

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Escola de Engenharia

Departamento de Engenharia de Produção

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

**Política Ótima de Manutenção Preventiva de
Transportadores de Correia de uma Empresa
Mineradora Brasileira sob a suposição de Reparo
Imperfeito**

Cássius Henrique Xavier Oliveira

Belo Horizonte

2016

Cássius Henrique Xavier Oliveira

**Política Ótima de Manutenção Preventiva de
Transportadores de Correia de uma Empresa
Mineradora Brasileira sob a suposição de Reparo
Imperfeito**

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Engenharia de Produção
da Universidade Federal de Minas Gerais
como requisito à obtenção do título de Mestre
em Engenharia de Produção.

Orientadora: Profa. Dra. Marta Afonso Frei-
tas

Belo Horizonte

2016

A meus pais Maria de Lourdes Xavier Oliveira e Gilmar Martins de Oliveira que sempre me incentivaram. À minha avó que sempre me ensinou a persistir para alcançar meus objetivos. À minha tia Elizabeth Xavier, uma grande e leal amiga, que sempre ofereceu palavras de ânimo e conforto em minha caminhada.

Agradecimentos

A Deus.

À UFMG bem como aos grandes professores do DEP com os quais tive a oportunidade de estudar, aprender e a me inspirar.

À minha orientadora Professora Marta Afonso Freitas, pelos grandes e importantes direcionamentos, pela competência e profissionalismo que sempre demonstra em sua profissão.

À Professora Maria Luíza Guerra de Toledo que já durante a minha Graduação, acreditou em meu potencial e deu grandes direcionamentos ao longo de minha trajetória acadêmica.

Ao amigo Rafael da Silva Fernandes pelo apoio.

À minha família, por estar sempre presente me incentivando a alcançar meus objetivos.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigado!

Resumo

A confiabilidade de sistemas tem sido assunto recorrente em diversos trabalhos. A explicação para esse crescente enfoque no tema reside no fato de que a operação e a manutenção estão fortemente relacionadas a fatores ambientais e de segurança que influenciam no nível de rentabilidade empresarial. Nesse sentido, a manutenção tem sido vista como uma atividade estratégica e vital à boa reputação da imagem institucional. Porém, a atividade de manutenção implica em vários custos. Deve-se, pois, desenvolver métodos que visam determinar a periodicidade ótima das intervenções de manutenção preventiva de modo a minimizar o custo total dessas manutenções. Esse é um dos principais objetivos dos diversos trabalhos sobre esse assunto. O alcance dessa finalidade passa por observar dados de tempos de falhas dos sistemas reparáveis de interesse, estabelecer o efeito de reparo adequado em cada intervenção a ser realizada nesses sistemas, bem como estabelecer as condições para a execução das manutenções preventivas e corretivas. O presente trabalho faz uso dos seguintes pressupostos: após cada falha haverá uma manutenção corretiva cujo reparo será imperfeito (isto é, ele retornará o sistema a uma condição que não se equivale a um sistema novo, mas se tornará melhor do que estava no momento da falha); em intervalos de tempo de mesmo tamanho haverá uma manutenção preventiva com reparo perfeito (isso fará com que o sistema se comporte como um sistema novo). O uso dessas suposições implicará na geração de funções de máxima verossimilhança utilizando modelos clássicos da literatura denominados ARA e ARI. Serão usados, ainda, os pacotes computacionais desenvolvidos por Madureira (2014) e Fernandes (2015). O presente trabalho visa estabelecer uma política de manutenção ótima para transportadores de correia de uma empresa mineradora brasileira. O trabalho fornece, portanto, uma revisão bibliográfica combinando métodos clássicos e outros mais recentes até então não utilizadas em conjunto, ao mesmo tempo em que exemplifica suas aplicações.

Astract

The reliability of systems has been a recurring issue in several articles. The reason for this increased focus on the issue lies in the fact that the operation and maintenance are strongly related to safety and environmental factors that influence the level of corporate profitability. In this regard, maintenance has been seen as a strategic activity and vital to the good reputation of the institutional image. However, the maintenance activity involves many costs. Therefore, it should develop methods that aim to determine the optimal frequency of preventive maintenance in order to minimize the total cost of maintenance. This is one of the main objectives of the various studies on this subject. Achieving this goal involves observing data repairable systems failure times of interest, establish the effect of proper repair in each intervention to be performed on these systems and to establish the conditions for the implementation of preventive and corrective maintenance. This paper uses the following assumptions: after each failure there will be a corrective maintenance which repair will be imperfect (ie, it will return the system to a condition that is not equivalent to a new system, but it will become better than it was at the time of failure); at the same interval size there will be a perfect preventive maintenance to repair (which will cause the system to behave as a new system). The use of such assumptions result in the generation of maximum likelihood functions using classic literature models called ARA and ARI. The computational packages developed by Madureira (2014) and Fernandes (2015) will be used also. This study aims to establish an optimal maintenance policy for conveyor belts of a Brazilian mining company. Thus, this study provides a literature review combining conventional methods, and more recent hitherto not used together, while exemplifying their applications.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Literatura	1
1.2	Situação prática motivadora: falhas em Transportadores de correia	4
1.3	Objetivos	5
1.4	Estrutura do Texto	5
2	Reparo imperfeito e o problema de redução do custo de Manutenção	7
2.1	Modelos baseados na suposição de reparo imperfeito	7
2.1.1	Os modelos de Redução Aritmética da Idade (<i>"Aritmetic Reduction Age"</i> , ARA) de Doyen & Gaudoin (2004)	8
2.1.2	Os modelos de Redução Aritmética da Intensidade (<i>"Aritmetic Reduction Intensity"</i> , ARI) segundo Doyen & Gaudoin (2004)	11
2.2	Estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança segundo Toledo <i>et al.</i> (2015)	14
2.3	Critérios de Seleção do Modelo (ARA, ARI e suas ordens de memória)	19
2.4	O problema da minimização de custo	22
3	Determinação da Política Ótima de Manutenção Preventiva para a base de dados <i>Correias</i>	26
3.1	Análise Preliminar dos Dados	27
3.2	Estimativas pontuais e intervalares dos parâmetros do modelo selecionado	29
3.3	Periodicidade Ótima de Manutenção Preventiva	31
4	Conclusões	35
5	Referências bibliográficas	36
A	Anexo I	38
B	Anexo II	40
C	Anexo III	42

