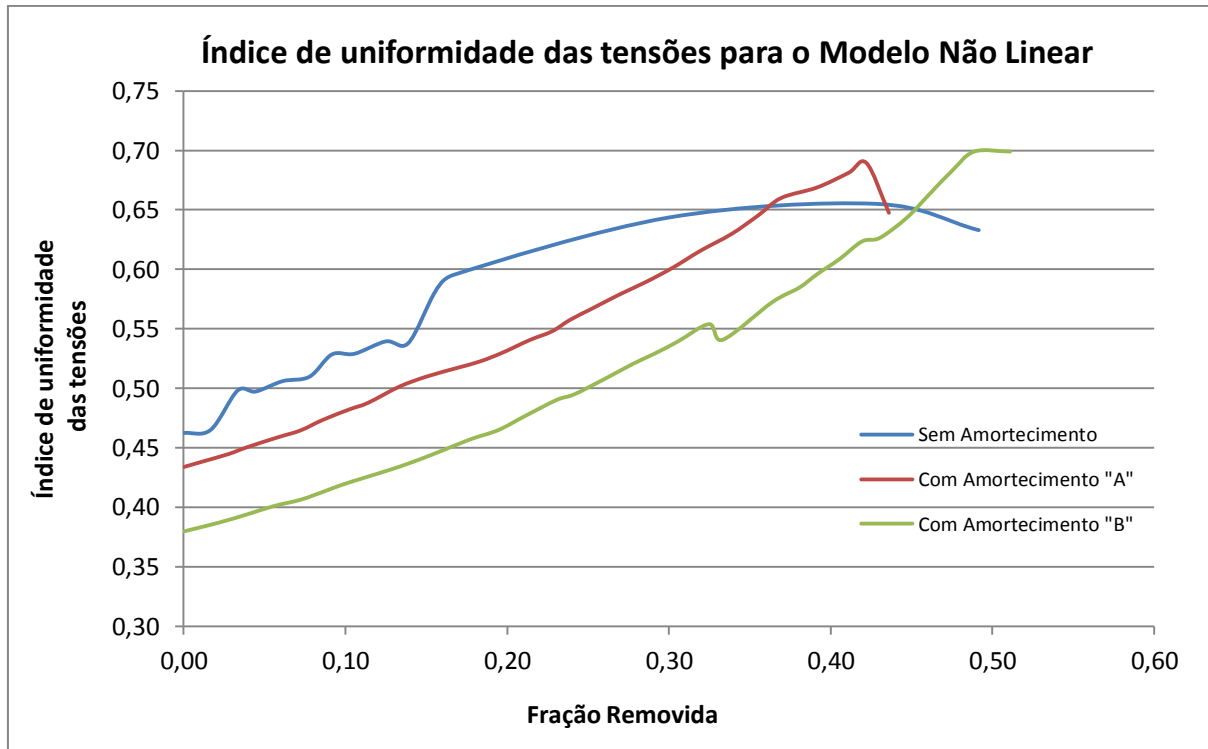


Figura 4.58: Índice de uniformidade de tensões por fração de volume removida para o modelo não linear.

### 4.3 Aplicação da metodologia ESO em componentes industriais.

A aplicação da ferramenta de otimização estrutural em componentes industriais se deve ao fato da grande influência do custo final do produto em decisões referentes à manufatura e à montagem. O projeto é o primeiro passo na fabricação, iniciado com os primeiros desenhos de peças e conjuntos enviados à oficina de protótipos. Por isto a maioria das decisões devem ser definidas ainda na fase inicial de projeto, atribuindo ao engenheiro a responsabilidade de obter produtos otimizados para minimizar os custos referentes ao ciclo de modificações do projeto.

Desta forma, esta seção foi criada com o intuito de demonstrar a aplicação da metodologia ESO em componentes industrialmente manufaturáveis, mostrando que sua abordagem não se restringe somente às chapas convencionais encontradas na literatura.

Serão apresentados dois componentes de fixação com processos de fabricação distintos, sendo que um corresponde a um suporte de chassi veicular constituído por uma chapa de aço

laminada, e o outro corresponde a um suporte de televisão articulado que pode ser obtido por fundição ou forjamento.

#### 4.3.1 Otimização estrutural de um suporte de chassi veicular

Para a resolução do processo de otimização deste estudo, foi adotada a geometria inicial do componente mecânico, discretizada em uma malha de elementos finitos com 1962 elementos do tipo STRI65 do Abaqus<sup>®</sup>. O material adotado possui características de um aço estrutural e, portanto, as propriedades foram assumidas como módulo de elasticidade de 210GPa, densidade de 7850kg/m<sup>3</sup> e coeficiente de Poisson de 0,30. O processo evolutivo deverá otimizar a estrutura de até que 25% de seu material inicial seja removido.

Os parâmetros iniciais utilizados para a otimização foram:  $RR_0 = 1\%$  e  $ER = 0,5\%$ , com controle de cavidades para abertura de no máximo três furos durante o processo evolutivo.

O exemplo a ser demonstrado consiste em uma análise linear estática de um suporte metálico utilizado em chassi de veículos comerciais, sendo solicitado por dois pontos de ação de força concentrada de 1000N em cada ponto por direção e fixado em toda sua extremidade inferior, conforme Fig. 4.59.

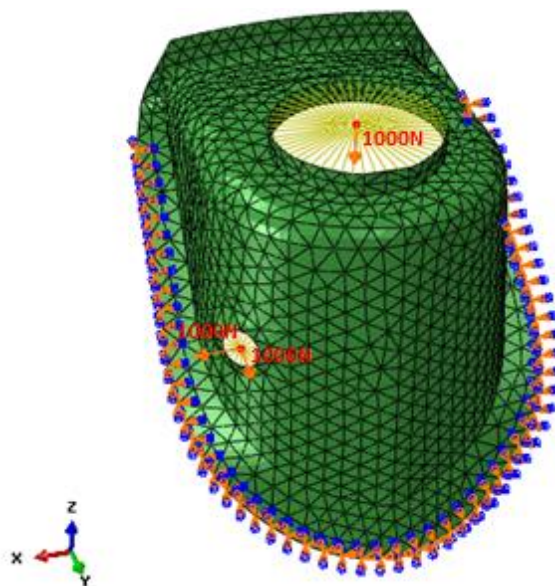


Figura 4.59: Domínio inicial de projeto do suporte de chassi veicular com aplicação das condições de contorno.

Através da Fig. 4.60 é possível verificar a topologia final ótima obtida para a análise linear estática do suporte de chassi veicular.

