



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**MODELO COMPUTACIONAL *HALF-CAR* PARA ESTUDOS DE  
RESPOSTA VIBRACIONAL E DO CONFORTO DE VEÍCULOS DE  
PASSEIO CONSIDERANDO O BANCO E O MOTORISTA**

**LUÍS FELIPE MRAD**

**Belo Horizonte, 14 de Dezembro de 2018**

Luís Felipe Mrad

**MODELO COMPUTACIONAL *HALF-CAR* PARA ESTUDOS DE  
RESPOSTA VIBRACIONAL E DO CONFORTO DE VEÍCULOS DE  
PASSEIO CONSIDERANDO O BANCO E O MOTORISTA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Projetos e Sistemas

Orientador: Prof. Dr. Juan Carlos Horta Gutiérrez

Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte

Escola de Engenharia da UFMG

2018

M939m

Mrad, Luís Felipe.

Modelo computacional *Half-car* para estudos de resposta vibracional e do conforto de veículos de passeio considerando o banco e o motorista [manuscrito] / Luís Felipe Mrad. – 2018.

192 f., enc.: il.

Orientador: Juan Carlos Horta Gutiérrez.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 187-192.

Bibliografia: f. 181-186.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Automóveis - Vibração - Teses.  
3. Modelos computacionais - Teses. I. Gutiérrez, Juan Carlos Horta.  
II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia.  
III. Título.

CDU: 621(043)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**ENGENHARIA MECÂNICA**

Av. Antônio Carlos, 6627 - Campus Universitário  
31270-901 - Belo Horizonte - MG  
Tel.: +55 31 3409.5145  
E-mail: [cpgmec@demec.ufmg.br](mailto:cpgmec@demec.ufmg.br)

**"MODELO COMPUTACIONAL HALF-CAR PARA ESTUDOS DE  
RESPOSTA VIBRACIONAL E DO CONFORTO DE VEÍCULOS DE  
PASSEIO CONSIDERANDO O BANCO E O MOTORISTA"**

**LUÍS FELIPE MRAD**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia Mecânica", na área de concentração de "PROJETO E SISTEMAS".

Dissertação aprovada no dia 14 de dezembro de 2018.

Por:

**Prof. Juan Carlos Horta Gutiérrez**  
Orientador - Departamento de Engenharia Mecânica/ UFMG

**Prof. Maria Lucia Machado Duarte**  
Departamento de Engenharia Mecânica/ UFMG

**Prof. Claysson Bruno Santos Vinieiro**  
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais

**Prof. Lazaro Valentim Donadon**  
Departamento de Engenharia Mecânica/ UFMG

## AGRADECIMENTOS

A todos que contribuíram para a realização deste trabalho, fica expressa aqui a minha gratidão, especialmente:

Ao meu pai Miguel, pelo exemplo de determinação e esforço, além do apoio dado desde o início de minha jornada.

A minha mãe Leni, pelo apoio e dedicação sem limites, dando força e auxílio nos momentos mais necessários.

A minha irmã Ana Carolina, por não medir esforços em acreditar que todas as conquistas sonhadas por mim possam ser realizadas.

Ao professor Dr. Juan Carlos Horta Gutiérrez pela oportunidade de estarmos realizando este trabalho, pela orientação, pelo conhecimento transmitido, pela confiança em meu desenvolvimento e por ser para mim uma referência na vida acadêmica.

Aos demais professores do Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da UFMG, principalmente à Professora Dra. Maria Lúcia, pelos aprendizados em relação a grande parte do conteúdo deste trabalho, que possibilitaram o aprofundamento no assunto.

Aos colegas de classe das disciplinas de pós-graduação, pela troca de conhecimentos, auxílios no decorrer do curso, e, principalmente, pelo companheirismo e pela amizade criada

A toda equipe de trabalho da Fiat Chrysler, em especial ao time da Engenharia Chassi, da qual tive o prazer de fazer parte durante alguns anos, por todo o conhecimento adquirido desde o primeiro dia de trabalho.

A Marina e toda equipe da secretaria do PPGMEC pelo apoio no andamento do curso e orientação para com o cumprimento das regras do programa.

Aos demais, que, de alguma forma contribuíram para esta construção, pelos ensinamentos passados e por serem prestativos no auxílio das atividades elaboradas.

Meus sinceros agradecimentos.

*“A única segurança verdadeira consiste numa reserva de sabedoria, de experiência e de competência.”*

*(Henry Ford)*

*“Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante de meus olhos.”*

*(Isaac Newton)*

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	9
LISTA DE GRÁFICOS .....	12
LISTA DE TABELAS .....	14
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS .....	16
1 INTRODUÇÃO .....	19
1.1 Justificativa e Relevância .....	20
1.2 Objetivo principal .....	20
1.3 Objetivos específicos.....	21
1.4 Divisão dos capítulos.....	21
2 REVISÃO TEÓRICA .....	23
2.1 Dinâmica Veicular.....	23
2.1.1 <i>Dinâmica Vertical</i> .....	24
<u>2.1.1.1 Excitações por parte da pista .....</u>	<u>26</u>
<u>2.1.1.2 Excitações por parte dos componentes .....</u>	<u>28</u>
2.1.2 <i>Dinâmica Lateral – Handling</i> .....	30
<u>2.1.2.1 Gradiente de subesterçamento (K).....</u>	<u>33</u>
2.1.3 <i>Dinâmica Longitudinal – Aceleração e frenagem</i> .....	35
2.2 Suspensão .....	37
2.2.1 <i>Tipologias</i> .....	39
<u>2.2.1.1 Suspensão Dianteira.....</u>	<u>39</u>
<u>2.2.1.2 Suspensão Traseira .....</u>	<u>42</u>
2.2.1.2.1 Suspensões Dependentes .....	42
2.2.1.2.2 Suspensões Semidependentes .....	44
2.2.1.2.3 Suspensões Independentes.....	45
2.2.2 <i>Componentes</i> .....	48
<u>2.2.2.1 Molas .....</u>	<u>49</u>
<u>2.2.2.2 Amortecedores .....</u>	<u>53</u>
<u>2.2.2.3 Barras estabilizadoras .....</u>	<u>55</u>
<u>2.2.2.4 Articulações.....</u>	<u>56</u>
<u>2.2.2.5 Batentes .....</u>	<u>57</u>
<u>2.2.2.6 Pneus .....</u>	<u>58</u>

2.3 Conforto .....	59
2.3.1 Efeito de interesse da vibração.....	60
2.3.2 A relação entre a vibração e o desconforto.....	62
2.3.3 Métodos de avaliação da vibração .....	69
2.4 Vibrações .....	70
2.4.1 Classificação das vibrações .....	72
<u>2.4.1.1 Quanto ao tipo de excitação .....</u>	<u>72</u>
2.4.1.1.1 Vibração livre .....	72
2.4.1.1.2 Vibração forçada.....	73
<u>2.4.1.2 Quanto a presença de amortecimento .....</u>	<u>77</u>
2.4.1.2.1 Vibração não amortecida .....	77
2.4.1.2.2 Vibração amortecida .....	78
2.4.2 Graus de liberdade de sistemas vibratórios.....	78
<u>2.4.2.1 Sistemas com um grau de liberdade.....</u>	<u>78</u>
<u>2.4.2.2 Sistemas com vários graus de liberdade.....</u>	<u>81</u>
2.5 Modelos Dinâmicos de Dinâmica Vertical de Veículos .....	84
2.5.1 Modelo Quarter-Car.....	85
2.5.2 Modelo Half-Car.....	87
<u>2.5.2.1 Half-car para movimentação de Roll .....</u>	<u>88</u>
<u>2.5.2.2 Half-car para movimentação de Pitch .....</u>	<u>89</u>
2.5.3 Modelo Full-Car .....	90
3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	92
4 METODOLOGIA .....	110
4.1 Elaboração do modelo .....	111
4.1.1 Detalhamento do modelo biodinâmico .....	114
4.1.2 Modelamento matemático .....	117
4.1.3 Matrizes de massa, rigidez e amortecimento e vetor força .....	121
4.1.4 Modelo computacional implementado em Matlab® .....	124
<u>4.1.4.1 Variáveis de entrada do modelo .....</u>	<u>125</u>
4.1.5 Modelagem do sinal de excitação.....	130
<u>4.1.5.1 Sinal senoidal para a roda anterior .....</u>	<u>131</u>
<u>4.1.5.2 Sinal senoidal para a roda posterior .....</u>	<u>133</u>
<u>4.1.5.3 Sinal senoidal de excitação da pista.....</u>	<u>135</u>



<b>4.1.5.4 Sinal de excitação de percurso real .....</b>	<b>135</b>
<b>4.1.6 Teste Experimental .....</b>	<b>137</b>
<b>5 RESULTADOS: ANÁLISE E DISCUSSÃO .....</b>	<b>142</b>
<b>5.1 Matrizes de saída do modelo.....</b>	<b>142</b>
<b>5.2 Resposta dinâmica do modelo computacional.....</b>	<b>144</b>
<b>5.2.1 Obtenção das frequências naturais não amortecidas e amortecidas ...</b>	<b>144</b>
<b>5.2.2 Análise das respostas de deslocamento e de velocidade.....</b>	<b>149</b>
<b>5.2.2.1 Análise dos deslocamentos para excitação senoidal.....</b>	<b>149</b>
<b>5.2.2.2 Análise das velocidades para excitação senoidal .....</b>	<b>151</b>
<b>5.2.3 Análise das respostas de aceleração.....</b>	<b>152</b>
<b>5.3 Correlação do modelo proposto com medição experimental .....</b>	<b>156</b>
<b>5.3.1 Correlação das amplitudes de aceleração e das frequências de pico ..</b>	<b>157</b>
<b>5.4 Análise da alteração de componentes da suspensão pelo modelo.....</b>	<b>169</b>
<b>5.4.1 Influência da alteração de rigidez das molas.....</b>	<b>169</b>
<b>5.4.2 Influência da alteração do coeficiente de amortecimento .....</b>	<b>173</b>
<b>6 CONCLUSÕES .....</b>	<b>178</b>
<b>6.1 Considerações finais .....</b>	<b>178</b>
<b>6.2 Sugestões para trabalhos futuros .....</b>	<b>180</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>181</b>
<b>APÊNDICE A .....</b>	<b>187</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sistema de coordenadas do veículo em relação ao centro de gravidade.....	24
Figura 2 – Função PSD de pista de asfalto e de cimento .....	27
Figura 3 – Funções PSD para veículo a 80km/h .....	27
Figura 4 – Aplicação de carga em pneu para medição de deflexão .....	30
Figura 5 – Geometria de um veículo em uma curva .....	31
Figura 6 – Relação entre a força lateral e o ângulo de escorregamento .....	32
Figura 7 – Possibilidade de comportamento dinâmico lateral de um veículo.....	35
Figura 8 – Forças atuantes no movimento longitudinal do veículo na tração .....	35
Figura 9 – Suspensão dianteira do tipo braço-de-arrasto .....	40
Figura 10 – Suspensão dianteira do tipo Wishbone ou Short-Long Arm .....	40
Figura 11 – Suspensão dianteira do tipo MacPherson .....	41
Figura 12 – Suspensão traseira dependente do tipo <i>Hotchkiss</i> .....	43
Figura 13 – Suspensão traseira dependente do tipo <i>Four Link</i> .....	43
Figura 14 – Suspensão traseira semidependente do tipo <i>de Dion</i> .....	44
Figura 15 – Suspensão traseira independente do tipo <i>MacPherson</i> .....	45
Figura 16 – Suspensão traseira independente do tipo <i>Trailing-Arm</i> .....	46
Figura 17 – Suspensão traseira independente do tipo <i>Multilink</i> .....	47
Figura 18 – Suspensão traseira independente do tipo <i>Semi-Trailing Arm</i> .....	47
Figura 19 – Suspensão traseira independente do tipo <i>Swing-Arm</i> .....	48
Figura 20 – Exemplo de mola semielíptica .....	49
Figura 21 – Exemplo de barra de torção aplicada a suspensão de um veículo.....	50
Figura 22 – Curva característica de uma mola helicoidal .....	52
Figura 23 – Suspensão com mola pneumática.....	52
Figura 24 – Comportamento não-linear de uma mola pneumática .....	53
Figura 25 – Construção de amortecedores.....	54
Figura 26 – Exemplo de curva de um amortecedor .....	55
Figura 27 – Exemplo de funcionamento da barra estabilizadora .....	56
Figura 28 – Localização de buchas e pinos esféricos numa suspensão .....	57
Figura 29 – Geometria e curva de rigidez de um batente .....	57
Figura 30 – Vista lateral de um pneu contendo as informações técnicas .....	58
Figura 31 – Modelo para conforto incluindo massa não suspensa e pneu .....	61

Figura 32 – Resposta para o modelo de conforto da Figura 31 .....	61
Figura 33 – Transmissibilidade da massa não suspensa ao variar o amortecimento .....	62
Figura 34 – Escala de desconforto para aceleração ponderada rms em $m/s^2$ .....	66
Figura 35 – Sensibilidade à frequência de vibração das partes do corpo humano (Rao) ....	67
Figura 36 – Sensibilidade à frequência de vibração das partes do corpo humano (Anflor) .	67
Figura 37 – Picos nas frequências naturais de massa suspensa e massa não suspensa...	68
Figura 38 – Elementos principais de um sistema vibratório .....	71
Figura 39 – Exemplo de um sistema de vibração livre do tipo pêndulo .....	73
Figura 40 – Diferentes tipos de excitação.....	74
Figura 41 – Sistema vibratório excitado pela base .....	75
Figura 42 – Transmissibilidade em função da razão de frequência $r$ .....	77
Figura 43 – Sistema vibratório não amortecido com um grau de liberdade e vibração livre	79
Figura 44 – Sistema vibratório amortecido com um grau de liberdade e vibração livre .....	80
Figura 45 – Sistema vibratório amortecido com um grau de liberdade e vibração forçada..	81
Figura 46 – Sistema com vários graus de liberdade .....	82
Figura 47 – Modelo <i>Quarter-Car</i> com amortecimento.....	85
Figura 48 – Modelo <i>Half-Car</i> para movimentação de <i>roll</i> .....	88
Figura 49 – Modelo <i>Half-Car</i> para movimentação de <i>pitch</i> .....	89
Figura 50 – Modelo <i>Full-Car</i> .....	91
Figura 51 – Resultados para os três modelos em simulação de <i>pitch</i> .....	97
Figura 52 – Resultados para os três modelos em simulação de <i>roll</i> .....	97
Figura 53 – Modelo <i>Half-Car</i> considerando o motorista.....	98
Figura 54 – Comparação entre as suspensões passiva, ativa e semiativa.....	101
Figura 55 – Comparação de resposta entre os modelos rígido e rígido-flexível .....	102
Figura 56 – Modelo numérico da suspensão .....	105
Figura 57 – Protótipo em tamanho real da suspensão adaptativa .....	106
Figura 58 – Mapa de decisão para seleção de suspensão .....	107
Figura 59 – Valores ótimos do coeficiente de amortecimento .....	108
Figura 60 – Fluxograma da elaboração do modelo.....	110
Figura 61 – Esquema do modelo completo proposto.....	113
Figura 62 – Relação entre o modelo proposto e o modelo de Becker (2006).....	116
Figura 63 – Divisão do corpo humano – Baseada em Anflor (2003).....	117
Figura 64 – Amplificação da frequência de ressonância x Relação de amortecimento .....	129
Figura 65 – Sensor do tipo acelerômetro piezoelétrico .....	138

Figura 66 – Medidor de velocidade por GPS RaceLogic .....	138
Figura 67 – Coletor de Dados HBM MGC Plus® .....	139
Figura 68 – Placas conectadas aos módulos do Coletor de Dados HBM MGC Plus®.....	140
Figura 69 – Rotina principal do modelo computacional elaborado .....	142
Figura 70 – Matriz massa resultante para o modelo proposto .....	143
Figura 71 – Matriz rigidez resultante para o modelo proposto .....	143
Figura 72 – Matriz amortecimento resultante para o modelo proposto.....	144
Figura 73 – Matriz $K_{\sim}$ de manipulação de frequências não amortecidas .....	145
Figura 74 – Matriz de autovalores da matriz $K_{\sim}$ .....	145
Figura 75 – Matriz de frequências naturais não amortecidas dos elementos em rad/s .....	146
Figura 76 – Vetor de frequências naturais não amortecidas dos elementos em Hz .....	146
Figura 77 – Vetor de frequências naturais amortecidas dos elementos em Hz .....	148
Figura 78 – Aceleração vertical eficaz (RMS) do banco .....	155
Figura 79 – Aceleração vertical eficaz (RMS) do tronco inferior .....	156

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Sinal de excitação da pista na roda anterior.....	133
Gráfico 2 – Sinal de excitação da pista na roda posterior.....	135
Gráfico 3 – Defasagem entre a excitação das rodas do veículo.....	135
Gráfico 4 – Sinal de excitação de pista real.....	136
Gráfico 5 – Comparativo entre os deslocamentos das rodas anterior e posterior .....	149
Gráfico 6 – Comparativo entre os deslocamentos das suspensões anterior e posterior ...	150
Gráfico 7 – Deslocamento vertical do centro de gravidade – <i>Bounce</i> .....	150
Gráfico 8 – Deslocamento angular do centro de gravidade – <i>Pitch</i> .....	151
Gráfico 9 – Deslocamento vertical do banco do motorista.....	151
Gráfico 10 – Aceleração vertical da suspensão anterior.....	153
Gráfico 11 – Aceleração vertical da suspensão posterior.....	153
Gráfico 12 – Aceleração vertical de <i>Bounce</i> .....	153
Gráfico 13 – Aceleração angular de <i>Pitch</i> .....	154
Gráfico 14 – Aceleração vertical no banco do veículo .....	154
Gráfico 15 – Aceleração vertical na roda anterior – Modelo computacional .....	158
Gráfico 16 – Aceleração vertical na roda anterior – Teste experimental.....	159
Gráfico 17 – Aceleração vertical na roda posterior – Modelo computacional .....	159
Gráfico 18 – Aceleração vertical na roda posterior – Teste experimental.....	160
Gráfico 19 – Aceleração vertical na suspensão anterior – Modelo computacional .....	160
Gráfico 20 – Aceleração vertical na suspensão anterior – Teste experimental .....	161
Gráfico 21 – Aceleração vertical na suspensão posterior – Modelo computacional .....	161
Gráfico 22 – Aceleração vertical na suspensão anterior – Teste experimental .....	162
Gráfico 23 – Aceleração vertical no banco do motorista – Modelo computacional .....	162
Gráfico 24 – Aceleração vertical no banco do motorista – Teste experimental .....	163
Gráfico 25 – FFT da aceleração vertical na suspensão anterior – Modelo .....	165
Gráfico 26 – FFT da aceleração vertical na suspensão anterior – Teste experimental .....	166
Gráfico 27 – FFT da aceleração vertical na suspensão posterior – Modelo .....	166
Gráfico 28 – FFT da aceleração vertical na suspensão posterior – Teste experimental....	167
Gráfico 29 – Aceleração vertical RMS no <i>bounce</i> com mudança da rigidez das molas ....	170
Gráfico 30 – Aceleração vertical RMS no banco com mudança da rigidez das molas .....	171
Gráfico 31 – Sinal FFT da suspensão anterior com mudança da rigidez das molas .....	172

Gráfico 32 – Sinal FFT da suspensão posterior com mudança da rigidez das molas .....	172
Gráfico 33 – Aceleração vertical RMS no <i>bounce</i> com mudança de amortecimento .....	174
Gráfico 34 – Aceleração vertical RMS no banco com mudança de amortecimento .....	175
Gráfico 35 – Sinal FFT da suspensão anterior com mudança de amortecimento .....	176
Gráfico 36 – Sinal FFT da suspensão posterior com mudança de amortecimento.....	176

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Conversão entre as formas de medição de severidade da vibração .....	64
Tabela 2 – Conversão entre as formas de expressar os picos de vibração.....	65
Tabela 3 – Descrição dos graus de liberdade e variáveis do modelo proposto .....	112
Tabela 4 – Descrição dos elementos do modelo <i>Half-Car</i> .....	112
Tabela 5 – Descrição dos elementos do modelo biodinâmico .....	112
Tabela 6 – Diferença (%) entre dados experimentais e modelos computacionais.....	115
Tabela 7 – Valores de referências considerados para o corpo humano .....	116
Tabela 8 – Valores das variáveis de entrada do banco .....	125
Tabela 9 – Massas do veículo, dos eixos completos e distância entre eixos .....	126
Tabela 10 – Distâncias dos eixos do veículo em relação ao CG .....	126
Tabela 11 – Valores de massa suspensa e não suspensa do veículo.....	127
Tabela 12 – Valores para as variáveis de entrada referentes ao CG do veículo .....	127
Tabela 13 – Taxa de Ride calculada para as suspensões anterior e posterior.....	128
Tabela 14 – Valores de rigidez das molas de suspensão e dos pneus .....	128
Tabela 15 – Valores de coeficiente de amortecimento das suspensões .....	130
Tabela 16 – Parâmetros do sinal senoidal para a roda anterior .....	133
Tabela 17 – Parâmetros do sinal senoidal para a roda posterior.....	134
Tabela 18 – Descrição do percurso utilizado como sinal de excitação .....	136
Tabela 19 – Dados do veículo utilizado no teste experimental .....	137
Tabela 20 – Frequências naturais não amortecidas de cada GDL .....	147
Tabela 21 – Frequências naturais amortecidas de cada GDL .....	148
Tabela 22 – Valores de velocidade aproximados de cada GDL para excitação senoidal..	152
Tabela 23 – Resumo dos resultados de correlação entre modelo e teste experimental....	163
Tabela 24 – Detalhamento do tratamento dos sinais.....	164
Tabela 25 – Correlação entre as frequências de pico encontradas.....	167
Tabela 26 – Correlação entre as acelerações encontradas nas frequências de pico .....	168
Tabela 27 – Alteração da frequência natural amortecida com mudança de rigidez.....	169
Tabela 28 – Alteração da aceleração vertical RMS com mudança da rigidez das molas ..	170
Tabela 29 – Alteração da frequência de pico com mudança da rigidez das molas .....	171
Tabela 30 – Alteração da aceleração nos picos com mudança da rigidez das molas .....	171
Tabela 31 – Alteração da frequência natural amortecida com mud. de amortecimento ....	173

Tabela 32 – Alteração da aceleração vertical RMS com mudança de amortecimento .....	174
Tabela 33 – Alteração da frequência de pico com mudança do amortecimento.....	175
Tabela 34 – Alteração da aceleração nos picos com mudança do amortecimento .....	175



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAN – *Controller Area Network* (Protocolo de Comunicação Serial)

CG – Centro de Gravidade

FFT – *Fast Fourier Transform* (Transformada Rápida de Fourier)

GDL – Graus de Liberdade

GPS – *Global Positioning System* (Sistema de Posicionamento Global)

MMC – Mínimo Múltiplo Comum

MTVV – *Maximum Transient Vibration Value* (Valor Máximo de Vibração Transiente)

NVH – *Noise, Vibration and Harshness* (Ruído, Vibração e Aspereza)

PSD – *Power Spectral Density* (Densidade Espectral)

RMS – *Root Mean Square* (Raiz Média Quadrática)

RR – *Ride Rate* (Taxa de Rigidez efetiva)

SAE – *Society of Automotive Engineers* (Sociedade de Engenheiros Automotivos)

SEAT – *Seat Effective Amplitude Transmissibility* (Amplitude de Transmissibilidade Efetiva do Assento)

SI – Sistema Internacional de Unidades de Medida

VCI – Vibração de Corpo Inteiro

VDV – Valor Dose de Vibração

## RESUMO

Nesta dissertação foi implementado um modelo computacional capaz de simular a resposta vibracional de veículos de passeio e obter respostas para sinais de excitação aplicados nas rodas, visando a avaliação de vibração e conforto. Tal modelo é criado para otimizar as análises de conforto vibracional, reduzindo o número de testes experimentais, poupando tempo e recursos e facilitando a avaliação de alterações nos componentes. São comuns na literatura modelos que representam apenas o veículo, porém, no modelo proposto, são considerados também o banco e o motorista. Para esta implementação foi elaborado inicialmente um modelo matemático, solucionado com o auxílio do software *Matlab*®. O modelo é do tipo *Half-car* com oito graus de liberdade, sendo quatro do veículo, um do banco do motorista e três do modelo biodinâmico. São levadas em consideração excitações na direção vertical, pelo fato de estas serem preponderantes durante o percurso de um veículo em percurso com irregularidades e com velocidade praticamente constante. Através da manipulação das matrizes são obtidas as frequências naturais, que se mostram coerentes com a literatura. Na primeira análise é utilizado um sinal de excitação do tipo senoidal, para o qual o veículo se apresenta como ligeiramente desconfortável, de acordo com as normas, com aceleração RMS no banco do motorista próximas de  $0,36\text{m/s}^2$ . Posteriormente é utilizado outro sinal de excitação, que simula as amplitudes de deslocamento de um percurso real. Tendo as respostas do modelo para esse sinal é feita uma comparação com dados coletados em teste experimental, a fim de correlacionar o modelo e avaliar a confiabilidade dos resultados obtidos para a validação do modelo computacional. A correlação indica pequenos erros, motivados por fatores explicados no trabalho, estando na faixa aceitável para esse tipo de modelo. Os dados obtidos pelo modelo computacional e os resultados dos ensaios experimentais indicam que o veículo é pouco confortável, com aceleração RMS no banco do motorista próximo a  $0,60\text{m/s}^2$ . Ao final, é feita uma análise da influência da alteração de componentes da suspensão no conforto, alterando os valores de rigidez das molas e o coeficiente de amortecimento. É observada uma influência maior da alteração do coeficiente de amortecimento do que da rigidez das molas no conforto do veículo. Conclui-se que o modelo computacional desenvolvido é válido e poderá ser utilizado como ferramenta para otimizar a avaliação de conforto e a análise da influência de alterações nos parâmetros dos componentes.

Palavras-chave: Vibração, Conforto veicular, Modelo computacional.

## ABSTRACT

In this dissertation was implemented a parametrical computing model capable of simulating passenger vehicles and obtain responses for input signals applied on the wheels, with the goal of evaluating vibration and comfort. The model is designed to optimize the vibrational comfort analyzes, reducing the number of experimental tests, saving time and resources and facilitating the evaluation of component changes. Models that represent only the vehicle are common in the literature, but, in the proposed model, the seat and the driver are also considered. For this implementation a mathematical model was developed, solved with Matlab® software. The model is a Half-car with eight degrees of freedom, four of the vehicle, one of the driver's seat and three of the biodynamic model. Only excitations in the vertical direction are taken into account, since they are preponderant in a vehicle on a track with irregularities and constant speed. Through manipulation of the system matrix the natural frequencies of the model are obtained, with are consistent with the literature. In the first analysis, a sinusoid input signal is applied, for which the vehicle presents as slightly uncomfortable, when compared to standards, with an RMS acceleration in the driver seat close to  $0,36\text{m/s}^2$ . After, another input signal is used, used to simulate the displacement amplitudes of a track. Having the answers from the model for this kind of signal, a comparison is made with data gathered in experimental test, to correlate the model and evaluate the reliability of the obtained answers for the validation of the computational model. The correlation indicates small errors, motivated by a series of factors explained in the paper, being the error margin acceptable for this kind of model. The data from the model and from the experimental test indicate that the vehicle is mildly uncomfortable, with RMS acceleration in the driver seat close to  $0,6\text{m/s}^2$ . Lastly, is made an analysis of the effect of changing components of the suspension of the vehicle in the comfort of the vehicle, changing stiffness values of the springs and damping coefficients. It is observed a bigger influence of changing the damping coefficients, rather than springs stiffness, in the comfort of the vehicle. It is concluded that the computational model developed is valid and can be used as a tool to optimize the comfort evaluation and the analysis of the influence of changes in the parameters of the components.

Keyword: Vibration, Vehicle Comfort, Computational Model

# 1 INTRODUÇÃO

Gillespie (1992) considera como um dos principais fatores de qualidade de um veículo o seu conforto vibracional, o que corrobora com o que pode ser constatado de que não basta que um veículo tenha apenas boas respostas dinâmicas, como de aceleração e de frenagem, em conjunto com uma boa aparência estética, mas que também é necessário que este seja confortável.

Ainda segundo Brizon (2012), as diferenças entre projetos com bom compromisso vibracional e acústico e projetos menos refinados nesse quesito são notados entre os clientes de veículos de passeio de forma significativa, o que faz com que o comprometimento com o bom desempenho seja ainda mais relevante.

Porém, na maioria das vezes, na indústria automobilística, tais níveis de conforto eram avaliados apenas de forma subjetiva, na qual motoristas previamente treinados avaliavam veículos, comparando-os baseado em sua percepção dos níveis de vibração.

Mas, atualmente, busca-se atingir menores níveis de vibração no habitáculo, principalmente nas frequências mais críticas de ressonância com o corpo humano, a fim de diminuir o desconforto aos passageiros e garantir maior integridade aos pequenos volumes de carga transportados

Com esse aumento da preocupação da indústria com o conforto veicular, passa-se a ser utilizadas medições objetivas, em conjunto com as subjetivas, para que se tenha uma maior efetividade dos resultados, aumentando a confiabilidade das comparações, que passam a ser também quantitativas.

Tais testes se tornam importantes para que se tenha uma correlação entre as sensações dos motoristas e o resultado numérico apresentado, ficando mais claras as decisões a serem tomadas para atingir melhorias.

Porém, para se obter esse conjunto de respostas subjetivas e objetivas, a indústria tem um custo e tempo de desenvolvimento indesejável, visto que para cada modificação proposta ao veículo, mesmo que em apenas um dos componentes da suspensão, deve-se haver novas avaliações realizadas sobre os veículos, que demandam instrumentação, rodagens nas pistas determinadas, medições, além da avaliação subjetiva em si.

Para resolução desse problema fica clara a necessidade de, cada vez mais, serem elaborados modelos computacionais capazes de otimizar as análises de resposta vibracional dos veículos, e, conseqüentemente, seu desempenho em relação ao conforto.

## 1.1 Justificativa e Relevância

O uso de um modelo computacional confiável, que seja capaz de eliminar grande parte dos testes em veículo, sejam esses testes objetivos ou subjetivos, é uma valiosa maneira de reduzir de forma bastante considerável o tempo gasto e, principalmente, o custo operacional necessário para esse tipo de análise.

Cada vez mais, portanto, tem sido viável utilizar os conhecimentos adquiridos de dinâmica veicular para a criação matemática de modelos computacionais, que sejam capazes de simular respostas para conforto veicular, dirigibilidade ou frenagem dos veículos, em diversas situações.

Além disso, é relevante que se tenha a possibilidade de aumentar as combinações de parâmetros testados entre os variados componentes da suspensão, já que, utilizando o modelo computacional, reduz-se infinitamente o tempo gasto.

Isso torna possível a inserção de um maior número de propostas de modificação no mesmo tempo estimado de desenvolvimento, sem interferir nas datas pré-estabelecidas do projeto, podendo ser possível alcançar uma combinação final mais otimizada e refinada.

## 1.2 Objetivo principal

A partir do problema apresentado o trabalho busca elaborar um modelo computacional do tipo *Half-car*, que considera, além dos elementos de massa suspensa e não suspensa do veículo, o banco do motorista e um ocupante sobre ele, através da adição de um modelo biodinâmico.

O modelo completo proposto tem como objetivo principal avaliar o comportamento de resposta vibracional de um veículo de passeio ao ser excitado por um sinal de entrada, seja este senoidal ou de uma pista real, através da análise de respostas temporais dos deslocamentos, velocidades e acelerações de cada um dos graus de liberdade e de respostas em frequência das suspensões anterior e posterior.

### 1.3 Objetivos específicos

Para atingir o objetivo principal são definidos alguns objetivos específicos, que permitem a utilização do modelo para realização das análises de resposta vibracional desejadas.

- Inicialmente deseja-se definir um número de graus de liberdade ideal para o modelo, que não o torne complexo, mas que o faça ser capaz de responder com fidelidade às excitações aplicadas;
- Objetiva-se definir os valores para todos os parâmetros presentes no problema, tanto para os componentes do veículo quanto para o corpo humano e o banco do motorista, baseando-se em um modelo de veículo real e em dados presentes na literatura;
- Deseja-se ainda que o modelo seja capaz de obter as frequências naturais amortecidas e não amortecidas, além das respostas vibracionais, e que, a partir disso, possa ser feita uma validação dos resultados encontrados através de uma correlação com testes experimentais e com dados de estudos já realizados;
- E, por fim, como último objetivo, busca-se que, utilizando o modelo proposto, seja possível avaliar a influência de alterações nos parâmetros de alguns dos componentes na resposta de conforto do veículo.

### 1.4 Divisão dos capítulos

A dissertação é composta de seis capítulos, sendo que neste primeiro são apresentados os objetivos do trabalho e as justificativas para sua elaboração, com o propósito de deixar claro o que motivou a escolha do tema.

No segundo capítulo, intitulado de Revisão Teórica, é discutido conceitos a respeito do comportamento dinâmico do veículo, dos principais tipos e componentes do sistema de suspensão, das vibrações e sua relação com o conforto, além de alguns modelos dinâmicos existentes.

Na sequência se apresenta uma Revisão Bibliográfica, como terceiro capítulo, na qual é feita uma análise de estudos já publicados a respeito dos assuntos acima mencionados, a fim de aprofundar no conhecimento dos assuntos discutidos, contando

com novas aplicações e resultados que embasam, de certa forma, o desenvolvimento deste trabalho.

No quarto capítulo é apresentada a metodologia seguida para a execução da pesquisa e feita a descrição do modelo dinâmico, dos critérios de escolha da tipologia, dos graus de liberdade e dos fatores considerados, além de apresentar os valores base para cada um dos parâmetros e a resposta das matrizes de massa, rigidez e amortecimento desses parâmetros.

O capítulo de Metodologia é seguido pelo capítulo chamado de Resultados: Análise e Discussão, no qual é mostrado o modelo computacional elaborado e os resultados obtidos através do seu uso e, mediante tais respostas, é feita a discussão a respeito do comportamento do modelo e da análise da influência da alteração dos parâmetros, tornando possível a obtenção de considerações finais, que são mostradas no sexto capítulo, intitulado de Conclusões, no qual também são definidas propostas para possíveis trabalhos futuros.

Ao final da dissertação, é apresentado um apêndice, que apresenta o modelamento matemático de forma mais detalhada, contendo o passo-a-passo do equacionamento capaz de gerar as relações finais utilizadas na rotina computacional.

## 2 REVISÃO TEÓRICA

Para o desenvolvimento do trabalho é necessário um prévio conhecimento a respeito do comportamento dinâmico de um veículo de passeio e dos principais componentes do sistema de suspensão, responsáveis por grande parte do resultado de tal comportamento.

### 2.1 Dinâmica Veicular

A dinâmica de um veículo abrange toda a movimentação do mesmo, que ocorre nas três direções de um sistema de coordenados orientado em seu centro de gravidade, e tem como elementos de causa, variados fatores como a ação do peso do veículo, as forças de aceleração e frenagem, o comportamento aerodinâmico de sua estrutura, o contato com as irregularidades da pista, entre outros.

Todos esses fatores quando somados geram como resultado o comportamento dinâmico geral do veículo, que nada mais é que a resposta à soma de todas as forças que atuam sobre ele.

O estudo e a avaliação de tal dinâmica podem ser feitos tanto de forma objetiva quanto de forma subjetiva, levando sempre em consideração que, em muitas das vezes, a forma mais comum de se obter um resultado otimizado baseia-se no fato de unir a maneira empírica com o embasamento teórico analítico.

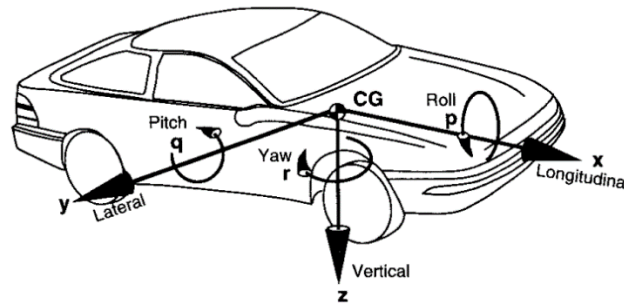
No caso dos estudos teóricos em que se considera um modelo analítico de resolução do problema, como para desenvolvimento do modelo computacional deste trabalho, é utilizado a álgebra linear e/ou métodos de equações diferenciais, a fim de obter o resultado esperado de movimentação.

Para esses casos o veículo é considerado como um corpo de massa única e rígida, definindo que o centro de gravidade do mesmo é localizado exatamente no centro do corpo, e tomando esse corpo como toda a massa não suspensa do veículo.

Porém, como se toma o veículo como um corpo rígido e todas as manobras e movimentações sofridas por ele se dão em relação a esse corpo deve-se ter um conjunto de eixos de referência padrão, definidos por norma. Para o modelo computacional deste trabalho define-se como padrão o sistema de eixos definido pela SAE e utilizado por Gillespie (1992), que é mostrado na Figura 1.



Figura 1 – Sistema de coordenadas do veículo em relação ao centro de gravidade



Fonte: Gillespie (1992), página 8

As movimentações do veículo ocorrem nos três eixos apontados acima, e também no sentido rotacional dos mesmos, assim como identificados na figura. A movimentação vertical da carroceria é chamada *Bounce*, e ocorre no deslocamento pelo eixo z.

Já as movimentações de rotação em torno dos eixos recebem um nome específico para cada situação: quando em torno do eixo x é chamada de rolagem, e gera um ângulo chamado *Roll*, já quando em torno do eixo z é chamada de guinada, ou *Yaw*, e por fim quando em torno do eixo y, é chamada de arfagem ou *Pitch*.

Para cada tipo de análise ou manobra deve-se atentar a uma ou a um conjunto dessas movimentações, dependendo do que se procura entender da dinâmica do veículo, como por exemplo para o desempenho de conforto, em que se toma como foco principal a movimentação vertical do veículo (*Bounce*).

Portanto, as forças que atuam sobre o veículo e geram sobre ele alguns tipos de movimentação podem ser classificados de acordo com seu eixo de ação, podendo estes ser verticais, como no caso das irregularidades do percurso, longitudinais, como em manobras de aceleração e frenagem e ainda, laterais, como em curvas de alta velocidade. A dinâmica de um veículo como um todo, portanto, engloba quatro grandes frentes, chamadas de *Ride*, *Handling*, frenagem e tração.

### 2.1.1 Dinâmica Vertical

A dinâmica vertical, também denominada *Ride*, tem como foco a análise das movimentações do veículo no sentido dos seus eixos y e z, sendo capaz de analisar o desempenho de conforto do veículo.

Segundo Gillespie (1992), quando se fala em desempenho de conforto, o fator de maior influência se dá pelas forças de contato entre pneu/solo, ou seja, pela interação

entre a pista e a massa não suspensa do mesmo, que é formada pelo conjunto pneu/roda e pelos componentes da suspensão, como molas e amortecedores.

Porém, tal interação com a pista gera vibrações que são sentidas pelos usuários, por meio de acelerações no seu corpo, que vão desde baixas frequências, consideradas por Gillespie (1992) de 0Hz a 25Hz e estudadas por este como *Ride* até altíssimas frequências, considerados como ruído não audível e não associadas ao conforto propriamente dito, sendo tratadas como *NVH*.

O que se busca, quando se pensa em desempenho de conforto veicular, como neste trabalho, é que se isole do usuário o máximo possível de vibração advinda de irregularidades do percurso ou de massas rotativas, como pneu, roda, motor e câmbio, garantindo assim um maior nível de conforto para o usuário, sem prejudicar de forma aguda o comportamento de *Handling* do veículo, ou seja, sua dirigibilidade.

Além de todos esses fatores, dependentes de bons projetos das suspensões veicular e motopropulsora, ainda se tem influência de outros fatores no conforto de um veículo, que são chamados de *Ride Quality*, e estão ligados ao projeto dos assentos, a ventilação, o espaço interno, entre outros. Este trabalho toma como base apenas a análise de *Ride*, se preocupando com os desempenhos das suspensões citadas e da influência delas e de seus componentes nos níveis de conforto sentidos pelo usuário.

Apesar de Gillespie (1992) assumir que apenas o intervalo de frequências de 0 a 25Hz é responsável pelo comportamento de *Ride*, Rao (2009) e Reimpell *et al*(2001) mostram que o estudo de frequências para corpo humano e, conseqüentemente, o conforto vibracional de um veículo tem uma faixa de frequência considerada crítica de 1 a 80Hz.

As vibrações mais altas, principalmente acima de 25Hz são denominadas na maioria das vezes como *harshness* ou *aspereza* e deixam de ser sentidas, na maioria das vezes, pelo tronco do corpo humano, passando a ser sentidas pelos membros inferiores, através do assoalho do veículo ou do próprio assento, mas ainda assim, sendo parte do estudo de conforto vibracional.

Quando se fala em *Ride*, e na preocupação focada na movimentação vertical do veículo, define-se como principal fonte de excitação do veículo as irregularidades provenientes do percurso, ou seja, buracos, calçamentos soltos, rugosidade do asfalto, entre outras características da pista.

Porém, é importante que se saliente que movimentações longitudinais, ou seja, aquelas que ocorrem no sentido do eixo x, também podem ser de grande importância em

alguns aspectos no que se diz a conforto, principalmente em manobras de aceleração e de frenagem, mas não são o foco no estudo de desempenho de conforto deste trabalho.

Para o modelo computacional definido neste trabalho toma-se, então, como base de fonte de excitação as irregularidades da pista, que servem como função de entrada da movimentação sofrida pelo corpo rígido que representa o veículo.

Tais irregularidades são representadas pela movimentação vertical da massa não suspensa do veículo, ou seja, pela quantificação da elevação do piso sobre a qual o conjunto pneu/roda percorre, definindo assim os perfis de pista.

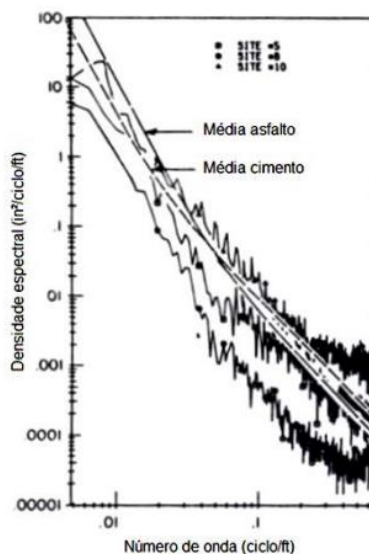
### **2.1.1.1 Excitações por parte da pista**

Um determinado perfil de pista, com elevações aleatórias, pode ser determinado, segundo Gillespie (1992), através o uso de perfilômetros, que medem o perfil de elevação da pista ao longo de seu comprimento. Tal sinal é pós processado através da Transformada Rápida de Fourier (FFT), que faz com que se tenha o espectro de frequência do percurso e, a partir daí, gera-se a informação de densidade espectral de potência (PSD), que descreve, através de um somatório, a forma como a energia do sinal se distribui no domínio da frequência.

Ainda segundo Gillespie (1992) a maneira mais utilizada de representação para um perfil de pista é através do PSD, tomando como base as frequências espaciais, que são geradas através da divisão das frequências temporais pela velocidade do veículo. Tais frequências são expressas em relação ao número de onda, que nada mais são do que o inverso do comprimento de onda.

Através da Figura 2 vê-se exemplos de funções PSD para percursos de cimento rígido (PCC) e de asfalto. Nela fica claro que há um comportamento padrão entre os PSD de pistas diferentes, que é o decaimento da amplitude com o aumento da frequência espacial, e que através desses sinais também consegue-se entender a qualidade do percurso analisado, visto que maiores amplitudes indicam maiores irregularidades do percurso, indicando piores condições da pista.

Figura 2 – Função PSD de pista de asfalto e de cimento

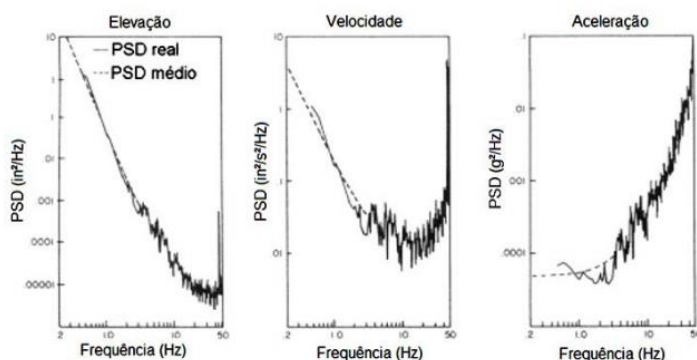


Fonte: Adaptado de Gillespie (1992), página 127

Um modelo computacional, para que consiga representar um veículo trafegando em uma determinada pista, deve ter como entrada o modelo PSD daquele determinado percurso, ou seja, receber um sinal que seja condicionado de forma a ter as mesmas características da pista em que se deseja analisar o comportamento vibracional.

Para o modelo, as irregularidades são consideradas entradas do sistema, sendo sempre analisadas como acelerações no sentido da pista para a roda, ou seja, impostas pelo percurso, fazendo com que se tenha uma forma diferente de PSD. Sendo assim não se analisa basicamente as elevações como na figura anterior, mas também funções PSD para a velocidade e para aceleração, sendo representadas pela primeira e segunda derivada da função PSD de elevação, respectivamente. Para estes casos deve-se transformar a frequência espacial novamente em frequência temporal.

Figura 3 – Funções PSD para veículo a 80km/h



Fonte: Adaptado de Gillespie (1992), página 130

Na Figura 3, Gillespie (1992) mostra qual seria o resultado dessas derivações para um determinado veículo trafegando a 80km/h num tipo de perfil de pista, e nota-se que, para as acelerações, há maior influência das irregularidades da pista nas frequências acima de 10Hz, sendo bem importante a análise na faixa de frequência de 10 a 50Hz, o que mostra a grande relevância das irregularidades para o estudo das frequências da faixa de *Ride*.

### **2.1.1.2 Excitações por parte dos componentes**

Segundo Gillespie (1992) não só as irregularidades da pista geram excitação no veículo, mas também a movimentação de alguns componentes do mesmo, como o motor, o câmbio e o conjunto pneu/roda. Tais componentes possuem um movimento rotativo e devido ao seu desbalanceamento geram vibrações que são significativas, mas nem sempre são relevantes no estudo do desempenho de conforto do veículo.

Quando se analisa a movimentação do sistema de transmissão e do motor nota-se que tais componentes têm como maior parcela de movimentação rotações que são absorvidas quase que praticamente pelos coxins de borracha localizados nos três suportes do motor, ou seja, se bem calibrados, causam pouca influência na movimentação vertical do veículo.

Concomitante a isso, têm-se o conjunto pneu/roda, que, apesar de não ser ideal, ou seja, apresentar desbalanceamento por diversos fatores, ainda assim, segundo Gillespie (1992) não causam variações na movimentação vertical, sendo, assim como motor e câmbio, responsáveis por movimentações rotacionais de *yaw*, *pitch* e *roll*.

Portanto, para análise do conforto veicular e do comportamento do veículo quanto ao *Ride* deve-se atentar quase que somente para as movimentações verticais advindas das irregularidades da pista.

Porém o pneu tem uma enorme relevância no que se diz respeito a absorção da movimentação vertical, já que este é o principal componente de interação entre o veículo e o percurso que este se encontra. Segundo Jazar (2008) o pneu pode ser responsável por alterações no *Ride*, e como esperado, no *Handling* e no consumo de combustível, sendo, portanto, importante entender o comportamento do mesmo e como determinar sua presença no modelo computacional.

Dukkipati et al (2008) indica como principais parâmetros de um pneu sua rigidez vertical e seu amortecimento, e diz que, a rigidez dinâmica de um pneu é função da sua

frequência de excitação, e que estas são inversamente proporcionais. Deve-se atentar ainda ao fato do pneu ser constituído de borracha e, por esse motivo, possuir em seu comportamento o que se chama de histerese, na qual há diferença do comportamento entre o carregamento do pneu e a retirada da carga, sendo influenciada ainda pela mudança de temperatura.

Para o modelo computacional descrito, seguindo o que diz Gillespie (1992), deve-se tomar o pneu como uma mola, que tem como papel absorver a movimentação provocada pela pista e, interagir com as massas suspensas e não suspensas. Porém, além de considerar os pneus como molas deve-se atentar ao fato de que, por ser um componente dinâmico, este possui frequências de ressonância e pode, inclusive, entrar em ressonância com algum outro componente da suspensão do veículo.

Além disso, para aplicação de um pneu em um determinado veículo e para variação de parâmetros além da rigidez do pneu neste modelo computacional, se fosse o caso, dever-se-ia saber que, segundo Freitas (2006) a influência de um pneu na dinâmica vertical de um veículo se dá principalmente por dois fatores: por sua deflexão radial (estática) e por sua velocidade de deflexão (dinâmica), ambos causando forças no eixo z.

A parcela de força vertical pode ser calculada por:

$$F_V^S = \alpha_1 \Delta_Z + \alpha_2 (\Delta_Z)^2 \quad (1)$$

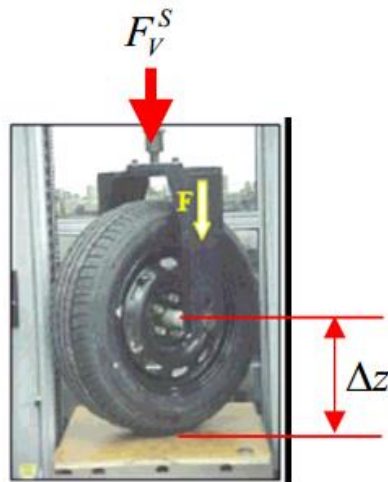
Onde:

$$\begin{aligned} F_V^S &= \text{carga estática vertical;} \\ \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 &= \text{ctes obtidas experimentalmente} \\ \Delta_Z &= \text{deformação devido a força } F_V^S \end{aligned}$$

A partir daí mede-se, em equipamento específico, mostrado na Figura 4, a deflexão radial estática,

$$F_V^S = \text{Carga} \times \Delta_Z = \text{Deflexão} \quad (2)$$

Figura 4 – Aplicação de carga em pneu para medição de deflexão



Fonte: Adaptado de Freitas (2006)

Para a parcela dinâmica da força vertical, faz-se:

$$F_V^D = dr\Delta_z \quad (3)$$

Onde:

$F_V^D =$  carga dinâmica vertical;

$dr =$  cte de amortecimento

$\Delta_z =$  velocidade de deformação devido a força  $F_V^D$

Portanto, quando se fala em conjunto pneu/roda deve-se entender como um sistema complexo, e que, por essa complexidade, é considerado no modelo computacional deste trabalho, que é elaborado de forma simplificada, como uma mola que possui como parâmetro apenas a rigidez vertical.

### 2.1.2 Dinâmica Lateral – Handling

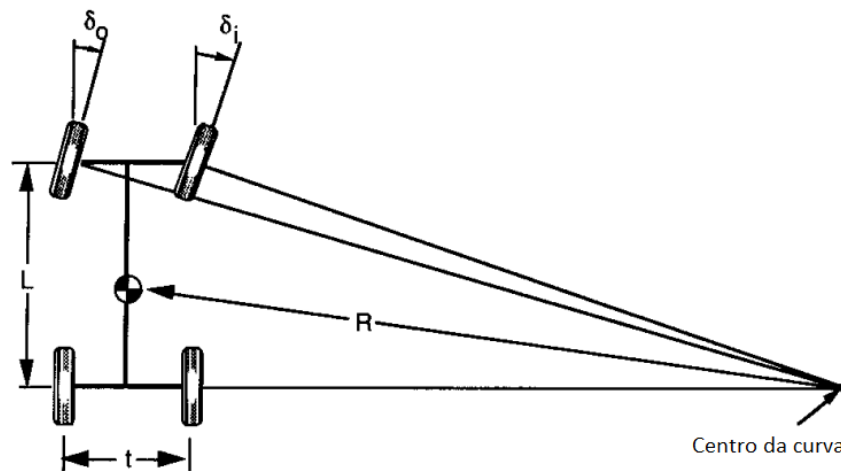
O comportamento de um veículo em uma curva, segundo Gillespie (1992) é um importante modo de mensurar o desempenho de um veículo, sendo muitas vezes equiparado ao que se chama de *Handling*, que, nada mais é que a capacidade que um veículo oferece ao condutor em responder aos comandos do mesmo, ou seja, o quanto o veículo possui de dirigibilidade.

Esse critério de dirigibilidade, ainda segundo ele, é uma maneira de se medir a interação entre veículo e motorista, sabendo que, a partir do movimento de um veículo, de sua direção e posição, o motorista altera seus comandos/entradas a fim de que o veículo percorra o caminho desejado. É como em uma curva em que o carro tende a sair da trajetória e o motorista, se capacitado, corrige essa trajetória com comandos de volante, aceleração ou frenagem.

A geometria de um veículo em curva, é dada por dois ângulos diferentes, chamados de ângulos de esterçamento, uma para a roda externa ( $\delta_o$ ) e outro para roda interna ( $\delta_i$ ), e, seu comportamento depende ainda de características de construção do veículo e da curva em que se pretender percorrer.

Segundo Gillespie (1992) pode-se resumir tal geometria na Figura 5, sendo L a medida de distância entre eixos, t a bitola do veículo e R o raio da curva.