Lista de Figuras

1	Esteira transportadora de minério (Fonte: internet)	4
2	Função intensidade de falha da idade real (linha pontilhada) e Função intensidade de falha da idade virtual (linha sólida). Fonte: (DOYEN & GAUDOIN, 2004, p. 4)	8
3	ARA_{∞} com $\theta = 0,5$. Fonte: (DOYEN & GAUDOIN, 2004, p. 49)	10
4	ARI_{∞} com $\theta = 0,5$. Fonte: (DOYEN & GAUDOIN, 2004, p. 47)	12
5	Funções intensidade de falha para os modelos ARA_1 (a) e ARI_1 (b) com intensidade inicial segundo PLP com $\beta = 3$, $\eta = 1$ e $\theta = 0,5$ e falhas observadas nos tempos $t_1 = 1,2$ e $t_2 = 1,9$. Fonte: (TOLEDO <i>et al.</i> , 2016, p.110)	14
6	Representação esquemática dos $k_1 + k_2$ sistemas reparáveis observados . . .	16
7	Gráficos de diagnóstico: comparação entre o MCF empírico e o MCF estimado para ARI_1 (a e b) e ARI_{∞} (c e d). Fonte (TOLEDO <i>et al.</i> , 2015, p. 113)	22
8	Gráfico de eventos para a base de dados <i>Transportadores</i> (tempo em horas)	27
9	Gráfico da Média Acumulada do número de falhas para a base de dados <i>Transportadores</i>	28
10	Critérios de seleção de modelos ARA e ARI com diferentes ordens de memória para os dados de <i>Correias</i> : (a) baseados puramente na log-verossimilhança (\hat{l}); (b) baseados no Peso da evidência W_r	30
11	Gráfico dos Intervalos de Confiança da periodicidade ótima $\hat{\tau}$ com $\alpha = 0,05$ utilizando <i>Bootstrap</i> de tamanho $B = 10000$) para diferentes razões de custo entre a manutenção preventiva e os reparos mínimos nas manutenções corretivas C_{PM}/C_{MR} usando (a) ARA_7 e (b) ARI_7	33

Lista de Tabelas

1	Estimativas pontuais e intervalares de τ (intervalo de tempo ótimo entre manutenção preventiva) sob as suposições de reparo mínimo e reparo im- perfeito para três razões de custos (<i>Bootstrap</i> $B = 10000$) - base: <i>Correias</i> ; modelo ARA_7	32
2	Estimativas pontuais e intervalares de τ (intervalo de tempo ótimo entre manutenção preventiva) sob as suposições de reparo mínimo e reparo im- perfeito para três razões de custos (<i>Bootstrap</i> $B = 10000$) - base: <i>Correias</i> ; modelo ARI_7	32

Lista de Siglas

ABAO *As Bad as Old* ou "tão ruim quanto velho"

AGAN *As Good as New* ou "tão bom quanto novo"

ARA *Arithmetic Reduction Age* ou Redução Aritmética da Idade

ARI *Arithmetic Reduction Intensity* ou Redução Aritmética da Intensidade

CM *Corrective Maintenance* ou Manutenção Corretiva

IR *Imperfect Repair* ou Reparo Imperfeito

MCF *Mean Culmulative Function* ou Função Média Acumulada

MR *Minimal Repair* ou Reparo Mínimo

NHPP *Nonhomogeneous Poisson Process* ou Processo de Poisson Não Homogêneo

PLP *Power Law Process* ou Processo de Lei de Potência

PM *Preventive Maintenance* ou Manutenção Preventiva

PR *Perfect Repair* ou Reparo Perfeito

ROCOF *Rate of Occurence of Failures* ou Taxa de Ocorrência de Falhas

Lista de Símbolos

α nível de significância

β parâmetro de forma do PLP

η parâmetro de escala do PLP

θ coeficiente de eficiência do reparo

λ função intensidade inicial

μ vetor de parâmetros do modelo

τ tamanho do intervalo de tempo entre manutenções preventivas

ϕ função média

Φ função média acumulada

1 Introdução

1.1 Literatura

O estudo da confiabilidade de sistemas tem se tornado cada vez mais relevante às organizações. Segundo Freitas & Colosimo (1997), pode-se definir o termo confiabilidade como a probabilidade de determinado sistema (produto ou componente) operar de maneira satisfatória, sob condições pré-estabelecidas de operação, em um dado período de tempo. Para que se tenha a garantia da confiabilidade de um sistema é necessário conceber políticas adequadas de manutenção.

A partir da década de 1980, temas como a operação e a manutenção vêm recebendo maior atenção porque esses assuntos estão intimamente relacionados ao sucesso das estratégias corporacionais (FERNANDES, 2015). A explicação para esse crescente enfoque no tema reside no fato de que a operação e a manutenção estão fortemente relacionadas a fatores ambientais e de segurança que influenciam no nível de rentabilidade empresarial.

O trinômio "ambiente, segurança e rentabilidade" se faz presente em várias situações práticas. Um exemplo pode ser encontrado na atividade de extração de petróleo e gás, mais precisamente, na descoberta de campos petrolíferos em mar aberto. A profundidade do bolsão de petróleo pode muitas vezes chegar a 8 quilômetros. Logo, faz-se necessário o uso de políticas adequadas de manutenção dos equipamentos utilizados tanto na perfuração como na extração. Qualquer falha nesses sistemas pode gerar graves impactos ambientais além de colocar em risco a segurança dos trabalhadores e interferir negativamente na rentabilidade da corporação.

Por essa razão, a manutenção deixou de ser vista como um "mal necessário", tornando-se uma atividade estratégica e vital à produção e à manutenção da boa reputação da imagem institucional. Toledo (2014) destaca, à luz da literatura, a evolução da manutenção, de puramente corretiva para uma combinação entre as abordagens corretiva e preventiva. Isso porque inicialmente a intervenção no sistema era tomada apenas após alguma avaria. Porém, com o passar do tempo, surgiram manutenções programadas com a finalidade de evitar falhas. Para tal avanço, foi necessário desenvolver técnicas preditivas e de inspeção no sentido de melhorar a qualidade das manutenções e, conseqüentemente, maximizar a confiabilidade das operações.

Percebe-se, nesse sentido, que um dos principais objetivos quanto às pesquisas sobre manutenção, é determinar a periodicidade ótima das intervenções de manutenção preventiva visando minimizar o custo total da manutenção que, necessariamente envolve a manutenção preventiva e a corretiva.

Vários modelos estatísticos/probabilísticos estão sendo discutidos amplamente na literatura voltada à manutenção de sistemas reparáveis.

Formalmente, um sistema pode ser uma máquina, um equipamento industrial ou um *software*, por exemplo. Ele é denominado sistema reparável se após uma falha em alguma de suas funções ele puder retornar à condição de operação mediante um reparo. Não há necessidade da substituição completa do sistema.

Os modelos voltados para a análise dos dados referentes a falhas de sistemas reparáveis devem descrever satisfatoriamente a ocorrência das mesmas (de maneira recorrente em um mesmo sistema) ao longo do tempo. Na verdade, tais modelos fazem parte de uma área da Estatística que trata da modelagem de eventos recorrentes de uma maneira geral. Em nosso caso, "eventos recorrentes" são as falhas (COOK & LAWLESS, 2007).

A modelagem de falhas recorrentes depende da suposição que é feita a respeito do efeito ou eficiência do reparo:

Reparo Mínimo (*Minimal Repair, MR*) - O reparo mínimo não altera significativamente o sistema, retornando-o ao estado em que se encontrava antes da ocorrência da falha. Na literatura, costuma-se referir a um sistema sujeito a esse tipo de reparo como "tão ruim quanto velho" ("*as bad as old*", ABAO). Barlow & Hunter (1960) Morimura (1970), Phelps (1981), Barlow & Proschan (1987), Park *et al.* (2000) e Wang (2002), dentre outros, tratam desse assunto.