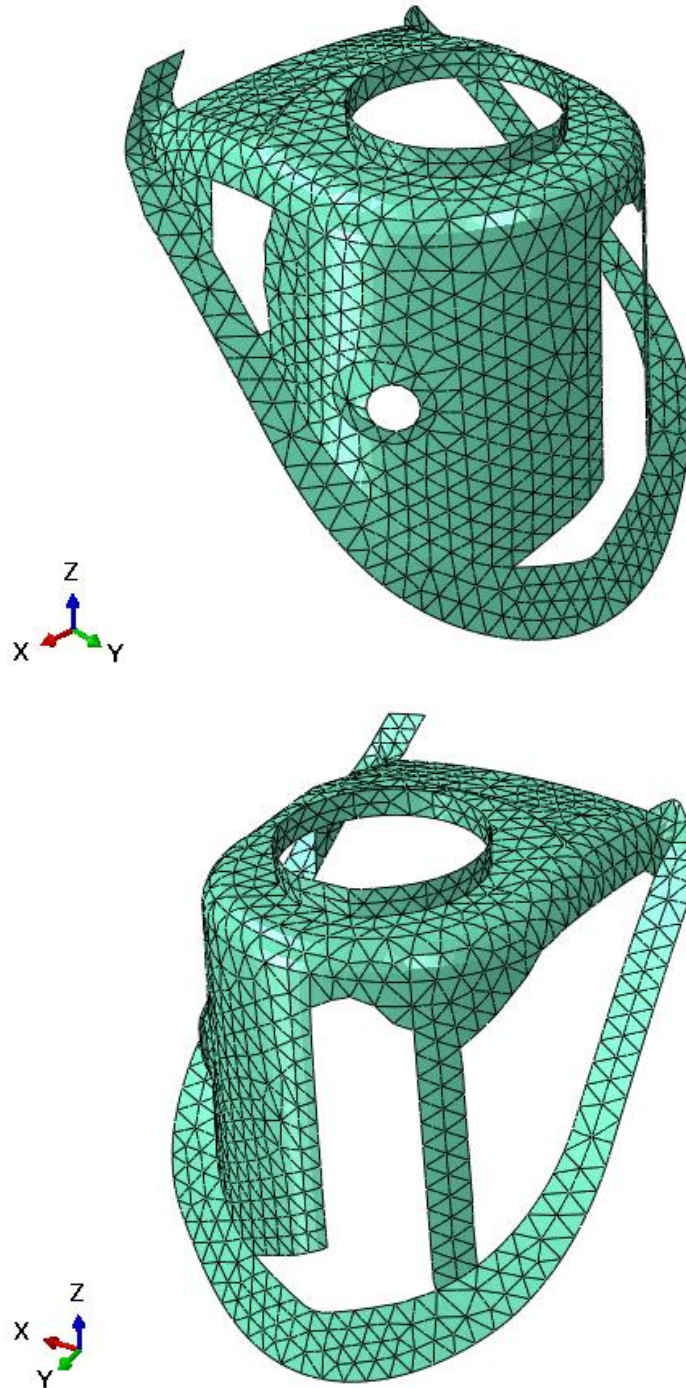


Figura 4.60: Topologia ótima para a análise linear estática do suporte de chassi veicular.

Para avaliar o comportamento mecânico do componente em relação ao resultado final da otimização, foi realizada uma comparação dos níveis de tensões de von Mises antes e após a aplicação do processo evolutivo, conforme ilustrado respectivamente pelas Figs. 4.61 e 4.62.

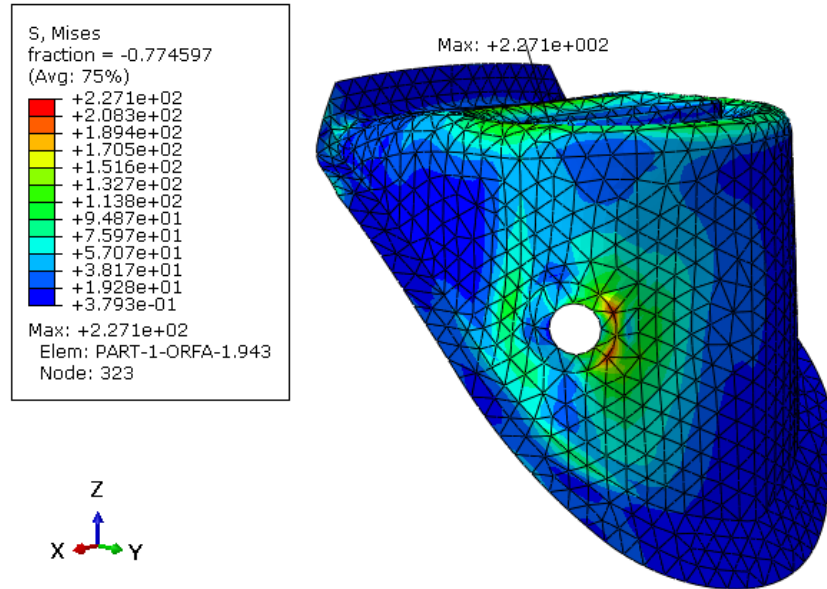


Figura 4.61: Comportamento mecânico em relação aos níveis de tensões da geometria inicial do suporte de chassi veicular.

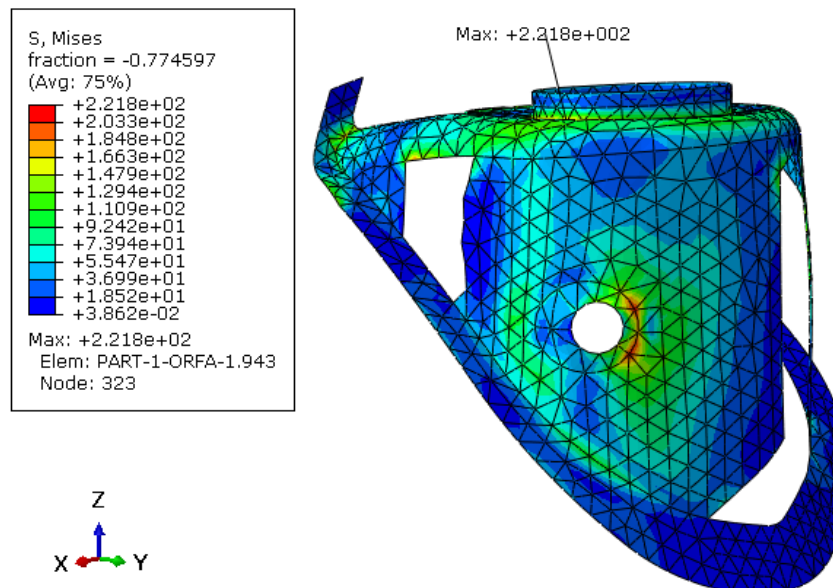


Figura 4.62: Comportamento mecânico em relação aos níveis de tensões da geometria otimizada do suporte de chassi veicular.