Figura 5 – Geometria de um veículo em uma curva



Fonte: Adaptado de Gillespie (1992), página 197

Ainda segundo Gillespie (1992) os ângulos de esterçamento, em pequenas manobras, são tomados como pequenos e podem ser definidos como:

$$\delta_o \cong \frac{L}{R + \frac{t}{2}} \qquad \delta_i \cong \frac{L}{R - \frac{t}{2}} \qquad (4 \text{ e } 5)$$

E a média desses ângulos é definida como ângulo de Ackerman, e é definida por Gillespie (1992) como sendo:



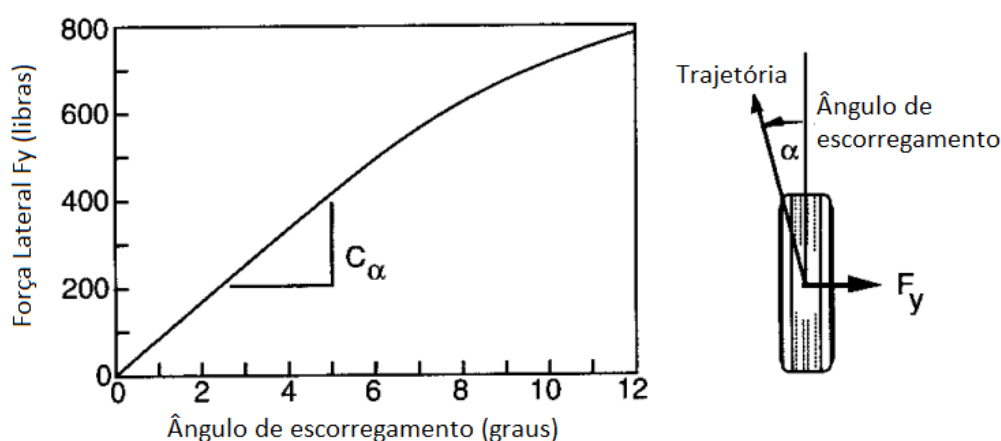
$$\delta = \frac{L}{R} \quad (6)$$

Porém, para a dinâmica lateral em si, a situação que demanda mais atenção é o comportamento do veículo em alta velocidade, já que nessa situação há presença de aceleração lateral, gerando o que se chama de ângulo de escorregamento ( $\alpha$ ).

Tal ângulo é a relação entre a direção de rolamento e a direção instantânea do movimento, e indica o quanto o veículo está tendendo a sair da sua trajetória esperada.

A relação entre esse ângulo e a força lateral do veículo é vista na Figura 6.

Figura 6 – Relação entre a força lateral e o ângulo de escorregamento



Fonte: Adaptado de Gillespie (1992), página 198

Fica claro que quanto maior a força lateral, maior a tendência ao desvio da trajetória, e que, para ângulos de escorregamento menores que  $5^\circ$  a relação é linear, e pode ser dada pela equação abaixo, onde  $C_\alpha$  representa a rigidez lateral do pneu.

$$F_y = C_\alpha \alpha \quad (7)$$

A força lateral ( $F_y$ ) em um veículo, que define em grande parte o seu comportamento de dinâmica lateral, e conseqüentemente seu *Handling*, é influenciada por diversos fatores, desde a velocidade do veículo, quanto a características dos pneus, como pressão utilizada, carga radial, tipo de pneu e de carcaça, desgaste da banda de rolagem, o próprio ângulo de escorregamento, entre outros.

Portanto, para a dinâmica lateral o conjunto pneu/roda tem influência ainda maior do que fora citado na dinâmica vertical, onde este conjunto pode ser representado no modelo como uma mola de único parâmetro, sua rigidez.

### 2.1.2.1 Gradiente de subesterçamento (K)

Um dos fatores mais importantes para o desenvolvimento de veículos e o seu resultado final de *Handling* é a relação entre as cargas por eixo e rigidez lateral dos pneus utilizados em cada um desses eixos.

Tal índice é chamado de gradiente de subesterçamento, denominado neste trabalho pela letra K, e indica a tendência de comportamento de um veículo mediante uma curva de média/alta velocidade.

Esse índice é dado pela equação abaixo, segundo Gillespie (1992).

$$K = \frac{W_f}{C_{\alpha f}} - \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \quad (8)$$

Onde,

$W_f$  = carga no eixo frontal

$W_r$  = carga no eixo traseiro

$C_{\alpha f}$  = rigidez lateral do pneu dianteiro

$C_{\alpha r}$  = rigidez lateral do pneu traseiro

Esse coeficiente possui três possibilidades, indicando três tipos de tendência distintos em curva, sendo definidas na sequência, a primeira delas, e menos comum entre os veículos, é o comportamento neutro.

$$\frac{W_f}{C_{\alpha f}} = \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \rightarrow K = 0 \rightarrow \text{Esterçamento Neutro} \quad (9)$$

A segunda delas, indicada para veículos de passeio por sua maior facilidade de controle, é a tendência ao subesterço, na qual o veículo possui maior carga no eixo dianteiro e o veículo tende a sair de frente, perdendo então a dirigibilidade.

$$\frac{W_f}{C_{\alpha f}} > \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \rightarrow K > 0 \rightarrow \text{Subesterçamento} \quad (10)$$

Para esse tipo de comportamento se define uma velocidade característica, que é a velocidade na qual o veículo perde a dirigibilidade, dada, segundo Gillespie (1992), pela equação abaixo onde L representa a distância entre eixos e g a aceleração gravitacional.

$$V_{\text{característica}} = \sqrt{\frac{57,3 * L * g}{K}} \quad (11)$$

E a terceira, indicada para veículos de corrida, é a tendência ao sobre esterço, na qual o veículo, com maior carga no eixo traseiro, consegue contornar a curva de maneira mais rápida, porém tendendo a escapar a traseira, sendo mais difícil de controlar por parte do motorista, já que se perde a estabilidade do mesmo.

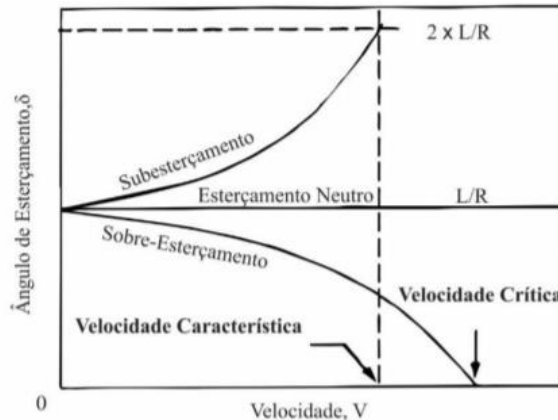
$$\frac{W_f}{C_{\alpha f}} < \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \rightarrow K < 0 \rightarrow \text{Sobre - esterçamento} \quad (12)$$

Para veículos com comportamento sobre-esterçante define-se uma velocidade crítica, onde o veículo perde a estabilidade, que é dada pela equação abaixo.

$$V_{\text{crítica}} = \sqrt{\frac{-57,3 * L * g}{K}} \quad (13)$$

Em resumo, na Figura 7 vê-se as três possibilidades de comportamento de um veículo e a relação entre o ângulo de escorregamento e a velocidade.

Figura 7 – Possibilidade de comportamento dinâmico lateral de um veículo



Fonte: Adaptado de Gillespie (2012), página 204

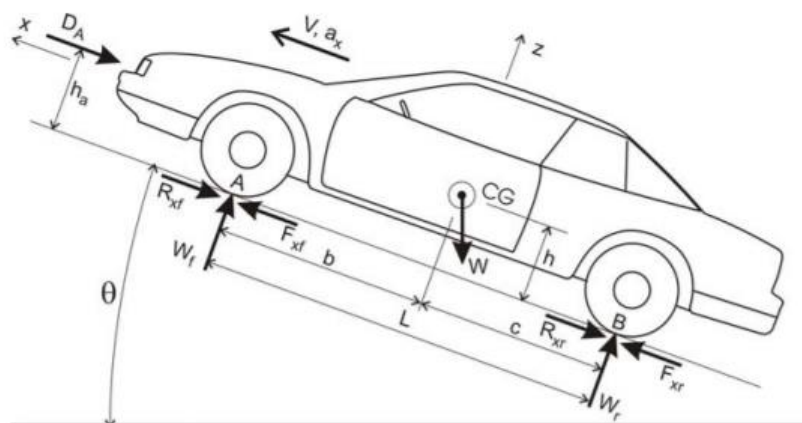
### 2.1.3 Dinâmica Longitudinal – Aceleração e frenagem

Por último, mas não menos importante, tem-se a dinâmica longitudinal de um veículo, que aborda o estudo da aceleração e frenagem do mesmo, quando este percorre uma trajetória em linha reta.

Tal aspecto, assim como a dinâmica lateral, tem pouca influência no desempenho de conforto de um veículo, porém, ainda assim, pode ser capaz de gerar algum tipo de desconforto ao motorista em casos específicos, como de alguma bucha muito enrijecida, que provoque trancos nas frenagens, por exemplo.

Durante a movimentação longitudinal do veículo, seja em aceleração ou frenagem, tem-se algumas forças atuantes no mesmo, provocando seu deslocamento e definindo seu comportamento, como definido por Gillespie (1992) e mostrado abaixo na Figura 8.

Figura 8 – Forças atuantes no movimento longitudinal do veículo na tração



Fonte: Adaptado de Gillespie (1992), página 11

No modelo apresentado acima o veículo é considerado como um corpo rígido, ou seja, não são consideradas deformações na carroceria e nem efeitos causados pela suspensão e pelos pneus.

A superfície em que o veículo se encontra pode ser inclinada ou plana, dada pelo ângulo  $\Theta$ , e não se consideram ondulações/buracos e o veículo é considerado simétrico em relação ao CG, o que implica em reações iguais nas rodas do lado direito e esquerdo.

Sendo feitas essas considerações, temos ainda:

- $W$  como sendo o peso do veículo com valor de intensidade igual ao da massa do veículo ( $m$ ) pela aceleração gravitacional ( $g$ );
- Os valores de  $W_f$  e  $W_r$  como sendo as reações normais dos pneus dianteiros e traseiros respectivamente, já sendo a soma dos dois pneus de cada eixo, considerando-os idênticos;
- As forças  $F_{xf}$  e  $F_{xr}$  representam as forças de tração em cada um dos eixos e as forças  $R_{xf}$  e  $R_{xr}$  as forças correspondentes a resistência ao rolamento, distribuídas nas áreas de contato com a pista;
- O centro de gravidade é dado como CG, a distância entre eixos como  $L$  e a distância das rodas dianteiras e traseiras até o CG por, respectivamente,  $b$  e  $c$ ;
- A força de arrasto (drag) é representada por  $D_A$ , sendo ignorada sua normal, e a altura do CG em relação ao pavimento é dada por  $h_A$ ;

Segundo Gillespie (1992) o movimento longitudinal do veículo, quando representado por este modelo, pode ser descrita através de três equações matemáticas capazes de governar o movimento.

Considerando o movimento plano, e a direção do eixo  $z$ , vertical, pode-se inferir através do teorema da resultante que:

$$0 = W_f - Mg \cos \theta + W_r \quad (14)$$

Para a direção do eixo  $x$ , considerando  $W = mg$ , temos:

$$Ma_x = -D_A - R_{xf} + F_{xf} - Mg \sin \theta - R_{xr} + F_{xr} \quad (15)$$

E por fim, utilizando o teorema de quantidade de movimento angular, faz-se:

$$0 = -Mha_x - D_A h_A - W_f L + Mgc\cos\theta - Mghs\sin\theta \quad (16)$$

A dinâmica longitudinal do veículo, caso necessário fosse, poderia ser aprofundada nos aspectos individuais de aceleração e de frenagem, já que as duas situações provocam no veículo relevantes respostas em relação ao seu desempenho.

Dukkipati *et al* (2008) considera importante a divisão entre as duas frentes e descreve para a dinâmica de frenagem de um veículo as forças e momentos de frenagem, equacionando seu movimento e analisando fatores como dispositivos antitravamento das rodas, transferência de peso durante a frenagem, distância de parada, entre outros.

Para a dinâmica de aceleração, são definidas transferência de peso, efeitos da aerodinâmica do veículo, influência do motor e de suas características, efeito da transmissão no desempenho de aceleração, além de outros inúmeros fatores.

Para este trabalho, com enfoque no desempenho de conforto, não é detalhado o comportamento longitudinal no que se diz respeito a estas características, mas, deve-se atentar ao fato de que o motorista também sente desconforto vindo do sentido longitudinal.

## 2.2 Suspensão

O estudo de desempenho de conforto de um veículo, baseado principalmente no que se denomina dinâmica vertical, traz consigo a necessidade de um entendimento aprofundado dos sistemas de suspensão de um veículo, já que estes são peça fundamental na resposta do veículo em relação a esse tipo de avaliação. Freitas (2006) mostra a importância dos pneus na absorção de impactos advindos da movimentação do veículo e no conforto sentido pelos passageiros.

Durante o desenvolvimento dos veículos posteriores sente-se a necessidade da inserção de outros componentes de suspensão, já que para baixas frequências e percursos lisos, os pneus são suficientemente bons em conforto e dirigibilidade, mas, para altas frequências e pistas muito irregulares, um conjunto de mola e amortecedor, mesmo que simples, se faz necessário.

Segundo Bastow (1990), o sistema de suspensão, com molas e amortecedores, tem como principal função absorver os impactos de pistas irregulares, garantindo maior

conforto aos usuários e aumentando a vida útil do veículo. Mas, ainda segundo ele, a suspensão também tem como papel fundamental garantir o contato do pneu com o solo, aumentando a estabilidade do veículo e sua dirigibilidade.

A adoção de molas foi iniciada ainda no século XIX e até hoje estas são utilizadas, mesmo que não da mesma maneira. Freitas (2006) cita estudo que aponta o uso de feixe de molas como alternativa para a dissipação de energia, devido ao atrito gerado entre o contato das lâminas e ao fato de que a aplicação de amortecedores ainda era recente.

A utilização de amortecedores dividiu opiniões entre os que consideravam a ação dos mesmos apenas na tração ou aqueles que consideravam que tais componentes deveriam atuar tanto na tração quanto na compressão.

Gillespie (1992) define, de forma geral, algumas funções para a suspensão de um automóvel, que são consideradas como primordiais, e que incluem relevâncias tanto para conforto quanto para *handling*:

- Fornecer uma conformidade vertical das rodas, isolando o chassi das irregularidades da estrada;
- Garantir que as rodas sejam mantidas na direção adequada durante o trajeto;
- Suportar as forças impostas pelos pneus devido a forças longitudinais de aceleração e de frenagem, forças laterais em curvas e demais resultantes de esforços;
- Resistir ao movimento de rolagem (*roll* – rotação em torno do eixo x) do chassi;
- Manter os pneus em contato com a pista ainda que sob uma variação mínima de carga;

Ainda segundo Gillespie (1992), as propriedades importantes de uma suspensão no que se diz respeito à dinâmica veicular são observadas principalmente no comportamento cinemático do veículo e nas suas respostas em relação às forças e aos momentos que são transmitidos dos pneus até o chassi.

E, em adição a isso, num processo de desenvolvimento de um veículo, para a escolha de tipologias e componentes, são analisados também: custo, peso, facilidade de montagem, espaço disponível, entre outros aspectos.

Em relação ao uso de suspensão para aumento do conforto em veículos de passeio, Milliken e Milliken (1995) descreve a medida desse desconforto como a aceleração vertical em que os usuários estão sujeitos durante o percurso irregular. É

considerado viável, segundo eles, dispor, em relação ao conforto, as irregularidades em faixas de frequência, entendendo as movimentações de baixa frequência, como movimentos de grande amplitude comum em estradas, e as movimentações de alta frequência, como movimentações com pequena amplitude, presentes em percursos muito irregulares.

### **2.2.1 Tipologias**

Porém, desde os primeiros veículos desenvolvidos, existem variadas tipologias de suspensão, tanto para a dianteira quanto para a traseira do veículo, sendo que uma primeira grande divisão pode ser feita em relação ao tipo de ligação mecânica entre os eixos.

A classificação utilizada nesse trabalho, porém, baseia-se em dividir as tipologias primeiramente em duas grandes classes, de acordo com o posicionamento no veículo, já que a classificação de dependência dos eixos é praticamente aplicada somente ao eixo traseiro, visto que em veículos de passeio raramente se utiliza eixo rígido na dianteira.

#### **2.2.1.1 Suspensão Dianteira**

A suspensão dianteira de um veículo, além das funções já previamente citadas em relação a conforto tem como função, também, garantir ao motorista do veículo o domínio sobre o mesmo, através de uma boa dirigibilidade, já que esta é responsável pelo esterço das rodas e pelo controle dos comandos de direção do veículo.

Devido a esses fatores, a suspensão dianteira, em veículos de passeio, é muito suscetível a acelerações laterais do que a suspensão posterior, tendo seu comportamento diretamente influenciado pela sua geometria, sendo esta determinada pela regulagem de câmbor, cáster e convergência.

Existem algumas tipologias de suspensão dianteira aplicada a veículos de passeio:

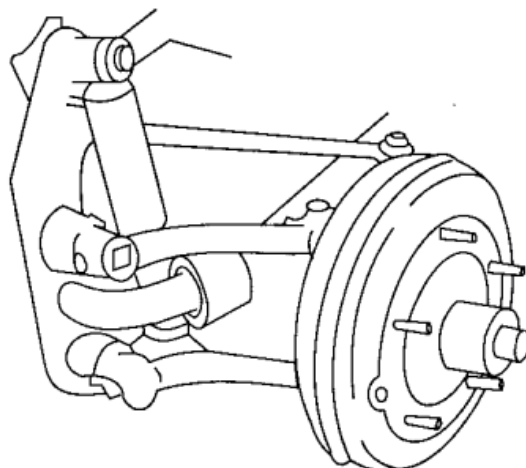
##### **a) Suspensão Dianteira – Braço-de-Arrasto:**

Considerada por Gillespie (1992) como um dos mais simples e econômicos projetos de suspensão já criado, a tipologia chamada de *trailing-arm* ou braço-de-arrasto foi muito utilizada por montadoras alemãs, principalmente Volkswagen e Porsche, durante a época da II Guerra Mundial, mas que fora praticamente abandonada para o eixo dianteiro.



Tal tipologia utiliza braços de tamanho idêntico conectados a barra de torção lateral, que fazem com que as rodas permaneçam paralelas, como mostrado na Figura 9.

**Figura 9 – Suspensão dianteira do tipo braço-de-arrasto**

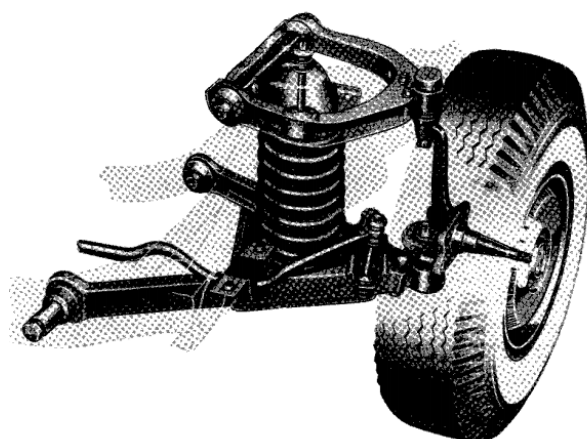


Fonte: Gillespie (2012), página 242

b) Suspensão Dianteira – *Wishbone* ou *Short-Long Arm*:

Gillespie (1992) cita esse tipo de suspensão como a mais utilizada após terminada a II Guerra Mundial e descreve seu acrônimo de braços curto-longos a partir da presença de dois braços de controle com tamanhos desiguais.

**Figura 10 – Suspensão dianteira do tipo Wishbone ou Short-Long Arm**



Fonte: Gillespie (2012), página 243

Essa tipologia, ilustrada na Figura 10, ganhou força por estar bem adaptada a veículos com motor dianteiro e tração traseira, devido ao espaço que o pacote fornece ao

motor posicionado no sentido longitudinal, porém demanda um bom refinamento para que seja capaz de atingir bons níveis de desempenho.

c) Suspensão Dianteira – *MacPherson*:

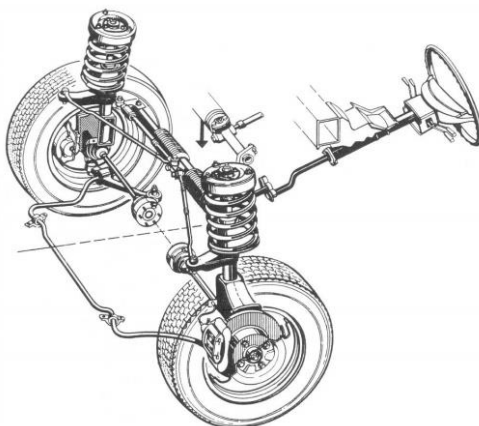
Gillespie (1992) relata que essa foi idealizada por Earle Steele MacPherson, é uma suspensão largamente utilizada na indústria automobilística, ainda segundo ele uma das maiores vantagens é a facilidade de montagem e o vão livre disponível para o motor quando montado na posição transversal.

Tem como características a maior altura, que é considerada uma desvantagem que causa dificuldades para o projetista, a presença de molas helicoidais, amortecedores telescópicos e de controle da roda pelo tirante de direção, em conjunto com o braço oscilante e o grupo montante/amortecedor estrutural.

Segundo Reimpell (2001) essa tipologia é baseada em uma derivação da suspensão de bandeja em duplo A, sem a bandeja superior. É utilizada principalmente na dianteira de veículos com tração dianteira dos segmentos A, B, C, e alguns do D.

Freitas (2006) explica que as fixações superiores dos amortecedores são feitas diretamente na carroceria ou no chassi por um mancal e as fixações inferiores feitas diretamente na manga de eixo; os amortecedores suportam cargas longitudinais e laterais, além de exercer sua principal função de gerar carga no sentido contrário ao da velocidade de oscilação da roda. No modelo computacional desse trabalho, essa é a tipologia considerada para a suspensão dianteira do veículo, visto que é o tipo de suspensão mais utilizada hoje pela indústria automobilística brasileira e um exemplo da tipologia é mostrado na Figura 11.

**Figura 11 – Suspensão dianteira do tipo MacPherson**



### 2.2.1.2 Suspensão Traseira

Em conjunto com a suspensão dianteira o veículo deve possuir um sistema de suspensão traseira que se adeque ao segmento e utilização do mesmo, não sendo esta responsável pelo esterço das rodas, mas não por isso menos importante para o desempenho de conforto e de dirigibilidade/estabilidade do veículo.

Genta (2009), em seu Volume 1, classificou as suspensões como dependentes, quando há uma ligação rígida entre as rodas de um mesmo eixo, independentes, quando não apresentam ligações rígidas e semidependentes, quando há uma mistura dessas duas características.

Tal classificação é bastante relevante para o estudo da suspensão traseira, visto que atualmente são comercializados veículos com esses três tipos de suspensão, que são melhores descritas abaixo.

#### 2.2.1.2.1 Suspensões Dependentes

Gillespie (1992) explica que uma suspensão dependente é aquela na qual há um eixo sólido, que possui em cada uma das extremidades uma roda do veículo montada e pelo qual se transmite qualquer movimento de uma roda para a outra.

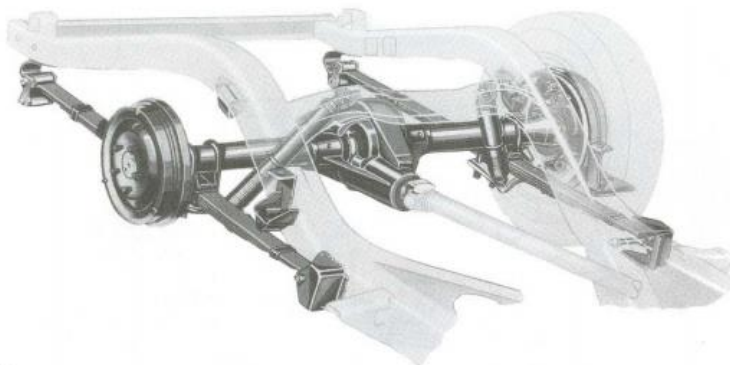
A utilização de suspensões dependentes, de eixo rígido, como já dito, são restritas a suspensão traseira nos veículos de passeio. Porém, em veículos de grande porte com tração nas quatro rodas ou para veículos que demandam uma grande capacidade de carga, esse tipo de suspensão também é utilizado na suspensão dianteira.

Ainda segundo Gillespie (1992) uma das vantagens desse tipo de suspensão é a característica de que a rolagem do chassi não influencia no ângulo de câmbor. Além disso, o alinhamento das rodas desse tipo de suspensão é mantido, minimizando assim o desgaste dos pneus. Existem variados tipos de suspensão dependente, entre elas:

##### a) Suspensão Traseira Dependente – *Hotchkiss*:

As molas semielípticas eram inicialmente aplicadas em eixos rígidos, e Gillespie (1992) cita que uma das configurações mais utilizadas era chamada de *Hotchkiss*, na qual as molas são montadas de forma longitudinal com o eixo rígido, que é acoplado no ponto médio das mesmas, como mostrado na Figura 12. A utilização desse tipo de mola é, talvez, a solução de suspensão mais barata e simples já utilizada.

**Figura 12 – Suspensão traseira dependente do tipo *Hotchkiss***



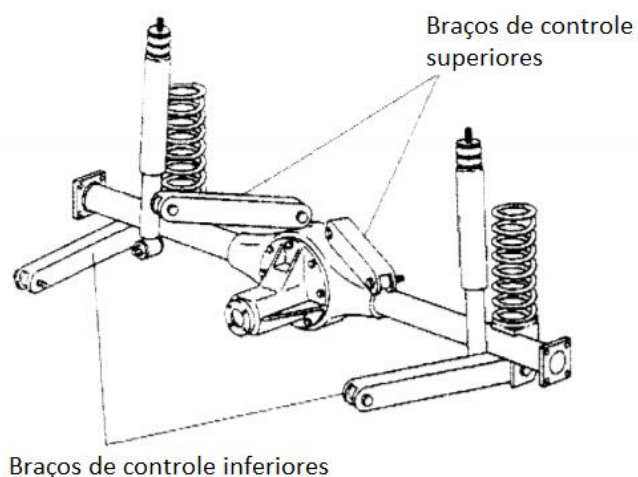
Fonte: Adaptado de Gillespie (1992), página 239

Essa tipologia não é praticamente utilizada em veículos de passeio atualmente, deixando de ser utilizada nas suspensões posteriores desses veículos por volta dos anos 60, sendo hoje quase que exclusividade de veículos comerciais leves, como as pick-ups por exemplo, devido ao baixo nível de conforto e estabilidade.

b) Suspensão Traseira Dependente – *Four Link*.

Segundo Gillespie (1992) a tipologia de quatro barras foi bastante utilizada para cumprir as deficiências da suspensão do tipo *Hotchkiss*. Uma das grandes mudanças entre elas, e que trouxe maior número de possibilidades para as suspensões, foi a adoção de molas helicoidais, com amortecedor em separado, que possibilitou um enorme ganho em conforto, apesar de possuir custo e complexidade mais altos.

**Figura 13 – Suspensão traseira dependente do tipo *Four Link***



Fonte: Adaptado de Stone e Ball (2004), página 22

Ainda segundo ele, nessa tipologia os braços de controle inferiores fornecem controle longitudinal do eixo enquanto os braços superiores absorvem torques de frenagem e forças laterais, proporcionando um melhor desempenho do veículo. Essa tipologia foi muito utilizada em veículos de passageiro de grande porte e é ilustrada na Figura 13.

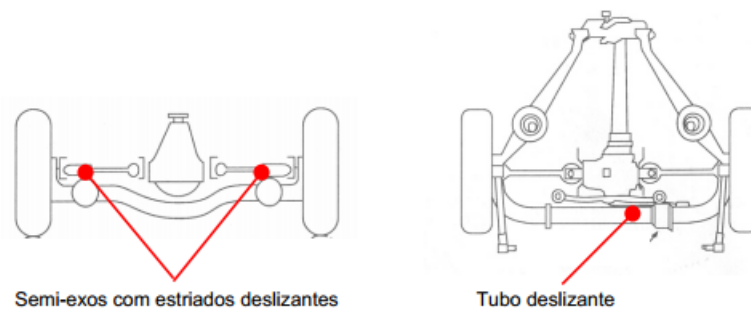
#### 2.2.1.2.2 Suspensões Semidependentes

##### a) Suspensão traseira semidependente – *De Dion*:

É um sistema que está entre um eixo rígido e uma suspensão independente, mas que, segundo Gillespie (1992), é muito pouco utilizado, mas tem como vantagem redução da massa não suspensa, já que o diferencial central, passa a ser massa suspensa.

Existem duas configurações possíveis, vistas na Figura 14, uma utilizando semieixos estriados deslizantes e outra utilizando tubos deslizantes. A principal desvantagem notada é justamente pelo fato de essas superfícies deslizantes adicionarem atrito ao sistema.

**Figura 14 – Suspensão traseira semidependente do tipo *de Dion***



**Fonte: Freitas (2006), página 23**

##### b) Suspensão traseira semidependente – Barra de Torção

Já nesta tipologia as rodas traseiras do veículo estão conectadas a braços que são ligados diretamente em uma estrutura deformável denominado eixo de torção. Segundo Bosch (2005) a barra de torção é utilizada em veículos de passeio de pequeno e médio porte, pertencentes aos segmentos A, B e C e possui como vantagens a simplicidade de montagem e fabricação e a minimização da tensão estrutural.

Gente (2009), em seu Volume 2, considera que um ângulo de rolamento excessivo pode ser causado pela característica elástica do sistema de suspensão, durante percurso com curvas muito acentuadas. Essa é a explicação fundamental da utilização de barras estabilizadoras, que suportam os carregamentos nessa direção, fazendo com que se limite a rolagem do veículo e diminua sua instabilidade.

O funcionamento dessa barra estabilizadora simula uma mola helicoidal, produzindo uma taxa de rigidez muito próxima desse tipo de componente, que é mostrada por Milliken e Milliken (1995), para barras longas e finas que sofram torção.

### 2.2.1.2.3 Suspensões Independentes

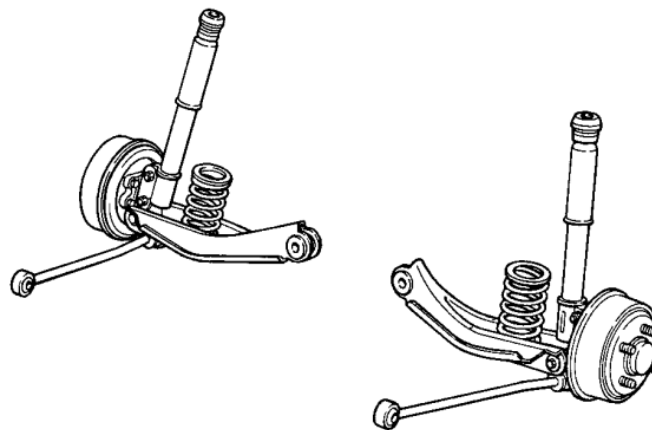
#### a) Suspensão traseira independente – Braços longitudinais:

Nessa tipologia as rodas traseiras têm sua movimentação feita através de braços inferiores, o que faz com que tenha desempenho melhor que as do tipo *TwistBeam*, ou viga de torção, alcançando níveis razoáveis quando comparada com soluções mais aprimoradas e de custo muito maior, como MacPherson ou *Multilink*.

#### b) Suspensão traseira independente – *MacPherson*:

É uma das tipologias mais sofisticadas utilizadas hoje nos projetos de veículo de passeio, com conceito semelhante à de mesmo nome utilizada na suspensão anterior, tendo algumas pequenas diferenças estruturais e de desempenho.

**Figura 15 – Suspensão traseira independente do tipo *MacPherson***



Fonte: Gillespie (1992), página 244

Nessa tipologia as rodas traseiras são totalmente controladas por braços longitudinais e transversais que agem em conjunto com o montante/amortecedor estrutural, assim como na dianteira, como mostrado na Figura 15.

As vantagens de se utilizar esse sistema é o seu bom desempenho e também o baixo custo em relação ao tipo Multilink, porém tem-se a desvantagem de que tamanho reduzido no vão de roda pode provocar ruídos, diminuindo o nível de conforto acústico.

c) Suspensão traseira independente – *Trailing-Arm* ou Braço-de-arrasto:

Segundo Gillespie (1992) essa tipologia foi muito utilizada em veículos de alto desempenho e custo, como na linha americana do Corvette, que necessitava de um bom comportamento dinâmico independentemente do valor agregado que fosse necessário.

Ainda segundo ele, o braço-de-arrasto é capaz de absorver de forma eficaz as forças longitudinais e os momentos de frenagem e de aceleração; nesse caso o semieixo da suspensão transmite o torque de tração às rodas e, além disso, serve como um braço de controle, sendo o braço inferior uma simples barra; um exemplo é visto na Figura 16.

Figura 16 – Suspensão traseira independente do tipo *Trailing-Arm*

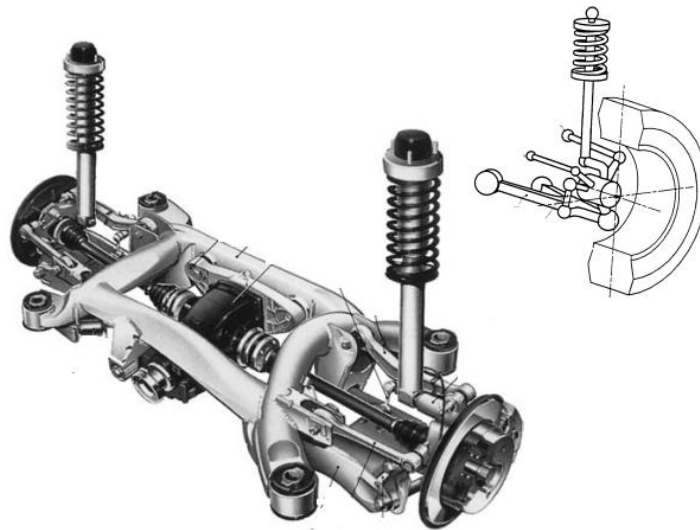


Fonte: Reimpell (2001), página 16

d) Suspensão traseira independente – *Multilink*:

Gillespie (1992) indica que a suspensão independente mais comum nos anos mais recentes possui essa tipologia, que tem como característica o montante conectado a três ou mais braços ligados à carroceria, nesse caso há articulações nas conexões das pontas das barras, eliminando assim momentos fletores, como visto na Figura 17.

**Figura 17 – Suspensão traseira independente do tipo *Multilink***



Fonte: Adaptado de Reimpell (2001), página 21

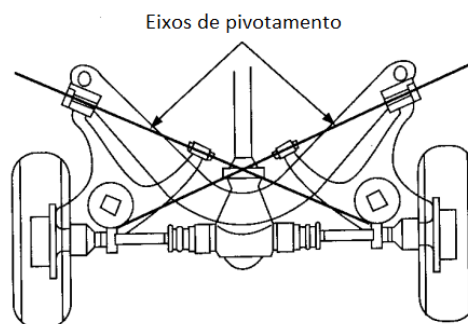
Este tipo de sistema é geralmente utilizado em veículos de segmentos superiores, por possuir um desempenho infinitamente superior aos demais tipos de suspensões posteriores e por cobrar um alto custo para tal.

Os solavancos, geralmente presentes nos outros tipos de suspensão, são eliminados pelo *Multilink*, pelo fato de este possuir maior amplitude de dimensões, o que favorece na condução e aplicação em variados terrenos.

e) Suspensão traseira independente – *Semi-Trailing Arm* e *Swing-Arm*:

A tipologia semi-braço de arrasto foi popularizada pelas empresas alemãs BMW e Mercedes Benz, e nada mais é que uma suspensão com dois eixos de pivotamento, como visto na Figura 18.

**Figura 18 – Suspensão traseira independente do tipo *Semi-Trailing Arm***

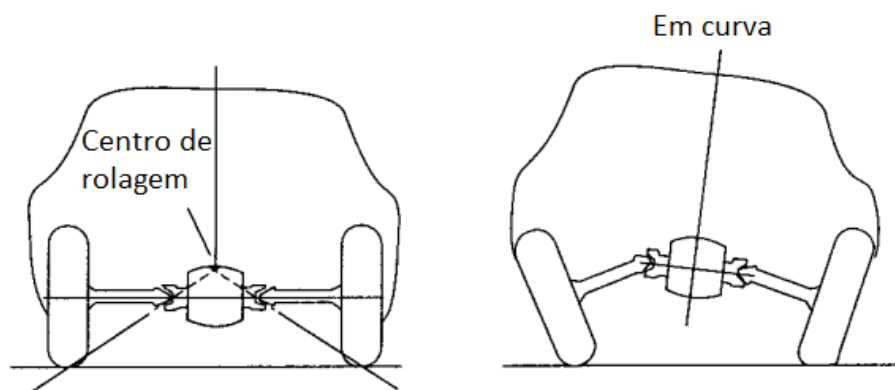


Fonte: Adaptado de Gillespie (1992), página 246



Já a tipologia de braços oscilantes, mostrada na Figura 19, foi muito utilizada pelas também alemãs, Volkswagen e Porsche, em meados de 1940 a 1950, segundo Gillespie (1992) e na qual existem molas montadas de forma transversal, como barras de torção.

**Figura 19 – Suspensão traseira independente do tipo *Swing-Arm***



Fonte: Adaptado de Gillespie (1992), página 247

### 2.2.2 Componentes

Conhecidas as tipologias mais utilizadas nos veículos de passeio em geral, com suas características particulares, é viável o entendimento mais aprofundado de alguns dos componentes dessas tipologias, que, de forma geral, possuem elementos básicos em comum, que são responsáveis por determinadas respostas do sistema.

Milliken e Milliken (1995) e Stone e Ball (2004) aprofundam o conhecimento em duas classes de componentes de suspensão, os elásticos e os de amortecimento. Sabe-se que, além deles, há uma infinidade de outros componentes, como os de ligação, rolamento e fixação.

Segundo Genta (2009) os principais elementos a serem estudados em uma suspensão são justamente os elásticos, que ele divide em primários e secundários, e os de amortecimento, e deve se atentar ao estudo da influência dos aspectos cinemáticos nos ângulos de *roll* e de *pitch* do veículo.

Os elementos elásticos primários são as molas, eixos e barras estabilizadoras, que conectam a roda à massa suspensa do veículo, de forma elástica. Já os secundários são as buchas elásticas das articulações, que de certa forma, adicionam rigidez na suspensão e são de grande importância para o comportamento de *handling* do veículo.

Já os elementos de amortecimento, ainda segundo Genta (2009), são basicamente os amortecedores, que tem como função dissipar a energia elástica que é armazenada pelos elementos elásticos primários e secundários, já que estes possuem baixo poder de dissipação de energia.

De acordo com Stone e Ball (2004), apesar dos componentes principais de uma suspensão se restringirem apenas a elásticos e de amortecimento, há uma variação muito grande dentro dessas classes de componente, que devem ser discutidas.

### 2.2.2.1 Molas

Milliken e Milliken (1995) dividem os componentes primários elásticos em três classes distintas, sendo elas as molas semielípticas, as helicoidais e as barras de torção. Avaliando ainda a aplicação de molas helicoidais associadas em série e em paralelo e as considerações de aplicação das semielípticas.

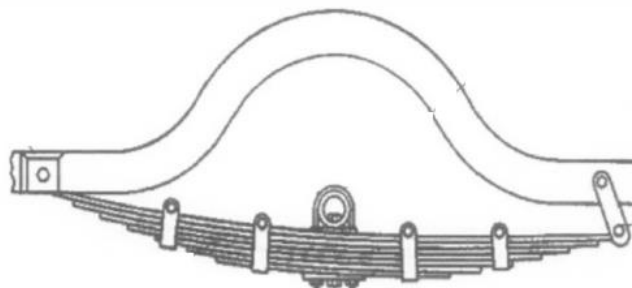
Stone e Ball (2004) adicionam ao estudo, além das três classes acima, as molas pneumáticas, como sendo também uma das tipologias relevantes.

#### a) Molas Semielípticas ou Feixe de molas:

Stone e Ball (2004) explica que as molas semielípticas são utilizadas há muitos anos, desde quando se utilizavam carruagens puxadas por cavalos, e por consequência disso foram por um certo tempo o tipo de elemento elástico utilizado também em veículos.

Tais molas são compostas por feixes de aço individuais, que são fixadas rigidamente por um parafuso central, que evita o deslocamento durante a deflexão. Durante essa deflexão é gerado um certo atrito entre os feixes, o que proporciona uma, ainda que pequena, capacidade de amortecimento.

**Figura 20 – Exemplo de mola semielíptica**



Fonte: Adaptado de Stone e Ball (2004), página 364

Esse tipo de mola, ainda segundo Stone e Ball (2004), é barato e simples, porém tendem a ser pesado e serem suscetíveis ao desgaste com o tempo, que faz com que os feixes possam ceder. Um exemplo dessa tipologia é visto na Figura 20.

Segundo Milliken e Milliken (1995) o projeto das molas semielípticas é mais complexo que os das barras de torção ou das molas helicoidais, resultado da variada combinação de estruturas possíveis, já que os feixes podem ter largura e espessura diversas, a carga pode ser aplicada no centro ou nas extremidades e a forma de fixação pode variar.

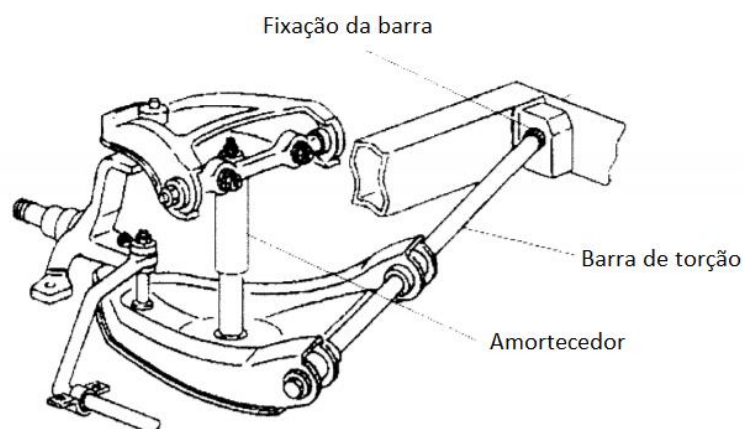
Portanto, mesmo que, na teoria, seja uma aplicação bastante simples a variação de parâmetros possíveis para as molas semielípticas requer que, na maioria das vezes, sejam utilizados fatores de correção.

#### b) Barras de Torção:

A barra de torção é uma haste de aço circular, que sofre carregamento de cisalhamento puro devido a torção e que possui baixíssimo poder de amortecimento, devendo ser utilizada em conjunto com amortecedores.

Segundo Stone e Ball (2004) a principal desvantagem da utilização desse tipo de elemento elástico está no espaço axial necessário para sua instalação. Na Figura 21 é mostrada uma barra de torção aplicada a suspensão de um veículo.

**Figura 21 – Exemplo de barra de torção aplicada a suspensão de um veículo**



Fonte: Adaptado de Stone e Ball (2004), página 364

Milliken e Milliken (1995) explica que as propriedades elásticas desse tipo de barra longa e fina produzem uma elasticidade linear, se assemelhando a de uma mola helicoidal. A carga da mola é convertida em torque em volta da linha central da barra por meio de uma espécie de braço de alavanca em uma ou ambas as extremidades.

c) Molas Helicoidais:

De acordo com Stone e Ball (2004) as molas helicoidais são basicamente barras de torção que foram condicionadas em forma de bobina, mantendo a pequena capacidade de amortecimento e, portanto, a necessidade do acoplamento de amortecedores.

O seu uso pela indústria automobilística é amplo, grande parte disso deve-se ao fato de possuírem tamanho compacto, sendo facilmente encaixadas no espaço disponível para a suspensão.

A desvantagem, porém, se dá pelo fato da necessidade de braços de controle para limitar as movimentações longitudinais e laterais da suspensão, já que as molas helicoidais não são capazes de fornecer esse tipo de garantia.

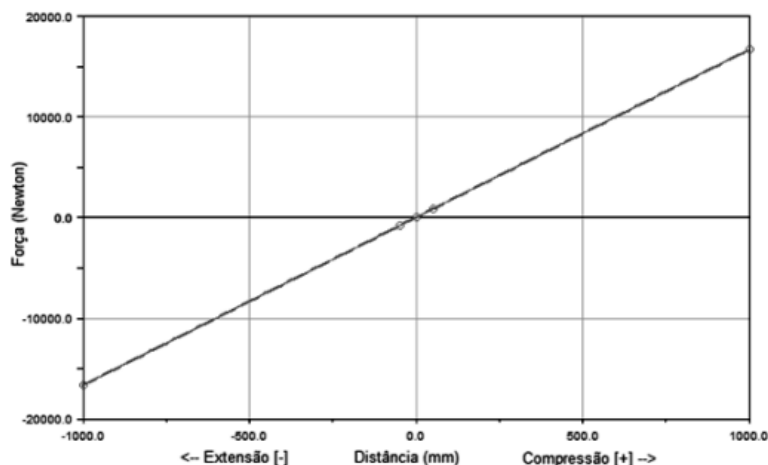
Tanto Milliken e Milliken (1995) quanto Stone e Ball (2004) definem o cálculo de rigidez para uma mola helicoidal pela equação mostrada abaixo.

$$K = \frac{Gd^4}{8D^3N} \quad (17)$$

Onde K é a rigidez da mola, dada em N/mm; d é o diâmetro do fio, dado em mm; D é o diâmetro da espira, também dado em mm; G é o módulo de cisalhamento do aço, constante e igual a 80000N/mm<sup>2</sup> e N é o número de espiras ativas.

Na grande maioria das aplicações as molas helicoidais trabalham em compressão, mas elas também podem ser utilizadas para trabalhos em distensão. Aquino (2014) indica que alguns tipos de mola trabalham em sua faixa linear, sendo válida a aplicação da Lei de Hooke, que indica que a força da mola dependerá do seu deslocamento e de sua rigidez, cuja resposta gráfica pode ser vista na Figura 22.

**Figura 22 – Curva característica de uma mola helicoidal**

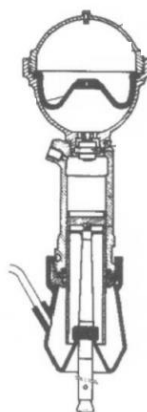


Fonte: Aquino (2014), página 37

#### d) Molas Pneumáticas:

Segundo Stone e Ball (2004) esse tipo de mola é bastante utilizado nos Estados Unidos em caminhões, ônibus e reboques, e, recentemente, tem sido aplicado também em veículos de passageiros e utilitários. Ele é composto por um compressor de ar, um reservatório e um sistema de controle, como mostrado na Figura 23.

**Figura 23 – Suspensão com mola pneumática**



Fonte: Adaptado de Stone e Ball (2004), página 369

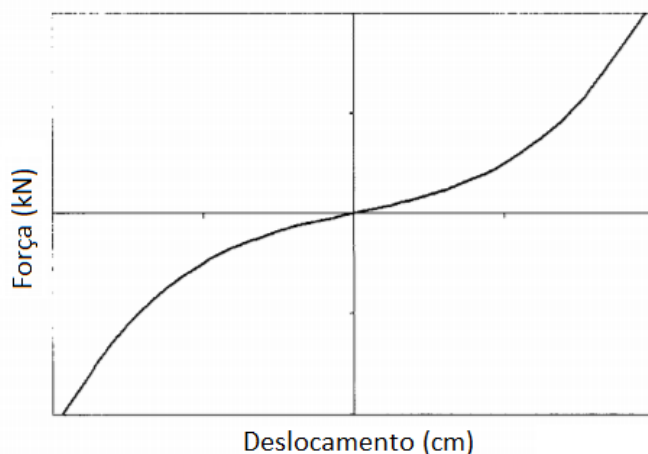
A característica mais importante desse tipo de mola é a capacidade de fornecer, devido ao seu sistema de controle, uma deflexão estática constante através da modulação da pressão da mola, mantendo a altura do veículo em relação ao chão. Tal fator é muito relevante em veículos nos quais o peso bruto sofre grande variação, como em reboques, ônibus ou caminhões.

Esse tipo de mola tem comportamento não linear, como mostrado na Figura 24, e, ao contrário de uma mola linear, não possui uma rigidez fixa; a rigidez nesse caso é dada pela equação abaixo, onde  $W$  é o peso do veículo e  $x$  é a deflexão.

$$k = \frac{dW}{dx} \quad (18)$$

Além disso, segundo Stone e Ball (2004) deve-se ainda considerar a operação da mola como adiabática e reversível, sendo um ambiente fechado com ar se comportando como gás ideal.

Figura 24 – Comportamento não-linear de uma mola pneumática



Fonte: Adaptado de Stone e Ball (2004), página 369

### 2.2.2.2 Amortecedores

Conforme Milliken e Milliken (1995) o uso de elementos elásticos como molas e barras de torção datam desde os veículos puxados por cavalos, e, portanto, foi adotado no início da história do automóvel.

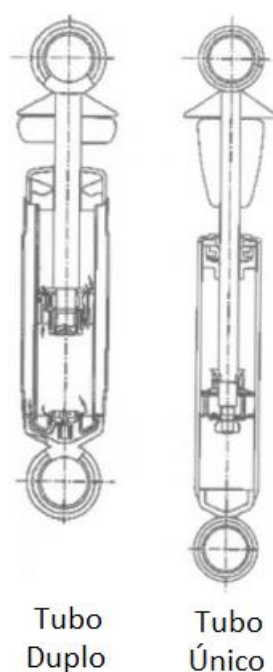
Já os elementos de amortecimento foram introduzidos posteriormente, sendo inserido entre as massas suspensa e não suspensa do veículo, a fim de controlar o movimento dessa massa em oscilações longitudinais e laterais. A primeira aparição de amortecedores, ainda que primitivos, datam entre 1902 e 1906.

Ainda segundo esse estudo, em 1930 surgiram as primeiras aplicações de amortecedores telescópicos, e a partir daí um vasto número de melhorias e variações de projeto foram ocorrendo nesse tipo de amortecedor.

Segundo Stone e Ball (2004) atualmente a maioria dos amortecedores utilizados são do tipo telescópico com óleo, que produzem a força de amortecimento através desse óleo, que pode ainda ser outro fluido, que é empurrado através de um orifício ou válvula.

Tais amortecedores telescópicos podem ser de tubo único ou duplo, como mostrado na Figura 25.

**Figura 25 – Construção de amortecedores**



**Fonte: Adaptado de Stone e Ball (2004), página 372**

Os amortecedores de tubo duplo são muito utilizados em veículos de passeio nos Estados Unidos, sendo mais pesados, porém, mais fáceis de fabricar. Nesse tipo de amortecedor há um reservatório de óleo entre os dois tubos, o qual enche com a ação do pistão que se move para cima e para baixo.

Já no amortecedor de único tubo a única ação é do próprio fluido, que flui através da válvula do pistão; quem move o pistão é o gás, à medida que o volume do fluido aumenta. O objetivo desse mecanismo é evitar a formação de espuma do fluido e garantir que qualquer ar no fluido seja compressível e passe pela válvula.

Os amortecedores em geral, segundo Stone e Ball (2004), produzem a força proporcional à velocidade do seu pistão. Quando há válvulas múltiplas têm-se a possibilidade de fornecer diferentes níveis de amortecimento durante a compressão.

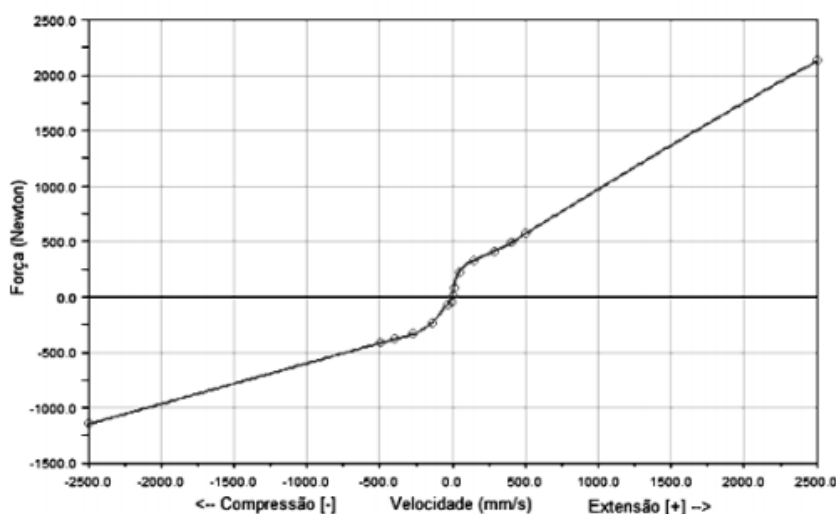
Bastow (1990) e Milliken e Milliken (1995) possuem um estudo mais completo sobre o funcionamento dos amortecedores, fornecendo exemplos de efeito da relação de amortecimento na amplitude de vibração e bons resultados de modelo em relação a níveis de amortecimento.

Segundo Dixon (2007) uma suspensão básica utiliza mola e amortecedor, não sendo ideal para todos os casos, mas servindo para a grande maioria dos veículos, sendo efetivo principalmente para veículos de baixo custo.

Ainda segundo Dixon (2007) há possibilidade de aplicação de suspensões ativas, mas que, para veículos de passeio, se torna na maioria das vezes inviável, devido ao seu alto custo, exceto para segmentos de luxo, por exemplo.

A curva característica de um certo amortecedor pode ser vista na Figura 26.

Figura 26 – Exemplo de curva de um amortecedor



Fonte: Aquino (2014), página 41

### 2.2.2.3 Barras estabilizadoras

As barras estabilizadoras são elementos opcionais de suspensão utilizadas em algumas situações específicas, sempre com o intuito de permitir o uso de molas menos rígidas, ou seja, mais macias, favorecendo o conforto, sem que se tenha uma piora

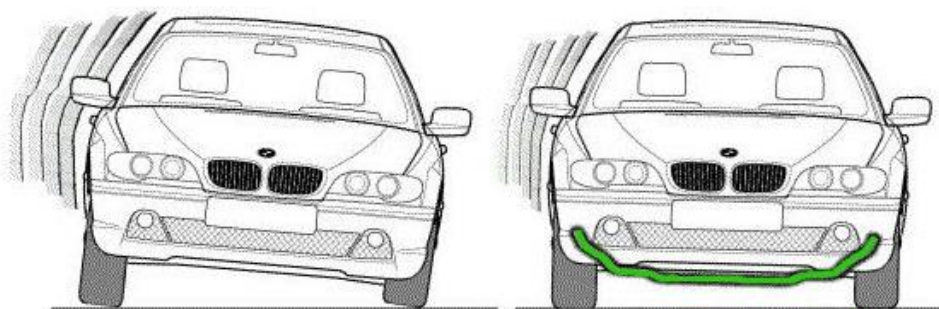


significante de *handling*, já que, segundo Gillespie (1992) molas muito macias podem acarretar em um veículo com pouca estabilidade.