Reparo Perfeito (*Perfect Repair, PR*) - O reparo perfeito retorna o sistema à mesma condição de um sistema novo. A expressão "tão bom quanto novo" ("*as good as new*", AGAN) é usada para caracterizar sistemas que se submetem a esse tipo de reparo.

Reparo Imperfeito (*Imperfect Repair, IR*) - O reparo imperfeito é o que mais se aproxima da realidade de intervenções de manutenção nos sistemas. Isso porque ele

possui um grau de eficiência entre a restauração total do sistema (reparo perfeito) e a restauração mínima do sistema (reparo mínimo).

A definição de políticas ótimas de manutenção deve levar em consideração o grau do reparo a ser executado. Por exemplo, Gilardoni & Colosimo (2007) encontraram a expressão do custo total esperado de manutenção por unidade de tempo e obtiveram a expressão para o cálculo da periodicidade ótima das manutenções preventivas, ótima no sentido de minimizar o custo total de manutenção. Entretanto, utilizaram como suposição reparo perfeito nas manutenções preventivas e reparo mínimo na ocorrência de falhas entre as preventivas. A estimativa de periodicidade ótima τ foi feita por máxima verossimilhança com base no histórico de falhas de transformadores de energia.

Por outro lado, a literatura está repleta de trabalhos que discutem o reparo imperfeito. Dentre eles destacam-se Pham & Wang (1996), Kijima *et al.* (1988), Kijima (1989), Shin *et al.* (1996), Yanez *et al.* (2002), Decano & Gaudoin (2004) e Wu & Zuo (2010), mas não apresentam uma estimativa da periodicidade ótima com base nessa suposição. Cabe o destaque a Kijima *et al.* (1988) que desenvolveram "um modelo de idade virtual para descrever o funcionamento ao longo do tempo de um sistema que é reparado pelo IR". Os autores não chegaram a uma fórmula fechada para a determinação de periodicidade ótima de manutenção preventiva, mas foi usada uma metodologia que leva em consideração o grau de reparo θ , com $0 \leq \theta \leq 1$, e os tempos de falha do sistema. A periodicidade ótima foi encontrada apenas por simulação para cenários escolhidos.

Doyen & Gaudoin (2004) propuseram duas classes de modelos sob a suposição de reparo imperfeito: as classes de modelos de Redução Aritmética da Idade ("*Aritmetic Reduction Age*", ARA) e de modelos de Redução Aritmética da Intensidade ("*Aritmetic Reduction Intensity*", ARI) que serão discutidos com maior profundidade na seção 2.1 desse trabalho. Toledo *et al.* (2015) apresentam um método gráfico para seleção da classe de modelos ARA e ARI usando diferentes ordens de memória; Toledo *et al.* (2016) desenvolvem um algoritmo para a determinação da periodicidade ótima de manutenção (como fizeram Gilardoni & Colosimo (2007)), porém sob a suposição de reparo imperfeito. Madureira (2014) construiu um pacote computacional em R para desenvolver análises estatísticas de Processos de Lei de Potência; e Fernandes (2015) desenvolveu um pacote, também em R, para tratamento de tempos de falha sob as classes de modelos ARA e ARI.

1.2 Situação prática motivadora: falhas em Transportadores de correia

Transportadores de correia são máquinas de manipulação de materiais que, em combinação com outros dispositivos, são utilizados em numerosos processos com o propósito de providenciar um fluxo contínuo de materiais entre as diversas operações. São encontrados em duas formas mais comuns: correias planas (para caixas e cargas unitárias) e correias abauladas (para transporte de material a granel, como por exemplo minério).

Nos transportadores de correias abauladas, a correia se move sobre roletes dispostos em ângulo. Possui o dobro da capacidade de carga em relação ao transportador de correia plana.

O equipamento é composto pelos seguintes componentes: correia, tambores, roletes, freios, chute, esticador, drive (conjunto de acionamento), conjunto de descarga. Em particular, o conjunto de acionamento é acoplado ao tambor motriz e tem a função de promover a movimentação do transportador e o controle de sua velocidade de trabalho. É constituído dentre outros componentes, de um motor elétrico.

Na Figura 1 é possível ver um exemplo de um transportador de correias abauladas.



Figura 1: Esteira transportadora de minério (Fonte: internet)

Nesse trabalho, estamos interessados nos dados de falhas ocorridas no motor elétrico, durante o período de maio a setembro de 2015, em 7 (sete) transportadores de correia (do tipo abaulada) utilizados por uma mineradora. Cada falha é seguida de um reparo para colocar o motor novamente em funcionamento o mais rápido possível, visto que o prejuízo associado a uma esteira parada é altíssimo. As falhas são registradas em número de horas de operação. Em condições normais os equipamentos funcionam 24 horas por dia, com uma velocidade nominal de 600 rpm, com cargas entre 160 e 200 kg.

Por questões de sigilo, os dados foram multiplicados por um fator (não são os dados originais).

É de interesse avaliar a possibilidade de se implementar um plano de manutenções periódicas em equipamentos similares para evitar as paradas frequentes.

1.3 Objetivos

Esse trabalho tem por objetivo responder a questão colocada para a situação prática descrita na Seção 1.2, isto é, definir a periodicidade ótima para que sejam realizadas manutenções preventivas nas correias transportadoras de modo que o custo de manutenção seja o menor possível.

1.4 Estrutura do Texto

Esse trabalho é composto por quatro capítulos.

O capítulo 2 apresenta uma discussão da literatura acerca de modelos baseados na suposição de reparo imperfeito. Nele são apresentadas as classes ARA e ARI com diferentes ordens de memória propostas por Doyen & Gaudoin (2004), bem como o problema de minimização dos custos de manutenção por meio da fixação de um intervalo de tempo τ entre manutenções preventivas. As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros indexadores da função intensidade bem como da eficiência do reparo também são discutidas nesse capítulo.

No capítulo 3, é feita a análise da base de dados que constitui o objeto de estudo do

presente trabalho. Uma análise preliminar desses dados é apresentada e, em seguida, são estimados pontual e intervalarmente os parâmetros do modelo. Neste capítulo, também é feita a discussão da escolha do modelo adequado seguindo dois métodos de seleção: o da máxima verossimilhança e o do peso da evidência. Em seguida é feita a determinação da política ótima de manutenção para o problema.

Por fim, o capítulo 4 apresenta as conclusões do trabalho.

2 Reparo imperfeito e o problema de redução do custo de Manutenção

2.1 Modelos baseados na suposição de reparo imperfeito

Seja $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ um processo estocástico no qual $N(t)$ representa o número de falhas observadas até o instante de tempo t . Esse processo possui uma função média acumulada de falhas dada por $\Phi(t) = E[N(t)] = \int_0^t E[\lambda(u)]du$ e com função intensidade de falha $\lambda(t)$ dada por:

$$\lambda(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{P[N(t + \delta t) - N(t) = 1 | \mathfrak{S}_{t-}]}{\delta t}, \forall t \geq 0 \quad (2.1)$$

na qual, \mathfrak{S}_{t-} representa o histórico de falhas registradas no sistema até o instante de tempo t , sendo $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N(t)} < t$. Associada à função intensidade de falhas $\lambda(t)$ está a função ROCOF que apresenta a taxa instantânea e determinística de ocorrência de falhas.