De acordo com os resultados obtidos, foi possível perceber melhora no comportamento mecânico para o componente otimizado, proporcionando tensões mais uniformes, onde neste caso, mesmo com a redução de material de 25% apresentou menores níveis de tensões.

Através do software Tosca<sup>®</sup> foi possível validar a solução obtida pela metodologia ESO, conforme ilustra Fig. 4.63.

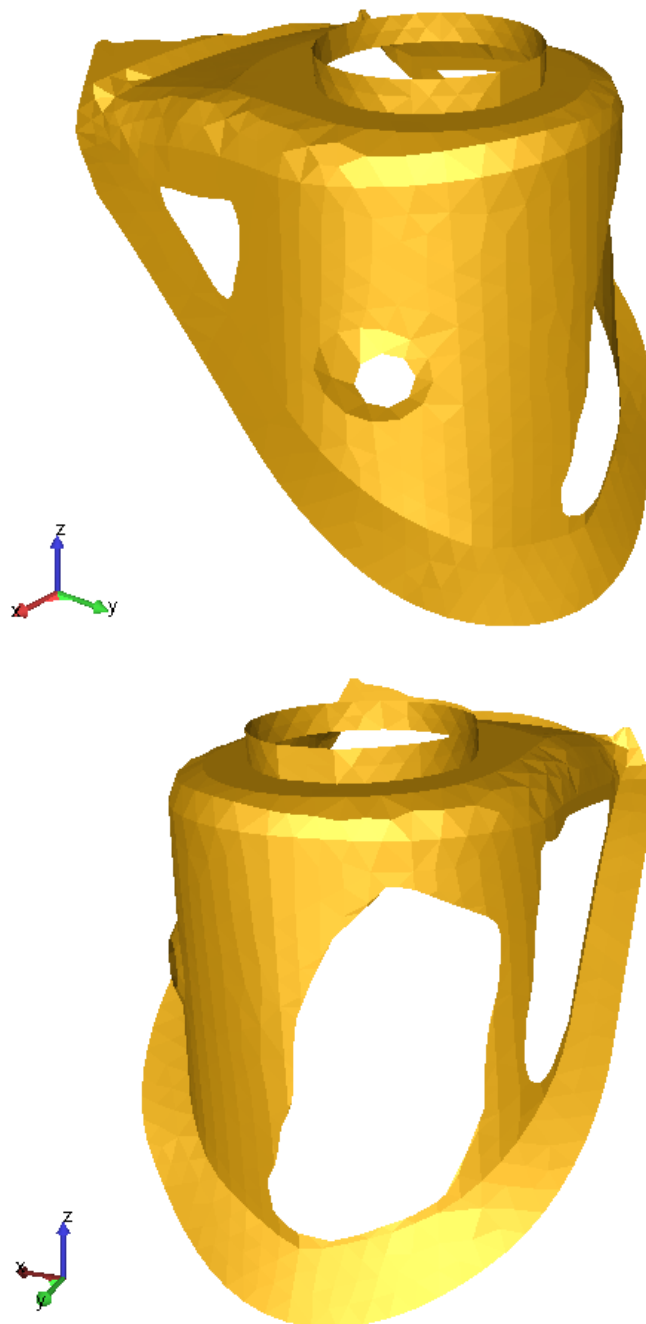


Figura 4.63: Topologia ótima obtida pelo Tosca<sup>®</sup> para a análise linear estática do suporte de chassi veicular.

O comportamento da estrutura em relação aos máximos níveis de tensões computadas ao longo do processo iterativo de otimização é representado conforme Fig. 4.64, onde é possível perceber a sua minimização ao longo do processo iterativo.



Figura 4.64: Níveis máximos de tensões computados ao longo do processo iterativo de otimização para a análise linear estática do suporte de chassi veicular.

#### 4.3.2 Otimização estrutural de um suporte de televisão articulado

Neste estudo, o processo de otimização da metodologia ESO será aplicado em um domínio constituído de elementos sólidos, sendo a sua geometria inicial discretizada em uma malha de elementos finitos com 29639 elementos do tipo C3D4 do Abaqus<sup>®</sup>. Como este exemplo se trata de um suporte metálico, o material adotado possui características de um aço estrutural e, portanto as propriedades foram assumidas como módulo de elasticidade de 210GPa, densidade de 7850kg/m<sup>3</sup> e coeficiente de Poisson de 0,30. O processo evolutivo deverá otimizar a estrutura de até que 45% de seu material inicial seja removido.

Os parâmetros iniciais utilizados para a otimização foram:  $RR_0 = 10\%$  e  $ER = 0,5\%$ , com controle de cavidades para abertura de no máximo cinco furos durante o processo evolutivo. Esta alta razão de rejeição inicial foi adotada, neste caso, para acelerar o processo de otimização, devido à grande quantidade de elementos presentes na estrutura.

O modelo utilizado por esta abordagem consiste em uma análise linear estática de um suporte de televisão com articulação, sendo solicitado por uma massa concentrada equivalente a um ponto de ação de força de 1000N na direção z e fixado em toda sua extremidade direita, conforme Fig. 4.65.

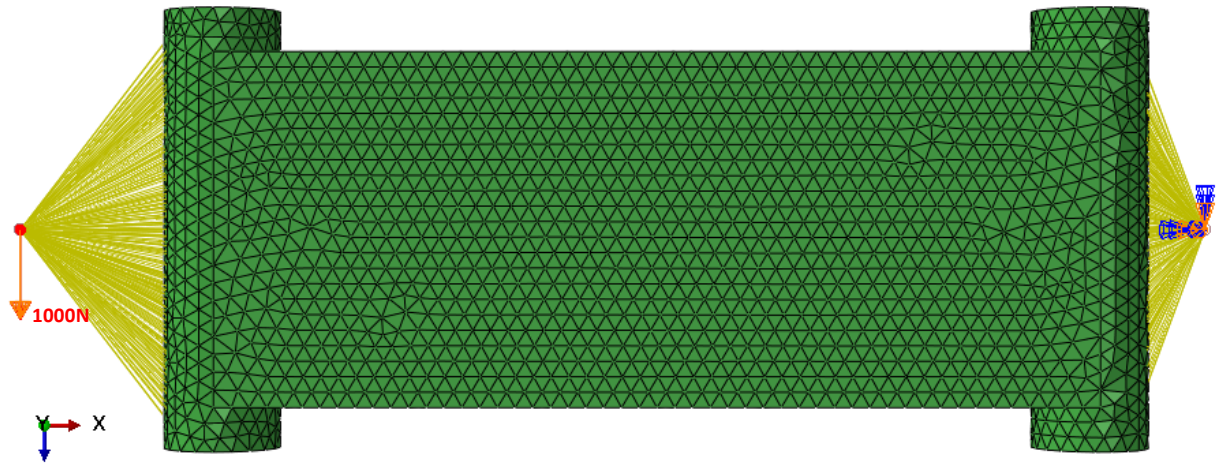


Figura 4.65: Domínio inicial de projeto do suporte de televisão articulado com aplicação das condições de contorno.