Essas barras fazem uma conexão entre as duas rodas do eixo do veículo e só entram em funcionamento quando há um deslocamento relativo entre essas duas rodas. Nessa situação as barras estabilizadoras contribuem com o aumento de rigidez do rolamento conjunto suspensão, diminuindo a movimentação de *Roll*.

A rigidez de rolamento, que impede a movimentação exagerada no sentido rotacional do eixo x, como visto na Figura 27, pode ser alterada tanto pelas molas quanto pelo uso de tais barras. Porém, uma mola muito rígida, capaz de impedir o rolamento excessivo, pode ser extremamente desconfortável durante o percurso do veículo.

Figura 27 – Exemplo de funcionamento da barra estabilizadora



Fonte: Adaptado do banco de imagens do Google – Site: <http://www.fierrosclasicos.com>

A inserção de barras estabilizadoras pode ser feita tanto na suspensão dianteira quanto na traseira, sendo mais comum, em veículos de passeio de segmento de baixo custo, no eixo dianteiro.

Para veículos de segmento superior é normal que se adicione a barra estabilizadora no eixo traseiro, e em casos de segmentos de luxo, é possível que se insira barra estabilizadora com assistência elétrica, na qual um motor elétrico corrige a inclinação da carroceria.

#### **2.2.2.4 Articulações**

As conexões entre os elementos de suspensão, sejam eles os de amortecimento, os elásticos ou ainda quaisquer outros elementos são feitos através de articulações adequadas, que acompanham de certa forma a movimentação, evitando que as ligações entre esses elementos sejam feitas de forma rígida, como visto na Figura 28.

**Figura 28 – Localização de buchas e pinos esféricos numa suspensão**



Fonte: Adaptado de banco de imagens do Google

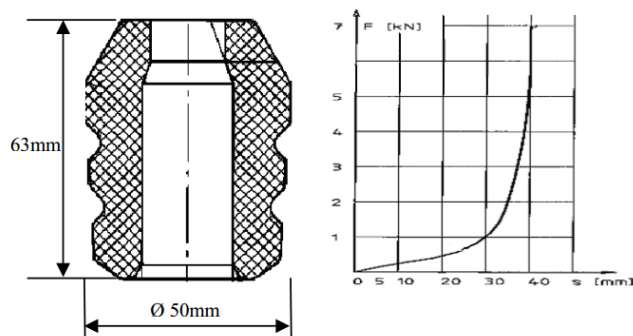
Na maior parte das vezes são utilizados como elementos de articulação pinos esféricos e buchas de PU ou borracha, como no exemplo da figura acima, na qual se utiliza uma bucha elástica para a articulação do braço oscilante.

### 2.2.2.5 Batentes

Segundo Freitas (2006) os batentes, também chamados de molas auxiliares, são peças fabricadas de poliuretano micro celular com características definidas através da geometria e da densidade do material utilizado.

Geralmente possuem formato cilíndrico ou cônico e são colocados no fim de curso da suspensão, geralmente no ponto de fixação do amortecedor com o chassi. Durante a compressão da suspensão, quando esta atinge seu fim de curso, o batente impede que a energia não absorvida pelos elementos de suspensão seja transmitida em forma de choque para o chassi, causando níveis de ruído e impacto relevantes ao motorista.

**Figura 29 – Geometria e curva de rigidez de um batente**



Fonte: Freitas (2006), página 41

Na Figura 29, tem-se um exemplo da geometria de um batente aplicado em uma suspensão dianteira do tipo MacPherson, acompanhado de sua curva de rigidez característica.

### 2.2.2.6 Pneus

Para Jazar (2008) os pneus são o meio em que as forças entre a pista e o veículo são transferidas, sendo estes, portanto, componentes de extrema importância, responsáveis por controlar o veículo.

Gillespie (1992) concorda com o fato de que todas as forças primárias de controle e perturbação dos veículos modernos chegam através dos pneus, mas coloca como exceção uma pequena parcela dessa força, que atribui a aerodinâmica do veículo.

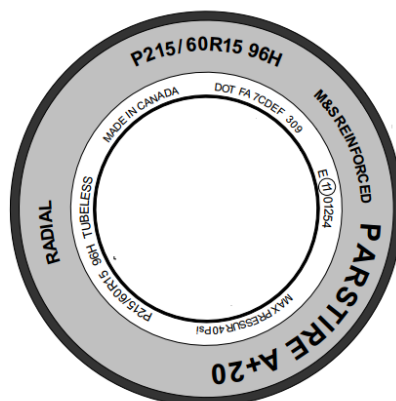
Portanto, fica claro que as forças que atuam sobre um veículo e tem desempenho fundamental na sua aceleração, frenagem e dirigibilidade são aplicadas em quatro pequenos contatos menores que a palma da mão de um homem.

Para o entendimento da dinâmica de um veículo, tanto para conforto quando para *handling* é considerado por Gillespie (1992) a compreensão completa da relação entre os pneus, suas condições de operação e as forças de reação por ele exercidas.

São definidas três funções principais para os pneus:

- a) Suportar a carga vertical enquanto amortece choques e impactos;
- b) Desenvolver forças longitudinais para aceleração e para frenagem;
- c) Desenvolver forças laterais para manter o carro na trajetória em curvas;

Figura 30 – Vista lateral de um pneu contendo as informações técnicas



Fonte: Adaptado de Jazar (2008), página 2

As características de um pneu, como suas dimensões de altura e largura, raio, tipo de bandagem, fabricante, data e local de fabricação, entre outras são dispostas no mesmo através de informações técnicas escritas em sua banda lateral, e são mostradas por Jazar (2008) na Figura 30.

Pacejka (2005), Jazar (2008), Reimpell (2001) e Stone e Ball (2004) descrevem detalhadamente o pneu, em capítulos específicos a esse assunto, descrevendo suas características construtivas, designações de siglas e dimensões, classificações relacionadas a velocidade a carga suportada, entre outros tópicos.

Em relação ao comportamento de um pneu, Gillespie (1992) cita que este tipo de componente possui uma resposta não linear bastante complexa, que faz com que seja difícil aplicar um modelo com ótima correlação.

Vários modelos já foram desenvolvidos com a tentativa de aproximar o desempenho, mas ainda hoje a forma mais assertiva de conseguir mensurar tal resposta permanece por dados empíricos quantitativos, o que faz com que no modelo computacional desse trabalho, como já dito, o pneu seja tratado como um elemento elástico que possui como único parâmetro sua rigidez vertical.

## **2.3 Conforto**

Segundo Griffin (1990), um movimento pode causar irritação, desconforto, interferência com atividades, problemas de saúde e náuseas. Esses cinco fatores são diretamente influenciados por características do movimento realizado e da pessoa exposta, além da atividade e de outros aspectos do ambiente.

A relação de movimentos vibracionais com o corpo humano é dividida em duas grandes frentes, chamadas de Vibração de Corpo Inteiro (VCI), onde o corpo é suportado por uma superfície vibratória, e Vibração de Mãos e Braços (VMB), quando a vibração entra no corpo através das mãos.

Em um veículo há parcelas das duas frentes citadas acima, porém, a mais relevante delas e que é o foco deste trabalho é a VCI, já que no modelo computacional o conforto do motorista é avaliado de acordo com as vibrações advindas das irregularidades da pista, que chegam no mesmo pelo trilho do banco e pedana, sendo então semelhantes a uma superfície vibratória, não considerando a vibração que o afeta pelo volante.

Porém, ainda segundo Griffin (1990), o corpo humano reage mediante tais vibrações de forma complexa, ou seja, existem inúmeros fatores que fazem com que a resposta a um determinado movimento não seja padrão entre os seres humanos. Alguns dos fatores responsáveis por isso são: peso, altura, pré-disposição ao tipo de vibração, postura, concentração, entre outros.

Tais fatores são considerados como variáveis nesses testes e recebem dois nomes distintos, um grupo deles é chamado de variabilidade intersubjetiva, no qual indivíduos diferentes respondem de maneira diferente a um estímulo vibratório, e a variabilidade intra-subjetiva, na qual a resposta do mesmo indivíduo pode-se alterar dependendo da ocasião em que acontece o estímulo.

Por esse motivo, é sempre viável que se façam testes baseados em diferentes círculos sociais, com pessoas das mais diversas características, a fim de obter uma média que se aproxime o máximo possível da realidade.

Para que se tenha um estudo embasado deve-se então estabelecer limites, através do que é citado em normas, para indicar por exemplo níveis de desconforto que possam ser medidos, fugindo assim de uma análise meramente subjetiva. A magnitude e a frequência em que a vibração ocorre também são informações importantes do estudo, em junção com a atividade realizada durante a ocorrência da vibração.

### **2.3.1 Efeito de interesse da vibração**

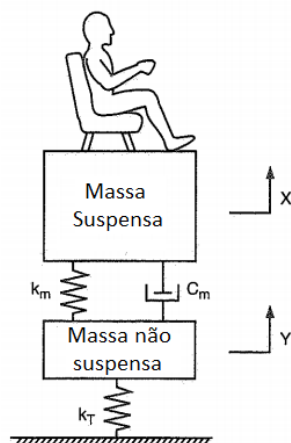
Sabendo dos três efeitos de interesse classificados por Griffin (1990) como sendo a interferência no conforto, na saúde e nos movimentos, deve-se entender qual o objetivo do estudo e, através disso, saber quais critérios e limites devem ser utilizados.

Para este trabalho, cujo interesse é a relação entre as vibrações sentidas pelo corpo humano e a sensação de desconforto do motorista do veículo, deve-se dar foco ao efeito de interferência no conforto, cuja faixa de frequência estabelecida para VCI é de 0,5 – 80 Hz e cujos limites são definidos na norma ISO 2631 (1997).

A interferência no conforto, assim como os dois outros efeitos de interesse, deve ser quantificada, já que tais efeitos puramente teóricos são muito imprecisos para se obter limites. Portanto, é necessária uma especificação melhor dos critérios, como por exemplo, quanto de desconforto, através de escalas de severidade, que fazem com que os procedimentos de medição sejam realizados de forma uniforme.

Para que essa interferência de conforto seja compreendida através de um modelo deve-se atentar ao fato de como são feitas as considerações para tal, considerando por exemplo o corpo humano como uma massa rígida, apoiada sobre um conjunto de suspensão representado por um massa-mola com amortecimento e um pneu, representado apenas pela sua rigidez, como mostrado na Figura 31.

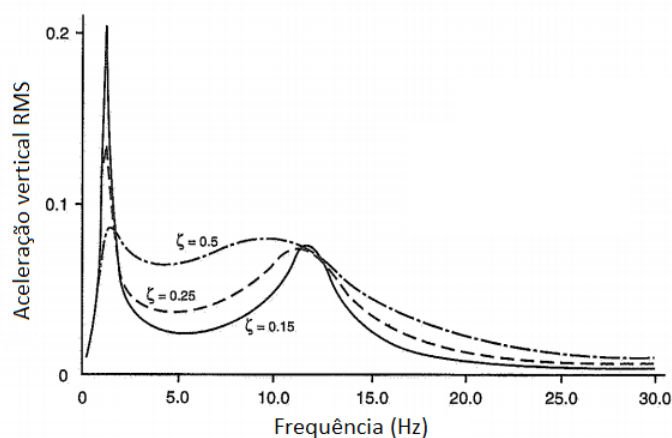
Figura 31 – Modelo para conforto incluindo massa não suspensa e pneu



Fonte: Adaptado de Milliken e Milliken (1995), página 791

Milliken e Milliken (1995) representa um modelo conforme a descrição acima, e utilizando valores usuais de rigidez, amortecimento e massa dos corpos chega a uma resposta com picos próximos a 1Hz para frequência natural da massa suspensa e de 11Hz para massa não suspensa, como visto na Figura 32.

Figura 32 – Resposta para o modelo de conforto da Figura 31



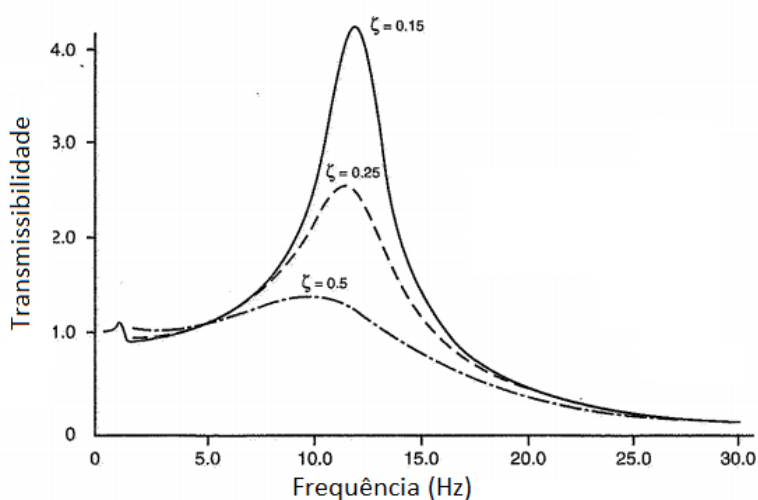
Fonte: Adaptado de Milliken e Milliken (1995), página 791

Esses valores de frequência se tornam muito importantes para as análises de tolerância a vibração em relação a frequência, que fazem parte de uma das tolerâncias do corpo humano que deve ser analisada, além da magnitude do movimento e do tempo de exposição a vibração.

Na Figura 32 é importante notar a importância do coeficiente de amortecimento, que varia nesse caso de 0,15 até 0,5. Quando o coeficiente atinge o valor máximo testado nota-se que o pico referente a 1Hz decresce mais do que 50% de sua magnitude, porém essa energia é dissipada para todo o espectro de frequência, que passa a ter amplitudes maiores de vibração em toda a faixa de 0 a 30Hz, o que indica que um veículo muito amortecido é prejudicado em relação ao conforto.

Para garantir que, além do conforto, seja mantida uma transmissibilidade da massa não suspensa, que é inversamente proporcional ao coeficiente de amortecimento, aceitável, Milliken e Milliken (1995) propõe para esta um valor de 2,5 e conseqüentemente um coeficiente de amortecimento ideal de 0,25, como visto na Figura 33.

Figura 33 – Transmissibilidade da massa não suspensa ao variar o amortecimento



Fonte: Adaptado de Milliken e Milliken (1995), página 792

### 2.3.2 A relação entre a vibração e o desconforto

Segundo Griffin (1990) a definição de conforto encontrada em dicionários implica em um bem-estar consciente, criado por determinados movimentos que fornecem prazer e sensação de conforto. Mas, o estudo da relação entre a vibração e esse sentimento tem como principal objetivo estudar os casos em que a vibração causa descontentamento, insatisfação e desconforto.

A melhor abordagem de estudo para a relação entre tais vibrações e a sensação de desconforto tem sido feita em laboratório, através de estudos sistemáticos, que buscam compreender de forma quantitativa os níveis de variação de vibração que geram os julgamentos de desconforto. Inicialmente tais estudos tinham como foco apenas a variação de frequências, mas atualmente o foco se amplia estudos de múltiplas frequências, múltiplos eixos de vibração e de choque.

De acordo com Griffin (1990), existem algumas variáveis associadas a essa relação entre a vibração e o desconforto, podendo ser citadas como principais as variações de frequência, magnitude, direção de vibração, tempo de exposição ao movimento e forma de entrada da vibração no corpo humano, além da presença de ruído, da variação de temperatura e da alteração na dinâmica do assento.

A presença de tantas variáveis dificulta estabelecer procedimentos gerais para prever o desconforto, gerando, segundo Griffin (1990), três principais frentes de estudos de efeito dessas variações, de acordo com a análise de um parâmetro específico.

a) Efeito da amplitude de vibração:

Segundo Griffin (1990) existem variadas maneiras de se medir a variação na magnitude de uma oscilação. Para movimentos que possuem baixa frequência e grande amplitude é possível que se determine o deslocamento máximo do movimento e o pico dessa oscilação na direção oposta ao movimento, porém, na prática esse deslocamento se torna difícil de ser medido, além do fato de que, para altas frequências, a vibração pode ser severa mesmo para pequenos deslocamentos não visíveis aos olhos.

Devido a isso pode ser utilizada a amplitude de velocidade do movimento, que está mais diretamente relacionada à energia envolvida no movimento, para quantificar a severidade de vibração, nesse caso a velocidade pico-a-pico determina a diferença entre as máximas velocidades para cada direção do movimento.

Embora haja boas razões para utilizar a amplitude de velocidade como termo de severidade, Griffin (1990) explica que atualmente as instrumentações utilizadas para medir a severidade são, em sua grande maioria, baseadas em medições de aceleração. Essas medições utilizam a unidade de aceleração do Sistema Internacional (SI) que determina que esta grandeza seja dada em metros por segundo por segundo ( $m/s^2$ ).

Griffin (1990) estabelece uma tabela de conversão entre cada um desses métodos de medição da severidade de vibração, vista na Tabela 1.



Tabela 1 – Conversão entre as formas de medição de severidade da vibração

	Deslocamento, X	Velocidade, V	Aceleração, A
Deslocamento, X	$X = X$	$X = \frac{V}{2\pi f}$	$X = \frac{A}{(2\pi f)^2}$
Velocidade, V	$V = 2\pi f X$	$V = V$	$V = \frac{A}{2\pi f}$
Aceleração, A	$A = (2\pi f)^2 X$	$A = 2\pi f V$	$A = A$

Fonte: Adaptado de Griffin (1990), página 12

As medições de severidade, geralmente feitas com base na aceleração, podem ser expressas tanto como aceleração pico-a-pico quanto como aceleração de pico. Porém, para evitar que em movimentos complexos a severidade de vibração seja determinada por um pico representativo, advindo de alguma anormalidade no movimento, é preferido que a expresse em termos de uma medida média.

Segundo Griffin (1990) a forma mais utilizada de calcular essa média é a utilização da técnica estatística denominada raiz média quadrática (RMS – *Root Mean Square*), na qual se realiza um somatório de todos os valores encontrados elevados ao quadrado, divide-se pelo número de ocorrência desses valores e se extrai a raiz quadrada dessa média, como pode ser visto na equação abaixo.

$$a_{rms} = a_w = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_w^2} \quad (19)$$

Para um movimento harmônico simples tem-se que a medição de aceleração de pico é dada por A, a de pico-a-pico por 2A e a aceleração rms é dada por, aproximadamente, 0,707A, que representa o valor A multiplicado pela raiz quadrada de 2.

A tabela de conversão entre essas três formas de expressar a severidade é mostrada na Tabela 2, sendo válida apenas para movimentação senoidal.

**Tabela 2 – Conversão entre as formas de expressar os picos de vibração**

	<i>Pico</i>	<i>Pico – a – pico</i>	<i>r. m. s</i>
<i>Pico</i>	$Pico = Pico$	$Pico = \frac{Pico - a - pico}{2}$	$Pico = \sqrt{2} * r. m. s$
<i>Pico – a – pico</i>	$Pico - a - pico = 2 * Pico$	$Pico - a - pico = Pico - a - Pico$	$Pico - a - pico = 2\sqrt{2} * r. m. s$
<i>r. m. s</i>	$r. m. s = \frac{Pico}{\sqrt{2}}$	$r. m. s = \frac{Pico - a - Pico}{2\sqrt{2}}$	$r. m. s = r. m. s$

Fonte: Adaptado de Griffin (1990), página 12

Griffin (1990) estabelece um critério para que se estabeleça quando é viável a utilização da aceleração rms ou da aceleração de pico, esse critério é denominado Fator de Crista e é dado pela relação entre o valor da aceleração de pico e da aceleração rms, conforme mostrado abaixo.

$$Fator\ de\ crista = \frac{aceleração\ de\ pico}{aceleração\ rms} \quad (20)$$

Como visto na Tabela 2, essa relação, para movimentos senoidais, é sempre igual a raiz de 2, porém existem casos em que os movimentos possuem eventos não estacionários, como choques e impactos, nos quais há a presença de acelerações de pico muito superiores à aceleração média do movimento. Para essas situações, em que as características de vibração variam muito de instante para instante, o fator de crista se torne muito superior e se torna inviável expressar a severidade em aceleração rms.

Segundo Griffin (1990) uma pista em boas condições de rodagem expressa um fator de crista entre 3 e 6, sendo viável a utilização da aceleração rms, mas, para pistas com maiores irregularidades esse fator pode aumentar, fazendo com que se opte pelo uso da aceleração de pico.

Os valores de magnitude de aceleração medidos têm como objetivo a possibilidade de comparação com uma ou mais classificações estabelecidas que indicam a severidade da vibração. A norma de maior relevância nesse tipo de definição, que estabelece escalas para o conforto, é a ISO 2631-1 (1997).

Figura 34 – Escala de desconforto para aceleração ponderada rms em m/s<sup>2</sup>



Fonte: Elaborado pelo autor – Baseado na norma ISO 2631-1 (1997) e em Griffin (1990), página 117

Há estudos que indicam contradições em ambas as normas, mostrando que existe muita variabilidade na sensação de desconforto, mas, tomando-as como referência, pode-se resumir a escala de desconforto conforme a Figura 34.

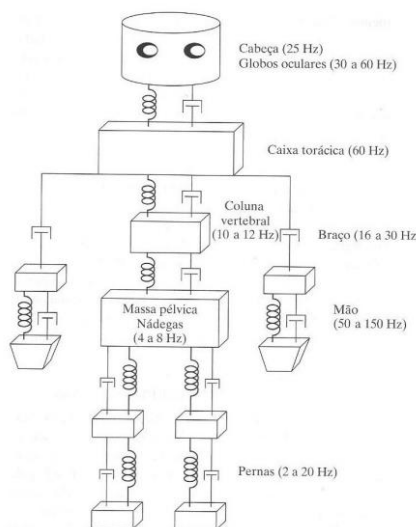
#### b) Efeito da frequência de vibração:

Quando se tem como foco o estudo do desempenho de conforto de um veículo, Ganzarolli (2012) entende que o veículo pode ser visto como um sistema composto por massas, molas e amortecedores, que, em contato com as irregularidades da pista sofre com vibrações que são sentidas pelos usuários gerando o desconforto e que tais vibrações podem ser analisadas através de espectro de frequência.

De acordo com Rao (2009) e Anflor (2003), o corpo humano possui frequências naturais diferentes em seus membros e órgãos, que podem entrar em ressonância com a movimentação do veículo.

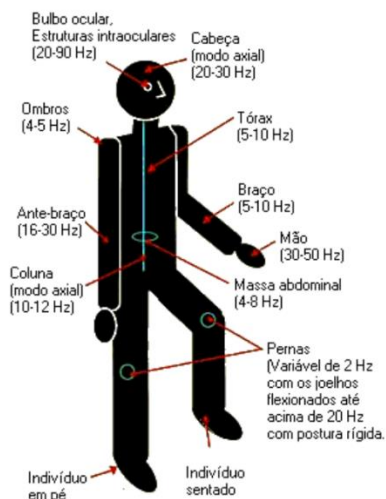
Embora concordem nesse ponto, os estudos definem valores diferentes para as frequências naturais do corpo humano, que, por ser um sistema de alta complexidade a vasta variabilidade impede que se chegue a números absolutos e precisos. Nas Figuras Figura 35 e Figura 36 fica clara a diferença entre os modelos, apresentados por Rao (2009) e por Anflor (2003), respectivamente; há ainda outras indicações em outros estudos.

**Figura 35 – Sensibilidade à frequência de vibração das partes do corpo humano (Rao)**



Fonte: Adaptado de Rao (2009), figura 9.2

**Figura 36 – Sensibilidade à frequência de vibração das partes do corpo humano (Anflor)**



Fonte: Adaptado de Anflor (2003)

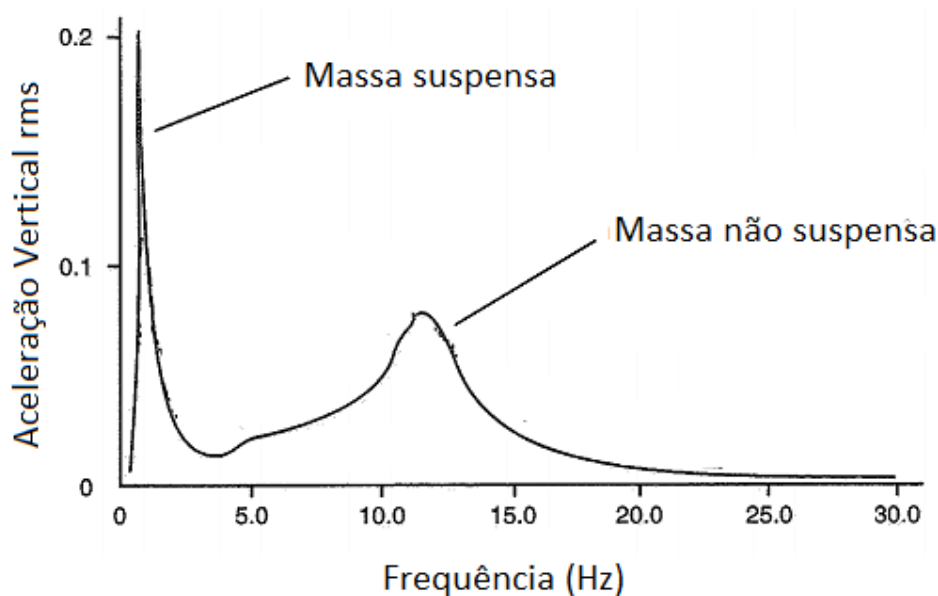
Misael (2001) produziu uma coletânea baseando em dados de Chang (1973) a fim de diminuir as diferenças encontradas entre os estudos de frequência natural do corpo humano, mas, ainda assim os valores são distintos aos que foram mostrados acima.

Segundo Gerges (2005) o corpo humano, quando em pé, está mais suscetível a frequências de 4 a 8Hz na direção longitudinal e 1 a 2Hz na direção transversal. Quando sentado, como em veículos, se torna mais sensível a frequências de 4 a 6Hz na longitudinal e 2 a 3Hz na transversal. A orientação segue o sistema de coordenadas (tri-ortogonal) com centro no coração.

Baseado nisso, Griffin (1990) indica que as frequências naturais da carroceria sejam inseridas acima de 1Hz para que se evite o mal do enjôo e abaixo de 4Hz em função da alta sensibilidade do corpo a essa faixa, sendo comum, por esse conjunto de fatores, adotar um intervalo entre 1,2 e 1,6Hz para as frequências naturais de massa suspensa do veículo.

Para a massa não suspensa, ou meramente, suspensão, procura-se que se tenha frequências naturais mais altas, preferencialmente acima dos 10Hz, sendo habitual o intervalo entre 11 e 17Hz, como visto na Figura 37.

Figura 37 – Picos nas frequências naturais de massa suspensa e massa não suspensa



Fonte: Adaptado de Milliken e Milliken (1995), página 793

### c) Efeito da duração de vibração:

A norma ISO 2631-1 (1997) indica que sejam analisadas as movimentações com frequência entre 1 e 80Hz e, que, dentro desse intervalo, existem três limites definidos, que definem a ação para redução da vibração. O tempo de exposição de uma pessoa a uma dada vibração afeta diretamente a redução do conforto, porém, como existem diversos efeitos possíveis de vibração, não existe uma fórmula de dependência de tempo única que consiga ser aplicada a todas as situações.

Muitas vezes existe uma relação entre a amplitude de vibração, com o tempo de exposição a ela, e, muitas dessas vezes, a resposta é dominada pela amplitude de

vibração, fazendo com que, para exposição maior do que alguns segundos, mudanças na duração tenham efeito relativamente pequeno na resposta.

A relação do tempo de exposição com a severidade de vibração, por demandar um estudo demorado e ser afetada por diversos fatores, ainda não é totalmente compreendida, não possuindo, portanto, uma evidência concreta para uso de uma dependência do tempo sem utilizar de uma qualificação. A norma ISO 2631-1 (1997) e a Diretiva Europeia EU44/2002 indicam que, em relação a saúde do ser humano, pode-se equacionar a relação do tempo de exposição, em relação a aceleração rms ( $a_w$ ), através da seguinte equação, onde  $T_1$  e  $T_2$  indicam respectivamente o tempo de exposição e o tempo de medição de vibração, com seus valores de aceleração  $a_{w1}$  e  $a_{w2}$ :

$$T_1 = \left( \frac{a_{w2}}{a_{w1}} \right)^2 T_2 \quad (21)$$

Para  $T_2 = 8$  horas é estabelecido pela Diretiva Europeia que  $a_{w2}$  obedeça aos seguintes limites:

- Valor de Exposição para Ação (EAV):  $a_{w2} = 0,5\text{m/s}^2$
- Valor de Exposição Limite (ELV):  $a_{w2} = 1,5\text{m/s}^2$

### **2.3.3 Métodos de avaliação da vibração**

De acordo com Griffin (1990) a capacidade de quantificar as observações e experiências é uma forma de compreender cada vez mais sobre o assunto. O autor deixa claro que a medição em si, é apenas a atribuição de valores numéricos de acordo com algumas regras, e que, a avaliação resulta em, tendo esses números, realizar uma indicação da classificação, por exemplo de severidade, desses valores.

São consideradas cinco principais razões pelas quais se mede a exposição de seres humanos à vibração:

- Fornecer documentação simples e padrão das condições de vibração;
- Determinar aspectos da vibração benéficos de redução;
- Fornecer dados comparativos entre ambientes;
- Prever efeitos adversos a saúde, conforto e desempenho;
- Comparar um ambiente com o seu limite de vibração;

A avaliação, no sentido da medição de conforto humano, revela a severidade da vibração sentida através dos resultados quantitativos medidos e de análises subjetivas. Porém, uma avaliação só faz sentido se atende aos procedimentos de medição, para que possa ser comparável com outras medições já realizadas; caso não haja procedimentos, não se consegue obter a comunicação e comparação entre os dados medidos.

Além disso, Griffin (1990) deixa claro que, além de seguir os procedimentos, ainda é necessário que se compreenda que existem variações entre os seres humanos, chamadas por ele de intersubjetivas, como idade e gênero, e variações intra-subjetivas, como a postura na hora do teste ou a mudança de posição durante o mesmo, que indicam que as avaliações não devem ser feitas em um único ser humano, ou em um pequeno grupo de pessoas com mesma característica, para que se diminua a probabilidade de influência dessas variáveis.

As medições para avaliação de percepção do conforto citadas por Griffin (1990) consideram como relevantes quatro aspectos: subjetividade, fisiologia do corpo humano, atividade realizada e biodinâmica.

No caso desse trabalho, ao utilizar o modelo computacional, serão descartadas as sensações subjetivas, que são respostas aos estímulos que variam de pessoa a pessoa além dos fatores fisiológicos do corpo e das atividades realizadas, já que se considera apenas um motorista sujeito a vibrações do veículo sem exercer nenhuma outra atividade.

## **2.4 Vibrações**

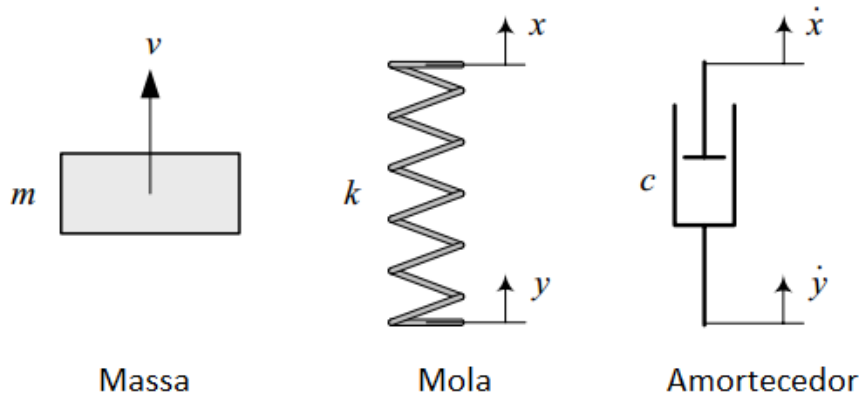
Rao (2009) define como vibração ou oscilação um movimento que se repita depois de um determinado intervalo de tempo. São dados como exemplo por ele, para uma vibração mecânica, o movimento de um pêndulo ou de uma corda dedilhada.

São considerados três elementos principais em um sistema vibratório, sendo uma massa, capaz de armazenar energia cinética, um elemento elástico, que armazena energia potencial, e, por fim, um elemento de amortecimento, capaz de dissipar essa energia de forma gradual.

Segundo Jazar (2008) a vibração mecânica está presente no veículo, mas pode ser amenizada desde que se tenha o conhecimento adequado. São explicados os princípios de vibrações, algumas formas de análise e de aplicação e, por fim, as respostas do sistema em frequência e tempo.

Em um veículo, ainda segundo Jazar (2008), a análise de resposta em frequência é a maneira mais utilizada e mais conveniente de conseguir obter melhorias significativas no comportamento da suspensão e de seus componentes. Assim como Rao (2009) são definidos os três elementos principais do sistema vibratório como sendo a massa, uma mola e um amortecedor, mostrados na Figura 38.

Figura 38 – Elementos principais de um sistema vibratório



Fonte: Adaptado de Jazar (2008), página 729

Ainda segundo Jazar (2008) o sistema descrito pelos componentes acima possui um valor de energia mecânica, em qualquer instante, dado pela relação abaixo.

$$E = K + V \quad (22)$$

Onde o valor de  $K$  representa a parcela de energia cinética armazenada pela massa ( $m$ ) que é proporcional ao valor do quadrado da velocidade ( $v^2$ ), e  $V$  representa a parcela de energia potencial da mola de rigidez ( $k$ ), e é definida em função do quadrado do deslocamento ( $z$ ).

As relações que estabelecem os valores de  $K$  e de  $V$  para um determinado instante do movimento são mostradas abaixo.

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad V = \frac{1}{2}kz^2 \quad (23 \text{ e } 24)$$



Segundo Timoshenko (1937) um sistema elástico entra em oscilação toda vez que este é retirado de sua posição de equilíbrio ou quando nele é aplicado uma força repentina, sendo que tal oscilação gerada pode ter diferentes modos de vibrar, dependendo de algumas características do sistema e da aplicação da força.

### **2.4.1 Classificação das vibrações**

De acordo com Rao (2009) existem diferentes maneiras de classificar as vibrações mecânicas, utilizando como parâmetro alguns critérios específicos, como a forma de perturbação que excita o sistema, a presença de elementos de amortecimento, a aleatoriedade do módulo do valor da aceleração e a linearidade ou não linearidade de comportamento dos componentes do sistema.

Para essa dissertação é de extrema importância que se compreenda os conceitos de excitação livre e forçada e da diferença de comportamento entre sistemas que possuem elementos de amortecimento em relação àqueles que não possuem, sejam eles excitados livremente ou de forma forçada.

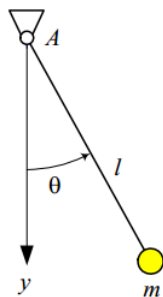
#### **2.4.1.1 Quanto ao tipo de excitação**

O primeiro critério utilizado nessa dissertação para classificar as vibrações mecânicas tem como parâmetro a forma com que o sistema é excitado, podendo o movimento ser do tipo vibração livre ou forçada.

As características de cada um desses dois tipos de sistema são abrangidas de forma mais detalhada abaixo, juntamente com exemplos do dia-a-dia que ilustram de forma mais clara a diferença entre eles.

##### **2.4.1.1.1 Vibração livre**

Uma vibração mecânica livre é aquela na qual não há a presença de uma função excitadora, sendo a oscilação iniciada por uma condição inicial de posição, velocidade ou aceleração não nulas, como explica Jazar (2008).

**Figura 39 – Exemplo de um sistema de vibração livre do tipo pêndulo**

Fonte: Jazar (2008), página 741

Existem duas formas de um movimento iniciar uma oscilação do tipo livre, uma delas acontece quando este tem sua posição inicial diferente da posição de equilíbrio, como no caso de um pêndulo que tenha um ângulo  $\Theta$  inicial diferente de 0 graus em relação ao eixo vertical do seu apoio, como na Figura 39.

A outra forma acontece quando há a aplicação de um impulso, que faz com que o sistema passe a ter uma velocidade inicial não nula. Um exemplo dessa forma a utilização de martelos de impacto, muito utilizado comercialmente, em testes estruturais, para medir a força de estímulo.

#### 2.4.1.1.2 Vibração forçada

Porém, há oscilações que não são geradas simplesmente pelo deslocamento da posição inicial ou de uma velocidade inicial diferente de zero, existem sistemas vibratórios que entram em oscilação devido a ação de forças externas, que podem ser ou não repetitivas, e recebem o nome de sistema de vibração forçada.

Rao (2009) dá como exemplo de vibração forçada a oscilação presente em motores de veículo a combustão. Nesse tipo de sistema mecânico são aplicadas forças repetitivas, vindas do movimento giratório do virabrequim causado pelas explosões na câmara de combustão, que fazem com que sejam geradas vibrações do motor, que são transmitidas para o veículo.

Uma das situações mais estudadas de sistemas com vibração do tipo forçada tem como motivação a presença do efeito denominado ressonância, que acontece quando a frequência da força externa aplicada ao sistema coincide com a frequência natural do próprio sistema.

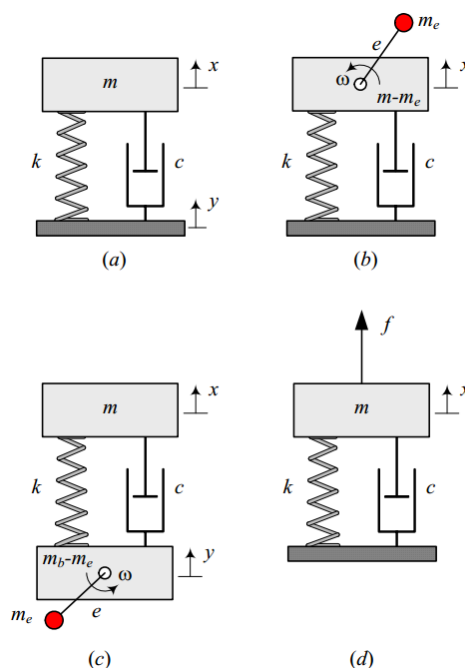
Esse fenômeno faz com que as amplitudes do movimento se tornem cada vez maiores, podendo, caso não haja interrupção da aplicação da força, chegar ao colapso mecânico do sistema. Um exemplo comum de ocorrência de ressonância aconteceu em 1940, nos Estados Unidos, quando a ponte Tacoma Narrows entrou em colapso e se partiu em pedaços.

A força aplicada a um sistema vibratório para que esse entre em oscilação pode ser de tipos distintos e a análise da vibração do sistema dependerá de qual dos tipos de força atuam sobre ele:

- Força periódica: excitação repetida em um determinado intervalo de tempo (Ex: motores a combustão);
- Força transitória: excitações instantâneas e de curta duração (Ex: buraco em uma estrada);
- Força aleatória: excitações não descritas por funções específicas e que, na maioria das vezes, são tratadas com métodos estatísticos. (Ex: percurso em uma pista irregular);

Jazar (2008) indica que para dinâmica veicular uma grande parte dos sistemas de vibração podem ser modelados a partir de um sistema de um grau de liberdade composto de massa, mola e amortecedor.

**Figura 40 – Diferentes tipos de excitação**



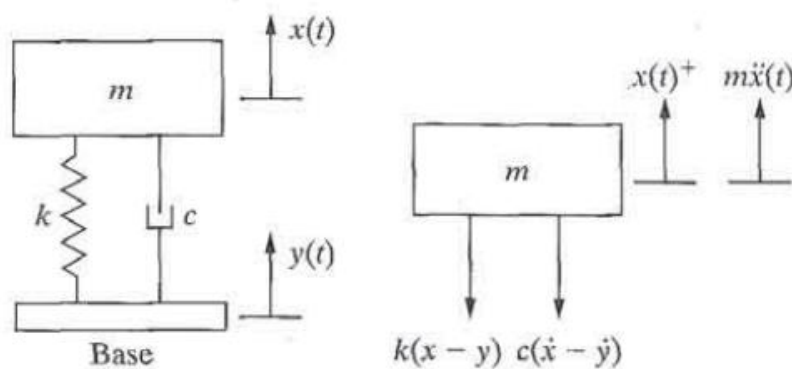
Fonte: Jazar (2008), página 746

Como visto na Figura 40 ele classifica quatro tipos de sistemas de vibração forçada para esse caso de acordo com sua excitação, sendo eles: (a) excitação pela base, (b) excitação excêntrica, (c) excitação excêntrica pela base e (d) excitação forçada.

Para se modelar um veículo entende-se a excitação da oscilação como vinda das irregularidades da pista, servindo como entrada no sistema vibratório através da massa não suspensa, ou seja, da suspensão. Esse tipo de excitação, portanto, é do tipo excitação pela base, como visto na Figura 40-a.

Segundo Inman (2008), nesse tipo de sistema o conjunto de massa, mola e amortecedor tem como apoio uma base, considerada como móvel, que exerce sobre o sistema uma excitação dita harmônica, como visto na Figura 41.

Figura 41 – Sistema vibratório excitado pela base



Fonte: Inman (2008), página 131

Para esse tipo de excitação tem-se que a equação que o rege, quando o mesmo se encontra em equilíbrio, é dada por:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0 \quad (25)$$

Ainda segundo Inman (2008), quando se assume que há uma excitação harmônica expressa como:

$$y(t) = Y \text{sen} \omega_b t \quad (26)$$

O que faz com que a equação que rege o sistema passe a ser dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = cY\omega_b \cos\omega_b t + kY \sin\omega_b t \quad (27)$$

Inman (2008) divide a equação do movimento pela massa e utiliza da definição de frequência natural ( $\omega_n$ ).

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (28)$$

E de coeficiente de amortecimento ( $\zeta$ )

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (29)$$

Para chegar em:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 2\zeta\omega_n\omega_b Y \cos\omega_b t + \omega_n^2 Y \sin\omega_b t \quad (30)$$

Para sistemas excitados pela base a análise é feita pela relação entre a amplitude de movimentação da base (Y) e do sistema (X), dada através da divisão da segunda pela primeira, tendo como resultado dessa relação o que se chama de transmissibilidade.

Essa relação indica o quanto de vibração da base é sentida como vibração pelo sistema, quantificando a capacidade do sistema em reduzir a amplitude de movimentação, que é também chamada de ganho.

Tomando uma razão de frequência (r) dada por:

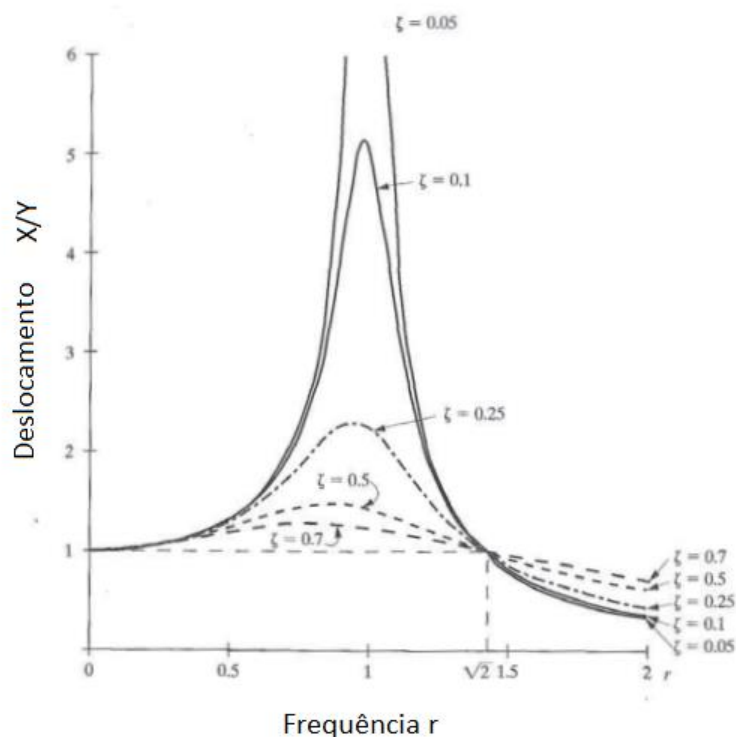
$$r = \frac{\omega_b}{\omega_n} \quad (31)$$

Pode-se expressar a transmissibilidade como sendo:

$$\frac{X}{Y} = \left[ \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

Um exemplo gráfico da transmissibilidade pela razão de frequência  $r$  é visto na Figura 42 abaixo, mostrando a variação de transmissibilidade em função da razão de frequência  $r$ , para diversas alterações no valor de coeficiente de amortecimento.

Figura 42 – Transmissibilidade em função da razão de frequência  $r$



Fonte: Adaptado de Inman (2008), página 133

### 2.4.1.2 Quanto a presença de amortecimento

Um sistema pode ser classificado de acordo com a presença ou não de amortecimento durante a sua oscilação. Segundo Rao (2009) em alguns sistemas o amortecimento tem uma atuação tão baixa que pode considerar-se que ele é nulo, ou seja, que ele não está presente.

#### 2.4.1.2.1 Vibração não amortecida

Um sistema vibratório é considerado não amortecido, segundo Rao (2009), quando não há nenhuma perda ou dissipação de energia causada por resistência ou por atrito durante o movimento de oscilação. Nesse caso, um sistema simples de um grau de liberdade com vibração não amortecida seria composto apenas de mola e massa.

No início da utilização de veículos, quando se utilizavam carruagens, eram projetadas suspensões apenas com molas, sem a utilização de amortecedores; essas suspensões trabalhavam de forma a oscilar sem dissipação de energia das molas, tendo um comportamento semelhante a um sistema de vibração não amortecida.

#### 2.4.1.2.2 Vibração amortecida

Todavia, ainda segundo Rao (2009) se a energia do sistema é dissipada através de atrito ou resistência, considera-se o sistema vibratório como amortecido. Essa dissipação pode ser feita de diversas maneiras, mas, nos veículos em geral, ela é feita através de amortecedores telescópicos com óleo, que dissipam energia em forma de calor.

Nesse caso o sistema não é mais representado apenas como um massa-mola e deve-se levar em consideração o coeficiente de amortecimento; a capacidade de amortecimento do sistema é diretamente ligada a velocidade de deslocamento.

### **2.4.2 *Graus de liberdade de sistemas vibratórios***

Os sistemas vibratórios são classificados também pelo número de graus de liberdade que possuem, sendo de extrema importância uma boa definição do número de graus de liberdade de um sistema quando esse é modelo computacionalmente.

Rao (2009) diz que o número de graus de liberdade de um sistema é determinado pelo menor número de coordenadas independentes que são necessárias para que seja possível indicar qualquer uma das posições de qualquer parte deste sistema.

Ele denomina cada uma dessas coordenadas necessárias para determinação da posição de um elemento qualquer do sistema como coordenada generalizada, podendo esta ser do tipo cartesiana ou não.

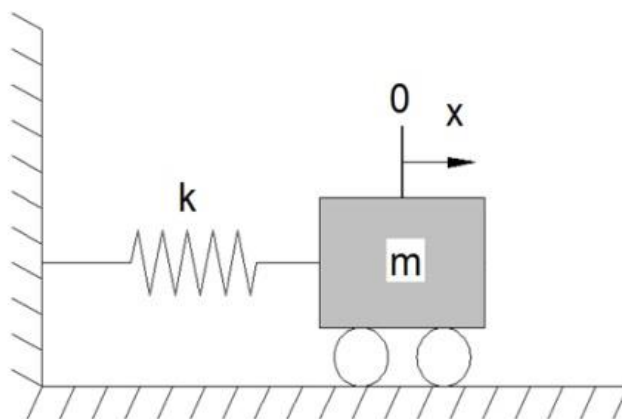
#### **2.4.2.1 Sistemas com um grau de liberdade**

De acordo com Harris e Piersol (2002) o sistema vibratório mais simples é composto apenas de um grau de liberdade, onde apenas uma coordenada independente é capaz de determinar qualquer que seja a posição da oscilação do sistema.

Para representar um sistema de 1GDL pode-se utilizar de uma massa acoplada a uma mola, suportadas por uma superfície fixa, como mostrado na Figura 43.

Nesse sistema o elemento de massa possui apenas uma direção de movimento estando restrito a movimentar-se nas demais direções, sendo assim, qualquer que seja a alteração em relação a sua posição inicial esta poderá ser definida através de uma nova referência no eixo transladado.

Figura 43 – Sistema vibratório não amortecido com um grau de liberdade e vibração livre



Fonte: Adaptado de Rao (2009), página 50

Se a massa  $m$  desse sistema for deslocada a qualquer uma posição, que não a de equilíbrio, e for largada sem mais ações de forças externas, será iniciada uma vibração livre; caso seja exercida uma força na massa a vibração do sistema será do tipo forçada.

Além disso, deve-se avaliar a presença de amortecimento ou não no sistema, que mudará a maneira com que esse sistema responde às variadas maneiras de excitação. Para isso são resumidas as características das variações de sistemas de um grau de liberdade, baseado na discussão feita por Harris e Piersol (2002).

a) Sistema de um grau de liberdade, vibração livre e sem amortecimento

Para o caso mais simples, sem a presença de amortecedores e nem de força aplicada sobre a massa, como visto na Figura 43, tem-se a movimentação do sistema definida abaixo:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (33)$$

Resolvendo a equação tem-se a equação da posição de equilíbrio e a definição da frequência angular natural, dada por  $\omega_n$ .

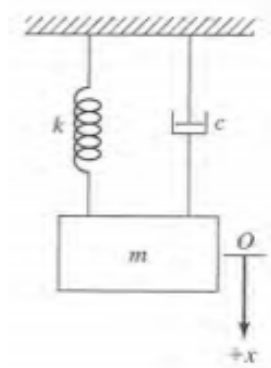


$$x = A \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \operatorname{cos} \sqrt{\frac{k}{m}} t, \quad \text{onde } \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n \quad (34 \text{ e } 35)$$

b) Sistema de um grau de liberdade, vibração livre e com amortecimento

Quando, segundo Rao (2009), há dissipação de energia da oscilação através de atrito ou resistência, o sistema passa a ser amortecido. Um sistema massa-mola com a presença de amortecedor é mostrado na Figura 44.

Figura 44 – Sistema vibratório amortecido com um grau de liberdade e vibração livre



Fonte: Adaptado de Rao (2009), página 66

Para esse sistema a equação que determina a movimentação da massa  $m$  é acrescida do elemento de amortecimento, dependente da velocidade e do coeficiente de amortecimento  $c$ .

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (36)$$

O coeficiente de amortecimento crítico é dado pela equação abaixo.

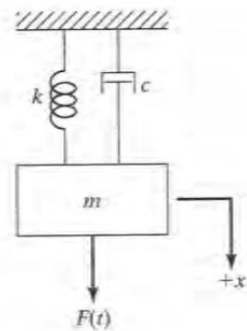
$$c_{\text{crítico}} = 2m\omega_n = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} \quad (37)$$

c) Sistema de um grau de liberdade, vibração forçada e com amortecimento

Além da adição de amortecimento, ainda há a possibilidade da presença de uma força externa atuando sobre o sistema, que faz com que sua oscilação se comporte de maneira distinta. Um sistema desse tipo é mostrado na Figura 45.

Existem ainda sistemas com aplicação dessa força externa, mas que não possui elemento de amortecimento. Para que essa dissertação não se estendesse muito sobre esse tema, preferiu-se abordar apenas o sistema com amortecimento.

**Figura 45 – Sistema vibratório amortecido com um grau de liberdade e vibração forçada**



Fonte: Adaptado de Rao (2009), página 101

Na equação de movimento desse tipo de sistema insere-se a ação força externa, portanto, ao invés de igualar o somatório de forças a zero iguala-se ao valor da força aplicada, considerada nesse caso como uma excitação harmônica.

$$\ddot{m}x + c\dot{x} + kx = F_0 \text{sen}\omega t \quad (38)$$

A modelagem de sistemas de um grau de liberdade é de fato simples, mas tem grande importância na compreensão das inserções de amortecimento e excitação forçada, para que possam ser desenvolvidas modelagens de sistemas de dois ou mais graus de liberdade.

#### **2.4.2.2 Sistemas com vários graus de liberdade**

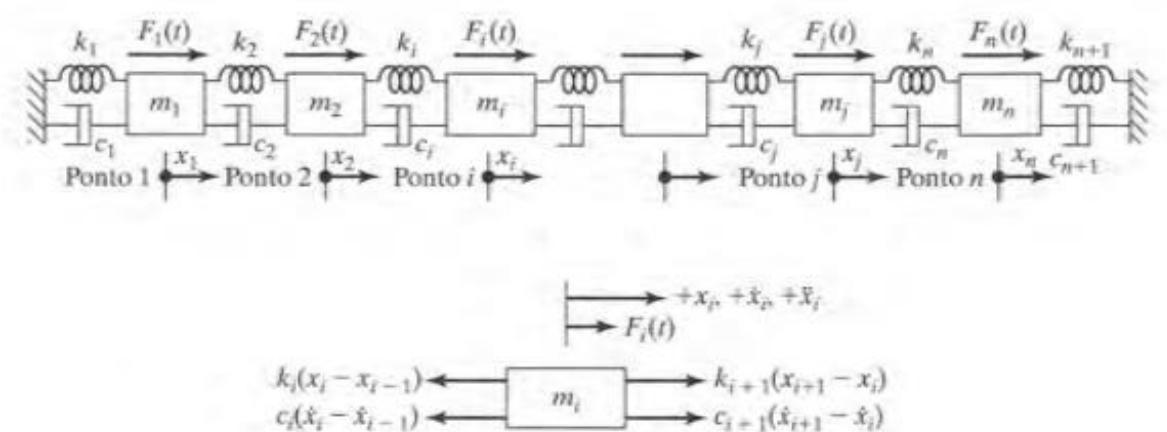
Segundo Rao (2009) expõe que os sistemas estudados pela engenharia, em sua grande maioria, são contínuos e possuem vários graus de liberdade, impedindo que sejam modelados considerando apenas um grau de liberdade, e que é necessário o uso de equações diferenciais ordinárias para obter as respostas do sistema.