Quanto ao efeito de reparo, alguns pressupostos podem ser definidos, tais como o reparo mínimo e o reparo imperfeito, por exemplo.

Sob a hipótese de aplicação do reparo mínimo ao sistema em estudo, presume-se que esse reparo consiste em retornar o sistema a um estado imediatamente anterior àquele encontrado do momento da falha. Nesse sentido, o processo de falhas é um Processo de Poisson não homogêneo, também denominado NHPP, já que sua função intensidade $\lambda(t)$ não é constante $\forall t \geq 0$, apresentando forma côncava ou convexa. Sua função intensidade de falhas $\lambda(t)$ é igual à ROCOF e pode ser escrita como:

$$\lambda(t) = \frac{d}{dt}\Phi(t) = \phi(t), t \geq 0 \quad (2.2)$$

Já sob o pressuposto de reparo imperfeito, algumas formas funcionais para $\lambda(t)$ têm sido propostas na literatura e se encontram nas seções 2.1.1 e 2.1.2 desse trabalho.

2.1.1 Os modelos de Redução Aritmética da Idade ("*Aritmetic Reduction Age*", ARA) de Doyen & Gaudoin (2004)

Essa seção dará um enfoque às classes de modelos ARA propostas por Doyen & Gaudoin (2004). Segundo esses autores, o ARA, ou *Arithmetic Reduction of Age*, consiste em uma classe de modelos que consideram que o reparo de um sistema provoca seu rejuvenescimento de tal modo que sua função intensidade de falha $\lambda(t)$ é igual àquela observada em uma idade virtual V_t , com $V_t < t$. Cabe aqui denominar t como a idade real do sistema, isto é, seu tempo total de funcionamento.

A diferença entre a idade virtual e a idade real do sistema também é apresentada por Doyen & Gaudoin (2004). Conforme conceituam os autores, a idade virtual é uma função positiva da idade real condicionada a seu histórico de falhas, isto é, $V_t = V(t; N(t); t_1, t_2, \dots, t_{N(t)})$. Nesse sentido, $\lambda(t) = \lambda(V_t)$. Aqui, portanto, se encontra a essência desse modelo, uma vez que se torna claro que a função intensidade de falhas no instante t após um reparo se comporta como se o tempo transcorrido desde a inicialização do sistema fosse V_t , uma idade virtual menor que a idade real t do sistema. A Figura 2 apresenta um exemplo para ilustrar esse efeito.

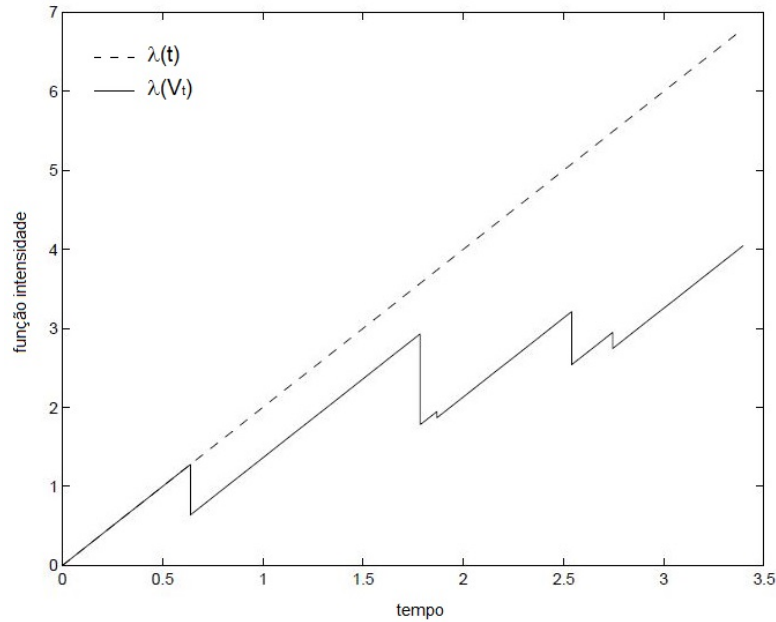


Figura 2: Função intensidade de falha da idade real (linha pontilhada) e Função intensidade de falha da idade virtual (linha sólida). Fonte: (DOYEN & GAUDOIN, 2004, p. 4)

É possível notar pela Figura 2 que a função intensidade de falha para o modelo ARA

$\lambda(V_t)$ é horizontalmente paralela à função intensidade inicial $\lambda(t)$.

A classe de modelos ARA pode utilizar-se de diferentes dimensões de memória. Entenda-se por memória, nesse contexto, como o conjunto de tempos de falha anteriores à atual que serão levados em consideração para a construção do modelo baseado na idade virtual.

Doyen & Gaudoin (2004) destacam três possibilidades para modelagem:

- modelos ARA com memória inifinita (todos o histórico de falha), denominados ARA_∞ . Nesse sentido, entende-se como *infinito* o maior número de falhas registradas em um dos sistemas observados;
- modelos ARA com memória de tamanho 1 (última falha), denominados ARA_1 ; e
- modelos ARA com memória de tamanho m , chamados ARA_m , tal que $m \in \mathbb{N}$.

Como os modelos ARA partem do pressuposto de que há uma redução na idade do sistema, se a ordem de memória englobar todo o histórico de falhas, teremos uma função intensidade dada por:

$$\lambda_{ARA_\infty}(t) = \lambda_R \left(t - (1 - \theta) \sum_{j=0}^{N(t)-1} \theta^j T_{N(t)-j} \right) \quad (2.3)$$

em que λ_R é a função intensidade de falhas determinística inicial do sistema.

A Figura 3 apresenta um exemplo do modelo ARA_∞ com efeito de reparo $\theta = 0,5$. Percebe-se, pela figura, que o efeito do reparo faz com que a variável tempo (do eixo horizontal) se comporte como se seu valor fosse metade de seu valor real (isto é, sua idade virtual se torna a metade da idade real nos instantes do reparo). Toma-se por exemplo a altura da curva no instante $t = 2,03$. A altura da curva para esse valor de tempo é igual à encontrada no instante $t = 1,015$.

Analogamente, o ARA_1 , segundo Malik *apud* Doyen & Gaudoin (2004), consiste no modelo de redução aritmética da idade, porém com base apenas na última falha. Sua função intensidade é dada por:

$$\lambda_{ARA_1}(t) = \lambda_R (t - (1 - \theta)T_{N(t)-j}) \quad (2.4)$$

novamente, com λ_R representando a função intensidade de falha determinística inicial do sistema.