Através da Fig. 4.66 é possível verificar a topologia final ótima obtida para a análise linear estática do suporte de televisão articulado.



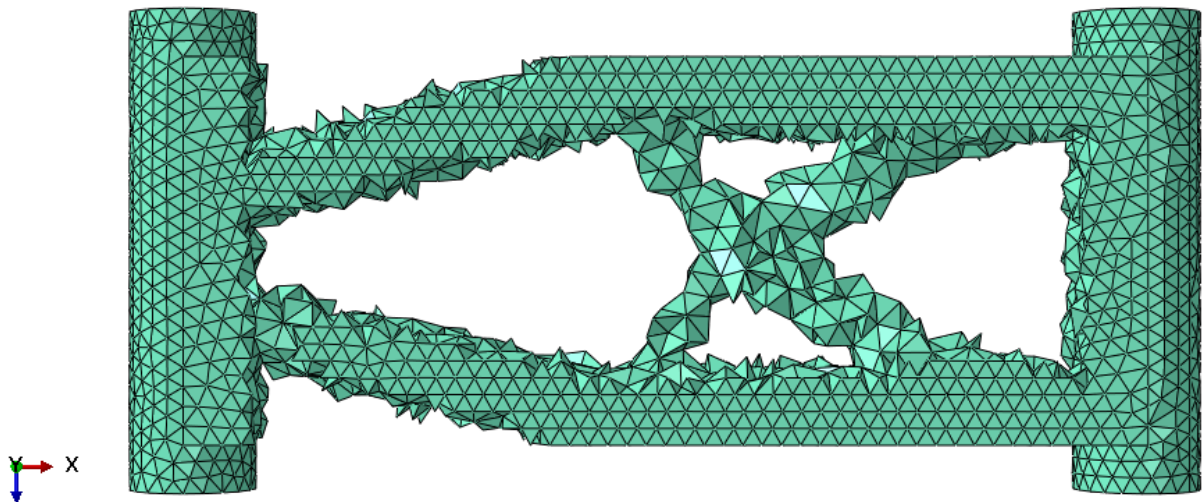


Figura 4.66: Topologia ótima para a análise linear estática do suporte de televisão articulado.

No artigo apresentado por Buhl *et al.* (2000) foi utilizado o método das assíntotas móveis para um caso de carregamento semelhante ao estudado, ilustrado conforme Fig. 4.67, onde a influência da não linearidade geométrica é contabilizada com o aumento da carga aplicada e comparada com a resposta do modelo linear submetido à uma ação estática.

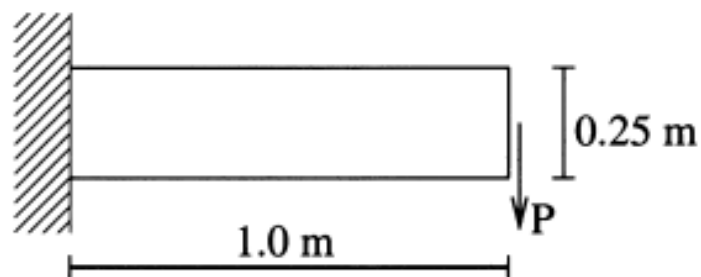


Figura 4.67: Modelo de viga em balanço proposta por Buhl *et al.* (2000) e utilizada para otimização topológica.

Fonte: Buhl *et al.* (2000)

O resultado da otimização topológica obtido por Buhl *et al.* (2000) considerando a aplicação do carregamento em regime linear apresentou certa semelhança em relação ao componente estudado, mesmo com propriedades e características geométricas diferentes, demonstrando a tendência de uma geometria final com repetições em formato de “x” ao longo de seu comprimento.

A Fig. 4.68 apresenta o resultado final da otimização obtida por Buhl *et al.* (2000), considerando as respostas em regime linear e não linear geométrico conforme o aumento da carga “P” aplicada na extremidade.











Força [kN]	Resultado de topologia ótima para estruturas sujeitas a pequenos deslocamentos	Resultado de topologia ótima para estruturas sujeitas a grandes deslocamentos
12	 $C_{linear} = 0,188kj$	 $C_{n\tilde{a}o-linear} = 0,188kj$
60	 $C_{linear} = 4,690kj$	 $C_{n\tilde{a}o-linear} = 4,645kj$
96	 $C_{linear} = 12,000kj$	 $C_{n\tilde{a}o-linear} = 11,780kj$
144	 $C_{linear} = 27,000kj$	 $C_{n\tilde{a}o-linear} = 25,920kj$
240	 $C_{linear} = 75,190kj$	 $C_{n\tilde{a}o-linear} = 66,520kj$

Figura 4.68: Solução de Buhl *et al.* (2000) comparando as topologias ótimas obtidas entre a análise linear e não linear geométrica para cada aumento de carregamento.

Fonte: Adaptado de Buhl *et al.* (2000)

Para avaliar o comportamento mecânico do componente estudado em relação ao resultado final da otimização, foi realizada uma comparação dos níveis de tensões de von Mises antes e após a aplicação do processo evolutivo, conforme ilustrado respectivamente pelas Figs. 4.69 e 4.70.