Harris e Piersol (2002) também deixa claro que não há limites para o número de massas acopladas num sistema e, conseqüentemente, de graus de liberdade, e reitera a necessidade do uso de cálculos através de equações diferenciais para tratar essa distribuição contínua de massa.

De acordo com Inman (2008) para se modelar o movimento de máquinas e dispositivos mecânicos deve ser utilizado sistemas de vários graus de liberdade. Ele cita como exemplo a suspensão de um veículo, que possui quatro rodas e, movimentações de *roll*, *pitch* e *yaw*, demandando o uso de mais de quatro graus de liberdade.

A análise de sistemas com números finitos de graus de liberdade, ainda segundo Inman (2008), pode ser realizada através do que se chama de análise modal, que é descrita por alguns passos e que traz resultados consistentes de resposta do sistema.

Figura 46 – Sistema com vários graus de liberdade



Fonte: Adaptado de Rao (2009), página 209

Rao (2009) define a modelagem simples de um sistema com vários graus de liberdade, como o mostrado na Figura 46, através da equação abaixo.

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \quad (39)$$

A partir dela são analisadas as variações em relação a presença ou não de força de excitação e de elementos de amortecimento. Considerando sempre  $[m]$ ,  $[c]$  e  $[k]$ , como matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente.

a) Sistema com vários graus de liberdade, vibração livre e sem amortecimento

Um sistema de vários graus de liberdade sem a presença de força de excitação e de elementos de amortecimento, ou seja, com  $[c]$  e  $F$  iguais a zero, é modelado por:

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = 0 \quad (40)$$

Onde,

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix} \quad (41 \text{ e } 42)$$

E os vetores coluna aceleração e deslocamento, são dados por:

$$\ddot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{Bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad (43 \text{ e } 44)$$

#### b) Sistema com vários graus de liberdade, vibração livre e com amortecimento

Quando adicionado o amortecimento a equação modelada passa a considerar a segunda parcela, onde a matriz de amortecimento em função da velocidade não é mais considerada como nula.

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = 0 \quad (45)$$

A matriz de amortecimento e o vetor coluna velocidade são dados por:

$$[c] = \begin{bmatrix} c + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -c_n & c_n + c_{n+1} \end{bmatrix} \quad \dot{\vec{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{Bmatrix} \quad (45 \text{ e } 46)$$

c) Sistema com vários graus de liberdade, vibração forçada e com amortecimento

Quando passa a atuar no sistema uma força de excitação, seja ela do tipo que for entre os já citados nesse trabalho, passa-se a considerá-la na equação principal como diferente de zero.

$$[m]\ddot{\vec{x}} + [c]\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \quad (47)$$

O vetor coluna de força é dado por:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{pmatrix} \quad (48)$$

## 2.5 Modelos Dinâmicos de Dinâmica Vertical de Veículos

Um veículo é um sistema vibratório complexo, que possui vários graus de liberdade, e que, segundo Dukkupati *et al* (2008) para que se tenha sua resposta dinâmica modelada demanda, na maior parte das vezes, modelos baseado em elementos finitos, o que demanda um alto custo e um extenso tempo para execução e análise.

Entretanto, para análises de desempenho do conforto de um veículo deve-se focar a análise apenas em baixas frequências, entre 1 e 80Hz como já dito por Gillespie (1992), o que faz com que modelos simplificados atendam para esse tipo de análise.

De acordo com Dukkupati *et al* (2008), um modelo de *Ride*, portanto, pode ser muito mais simples que um modelo de análise de dinâmica veicular, sendo, ainda assim, capaz de auxiliar na definição de parâmetros dos componentes da suspensão, sem que se tenha necessidade de um grande número de testes em veículo.

Esses modelos, porém, podem ser elaborados de diversas formas, sendo mais comum que se utilize os modelos *Quarter-Car*, *Half-Car* e *Full-Car* que tem suas características descritas nessa dissertação.

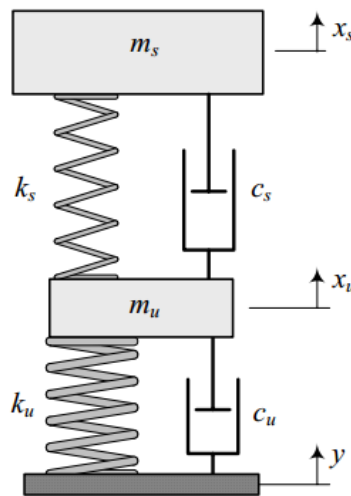
### 2.5.1 Modelo Quarter-Car

Segundo Gillespie (1992), a modelagem mais simples do comportamento de um veículo consiste em considerar apenas uma de suas rodas, representando o que seria um quarto de um veículo, vindo disso o nome de *Quarter-Car*.

Nesse tipo de modelo, mostrado na Figura 47, considera-se que o desempenho de conforto de um veículo, no nível mais simples de comparação, pode ser modelado a partir de uma massa, acoplada a uma mola e um amortecedor.

Além disso, para o pneu, considera-se, geralmente, um comportamento semelhante ao de uma massa acoplada em uma mola, como feito no modelo dessa dissertação. Porém, de acordo com Meister e Reihler (1931), por possuir comportamento visco-elástico, o pneu apresenta um certo amortecimento, podendo, caso necessário, ser adicionado ao modelo um elemento de amortecimento.

Figura 47 – Modelo *Quarter-Car* com amortecimento



Fonte: Jazar (2008), página 851

Segundo Gillespie (1992), as massas do sistema têm movimentação restrita apenas a direção vertical, e, como existem dois elementos elásticos acoplados em série como na Figura 47, é possível calcular o que ele chama de taxa de *ride* (Ride Rate – RR), que nada mais é que a rigidez efetiva da suspensão.

Utilizando a nomenclatura dada por Jazar (2008) que denomina  $k_s$  e  $k_u$  para os valores de rigidez da suspensão e do pneu, respectivamente, tem-se que a rigidez efetiva da suspensão (RR) é dada por:

$$RR = \frac{k_s k_u}{k_s + k_s} \quad (49)$$

Para o cálculo da frequência natural de *bounce* ( $\omega_n$ ) do veículo, Gillespie (1992) primeiramente desconsidera a presença do amortecedor da suspensão e define que:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\text{rigidez efetiva}}{\text{massa suspensa}}} = \sqrt{\frac{RR}{M}} \quad (50)$$

A rigidez do pneu ( $k_u$ ) é geralmente mais rígida que a da suspensão ( $k_s$ ), tendo esta segunda maior influência na rigidez efetiva, na frequência natural de *bounce* ( $\omega_n$ ) e, conseqüentemente, no isolamento das vibrações vindas da pista.

Gillespie (1992) define que, para um maior isolamento das vibrações deve-se manter a frequência natural da suspensão a menor possível, diminuindo, portanto, a rigidez da suspensão ( $k_s$ ).

Quando considerado o amortecedor da suspensão, com coeficiente de amortecimento  $c$ , calcula-se a frequência natural amortecida ( $\omega_d$ ), dada por:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_s^2} \quad \zeta_s = \frac{c}{\sqrt{4k_s M}} \quad (\zeta_s = \text{taxa de amortecimento}) \quad (51 \text{ e } 52)$$

Segundo Gillespie (1992) os valores para a taxa de amortecimento variam geralmente entre 0,2 e 0,4. Para essas taxas o valor da frequência natural amortecida ( $\omega_d$ ) varia entre 98 e 92% da frequência natural ( $\omega_n$ ), que por essa proximidade é mais usualmente utilizada para caracterização do veículo.

O modelo *Quarter-Car* pode ter seu comportamento descrito através da utilização da segunda lei de Newton, conhecida como princípio fundamental da dinâmica, e que é mostrada para esse caso, por Gillespie (1992). Considerando as variáveis de rigidez de Jazar (2008) esse comportamento é descrito nas equações a seguir, sendo:

$k_s$  = rigidez da suspensão

$k_u$  = rigidez do pneu

$C_s$  = amortecimento da suspensão

$x_s$  = deslocamento da massa suspensa

$x_u$  = deslocamento da massa não suspensa

$y$  = deslocamento da pista

$F_b$  = força aplicada sobre a massa suspensa

$F_w$  = força aplicada sobre a massa não suspensa

Para o movimento da massa suspensa tem-se a equação diferencial:

$$M\ddot{x}_s + C_s\dot{x}_s + k_s x_s = C_s\dot{x}_u + k_s x_u + F_b \quad (53)$$

E para a massa não suspensa:

$$m\ddot{x}_u + C_s\dot{x}_u + (k_s + k_u)x_u = C_s\dot{x}_s + k_s x_s + k_t y + F_w \quad (53)$$

Gillespie (1992) ainda descreve em seu livro as equações de transmissibilidade devido as perturbações advindas da pista e das forças aplicadas sobre as massas suspensa e não suspensa, que não são descritas nessa dissertação para que não se estenda muito as demonstrações.

### 2.5.2 Modelo Half-Car

O modelo *Half-Car* é uma forma um pouco mais elaborada de modelar um veículo e o seu comportamento em relação as irregularidades da pista, considerando um número maior de graus de liberdade. Assim como no modelo *Quarter-Car* o veículo é modelado a partir do uso de massas, molas e amortecedores.

Nesse tipo de modelo, simula-se o movimento de duas das quatro rodas do veículo, e isso pode ser feito de duas formas, como dito por Jazar (2008):

- Duas rodas do mesmo eixo, por exemplo as rodas esquerda e direita do eixo dianteiro, permitindo, além da movimentação de *bounce*, a de *roll*.
- Uma roda de cada eixo, por exemplo as rodas dianteira e traseira do lado esquerdo do veículo, a fim de analisar a movimentação de *bounce* e de *pitch*.

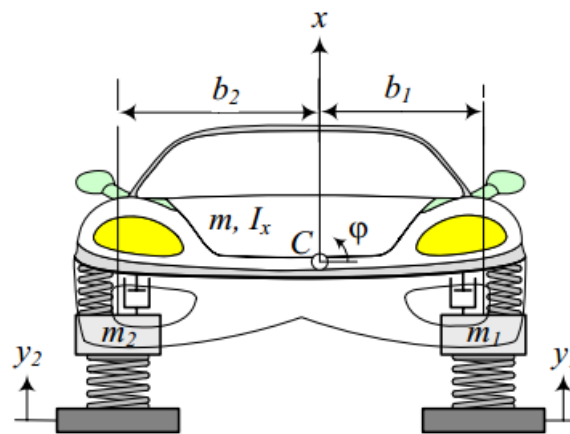
Essas duas maneiras de se modelar um *Half-Car*, são melhor detalhadas abaixo.



### 2.5.2.1 Half-car para movimentação de Roll

Na modelagem focada na análise da rolagem do veículo são representadas as duas rodas dianteiras do veículo, incluindo, segundo Jazar (2008), as movimentações de *bounce* (eixo  $x$ ), *roll* ( $\varphi$ ), translação das rodas dianteiras ( $x_1$  e  $x_2$ ) e translação independente das irregularidades da pista ( $y_1$  e  $y_2$ ), como visto na Figura 48.

Figura 48 – Modelo *Half-Car* para movimentação de *roll*



Fonte: Jazar (2008), página 859

Jazar (2008) ainda alerta o fato que, apesar de na maioria das vezes o modelo *Half-Car* para *roll* representar as rodas dianteiras, também é possível que se elabore a representação das rodas traseiras; como também é possível, para ambos os casos, considerar uma barra estabilizadora entre as rodas e o amortecimento dos pneus.

Os resultados dos dois eixos podem apresentar uma diferença relevante, já que os componentes utilizados podem possuir diferente rigidez e amortecimento, além do uso ou não de barras estabilizadoras.

As equações que regem o movimento de um *Half-Car* frontal como o mostrado na Figura 48, são vistas abaixo, conforme Jazar (2008) e considerando a rigidez do pneu como  $k_t$ . Para o equilíbrio de forças e momentos no centro de gravidade do veículo (C), tem-se, respectivamente:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1\dot{\varphi}) + c(\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2\dot{\varphi}) + k(x - x_1 + b_1\varphi) + k(x - x_2 - b_2\varphi) = 0 \quad (54)$$

$$I_x \ddot{\varphi} + b_1 c (\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1 \dot{\varphi}) - b_2 c (\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2 \dot{\varphi}) + b_1 k (x - x_1 + b_1 \varphi) - b_2 k (x - x_2 + b_2 \varphi) + k_{R\varphi} = 0 \quad (55)$$

Para as rodas esquerda e direita, tem-se:

$$m_1 \ddot{x}_1 - c (\dot{x} - \dot{x}_1 + b_1 \dot{\varphi}) + k_t (x_1 - y_1) - k (x - x_1 + b_1 \varphi) = 0 \quad (56)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c (\dot{x} - \dot{x}_2 - b_2 \dot{\varphi}) + k_t (x_2 - y_2) - k (x - x_2 + b_2 \varphi) = 0 \quad (57)$$

### 2.5.2.2 Half-car para movimentação de Pitch

A maior parcela de movimentação longitudinal de um veículo vem da sua movimentação de *pitch*, que é de grande relevância para o estudo do desempenho em conforto, principalmente em baixas frequências.

Para modelar a movimentação rotacional nesse eixo é utilizado o modelo *Half-Car*, representado por uma das rodas dianteiras do veículo unida à roda traseira desse mesmo lado escolhido, que permitem a rotação em torno de eixo Y, mostrado em Gillespie (1992).

Jazar (2008) explica que, nesse tipo de modelo são simuladas as movimentações de *bounce* (eixo x), *pitch* ( $\theta$ ), translação das rodas dianteiras ( $x_1$  e  $x_2$ ) e translação independente das irregularidades da pista ( $y_1$  e  $y_2$ ), como visto na Figura 49.

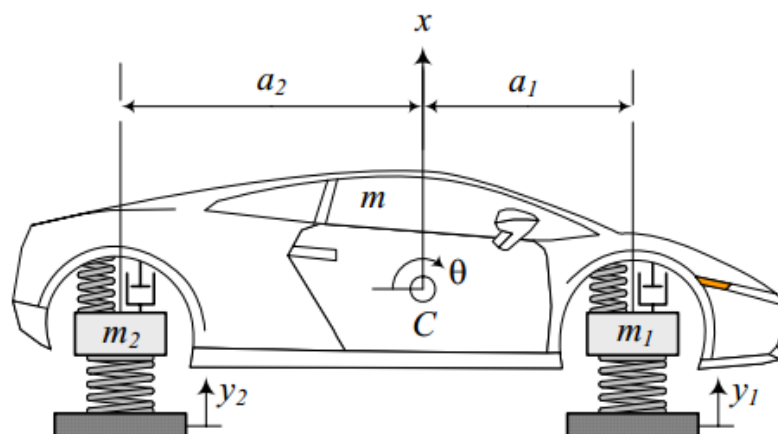


Figura 49 – Modelo *Half-Car* para movimentação de *pitch*

Fonte: Jazar (2008), página 853

As equações de equilíbrio do modelo da Figura 49, em relação as forças e momentos, respectivamente, no centro de gravidade do veículo, são mostradas abaixo:

$$m\ddot{x} + c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 + a_2\dot{\theta}) + k_1(x - x_1 - a_1\theta) + k_2(x - x_2 + a_2\theta) = 0 \quad (58)$$

$$I_z\ddot{\theta} - a_1c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + a_2c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 + a_2\dot{\theta}) - a_1k_1(x - x_1 - a_1\theta) + a_2k_2(x - x_2 + a_2\theta) = 0 \quad (59)$$

E para as rodas dianteira e esquerda:

$$m_1\ddot{x}_1 - c_1(\dot{x} - \dot{x}_1 - a_1\dot{\theta}) + k_{t_1}(x_1 - y_1) - k_1(x - x_1 - a_1\theta) = 0 \quad (60)$$

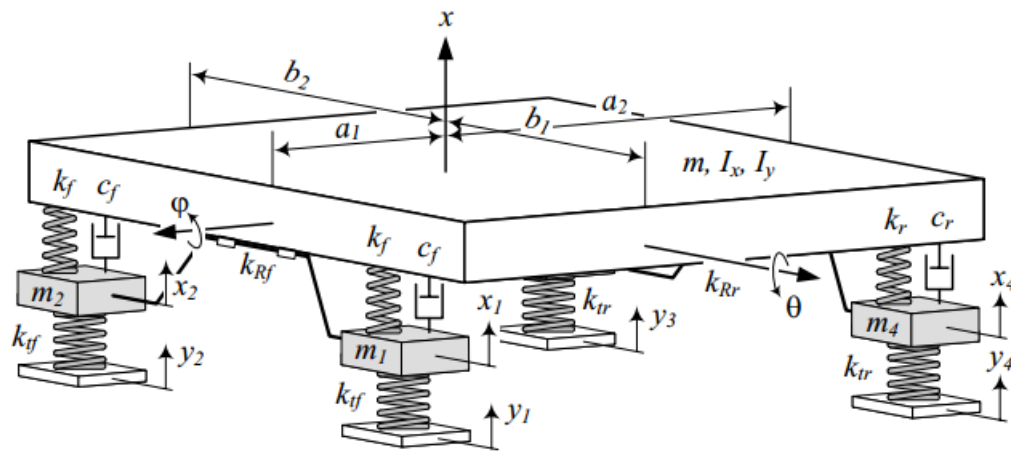
$$m_2\ddot{x}_2 - c_2(\dot{x} - \dot{x}_2 + a_2\dot{\theta}) + k_{t_2}(x_2 - y_2) - k_2(x - x_2 - a_2\theta) = 0 \quad (61)$$

O modelo *Half-Car* será utilizado nessa dissertação para as análises de influência dos componentes e suas variações no desempenho do conforto de um veículo. Segundo Sant'anna (2007) a utilização desse tipo de modelo permite que seja utilizada uma metodologia de solução de sistema do tipo não amortecido com vários graus de liberdade.

### 2.5.3 Modelo Full-Car

Mais complexo que o *Half-Car*, considerando ainda mais graus de liberdade, o *Full-Car* torna possível a análise de *bounce*, *pitch* e *roll* no mesmo modelo, ainda sendo uma associação de molas, amortecedores e molas.

Tal modelo considera as quatro rodas do veículo, podendo ainda ser associadas barras estabilizadoras dianteiras e traseiras e amortecimento dos pneus, tornando o modelo ainda mais complexo. Na Figura 50 é mostrado um modelo *Full-Car*, elaborado por Jazar (2008).

Figura 50 – Modelo *Full-Car*

Fonte: Jazar (2008), página 867

O equacionamento desse modelo é complexo, formado por sete equações, uma para cada grau de liberdade do sistema, e como já dito a modelagem computacional utilizado por essa dissertação será do tipo *Half-Car*, por esse conjunto de razões este equacionamento não será descrito nessa dissertação, estando presente em Jazar (2008).

### 3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Suzuki (1998) avalia a resposta do ser humano a vibração em veículos guiados em trilhos, como os trens, através de um simulador de quatro eixos e demonstra que a preocupação com o desempenho de conforto em veículos não se restringe aos veículos sob rodas, sejam eles de passeio ou de carga. Além disso, demonstra como as avaliações de conforto podem ser complexas devido a imensidão de variáveis presentes no sistema de um veículo.

No trabalho de Gunther (2000) a referência passa a ser os veículos de passeio, tendo como foco a avaliação da abordagem biomecânica de análise, em relação a abordagem tradicional, que consiste em avaliação subjetiva do conforto através de questionários respondidos pelos voluntários. O modelo biomecânico proposto no trabalho tem uma complexidade significativa e necessita de um bom desempenho no que se refere ao tratamento dos dados, sendo proposto pelo autor a utilização da técnica de rede neural para auxílio na diminuição do tempo de processamento desses dados.

Bellmann (2002) descreve a percepção de vibração de corpo inteiro através, inicialmente, de experimentos básicos em bancada, incluindo análise de ruído, via fones de ouvido. Posteriormente utiliza um veículo de passeio instrumentado para analisar a vibração do assento e do volante do veículo e utilizar como referência para analisar o conforto dos passageiros, comparando os resultados com a análise subjetiva.

Katu *et al* (2002) se baseia em testes em quatro modelos diferentes de veículos, sob três condições diferentes de percurso. Estuda a interferência das condições da estrada na vibração sentida pelo veículo, a influência da velocidade do veículo nos valores de amplitude dessa vibração e os efeitos dessas vibrações no corpo humano. Na pista menos irregular o veículo apresenta valores de aceleração menores do que a pista rugosa. Em velocidades próximas a 60km/h há demérito do conforto em relação a 40km/h e 80km/h, o que pode ser explicado por essa velocidade causar alta rotação do motor, ao utilizar provavelmente a mesma marcha que a 40km/h. Ao considerar os valores estabelecidos pela norma ISO 2631, para a velocidade de 60km/h, a mais crítica, os veículos se mostraram bastante desconfortáveis em pistas intermediárias e um pouco desconfortáveis em pistas suaves.

Matsumoto e Maede (2002) avaliam a sensibilidade do ser humano às mudanças de amplitude de aceleração em vibrações verticais. Os dezesseis voluntários pertencem a

um grupo específico, sendo do sexo masculino, entre 21 e 23 anos de idade, pesando entre 49kg e 77kg e medindo entre 1,64m e 1,81m, e foram submetidos a vibrações sentados sobre uma plataforma circular plana de raio 0,4m. A sensibilidade média de percepção para alterações da vibração encontrada é aproximadamente  $0,7\text{m/s}^2$  e a sensibilidade dos voluntários é maior em frequências próximas de 4Hz e menor na frequência de 16Hz e suas oitavas (31,5 e 63Hz) e a diferença encontrada intersubjetiva fica próxima a 6%.

Anflor (2003) não avalia o comportamento de um veículo de passeio, mas modela, utilizando de quatro graus de liberdade, um sistema representando um banco e o corpo humano, tendo como objetivo conjunto avaliar a transmissibilidade das vibrações entre piso, pélvis, ombro e cabeça, todos em relação ao assento. Assim como Matsumoto e Maede (2002) são utilizados voluntários, mas nesse trabalho tem-se uma mescla entre homens e mulheres, totalizando cinco indivíduos, com a conclusão de que há amplificação de transmissibilidade de 2,5 vezes entre o assento e o piso e uma atenuação para os demais pontos medidos. O modelo construído mostra respostas coerentes com as medições, apesar de valores de erro percentuais consideráveis nas curvas de transmissibilidade, para faixa de frequência entre 4 e 40Hz.

Ferreira (2003) utiliza o software Simulink, do Matlab, para determinar as frequências naturais e os modos de vibrar de um veículo comercial, tanto para a massa suspensa, quanto para a massa não suspensa. São utilizados sinais de entrada da forma PSD com variação entre 0 e 22Hz para realizar a excitação em uma das rodas do veículo e simular a resposta à vibração e sinais harmônicos entre 0 a 40Hz e 0 a 4Hz. As frequências naturais encontradas pelo modelo criado para massa suspensa são muito próximas às encontradas em análise experimental, ficando em torno, por exemplo, de 1,57Hz para movimentação vertical em fase (*pitch*) contra 1,47Hz experimentalmente. Para a massa não suspensa há variações de no máximo 20%, que mostram um comportamento bastante razoável do software Simulink, do Matlab, e a coerência em utilizá-lo, já que através dele é possível realizar um número muito superior de testes num mesmo intervalo de tempo que se gastaria com testes experimentais.

Bellmann *et al* (2004) estuda como as variações de frequência e de amplitude de vibração alteram o que é sentido pelo corpo humano, utilizando dezessete voluntários, sadios, com idades que variam entre 26 e 33 anos sob uma plataforma vibratória. Segundo o estudo a percepção permanece constante no intervalo entre 8 e 63Hz e decresce levemente em frequências menores que 8Hz ou maiores que 63Hz,

apresentando desvios consideráveis para a frequência de 16Hz, fugindo um pouco do que se encontra na literatura.

Ghosh *et al* (2004), utiliza um modelo *Half-Car*, construído no Matlab, para avaliar como um controle semiativo pode auxiliar no conforto, melhorando o isolamento das vibrações. Esse controle é baseado na variação de parâmetros de amortecimento e de massa e é modelado como um gerador de força que utiliza da teoria de controle ótimo para alterar tais parâmetros de forma otimizada. O modelo com controle semiativo no amortecedor mostra resultados significativos de melhoria no desempenho de isolamento de vibrações, encontrando soluções ótimas para cada situação em que o veículo se encontra. Além disso, uma comparação entre modelos mostra que o *Quarter-Car* apresenta picos de transmissibilidade muito altos, e que o ideal seria utilizar o modelo *Full-Car* para uma análise com menor erro.

Pereira (2005) estabelece, através de dados experimentais, curvas de percepção e conforto em relação a vibração, nas posições sentado e em pé. Os dados são estabelecidos em laboratório tomando como referência um grupo de 30 voluntários, divididos igualmente entre homens e mulheres, e tem como foco o estudo de vibração de edificações, não sendo tratado diretamente vibração em veículos. A vibração gerada e aplicada, tanto para a posição sentada quanto em pé, é do tipo vertical senoidal, e a curva de percepção proposta é considerada confiável, ao ser comparada com as da norma ISO 2631/2:1989, além disso não são encontradas diferenças significativas entre os dois gêneros. Para a posição sentada, com vibração vertical, as frequências de 25, 32 e 50Hz são as que apresentam maior atenuação, com uma transmissão do piso para o assento de 30 a 40%.

Strandemar (2005) utiliza um modelo *Quarter Car*, simulando como entrada duas pistas distintas, uma delas com um sinal do tipo senoidal, obedecendo a norma ISO 8608 e outra, com um sinal transiente variando de 0,03m a 0,06m. O modelo utiliza parâmetros de um caminhão comum e frequências de massa suspensa próxima a 1Hz e de massa não suspensa próxima a 10Hz. São utilizadas diferentes configurações de amortecimento durante as avaliações, testadas em pista suave e rugosa. O uso de modelos computacionais de múltiplas entradas e saída única é considerado viável e o refinamento destes modelos é proposto para que se obtenha respostas otimizadas em relações a manobras e frenagens.

Turkay e Akçay (2005) avalia, também através de um modelo *Quarter-Car*, a resposta de um veículo a um sinal de entrada de perfil de pista, nesse caso aleatória,

considerando variações na velocidade do veículo. É projetado um filtro linear com um espectro de saída bem semelhante ao de entrada, que é utilizado para construir gráficos de desempenho de conforto, de vibração da pista e da resposta da suspensão, todos em função da velocidade do veículo.

Morioka e Griffin (2006) estabelecem curvas de conforto para vibração do corpo inteiro, na posição sentada, para uma faixa de frequência abrangente, de 2 a 315Hz, nos três eixos, a fim de avaliar desconforto severo e riscos para saúde, considerado amplitudes de vibração desde o limiar mínimo de percepção. As frequências inferiores a 4Hz estabelecem maior percepção no eixo vertical, do que nos eixos longitudinal e lateral, enquanto as frequências maiores que 10Hz, apresentam percepção menor na vertical que nos outros dois eixos. O aumento da percepção em relação ao aumento da amplitude de vibração se mostra bastante dependente da frequência, o que faz com que as curvas de conforto geradas dependam diretamente da amplitude de vibração.

Ainda segundo Morioka e Griffin (2006) é improvável que uma ponderação de frequência linear consiga descrever e prever a percepção exata, ou seja, o desconforto sentido por uma variação muito ampla de amplitudes de vibração. As curvas utilizadas atualmente para ponderação ( $W_b$  e  $W_d$ ) atendem com coerência para amplitudes médias e altas, mas se tornam menos assertivas para baixas amplitudes, principalmente com frequências acima de 30Hz.

Liang e Chiang (2006) descreve que o ser humano possui maior sensibilidade a vibrações de corpo inteiro quando sentado se for excitado em baixas frequências, o que faz com que seja interessante aprofundar o conhecimento a respeito desse efeito, que ocorre em diversas situações, como em veículos, principalmente no que diz respeito a construção de modelos biodinâmicos que considerem a postura sentada. É feita uma comparação entre os diversos modelos computacionais utilizados, validando-os em relação a dados experimentais publicados em literatura, considerando apenas modelos em que o indivíduo está sentado, em posição completamente ereta, sem suporte de encosto para as costas e com massa entre 49 e 94kg. As excitações, sempre verticais, são coerentes com as determinadas para análise de conforto veicular, definidas no intervalo entre 0,5 e 20Hz. O modelo criado por Wan e Schimells, em 1995, é considerado um bom modelo de quatro graus de liberdade, capaz de descrever de forma mais coerente o comportamento vibracional de um indivíduo nessas condições que os modelos de dois graus de liberdade de Griffin e Wei, de 1998, de Allen, de 1978 e de Muskian de 1976 e de quatro graus de liberdade de Boileau e de Liu, ambos de 1998. Porém, para



casos específicos que exijam maiores segmentos de massa para serem analisados é sugerido o uso do modelo não linear criado por Muskian, em 1974, composto por seis graus de liberdade, que considera o deslocamento do corpo em relação a deslocamentos senoidais do assento. Tal modelo é considerado mais viável que os de Patil, de 1977 e de Qassem, de 1996.

Gao *et al* (2007) utiliza um modelo *Half-Car* para obter uma estimativa de resposta para um perfil de pista, que tem suas irregularidades definidas por um sinal aleatório gaussiano e modelada por um espectro do tipo PSD. Os valores estatísticos do veículo e de sua resposta ao movimento vibracional do perfil de pista são obtidos através do método de simulação de Monte Carlo. Através de tal método é analisada a influência dos parâmetros do veículo e de sua suspensão na dinâmica do veículo, em suas frequências naturais e na sua resposta a vibração aleatória.

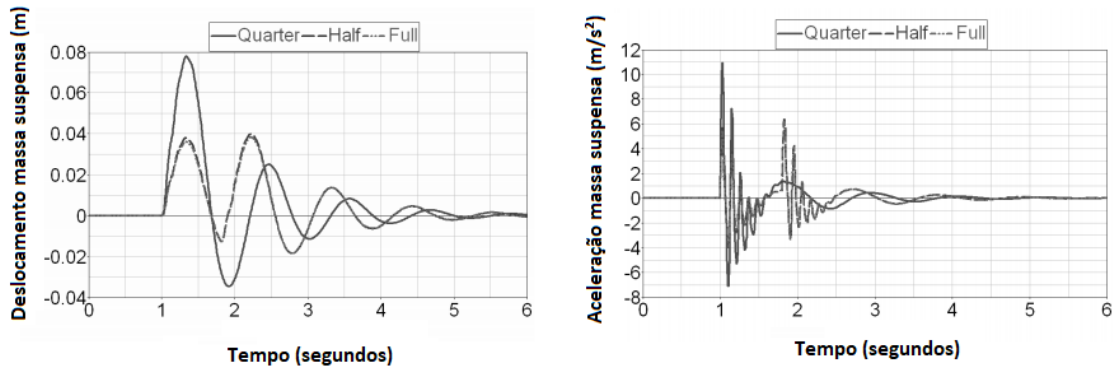
Fenchea (2008) demonstra a melhoria de desempenho de *ride* e de *handling* ao utilizar uma suspensão ativa em um veículo, através de um modelo computacional baseado em um *Half-Car* que possui, em conjunto com a mola e o amortecedor, um atuador capaz de ajustar a suspensão do veículo de forma a compensar as diferentes condições de pista e de manobra. O atuador funciona através de rotina computacional em conjunto com um acelerômetro triaxial e faz com que se reduza a aceleração da massa suspensa continuamente, alterando também a deflexão da mola, aumentando o contato do pneu com a pista e fazendo com que o *handling* seja melhorado.

Mahala *et al* (2009) realiza uma análise comparativa entre os três modelos matemáticos mais utilizados para modelar um veículo, tendo como variação mais importante entre eles o número de graus de liberdade. A avaliação é feita nos modelos *Quarter-Car*, com dois graus de liberdade, *Half-Car*, com quatro graus de liberdade, adicionando a possibilidade de prever o movimento de *pitch* e o *Full-Car*, que possui sete graus de liberdade e é capaz de obter resposta, tanto de *pitch*, quanto de *roll*. São definidos parâmetros padrão para os três modelos, seguindo as mesmas características, para que não se tenha como variável o veículo modelado, e é definido o mesmo perfil de pista para as três avaliações. Os resultados dos deslocamentos e acelerações da massa suspensa e não suspensa para o modelo *Full-Car* se mostram válidos quando comparados com os encontrados por Rehan, em 2006, com valores muito próximos e apenas uma pequena diferença na parte final do amortecimento.

Na comparação, o *Half-Car* se mostra como aproximação muito boa para movimentação e aceleração da massa suspensa em simulação de *pitch*, com respostas

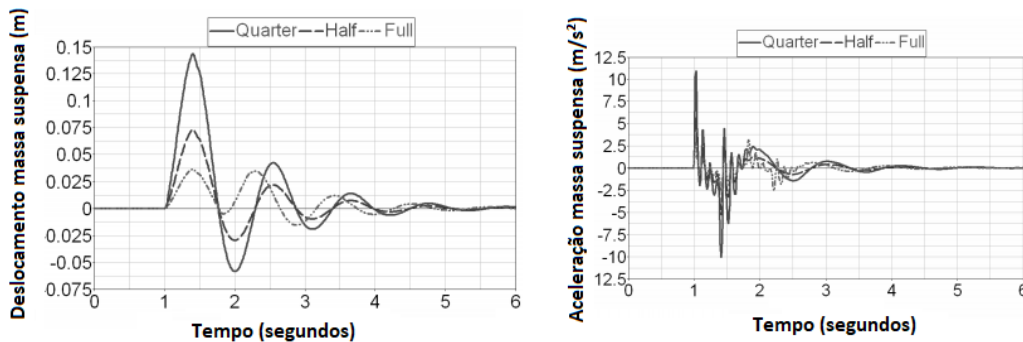
bastante semelhantes ao modelo *Full-Car*, como visto na Figura 51. Porém, isso não se mantém quando a análise se baseia em simulação de *roll*, devido ao fato do *Half-Car* testado não ser apropriado para tal movimentação, como visto na Figura 52.

Figura 51 – Resultados para os três modelos em simulação de *pitch*



Fonte: Adaptado de Mahala (2009), página 173

Figura 52 – Resultados para os três modelos em simulação de *roll*



Fonte: Adaptado de Mahala (2009), página 173

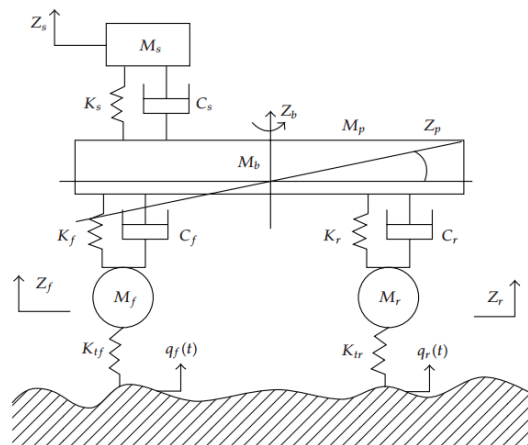
O modelo *Half-Car* é considerado por Mahala (2004) uma opção bastante viável para análises de movimentação de *pitch*, visto que, mesmo com menor complexidade, consegue se manter fiel aos resultados do modelo de sete graus de liberdade.

Nahvi *et al* (2009) realiza ensaios experimentais em um veículo em quatro situações de pista, com diferentes condições de pavimento, e para cada uma das condições, velocidades de 20, 40, 60 e 80km/h. As pistas são classificadas de acordo com o Índice Internacional de Rugosidade (IRI) e variam de 2,08mm/m, para a auto estrada a até 9,75mm/m para a estrada de maior irregularidade. Os valores medidos são analisados através de quatro técnicas estatísticas e/ou analíticas: valor dose de vibração (VDV), curtose, resposta em frequência (FFT) e densidades espectrais de potência (PSD).

A maior parte de concentração de amplitudes de energia se concentram em frequências menores que 30Hz e o isolamento dessas vibrações é bem realizado pelo sistema de suspensão. Porém, o encosto do banco chega a amplificar a vibração em 500%, na condição de pista de maior irregularidade e é proposta a modificação do componente ou de sua montagem. As vibrações sentidas no encosto, ainda que bastante incômodas, possuem amplitude relativamente baixa e apenas uma exposição superior a 3 horas geraria um desconforto grave.

Guo e Zhang (2010) geram o perfil de pista de um modelo *Half-Car* através do método de pseudoexcitações aplicadas como entrada nas rodas. O modelo, que é utilizado a fim de reduzir a complexidade do uso de um modelo *Full-Car* mantendo a fidelidade dos dados, considera a massa do motorista e o amortecimento e rigidez do assento, possuindo cinco graus de liberdade, conforme mostrado na Figura 53. O modelo computacional utilizado é validado através de uma simulação de aceleração do veículo, com parâmetros de massa necessários. Ainda segundo Guo e Chang (2010) o uso das pseudoexcitações apresenta resultados superiores à de excitações tradicionais, otimizando a parcela computacional do problema.

**Figura 53 – Modelo *Half-Car* considerando o motorista**



Fonte: Guo et al (2010), página 4

Szoke et al (2010) utiliza um veículo rodoviário da General Motors como referência para um estudo numérico de elementos finitos que avalia a influência dos parâmetros dos componentes, mola e amortecedor, da suspensão no desempenho de conforto do veículo num perfil de pista PSD. O intuito da otimização de tais parâmetros é que se tenha a mínima influência das forças dinâmicas sobre o movimento do corpo. O modelo

representa as quatro rodas do veículo, se aproximando de um *Full-Car* e considera para o pneu um comportamento elástico linear. A modelagem é dividida em duas partes, sendo um modelo analítico capaz de quantificar acelerações, forças internas e tensões, e um modelo de otimização, pelo qual se restringe os resultados quantificados mediante uma função objetivo, variando os parâmetros.

O modelo estocástico simplificado, ainda segundo Szoke *et al* (2010), se mostra viável para descrever o comportamento do veículo, que pode ser otimizado utilizando modelagem com elementos finitos, apropriado para estimar os parâmetros ótimos para cargas determinadas. A função objetivo tem influência na obtenção da solução ideal e o algoritmo apresenta estabilidade e uma boa convergência para o ponto ótimo.

Barbosa (2011) considera a importância das simulações computacionais no âmbito de desenvolvimento de veículos a fim de minimizar os custos e gastos de tempo com testes físicos. Utiliza um modelo *Half-Car* padrão, com quatro graus de liberdade, para avaliar a resposta em frequência em pista rugosa de entrada aleatória. Tal entrada é medida em duas seções de estradas, uma medindo 1.4km e outra 2,0km, sendo obtida a função de densidade espectral de cada pavimento, com variação de velocidade entre 25,6km/h e 120km/h. A relação dessa função com o número de onda do pavimento gera a rugosidade da superfície, assim como determinado pelo Índice de Rugosidade Internacional. Através da medição de rugosidade da superfície, considerada como entrada no modelo, e da resposta em frequência do veículo, a ela identifica-se as necessidades para atender o desempenho de conforto esperado, a partir da comparação com o estabelecido na norma ISO 2631.

Rego (2011) desenvolve um sistema de controle baseado em um microcontrolador, dotado de placa de processamento e de acionamento, em conjunto com um modelo *Full-Car*, que são conectados através de um software de parametrização e supervisão. Tal software trabalha de forma cíclica, ao avaliar a resposta do veículo, em aceleração, para uma variação de coeficiente de amortecimento, a fim de encontrar uma condição ótima dos amortecedores e do centro de massa, que garanta um melhor desempenho em conforto do veículo em determinada pista. É feito um protótipo de um amortecedor através do qual são realizadas as variações de coeficiente de amortecimento, através de aplicação de força que varia de acordo com a variação de rotação do motor, entre 1000 e 4000rpm, e que servem de entrada para o modelo computacional, capaz de transformar essa informação em resposta de frequência a um dado sinal de pista irregular.

De acordo com Rego (2011) o protótipo construído é capaz de variar o coeficiente de amortecimento em até 587% e os tempos necessários para definir uma resposta são suficientemente rápidos a ponto de ser possível a realização do controle da suspensão. Com a utilização do sistema são observadas melhorias em *ride* e *handling*, sendo proposto a implementação futura do protótipo em tamanho real aplicado ao veículo.

Drehmer (2012) realiza um trabalho de otimização dos parâmetros concentrados da suspensão em busca da minimização da aceleração vertical transmitida da pista para os ocupantes do veículo e da identificação do parâmetro que tem maior influência na melhoria. São utilizados dois modelos veiculares distintos, um *Quarter-Car* com dois graus de liberdade que considera, além da rigidez do pneu, também seu amortecimento, e um *Full-Car* com oito graus, que não considera o amortecimento do pneu. A otimização é feita sob os dois modelos e utiliza como um algoritmo heurístico de enxame de partículas, que obtêm resultados otimizados para os valores de rigidez e de amortecimento da suspensão, muito próximos aos de outras literaturas como Gomes, em 2009, e capazes de minimizar em até 35,3% a aceleração vertical, principal causadora do desconforto em um veículo.

O algoritmo heurístico utilizado por Drehmer (2012) se mostra capaz de:

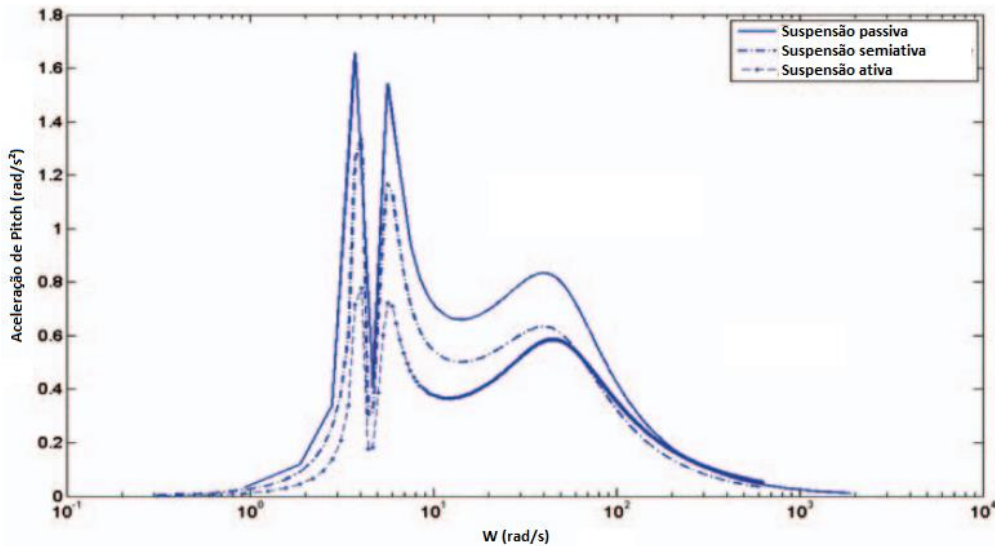
- Encontrar valores ótimos para parâmetros que mantenham o veículo com valores aceitáveis de aceleração vertical segundo as normas citadas;
- Identificar os parâmetros de maior influência na minimização da aceleração;
- Calcular a variância e o desvio padrão em quaisquer dos graus de liberdade;

Assim como Fenchea (2008), um controle ativo da suspensão, através de seus parâmetros, é proposto para a suspensão, por Marzbanrad *et al* (2012), que realiza simulações com o uso de suspensão ativa e semiativa, através de modelagem do tipo *Half-Car* e pista com sinal aleatório. Há sensores para realizar as medições de irregularidades da pista que se encontram alguns metros à frente da posição do veículo e para estimar velocidades relativas do veículo em relação a massa não suspensa.

O algoritmo proposto por Marzbanrad *et al* (2012) é do tipo genético, e se baseia em um método de estimativa para o funcionamento do amortecedor conhecido como Bouc-Wen e em um filtro semelhante ao de Kalman, para calcular a variável de estado do veículo. Uma comparação com um controlador mais obsoleto é realizada e a viabilidade e coerência do algoritmo utilizado é validada para esse tipo de análise. Com o uso das suspensões propostas, ativa e semiativa, o veículo apresenta um melhor comportamento

em relação a movimentação, que é mostrado no trabalho pela redução na aceleração da massa suspensa e na aceleração quando em simulação de *pitch*, essa última mostrada na Figura 54, gerando melhor desempenho em conforto.

Figura 54 – Comparação entre as suspensões passiva, ativa e semiativa



Fonte: Adaptado de Marzbanrad *et al* (2012), página 1373

Park e Subramaniyam (2013) descrevem a medição de vibração de corpo inteiro transmitida pelo assento, encosto e assoalho em veículos, responsável por sensações de desconforto, danos à saúde e redução de desempenho de funções. As análises são realizadas de acordo com o que é regulamentado pelas normas BS 6841 e ISO 2631, consideradas como padrões principais do assunto. São descritas algumas formas de análise como as de resposta em frequência, raiz média quadrática (RMS), valor dose de vibração (VDV), taxa de *ride* e valor SEAT, ambos definidos por Griffin (1990). As curvas de ponderação, para construção de curvas de conforto e avaliação das vibrações são definidos como  $W_b$ ,  $W_c$  e  $W_d$  e especificados, com valores variáveis, de acordo com a norma BS 6841.

De acordo com Park e Subramaniyam (2013) o conforto e a vibração devem ser relacionados com uso de valores RMS ponderados, sendo os métodos de VDV e MTVV os mais indicados para avaliar a vibração transmitida aos ocupantes do veículo. Além disso, os valores de taxa de *ride* e seus secundários devem ser baseados em rms e a qualidade do assento deve ser medida pelo fator SEAT.

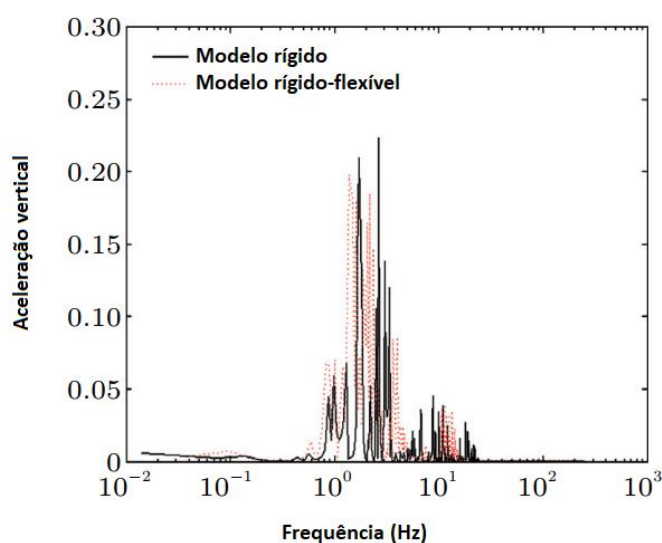
Sitnik e Kardasz (2013) mostra um exemplo de como o aumento da eficiência de máquinas e equipamentos, trazido pelas novas tecnologias, traz consigo o aumento da

velocidade de operações, e conseqüentemente o aumento de ruídos de vibrações, que causam danos à saúde física e mental do corpo humano, como também seu conforto. A análise de vibração acontece baseado nos ruídos e vibrações causados pelo motor em dois veículos de mesmo modelo, um deles equipado com motor diesel e outro com motor a gasolina. As medições são realizadas por um aparelho de vibrometria a laser, que funciona baseado no efeito Doppler. O veículo equipado com motor a Diesel apresenta maior vibração, porém, ainda assim, os coxins que o apoiam são considerados efetivos na redução da vibração transmitida.

Os efeitos de vibração e ruídos do motor podem ser considerados influência em análises de conforto que analisam apenas a resposta do veículo para irregularidades vindas da pista. Tais efeitos possuem inclusive algumas relações, quando se trata de vibrações sentidas pelos pés, por exemplo, na região do quarto pedal, onde o motorista descansa o pé durante parte do percurso.

Wu *et al* (2013) apresentam dois modelos para avaliação de conforto veicular em uma estrada digitalizada com variação de velocidade e considera os pontos de medição no assento, no encosto e nos pés para o cálculo das acelerações transmitidas pela pista. O primeiro modelo é composto apenas por corpos rígidos e o segundo por uma suspensão traseira flexível, construída por métodos de superposição do modo e de elementos finitos que consideram a deformação dos componentes. As respostas para os dois modelos, quando comparadas, mostram que ao considerar a flexibilidade dos componentes os valores de aceleração são significativamente alterados.

Figura 55 – Comparação de resposta entre os modelos rígido e rígido-flexível



Fonte: Wu *et al* (2013), página 4

Baseado nisso Wu *et al* (2013) considera de extrema importância o uso de modelos rígido-flexíveis para análise de conforto em veículos de passeio, a fim de obter respostas mais coerentes com a realidade. A diferença entre os modelos, para a aceleração vertical em relação a frequência é vista na Figura 55.

Mehmood *et al* (2014) utilizam do software Matlab para comparar como os modelos, segundo ele, mais implementados nas análises de vibração veicular, se comportam em relação as alterações de coeficiente de amortecimento da suspensão. O modelo de dois graus de liberdade, *Quarter-Car*, e o de quatro graus de liberdade, *Half-Car*, recebem os mesmos parâmetros, com a exceção dos valores para componentes da suspensão traseira que somente aparecem, obviamente, no segundo modelo. Segundo Mehmood *et al* (2014) para que se tenha um valor ótimo para o coeficiente de amortecimento deve-se utilizar os parâmetros de massa suspensa, massa não suspensa, rigidez do pneu e da suspensão, além do amortecimento do pneu. O amortecimento considerado como ótimo é aquele que garanta o conforto do passageiro, dissipando a energia absorvida de forma gradual, sem que essa dissipação se estenda por um intervalo de tempo longo, o que causa desconforto e piora na segurança. Os valores ótimos de coeficiente de amortecimento variam de 3000 a 4000N.s/m para o conforto e de 1500 a 2000N.s/m para segurança.

Zehsaz *et al* (2014) relatam como os desempenhos de *ride* e de *handling* têm relação com as alterações nos parâmetros de rigidez e amortecimento da suspensão de um veículo através de um modelo com nove graus de liberdade, capaz de obter respostas não só de conforto como também para determinadas manobras. O modelo tem como entrada para análise de *ride* três diferentes sinais para o percurso, capazes de simular uma pista suave, uma com irregularidades aleatórias e um obstáculo. Para a análise do *handling* do veículo são geradas três entradas diferentes que simulam manobras de aceleração, frenagem e de mudança de pista. O conforto do veículo é analisado através das acelerações verticais, com variações de rigidez e amortecimento para as entradas de pista. Já o *handling* é analisado pela movimentação transversal em y, além dos ângulos de guinada e de rolagem, que para que garantam um bom desempenho devem estar, quando máximos, com desvio mínimo da condição estável. Com isso Zehsaz *et al* (2014) concluem que a entrada tem influência na resposta da rigidez e do amortecimento, que, quando aumentados geram maior estabilidade, por diminuir os valores de *pitch* e de *roll* do veículo, exceto na condição de obstáculo. Além disso, mostra que a rigidez torcional,



se aumentada, faz com que a aceleração lateral e vertical máxima também sofram crescimento.

Aquino (2014) desenvolve um modelo computacional de sete graus de liberdade, considerando o banco do motorista e o usuário, descrevendo-o como um modelo biodinâmico dividido em tronco e cabeça, para um veículo de passeio do tipo *sedan*. Através desse modelo é feita uma comparação dos resultados obtidos com as respostas encontradas em um software largamente utilizado na indústria automotiva, o *Adams Car*®. São utilizados sinais senoidais e aleatórios e é encontrada uma boa correlação entre o modelo e o software. Além disso, o autor avalia a influência da alteração de parâmetros do banco do motorista, em relação ao número de molas, no desempenho de conforto vibracional do veículo.

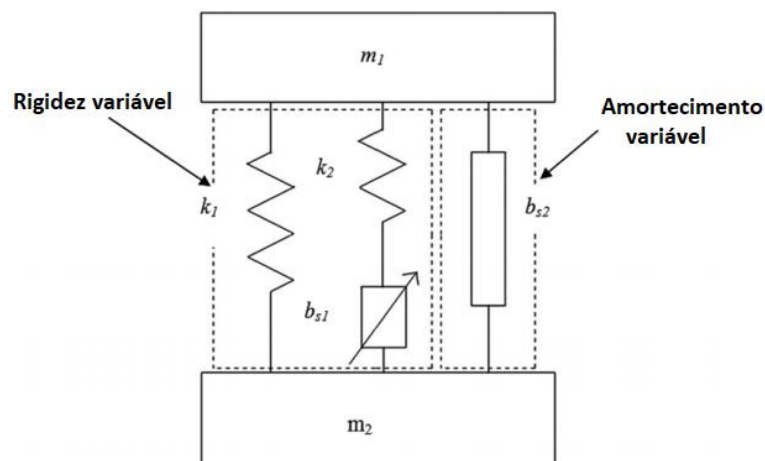
Dobaj (2015), assim como Zehsaz *et al* (2014), analisa a influência dos parâmetros de rigidez e amortecimento da suspensão no comportamento de *ride* de um veículo, e adiciona à avaliação o critério de segurança veicular. É construído um modelo *Quarter-Car*, com dois graus de liberdade, a fim de avaliar a resposta à aceleração vertical do veículo devido à pista, que é tratada como uma entrada de sinal discreto. Os parâmetros utilizados, retirados de um modelo específico de veículo e tratados como funções não lineares, quando alterados, causam alterações nos critérios de conforto e de segurança, comparados entre si por gráficos. Tais critérios apresentam inversão de comportamento, na maior parte das vezes, mediante a alteração de um parâmetro. Um maior coeficiente de amortecimento causa uma diminuição do conforto, mas é responsável por uma melhoria significativa na segurança veicular, já o aumento da massa não suspensa prejudica tanto o conforto quanto a segurança. Há inúmeras possibilidades de variação dos parâmetros, com infinitas combinações e Dobaj (2015) deixa clara a necessidade de utilização de algoritmos computacionais para que se torne possível encontrar valores ótimos para esses parâmetros.