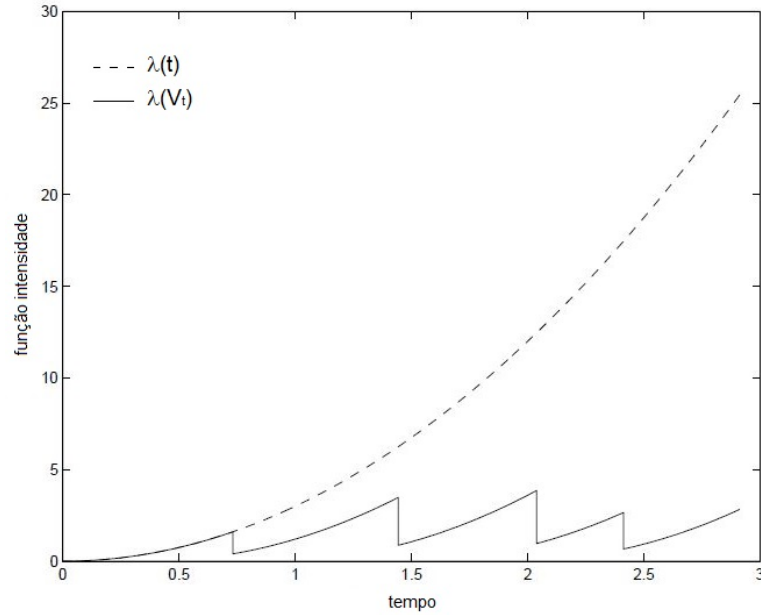


Figura 3: ARA_{∞} com $\theta = 0,5$. Fonte: (DOYEN & GAUDOIN, 2004, p. 49)

Finalmente, o ARA_m considera uma ordem de memória m , sendo m um número natural. Sua função intensidade de falha pode ser expressa por:

$$\lambda_{ARA_m}(t) = \lambda_R \left(t - (1 - \theta) \sum_{j=0}^{\min(m-1, N(t)-1)} \theta^j T_{N(t)-j} \right) \quad (2.5)$$

Conforme discorrem Doyen & Gaudoin (2004), independentemente da ordem de memória considerada em um modelo, o efeito do reparo θ pode gerar diferentes classificações. Denomina-se reparo eficiente aquele cujo efeito de reparo θ é tal que $0 < \theta < 1$; o reparo ideal seria aquele com $\theta = 0$, uma vez que a intensidade de falha voltaria à condição observada em um sistema novo (AGAN); o reparo é considerado inútil quando $\theta = 1$, em que não há mudanças na função intensidade, deixando, pois, o sistema tão ruim quanto velho (ABAO); por fim, o reparo é prejudicial quando $\theta > 1$, provocando a piora do sistema. Evidentemente, o parâmetro θ é desconhecido, tão logo usaremos seu valor estimado $\hat{\theta}$ para fundamentar nossas análises.

2.1.2 Os modelos de Redução Aritmética da Intensidade ("*Aritmetic Reduction Intensity*", ARI) segundo Doyen & Gaudoin (2004)

Essa seção trata de modelos propostos por Doyen & Gaudoin (2004) cujo efeito de reparo consiste na redução da função intensidade de falha. A esses modelos os autores designaram o termo ARI, ou *Aritmetic Reduction of Intensity*. Esse modelo parte de dois pressupostos:

Hipótese 1 - cada reparo reduz o valor da função intensidade de falhas $\lambda(t)$ de forma condicional ao histórico de falhas;

Hipótese 2 - após cada reparo não há mudanças quanto à velocidade de desgaste do sistema. Logo entre duas falhas consecutivas, a função intensidade de falha é verticalmente paralela à função intensidade inicial $\lambda_R(t)$.

Assim, como para a classe de modelos ARA, Doyen & Gaudoin (2004) destacam também três possibilidades de modelagem para a classe ARI:

- modelos ARI com memória infinita (todos o histórico de falha), denominados ARI_∞ . Novamente, entende-se como *infinito* o maior número de falhas registradas em um dos sistemas observados;
- modelos ARI com memória de tamanho 1 (última falha), denominados ARI_1 ; e
- modelos ARI com memória de tamanho m , chamados ARI_m , tal que $m \in \mathbb{N}$.

A modelagem matemática para a classe de modelos ARI_∞ se dá por meio de:

$$\lambda_{ARI_\infty}(t) = \lambda_R(t) - (1 - \theta) \left(\sum_{j=0}^{N(t)-1} \theta^j \lambda(T_{N(t)-j}) \right) \quad (2.6)$$

sendo λ_R a função intensidade de falhas determinística inicial do sistema.

A Figura 4 exibe um exemplo de aplicação do modelo ARI_∞ com efeito de reparo $\theta = 0,5$. Nesse caso, percebe-se que a altura da curva da função intensidade de falha cai obedecendo a proporção dada pelo efeito de reparo θ . Se tomarmos como exemplo o instante $t = 0,79$ em que ocorre um reparo imperfeito com $\theta = 0,5$, observamos que a altura do gráfico cai de 1,88 para 0,94, isto é, cai pela metade. Essa queda não interfere na inclinação da

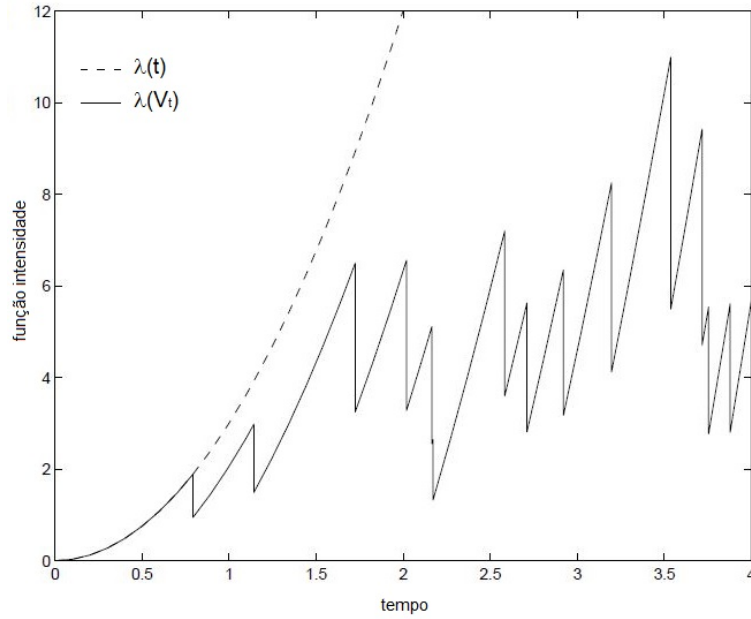


Figura 4: ARI_{∞} com $\theta = 0,5$. Fonte: (DOYEN & GAUDOIN, 2004, p. 47)

curva, corroborando com a suposição de que a velocidade de desgaste do sistema não foi alterada.