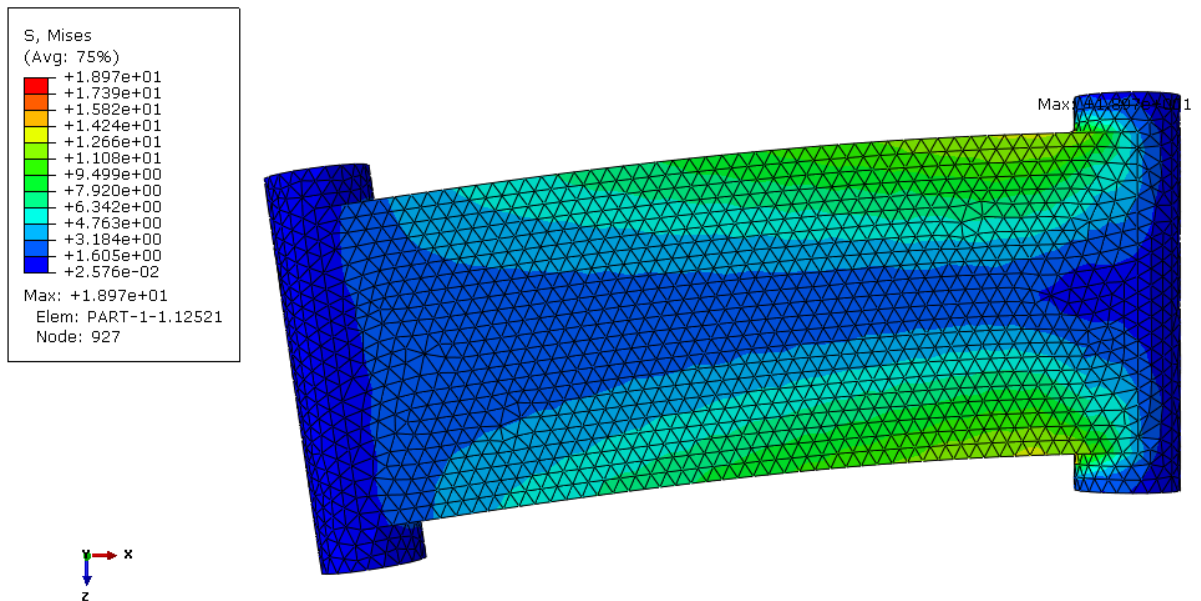


Figura 4.69: Comportamento mecânico em relação aos níveis de tensões da geometria inicial do suporte de televisão articulado.

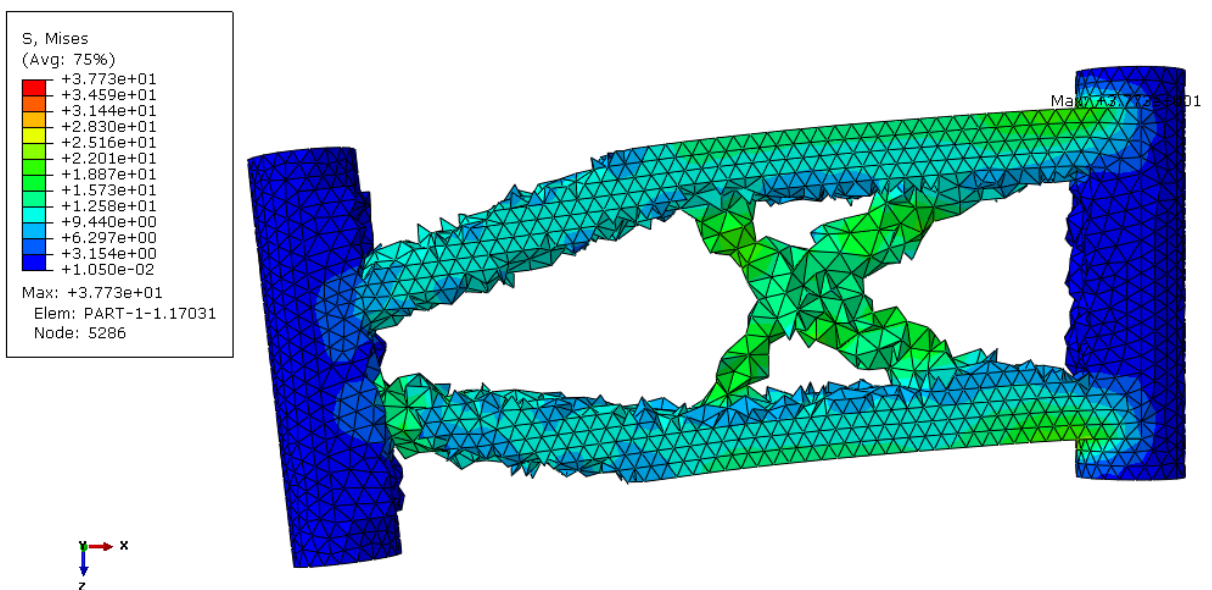


Figura 4.70: Comportamento mecânico em relação aos níveis de tensões da geometria otimizada do suporte de televisão articulado.

De acordo com os resultados obtidos, foi possível perceber um significativo aumento dos níveis de tensões, porém a sua concentração se apresenta de forma mais homogênea, o que caracteriza um resultado aceitável para a otimização desde que a sua máxima tensão esteja

dentro dos limites especificados pelo material. Considerando-se um aço de baixa resistência, SAE 1008, tem-se um limite de escoamento de aproximadamente 170MPa. Como a topologia otimizada apresentou máxima tensão de von Mises de 37,73MPa, o critério de resistência para que não haja escoamento pode ser atendido.

Através do software Tosca<sup>®</sup> foi possível validar a solução obtida pela metodologia ESO, conforme ilustra Fig. 4.71.

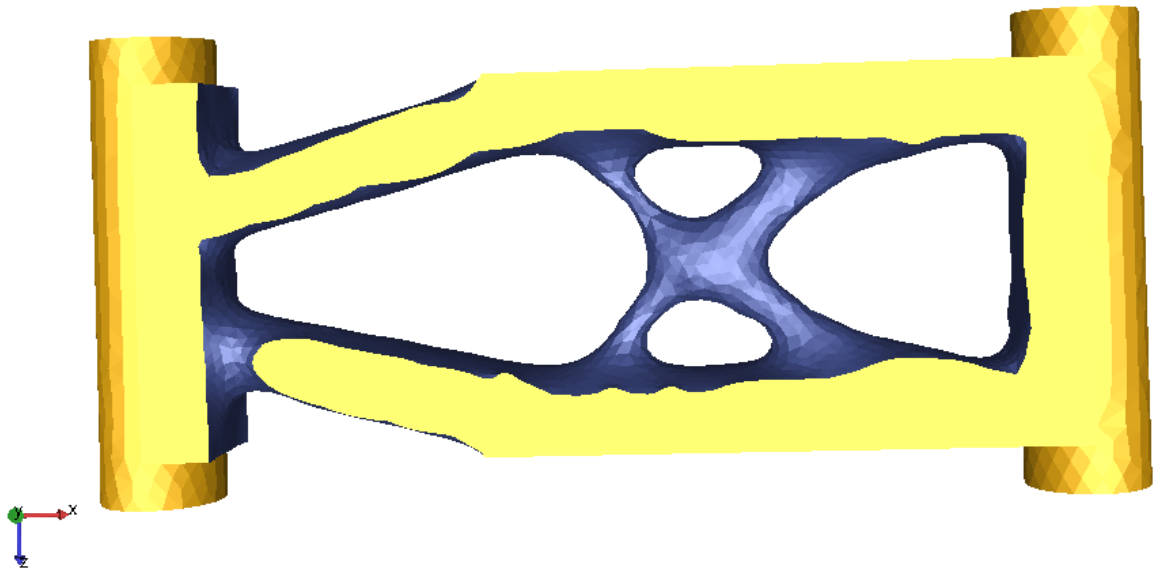


Figura 4.71: Topologia ótima obtida pelo Tosca<sup>®</sup> para a análise linear estática do suporte de televisão articulado.