Arana *et al* (2016) propõe um sistema ativo de suspensão em série, denominado SVAGS, capaz de otimizar o desempenho de conforto do veículo, através do uso de um controlador em série com o amortecedor, capaz de introduzir não linearidades à rotação da ligação mecânica existente entre o chassi e o amortecedor. Um modelo *Quarter-Car* é utilizado, em conjunto com esse controlador, para simular as respostas em frequência em relação a três condições diferentes de pista. A inserção do controlador com linearização baseada em conservação de energia, desenvolvido de acordo com técnicas de controle robusto, segundo Arana *et al* (2016), aumenta a aplicabilidade dos modelos

computacionais, diante da limitação dos sistemas lineares normalmente utilizados. O modelo proposto atende tanto as frequências muito baixas, já solucionadas por sistemas ativos lentos, quanto as frequências um pouco mais altas, que afetam diretamente o conforto, e pode servir de base para a criação de um modelo *Full-Car* com o sistema SAVGS.

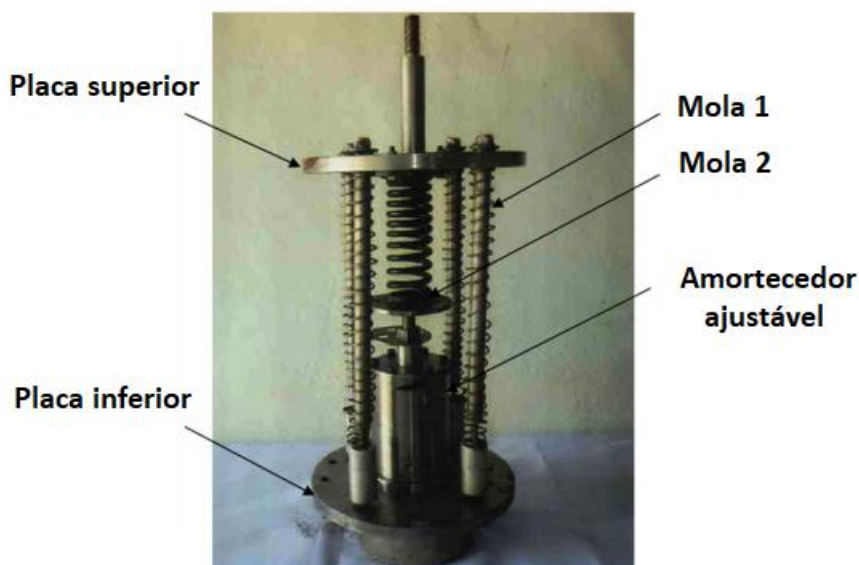
Jugulkar *et al* (2016) avalia a aplicabilidade de uma suspensão adaptativa, que, assim como proposto por Arana *et al* (2016) possui a capacidade de se adaptar a mais de uma condição de uso. É proposta uma suspensão capaz de garantir que o veículo possua um bom desempenho de conforto para variados valores de carga aplicada sob ele, ou seja, de mudanças no valor da massa suspensa, o que não é possível com uma suspensão passiva, que não varia rigidez e amortecimento. É estimado que a variação de massa suspensa afeta o veículo da ordem de 50% de aumento da aceleração vertical caso tenha uma diminuição de 100kg de massa suspensa. A suspensão proposta é composta de duas molas helicoidais e um amortecedor, com quatro níveis de amortecimento variáveis, e é analisada a partir de três elementos. O primeiro deles um modelo numérico criado no software Matlab, visto na Figura 56. Em conjunto com o modelo, é utilizado um protótipo de tamanho real, visto na Figura 57, para validação experimental do modelo numérico, que varia a rigidez da suspensão entre 43,5 e 53,8kN/mm, e, por último, um modelo *Quarter-Car* adaptado, utilizado para estimar a resposta de conforto do veículo, composto de uma mola e um amortecedor para a suspensão e também para o pneu.

Figura 56 – Modelo numérico da suspensão



Fonte: Jugulkar *et al* (2016), página 5

Figura 57 – Protótipo em tamanho real da suspensão adaptativa



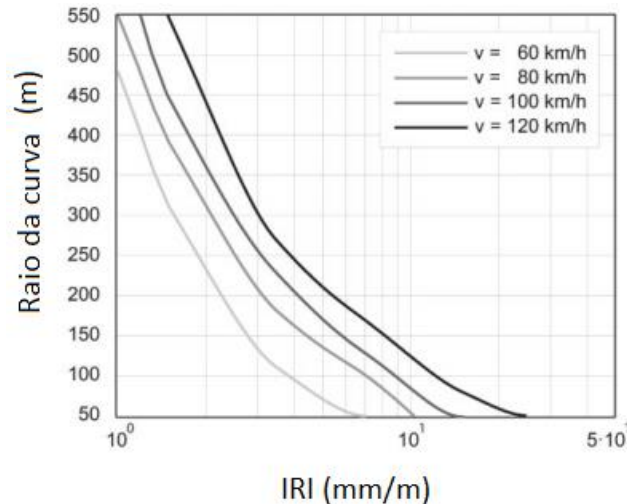
Fonte: Jugulkar *et al* (2016), página 6

De acordo com Jugulkar *et al* (2016) o amortecedor ajustável é configurado a fim de garantir que haja um amortecimento ótimo independente da variação da massa suspensa. Com a utilização do sistema proposto há melhoria de cerca de 15% nos níveis de acelerações medidos, ou seja, é encontrada melhoria na transmissibilidade entre a pista e o veículo, em comparação com o sistema de suspensão passivo.

Nieto *et al* (2016) propõe uma suspensão adaptativa baseada na facilidade e simplicidade de alteração de parâmetros de um sistema pneumático, capaz de definir um bom comportamento, tanto de *handling*, quanto de conforto, ao analisar a demanda de cada situação. A suspensão nesse caso é composta por molas de ar conectadas a tubos reservatórios, comandados por eletroválvulas. Quando tais tubos apresentam maior diâmetro e menor comprimento garantem um comportamento melhor de *ride* e quando permanecem com menor diâmetro e maior comprimento fazem com que se tenha um melhor comportamento de *handling*. A suspensão adaptativa proposta é capaz de selecionar a configuração apropriada para cada situação através da análise de dois parâmetros, o valor do Índice de Rugosidade da Pista e o raio da próxima curva do percurso, ambos capacitados instantaneamente por tecnologia de geoposicionamento (GPS). Um modelo *Full-Car* é utilizado para realizar a análise da vibração que o veículo estará sujeito, que guia a avaliação do conforto, de acordo com a norma ISO 2631, e da movimentação de rolagem do veículo. A seleção da suspensão é definida pelo sistema a

partir do mapa de decisão, mostrado na Figura 58, que compara os parâmetros, a fim de obter a melhor configuração para cada uma das situações.

**Figura 58 – Mapa de decisão para seleção de suspensão**

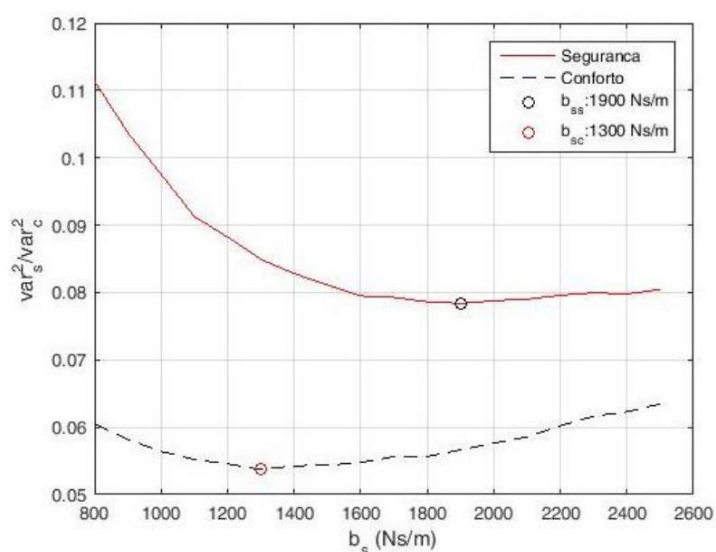


Fonte: Nieto *et al* (2016), página 10

Pranowski e Mamala (2016) se baseiam nos níveis de vibração da massa suspensa de um veículo de passeio de tamanho médio para classificar a qualidade de pistas, com variação de velocidade de 50km/h a 110km/h. O veículo é instrumentado com acelerômetro triaxial em seu para brisa e equipamento de medição de velocidade baseado em sistema de geoposicionamento (GPS), com peso total de 1160kg, no qual 990kg do próprio veículo e equipamentos e 170kg dos dois ocupantes. Além disso os pneus são calibrados com pressão padrão de 0,2bar. A medição leva em consideração as vibrações longitudinais, primordialmente, e as vibrações verticais, e são utilizadas duas técnicas de análise: a transformada de Fourier (FFT) e a densidade do espectro de potência (PSD), capazes de obter a resposta do veículo em relação a movimentação da pista na velocidade testada. Para a comparação entre as respostas é utilizada a relação sinal-ruído, com melhores valores em 13,8Hz. O estudo detecta influência significativa das irregularidades da pista, analisadas pela técnica PSD, sobre o desempenho de conforto do veículo. Há indícios de que o desbalanceamento das rodas também tenha interferência nos resultados de classificação da pista e de sentimento de desconforto. Na faixa de frequência de rotação da roda, entre 8,5 e 18Hz, chega-se a um valor máximo de amplitude de aceleração de vibração longitudinal de 0,018m/s<sup>2</sup>, aproximado pelo autor para 0,2m/s<sup>2</sup>.

Por fim, Souza e Avila (2016) propõem a busca por parâmetros ótimos de rigidez e amortecimento da suspensão de um veículo de passeio, com base em análise de vibração e carga em um modelo *Quarter-Car* de dois graus de liberdade, que considera o pneu como um elemento meramente elástico. As excitações advindas da pista são tomadas por funções pré-definidas de três tipos: impulso, degrau e função gaussiana e os parâmetros iniciais estimados para um veículo de passeio comum. A análise da influência da variação dos parâmetros no comportamento de *ride* e segurança do veículo é realizada com rigidez de 4000 a 14000N/m e de amortecimento de 800 a 2500N.s/m. Fica evidente que a suspensão de um veículo é bastante sensível a essa variação de parâmetros e utiliza uma técnica de otimização para atingir valores ótimos destes para as excitações em questão. São utilizadas duas funções objetivo, uma responsável por minimizar a variação de carga dinâmica transmitida a roda, o que proporciona maior segurança ao veículo e uma segunda, capaz de minimizar a aceleração vertical e o curso de suspensão, a fim de garantir um maior conforto.

**Figura 59 – Valores ótimos do coeficiente de amortecimento**



Fonte: Souza et al (2016), página 14

O trabalho busca um valor de coeficiente ótimo para cada uma das duas funções objetivo, como visto na Figura 59, onde são detectados os valores ótimos para conforto ( $b_{sc}$ ) próximo de 1300N.s/m e para segurança ( $b_{ss}$ ), de aproximadamente 1900N.s/m, para a simulação da pista de sinal gaussiano. Os valores encontrados apresentam uma pequena divergência com os apresentados em literatura, que segundo Souza e Avila (2016) pode ser explicado por alguns fatores, como a presença da variação da constante

elástico, e a não consideração da gravidade e da velocidade do veículo. O autor deixa clara a influência de cada um dos dois parâmetros na suspensão de um veículo e cita que, através de otimizações é possível que se tenha uma boa referência para o projeto de uma mola helicoidal e de um amortecedor que se propõe aplicar em um veículo de passeio. Além disso há uma ênfase no fato de os comportamentos de segurança e conforto serem conflitantes e de que a suspensão passiva não possui capacidade de ser ótima nos dois aspectos, devendo, se necessário, utilizar de suspensões ativas que se adaptam a variadas condições, o que as permite alternar entre um comportamento bom de conforto e segurança, de acordo com a necessidade, inclusive de forma automática.

## 4 METODOLOGIA

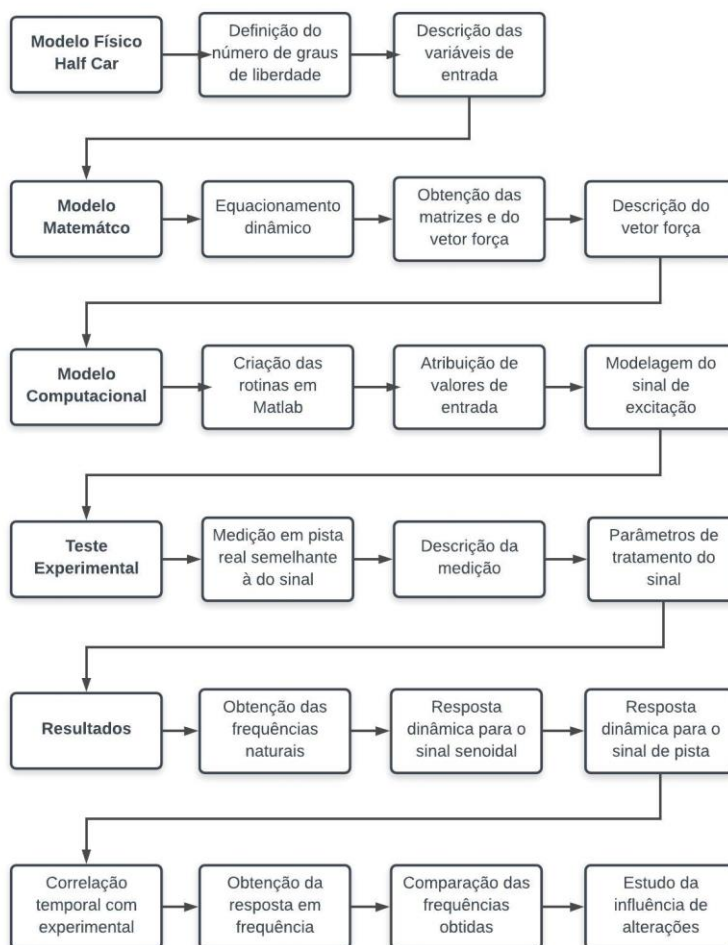
Para o desenvolvimento deste trabalho foi utilizado um modelo físico baseado no que é mostrado na Seção 2.5.2.2, através do qual se considera apenas a metade de um veículo, dividindo-o em parte anterior e posterior.

Esse tipo de modelo é denominado na literatura por *Half-Car* e, no caso deste trabalho, é acoplado a um segundo conjunto de massas, molas e amortecedores, que representam o modelo biodinâmico do corpo e o banco do veículo.

Através da junção desses dois modelos torna-se possível analisar a resposta para determinadas alterações realizadas sobre os componentes das suspensões anterior e posterior, e como estes componentes podem influenciar na sensação de vibração advinda da excitação da pista, sentida pelo usuário do veículo e denominada conforto veicular.

O fluxograma da elaboração do modelo é mostrado na Figura 61.

**Figura 60 – Fluxograma da elaboração do modelo**



Fonte: Elaborado pelo autor

O modelo apresentado é elaborado através de equações matemáticas e pode ser considerado simples, em relação ao que se têm como alternativa no mercado automotivo, porém sua simplicidade faz com que possa ser utilizado de forma intuitiva e que, por possuir poucas variáveis, possa analisar de forma bastante direta a influência exercida por cada uma delas.

Portanto, a metodologia utilizando esse tipo de modelo é baseada em etapas, que consistem em: definir as variáveis estudadas e o número de graus de liberdade necessários para uma boa resposta, estabelecer valores iniciais para os parâmetros coerentes com a realidade, implementar de forma computacional o modelo matemático criado e, por fim, validar esse modelo através de software ou aquisição real.

#### **4.1 Elaboração do modelo**

Assim como em Jazar (2008), é utilizado nesse trabalho, para a elaboração matemática do modelo, um *Half-Car* com quatro graus de liberdade. Acoplado a ele é desenvolvido um modelo do tipo banco/usuário com mais quatro graus de liberdade, baseado em Suggs *et al* (1969), totalizando assim oito graus de liberdade, citados e detalhados adiante nesse trabalho.

Sant'anna (2007) mostra ser vantajosa a utilização de modelos do tipo *Half-Car* para problemas em que se considera vários graus de liberdade, portanto, sendo viável a utilização deste tipo para a resolução do problema em questão.

Na Tabela 3 são mostrados os graus de liberdade do modelo, com suas respectivas associações, para que se facilite o entendimento do esquema mostrado posteriormente. Existem, além dos oito graus de liberdade, as denominadas variáveis auxiliares, referentes a movimentação do conjunto de suspensão anterior e posterior e do trilho do banco, necessárias para o desenvolvimento do equacionamento do modelo.

Além dos graus de liberdade, são definidos também os demais elementos do modelo, como massas, amortecedores molas, bem como as excitações advinda da pista e as dimensões do veículo. Os elementos que compõem os modelos *Half-Car* e biodinâmico são descritos na Tabela 4 e Tabela 5, respectivamente.



Tabela 3 – Descrição dos graus de liberdade e variáveis do modelo proposto

Variável	Descrição	Tipo
$y_c$	Deslocamento vertical da cabeça	Grau de liberdade
$y_t$	Deslocamento vertical do tronco superior	Grau de liberdade
$y_p$	Deslocamento vertical do tronco inferior (pernas)	Grau de liberdade
$y_b$	Deslocamento vertical dos bancos	Grau de liberdade
$y_{rp}$	Deslocamento vertical das rodas posteriores	Grau de liberdade
$y_{ra}$	Deslocamento vertical das rodas anteriores	Grau de liberdade
$y_{cg}$	Deslocamento vertical do centro de gravidade	Grau de liberdade
$\theta$	Ângulo de pitch do centro de gravidade	Grau de liberdade
$y_{sp}$	Deslocamento vertical da suspensão posterior	Variável auxiliar
$y_{sa}$	Deslocamento vertical da suspensão anterior	Variável auxiliar
$y_g$	Deslocamento vertical do trilho do banco	Variável auxiliar

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 4 – Descrição dos elementos do modelo *Half-Car*

Elemento	Descrição	Tipo
$m_{ra}$	Massa não suspensa anterior	Massa
$k_{sa}$	Rigidez da suspensão anterior	Mola
$c_{sa}$	Coef. de amortecimento da suspensão anterior	Amortecedor
$k_{pa}$	Rigidez do pneu anterior	Mola
$m_{rp}$	Massa não suspensa posterior	Massa
$k_{sp}$	Rigidez da suspensão posterior	Mola
$c_{sp}$	Coef. de amortecimento da suspensão posterior	Amortecedor
$k_{pp}$	Rigidez do pneu posterior	Mola
$x_a$	Distância do CG ao eixo anterior	Dimensão
$x_p$	Distância do CG ao eixo posterior	Dimensão
$m_{cg}$	Massa considerada no CG do veículo	Massa
$I_{cg}$	Inércia do CG do veículo	Momento

Fonte: Elaborado pelo autor

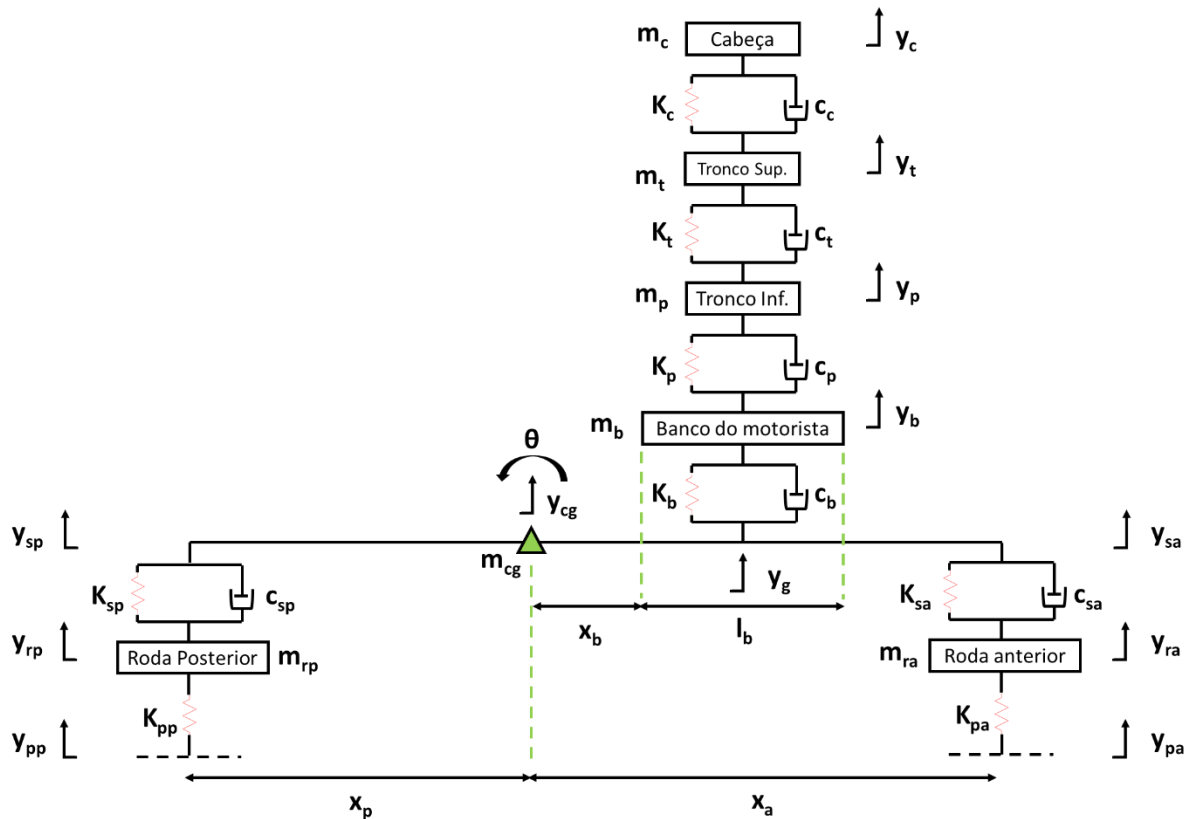
Tabela 5 – Descrição dos elementos do modelo biodinâmico

Elemento	Descrição	Tipo
$m_c$	Massa da cabeça	Massa
$k_c$	Rigidez da cabeça	Mola
$c_c$	Coef. de amortecimento da cabeça	Amortecedor
$m_t$	Massa do tronco superior	Massa
$k_t$	Rigidez do tronco superior	Mola
$c_t$	Coef. de amortecimento do tronco superior	Amortecedor
$m_p$	Massa do tronco inferior (pernas)	Massa
$k_p$	Rigidez do tronco inferior (pernas)	Mola
$c_p$	Coef. de amortecimento do tronco inferior (pernas)	Amortecedor
$m_b$	Massa do banco	Massa
$k_b$	Rigidez do banco	Mola
$c_b$	Coef. de amortecimento do banco	Amortecedor
$l_b$	Comprimento do banco	Dimensão
$x_b$	Distância do CG ao banco	Dimensão

Fonte: Elaborado pelo autor

Unindo os GDL's e elementos definidos nas Tabelas 3 a 5, o esquema do modelo proposto é mostrado na Figura 61, composto, portanto, por oito graus de liberdade e utilizado para modelar o veículo, o banco e o motorista.

Figura 61 – Esquema do modelo completo proposto



Fonte: Elaborado pelo autor

Para o modelo proposto acima são necessários que alguns elementos sejam tratados como dados de entrada do problema, afim de se obter os deslocamentos como resposta. Sendo assim, os coeficientes de amortecimento, as rigidezes das molas, as massas das rodas e de cada parte do corpo, além das dimensões geométricas, velocidade do veículo e excitações da pista devem ser conhecidas/estabelecidas.

A fim de que fosse possível tratar de forma mais simples o problema, algumas considerações foram tomadas acerca do modelo. Uma delas foi desconsiderar o amortecimento do pneu, já que o modelamento do comportamento de um pneu depende de uma infinidade de fatores que não são o foco do estudo.

Além disso não foi considerada nenhuma angulação entre os conjuntos de suspensão e o chassi do veículo, mesmo estando ciente de que na realidade isso ocorre,

já que tal consideração geraria uma imensa quantidade de equações que, por ora, não são necessárias e agregam pouca melhoria significativa nos resultados.

O modelamento matemático em si é feito através do método proposto por Newton, como mostrado abaixo, método esse que torna possível a análise mais detalhada de cada elemento do modelo, e se mostra mais viável para a utilização nesse caso.

Tal método leva em consideração os estudos das forças aplicadas em cada parte do modelo, assim como o comportamento de resposta de cada um deles, o que possibilita a análise de alterações nos componentes, sem que seja necessária a discretização no espaço de solução das equações diferenciais parciais, como proposto por Lagrange.

O sistema proposto nesse trabalho é composto por subsistemas massa-mola e pode ser visto, de forma geral, como:

$$[m]\{\ddot{y}\} + [c]\{\dot{y}\} + [k]\{y\} = \{f\} \quad (62)$$

Nessa equação têm-se as três matrizes que compõem o sistema, denominadas respectivamente matriz massa  $[m]$ , amortecimento  $[c]$  e rigidez  $[k]$ , acompanhadas de três vetores de aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente.

O vetor deslocamento  $\{y\}$  é definido a partir dos deslocamentos de cada um dos graus de liberdade mostrados no esquema da Figura 61 e os vetores velocidade e deslocamento são definidos através da primeira e segunda derivadas de  $\{y\}$ , respectivamente.

#### **4.1.1 Detalhamento do modelo biodinâmico**

O modelo biodinâmico utilizado neste estudo possui três graus de liberdade para representação do corpo humano e um grau de liberdade para o banco, totalizando quatro graus de liberdade, como já fora citado.

A escolha do número de graus de liberdade e dos valores de massa, rigidez e amortecimento referentes ao corpo humano a serem utilizados nesse trabalho foi baseada em análise de alguns outros estudos já elaborados a respeito do assunto.

O principal foco dessa escolha foi o equilíbrio entre a quantidade de graus de liberdade e a qualidade do resultado obtido em relação a realidade, ou seja, a correlação

das respostas desses modelos, já que adicionar graus de liberdade demanda tempo de processamento e, em muitos casos, há um limite nesse custo-benefício.

Becker (2006) mostra que a opção por um modelo biodinâmico de mais de três graus de liberdade não se mostra viável, visto que a melhoria obtida com a adição de mais subsistemas massa-mola é ínfima e insignificativa.

Na Tabela 6 é mostrada a diferença entre os dados experimentais e os dados obtidos, ainda com parâmetros iniciais, por cada um dos modelos propostos por Becker (2006), em porcentagem, tanto em relação a transmissibilidade quanto a massa aparente.

Os dados para referência foram coletados através de indivíduos do sexo masculino, sujeitos a vibração forçada em ônibus brasileiros, na condição de corpo sentado e relaxado, com acelerações de  $1,5\text{m/s}^2$  e frequências de 1 a 20Hz.

**Tabela 6 – Diferença (%) entre dados experimentais e modelos computacionais**

<b>Parâmetro</b>	<b>1GDL</b>	<b>2GDL</b>	<b>3GDL</b>	<b>4GDL</b>
Transmissibilidade (magnitude)	31,5%	29,2%	13,2%	13,2%
Transmissibilidade (fase)	17,6%	12,6%	10,5%	10,3%
Massa aparente (magnitude)	6,4%	8,5%	4,1%	4,2%
Massa aparente (fase)	31,5%	9,1%	8,1%	7,7%
Média	21,8%	14,9%	9,0%	8,9%

**Fonte: Adaptado de Becker (2006)**

Através dessa comparação fica clara a viabilidade da utilização de um modelo de três graus de liberdade para o corpo humano, no qual o indivíduo é dividido em cabeça, tronco superior e tronco inferior.

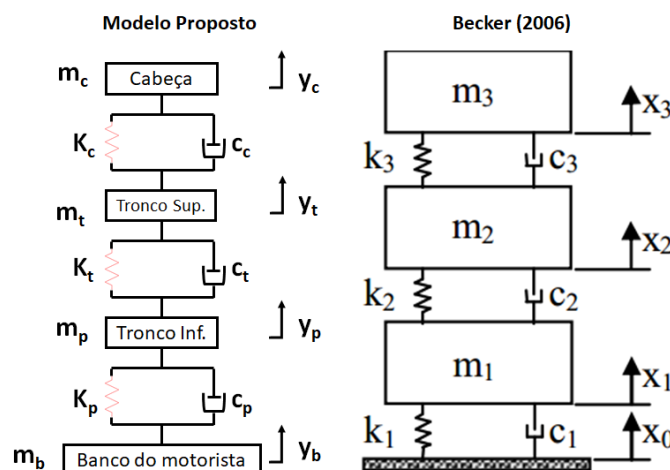
Essa viabilidade é justificada por erros médios próximos quando comparados os modelos de 3GDL e 4GDL, evidenciando que a adição de mais graus de liberdade, nesse caso, não gera um benefício que compense o aumento da complexidade do modelo.

Além disso, considera-se que o comportamento vibracional do corpo humano é linear. A quantificação dos elementos de massa, rigidez e amortecimento é feita através de otimização computacional, já que existe uma infinidade de combinações de corpos humanos, sendo um dado dependente de cada indivíduo.

Bolina *et al* (2011) avalia o estudo dos modelos lineares de Becker (2006), comparando os valores de chute iniciais com os valores ótimos encontrados. A utilização de tais valores ótimos faz com que a diferença entre os dados experimentais e as respostas encontradas pelo modelo seja ainda menor, otimizando o modelo.

Para este trabalho, toma-se como referência o modelo de 3GDL de Becker (2006), mostrado na Figura 62. Os valores de massa, rigidez e amortecimento utilizados são semelhantes aos encontrados como ótimo, para esse modelo de Becker (2006), por Bolina *et al* (2011), apresentando diferença percentual média de 1,323% em relação aos dados experimentais obtidos por eles. Tais valores mostrados na Tabela 7.

Figura 62 – Relação entre o modelo proposto e o modelo de Becker (2006)



Fonte: Elaborado pelo autor e adaptado de Becker (2006)

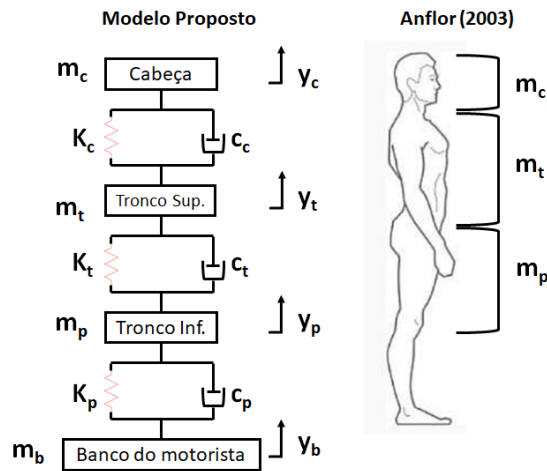
Tabela 7 – Valores de referências considerados para o corpo humano

Elemento	Descrição	Valor
$m_c$	Massa da cabeça	5,42 kg
$m_t$	Massa do tronco superior	35,49 kg
$m_p$	Massa do tronco inferior (pernas)	15,09 kg
$k_c$	Rigidez da cabeça	170000 N/m
$k_t$	Rigidez do tronco superior	58000 N/m
$k_p$	Rigidez do tronco inferior (pernas)	200000 N/m
$c_c$	Coef. de amortecimento da cabeça	300 N.s/m
$c_t$	Coef. de amortecimento do tronco superior	1500 N.s/m
$c_p$	Coef. de amortecimento do tronco inferior (pernas)	5000 N.s/m

Fonte: Elaborado pelo autor e baseado em dados de Becker (2006) e Bolina *et al* (2011)

Anflor (2003) mostra que nesse tipo de modelo biodinâmico, em obediência à norma ISO 7962:1987, não devem ser considerados parte da massa das pernas, do joelho para baixo até os pés, já que esta vibra em fase com o piso, o que corrobora com os valores utilizados nesse trabalho de 15,09kg para massa do tronco inferior (pernas). A divisão do corpo humano considerada neste trabalho, portanto, é mostrada na Figura 63.

Figura 63 – Divisão do corpo humano – Baseada em Anflor (2003)



Fonte: Elaborado pelo autor e adaptado de Anflor (2003)

As considerações utilizadas para obtenção dos valores de rigidez e amortecimento do banco do motorista são apresentadas posteriormente, junto com os demais dados de entrada do modelo *Half-Car*, após ser feito o modelamento analítico.

#### 4.1.2 Modelamento matemático

Feito o esquema do modelo físico e descritos seus parâmetros e variáveis deve ser desenvolvido o modelo matemático, a fim de encontrar os equacionamentos referentes ao equilíbrio dinâmico do movimento.

Para que um sistema se encontre em equilíbrio é necessário que:

$$\sum F = (m * a) \quad (63)$$

Onde  $m$  é a massa e  $a$  é a aceleração.

Portanto,

$$(m * a) - \sum F = 0 \quad (64)$$

Para cada um dos sistemas presentes no modelo proposto deve-se encontrar o equilíbrio de forças presente no mesmo, e por fim, a equação de equilíbrio dinâmico; as parcelas positivas de cada uma das equações, exceto para as relacionadas ao centro de

gravidade, representam diretamente a força transmitida pelo componente daquele sistema, como por exemplo os pneus nas equações das rodas.

Para o centro de gravidade do veículo devem ser encontradas duas equações de equilíbrio dinâmico, já que existem dois graus de liberdade presentes nesse ponto, tanto a translação ( $y_{cg}$ ) quanto a rotação ( $\theta$ ).

As equações de equilíbrio dinâmico são dadas por:

a) Rodas anteriores:

$$m_{ra}\ddot{y}_{ra} + k_{pa}(y_{ra} - y_{pa}) - k_{sa}(y_{sa} - y_{ra}) - c_{sa}(\dot{y}_{sa} - \dot{y}_{ra}) = 0 \quad (65)$$

b) Rodas posteriores:

$$m_{rp}\ddot{y}_{rp} + k_{pp}(y_{rp} - y_{pp}) - k_{sp}(y_{sp} - y_{rp}) - c_{sp}(\dot{y}_{sp} - \dot{y}_{rp}) = 0 \quad (66)$$

c) Centro de gravidade (Forças):

$$m_{cg}\ddot{y}_{cg} + k_{sp}(y_{sp} - y_{rp}) + c_{sp}(\dot{y}_{sp} - \dot{y}_{rp}) + k_{sa}(y_{sa} - y_{ra}) + c_{sa}(\dot{y}_{sa} - \dot{y}_{ra}) - k_b(y_b - y_g) - c_b(\dot{y}_b - \dot{y}_g) = 0 \quad (67)$$

d) Centro de gravidade (Momentos):

$$J_{cg}\ddot{\theta} - x_p k_{sp}(y_{sp} - y_{rp}) - x_p c_{sp}(\dot{y}_{sp} - \dot{y}_{rp}) + x_a k_{sa}(y_{sa} - y_{ra}) + x_a c_{sa}(\dot{y}_{sa} - \dot{y}_{ra}) - \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) k_b(y_b - y_g) - \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) c_b(\dot{y}_b - \dot{y}_g) = 0 \quad (68)$$

e) Banco:

$$m_b\ddot{y}_b + k_b(y_b - y_g) + c_b(\dot{y}_b - \dot{y}_g) - k_p(y_p - y_b) - c_p(\dot{y}_p - \dot{y}_b) = 0 \quad (69)$$

f) Tronco Inferior (Pernas):

$$m_p\ddot{y}_p + k_p(y_p - y_b) + c_p(\dot{y}_p - \dot{y}_b) - k_t(y_t - y_p) - c_t(\dot{y}_t - \dot{y}_p) = 0 \quad (70)$$

g) Tronco Superior:

$$m_t\ddot{y}_t + k_t(y_t - y_p) + c_t(\dot{y}_t - \dot{y}_p) - k_c(y_c - y_t) - c_c(\dot{y}_c - \dot{y}_t) = 0 \quad (71)$$

h) Cabeça:

$$m_c\ddot{y}_c + k_c(y_c - y_t) + c_c(\dot{y}_c - \dot{y}_t) = 0 \quad (72)$$

As variáveis auxiliares são, neste modelo, três distintas e devem ser descritas em função dos graus de liberdade principais e/ou das dimensões mostradas na Figura 61, para que possam ser utilizadas no modelamento final de equação dinâmica quando, por fim, se agrupa cada equação por grau de liberdade.

Para encontrar um equacionamento para os deslocamentos  $y_{sa}$  e  $y_{sp}$ , referentes as suspensões anterior e posterior, deve-se levar em consideração que existem as relações, considerando a aproximação para ângulos muito pequenos:

$$y_{sa} = y_{cg} + x_a \theta \rightarrow y_{cg} = y_{sa} - x_a \theta \quad (73)$$

$$y_{sp} = y_{cg} - x_p \theta \rightarrow y_{cg} = y_{sp} + x_p \theta \quad (74)$$

Igualando as duas equações, têm-se:

$$y_{sa} - x_a \theta = y_{sp} + x_p \theta \quad (75)$$

Que pode ser dado por:

$$y_{sa} - y_{sp} = x_p \theta + x_a \theta \rightarrow y_{sa} - y_{sp} = \theta(x_p + x_a) \quad (76)$$

Por fim, então:

$$\theta = \frac{y_{sa} - y_{sp}}{x_p + x_a} \quad (77)$$

E, portanto, os graus de liberdade  $y_{sa}$  e  $y_{sp}$  são dados pela relação:

$$y_{cg} = y_{sa} - x_a \theta \rightarrow y_{sa} = y_{cg} + x_a \left( \frac{y_{sa} - y_{sp}}{x_p + x_a} \right) \quad (78)$$

$$y_{cg} = y_{sp} + x_p \theta \rightarrow y_{sp} = y_{cg} - x_p \left( \frac{y_{sa} - y_{sp}}{x_p + x_a} \right) \quad (79)$$



A partir disso, torna-se possível encontrar a relação para o terceiro grau de liberdade auxiliar ( $y_g$ ), que é dado em função de ( $y_{cg}$ ) através da equação:

$$y_g = y_{cg} + \left( x_b + \frac{l_b}{2} \right) \quad (80)$$

Para encontrar  $y_{cg}$  multiplica-se a distância  $x_a$  por cada elemento:

$$y_{sa} = y_{cg} + \left( \frac{x_a y_{sa}}{x_p + x_a} \right) - \left( \frac{x_a y_{sp}}{x_p + x_a} \right) \quad (81)$$

Logo:

$$y_{sa} - \left( \frac{x_a y_{sa}}{x_p + x_a} \right) = y_{cg} - \left( \frac{x_a y_{sp}}{x_p + x_a} \right) \quad (82)$$

Através do método de Mínimo Múltiplo Comum (MMC):

$$\frac{y_{sa}(x_p + x_a) - (x_a y_{sa})}{x_p + x_a} = y_{cg} - \left( \frac{x_a y_{sp}}{x_p + x_a} \right) \quad (83)$$

E simplificando:

$$\left( \frac{y_{sa} x_p}{x_p + x_a} \right) = y_{cg} - \left( \frac{x_a y_{sp}}{x_p + x_a} \right) \quad (84)$$

Isolando  $y_{cg}$ ,

$$y_{cg} = \left( \frac{y_{sa} x_p}{x_p + x_a} \right) + \left( \frac{x_a y_{sp}}{x_p + x_a} \right) \quad (85)$$

Por fim,

$$y_{cg} = \left( \frac{y_{sa} x_p + x_a y_{sp}}{x_p + x_a} \right) \quad (86)$$

E então,

$$y_g = y_{cg} + \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) \rightarrow y_g = \left(\frac{y_{sa}x_p + x_a y_{sp}}{x_p + x_a}\right) + \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) \quad (87)$$

Tendo em mãos as relações para cada uma das três variáveis auxiliares e as equações de equilíbrio dinâmico para cada um dos sistemas que compõem o modelo completo torna-se possível substituí-las nas equações de equilíbrio e agrupá-las de forma a montar as matrizes de amortecimento, rigidez e massa.

#### 4.1.3 Matrizes de massa, rigidez e amortecimento e vetor força

Como dito anteriormente, um sistema composto por subsistemas massa-mola pode ser descrito utilizando o método proposto por Newton, que associa os elementos de massa, mola e amortecedor.

O sistema em questão neste trabalho pode ser descrito por esse método através de uma equação, composta por três matrizes e um vetor força, além dos vetores dos graus de liberdade, com suas derivadas primeira e segunda, ficando da seguinte forma:

$$[m]\{\ddot{y}\} + [c]\{\dot{y}\} + [k]\{y\} = \{f\} \quad (88)$$

Onde,

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y_c \\ y_t \\ y_p \\ y_b \\ y_{cg} \\ \theta \\ y_{ra} \\ y_{rp} \end{Bmatrix} \quad (87)$$

E suas derivadas primeira e segunda,



A matriz massa encontrada deixa claro que nenhuma das massas é dependente de outra, sendo cada uma correspondente a um grau de liberdade, o que faz concluir que essas são fixas e que não há transferência de massa entre os sistemas.

A ordem encontrada foi baseada no sentido cabeça-rodas, escolhida por conveniência da montagem das matrizes.

b) Matriz Rigidez [k]:

$$\begin{bmatrix} k_c & -k_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_c & (k_t+k_c) & -k_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_t & (k_p+k_t) & -k_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_p & (k_b+k_p) & -k_b & -\left(x_b+\frac{lb}{2}\right)k_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_b & (k_{sp}+k_{sa}+k_b) & (-x_p k_{sp}+x_a k_{sa}+\left(x_b+\frac{lb}{2}\right)k_b) & -k_{sa} & -k_{sp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(x_b+\frac{lb}{2}\right)k_b & (-x_p k_{sp}+x_a k_{sa}+\left(x_b+\frac{lb}{2}\right)k_b) & (x_p^2 k_{sp}+x_a^2 k_{sa}+\left(x_b+\frac{lb}{2}\right)^2 k_b) & -x_a k_{sa} & x_p k_{sp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{sa} & -x_a k_{sa} & k_{pa}+k_{sa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{sp} & x_p k_{sp} & 0 & k_{pp}+k_{sp} & 0 \end{bmatrix} \quad (91)$$

A matriz rigidez se mostra, assim como a matriz massa, simétrica, o que faz com que se conclua que o sistema apresenta todos os subsistemas não rígidos. Porém, no caso da matriz rigidez, ao contrário da matriz massa, há acoplamento.

c) Matriz Amortecimento [c]:

$$\begin{bmatrix} c_c & -c_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_c & (c_t+c_c) & -c_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_t & (c_p+c_t) & -c_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_p & (c_b+c_p) & -c_b & -\left(x_b+\frac{lb}{2}\right)c_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_b & (c_{sp}+c_{sa}+c_b) & (-x_p c_{sp}+x_a c_{sa}+\left(x_b+\frac{lb}{2}\right)c_b) & -c_{sa} & -c_{sp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(x_b+\frac{lb}{2}\right)c_b & (-x_p c_{sp}+x_a c_{sa}+\left(x_b+\frac{lb}{2}\right)c_b) & (x_p^2 c_{sp}+x_a^2 c_{sa}+\left(x_b+\frac{lb}{2}\right)^2 c_b) & -x_a c_{sa} & x_p c_{sp} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{sa} & -x_a c_{sa} & c_{sa} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{sp} & x_p c_{sp} & 0 & c_{sp} & 0 \end{bmatrix} \quad (92)$$

Conforme esperado, tem como resultado uma matriz amortecimento semelhante à matriz rigidez, com as mesmas características descritas acima, deixando claro que a modelagem é correta e descreve de forma fidedigna o modelo proposto.

d) Componentes do vetor força {f}:

Além das matrizes massa, rigidez e amortecimento do sistema, que são multiplicadas pelos vetores que representam os graus de liberdade, deve-se definir as componentes do vetor força {f} resultante da equação dinâmica completa do modelo.

Esse vetor é composto pelas parcelas responsáveis pela excitação sofrida pelo veículo, advindas, no caso deste modelo, da função que simula o perfil de uma ou mais determinadas pistas. Nota-se que, para esse modelo, somente para as equações das rodas anterior e posterior há forças resultantes simulando tal perfil.

Através das equações toma-se como vetor força:

$$\{f\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{pa}y_{pa} \\ k_{pp}y_{pp} \end{pmatrix} \quad (93)$$

#### 4.1.4 Modelo computacional implementado em Matlab®

De posse de todo o equacionamento do modelo proposto torna-se possível a implementação numérica do problema, a fim de obter resolução para a equação matricial, considerada de alta complexidade pelo número elevado de variáveis, não sendo viável sua resolução sem o uso de ferramentas computacionais.

O programa escolhido para a implementação do problema é o *Matlab*®, que é capaz de solucionar de forma relativamente simples as equações diferenciais, através da manipulação das variáveis utilizando métodos específicos.

Além disso, o *Matlab*® permite que as respostas sejam vistas numérica e graficamente, o que facilita a interpretação dos resultados, principalmente no que se refere ao comportamento vibracional do veículo e de cada um dos subsistemas.

A rotina numérica criada pelo autor para resolução desse problema utiliza, assim como em Aquino (2014), a função presente no *Matlab*® denominada *ode45*, específica para problemas que envolvem alta ordem, além dos dados de entrada do modelo, detalhados no item posterior a este, tornando o software capaz de exprimir a solução para o problema.

De acordo com que se muda o foco das análises, o mesmo algoritmo pode ser utilizado, bastando que se alterem os dados de entrada no arquivo inicial da rotina, o que possibilita uma infinidade de alterações e comparações.

#### 4.1.4.1 Variáveis de entrada do modelo

O modelo proposto possui vinte e seis variáveis de entrada, sendo quatorze delas correspondente a parte biodinâmica e doze ao modelo *Half-Car*, conforme fora descrito nas Figuras 64 e 65.

Os valores utilizados para rigidez, amortecimento e massa do corpo humano no modelo biodinâmico são detalhados no item 4.1.1, baseados nos estudos de Becker (2006) e Bolina *et al* (2011).

Além desses valores, deve-se definir as dimensões, rigidez, amortecimento e massa do banco modelado, para que se torne completos os quatorze dados de entrada necessários para a implementação da parte biodinâmica do modelo.

Tais valores referentes ao banco do motorista são estimados pelo próprio autor desse trabalho, de forma coerente e aproximada em relação ao veículo utilizado como referência, e mostrados na Tabela 8.

**Tabela 8 – Valores das variáveis de entrada do banco**

<b>Elemento</b>	<b>Descrição</b>	<b>Valor</b>
$m_b$	Massa da espuma do banco	2,0 kg
$k_b$	Rigidez do banco	1200 N/m
$c_b$	Coef. de amortecimento do banco	80 Ns/m
$l_b$	Comprimento do banco	390 mm
$x_b$	Distância do CG ao banco	350 mm

**Fonte: Elaborado pelo autor**

Os valores de todas as variáveis de entrada do modelo *Half-Car* são estimados tomando como base um veículo de segmento de entrada, com carroceria *hatch*, motorização 1.0 e opcionais básicos, para que seja estudado o comportamento vibracional de um veículo bastante comercializado, evitando assim análises de algum segmento pouco utilizado no Brasil.

Inicialmente são coletados os valores de massa total do veículo, as parcelas de massa dos eixos anterior e posterior, considerando o peso do conjunto roda/pneu de cada um deles, além da distância entre eixos.

Esses valores são mostrados na Tabela 9, e tornam possível a definição das distâncias de cada um dos eixos até o CG (centro de gravidade).

Tabela 9 – Massas do veículo, dos eixos completos e distância entre eixos

Elemento	Descrição	Valor
$m_{total}$	Massa total do veículo	923 kg
$m_{anterior}$	Massa total anterior	584 kg
$m_{posterior}$	Massa total posterior	339 kg
$x_{total}$	Distância entre eixos do veículo	2305 mm

Fonte: Elaborado pelo autor

Tendo tais valores torna-se possível definir as distâncias de cada um dos eixos em relação ao CG considerando a proporção de massa  $K$  como referência. Tal constante é definida através da equação (Gillespie, 1992).

$$K_{eixo} = \frac{m_{eixo+rodas}}{m_{total}} \quad (94)$$

Tomando como base os valores de massa definidos para o modelo, encontra-se os valores de  $k_{anterior}$  igual a 0,63 e  $k_{posterior}$  igual a 0,37, indicando que a proporção de massa do veículo tende a 63% para parte anterior e 37% para a parte posterior.

Obedecendo essa a proporção  $k$  para as distâncias dos eixos até o CG temos, na Tabela 10, os valores definidos.

Tabela 10 – Distâncias dos eixos do veículo em relação ao CG

Elemento	Descrição	Valor
$x_{total}$	Distância entre eixos do veículo	2305 mm
$x_a$	Distância do CG ao eixo anterior	920,4 mm
$x_p$	Distância do CG ao eixo posterior	1585,6 mm

Fonte: Elaborado pelo autor

As massas dos eixos completos definidas na Tabela 9 consideram tanto a massa suspensa quanto a massa não suspensa, sendo a última referente a suspensão e conjunto pneu/roda.

Para o modelo implementado é necessário que se separe o valor de massa dos componentes de suspensão (massa não suspensa) do restante, estabelecendo valores para as variáveis  $m_{rp}$  e  $m_{ra}$ , encontrando assim a massa suspensa do veículo,  $m_{cg}$ .

Os valores são estimados de  $m_{rp}$  e  $m_{ra}$  levando em consideração a tipologia de suspensão, MacPherson para a anterior e Eixo Rígido para a posterior, o tamanho das rodas e pneus, a utilização de rodas de liga leve, entre outros fatores.

Tais valores, além do encontrado para  $m_{cg}$  são mostrados na Tabela 11.

**Tabela 11 – Valores de massa suspensa e não suspensa do veículo**

<b>Elemento</b>	<b>Descrição</b>	<b>Valor</b>
$m_{anterior}$	Massa total anterior	584 kg
$m_{posterior}$	Massa total posterior	339 kg
$m_{ra}$	Massa não suspensa anterior	60 kg
$m_{rp}$	Massa não suspensa posterior	40 kg
$m_{sa}$	Massa suspensa anterior	524 kg
$m_{sp}$	Massa suspensa posterior	299 kg
$m_{cg}$	Massa suspensa considerada no CG do veículo	823 kg

**Fonte: Elaborado pelo autor**

Através das Tabelas 9 a 11, portanto, define-se os valores para as variáveis de massa suspensa e não suspensa, além dos valores dimensionais do modelo *Half-Car*, restando estabelecer o valor de Inércia referente ao CG e os coeficientes de rigidez e amortecimento dos componentes das suspensões anterior e posterior.

A inércia do veículo é estimada através dos valores de massa dos eixos anterior e posterior, além da distância entre eixos, utilizando os cálculos de inércia para um bloco fechado de massa, encontrando, para o veículo referência desse trabalho, um valor de inércia aproximado de 1.347.016.692 kg.mm<sup>2</sup> ou, na forma coerente, 1347 kg.m<sup>2</sup>.

Portanto, para as variáveis do CG do veículo no modelo implementado são considerados os valores mostrados na Tabela 12.

**Tabela 12 – Valores para as variáveis de entrada referentes ao CG do veículo**

<b>Elemento</b>	<b>Descrição</b>	<b>Valor</b>
$J_{cg}$	Inércia do CG do veículo	1347 kg.m <sup>2</sup>
$m_{cg}$	Massa suspensa considerada no CG do veículo	823 kg

**Fonte: Elaborado pelo autor**

Para calcular os valores de rigidez das suspensões anterior e posterior baseia-se no que é estabelecido por Gillespie (1992) em relação ao que ele chama taxa de *ride* (RR), que é estabelecida através da relação entre a massa suspensa e a frequência natural não-amortecida ( $f_n$ ) da suspensão estudada.

Segundo Gillespie (1992) as suspensões anterior e posterior possuem frequências naturais ótimas diferentes que devem obedecer ao critério de *Olley*. É definida uma faixa de valores para tal, sendo escolhidas para esse trabalho os valores mínimos de rigidez dessa faixa, sendo 1,1Hz para a suspensão anterior e 1,3Hz para a suspensão posterior.



Além de frequências diferentes, as suspensões também apresentam massas suspensas ( $M$ ) diferentes, e, portanto, deve-se definir a taxa de *ride* de cada uma delas em separado, através da equação adaptada de Gillespie (1992):

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{RR}{M}} \rightarrow RR = M * (2\pi * f_n)^2 \quad (95)$$

Utilizando a equação encontra-se os valores da Tabela 13.

**Tabela 13 – Taxa de Ride calculada para as suspensões anterior e posterior**

Elemento	Descrição	Valor
$m_{sa}$	Massa suspensa anterior	524 kg
$f_{na}$	Frequência natural da suspensão anterior	1,1 Hz
$RR_{sa}$	Taxa de Ride da suspensão anterior	25031 N/m
$m_{sp}$	Massa suspensa posterior	299 kg
$f_{np}$	Frequência natural da suspensão posterior	1,3 Hz
$RR_{sp}$	Taxa de Ride da suspensão posterior	19949 N/m

**Fonte: Elaborado pelo autor**

A partir das taxas de *ride* (RR) de cada uma das massas não suspensas é possível definir os valores de rigidez equivalentes relacionados ao conjunto suspensão, desde que se conheça os valores de rigidez do pneu, através da equação abaixo:

$$RR = \frac{k_{suspensão} * k_{pneu}}{k_{suspensão} + k_{pneu}} \rightarrow k_{suspensão} = \frac{RR * k_{pneu}}{k_{pneu} - RR} \quad (96)$$

Onde, para cada um dos pneus, definiu-se o valor de rigidez adotado por Gillespie (1992), de aproximadamente 154 kN/m, sendo, portanto, para esse modelo *Half-Car*, 308 kN/m para cada um dos conjuntos. O valor aproximado de rigidez para as suspensões e os pneus do modelo, são vistos na Tabela 14.