Ainda segundo Doyen & Gaudoin (2004), o modelo de redução aritmética da intensidade que considera apenas a última falha para construção da memória tem função intensidade dada por:

$$\lambda_{ARI_1}(t) = \lambda_R - (1 - \theta)\lambda(T_{N(t)}) \quad (2.7)$$

E por fim, o ARI_m , que considera uma ordem de memória m , tal que m é um número natural, tem função intensidade de falha expressa por:

$$\lambda_{ARI_m}(t) = \lambda_R(t) - (1 - \theta) \left(\sum_{j=0}^{\min(m-1, N(t)-1)} \theta^j \lambda_R(T_{N(t)-j}) \right) \quad (2.8)$$

Doyen & Gaudoin (2004) destacam que independente da ordem de memória, o efeito do reparo θ no modelo ARI pode gerar as mesmas classificações do modelo ARA. Isto é, o reparo será eficiente se $0 < \theta < 1$; o reparo será ideal se $\theta = 0$; o reparo será inútil se $\theta = 1$; e finalmente, o reparo será prejudicial quanto $\theta > 1$.

Assim como na classe de modelos ARA, o parâmetro θ utilizado na modelagem ARI é desconhecido, e, portanto, deve-se encontrar seu valor estimado $\hat{\theta}$ para alicerçar qualquer

análise quanto ao ajuste do modelo.

Para ilustrar as principais diferenças entre as classes de modelos ARA e ARI, se encontra a seguir um exemplo numérico apresentado por Toledo *et al.* (2016).

Suponha que um sistema reparável possua um processo de falha cuja função intensidade inicial $\lambda_R(t)$ é um PLP (Processo *Power Law*) cuja fórmula é dada por (2.9) com parâmetros $\beta = 3$ e $\eta = 1$. Considere que o efeito do reparo $\theta = 0,5$. Sejam os tempos de falha $t_1 = 1,2$ e $t_2 = 1,9$, determinam-se as funções intensidade de falha para os modelos ARA e ARI, ambos com ordens de memória $m = 1$ e $m = 2$.

Como

$$\lambda_R(t) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right) \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \quad (2.9)$$

então $\lambda_R(t) = 3t^2$.

Aplicando as equações referentes aos modelos ARA_1 , ARA_m , ARI_1 e ARI_m , com $m = 2$, temos:

$$\begin{aligned} \lambda_{ARA_1}(t) &= \begin{cases} \lambda(t) = 3t^2, & \text{se } 0 \leq t < 1,2, \\ \lambda(t - 0,5 \cdot 1,2) = 3(t - 0,6)^2, & \text{se } 1,2 \leq t < 1,9 \\ \lambda(t - 0,5 \cdot 1,9) = 3(t - 0,95)^2, & \text{se } 1,9 \leq t < \dots \end{cases} \\ \lambda_{ARA_2}(t) &= \begin{cases} \lambda(t) = 3t^2, & \text{se } 0 \leq t < 1,2, \\ \lambda(t - 0,5 \cdot 1,2) = 3(t - 0,6)^2, & \text{se } 1,2 \leq t < 1,9 \\ \lambda(t - 0,5 \cdot 1,9 - 0,5^2 \cdot 1,2) = 3(t - 1,25)^2, & \text{se } 1,9 \leq t < \dots \end{cases} \\ \lambda_{ARI_1}(t) &= \begin{cases} \lambda(t) = 3t^2, & \text{se } 0 \leq t < 1,2, \\ \lambda(t) - 0,5 \cdot \lambda(1,2) = 3t^2 - 2,16, & \text{se } 1,2 \leq t < 1,9 \\ \lambda(t) - 0,5 \cdot \lambda(1,9) = 3t^2 - 2,16 = 3t^2 - 5,415, & \text{se } 1,9 \leq t < \dots \end{cases} \\ \lambda_{ARI_2}(t) &= \begin{cases} \lambda(t) = 3t^2, & \text{se } 0 \leq t < 1,2, \\ \lambda(t) - 0,5 \cdot \lambda(1,2) = 3t^2 - 2,16, & \text{se } 1,2 \leq t < 1,9 \\ 3t^2 - 2,16 = 3t^2 - 6,495, & \text{se } 1,9 \leq t < \dots \end{cases} \end{aligned}$$

A Figura 5 mostra as funções intensidade de falha geradas a partir dos cálculos supracitados sob os modelos ARA e ARI.

ARA Se tomarmos o ponto $t_1 = 1,2$, por exemplo, percebemos que sob o ARA_1 , sua idade virtual cai 50%, isto é, a altura da curva no eixo vertical (que representa a função intensidade) referente ao ponto $t_1 = 1,2$ é igual à observada no ponto $t = 0,6$.

ARI Se observarmos o mesmo ponto $t_1 = 1,2$, agora sob a suposição de ARI_1 , a função intensidade cai pela metade, ou seja, a altura da curva no eixo vertical (que representa a função intensidade) torna-se metade da observada antes do reparo (a saber, antes do reparo $\lambda_R(1,2) = 4,32$; depois do reparo $\lambda(1,2) = 2,16$).

Vale salientar que essas reduções de 50% observadas anteriormente devem-se ao coeficiente de reparo $\theta = 0,5$.

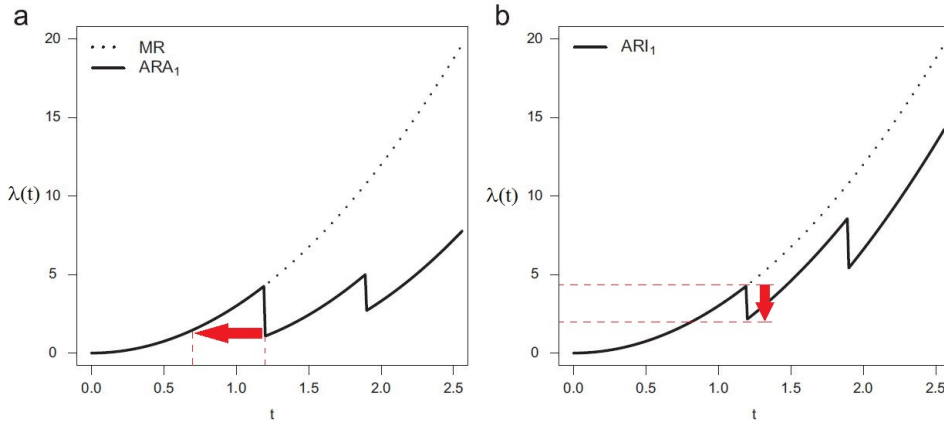


Figura 5: Funções intensidade de falha para os modelos ARA_1 (a) e ARI_1 (b) com intensidade inicial segundo PLP com $\beta = 3$, $\eta = 1$ e $\theta = 0,5$ e falhas observadas nos tempos $t_1 = 1,2$ e $t_2 = 1,9$. Fonte: (TOLEDO *et al.*, 2016, p.110)

2.2 Estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança segundo Toledo *et al.* (2015)

Ao se analisar a confiabilidade de um sistema reparável, há duas formas de amostrar seus dados de falha. Se a coleta de dados de falhas acontecer até uma quantidade de falhas pré-determinada, dizemos que os dados foram truncados por falha. Se, porém, os dados forem coletados até um tempo pré-definido, então dizemos que houve um truncamento por tempo. A verossimilhança apresentada nessa seção trata dessas duas formas de amostragem para um conjunto de $k_1 + k_2$ sistemas idênticos e reparáveis, sob a suposição de

reparo imperfeito. Há k_1 sistemas em que foi feito o truncamento por tempo e k_2 sistemas nos quais houve truncamento por falha.