De acordo com o módulo de pós-processamento do Tosca<sup>®</sup>, as regiões em azul correspondem a formação de uma nova superfície cavitada devido à remoção de material ao longo do processo de otimização, enquanto que as zonas em amarelo são as superfícies externas que se mantiveram inalteradas.

O comportamento da estrutura em relação aos máximos níveis de tensões computadas ao longo do processo iterativo de otimização pode ser representado conforme Fig. 4.72.

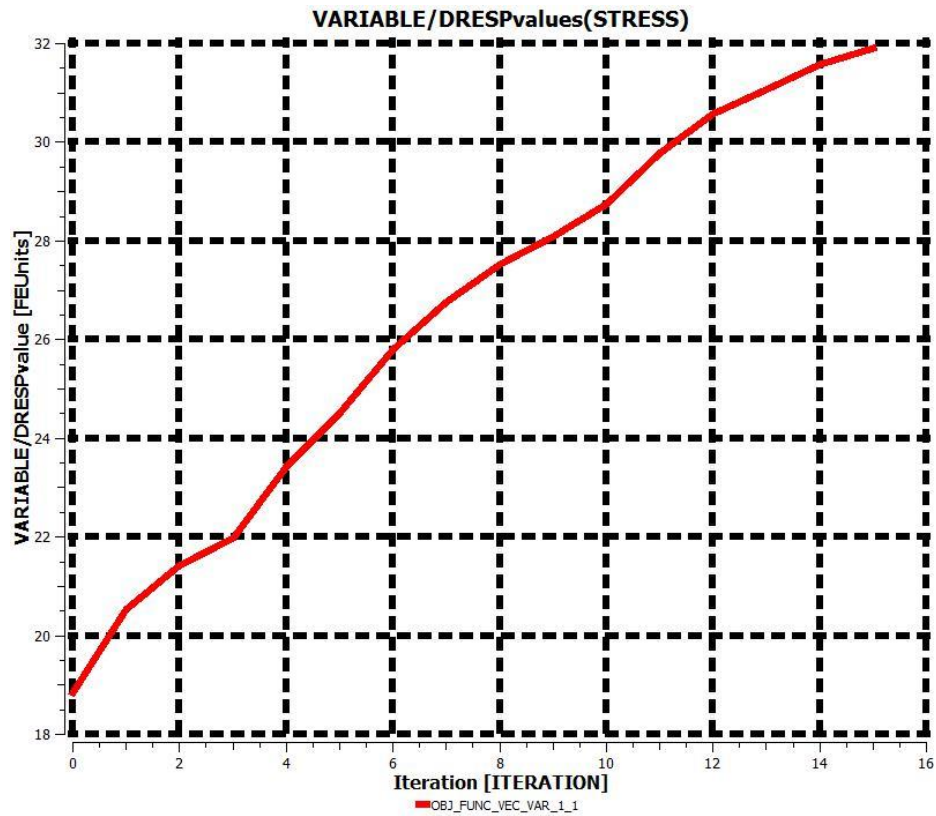


Figura 4.72: Níveis máximos de tensões computados ao longo do processo iterativo de otimização para a análise linear estática do suporte de televisão articulado.

# 5

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente processo evolutivo demonstrou ser capaz de executar uma rotina onde é possível se obter um direcional da disposição ótima e a forma de uma estrutura sob diversas condições de carregamento.

Devido ao nível de eficiência exigido pelos projetos atuais, requerendo componentes de baixo peso e de alta resistência estrutural, faz-se necessário o estudo de otimização considerando os diversos efeitos envolvidos no ambiente real em que se encontra uma estrutura. Desta forma, para maior eficiência do algoritmo, o trabalho proposto utilizou diversos recursos disponíveis no software de análise de problemas multifísicos Abaqus<sup>®</sup>, o que possibilita a programação de análises de estruturas solicitadas por ações estáticas ou dinâmicas, com ou sem não linearidade.

Através da nova abordagem implementada para problemas envolvendo múltiplos casos de carregamento, a convergência da solução otimizada torna-se mais rápida em relação à técnica original, uma vez que o software Abaqus<sup>®</sup> tem a habilidade de executar as análises para diferentes modelos em paralelo, e sendo assim torna-se necessário um menor número de iterações para cada ( $RR_i$ ) durante o processo evolutivo.

De acordo com os resultados obtidos para problemas dinâmicos amortecidos, foi possível constatar topologias ótimas distintas para as diferentes taxas de amortecimento adotadas, onde devido à influência da geometria no comportamento mecânico da estrutura, os níveis de tensões aumentaram com o aumento da taxa de amortecimento para o modelo linear, enquanto que para o modelo não linear com comportamento elastoplástico os níveis de tensões diminuíram com o aumento da taxa de amortecimento, o que caracteriza acentuada alteração na rigidez estrutural de cada modelo analisado.

Todos os exemplos estudados foram validados com os resultados disponíveis na literatura ou por softwares comerciais de otimização homologados pelas empresas de engenharia, como OptiStruct® e Tosca®, que trabalham com métodos de otimização diferentes dos utilizados na presente dissertação. Cada software possui a sua metodologia de cálculo com seus pontos positivos e negativos, sendo que a utilização do software Tosca® foi mais adequada em problemas envolvendo efeitos de não linearidade.

Os possíveis problemas de instabilidade abordados não acarretaram em mudanças significativas quando comparados com os exemplos clássicos apresentados pela literatura e softwares comerciais, uma vez que técnicas de filtragem como o *Nibbling* ESO foram implementadas. Além disso, para melhor calibração dos parâmetros  $RR_0$  e  $ER$ , foram realizados testes numéricos preliminares, para evitar a ocorrência de singularidades na estrutura durante o processo evolutivo da otimização.

Desta forma, a aplicação da otimização topológica via metodologia ESO pode ser executada em problemas não lineares com aplicação de cargas dinâmicas no domínio do tempo, problemas envolvendo frequências naturais, e combinação de casos de carregamento aplicados na estrutura para diversos tipos de análise.