**Tabela 14 – Valores de rigidez das molas de suspensão e dos pneus**

Elemento	Descrição	Valor
$k_{sa}$	Rigidez da suspensão anterior	29889 N/m
$k_{pa}$	Rigidez do pneu anterior	308000 N/m
$k_{sp}$	Rigidez da suspensão posterior	22918 N/m
$k_{pp}$	Rigidez do pneu posterior	308000 N/m

**Fonte: Elaborado pelo autor**

Assim como para os cálculos de rigidez, baseou-se no indicado por Gillespie (1992) para os cálculos de amortecimento da suspensão, lembrando que para os pneus não foi considerado amortecimento algum, definindo-os simplesmente como um elemento mola.

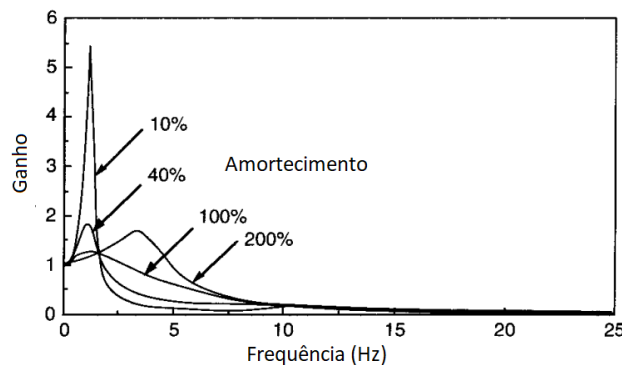
Sabe-se que, para calcular o coeficiente de amortecimento ( $C_s$ ) da suspensão deve-se obedecer a seguinte relação, que depende da relação de amortecimento ( $\zeta_s$ ), da massa suspensa ( $M$ ) e da rigidez da suspensão ( $K_s$ ):

$$\zeta_s = \frac{C_s}{\sqrt{4K_s M}} \quad (97)$$

Gillespie (1992) considera que uma boa relação de amortecimento, que garanta bons critérios de conforto, amplificação entre 1,5 e 2,5 da frequência de ressonância e bom contato do pneu com o solo, gira em torno de 40%, como mostrado na Figura 64.

Ainda segundo Gillespie (1992) a grande maioria dos veículos atuais utilizam a relação de amortecimento próximas a esse valor ótimo.

**Figura 64 – Amplificação da frequência de ressonância x Relação de amortecimento**



**Fonte: Adaptado de Gillespie (1992)**

Para o modelo implementado nessa dissertação foi escolhido considerar a relação de amortecimento ( $\zeta_s$ ) igual a 30%, um pouco abaixo da considerada mais comum para carros de passeio por Gillespie (1992), por se aproximar da relação utilizada no veículo de referência e, adotando esse percentual, foi calculado o coeficiente de amortecimento da forma:

$$C_s = \zeta_s * \sqrt{4K_s M} \rightarrow C_s = 0,3 * \sqrt{4K_s M} \quad (98)$$

Tendo os valores de massa suspensa e de rigidez calculados anteriormente, torna-se possível encontrar valores de coeficiente de amortecimento para cada uma das suspensões, mostrados na Tabela 15.

**Tabela 15 – Valores de coeficiente de amortecimento das suspensões**

<b>Elemento</b>	<b>Descrição</b>	<b>Valor</b>
$c_{sa}$	Coef. de amortecimento da suspensão anterior	2374,5 N.s/m
$c_{sp}$	Coef. de amortecimento da suspensão posterior	1570,6 N.s/m

**Fonte: Elaborado pelo autor**

Além disso, para estabelecer as frequências naturais amortecidas do modelo utiliza-se a equação:

$$f_d = f_n \sqrt{1 - \zeta_s^2} \quad (98)$$

Sendo o valor da relação de amortecimento ( $\zeta_s$ ) igual a 0,3 e os valores de frequência natural não-amortecida ( $f_n$ ) igual a 1,1 e 1,3Hz para as suspensões anterior e posterior, respectivamente, encontra-se valores de frequência natural amortecida iguais a 1,04 e 1,24 Hz.

#### **4.1.5 Modelagem do sinal de excitação**

Existem variadas formas de se criar um sinal que represente a excitação advinda da pista em uma implementação numérica do modelo veicular, sendo diferenciados por sua complexidade, pela quantidade de variáveis consideradas e por sua exigência tempo-computacional.

O sinal mais utilizado em simulações computacionais desse tipo são os do tipo PSD, descritos de forma mais detalhada no item 2.1.1.1 dessa dissertação; tais sinais são capazes de descrever de forma bastante coerente as diferenças de velocidade e condições entre pisos variados.

Porém, chega-se à conclusão de que, para o modelo proposto, basicamente didático, não se faz necessário o uso de um sinal robusto do tipo PSD, sendo possível

entender se o comportamento de resposta dinâmica do modelo é coerente com a realidade utilizando um tipo de sinal de excitação mais simples, do tipo senoidal.

Esse tipo de sinal considera o deslocamento das rodas provocado pelas irregularidades da pista como um evento periódico, com determinada frequência ( $\omega$ ), tempo ( $t$ ), amplitude ( $A$ ) e fase ( $\varphi$ ), regido pela equação mostrada abaixo.

$$y = A \sin(\omega t - \varphi) \quad (99)$$

Esse tipo de sinal tem sua utilização viável nesse modelo por se tratar de uma implementação de apenas duas dimensões, que considera para o veículo apenas movimentos retilíneos, sem considerar qualquer inclinação.

Além disso, o sinal senoidal, por sua natureza, permite que se considere atraso, através da parcela de fase, que, nesse caso, é utilizado para diferenciar o instante de movimentação das suspensões anterior e posterior.

#### 4.1.5.1 Sinal senoidal para a roda anterior

Primeiramente é definido o sinal de excitação para a roda anterior, através da definição dos dois parâmetros iniciais da função senoidal, que determinam sua frequência ( $f$ ) em Hertz (Hz), através da equação:

$$f = \frac{N}{t} \quad (100)$$

Onde  $N$  representa o número de picos de excitação ocorridos em um determinado intervalo de tempo  $t$ . Tal número, portanto, é diretamente proporcional à irregularidade da pista, que, quanto maior, provoca um maior número de picos.

Para o sinal utilizado na correlação do modelo proposto é definido pelo autor um intervalo de tempo de 60 segundos com a presença de 45 picos de excitação de 0,005m (5mm) de amplitude cada durante o percurso, encontrando uma frequência ( $f$ ) igual a:

$$f = \frac{N}{t} = \frac{45 \text{ picos}}{60 \text{ s}} = 0,75 \text{ Hz} \quad (101)$$

Tendo a frequência ( $f$ ), é calculada a frequência angular:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(0,75) = 4,71 \text{ rad/s} \quad (102)$$

A velocidade do percurso ( $v$ ) e a distância entre o eixo estudado e a referência ( $d$ ), determinam o intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) entre a passagem da roda anterior e da roda posterior, através da equação do movimento.

Como a roda anterior é definida como referência para o modelo, temos que a distância para a referência e conseqüentemente o intervalo de tempo são nulos.

$$\Delta t = \frac{d_{\text{referência}}}{v} = \frac{0}{22,2} = 0s \quad (103)$$

E por esse motivo a fase ( $\varphi$ ) para a roda anterior também é nula, já que esta é calculada em função do intervalo de tempo ( $\Delta t$ ), como mostrado pela equação abaixo, havendo a presença de fase apenas para a roda posterior.

$$\varphi = \omega * \Delta t = 4,71 * 0 = 0 \text{ rad} \quad (104)$$

Por fim, para encontrar a frequência de excitação ( $f_e$ ) da roda anterior, faz-se:

$$f_e = \frac{N}{v * t} = \frac{f}{v} = \frac{0,75}{22,2} = 0,03375 \text{ ciclos/m} \quad (105)$$

Os valores dos parâmetros que definem, portanto, as características do sinal de excitação para a roda anterior, utilizado na correlação do modelo proposto, são agrupados e mostrados na Tabela 16.

Tabela 16 – Parâmetros do sinal senoidal para a roda anterior

Percurso 80km/h - Roda Anterior				
Fator	Descrição	Valor	Unidade	
A	Amplitude	0,005	m	
N	Ciclos	45	ciclos	
t	Tempo	60	s	
V	Velocidade	80	km/h	
	Velocidade	22,22	m/s	
f	Frequência	0,75	Hz	
$\omega$	Frequência	4,71	rad/s	
d	Distância até o eixo dianteiro	0	m	
$\Delta t$	Intervalo de tempo	0	s	
fe	Frequência de excitação	0,0338	ciclos/m	
$\phi$	Parcela fase	0	rad	

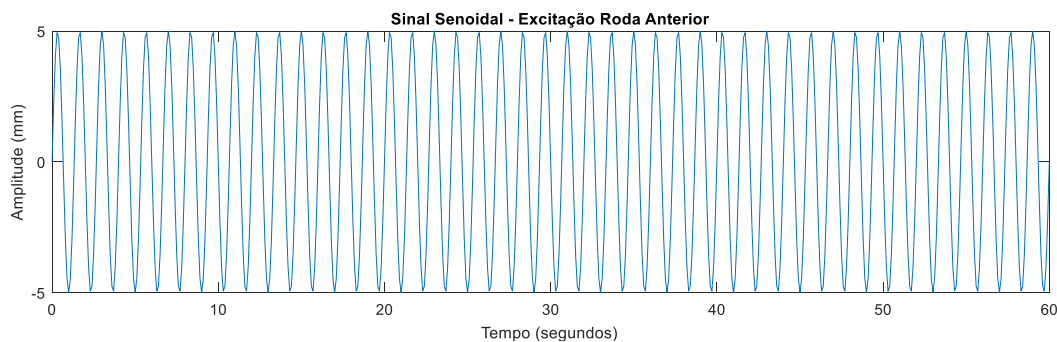
Fonte: Elaborado pelo autor

Com todos esses dados torna-se possível o equacionamento do sinal de excitação da pista na roda anterior ( $y_{pa}$ ), em metros, dado por:

$$y_{pa} = A \text{sen}(\omega t - \phi) \rightarrow y_{pa} = 0,005 \text{sen}(4,71t) \quad (106)$$

No Gráfico 1 é mostrado o sinal de excitação da pista para a roda anterior.

Gráfico 1 – Sinal de excitação da pista na roda anterior



Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

#### 4.1.5.2 Sinal senoidal para a roda posterior

Para a excitação da pista na roda posterior é considerado o mesmo percurso, com as mesmas características, podendo ser considerado, portanto, os mesmos valores calculados para frequência, frequência angular e frequência de excitação.

Porém, para esse segundo sinal é considerado um atraso de fase que representa o intervalo de tempo em que a roda posterior demora a mais a receber a excitação da pista, em comparação com a roda anterior.

O intervalo de tempo é calculado como mostrado anteriormente, pela equação simples do movimento, porém, nesse caso, diferente de zero, já que a distância para a roda dianteira, dada como referência, não é nula.

O valor da distância entre as rodas anterior e posterior é igual ao valor do entre eixos considerado pelo modelo, de 2305mm ou 2,305m, e portanto, o intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) pode ser calculado por:

$$\Delta t = \frac{d_{referência}}{v} = \frac{2,305}{22,2} = 0,10373s \quad (107)$$

E o atraso de fase, é dado por:

$$\varphi = \omega * \Delta t = 4,71 * 0,10373 = 0,4888 \text{ rad} \quad (108)$$

Os parâmetros adicionais para o sinal de excitação da roda posterior são mostrados abaixo na Tabela 17

**Tabela 17 – Parâmetros do sinal senoidal para a roda posterior**

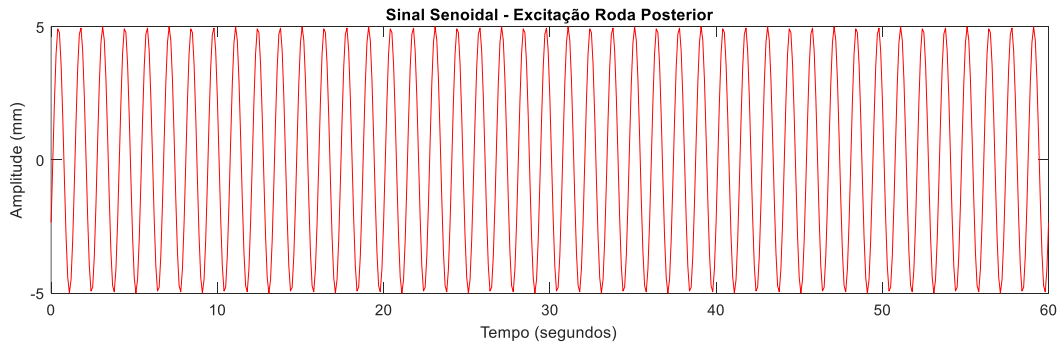
<b>Percurso 80km/h - Roda Posterior</b>			
<b>Fator</b>	<b>Descrição</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidade</b>
d	Distância até o eixo dianteiro	2,305	m
$\Delta t$	Intervalo de tempo	0,1037	s
fe	Frequência de excitação	0,0338	ciclos/m
$\phi$	Parcela fase	0,49	rad

**Fonte: Elaborado pelo autor**

Portanto, o sinal de excitação da pista na roda posterior ( $y_{pp}$ ), em metros, é dado pela equação:

$$y_{pp} = A \text{sen}(\omega t + \varphi) = 0,005 \text{sen}(4,71t + 0,49) \quad (108)$$

No Gráfico 2 é mostrado o sinal de excitação da pista para a roda posterior.

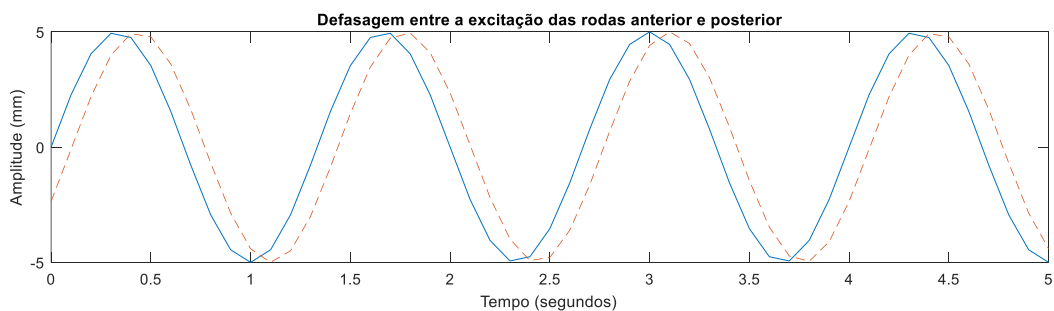
**Gráfico 2 – Sinal de excitação da pista na roda posterior**

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

#### 4.1.5.3 Sinal senoidal de excitação da pista

Tendo sido determinado os sinais de excitação da pista para as rodas anterior e posterior, é feita a comparação entre os sinais, deixando claro a diferença de fase existente entre eles que representa a diferença entre os intervalos de tempo ( $\Delta t$ ) que os eixos do veículo sofrem cada pico de excitação.

No Gráfico 3 é mostrada tal comparação, sendo recortado apenas os cinco primeiros segundos do sinal para que se facilite a visualização da diferença de fase entre os eixos do veículo.

**Gráfico 3 – Defasagem entre a excitação das rodas do veículo**

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

#### 4.1.5.4 Sinal de excitação de percurso real

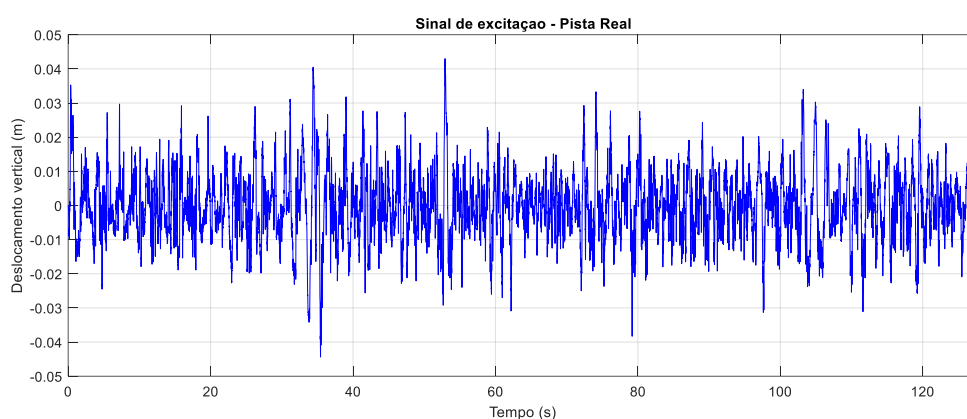
O sinal senoidal utilizado na primeira parte do trabalho é substituído por um sinal de excitação obtido através de mapeamento de um percurso real, que faz com que as movimentações aplicadas nas rodas anterior e posterior do veículo não sejam mais senoidais e periódicas, mas sim, de acordo com o pavimento da pista.



O asfalto irregular, a presença de lombadas e de diferenças, embora que mínimas, na velocidade do veículo durante o percurso, fazem com que o sinal digitalizado seja bastante semelhante a alguns percursos utilizados no dia-a-dia de usuários comuns de veículo de passeio.

A digitalização de percursos é feita por meio de um escaneamento, muito comum no meio automotivo, sendo o sinal de excitação descrito para o *Matlab*® através de valores de amplitude de deslocamento associados a pequenos intervalos de tempo, que são aplicados nas rodas do modelo computacional elaborado. Tal sinal pode ser visto no Gráfico 4 abaixo.

**Gráfico 4 – Sinal de excitação de pista real**



Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

Neste sinal tem-se um valor de amplitude de deslocamento das rodas a cada intervalo de 0,0019 segundos, sendo esse o tempo de amostragem. A descrição completa do percurso real simulado é mostrada na Tabela 18.

**Tabela 18 – Descrição do percurso utilizado como sinal de excitação**

<b>Dados do percurso simulado</b>		
Velocidade	40,00	km/h
	11,10	m/s
Tempo	128,00	s
Amostras	66218	-
Distância	1421	m

Fonte: Elaborado pelo autor

Com esse sinal de excitação aplicado ao modelo torna-se possível avaliar, assim como feito para o sinal senoidal, as respostas de deslocamento, velocidade e aceleração de cada um dos graus de liberdade considerados.

Tal sinal traz consigo duas peculiaridades, a primeira, de representar de forma mais coerente as movimentações sofridas por um carro no dia-a-dia, quando comparado com o sinal anteriormente utilizado, e a segunda, de permitir que se correlacione tais resultados com os do teste experimental descrito no próximo item, para entender quão próximo da realidade se encontra o modelo computacional proposto.

A interação do sinal com o modelo acontece através de alguns comandos de repetição, cada um deles com centenas de milhares de interações, acompanhando o número de amostras do sinal. Através desse algoritmo as amplitudes de deslocamento são alocadas em vetor e os cálculos de velocidade, aceleração e força são realizados.

#### **4.1.6 Teste Experimental**

As respostas obtidas através do modelo computacional, para serem consideradas corretas e confiáveis devem ser comparadas e correlacionadas com respostas obtidas em testes experimentais.

Uma medição experimental deve ser realizada utilizando um conjunto de equipamentos, denominado Sistema de Medição, composto por sensores, amplificadores de sinal, unidade de tratamento do sinal e mostradores. Para essa medição em específicos são utilizados os componentes descritos a seguir.

A medição é feita em um veículo com características similares àquelas utilizadas como valores de entrada do modelo computacional, tanto em relação a dimensão e massa, quanto a valores de rigidez e amortecimento de cada um dos seus componentes; as informações adicionais sobre o veículo são vistas na Tabela 19.

**Tabela 19 – Dados do veículo utilizado no teste experimental**

<b>Dados do veículo utilizado</b>		
Categoria	Hatch	-
Utilização	Passeio	-
Pneus	175/65 R14	-
Rodas	Aço - 14"	pol
Pressão Pneus Dianteiros	32	psi
Pressão Pneus Traseiros	32	psi
Combustível	Gasolina	-
Direção	Hidráulica	-

**Fonte: Elaborado pelo autor**

Além disso, durante o teste apenas uma pessoa ocupa o veículo, com dimensões também próximas das consideradas para o modelo biodinâmico proposto, fazendo com que a correlação entre as medições objetiva e computacional seja mais efetiva.

Os sensores utilizados nesse caso são acelerômetros piezoelétricos, selecionados de modo que compreendam a faixa de frequência e amplitude prevista, sendo da fabricante PCB, modelo Series 3173B11, como visto na Figura 65.

As principais características do modelo de acelerômetro utilizado, como sensibilidade, faixa de medição, resolução, faixa de frequência, tamanho, peso e tipo de conexão estão disponíveis no site do fabricante e também são levadas em consideração.

**Figura 65 – Sensor do tipo acelerômetro piezoelétrico**



**Fonte: Site do fabricante (<http://www.pcb.com>)**

A velocidade do veículo é medida e gravada durante todo o percurso de coleta de dados para que se tenha uma maneira de validar o sinal, que deve ser obtido em velocidade constante de aproximadamente 40km/h, para esse percurso.

Para tal é utilizado um equipamento de monitoramento de velocidade baseado em sinais de GPS (Global Positioning System), modelo RaceLogic, da fabricante Vbox, como mostrado na Figura 66.

**Figura 66 – Medidor de velocidade por GPS RaceLogic**



**Fonte: Site do fabricante (<https://vboxautomotive.co.uk/>)**

Tal sensor é composto por uma antena capaz de receber e gravar sinais GPS de velocidade com uma frequência de 5 a 100Hz, dependendo do modelo, e transmitir através de rede CAN e saídas digitais/analógicas. O modelo escolhido para este experimento é o RLVBSS20, capaz de captar sinais com uma frequência de 20Hz, que se faz suficiente para o que se busca de resultados.

Os pontos do veículo que devem ser instrumentados nesse tipo de análise dependem do objetivo da atividade que será realizada, ou seja, do foco da análise; para esse teste experimental os pontos instrumentados são: o banco do motorista, o pedal morto ou de descanso, os pontos de fixação dos amortecedores e os cubos de roda.

Os acelerômetros são fixados conforme o sentido padrão em relação ao veículo, eixo X (longitudinal) positivo para frente, eixo Y (transversal) positivo para esquerda e eixo Z (vertical) positivo para baixo, conforme a Figura 1.

Em conjunto com os sensores de aceleração e de velocidade, é utilizado um coletor de dados no qual há placas de aquisição capazes de receber os sinais medidos, amplificá-los e enviá-los para a memória do Notebook.

Tal hardware escolhido é um equipamento de aquisição do modelo MGCplus®, Série 30044, da fabricante especialista em materiais para aquisição HBM. Um exemplar desse coletor de dados é mostrado na Figura 67.

**Figura 67 – Coletor de Dados HBM MGC Plus®**



**Fonte: Site do fabricante (<https://www.hbm.com/>)**

Montadas junto ao coletor de dados MGC Plus® há placas conectoras modelo AP801S6 e amplificadoras modelo ML801B para todos os acelerômetros. Tais placas são acopladas em cada um dos módulos do coletor, que, por ser modular, permite diversas configurações. Um exemplo de placas conectadas é mostrado na Figura 68.

Figura 68 – Placas conectadas aos módulos do Coletor de Dados HBM MGC Plus®



Fonte: Elaborado pelo autor

O software utilizado para o tratamento de sinais é o Catman®, também da empresa de aquisição HBM, por ser compatível com o MGC Plus® e oferecer boa funcionalidade e praticidade em seu uso e a taxa de aquisição é de 512 Hz, que mesmo depois reamostrada obedece a indicação de duas vezes o valor da frequência mínima avaliada.

A aquisição dos dados é feita, portanto, percorrendo o percurso idêntico ao que fora monitorado para obtenção do sinal de excitação do item 4.1.5.4. São realizadas sete medições, para que se obtenha três passagens válidas; o detalhamento de tempo gasto, distância percorrida e velocidade do percurso é mostrado, anteriormente, na Tabela 18.

Os sinais são amplificados e armazenados durante a aquisição e convertidos para que se tornem legíveis pelo programa utilizado para o processo de tratamento dos sinais. Tal tratamento segue uma série de etapas, a fim de melhorar o sinal, retirando informações desnecessárias.

Além disso, com o uso do software de tratamento, os sinais reamostrados são tratados por um método análise de frequência, que utiliza algoritmo de transformada rápida de Fourier para obter resposta espectral em frequência.

Nessa medição é considerada, para cada acelerômetro, a média das cinco passagens, para representar de forma mais assertiva o comportamento do veículo, eliminando erros pontuais presentes em alguma das passagens, como defeitos agudos na via ou desvios de trajetória necessários.

Não são considerados, no caso desse teste experimental, tratamentos estatísticos como uso de erro de medição e de desvio padrão, por se tratarem de equipamentos de

fabricantes confiáveis e recentemente calibrados, com erros de medição em casas decimais que não interferem na comparação que se busca nesse trabalho.

Além disso, para eliminar as fontes de incerteza que podem afetar os sinais adquiridos, são controlados, além da velocidade do veículo, alguns fatores como:

- Correta fixação dos equipamentos;
- Completo fechamento de vidros;
- Padronização da forma de direção durante o percurso;
- Calibragem dos pneus;
- Desligamento de equipamentos de climatização e áudio;

## 5 RESULTADOS: ANÁLISE E DISCUSSÃO

O modelo computacional elaborado em *Matlab*® tem suas respostas a excitação discutidas abaixo e sua rotina principal é mostrada na Figura 69. Nessa rotina o usuário escolhe o tipo de sinal de excitação a ser analisado e, a partir daí, são executadas todas as demais sub-rotinas, responsáveis por gerar e manipular as matrizes, calcular as frequências, obter as respostas, realizar o tratamento de sinais e construir os gráficos.

Figura 69 – Rotina principal do modelo computacional elaborado

```

1 %Mestrado - Luis Felipe Mrad
2 %Modelo Half-Car
3 %Rotina Principal - Algoritmo completo
4
5 clear all
6 close all
7 clc
8
9 global Escolha
10 global t
11
12 Variaveis_Entrada; %Sub-rotina de declaração das variáveis de entrada
13 Matriz; %Sub-rotina geradora das matrizes massa, rigidez e amortecimento
14 FreqNat; %Sub-rotina de cálculo das frequências naturais amortecidas e não amortecidas
15
16 Escolha=input('Para pista real digite 1 e para pista senoidal digite 2: ');
17 %Caso escolha seja igual a 1, utiliza-se a entrada da pista real, caso seja 2, utiliza-se o sinal senoidal de 60 segundos
18 if Escolha==1
19     Pista_Real; %Sub-rotina com valores de deslocamento da pista real para cada intervalo de tempo
20     aux=length(Pista);
21     t=Pista(1:aux-1,1);
22 else
23     t=0:0.01:60;
24 end
25
26 [T,Y]=ode45('Excitacao',t,ci); %Função "ode" para inserção da excitação
27
28 Graficos_Principais; %Sub-rotina para impressão dos graficos de deslocamento, velocidade e aceleração
29 Graficos_Adicionais; %Sub-rotina para impressão dos gráficos adicionais de pista e cálculo de acel RMS
30 Tratamento; %Sub-rotina para análise FFT e impressão dos gráficos FFT
31

```

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

### 5.1 Matrizes de saída do modelo

Considerando os dados de entrada do modelo proposto são encontradas inicialmente as matrizes de rigidez, massa e amortecimento. Tais matrizes são de extrema importância para a obtenção dos primeiros resultados numéricos do modelo, baseado em métodos de manipulação dos elementos dessas matrizes, como multiplicação e inversão.

Para isso foi elaborada a primeira sub-rotina capaz de criar e armazenar todas as variáveis de entrada do modelo, cujo os valores são estimados de forma detalhada no item 4.1.4.1.

Feito isso, foram declaradas três matrizes de dimensão 8x8, representando as matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema, mostradas no item 4.1.3, que possuem elementos nulos e não nulos.

Para calcular os valores de cada um dos elementos não nulos dessas matrizes o algoritmo utiliza os valores estimados das variáveis de entrada, declarados anteriormente, considerando duas casas decimais.

O cálculo correto de cada uma dessas matrizes é de fundamental importância para a caracterização do modelo proposto, visto que toda a análise de resposta de deslocamento, velocidade e aceleração é dependente do resultado encontrado para os elementos que as compõem.

Tais matrizes são mostradas abaixo, inicialmente pela matriz massa, da Figura 70.

**Figura 70 – Matriz massa resultante para o modelo proposto**

Matriz massa  
M =

5.42	0	0	0	0	0	0	0	0
0	35.49	0	0	0	0	0	0	0
0	0	15.09	0	0	0	0	0	0
0	0	0	2.00	0	0	0	0	0
0	0	0	0	823.00	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1347.00	0	0	0
0	0	0	0	0	0	60.00	0	0
0	0	0	0	0	0	0	40.00	0

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

A matriz rigidez calculada é vista na Figura 71.

**Figura 71 – Matriz rigidez resultante para o modelo proposto**

Matriz rigidez  
K =

170000.00	-170000.00	0	0	0	0	0	0	0
-170000.00	228000.00	-58000.00	0	0	0	0	0	0
0	-58000.00	258000.00	-200000.00	0	0	0	0	0
0	0	-200000.00	201200.00	-1200.00	-654.00	0	0	0
0	0	0	-1200.00	54007.00	-8174.95	-29889.00	-22918.00	0
0	0	0	-654.00	-8174.95	83295.25	-27509.84	36338.78	0
0	0	0	0	-29889.00	-27509.84	337889.00	0	0
0	0	0	0	-22918.00	36338.78	0	330918.00	0

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®



E, por fim, a matriz amortecimento, na Figura 72.

**Figura 72 – Matriz amortecimento resultante para o modelo proposto**

Matriz amortecimento  
C =

300.00	-300.00	0	0	0	0	0	0	0
-300.00	1800.00	-1500.00	0	0	0	0	0	0
0	-1500.00	6500.00	-5000.00	0	0	0	0	0
0	0	-5000.00	5080.00	-80.00	-43.60	0	0	0
0	0	0	-80.00	4025.10	-261.25	-2374.50	-1570.60	0
0	0	0	-43.60	-261.25	5983.98	-2185.49	2490.34	0
0	0	0	0	-2374.50	-2185.49	2374.50	0	0
0	0	0	0	-1570.60	2490.34	0	1570.60	0

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

## 5.2 Resposta dinâmica do modelo computacional

Para o entendimento da resposta dinâmica do modelo proposto, deve-se, primeiramente, avaliar as características de cada um dos elementos de massa, que correspondem aos graus de liberdade.

Para o problema em questão as características iniciais mais importantes são as frequências natural não-amortecida e amortecida de cada um desses elementos de massa, para que se correlacione com o que é sugerido na literatura, e possa chegar à conclusão de que o modelo proposto de fato é uma descrição da realidade.

No modelo proposto neste trabalho foram considerados oito elementos de massa, correspondentes a oito partes de um modelo veículo-pessoa, como já fora citado anteriormente, sendo, portanto, um modelo 8GDL.

O tempo de processamento gasto pelo software *Matlab*® para execução do código completo, utilizando o sinal de excitação do percurso real e considerando a exibição de todos os gráficos, gira em torno de cinco minutos, em um computador 64 bits dotado de processador Intel® Core™ i7 @ 2.60Ghz e 16Gb de memória RAM.

### 5.2.1 Obtenção das frequências naturais não amortecidas e amortecidas

Para encontrar os valores de frequência natural não amortecida dos elementos utiliza-se do método de manipulação das matrizes de massa e rigidez, que consiste na criação de uma matriz  $K\sim$  calculada por:

$$K\sim = M^{-1/2} * K * M^{-1/2} \quad (109)$$

Nesse método encontra-se a matriz  $K_{\sim}$  da qual se extrai os autovalores e autovetores, com o intuito de, em poder desses valores, conseguir se extrair os valores de frequência natural dos elementos.

A matriz  $K_{\sim}$  encontrada para esse modelo é mostrada na Figura 73:

**Figura 73 – Matriz  $K_{\sim}$  de manipulação de frequências não amortecidas**

$K_{til} =$

31365.31	-12257.34	0	0	0	0	0	0
-12257.34	6424.34	-2506.28	0	0	0	0	0
0	-2506.28	17097.42	-36405.78	0	0	0	0
0	0	-36405.78	100600.00	-29.58	-12.60	0	0
0	0	0	-29.58	65.62	-7.76	-134.50	-126.31
0	0	0	-12.60	-7.76	61.84	-96.77	156.55
0	0	0	0	-134.50	-96.77	5631.48	0
0	0	0	0	-126.31	156.55	0	8272.95

**Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®**

Utilizando um comando presente no software torna-se possível extrair as matrizes de autovalores e auto vetores da matriz encontrada. Como para o cálculo das frequências naturais de um elemento deve-se levar em consideração a matriz de autovalores, somente ela é mostrada na Figura 74, denominada  $D$ .

**Figura 74 – Matriz de autovalores da matriz  $K_{\sim}$**

$D =$

114250.52	0	0	0	0	0	0	0
0	36403.33	0	0	0	0	0	0
0	0	4812.89	0	0	0	0	0
0	0	0	8277.88	0	0	0	0
0	0	0	0	5636.40	0	0	0
0	0	0	0	0	19.35	0	0
0	0	0	0	0	0	51.77	0
0	0	0	0	0	0	0	66.82

**Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®**

A frequência natural, em radiano por segundo, nada mais é do que a raiz quadrada da matriz  $D$ , que nos leva a matriz de frequências mostrada na Figura 75:

**Figura 75 – Matriz de frequências naturais não amortecidas dos elementos em rad/s**

Matriz das frequências naturais em rad/s:

*wnat* =

338.01	0	0	0	0	0	0	0	0
0	190.80	0	0	0	0	0	0	0
0	0	69.37	0	0	0	0	0	0
0	0	0	81.88	0	0	0	0	0
0	0	0	0	75.08	0	0	0	0
0	0	0	0	0	4.40	0	0	0
0	0	0	0	0	0	7.20	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	8.17

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

Os valores de frequência natural na literatura geralmente são dados em Hertz, onde, por definição sabemos que:

$$1 \text{ rad/s} = 0.1591549 \text{ Hz} \quad (110)$$

A matriz *wnat* foi recalculada para Hz, normalizada e transformada em um vetor *wnhz* de oito colunas, sendo cada uma delas correspondente à frequência de um dos elementos de massa, ou seja, a um dos graus de liberdade.

Tal vetor é mostrado na Figura 76:

**Figura 76 – Vetor de frequências naturais não amortecidas dos elementos em Hz**

Vetor das frequências naturais não amortecidas em Hz:

*wnhz* =

30.37	0.70	11.04	53.80	1.30	1.15	11.95	13.03
-------	------	-------	-------	------	------	-------	-------

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

Para facilitar o entendimento do leitor descreve-se na Tabela 20 de forma mais detalhada a atribuição de cada uma das frequências encontradas ao seu grau de liberdade, seguindo a mesma sequência lógica do equacionamento proposto, partindo da cabeça do indivíduo até culminar na roda posterior do veículo.

Tabela 20 – Frequências naturais não amortecidas de cada GDL

Frequências Naturais Não Amortecidas		
GDL	Valor (rad/s)	Valor (Hz)
Cabeça	190,8	30,37
Tronco Superior	4,4	0,7
Tronco Inferior	69,37	11,04
Banco	338,01	53,8
Bounce	8,17	1,3
Pitch	7,2	1,15
Roda Anterior	75,08	11,95
Roda Posterior	81,88	13,03

Fonte: Elaborado pelo autor

A primeira análise do modelo a ser feita é a comparação dos valores encontrados para frequência da massa suspensa do veículo, para as movimentações de *pitch* e de *bounce* com os presentes na literatura. Gillespie (1992) considera, através dos Critérios de Olley, que, para garantir a relação conforto estabilidade de um veículo de passeio, utilizado para esse fim, deve-se manter essas duas frequências próximas de 1Hz, não excedendo 1,5Hz.

No modelo proposto as frequências encontradas obedecem a esse intervalo, sendo também coerentes com o fato de que, ainda segundo Gillespie (1992) a frequência de *bounce* não deve superior em mais de 20% a frequência de *pitch*. No modelo a diferença entre elas é de 13,04%.

Além disso, Gillespie (1992) estabelece uma relação entre o valor da razão da frequência natural não amortecida da roda anterior pela da roda posterior e a posição do centro de gravidade do veículo. Para o modelo é encontrada uma razão igual a 0,9 entre tais frequências, condizendo com o fato do CG do veículo estar mais próximo da parte anterior do veículo, do que da parte posterior, devido a sua maior parcela de massa sobre o eixo dianteiro.

Através das matrizes do sistema também é possível encontrar os valores para as frequências naturais não amortecidas de cada um dos elementos de massa, para isso utiliza-se da manipulação matricial mostrada abaixo, que gera uma matriz  $C_{\sim}$ .

$$C_{\sim} = M^{-1/2} * C * M^{-1/2} \quad (111)$$

Tal matriz é manipulada, obtendo-se os autovalores e autovetores de forma a extrair um vetor de oito colunas com os valores de frequência amortecida de cada um dos graus de liberdade, como pode ser visto na Figura 77.

**Figura 77 – Vetor de frequências naturais amortecidas dos elementos em Hz**

Vetor das frequências naturais amortecidas em Hz:

w<sub>dhz</sub> =

29.83            0.69            4.67            0.00            1.26            1.11            11.51            12.64

**Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®**

Assim como para as frequências não amortecidas, é descrito na Tabela 21, de forma organizada e seguindo a sequência do equacionamento do modelo, as frequências amortecidas para cada grau de liberdade.

Todos os elementos de massa possuem frequências amortecidas, com valores inferiores em relação as frequências naturais não amortecidas.

A coerência dos valores encontrados para as frequências naturais das rodas anterior e posterior do veículo é estudada na parte de correlação com medições objetivas, em item posterior da dissertação.

**Tabela 21 – Frequências naturais amortecidas de cada GDL**

GDL	Frequências Naturais Amortecidas	
	Valor (rad/s)	Valor (Hz)
Cabeça	187,41	29,83
Tronco Superior	4,34	0,69
Tronco Inferior	29,34	4,67
Banco	0,00	0
Bounce	7,92	1,26
Pitch	6,95	1,11
Roda Anterior	72,32	11,51
Roda Posterior	79,43	12,64

**Fonte: Elaborado pelo autor**

Becker (2006) encontra valores de frequência natural de aproximadamente 4,18Hz para o tronco em pessoas sentadas, sob acelerações entre 1 e 2m/s<sup>2</sup>; tal média de valores se mostra bem semelhante ao obtido como resposta no modelo proposto, considerando o tronco inferior.

Anflor (2003) e Rao (2009), como mostrado na Figura 35 e na Figura 36, consideram valores factíveis de frequência natural da cabeça em torno de 20 a 30Hz, fazendo com que seja coerente o valor encontrado pelo modelo biodinâmico elaborado.

## 5.2.2 Análise das respostas de deslocamento e de velocidade

A partir do equacionamento do modelo proposto e descrito no desenvolvimento da metodologia torna-se possível elaborar um código no *Matlab* capaz de encontrar as soluções das equações e obter resultados numéricos de deslocamento, velocidade e aceleração de cada um dos graus de liberdade.

Para calcular tais resultados é utilizado como excitação do modelo o sinal senoidal descrito no item 4.1.5.3, composto de dois sinais senoidais de mesma amplitude e frequência, sendo diferenciados por um atraso de fase e aplicados durante 60 segundos.

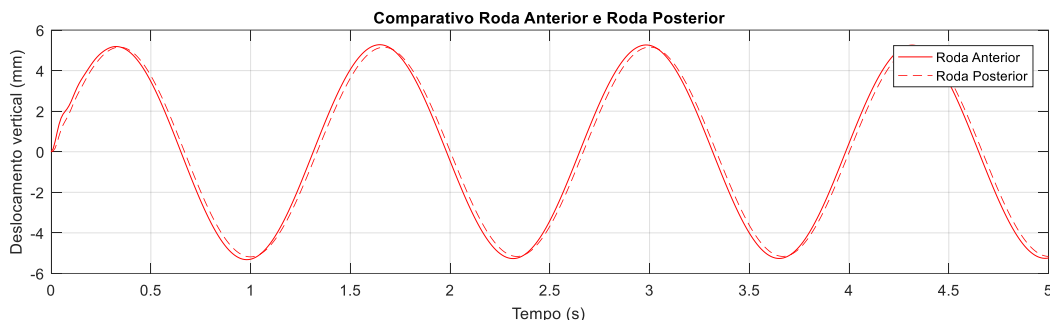
Tal atraso é considerado adequado a situação estudada por simular o intervalo de tempo que as rodas anterior e posterior são excitadas, como ocorreria para um obstáculo em um percurso real.

### 5.2.2.1 Análise dos deslocamentos para excitação senoidal

Os primeiros resultados analisados são os deslocamentos sofridos por cada um dos GDL quando excitados pelo sinal senoidal de amplitude igual a 5 milímetros. Os valores encontrados são comparáveis a uma pista real, sendo apenas uma forma de entender o comportamento do veículo diante de uma excitação qualquer, e da sua eficiência em ser um modelo representativo.

O deslocamento das rodas anterior e posterior nos primeiros 5 segundos de excitação são mostrados no Gráfico 5, e, como era esperado, são iguais a amplitude de excitação de 5 milímetros, que fora diretamente aplicado a elas; além disso fica claro o atraso de fase aplicado.

**Gráfico 5 – Comparativo entre os deslocamentos das rodas anterior e posterior**

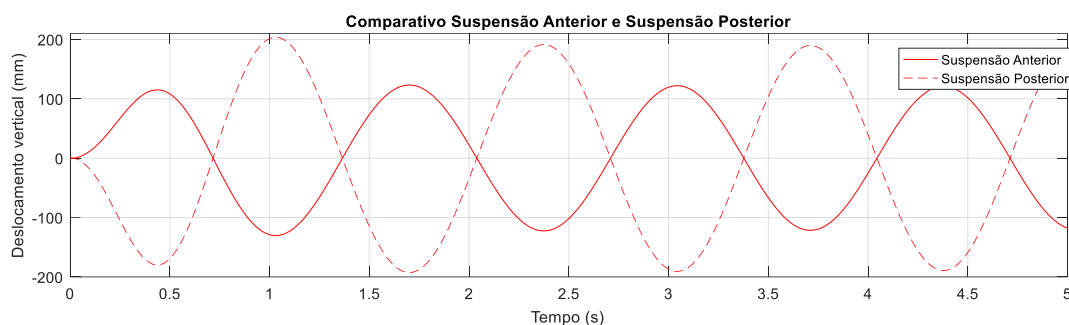


Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

Já os deslocamentos das suspensões anterior e posterior, nos primeiros 5 segundos de amostra de sinal, são mostrados no Gráfico 6.

Fica claro que, por possuírem características diferentes de rigidez e amortecimento, apresentam valores de deslocamento também diferentes, sendo próximos de 100mm para a suspensão anterior e 200mm para a posterior.

**Gráfico 6 – Comparativo entre os deslocamentos das suspensões anterior e posterior**



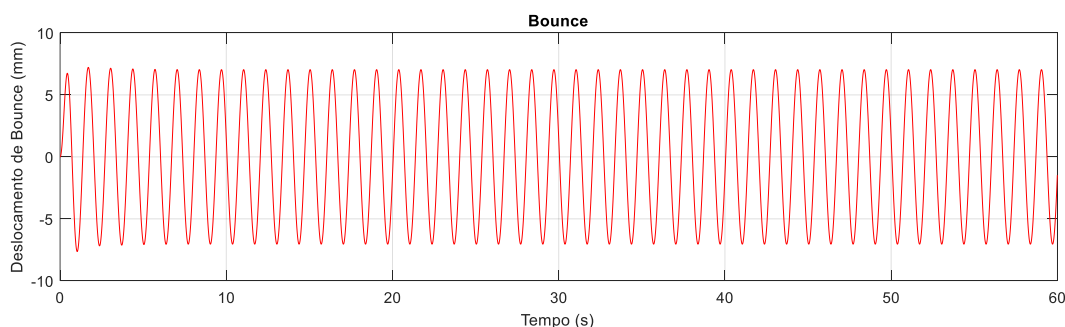
Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

Posteriormente é analisado o deslocamento vertical do veículo em relação ao seu centro de gravidade, denominado pela literatura por *Bounce*, e o deslocamento angular em torno desse mesmo ponto, considerando o sinal completo de 60 segundos.

Tais movimentações são de extrema importância no estudo da dinâmica de um veículo, tanto no que se refere ao nível de conforto oferecido aos usuários quanto a dirigibilidade e estabilidade.

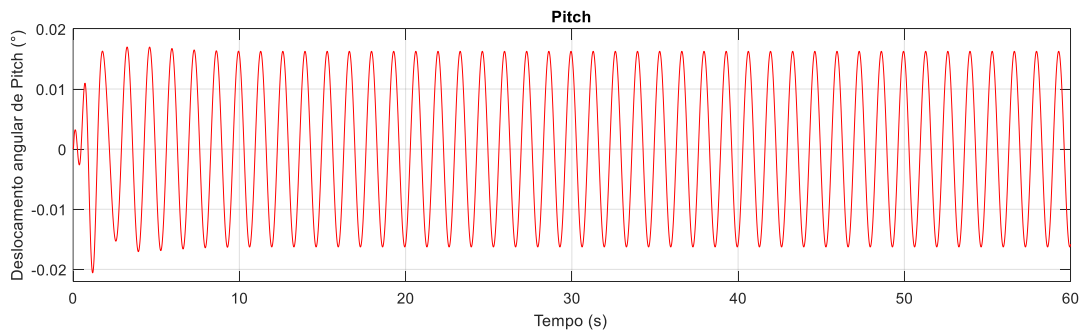
No Gráfico 7 é mostrada a movimentação de *Bounce*, onde se percebe um deslocamento próximo de 8mm, bastante inferior, como esperado, ao da suspensão do veículo, que tem o trabalho de filtrar as excitações.

**Gráfico 7 – Deslocamento vertical do centro de gravidade – *Bounce***



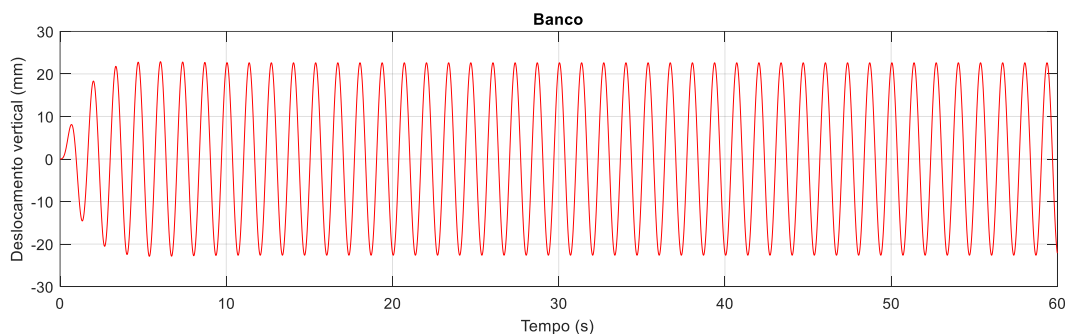
Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

O deslocamento angular de *Pitch* é mostrado no Gráfico 8.

**Gráfico 8 – Deslocamento angular do centro de gravidade – Pitch**

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

Por fim, o deslocamento vertical do banco é mostrado no Gráfico 9, com valor próximo a 25mm. Os deslocamentos verticais do corpo do motorista, nos três graus de liberdade, se mostram bastante semelhantes ao do banco do veículo, não havendo necessidade de serem mostrados de forma gráfica.

**Gráfico 9 – Deslocamento vertical do banco do motorista**

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

Tal semelhança faz com que fique clara a importância de melhorias não só na suspensão do veículo, mas também em seu banco, para que se consiga alcançar uma menor movimentação do corpo do motorista e conseqüentemente uma otimização em seu nível de conforto.

### **5.2.2.2 Análise das velocidades para excitação senoidal**

Assim como para o deslocamento dos graus de liberdade, são gerados gráficos que mostram o comportamento de cada um deles em relação a velocidade de movimento, e, conforme esperado, tais respostas seguem o mesmo padrão da análise feita para os deslocamentos, o que mostra, mais uma vez, coerência do modelo.



As respostas de velocidade, não são mostradas neste trabalho gráfico a gráfico, para evitar que se estenda muito, mas são agrupadas na Tabela 22, cujos valores de pico são obtidos pela ferramenta *Value Max - Data Statistics* presente no *Matlab*.

Nota-se novamente a semelhança entre o comportamento do banco do veículo e do corpo do motorista, representado pelos três primeiros graus de liberdade.

**Tabela 22 – Valores de velocidade aproximados de cada GDL para excitação senoidal**

<b>Velocidades para excitação senoidal</b>		
<b>GDL</b>	<b>Valor aproximado</b>	<b>Unidade</b>
Cabeça	109,90	mm/s
Tronco Superior	109,80	mm/s
Tronco Inferior	108,10	mm/s
Banco	107,50	mm/s
Bounce	38,54	mm/s
Pitch	0,07	°/s
Roda Anterior	25,29	mm/s
Roda Posterior	24,83	mm/s

**Fonte: Elaborado pelo autor**

### **5.2.3 Análise das respostas de aceleração**

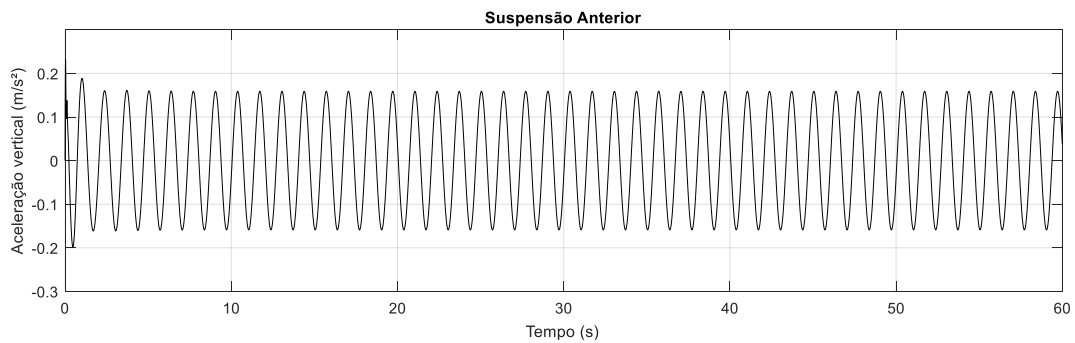
O conforto vibracional de um veículo é analisado na literatura, tanto em livros teóricos quanto em normas, quase que em todos os momentos, pelos valores de aceleração em  $m/s^2$  encontrados quando este é submetido às excitações da pista.

Sendo assim, é mais viável a utilização desse tipo de resposta para essa análise do que simplesmente analisar os deslocamentos de cada uma das partes do modelo implementado, ou ainda seus valores de velocidade.

No modelo implementado neste trabalho consegue-se obter tais sinais de aceleração, para cada um dos graus de liberdade, como resposta do equacionamento proposto, sendo possível realizar a avaliação de conforto, e posteriormente, correlacionar com análise objetiva também focadas em valores de resposta de aceleração.

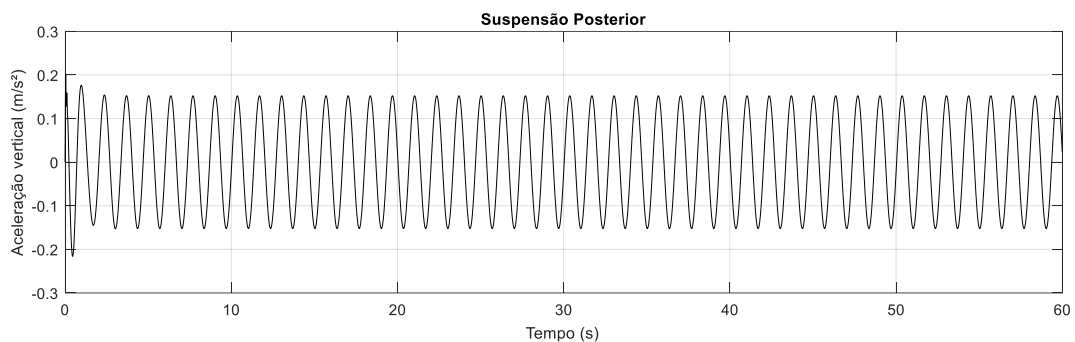
Para os parâmetros iniciais de dimensão, massa, rigidez e amortecimento utilizados, considerando a mesma excitação senoidal do item 5.2.2, são apresentados os valores de aceleração encontrados.

Inicialmente, as acelerações encontradas nas suspensões anterior do veículo, são vistas no Gráfico 10, ficando próximas de  $0,2m/s^2$ .

**Gráfico 10 – Aceleração vertical da suspensão anterior**

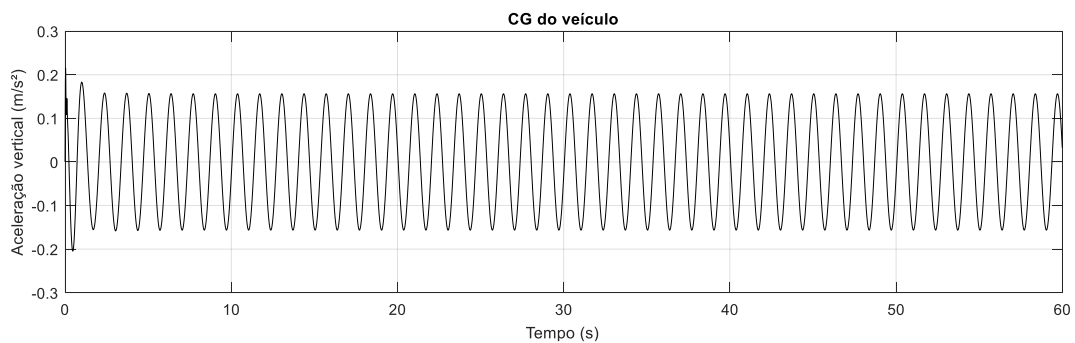
Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

A suspensão posterior apresenta comportamento semelhante, como mostrado no Gráfico 11, também com acelerações próximas de  $0,2\text{m/s}^2$ .