Algumas pressuposições estão listadas a seguir:

- Haverá um reparo de grau θ após cada falha;
- ao todo n_i falhas foram observadas no sistema i , sendo $i = 1, 2, \dots, k_1$ e n_j^* falhas foram observadas no sistema j , sendo $j = 1, 2, \dots, k_2$;
- o sistema i , truncado por tempo, é observado até o instante de tempo pré-definido t_i^* e o sistema j , truncado por falha, é observado até a quantidade pré-determinada de falhas n_j^* ;
- o número total de falhas observadas em todos os sistemas é dado por $N = \sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j$;
- os tempos $t_{i,l}$ com $i = 1, 2, \dots, k_1$ e $l = 1, 2, \dots, n_i$ representam os tempos de falha da l -ésima falha do i -ésimo sistema truncado por tempo, registrados desde que o sistema foi colocado em funcionamento, logo temos um vetor de tempos de falha para esses k_1 sistemas ($t_{i,1} < t_{i,2} < \dots < t_{i,n_i}$);
- os tempos $t_{j,q}$ com $j = 1, 2, \dots, k_2$ e $q = 1, 2, \dots, n_j^*$ representam os tempos de falha da q -ésima falha do j -ésimo sistema truncado por falha, registrados desde que o sistema foi colocado em funcionamento. Logo, temos um vetor de tempos de falha para esses k_2 sistemas ($t_{j,1} < t_{j,2} < \dots < t_{j,n_j^*}$);
- designamos μ como o vetor que contém os parâmetros do modelo, incluindo, pois, os parâmetros indexadores da função intensidade de falha (β e η) e o parâmetro de eficiência do reparo θ . Logo, $\mu^T = [\beta, \eta, \theta]$

A Figura 6 apresenta um esquema simplificado com os k_1 sistemas truncados por tempo e os k_2 sistemas truncados por falha e seus respectivos indexadores de tempos de falha (que foram descritos anteriormente).

A função de probabilidade do processo de falhas é a probabilidade conjunta de todos os tempos de falhas nos $k_1 + k_2$ sistemas observados:

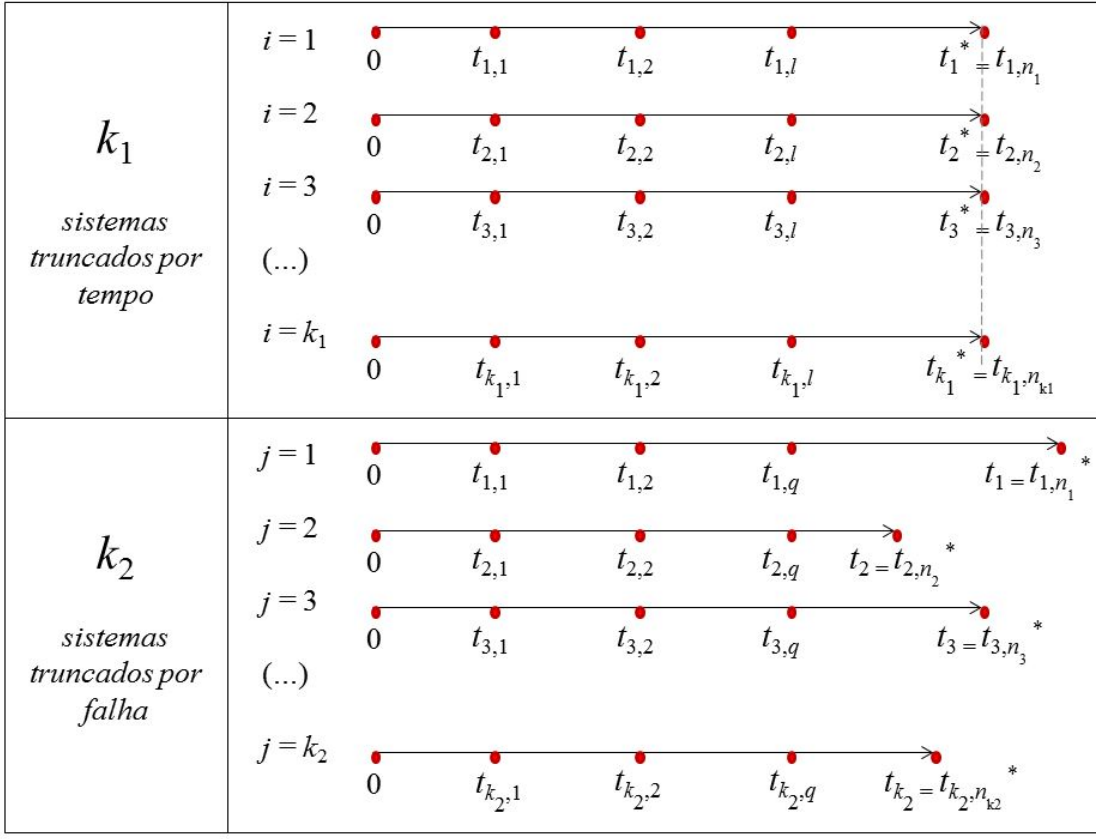


Figura 6: Representação esquemática dos $k_1 + k_2$ sistemas reparáveis observados

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^{k_1} (f(t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i} | N(t_i^*) = n_i)) \cdot \prod_{j=1}^{k_2} f(t_{j,1}, \dots, t_{j,n_j}) \quad (2.10)$$

Sabemos que o processo PLP tem função intensidade inicial $\lambda_R(t)$ dada pela expressão (2.9) e reproduzida abaixo:

$$\lambda_R(t) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right) \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}, \eta, \beta, t > 0$$

e função média acumulada inicial $\Phi_R(t)$ dada por:

$$\Phi_R(t) = \int_0^t \lambda_R(u) du = \left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta \quad (2.11)$$

Nessa função, percebem-se dois parâmetros: β e η . O primeiro é chamado de parâmetro de forma e representa a evolução do sistema, ou seja, como ele deteriora ou melhora ao longo

do tempo (caso o $\beta > 1$, o sistema estará deteriorando, já que sua função intensidade de falha aumentará no tempo t), enquanto o segundo é chamado parâmetro de escala.

Assim, a função de log-verossimilhança para o PLP referente ao modelo genérico ARA_m , em que m corresponde à ordem de memória, é dada como:

$$\begin{aligned}
l_{PLP+ARA_m}(\mu) = & \left(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\beta) - \beta \left(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\eta) + \\
& + (\beta - 1) \left[\sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \log \left(t_{i,l} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p} \right) \right] + \\
& + \left[\sum_{j=1}^{k_2} \sum_{q=1}^{n_j^*} \log \left(t_{j,q} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-2)} \theta^p t_{j, q-1-p} \right) \right] (\beta - 1) + \\
& + \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \left[- \left(\frac{t_{i,l} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right] + \\
& + \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \left[\left(\frac{t_{i, l-1} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, l-2)} \theta^p t_{i, l-1-p}}{\eta} \right)^\beta \right] + \\
& + \sum_{i=1}^{k_1} - \left(\frac{t_i^* - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, n_i-1)} \theta^p t_{i, n_i-p}}{\eta} \right)^\beta + \\
& + \sum_{i=1}^{k_1} \left(\frac{t_{i, n_i} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, n_i-1)} \theta^p t_{i, n_i-p}}{\eta} \right)^\beta + \\
& + \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{q=1}^{n_j^*} - \left(\frac{t_{j,q} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-2)} \theta^p t_{j, q-1-p}}{\eta} \right)^\beta + \\
& + \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{q=1}^{n_j^*} \left(\frac{t_{j, q-1} - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-2)} \theta^p t_{j, q-1-p}}{\eta} \right)^\beta
\end{aligned}$$

com $\mu = (\beta, \eta, \theta)^T$.