## 5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Para os estudos de otimização topológica relacionados à metodologia ESO, tem-se as seguintes sugestões:

- Implementação de técnicas aprimoradas em relação ao ESO, como SESO e BESO, que consideram respectivamente uma remoção suavizada e uma remoção bidirecional com adição e remoção dos elementos, o que minimiza possíveis efeitos de tabuleiro de xadrez;
- Utilização de um critério condicional para verificação da instabilidade da estrutura, de forma a evitar o seu colapso, ou seja, membros importantes que garantem a sua estabilidade se romperem até que o valor definido seja atingido;

- Incorporação de outros critérios de remoção de material e extensão das opções de critérios de parada, que estão relacionadas às restrições de projeto, podendo ser restrição de tensão, deslocamento, frequência natural, entre outras, além da já utilizada restrição volumétrica;
- Adequação do algoritmo para execução da otimização para diferentes componentes montados em conjunto no modelo de análise, ou seja, possibilidade de trabalhar com diversas instâncias do software Abaqus<sup>®</sup>, possibilitando inclusive a aplicação do procedimento evolucionário de otimização em problemas envolvendo análises de impacto, devido à utilização da parede rígida que é considerada como mais uma instância adicionada pelo software.
- Elaboração e implementação de um critério para otimização multiobjetivo considerando diversas restrições de projeto.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARORA, J. S. Introduction to optimum design. 2<sup>a</sup> ed., London: Elsevier, 2004.

BEER, F.P.; JOHNSTON, R.E. Resistencia dos materiais. 3<sup>a</sup> ed., São Paulo: MacGraw-Hill, 2006.

BENDSØE, M. P. Optimization shape design as a material distribution problem. Structural Optimization, v. 1, p. 193-202, 1989.

BENDSØE, M.P. Optimization of structural topology, shape and material. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 71, p. 197-224, 1988.

BENDSØE, M.P.; SIGMUND, O. Topology optimization: Theory, Methods and Application. Berlin: Springer-Verlag, 2003. ISBN- 3-540-42992-i.

BRUNS, T.E.; TORTORELLI, D. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 190, p. 3443-3459, 2001.

BRUNS, T.E.; SIGMUND, O.; TORTORELLI, D. Numerical methods for the topology optimization of structures that exhibit snap-through. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 55, p. 1215-1237, 2002.

BUHL, T.; PEDERSEN, C. B. W.; SIGMUND, O. Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization, v. 19, p. 93-104, 2000.

CHRISTENSEN, P.W.; KLARBRING, A. An Introduction to Structural Optimization. Solid Mechanics and its Applications. Netherlands: Springer, 2008. ISBN- 978-1-4020-8665-6.

CHU, D. N.; XIE, Y. M.; HIRA, A.; STEVEN, G. P. Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. Finite Elements in Analysis and Design, v. 21, p. 239-251, 1996.

COSSOLINO L.C.; PEREIRA A.H.A. Amortecimento: classificação e métodos de determinação. São Carlos: ATCP Engenharia Física, 2010. Informativo Técnico Científico ITC04. Disponível em <<http://www.atcp.com.br/imagens/produtos/sonelastic/artigos/ITC04-ATCP.pdf>> Acesso em: 04 nov. 2014

COUTINHO, K.D. Método de otimização topológica em estruturas tridimensionais. 55f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

DANTZIG, G. B. Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. Activity Analysis of Production and Allocation, in T.C. Koopmans (ed.), John Wiley & Sons, p. 339-347, 1951.

DAS, R.; JONES, R.; XIE, Y.M. Optimal topology design of industrial structures using an evolutionary algorithm. Optimization and Engineering, Springer, v. 12, n. 4, p. 681-717, 2011.

DÍAZ, A. R.; KIKUCHI, N. Solutions to shape and topology eigen-value optimization problems using a homogenization method. International Journal For Numerical Methods in Engineering, v. 35, n. 7, p. 1487-1502, 1992.

DÍAZ, A.R.; SIGMUND O. Checkboard patterns in layout optimization. Structural Optimization, Springer-Verlag, v. 10, p.40-45, 1995.

FERNANDES, W. S.; ALMEIDA, V. S.; NEVES, F. A.; GRECO, M. Topology optimization applied to 2D elasticity problems considering the geometrical nonlinearity, Engineering Structures, Elsevier, v. 100, p. 116-127, 2015.

GEA, H.; LUO, J. Topology optimization of structures with geometrical nonlinearities. *Computers and Structures*, v. 79, p. 1977-1985, 2001.

GRECO, M. Análise de Problemas de Contato/Impacto em Estruturas de Comportamento Não Linear pelo Método dos Elementos Finitos. 82f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

HAFTKA, R.T.; GRANDHI, R.V. Structural shape optimization - A survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 57, n. 1, p. 91-106, 1986.

HAFTKA, R.T.; GÜRDAL, Z. *Elements of Structural Optimization*. 3<sup>a</sup> ed, Florida: Kluwer Academic Publishers, 1992.

HAITIAN, Y.; QIANG, G.; XINGLIN, G.; CHENGWEI, W. A new algorithm of time stepping in the non-linear dynamic analysis. *Communications in numerical methods in engineering*, Wiley, v. 17, p. 597-611, 2001.

HASSANI, B.; HINTON, E. *Homogenization and Structural Topology Optimization*. Berlin: Springer-Verlag, 1999. ISBN- 3-540-76211-6.

HIBBELER, R. C. *Resistência dos Materiais*. 5<sup>a</sup> ed., São Paulo: Prentice Hall, 2004.

HUANG, X.; XIE, M. *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*. United Kingdom: Wiley, 2010. ISBN- 978-0-470-74653-0.

HUANG, X.; ZUO, Z. H.; XIE, M. Y. Evolutionary topological optimization of vibrating continuum structures for natural frequencies. *Comput Struct*, v. 88, p. 357- 364, 2010.

JENSEN, J. S.; PEDERSEN, N. L. On maximal eigenfrequency separation in two material structures: the 1D and 2D scalar cases. *Journal Sound of Vibration*, v. 289, p. 967-986, 2006.

JOG, C. S. Topology design of structures subjected to periodic loading. *Journal of sounds and vibration*, v. 253, n. 1, p. 1191-1198, 2002.

JOG, C.S.; HABER R.B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 130, p. 203-226, 1996.

JUNG, D.; GEA, H. C. Topology optimization of nonlinear structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 40, p. 1417-1427, 2004.

KANG, Z.; ZHANG, X.; JIANG, S.; CHENG, G. On topology optimization of damping layer in shell structures under harmonic excitations. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 46, p. 51-67, 2012.

KARMARKAR, N. A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, v. 4, p. 373-395, 1984.

KEMMLER, R.; LIPKA, A.; RAMM, E. Large deformations and stability in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 30, p. 459-476, 2005.

KIM, H.; QUERIN, O.M.; STEVEN, G.P.; XIE, Y.M. Determination of an optimal topology with a predefined number of cavities. *AIAA Journal*, v. 40, n. 4, p. 739-744, 2002.

LANES, R.M. Investigação de um método de otimização topológica evolucionária desenvolvido em script. 75f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

LANES, R.M., GRECO, M., Application of a topological evolutionary optimization method developed through python script. *Science & Engineering Journal*, v. 22, n.1, p. 01-11, 2013.