**Gráfico 11 – Aceleração vertical da suspensão posterior**

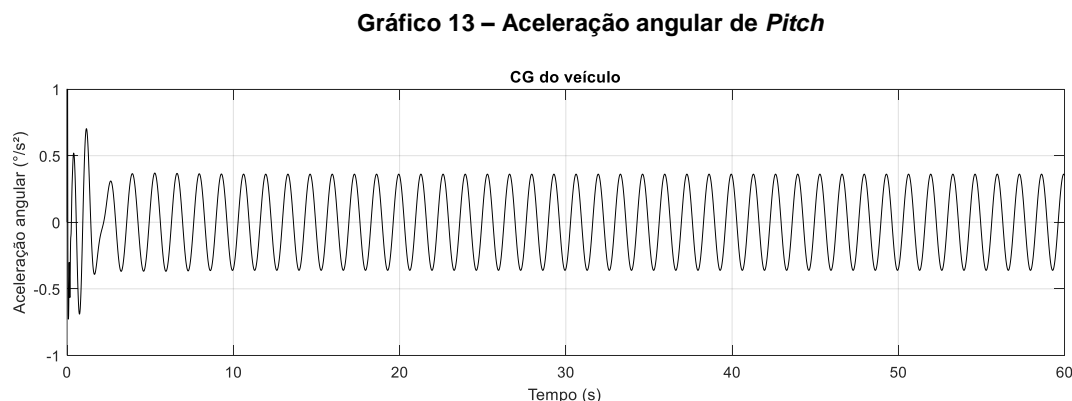
Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

Os valores de aceleração do movimento de *Bounce* do veículo são vistos no Gráfico 12, onde nota-se valores um pouco inferiores ao do conjunto suspensão, na faixa de  $0,15\text{m/s}^2$ .

**Gráfico 12 – Aceleração vertical de *Bounce***

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

Para a movimentação angular no centro de gravidade do veículo, dada em graus por centímetro ao quadrado, denominada *Pitch*, são encontradas as respostas de aceleração do Gráfico 13.

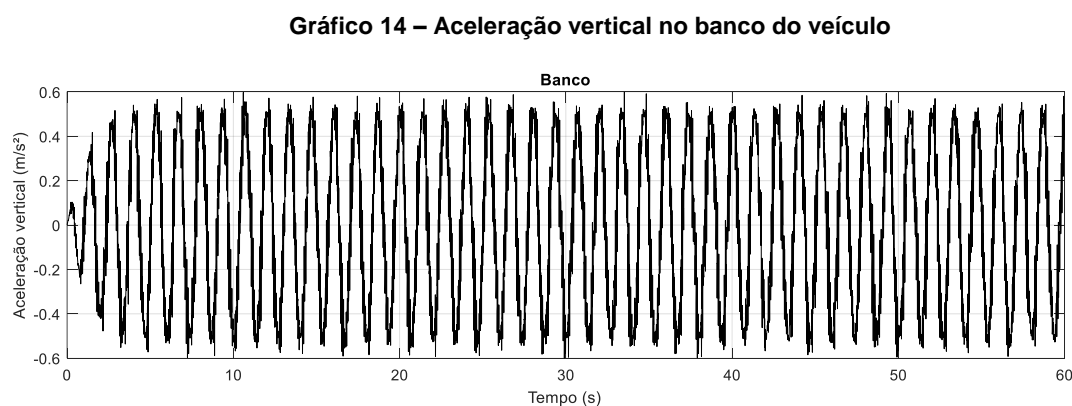


Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

A análise de conforto em si, tem sua comparação focada nas acelerações encontradas na parte biodinâmica do modelo, já que são as acelerações diretamente sentidas pelo usuário.

A norma de referência mais utilizada para conforto, ISO 2631-1 (1997), se baseia nessa premissa, já que é elaborada para análise de conforto de uma forma geral, em variados meios de transporte, máquinas agrícolas, ferramentas de trabalho, entre outras aplicações.

No caso do estudo de comportamento vibracional de conforto de veículos de passeio uma boa referência para comparação com as normas mencionadas é a utilização dos valores de aceleração encontrados no banco do veículo, que, para este modelo, são mostrados no Gráfico 14.



Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

São mostrados apenas os valores de aceleração do banco do veículo por terem sido encontrados comportamentos bem semelhantes a ele nos três graus de liberdade referentes as partes do corpo do motorista, com acelerações próximas de 0,6m/s<sup>2</sup>.

As normas consideram para comparação o valor eficaz ou *RMS* (Raiz do valor Quadrático Médio) da aceleração, que, para este modelo, é calculado através da relação abaixo.

$$a_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_i}^{t_f} a(t)^2 dt} \quad (112)$$

Para o banco do veículo é encontrado, através do software *Matlab*®, o valor eficaz de aceleração vertical de aproximadamente 0,36m/s<sup>2</sup>, conforme mostrado na Figura 78.

**Figura 78 – Aceleração vertical eficaz (RMS) do banco**

```

Somatório de a(t)^2 (m/s^2):
soma =

    778.45

Divisão pelo número de elementos T (m/s^2):
divisao =

    0.13

Aceleração RMS do banco (m/s^2):
rmsbanco =

    0.36

```

**Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®**

Conforme dito os valores de aceleração para os três graus de liberdade que representam o corpo do motorista se apresentaram bem semelhantes ao do banco, isso também foi verificado quanto ao valor eficaz de aceleração.

Tomando como exemplo, é calculado o valor de aceleração vertical eficaz (RMS) do tronco inferior do motorista, tendo sido encontrado valor de aproximadamente 0,35m/s<sup>2</sup>, conforme pode ser visto na Figura 79.

**Figura 79 – Aceleração vertical eficaz (RMS) do tronco inferior**

```

Somatório de  $a(t)^2$  ( $m/s^2$ ):
soma1 =

743.75

Divisão pelo número de elementos T ( $m/s^2$ ):
divisaol =

0.12

Aceleração RMS do tronco inferior ( $m/s^2$ ):
rmstroncoinferior =

0.35

```

**Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®**

O valor encontrado para o tronco inferior corresponde a 97% da aceleração RMS calculada do banco, o que confirma a semelhança de resposta dos quatro graus de liberdade do modelo biodinâmico e a não necessidade de discussão em separado destes.

Os valores de aceleração vertical eficaz encontrados pelo modelo são comparados com os estabelecidos pelas normas, não sendo consideradas diferentes bandas de frequência visto a complexidade dos cálculos.

Devido a essa desconsideração, são tomados como referência a relação de tempo de exposição e amplitude de aceleração tolerados pela norma ISO 2631-1 para frequências entre 1-30Hz, faixa de frequência semelhante à encontrada para tronco superior, inferior e cabeça; tais valores de tolerância podem ser encontrados na norma citada anteriormente.

Para valores de aceleração próximos de  $0,36m/s^2$ , como foram encontrados para banco e tronco inferior, a norma estabelece que o motorista possa ficar aproximadamente 8 horas utilizando o veículo sem ter seu conforto seriamente comprometido, o que torna o veículo aceitavelmente confortável para o sinal de excitação senoidal de amplitude 5mm.

### **5.3 Correlação do modelo proposto com medição experimental**

A avaliação feita anteriormente, portanto, é focada em estabelecer a coerência das frequências naturais com o que é definido pela bibliografia e confirmar a possibilidade de

estudos das amplitudes de deslocamento, velocidade e aceleração de cada um dos graus de liberdade através do modelo computacional elaborado.

Porém, para que se possa confirmar a correlação do modelo com a realidade se mostrou viável a utilização de um sinal de excitação capaz de simular um determinado percurso real, o que torna possível comparar os resultados com os encontrados em teste experimental realizado no mesmo trecho.

### **5.3.1 Correlação das amplitudes de aceleração e das frequências de pico**

Com o intuito de obter uma correlação entre as respostas obtidas pelo modelo computacional, considerando o sinal de excitação de um percurso real, e as respostas presentes no veículo, obtidas no teste experimental, faz-se uma comparação quantitativa e qualitativa entre esses resultados, com foco nos valores de amplitude de aceleração e as frequências críticas em que ocorrem os picos.

Inicialmente a comparação é feita utilizando os sinais temporais obtidos em ambos os métodos, sem levar em consideração o estudo de frequências, tomando como base apenas os valores de aceleração vertical.

Nessa análise são considerados os valores em escala de aceleração da gravidade ou 'g', por ser a unidade mais usual no ramo de medição experimental de vibração e conforto em automóveis; tal escala é considerada de acordo com a relação abaixo, para Belo Horizonte, Minas Gerais.

$$1m/s^2 = 0,10197 g \quad (113)$$

Os graus de liberdade do modelo computacional que são analisados nessa correlação correspondem aos pontos instrumentados no veículo, sendo importante frisar que não são exatamente semelhantes, servindo como comparação aproximada do comportamento vibracional.

A correlação, portanto, não leva em consideração a movimentação pura dos graus de liberdade do corpo humano, visto que não há esse tipo de medição usualmente, e que o foco dos resultados está no comportamento do veículo.

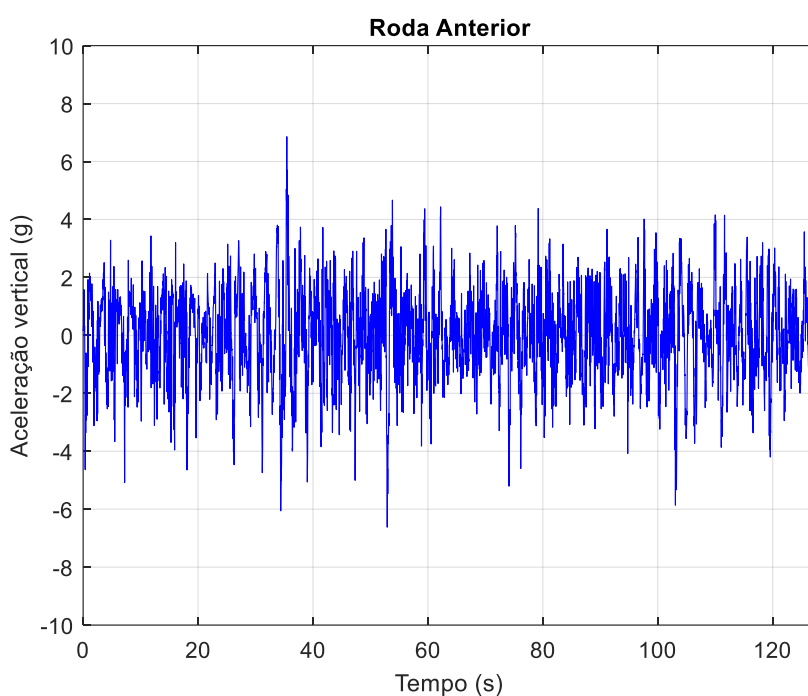
O modelo biodinâmico utilizado é de grande importância para aumentar a fidelidade do modelo, principalmente pela presença da massa total do motorista, condizente com o do teste experimental.

Em cada uma das correlações, além da comparação gráfica, é feita também uma comparação dos valores de aceleração RMS para a faixa completa dos 128 segundos de percurso, assim como feito na avaliação de resposta para o sinal senoidal.

A utilização dessa técnica visa obter uma comparação mais fiel dos resultados encontrados, visto que a média quadrática se mostra como uma boa forma de avaliação do sinal resposta como um todo.

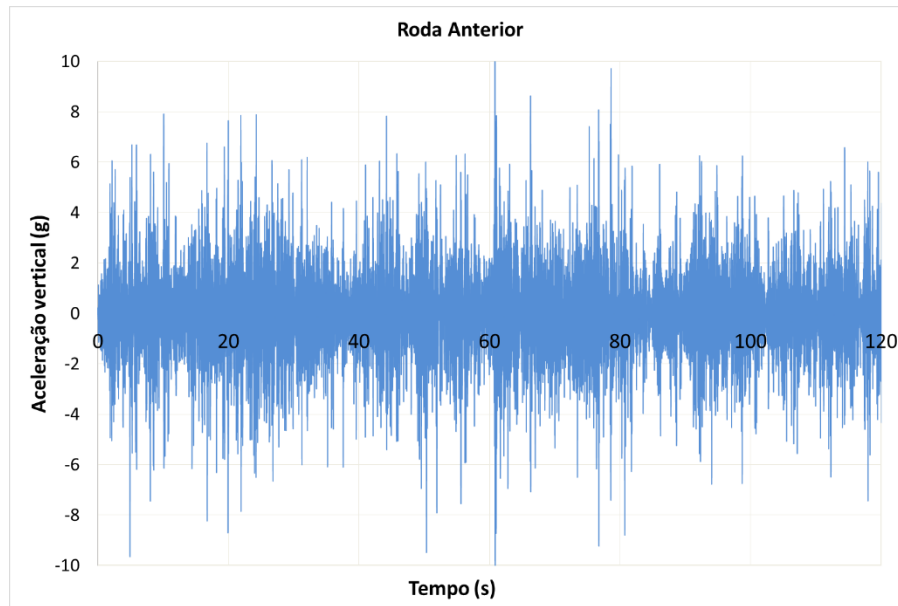
A primeira correlação compara os resultados encontrados para roda anterior do modelo, no Gráfico 15, com os encontrados no teste experimental, para esse mesmo grau de liberdade, no Gráfico 16.

**Gráfico 15 – Aceleração vertical na roda anterior – Modelo computacional**



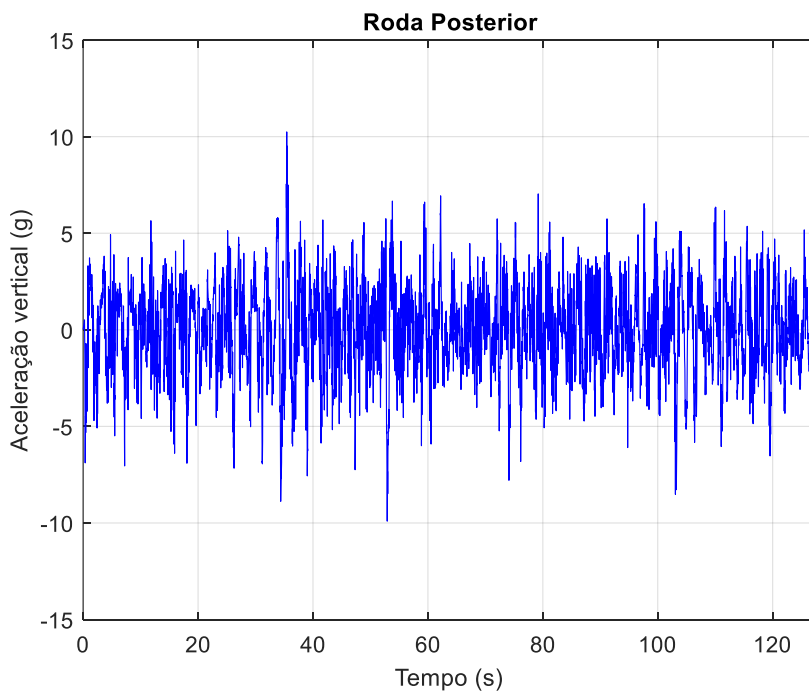
**Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®**

Para a roda anterior são encontrados valores de aceleração RMS de 1,49g pelo modelo computacional e 1,67g pelo teste experimental.

**Gráfico 16 – Aceleração vertical na roda anterior – Teste experimental**

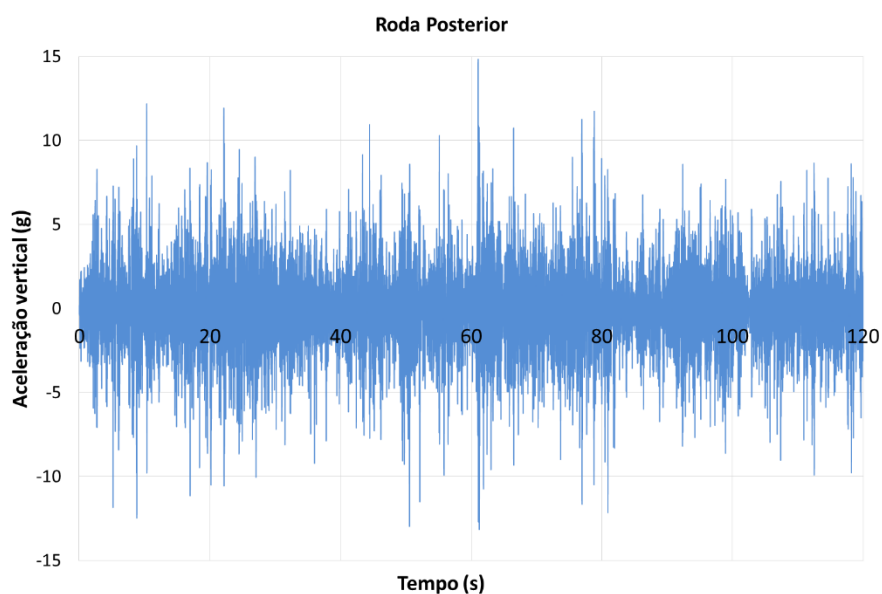
Fonte: Elaborado pelo autor

Os valores de pico do teste experimental se mostram um pouco maiores, atingindo até 10,0g, porém, na média dos resultados, o modelo se mostra bastante coerente; posteriormente, no Gráfico 17 e no Gráfico 18, são mostrados os resultados encontrados para a roda posterior.

**Gráfico 17 – Aceleração vertical na roda posterior – Modelo computacional**

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*<sup>®</sup>

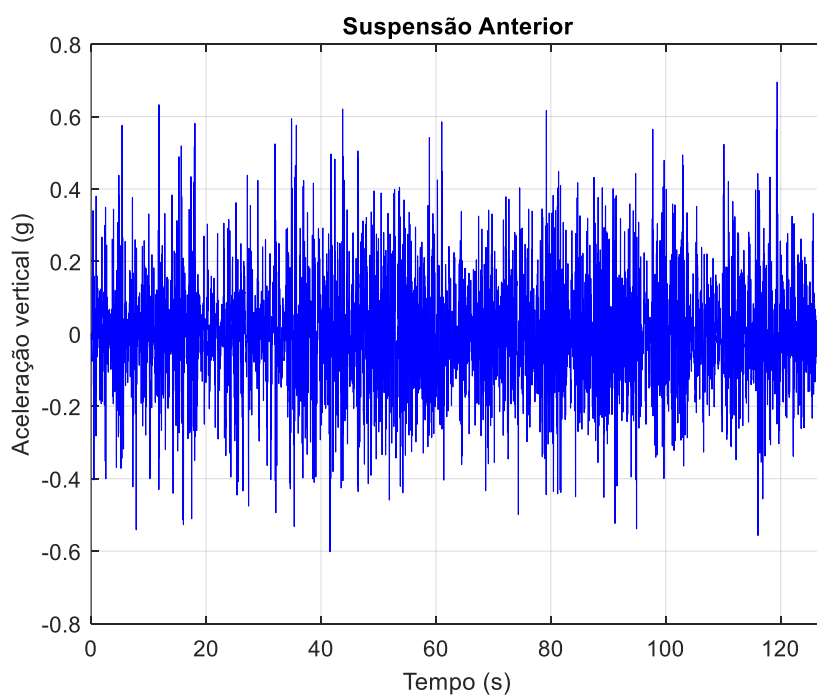


**Gráfico 18 – Aceleração vertical na roda posterior – Teste experimental**

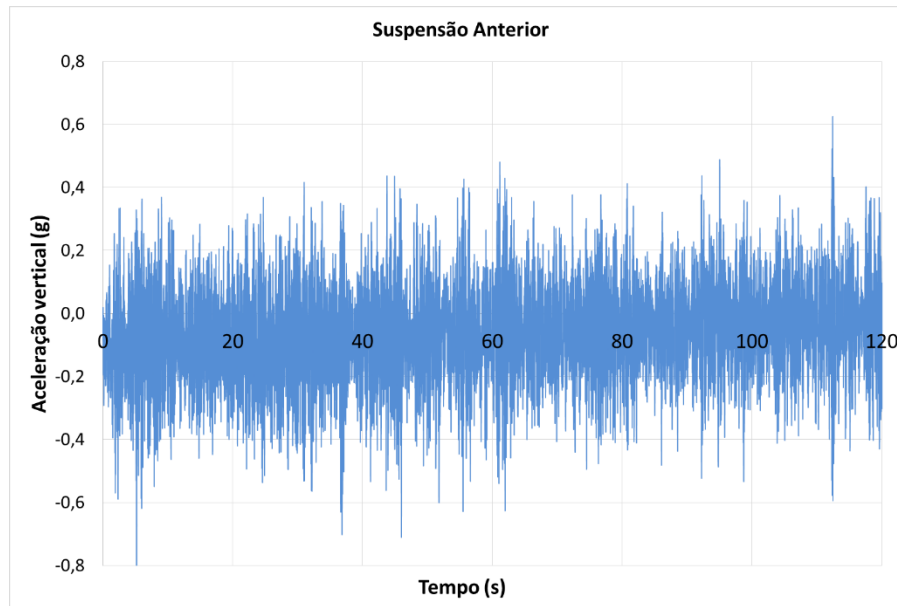
Fonte: Elaborado pelo autor

Para a roda anterior são encontrados valores de aceleração RMS iguais a 2,23g pelo modelo computacional e 2,37g pelo teste experimental, há diferença na amplitude dos maiores picos, sem influência significativa na média dos resultados.

O comportamento da suspensão anterior, é visto no Gráfico 19 e no Gráfico 20.

**Gráfico 19 – Aceleração vertical na suspensão anterior – Modelo computacional**

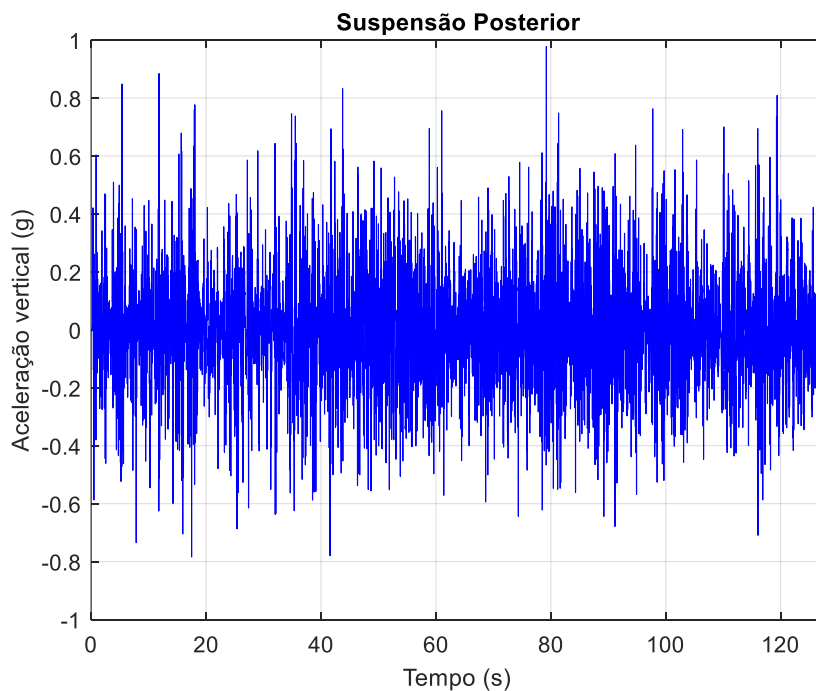
Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

**Gráfico 20 – Aceleração vertical na suspensão anterior – Teste experimental**

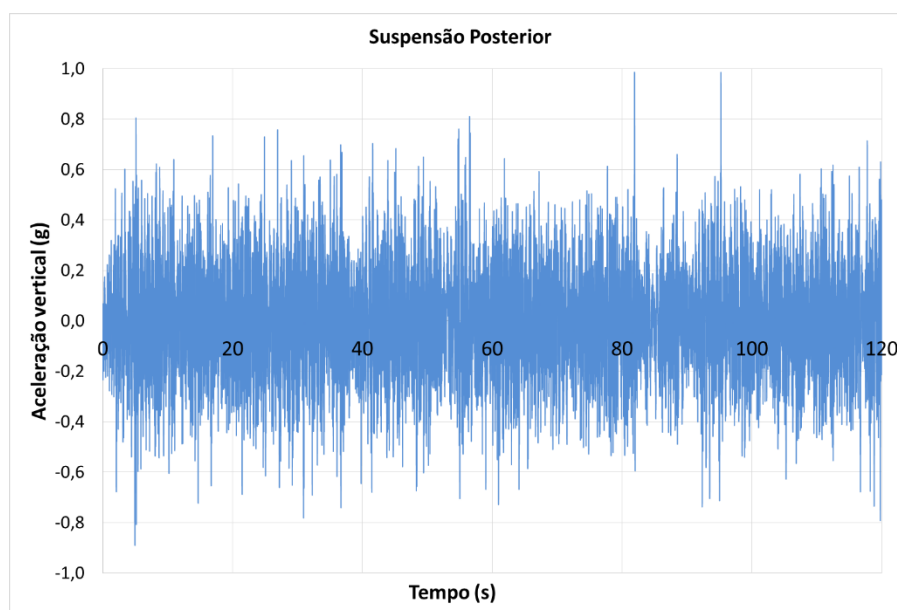
Fonte: Elaborado pelo autor

Os valores RMS encontrados para a suspensão anterior são iguais a 0,14g pelo modelo computacional e 0,16g pelo teste experimental. Ao contrário do visto no comportamento das rodas, não há grande diferença na amplitude dos maiores picos.

Para a suspensão posterior, são mostrados o Gráfico 21 e o Gráfico 22.

**Gráfico 21 – Aceleração vertical na suspensão posterior – Modelo computacional**

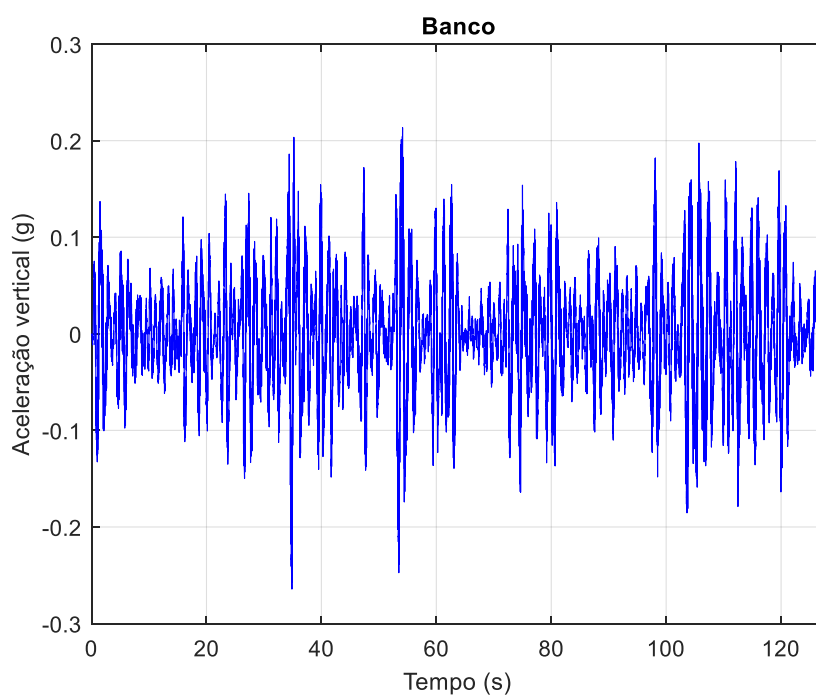
Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*<sup>®</sup>

**Gráfico 22 – Aceleração vertical na suspensão anterior – Teste experimental**

Fonte: Elaborado pelo autor

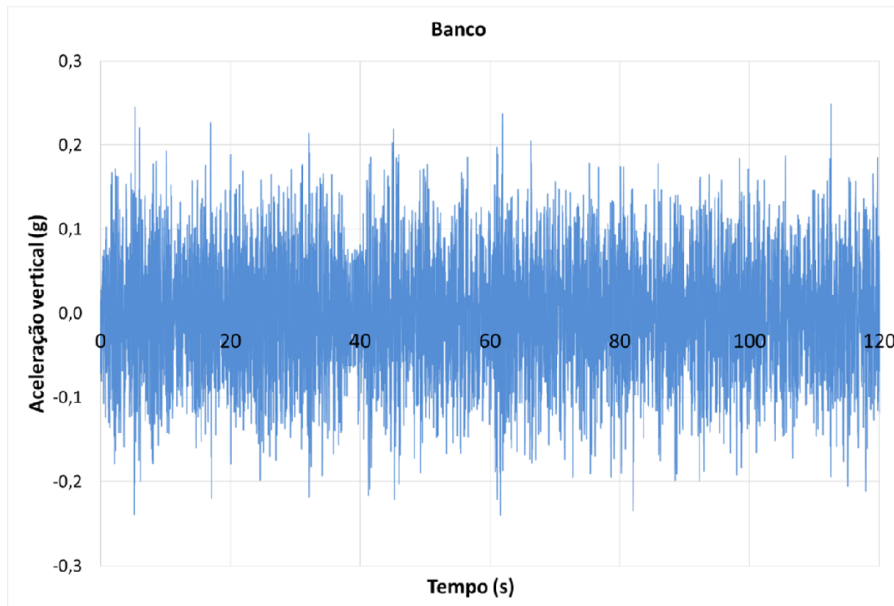
Para a suspensão posterior são obtidos valores de aceleração RMS iguais a 0,18g pelo modelo e 0,20g pelo teste experimental, tendo uma correlação próxima da encontrada para a suspensão anterior.

Por fim, para o banco, são mostrados os resultados no Gráfico 23 e no Gráfico 24.

**Gráfico 23 – Aceleração vertical no banco do motorista – Modelo computacional**

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*<sup>®</sup>

Gráfico 24 – Aceleração vertical no banco do motorista – Teste experimental



Fonte: Elaborado pelo autor

Graficamente consegue-se perceber a semelhança entre os resultados obtidos para o banco do motorista, cuja aceleração RMS é igual a 0,057g pelo modelo e 0,064g pelo teste experimental, com picos máximos de amplitude praticamente iguais.

Abaixo, na Tabela 23, é mostrado um resumo com os valores encontrados para aceleração vertical RMS no modelo computacional e no teste experimental, assim como o fator percentual de correlação entre eles, com erro variando de 6 a 14%.

Tabela 23 – Resumo dos resultados de correlação entre modelo e teste experimental

Correlação: Sinal temporal - Aceleração vertical RMS (g)					
Ponto de Referência	Modelo	Teste Experimental	Diferença	Fator de correlação	Erro
Roda Anterior	1,489	1,674	-0,185	89%	11%
Roda Posterior	2,228	2,377	-0,148	94%	6%
Suspensão Anterior	0,139	0,155	-0,016	89%	11%
Suspensão Posterior	0,182	0,199	-0,017	91%	9%
Banco do motorista	0,056	0,065	-0,009	86%	14%
Média	-	-	-	90%	10%

Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

Analisando os fatores de correlação encontrados, com média de 10% de erro, nota-se que o modelo computacional é capaz de obter resultados de aceleração vertical RMS bem próximos dos testes experimentais, sendo, portanto, um modelo válido para análises de vibração de um veículo, principalmente no que se refere a utilização como um filtro de propostas iniciais, a fim de selecionar algumas para um teste experimental posterior.

Com tais valores de aceleração vertical RMS se torna possível comparar os níveis encontrados com os estabelecidos nas normas de vibração já citadas, a fim de entender o índice de desconforto causado a um motorista nesse veículo.

Os valores encontrados pelo modelo e pelo teste experimental para o banco do veículo giram em torno de 0,06g, que corresponde a 0,6m/s<sup>2</sup>. Considerando a faixa de frequência de 1-30Hz e considerando os dados retirados da Norma ISO 2631-1 (1997), nota-se que o motorista deverá se expor no máximo até 2,5h sem intervalos à vibração causada por esse veículo.

Porém, apenas a correlação dos resultados de sinal temporal não são suficientes para concluir que o modelo é confiável para esse tipo de análise, visto que há uma grande importância em entender também os modos de vibrar do veículo, principalmente dos conjuntos de massa não-suspensa, chamados aqui de suspensão, e do próprio chassi, com sua movimentação vertical de *bounce*.

Para tal análise é necessário um tratamento dos sinais temporais, transformando-os em dados de espectro de frequência, capazes de demonstrar em qual faixa de frequência acontece o maior número de picos, e, portanto, qual a frequência crítica do sistema.

O tratamento de sinais feita com os resultados do modelo computacional seguem as mesmas características do feito com os sinais do teste experimental, sendo tratado com filtros, eliminação de *offset* e transformada de Fourier.

O tratamento é finalizado com a função *pwelch* do software *Matlab*®, capaz de decompor um sinal temporal em frequências, transformando-o em um sinal de densidade espectral de potência (PSD).

Os parâmetros utilizados para esse tratamento podem ser vistos na Tabela 24.

**Tabela 24 – Detalhamento do tratamento dos sinais**

<b>Tratamento de Sinais</b>	
Eliminação de Offset	-
Tipo de filtro	Butterworth
Categoria de filtro	Passa-Baixa
Frequência de corte	120Hz
Ordem	8ª
Transformada	Fourier
Densidade espectral	PSD - Método Welch's

**Fonte: Elaborado pelo autor**

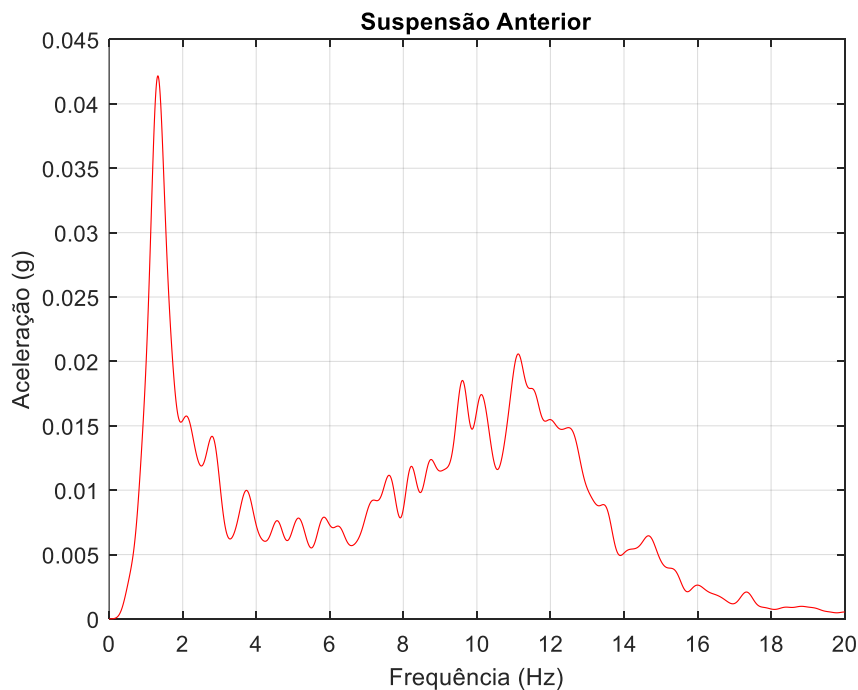
Como dito por Gillespie (1992), em um veículo de passeio há duas faixas de frequência crítica que são muito importantes: a de massa suspensa, geralmente situada entre 0,5 e 2,0Hz e a de massa não-suspensa, entre 10 e 15Hz; um modelo viável deve ser capaz de obter essas frequências com fidelidade a realidade.

Assim como para os dados de aceleração vertical em relação ao tempo, são comparados os resultados obtidos pelo modelo computacional em relação aos do teste experimental.

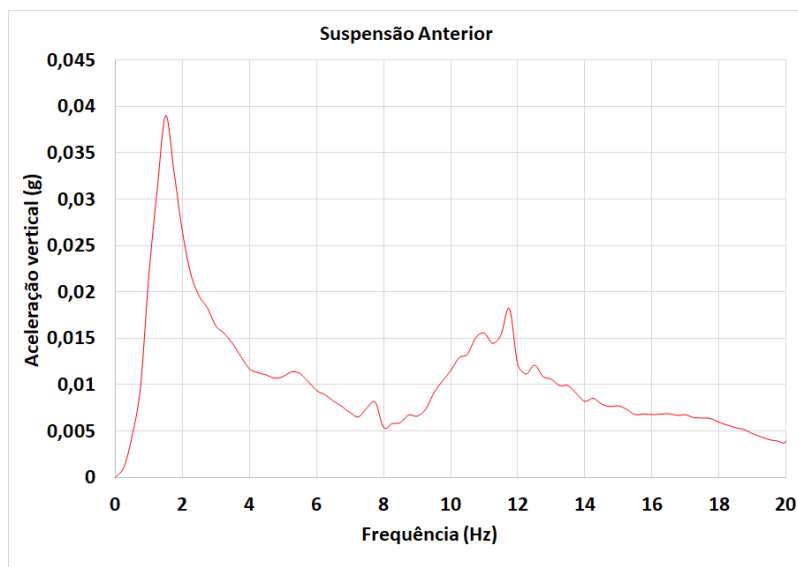
São estudados apenas os casos da suspensão anterior e suspensão posterior, que, por sua natureza, facilitam a visualização dos picos das duas faixas de frequência citadas anteriormente, e garantem a boa interpretação dos resultados do modelo em relação aos modos de vibrar.

Os resultados para a suspensão anterior são vistos no Gráfico 25 e no Gráfico 26.

**Gráfico 25 – FFT da aceleração vertical na suspensão anterior – Modelo**



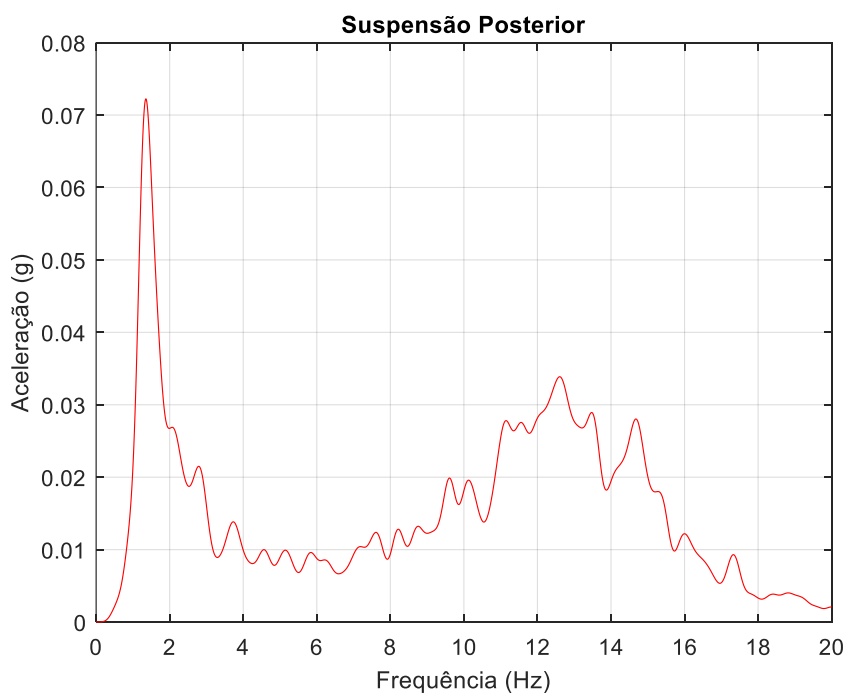
Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*®

**Gráfico 26 – FFT da aceleração vertical na suspensão anterior – Teste experimental**

Fonte: Elaborado pelo autor

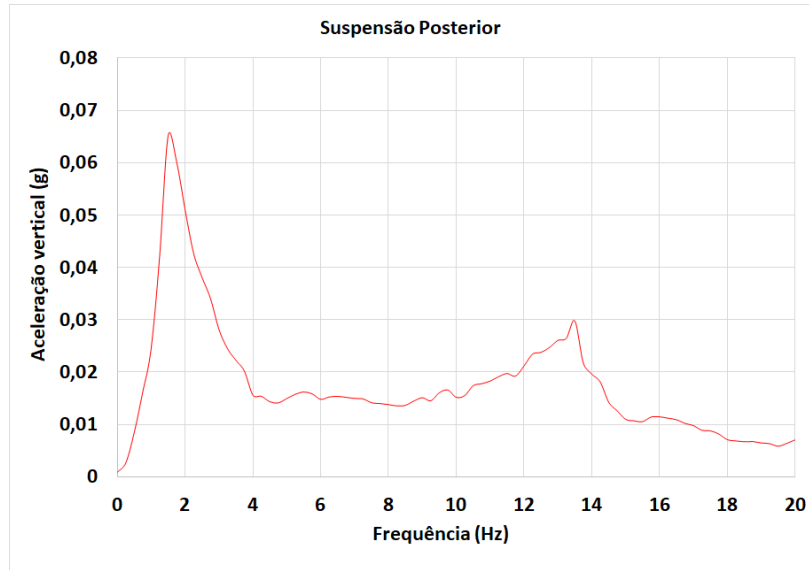
Nota-se que o modelo computacional consegue retratar de maneira muito significativa os dois picos de aceleração nas faixas de frequência esperadas, tendo uma semelhança em relação a esses picos com os sinais obtidos do teste experimental.

Para a suspensão posterior, pode ser visto no Gráfico 27 e no Gráfico 28.

**Gráfico 27 – FFT da aceleração vertical na suspensão posterior – Modelo**

Fonte: Elaborado pelo autor através do *Matlab*<sup>®</sup>

Gráfico 28 – FFT da aceleração vertical na suspensão posterior – Teste experimental



Fonte: Elaborado pelo autor

Para a suspensão posterior o modelo também apresenta comportamento bastante semelhante no que se refere aos dois picos de aceleração, notando o deslocamento do 2º pico para uma frequência um pouco mais alta, assim como nos testes experimentais.

Tal deslocamento acontece devido ao fato de que as suspensões anterior e posterior possuem rigidez e amortecimento diferentes, e, assim como citado em Gillespie (1992), a suspensão anterior de um carro de passeio possui frequência natural mais baixa do que a posterior, ambas estando entre a faixa de 10 a 15Hz.

Duas análises de correlação utilizando os sinais FFT das suspensões são importantes. A primeira delas é a comparação entre as frequências críticas dos dois picos encontradas para o modelo computacional em relação ao teste experimental, que pode ser vista na Tabela 25, com erro encontrado na faixa de 5 a 12%.

Tabela 25 – Correlação entre as frequências de pico encontradas

Correlação: Sinal FFT - Frequências de pico (Hz)							
Ponto de Referência	Descrição	Modelo	Teste Experimental	Diferença	Fator de correlação	Erro	
Suspensão Anterior	1º Pico	1,33	1,50	-0,18	88%	12%	
	2º Pico	11,12	11,75	-0,63	95%	5%	
Suspensão Posterior	1º Pico	1,35	1,50	-0,15	90%	10%	
	2º Pico	12,60	13,50	-0,90	93%	7%	

Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

Já na Tabela 26 são comparados os valores de aceleração vertical máxima presentes em cada um desses picos, tanto para o modelo quanto para o teste experimental, havendo erro na faixa de 8 a 14%.



Tabela 26 – Correlação entre as acelerações encontradas nas frequências de pico

Correlação: Sinal FFT - Aceleração vertical nas frequências de pico (g)						
Ponto de Referência	Descrição	Modelo	Teste Experimental	Diferença	Fator de correlação	Erro
Suspensão Anterior	1º Pico	0,042	0,039	0,003	108%	8%
	2º Pico	0,021	0,018	0,002	113%	13%
Suspensão Posterior	1º Pico	0,072	0,065	0,007	111%	11%
	2º Pico	0,034	0,030	0,004	114%	14%

Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

Tanto para a correlação entre as frequências de pico quanto para as acelerações verticais presentes nesses picos, há um bom nível de correlação entre os resultados encontrados pelo modelo computacional e pelo teste experimental.

Tal fato deixa claro, assim como dito na análise de comparação dos gráficos, que o modelo proposto retrata de forma significativamente correta a realidade, havendo um erro já esperado em modelos computacionais desse tipo, como mostrado por Becker (2006), que encontra erros de aproximadamente 9% para modelos biodinâmicos de 3 GDL's e Ferreira (2003), que encontra erros com média de 10% para um modelo *Full Car*.

Vários fatores interferem nesse tipo de correlação, fazendo com que o modelo não seja capaz de retratar exatamente a realidade, porém, para este caso, nota-se uma diferença geral aceitável, em torno de 5 a 14% em relação ao teste experimental.

A presença de um sinal de excitação no modelo apenas na direção vertical se apresenta como um desses fatores, visto que, na realidade, há também excitações nas outras duas direções, principalmente na direção longitudinal, quando há aceleração e frenagem, que criam componentes de força que influenciam a movimentação vertical.

Além disso, tal sinal de excitação tem amplitudes de deslocamento semelhantes à do percurso real, mas não exatamente iguais, gerando uma diferença na vibração sentida pelo veículo e no seu comportamento de resposta.

Um outro fator importante é a simplicidade do modelo, que representa a metade de um veículo, sendo um *Half-Car*, o que faz com que, possivelmente, tenha uma correlação de menor assertividade, em relação a um modelo *Full-Car*, porém, essa simplicidade traz como benefício a agilidade de processamento e de obtenção dos resultados.

Por fim, a simplificação dos sistemas de suspensão do modelo, considerando-os como massa-mola sem a presença de outros elementos, como buchas e batentes, que influenciam na rigidez e no amortecimento dos conjuntos como um todo, e, conseqüentemente, na quantidade de energia que é absorvida.

## 5.4 Análise da alteração de componentes da suspensão pelo modelo

Por fim, como último item do trabalho, utiliza-se o modelo computacional, agora já correlacionado, para analisar a influência da alteração dos parâmetros de dois componentes distintos no comportamento vibracional do veículo.

Os componentes escolhidos são as molas anteriores e posteriores, com alteração em seu valor de rigidez e os amortecedores, nos quais se altera o coeficiente de amortecimento. Tais alterações são feitas com base em reduções/aumentos percentuais, para que se tenha real entendimento do efeito causado pelas mesmas.

### 5.4.1 Influência da alteração de rigidez das molas

Os valores de rigidez das molas foram alterados de sete formas distintas, a fim de avaliar uma maior gama de situações que podem ocorrer durante o desenvolvimento de um veículo; primeiramente foram feitas alterações somente em um dos eixos e posteriormente nos dois eixos, simultaneamente, com cinco valores distintos.

A alteração é dada por um valor percentual, que leva em consideração a razão entre o novo valor do parâmetro e o valor inicial utilizado no modelo. Os resultados para a frequência natural amortecida de cada um dos GDL's pode ser visto na Tabela 27.

**Tabela 27 – Alteração da frequência natural amortecida com mudança de rigidez**

Modificações de rigidez das molas: Sinal temporal - Frequência Natural Amortecida (Hz)								
Rigidez da Mola Anterior	100%	100%	80%	90%	80%	110%	120%	150%
Rigidez da Mola Posterior	100%	80%	100%	90%	80%	110%	120%	150%
Cabeça	29,83	29,83	29,83	29,83	29,83	29,83	29,83	29,83
Tronco Superior	0,69	0,69	0,69	0,69	0,69	0,69	0,69	0,69
Tronco Inferior	4,67	4,67	4,67	4,67	4,67	4,67	4,67	4,67
Banco	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Bounce	1,26	1,15	1,25	1,19	1,12	1,32	1,37	1,53
Pitch	1,11	1,08	1,00	1,05	1,00	1,16	1,20	1,33
Roda Anterior	11,51	11,51	11,40	11,46	11,40	11,56	11,62	11,78
Roda Posterior	12,64	12,55	12,64	12,59	12,55	12,69	12,73	12,87

Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

Nota-se que, com a redução da rigidez das molas há também uma redução na frequência amortecida dos graus de liberdade relacionados a roda e ao CG do veículo; na avaliação em que é alterado somente um dos eixos, fica ainda mais clara tal relação.

Seguindo o mesmo raciocínio, ao aumentar a rigidez das molas o sistema de suspensão como um todo fica mais rígido, e a frequência do mesmo tende a aumentar, mostrando que o modelo obtém resultados bastante coerentes com a realidade.

Sabe-se que, ao aumentar a rigidez das molas de um veículo, a tendência é que o carro passe a vibrar com maior amplitude, causando maior desconforto e gerando uma melhoria na dirigibilidade; esse comportamento é retratado na Tabela 28, onde são mostrados os resultados de aceleração vertical RMS.

**Tabela 28 – Alteração da aceleração vertical RMS com mudança da rigidez das molas**

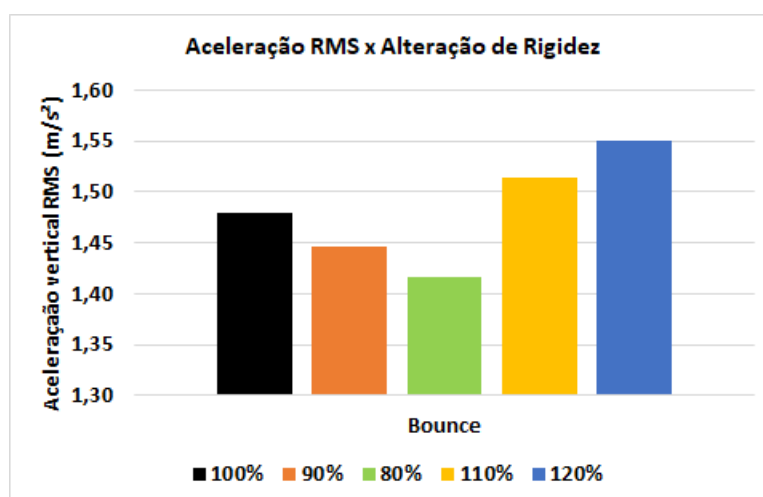
Modificações de rigidez das molas: Sinal temporal - Aceleração vertical RMS (g)								
Rigidez da Mola Anterior	100%	100%	80%	90%	80%	110%	120%	150%
Rigidez da Mola Posterior	100%	80%	100%	90%	80%	110%	120%	150%
Roda Anterior	1,489	1,489	1,490	1,490	1,490	1,489	1,489	1,488
Roda Posterior	2,228	2,229	2,228	2,229	2,229	2,228	2,227	2,226
Bounce	0,151	0,148	0,147	0,148	0,144	0,154	0,158	0,170
Suspensão Anterior	0,139	0,139	0,133	0,136	0,133	0,142	0,146	0,157
Suspensão Posterior	0,182	0,175	0,182	0,178	0,175	0,186	0,190	0,205
Banco do motorista	0,057	0,056	0,055	0,055	0,055	0,058	0,059	0,062

Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

A aceleração das rodas praticamente não é alterada, já para a suspensão, *bounce* e o banco do motorista, há alterações significativas na amplitude, que passa a ser maior com o uso de molas de maior rigidez, aumentando o desconforto; quando se reduz apenas a rigidez da suspensão posterior, em 20%, não há alteração no conforto.

Um resumo gráfico do resultado para *bounce* é visto no Gráfico 29, com foco nas alterações feitas igualmente nos dois eixos, com máximo de 20% de redução ou aumento; os dados são mostrados em  $m/s^2$  para facilitar a análise de alteração do conforto.

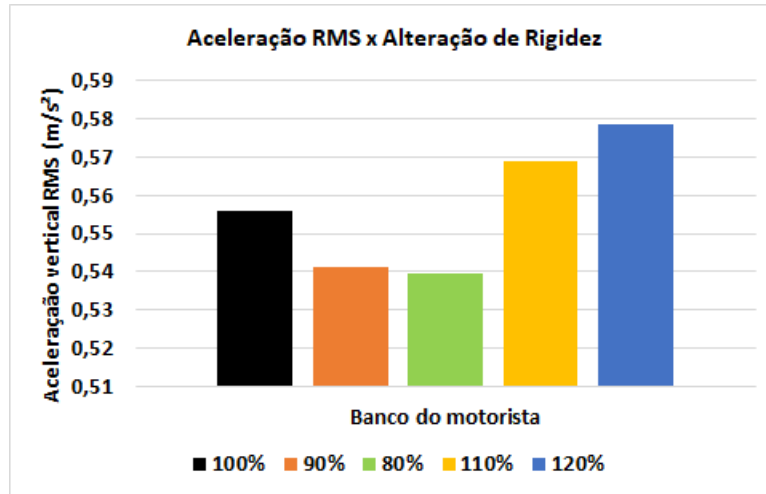
**Gráfico 29 – Aceleração vertical RMS no *bounce* com mudança da rigidez das molas**



Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

No Gráfico 30 são mostrados os resultados para o banco do motorista, onde efetivamente são medidos os níveis para avaliação de conforto.

Gráfico 30 – Aceleração vertical RMS no banco com mudança da rigidez das molas



Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

Para a análise de conforto é melhor que se use os sinais FFT, como feito no item 5.3.1. Na Tabela 29 e na Tabela 30 são comparados os resultados desses sinais, com as frequências de pico e a aceleração de cada uma dessas frequências, respectivamente.

Tabela 29 – Alteração da frequência de pico com mudança da rigidez das molas

		Modificações de rigidez das molas: Sinal FFT - Frequências de pico (Hz)								
Rigidez da Mola Anterior	Descrição	100%	100%	80%	90%	80%	110%	120%	150%	
Rigidez da Mola Posterior		100%	80%	100%	90%	80%	110%	120%	150%	
Suspensão Anterior	1º Pico	1,33	1,32	1,33	1,32	1,32	1,33	1,34	1,38	
	2º Pico	11,12	11,12	11,12	11,12	11,12	11,13	11,13	11,13	
Suspensão Posterior	1º Pico	1,35	1,34	1,35	1,34	1,33	1,38	1,41	1,58	
	2º Pico	12,60	12,60	12,60	12,60	12,60	12,61	12,61	12,61	

Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

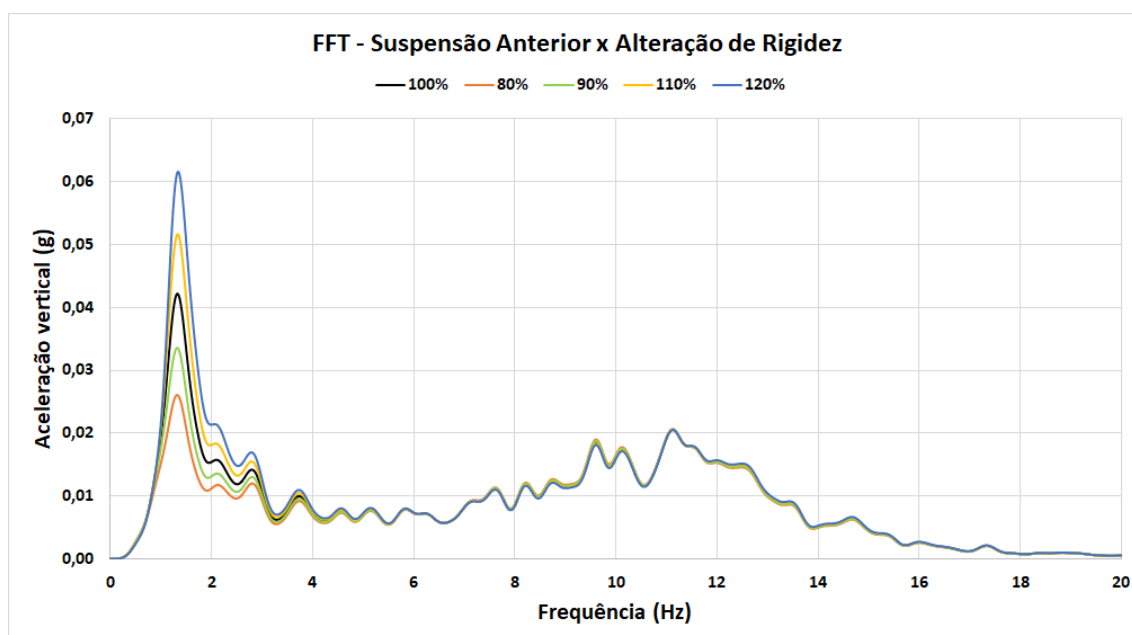
Tabela 30 – Alteração da aceleração nos picos com mudança da rigidez das molas

		Modificações de rigidez das molas: Aceleração vertical nas frequências de pico (g)								
Rigidez da Mola Anterior	Descrição	100%	100%	80%	90%	80%	110%	120%	150%	
Rigidez da Mola Posterior		100%	80%	100%	90%	80%	110%	120%	150%	
Suspensão Anterior	1º Pico	0,042	0,044	0,025	0,034	0,026	0,052	0,062	0,091	
	2º Pico	0,021	0,021	0,021	0,021	0,021	0,021	0,021	0,021	
Suspensão Posterior	1º Pico	0,072	0,047	0,072	0,059	0,046	0,084	0,096	0,138	
	2º Pico	0,034	0,035	0,034	0,034	0,034	0,034	0,033	0,033	

Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

As frequências do 1º pico se alteram de forma diretamente proporcional à alteração da rigidez, como esperado, e as frequências do 2º pico praticamente não sofrem alteração; o mesmo ocorre para a aceleração em cada um desses picos, que só sofrem mudanças nas frequências de 1º pico. Tal comportamento é visto no Gráfico 31.

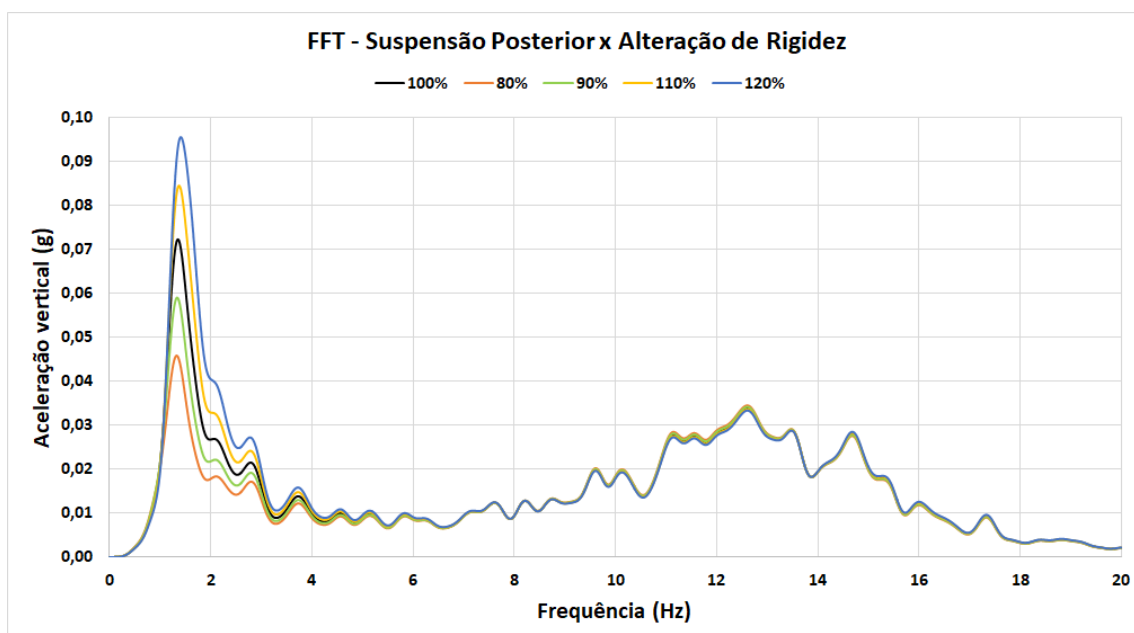
Gráfico 31 – Sinal FFT da suspensão anterior com mudança da rigidez das molas



Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

Os resultados para a suspensão posterior são mostrados no Gráfico 32.

Gráfico 32 – Sinal FFT da suspensão posterior com mudança da rigidez das molas



Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

Fica claro que o aumento na rigidez das molas de um veículo influencia negativamente em seu conforto, já que altera significativamente as acelerações de pico,

principalmente na frequência de movimentação da carroceria, muito sentida pelos ocupantes do veículo.

As acelerações verticais do banco do motorista obtidas pelo modelo, que indicam a diminuição de conforto, são alteradas com um percentual menor, já que o modelo é bastante simples e desconsidera uma série de fatores, porém, a direção de aumento e redução desses valores, indica que o modelo é coerente com a realidade.

#### 5.4.2 Influência da alteração do coeficiente de amortecimento

Para completar a análise, são comparadas alterações dos valores de coeficiente de amortecimento das suspensões anterior e posterior, utilizando o mesmo raciocínio da comparação feita no item acima, tratando-os como um valor de razão percentual dos valores de coeficiente de amortecimento inicialmente utilizados no modelo.

O objetivo desta última análise é comparar a influência no conforto do veículo causada pela alteração do amortecimento com a causada pela alteração da rigidez; além de confirmar a fidelidade do modelo com a realidade e a viabilidade de sua utilização em análises de alteração de componentes, eliminando uma parte dos testes em pista.

Na Tabela 31 são mostradas as novas frequências naturais amortecidas do modelo, para cada uma das escolhas de parâmetro.

**Tabela 31 – Alteração da frequência natural amortecida com mud. de amortecimento**

Modificações do coeficiente de amortecimento: Sinal temporal - Frequência Natural Amortecida (Hz)								
Coef. Amort. Anterior	100%	100%	80%	90%	80%	110%	120%	150%
Coef. Amort. Posterior	100%	80%	100%	90%	80%	110%	120%	150%
Cabeça	29,83	29,83	29,83	29,83	29,83	29,83	29,83	29,83
Tronco Superior	0,69	0,69	0,69	0,69	0,69	0,69	0,69	0,69
Tronco Inferior	4,67	4,67	4,67	4,67	4,67	4,67	4,67	4,67
Banco	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Bounce	1,26	<b>1,27</b>	1,26	1,26	<b>1,27</b>	<b>1,25</b>	<b>1,24</b>	<b>1,20</b>
Pitch	1,11	1,11	<b>1,12</b>	1,11	<b>1,12</b>	<b>1,10</b>	<b>1,09</b>	<b>1,06</b>
Roda Anterior	11,51	11,51	<b>11,67</b>	<b>11,59</b>	<b>11,67</b>	<b>11,42</b>	<b>11,31</b>	<b>10,94</b>
Roda Posterior	12,64	<b>12,78</b>	12,64	<b>12,71</b>	<b>12,78</b>	<b>12,56</b>	<b>12,46</b>	<b>12,13</b>

Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

Nota-se, como esperado, um comportamento inverso do que ocorre com a alteração de rigidez, visto que, quando se reduz o amortecimento das suspensões, o carro passa a apresentar maiores frequências naturais em seus GDL's.

Com o aumento do amortecimento, o carro passa a ter frequências menores, já que o maior amortecimento da suspensão aumenta o período de oscilação do sistema, que faz com que os valores de frequência sejam reduzidos. Tal efeito também causa alterações nos valores de aceleração vertical RMS do veículo, como visto na Tabela 32.

**Tabela 32 – Alteração da aceleração vertical RMS com mudança de amortecimento**

Modificações do coeficiente de amortecimento: Sinal temporal - Aceleração vertical RMS (g)								
<b>Coef. Amort. Anterior</b>	100%	100%	80%	90%	80%	110%	120%	150%
<b>Coef. Amort. Posterior</b>	100%	80%	100%	90%	80%	110%	120%	150%
Roda Anterior	1,489	1,489	1,511	1,499	1,511	1,482	1,475	1,461
Roda Posterior	2,228	2,256	2,228	2,241	2,256	2,218	2,210	2,190
Bounce	0,151	0,147	0,145	0,146	0,141	0,156	0,161	0,175
Suspensão Anterior	0,139	0,139	0,131	0,135	0,131	0,143	0,147	0,159
Suspensão Posterior	0,182	0,172	0,182	0,177	0,017	0,187	0,193	0,210
Banco do motorista	0,057	0,057	0,059	0,057	0,060	0,055	0,054	0,051

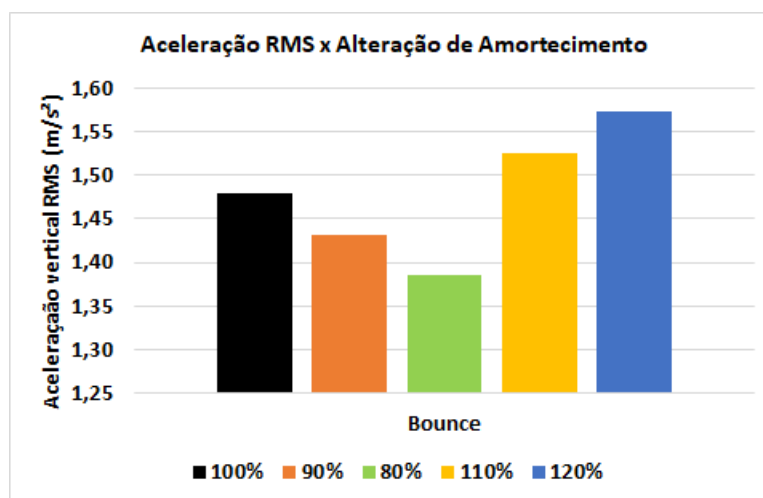
Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

A comparação acima deixa claro que com um menor amortecimento há uma queda de aceleração vertical RMS do *bounce* e dos sistemas de suspensão, já que o sistema passa a ter maior amplitude de movimentação e, com isso, a aceleração do banco do motorista aumenta, confirmando que há demérito no conforto.

Quando os coeficientes de amortecimento são aumentados, como nos últimos três casos, há o efeito contrário, com uma maior aceleração vertical dos sistemas de suspensão, que se deslocam menos, e causa menor desconforto ao usuário.

A relação entre as modificações no amortecimento e as acelerações encontradas, para o movimento de *bounce*, é mostrada graficamente abaixo no Gráfico 33.

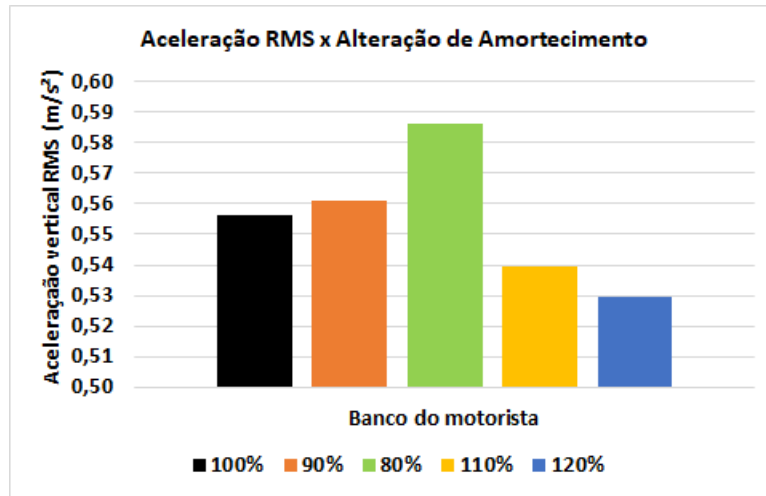
**Gráfico 33 – Aceleração vertical RMS no *bounce* com mudança de amortecimento**



Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

As acelerações verticais RMS do banco do motorista são vistas na Gráfico 34.

Gráfico 34 – Aceleração vertical RMS no banco com mudança de amortecimento



Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

Novamente utiliza-se dos resultados dos sinais FFT para uma análise mais elaborada do nível de conforto do veículo, através das frequências de pico, na Tabela 33 e da aceleração de cada uma dessas frequências, na Tabela 34.

Tabela 33 – Alteração da frequência de pico com mudança do amortecimento

Modificações do coeficiente de amortecimento: Sinal FFT - Frequências de pico (Hz)									
Coef. Amort. Anterior	Descrição	100%	100%	80%	90%	80%	110%	120%	150%
Coef. Amort. Posterior		100%	80%	100%	90%	80%	110%	120%	150%
Suspensão Anterior	1º Pico	1,33	1,33	1,30	1,32	1,31	1,34	1,35	1,37
	2º Pico	11,12	11,13	11,13	11,13	11,13	11,12	11,12	11,12
Suspensão Posterior	1º Pico	1,35	1,34	1,35	1,34	1,34	1,36	1,37	1,40
	2º Pico	12,60	12,63	12,61	12,63	12,63	12,59	12,59	12,57

Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

As alterações no amortecimento mostram ter uma maior influência na definição das frequências de pico dos sistemas de suspensão do que as na rigidez, sendo possível observar tal fato através de uma variação um pouco mais significativa dos valores, principalmente no que se refere ao 2º pico.

Tabela 34 – Alteração da aceleração nos picos com mudança do amortecimento

Modificações do coeficiente de amortecimento: Aceleração vertical nas frequências de pico (g)									
Coef. Amort. Anterior	Descrição	100%	100%	80%	90%	80%	110%	120%	150%
Coef. Amort. Posterior		100%	80%	100%	90%	80%	110%	120%	150%
Suspensão Anterior	1º Pico	0,042	0,043	0,051	0,046	0,051	0,039	0,036	0,032
	2º Pico	0,021	0,020	0,020	0,021	0,020	0,021	0,021	0,021
Suspensão Posterior	1º Pico	0,072	0,097	0,076	0,085	0,102	0,063	0,056	0,043
	2º Pico	0,034	0,030	0,033	0,032	0,030	0,036	0,037	0,040

Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

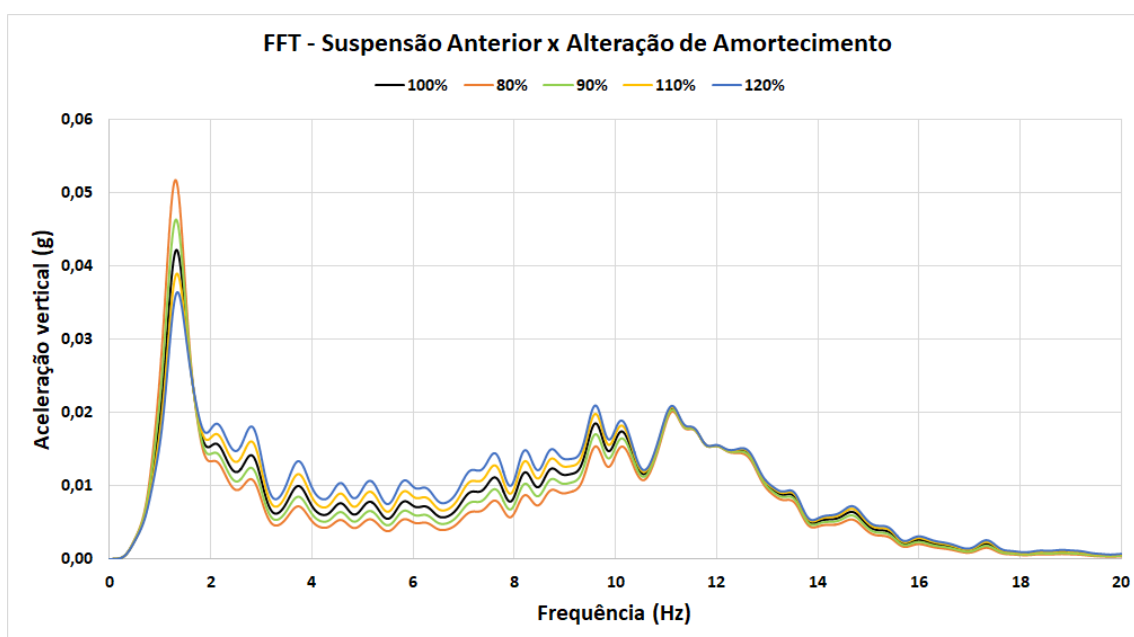


A diminuição no amortecimento gera maiores acelerações para o 1º pico, tanto para a suspensão anterior quanto para a posterior.

De forma análoga, as acelerações diminuem para esse pico, quando se aumenta o amortecimento. Já para as frequências do 2º pico há uma relação diretamente proporcional entre os valores de amortecimento e os de aceleração.

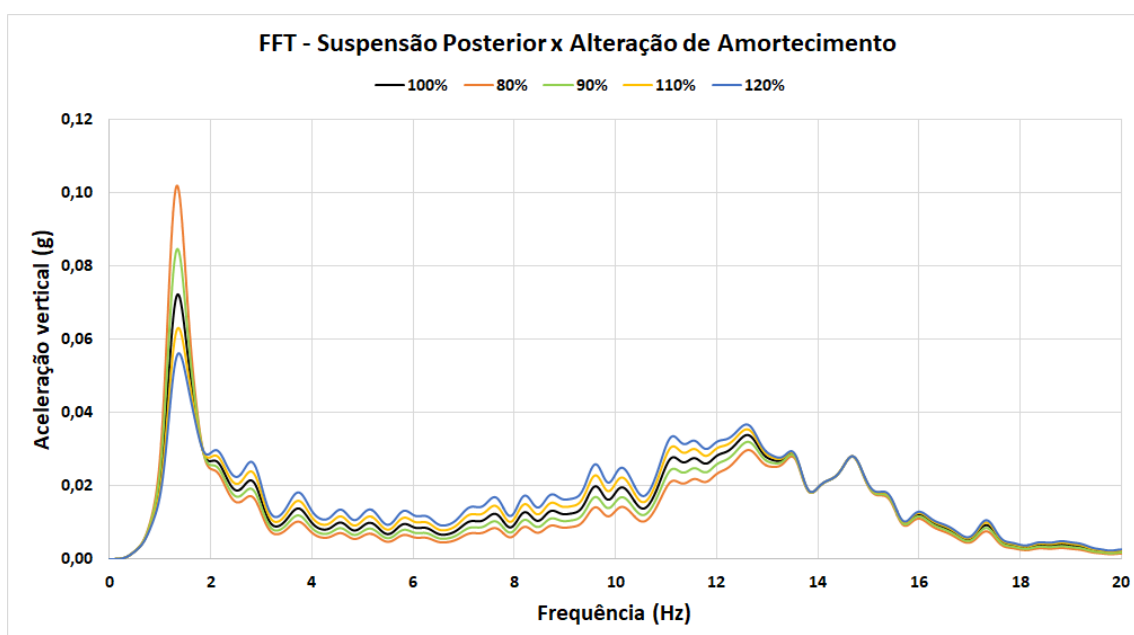
Estes efeitos podem ser notados no Gráfico 35 e no Gráfico 36.

Gráfico 35 – Sinal FFT da suspensão anterior com mudança de amortecimento



Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

Gráfico 36 – Sinal FFT da suspensão posterior com mudança de amortecimento



Fonte: Elaborado pelo autor com dados do *Matlab*®

A análise desse item mostra que a alteração no amortecimento dos sistemas de suspensão do veículo, assim como para a rigidez, alteram não só o comportamento da suspensão em si, mas de todo o veículo, causando alteração nos níveis de conforto que são sentidos no banco do motorista.

Essa influência fica mais clara quando se analisa a faixa de frequência entre 1 e 2Hz, referente a movimentação vertical do veículo em relação ao seu centro de gravidade, efeito esse que é muito sentido pelos usuários de um veículo de passeio.

A redução do amortecimento gera maiores acelerações verticais nessa faixa de frequência, aumentando o desconforto do veículo, mostrando que um veículo com maior amortecimento se torna mais confortável, e que o modelo, portanto, retrata a realidade.

Porém deve-se atentar ao fato de que um grande aumento no amortecimento gera uma perda de dirigibilidade do veículo, causando insegurança, que deve ser um fator de peso no momento da definição dos parâmetros de suspensão em um projeto veicular.

## 6 CONCLUSÕES

### 6.1 Considerações finais

A partir da elaboração do modelo computacional proposto, da utilização de dois sinais de entrada distintos, da correlação dos seus resultados em relação aos dados de medições experimentais e da análise de influência da alteração dos coeficientes de rigidez e amortecimento das molas e amortecedores, respectivamente, dos sistemas de suspensão, é possível concluir que:

- A utilização de três graus de liberdade para o modelo biodinâmico é o suficiente para atingir as frequências naturais próximas do que se é previsto para as partes do corpo humano, confirmando o que foi dito por Becker (2006);
- A utilização de variáveis de entrada compatíveis com um veículo existente faz com que o modelo possa ser correlacionado de forma mais simples e direta, sem necessidade de pequenas compensações;
- Os cálculos baseados em Gillespie (1992), utilizando as variáveis de entrada citadas acima, se mostram extremamente eficazes para definição dos valores iniciais de rigidez e amortecimento das suspensões;
- A obtenção das frequências naturais não-amortecidas e amortecidas através da manipulação de autovalores e auto vetores das matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema torna possível uma correlação ainda melhor do modelo computacional;
- As frequências naturais amortecidas de *bounce* e de *pitch* são iguais a 1,30Hz e 1,15Hz, respectivamente, obedecendo ao definido por Gillespie (1992) de que a primeira não deve exceder a segunda em 20%, sendo esse excesso, para o modelo proposto, igual a 13,04%;
- As massas não-suspensas, anterior e posterior, apresentam frequência natural amortecida próximas de 11,5Hz e 12,6Hz, respectivamente, se mostrando coerente com Gillespie (1992) e sendo explicado pelo fato da maior massa da suspensão anterior do veículo, dotado de suspensão do tipo MacPherson;
- As frequências naturais amortecidas do corpo humano ficam na faixa de 4,7Hz para o tronco inferior, 0,7Hz para o tronco superior e 29,8Hz para a cabeça, coerentes com os estudos de Becker (2006), Anflor (2003) e Rao (2009);

- O modelo se mostra bastante simplificado, mas, ainda assim, apresenta uma boa capacidade de adaptação, por possuir um significativo número de variáveis de entrada que podem ser modificadas, sendo, portanto, um modelo bastante adaptável a diversos veículos de passeio e perfis de pista.
- O modelo responde de forma coerente ao sinal de entrada do tipo senoidal aplicado nas rodas com amplitude de 5mm, tanto para as respostas de deslocamento e velocidade, quanto para aceleração;
- As análises do conforto são feitas a partir dos resultados do banco do motorista, com o objetivo de comparar com as normas de vibração, como por exemplo a ISO 2631-1, tendo ao final uma relação entre as acelerações, o nível de conforto considerado e o tempo limite de exposição;
- Ao considerar a entrada do tipo senoidal têm-se uma aceleração no banco igual a  $0,36\text{m/s}^2$ , o que, de acordo com as normas e com Griffin (1990), classifica o veículo como levemente desconfortável e estabelece um limite de 8 horas de exposição sem danos à saúde;
- Confirma-se a viabilidade do uso de um sinal de excitação aleatório, capaz de simular uma pista pré-definida, através de um conjunto de valores de deslocamento vertical da pista associados a um intervalo de tempo;
- Para o sinal aleatório são encontrados valores de aceleração para o banco do motorista, tanto no modelo computacional quanto no teste experimental, próximos de  $0,6\text{m/s}^2$ , o que caracteriza um veículo pouco desconfortável e uma exposição sem intervalos máxima de 2,5 horas;
- Encontra-se uma boa correlação entre modelo computacional e teste experimental, com erros de no máximo 14%, o que faz com o modelo possa ser considerado confiável, visto que alguns motivos, citados ao longo do texto, justificam a presença desses erros em modelos de veículo simplificados;
- A análise de influência da modificação de componentes, no caso deste trabalho de rigidez e amortecimento, corrobora com as considerações de viabilidade do uso do modelo, visto que, a partir das modificações feitas, são obtidas respostas do modelo completamente condizentes com o que se há de mais atual na literatura;
- A modificação dos coeficientes de rigidez originais em  $\pm 20\%$  faz com que as amplitudes de aceleração no banco do motorista variem no máximo 3,5%;

- Para as alterações no coeficiente de amortecimento, obedecendo a mesma variação, obtém-se acelerações com variação máxima igual a 5%;
- A influência das modificações do amortecimento do sistema de suspensão no conforto do veículo se mostra maior do que a das alterações da rigidez, embora ambas apresentem pequena variação; o modelo identifica bem a direção de crescimento/redução, mesmo com o pequeno percentual de melhoria/demérito.

## 6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Tendo sido elaborado o modelo computacional desse trabalho e notando as suas limitações e o quanto elas influenciam nos resultados que o modelo é capaz de obter, chega-se a algumas sugestões para trabalhos posteriores, considerando a melhoria do modelo e a modificação de algumas formas de análise, que são citadas a seguir:

- Transformação do modelo *Half-car* em um modelo *Full-car*, capaz de analisar, além da movimentação vertical de *bounce* e a arfagem do veículo (ou *pitch*), também a movimentação de rolagem (ou *roll*), muito importante para o entendimento da influência das modificações na dirigibilidade do veículo;
- Adoção de um sistema de suspensão mais refinado, composto não apenas por um conjunto massa-mola, mas por elementos capazes de simular as buchas do sistema, além de um conjunto de suspensão motopropulsora, que tem grande influência no conforto de um veículo e de um modelo de pneu mais sofisticado;
- Consideração de barras estabilizadoras no modelo de veículo completo, a fim de entender como elas podem ser responsáveis por otimizar o comportamento de rolagem, permitindo o uso de uma suspensão mais confortável, sem que o carro se torne inseguro;
- Análise do comportamento do veículo não somente no eixo vertical, estudando a resposta em conforto com a inserção de esforços, principalmente na direção longitudinal, como em casos de frenagem e aceleração;
- Verificação da sensibilidade do conforto em relação a acelerações em frequências entre 25Hz e 80Hz, principalmente no sentido longitudinal;
- Análise da influência de modificação de outros componentes, como a rigidez e o amortecimento do banco do motorista e dos pneus;

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANFLOR, Carla T. M. **Estudo da transmissibilidade da vibração no corpo humano na direção vertical e desenvolvimento de um modelo biodinâmico de quatro graus de liberdade**. 2003. 121 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

AQUINO, Pedro H. C. **Desenvolvimento matemático e implementação numérica de um modelo *half-car*, incluindo banco, para análise da dinâmica vertical de um veículo**, 2014. 180 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

ARANA, C.; EVANGELOU, S. A.; DINI, D. Series Active Variable Geometry Suspension application to comfort enhancement. **Control Engineering Practice**, v. 59, n. December 2016, p. 111–126, 2017.

BARBOSA, R. S. Vehicle Dynamic Response Due to Pavement Roughness. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. XXXIII, n. 3, p. 302–307, 2011.

BASTOW, D. **Car suspension and handling**. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 1990, 300 p.

BECKER, T. **Desenvolvimento de uma mesa vibratória para estudos sobre vibração no corpo humano, medições em um grupo de motoristas e ajuste de um modelo biodinâmico**, 2006. 198f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

BELLMANN, M. A. **Perception of Whole-Body Vibrations: From basic experiments to effects of seat and steering-wheel vibrations on the passenger's comfort inside vehicles**. 2002. 209 f. Tese (Doutorado) – Vom Fachbereich Physik der Universitt Oldenburg, 2002.

BELLMANN, M. A. Influence of frequency and magnitude on the preception of vertical whole-body vibration. **Proceedings of the CFA/DAGA2004**, Strabourg, Germany, p. 1117–1118, 2004.

BOLINA C. C.; AVILA S. M.; CARVALHO G. N. **Parametric Study: Analysis of the limits of constant damping and stiffness for representative models of the human body using discrete model**, In: 18<sup>th</sup> International Congress on Sound & Vibration – ICSV18, Rio de Janeiro, 2011.

BOSCH, Robert. **Manual de tecnologia automotiva**: Tradução da 25. ed. Alemã. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2005, 1232 p.

BRIZON, Carla. J. S. **Metodologia para avaliação e determinação de índices de conforto acústico em Engenharia Automobilística**. 2012. 208 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.

CHANG F. K. Human response to motions in tall buildings. **Journal of the Structural Division**, American Society of Civil Engineers, v. 99, cap. 6, 1973.

DIRECTIVE 2002/44/EC of the European Parliament and of the Council, 2002. “**On the Minimum Health and Safety Requirements Regarding the Exposure of Workers to the Risks Arising from Physical Agents (vibration)**”, Official J. European Communities, 6<sup>th</sup> July 2002, L177/13-19.

DIXON, John C. **The Shock Absorber Handbook**. 2. Ed. Chichester: Professional Engineering Publishing and John Wiley & Sons, Ltd, 2007, 409 p.

DOBAJ, K. Influence of car wheel suspension parameters on improvement of active safety and ride comfort. **Technical Transactions**, v. 3, p. 13–22, 2015.

DREHMER, Luís R. C. **Otimização de parâmetros concentrados de suspensão para conforto e segurança veicular**. 2012. 98 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

DUKKIPATI, Rao. **Road Vehicle Dynamics**. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 2008, 849 p.

FENCHEA, M. Influence of Car's Suspension in the Vehicle Comfort and. **Fascicle of Management and Technological Engineering**, Annals of the Oradea University, v. 7, n. 17, p. 250–253, 2008.

FERREIRA H. T. **Determinação das frequências naturais e modos de vibrar de um veículo de dois eixos através de um programa computacional em Matlab-Simulink**. 2003. 99 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

FREITAS, Luís M. P. **Estudo da dinâmica vertical de uma suspensão veicular do tipo MacPherson**. 2006. 131 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

GANZAROLLI, F. **Influência das frequências de ride no conforto e dirigibilidade veiculares na faixa linear de uso do veículo**. 2012. 134 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

GAO, W.; ZHANG, N.; DU, H. P. **A half-car model for dynamic analysis of vehicles with random parameters**. In: Australasian Congress on Applied Mechanics, 5., Brisbane, Australia, 2007.

GENTA, Giancarlo; MORELLO, Lorenzo. **The Automotive Chassis: Volume 1: Components Design**. Torino: Springer, 2009. 621 p.

GENTA, Giancarlo; MORELLO, Lorenzo. **The Automotive Chassis: Volume 2: System Design**. Torino: Springer, 2009. 825 p.

GERGES, Samir N. Y. **Ruídos e Vibrações Veiculares**. 1. Ed. Florianópolis: NR Consultoria, 2005, 750 p.

GHOSH, M. K.; DINAHAHI, R. Vibration analysis of a vehicle system supported on a damper-controlled variable-spring-stiffness suspension. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering**, v. 219, n. 5, p. 607–619, 2004.

GILLESPIE, Thomas D. **Fundamental of Vehicle Dynamics**, Warrendale: Society of Automotive Engineers, 1992, 495 p.

GRIFFIN, Michael. J. **Handbook of Human Vibration**. Southampton: Academic Press, 1990, 988 p.

GUNTHER, P. E. **Biomechanical Aspects of Seating Comfort in Vehicle Seating Package Engineering**. In: IEA 2000/HFES 2000 Congress, 14., San Diego, California, Proceedings, p. 304-307, 2000.

GUO, L. X.; ZHANG, L. P. Vehicle vibration analysis in changeable speeds solved by pseudoexcitation method. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2010, p. 1–14, 2010.

HARRIS Cryll M.; PIERSOL Allan G. **Harri's Shock and Vibration Handbook**. 5. Ed. New York: McGraw-Hill, 2002, 1456 p.

INMAN, Daniel J. **Engineering Vibration**. 3. Ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2008, 669p.

ISO 2631/1. **Mechanical vibration and shock: Evaluation of human exposure to whole-body vibration**. 2. Ed. 1997.

JAZAR, Reza N. **Vehicle Dynamics**. Riverdale: Springer, 2008, 1015 p.

JUGULKAR, L. M.; SINGH, S.; SAWANT, S. M. Analysis of suspension with variable stiffness and variable damping force for automotive applications. **Advances in Mechanical Engineering**, v. 8, n. 5, p. 1–19, 2016.

KATU, U. S.; DESAVALLE, R. G.; KANAI, R. A. **Effect of Vehicle Vibration on Human Body – RIT Experience**, Rajarambapu Institute of Techonlogy, Departament of Mechanical Eng, 2003.

LANCHESTER F. W. Some problems peculiar to the design of the automobile. **Proceedings of the Institution of Automobile Engineers**, v. 2, p. 197 – 287, 1907.

LIANG C.; CHIANG C. A study on biodynamic models of seated human subjects exposed to vertical vibration. **International Journal of Industrial Ergonomics**, v. 36, n. 10, p. 869–890, 2006.

LITCHFIELD, P. W. **Pneumatic Tires**. SAE Technical Paper 130034, 1913.



MAHALA, M. K.; GADKARI, P.; DEB, A. **Mathematical Models for Designing Vehicles for Ride Comfort**, Indian Institute of Science, Bangalore, India, p. 168–175, 2004.

MARZBANRAD, J.; POOZESH, P.; DAMROODI, M. Improving vehicle ride comfort using an active and semi-active controller in a half-car model. **Journal of Vibration and Control**, v. 19, n. 9, p. 1357–1377, 2013.

MATSUMOTO, Y.; MAEDA, S.; OJI, Y. Influence of frequency on difference thresholds for magnitude of vertical sinusoidal whole-body vibration. **Industrial health**, v. 40, n. 4, p. 313–9, 2002.

MEHMOOD, A.; KHAN, A. A.; KHAN, A. A. Vibration Analysis of Damping Suspension Using Car Models. **International Journal of Innovation and Applied Studies**, v. 9, n. 2, p. 202–211, 2014.

MEISTER F. J.; REIHLER, H. Sensitivity of human beings to vibration. **Forsc auf den Gebiere des Ingenieureuesens**, v. 2, no. 11, 1931.

MILLIKEN, Willian F.; MILLIKEN, Douglas L. **Race Car Vehicle Dynamics**. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 1995, 857 p.

MISAEEL, M. R. **Conforto Humano aos Níveis de Vibração**, 2001. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

MORIOKA, M.; GRIFFIN M. J. Magnitude-dependence of equivalent comfort contours for fore-and-aft, lateral and vertical whole-body vibration. **Journal of Sound and Vibration**, v. 298, n. 3, p. 755–772, 2006.

NAHVI, H.; FOULADI, M. H.; MOHD NOR, M. J. Evaluation of whole-body vibration and ride comfort in a passenger car. **International Journal of Acoustics and Vibrations**, v. 14, n. 3, p. 143–149, 2009.

NIETO, A. J. et al. An adaptive pneumatic suspension system for improving ride comfort and handling. **Journal of Vibration and Control**, v. 22, n. 6, p. 1492–1503, 2016.

PACEJKA, Hans B. **Tyre and Vehicle Dynamics**. 2. Ed. Oxford: Butterworth Heinemann, 2005, 620 p.

PARK, S. J.; SUBRAMANIYAM, M. Evaluating Methods of Vibration Exposure and Ride Comfort in Car. **Journal of the Ergonomics Society of Korea**, v. 32, n. 4, p. 381–387, 2013.

PEREIRA Cristiano, C. G. **Curvas de percepção de conforto humano para vibrações verticais**. 2005. 168 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação de Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2005.

PRAZNOWSKI, K.; MAMALA, J. Classification of the road surface condition on the basis of vibrations of the sprung mass in a passenger car. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, v. 148, n. 1, p. 1–11, 2016.

RAO, Singiresu. **Vibrações Mecânicas**. Tradução da 4. Ed. Americana. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009, 1030 p.

REGO, Tarcísio F. U. **Validação de metodologia de otimização de conforto em simulador de suspensão veicular com coeficiente de amortecimento variável**. 2011. 160 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

REIMPELL J.; STOLL H.; BETZLER J. W. **The Automotive Chassis: Engineering Principles**. 2. ed. Woburn: Butterworth Heinemann, 2001, 437 p.

SANT'ANNA R. **Análise de acidente com rotor: Modelagem e Simulação**. 2007. 134 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

SITNIK, L. J.; KARDASZ, P. Vehicle Vibration in Human Health. **Journal of KONES Powertrain and Transport**, v. 20, n. 4, p. 1–8, 2013.

SOUSA D.; AVILA, S. **Otimização dos parâmetros da suspensão para um modelo de um quarto de veículo**, In: Congresso Ibero-Latino Americano de Métodos Computacionais de Engenharia, 37., Brasília, Distrito Federal, 2016.

STONE, R.; BALL J. K. **Automotive Engineering Fundamentals**. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 2004, 595 p.

STRANDERMAR K. **On objective measures for ride comfort evaluation**. 2005. 99 f. Technical Licentiate – School of Electrical Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2005.

SUGGS, C. W.; ABRAMS, C.F.; STIKELEATHERM L.F. Application of a damped spring-mass human vibration simulator in vibration testing of vehicle seats. **Ergonomics**, v. 12, p. 79-90, 1969.

SUZUKI, H. Effects of the range and frequency of vibrations on the momentary riding comfort evaluation of a railway vehicle. **Japanese Psychological Research**, v. 40, n. 3, p. 156–165, 1998.

SZOKE, D.; LÓGÓ, J.; MERCZEL, D. B. Optimal suspension settings for ride comfort of road vehicles. **Periodica Polytechnica Civil Engineering**, v. 54, n. 2, p. 73–78, 2010.

TIMOSHENKO S. **Vibration problems in Engineering**. 2. Ed. New York: D. Van. Nostrand Company, 1937, 470 p.

TÜRKAY, S.; AKÇAY, H. A study of random vibration characteristics of the quarter-car model. **Journal of Sound and Vibration**, v. 282, n. 1–2, p. 111–124, 2005.

WU, G.; FAN, G.; GUO, J. Ride comfort evaluation for road vehicle based on rigid-flexible coupling multibody dynamics. **Theoretical and Applied Mechanics Letters**, v. 3, n. 1, p. 13004, 2013.

ZEHS AZ, M.; VAKILI-TAHAMI, F.; PAYKANI, A. Investigation on the effects of stiffness and damping coefficients of the suspension system of a vehicle on the ride and handling performance. **UPB Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering**, v. 76, n. 1, p. 55–70, 2014.

**APÊNDICE A – PASSO-A-PASSO DA SUBSTITUIÇÃO DE GDL'S AUXILIARES E AGRUPAMENTO DE GDL'S PRINCIPAIS PARA MONTAGEM DAS MATRIZES MASSA, RIGIDEZ E AMORTECIMENTO E DO VETOR FORÇA**

A elaboração passo-a-passo das equações dinâmicas que tornam possível a composição das matrizes massa, rigidez e amortecimento, além do vetor força, do modelo proposto é detalhada abaixo, sendo iniciada pelo equilíbrio dinâmico, posteriormente pela substituição dos graus de liberdade auxiliares em função dos principais, e, por fim, feito o agrupamento em função dos graus de liberdade principais.

A ordem escolhida para a elaboração obedece ao sentido cima-baixo do modelo, que faz com que as matrizes possuam uma simetria mais visível.

a) Cabeça:

Inicialmente o equilíbrio dinâmico é dado por:

$$m_c \ddot{y}_c + k_c (y_c - y_t) + c_c (\dot{y}_c - \dot{y}_t) = 0$$

Agrupando os graus de liberdade:

$$m_c \ddot{y}_c + k_c y_c - k_c y_t + c_c \dot{y}_c - c_c \dot{y}_t = 0$$

b) Tronco Superior:

Inicialmente o equilíbrio dinâmico é dado por:

$$m_t \ddot{y}_t + k_t (y_t - y_p) + c_t (\dot{y}_t - \dot{y}_p) - k_c (y_c - y_t) - c_c (\dot{y}_c - \dot{y}_t) = 0$$

Separando cada termo:

$$m_t \ddot{y}_t + k_t y_t - k_t y_p + c_t \dot{y}_t - c_t \dot{y}_p - k_c y_c + k_c y_t - c_c \dot{y}_c + c_c \dot{y}_t = 0$$

Agrupando os graus de liberdade:

$$m_t \ddot{y}_t - k_c y_c + (k_t + k_c) y_t - k_t y_p - c_c \dot{y}_c + (c_t + c_c) \dot{y}_t - c_t \dot{y}_p = 0$$

c) Tronco inferior (Pernas):

Inicialmente o equilíbrio dinâmico é dado por:

$$m_p \ddot{y}_p + k_p (y_p - y_b) + c_p (\dot{y}_p - \dot{y}_b) - k_t (y_t - y_p) - c_t (\dot{y}_t - \dot{y}_p) = 0$$

Separando cada termo:

$$m_p \ddot{y}_p + k_p y_p - k_p y_b + c_p \dot{y}_p - c_p \dot{y}_b - k_t y_t + k_t y_p - c_t \dot{y}_t + c_t \dot{y}_p = 0$$

Agrupando os graus de liberdade:

$$m_p \ddot{y}_p - k_t y_t + (k_p + k_t) y_p - k_p y_b - c_t \dot{y}_t + (c_p + c_t) \dot{y}_p - c_p \dot{y}_b = 0$$

d) Banco:

Inicialmente o equilíbrio dinâmico é dado por:

$$m_b \ddot{y}_b + k_b (y_b - y_g) + c_b (\dot{y}_b - \dot{y}_g) - k_p (y_p - y_b) - c_p (\dot{y}_p - \dot{y}_b) = 0$$

Separando cada termo:

$$m_b \ddot{y}_b + k_b y_b - k_b y_g + c_b \dot{y}_b - c_b \dot{y}_g - k_p y_p + k_p y_b - c_p \dot{y}_p + c_p \dot{y}_b = 0$$

Substituindo a variável auxiliar ( $y_g$ ):

$$m_b \ddot{y}_b + k_b y_b - k_b \left( y_{cg} + \left( x_b + \frac{l_b}{2} \right) \Theta \right) + c_b \dot{y}_b - c_b \left( \dot{y}_{cg} + \left( x_b + \frac{l_b}{2} \right) \dot{\Theta} \right) - k_p y_p + k_p y_b - c_p \dot{y}_p + c_p \dot{y}_b = 0$$

Agrupando os graus de liberdade:

$$m_b \ddot{y}_b - k_p y_p + (k_b + k_p) y_b - k_b y_{cg} - \left( x_b + \frac{l_b}{2} \right) k_b \Theta - c_p \dot{y}_p + (c_b + c_p) \dot{y}_b - c_b \dot{y}_{cg} - \left( x_b + \frac{l_b}{2} \right) c_b \dot{\Theta} = 0$$

e) Centro de gravidade (Forças):

Inicialmente o equilíbrio dinâmico é dado por:

$$m_{cg}\ddot{y}_{cg} + k_{sp}(y_{sp} - y_{rp}) + c_{sp}(\dot{y}_{sp} - \dot{y}_{rp}) + k_{sa}(y_{sa} - y_{ra}) + c_{sa}(\dot{y}_{sa} - \dot{y}_{ra}) - k_b(y_b - y_g) - c_b(\dot{y}_b - \dot{y}_g) = 0$$

Separando cada termo:

$$m_{cg}\ddot{y}_{cg} + k_{sp}y_{sp} - k_{sp}y_{rp} + c_{sp}\dot{y}_{sp} - c_{sp}\dot{y}_{rp} + k_{sa}y_{sa} - k_{sa}y_{ra} + c_{sa}\dot{y}_{sa} - c_{sa}\dot{y}_{ra} - k_b y_b + k_b y_g - c_b \dot{y}_b + c_b \dot{y}_g = 0$$

Substituindo as variáveis auxiliares ( $y_{sa}$ ,  $y_{sp}$  e  $y_g$ ):

$$m_{cg}\ddot{y}_{cg} + k_{sp}(y_{cg} - x_p\theta) - k_{sp}y_{rp} + c_{sp}(\dot{y}_{cg} - x_p\dot{\theta}) - c_{sp}\dot{y}_{rp} + k_{sa}(y_{cg} + x_a\theta) - k_{sa}y_{ra} + c_{sa}(\dot{y}_{cg} + x_a\dot{\theta}) - c_{sa}\dot{y}_{ra} - k_b y_b + k_b \left( y_{cg} + \left( x_b + \frac{l_b}{2} \right) \theta \right) - c_b \dot{y}_b + c_b \left( \dot{y}_{cg} + \left( x_b + \frac{l_b}{2} \right) \dot{\theta} \right) = 0$$

Agrupando os graus de liberdade:

$$m_{cg}\ddot{y}_{cg} - k_b y_b + (k_{sp} + k_{sa} + k_b)y_{cg} + \left( -x_p k_{sp} + x_a k_{sa} + \left( x_b + \frac{l_b}{2} \right) k_b \right) \theta - k_{sa}y_{ra} - k_{sp}y_{rp} - c_b \dot{y}_b + (c_{sp} + c_{sa} + c_b)\dot{y}_{cg} + \left( -x_p c_{sp} + x_a c_{sa} + \left( x_b + \frac{l_b}{2} \right) c_b \right) \dot{\theta} - c_{sa}\dot{y}_{ra} - c_{sp}\dot{y}_{rp} = 0$$

f) Centro de gravidade (Momentos):

Inicialmente o equilíbrio dinâmico é dado por:

$$J_{cg}\ddot{\theta} - x_p k_{sp}(y_{sp} - y_{rp}) - x_p c_{sp}(\dot{y}_{sp} - \dot{y}_{rp}) + x_a k_{sa}(y_{sa} - y_{ra}) + x_a c_{sa}(\dot{y}_{sa} - \dot{y}_{ra}) - \left( x_b + \frac{l_b}{2} \right) k_b (y_b - y_g) - \left( x_b + \frac{l_b}{2} \right) c_b (\dot{y}_b - \dot{y}_g) = 0$$

Separando cada termo:

$$\begin{aligned}
 J_{cg}\ddot{\theta} - x_p k_{sp} y_{sp} + x_p k_{sp} y_{rp} - x_p c_{sp} \dot{y}_{sp} + x_p c_{sp} \dot{y}_{rp} + x_a k_{sa} y_{sa} - x_a k_{sa} y_{ra} + x_a c_{sa} \dot{y}_{sa} \\
 - x_a c_{sa} \dot{y}_{ra} - \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) k_b y_b + \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) k_b y_g - \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) c_b \dot{y}_b + \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) c_b \dot{y}_g \\
 = 0
 \end{aligned}$$

Substituindo as variáveis auxiliares ( $y_{sa}$ ,  $y_{sp}$  e  $y_g$ ):

$$\begin{aligned}
 J_{cg}\ddot{\theta} - x_p k_{sp} (y_{cg} - x_p \theta) + x_p k_{sp} y_{rp} - x_p c_{sp} (\dot{y}_{cg} - x_p \dot{\theta}) + x_p c_{sp} \dot{y}_{rp} + x_a k_{sa} (y_{cg} + x_a \theta) \\
 - x_a k_{sa} y_{ra} + x_a c_{sa} (\dot{y}_{cg} + x_a \dot{\theta}) - x_a c_{sa} \dot{y}_{ra} - \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) k_b y_b \\
 + \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) k_b \left(y_{cg} + \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) \theta\right) - \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) c_b \dot{y}_b \\
 + \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) c_b \left(\dot{y}_{cg} + \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) \dot{\theta}\right) = 0
 \end{aligned}$$

Agrupando os graus de liberdade:

$$\begin{aligned}
 J_{cg}\ddot{\theta} - \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) k_b y_b + \left(-x_p k_{sp} + x_a k_{sa} + \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) k_b\right) y_{cg} \\
 + \left(x_p^2 k_{sp} + x_a^2 k_{sa} + \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right)^2 k_b\right) \theta - x_a k_{sa} y_{ra} + x_p k_{sp} y_{rp} - \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) c_b \dot{y}_b \\
 + \left(-x_p c_{sp} + x_a c_{sa} + \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right) c_b\right) \dot{y}_{cg} + \left(x_p^2 c_{sp} + x_a^2 c_{sa} + \left(x_b + \frac{l_b}{2}\right)^2 c_b\right) \dot{\theta} \\
 - x_a c_{sa} \dot{y}_{ra} + x_p c_{sp} \dot{y}_{rp} = 0
 \end{aligned}$$

g) Rodas anteriores:

Inicialmente o equilíbrio dinâmico é dado por:

$$m_{ra} \ddot{y}_{ra} + k_{pa} (y_{ra} - y_{pa}) - k_{sa} (y_{sa} - y_{ra}) - c_{sa} (\dot{y}_{sa} - \dot{y}_{ra}) = 0$$

Separando cada termo:

$$m_{ra}\ddot{y}_{ra} + k_{pa}y_{ra} - k_{pa}y_{pa} - k_{sa}y_{sa} + k_{sa}y_{ra} - c_{sa}\dot{y}_{sa} + c_{sa}\dot{y}_{ra} = 0$$

Isolando a excitação da pista:

$$m_{ra}\ddot{y}_{ra} + k_{pa}y_{ra} - k_{sa}y_{sa} + k_{sa}y_{ra} - c_{sa}\dot{y}_{sa} + c_{sa}\dot{y}_{ra} = k_{pa}y_{pa}$$

Substituindo a variável auxiliar ( $y_{sa}$ ):

$$m_{ra}\ddot{y}_{ra} + k_{pa}y_{ra} - k_{sa}(y_{cg} + x_a\theta) + k_{sa}y_{ra} - c_{sa}(\dot{y}_{cg} + x_a\dot{\theta}) + c_{sa}\dot{y}_{ra} = k_{pa}y_{pa}$$

Agrupando os graus de liberdade:

$$m_{ra}\ddot{y}_{ra} - k_{sa}y_{cg} - x_a k_{sa}\theta + (k_{pa} + k_{sa})y_{ra} - c_{sa}\dot{y}_{cg} - c_{sa}x_a\dot{\theta} + c_{sa}\dot{y}_{ra} = k_{pa}y_{pa}$$

h) Rodas posteriores:

Inicialmente o equilíbrio dinâmico é dado por:

$$m_{rp}\ddot{y}_{rp} + k_{pp}(y_{rp} - y_{pp}) - k_{sp}(y_{sp} - y_{rp}) - c_{sp}(\dot{y}_{sp} - \dot{y}_{rp}) = 0$$

Separando cada termo:

$$m_{rp}\ddot{y}_{rp} + k_{pp}y_{rp} - k_{pp}y_{pp} - k_{sp}y_{sp} + k_{sp}y_{rp} - c_{sp}\dot{y}_{sp} + c_{sp}\dot{y}_{rp} = 0$$

Isolando a excitação da pista:

$$m_{rp}\ddot{y}_{rp} + k_{pp}y_{rp} - k_{sp}y_{sp} + k_{sp}y_{rp} - c_{sp}\dot{y}_{sp} + c_{sp}\dot{y}_{rp} = k_{pp}y_{pp}$$

Substituindo a variável auxiliar ( $y_{sp}$ ):

$$m_{rp}\ddot{y}_{rp} + k_{pp}y_{rp} - k_{sp}(y_{cg} - x_p\theta) + k_{sp}y_{rp} - c_{sp}(\dot{y}_{cg} - x_p\dot{\theta}) + c_{sp}\dot{y}_{rp} = k_{pp}y_{pp}$$



Agrupando os graus de liberdade:

$$m_{rp}\ddot{y}_{rp} - k_{sp}y_{cg} + x_p k_{sp}\theta + (k_{pp} + k_{sp})y_{rp} - c_{sp}\dot{y}_{cg} + c_{sp}x_p\dot{\theta} + c_{sp}\dot{y}_{rp} = k_{pp}y_{pp}$$

Feito o agrupamento dos graus de liberdade principais das oito equações monta-se as matrizes massa, rigidez e amortecimento e o vetor força baseando-se na equação matricial do modelo proposto, mostrada novamente abaixo.

$$[m]\{\ddot{y}\} + [c]\{\dot{y}\} + [k]\{y\} = \{f\}$$

No corpo da dissertação o resultado dessas matrizes é detalhado, mostrando as relações de elemento a elemento, em função dos graus de liberdade principais, assim como são discutidas suas características de sinal e simetria.