LEE, D.; UWE, S.; SHIN, S.M. Evaluating optimum shape of thin steel plates with dynamic problem by using topology optimization design. In: *5th International Symposium on Steel Structures*, 2009, Seoul, Korea.

LIU, X.; YI, W.; LI, Q. S.; SHEN, P. Genetic evolutionary structural optimization. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 64, p. 305-311, 2008.

MA, Z. D.; KIKUCHI, N.; CHENG, H. C. Topological design for vibrating structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 121, p. 259-280, 1995.

MAUTE, K.; SCHWARZ S.; RAMM E. Adaptive topology optimization of elastoplastic structures. *Structural Optimization*, Springer-Verlag, v. 15, p. 81-91, 1998.

MICHELL, A.G.M. The limits of economy of material in frame-structures. *Philosophical Magazine*, v. 8, p. 589-597, 1904.

MIN, S.; KIKUCHI, N.; PARK Y.; KIM, S.; CHANG, S. Optimal topology design of structures under dynamic loads. *Struct. Optim.*, v. 17, p. 208-218, 1999.

NATAL JORGE, R.M.; DINIS, L.M.J.S. Teoria da Plasticidade. (Apostila) - Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Universidade do Porto, Porto, 2005.

NEVES, F.A. Programação com Multi-objetivos Aplicada à Otimização do Projeto de Pontes Estaiadas. 168f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1997.

OLIVEIRA, F.M.; GRECO, M., Nonlinear dynamic analysis of beams with layered cross sections under moving masses. *The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer, v. 37, p. 451-462, 2014.

OLIVIERI, B.P. Otimização do Projeto de Pontes Protendidas Pré-Moldadas pelo Método dos Algoritmos Genéticos. 73f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

PINHEIRO, N.A.; GRECO, M.; FERREIRA, R. M. Influência da taxa de amortecimento na plastificação de vigas laminadas submetidas à ação de massa móvel. In: VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2014, Uberlândia

PORTO, E. C. B. Método da homogeneização aplicado à otimização estrutural topológica. 90f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, Campinas, 2006.

QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. Evolutionary structural optimization using additive algorithm. *Finite Element Analysis and Design*, v. 34, p. 291-308, 2000a.

QUERIN, O. M.; YOUNG, V.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation. *Comput. Math. Appl. Mech. Engineering.*, v. 189, p. 559-573, 2000b.

QUERIN, O.M. Evolutionary Structural Optimisation: Stress Based Formulation and Implementation. 131f. Tese (Pós Doutorado em Engenharia Aeronáutica) - Departamento de Engenharia Aeronáutica, University of Sydney, Sydney, 1997.

RAMM, E.; MATZENMILLER, A. Consistent Linearization in elastoplastic shell analysis. *Engineering Computations, Emerald Insight*, v. 5, n. 4, p. 289-299, 1988.

RONG, J. H.; XIE, Y. M.; YANG, X. Y.; LIANG, Q. Q. Topology optimization of structures under dynamic response constraints. *Journal of Sounds and Vibration*, v. 234, n. 2, p. 177-189, 2000.

ROZVANY, G.I.N.; BENDSOE, M.P.; KIRSCH, U. Layout Optimization of Structures. *Applied Mechanics Reviews*, v. 48, n. 2, p. 41-119, 1995.

SIGMUND, O. On the design compliant mechanisms using topology optimization. *Mechanics of Structures and Machines*, v. 25, n. 4, p. 493-524, 1997.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 21, p. 120-127, 2001.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh dependencies and local minima. *Structural Optimization, Springer-Verlag*, v. 16, p. 68-75, 1998.

SILVA, E.C.N. Técnicas de otimização aplicadas no projeto de peças mecânicas. (Apostila) - Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da USP, São Paulo, 2001.

SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. Computational Inelasticity. New York: Springer-Verlag, 1998. 392p. ISBN- 0-387-97520-9.

SIMONETTI, H. L. Otimização topológica de estruturas bidimensionais. 85f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Engenharia Civil) - Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2009.

SIMULIA. Abaqus User's Manual, v. 6. 10. ed. USA: [s.n.]. Abaqus analysis user's manual. 2010

SWAN, C.C.; KOSAKA I. Voigt-reuss topology optimization for Structures with nonlinear material behaviors. International journal for numerical methods in engineering, v. 40, p. 3785-3814, 1997.

TANSKANEN, P. The evolutionary structural optimization method: theoretical aspects. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, v. 191, p. 5485-5498, 2002.

WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., v. 192, p. 227 - 246, 2003.

XIE, M. Y.; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. Computer & Structures, Elsevier, v. 49, n. 5, p. 885-896, 1993.

XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. A simple approach to structural frequency optimization. Computers & Structures, Elsevier, v. 53, n. 6, p. 1487-1491, 1994a.

XIE, M. Y.; STEVEN, G. P. Optimal design of multiple load case structures using an evolutionary procedure. Engineering Computations, Emerald Insight, v. 11, n. 4, p. 295-302, 1994b.

XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. Evolutionary structural optimization for dynamics problems. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 58, n. 6, p. 1067-1073, 1996.

XIE, Y.M. ; STEVEN, G.P. *Evolutionary Structural Optimization*. London: Springer-Verlag, 1997. ISBN- 978-1-4471-1250-1.

XIE, Y. M.; ZUO, Z. H.; HUANG, X.; RONG, J. H. Convergence of topological patterns of optimal periodic structures under multiple scale. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer-Verlag, v. 46, n. 46, p. 41-54, 2012.

YOON, G. H. Structural topology optimization for frequency response problem using model reduction schemes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 199, n. 15, p. 1744-1763, maio 2010.

ZHAO, C.; HORNBY, P.; STEVEN G. P.; XIE, Y. M.. A generalized evolutionary method for numerical topology optimization of structures under static loading conditions. *Structural Optimization*, Springer-Verlag, v. 15, n. 3-4, p. 251-260, 1998.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. On the validity of ESO type methods in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer-Verlag, v. 21, n. 1, p. 80-83, 2001.

ZHOU, M.; PAGALDIPTI, N.; THOMAS, H.L.; SHYY, Y.K. An integrated approach to topology, sizing, and shape optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer-Verlag, v. 26, p. 308–317, 2004.

ZHOU, M.; SHYY, Y. K.; THOMAS, H. L. Checkerboard and minimum member size control in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer-Verlag, v. 21, n. 2, p. 152-158, 2001.

ZUO, Z. H.; XIE, Y. M.; HUANG, X. An improved bi-directional evolutionary method for topology optimization for frequencies. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 10, n. 55, p. 55-75, mar. 2010.



ZUO, Z. H.; XIE, M. Y.; HUANG, X. Optimal topological design of periodic structures for natural frequencies. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 137, n. 10, p. 1229-1240, 2011.