Assim como no modelo ARA_m , é possível expressar a função de log-verossimilhança para

o PLP referente ao modelo genérico ARI_m , em que m representa a ordem de memória:

$$\begin{aligned}
l_{PLP+ARI_m}(\mu) = & \left(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\beta) - \beta \left(\sum_{i=1}^{k_1} n_i + \sum_{j=1}^{k_2} n_j^* \right) \log(\eta) + \\
& + \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \log \left(t_{i,l}^{\beta-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}^{\beta-1} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{q=1}^{n_j^*} \log \left(t_{q,j}^{\beta-1} - (1-\theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1,q-2)} \theta^p t_{j,q-1-p}^{\beta-1} \right) + \\
& + \eta^{-\beta} \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} \left(-t_{i,l}^{\beta-1} + t_{i,l-1}^{\beta-1} \right) - \\
& + \eta^{-\beta} (1-\theta) \beta \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{l=1}^{n_i} [t_{i,l} - t_{i,l-1}] \sum_{p=0}^{\min(m-1,l-2)} \theta^p t_{i,l-1-p}^{\beta-1} + \\
& + \eta^{-\beta} \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{q=1}^{n_j^*} \left(-t_{q,j}^{\beta-1} + t_{q,j-1}^{\beta-1} \right) - \\
& + \eta^{-\beta} (1-\theta) \beta \sum_{j=1}^{k_2} \sum_{q=1}^{n_j^*} [t_{q,m} - t_{j,q-1}] \sum_{p=0}^{\min(m-1,q-2)} \theta^p t_{j,q-1-p}^{\beta-1} + \\
& + \eta^{-\beta} \sum_{i=1}^{k_1} \left(-t_i^{*\beta-1} + t_{i,n_i}^{*\beta-1} \right) - \\
& + \eta^{-\beta} (1-\theta) \beta \sum_{i=1}^{k_1} [t_i^* - t_{i,n_i}] \sum_{p=0}^{\min(m-1,n_i-1)} \theta^p t_{i,n_i-p}^{\beta-1}
\end{aligned}$$

novamente, com $\mu = (\beta, \eta, \theta)^T$.

Ao maximizar qualquer uma dessas funções frente a cada um dos parâmetros, podem-se encontrar as estimativas pontuais dos mesmos com base na amostra de dados de falha. Porém, além das estimativas pontuais desses parâmetros, é interessante avaliar seus respectivos intervalos de confiança sob certo nível de significância α pré-definido.

Os intervalos de confiança podem ser modelados utilizando métodos mais clássicos da literatura como a teoria assintótica, por exemplo, explorada por Toledo *et al.* (2015), assim como métodos que ganharam bastante destaque na literatura após a informatização das análises estatísticas, como o *bootstrap* que será utilizado nesse trabalho.

Efron (1981) e Toledo *et al.* (2015) destacam, em linhas gerais, a definição e os passos para a execução desse método a fim de se fazerem inferências intervalares dos parâmetros de interesse. Segundo os autores, o *bootstrap* é uma técnica não paramétrica que consiste na geração de B amostras aleatórias de tamanho n com reposição (pseudodados) geradas a partir da amostra inicial, também de tamanho n . Calculam-se, portanto, as estatísticas de interesse com base nessas B amostras e constrói-se um histograma para avaliar a dispersão referente a esta estatística. Utilizando-se do desvio-padrão dessa estatística frente às B amostras, podem ser construídos intervalos de confiança ao nível de $100(1 - \alpha)\%$.

A principal finalidade para o uso dos intervalos de confiança e, sobretudo, das estimativas pontuais dos parâmetros reside no objetivo de conceber uma política de manutenção preventiva que minimiza os custos totais esperados de manutenção. Essa minimização de custos deve passar obrigatoriamente pela determinação de um intervalo τ entre as manutenções preventivas cujo efeito de reparo é θ (com $0 \leq \theta \leq 1$) de modo que o custo de manutenção seja mínimo. A discussão da literatura sobre a política ótima de manutenção será apresentada na seção 2.4. Porém, para se determinar o período ideal entre manutenções preventivas (ideal no sentido de minimizar os custos inerentes), faz-se necessário identificar o modelo a ser utilizado no problema. Definir o modelo significa escolher entre as classes *ARA* e *ARI* e ainda entre as diferentes ordem de memória m possíveis. Essa escolha, obviamente, irá interferir nas estimativas pontuais e intervalares dos parâmetros que estão envolvidos na construção da função intensidade de falha. A discussão sobre o método de escolha do modelo com base em análises gráficas é apresentada na seção subsequente.

2.3 Critérios de Seleção do Modelo (*ARA*, *ARI* e suas ordens de memória)

Conforme já apresentado no presente trabalho, diferentes modelos podem ser desenvolvidos a partir de um mesmo problema sob o pressuposto de reparo imperfeito, uma vez que as classes de modelos *ARA* e *ARI* podem assumir diferentes ordens de memória, conforme discutido por Doyen & Gaudoin (2004). Deve-se, pois, utilizar algum método para a seleção do modelo mais adequado ao problema em estudo baseando-se na qualidade do ajuste.

Toledo *et al.* (2015) apresentam alguns critérios de seleção clássicos da literatura e propõem uma solução inédita baseada em um método gráfico que será apresentado nesta seção. Segundo os autores, o modelo mais adequado é aquele que apresenta maior qualidade ou bondade do ajuste. Eles classificam os critérios para a seleção desse modelo em (1) critérios de informação e (2) técnicas gráficas de seleção.

Sob o arcabouço dos critérios de informação se encontra a seleção de modelos baseada na maximização da log-verossimilhança \hat{l} . Burnham & Anderson *apud* Toledo *et al.* (2015) desenvolveram um procedimento que consiste no escalonamento dos valores da função de log-verossimilhança, cuja fórmula é dada por:

$$\Delta_r = \hat{l}_{maxima} - \hat{l}_r, (r = 1, 2, \dots, R) \quad (2.12)$$

sendo \hat{l}_r cada uma das R log-verossimilhanças ajustadas. A maior log-verossimilhança observada nesses R modelos designaremos por \hat{l}_{maxima} . O objetivo é claramente tornar o $\Delta_r = 0$, fato que ocorrerá apenas se a log-verossimilhança do r -ésimo modelo \hat{l}_r for igual à máxima encontrada \hat{l}_{maxima} .

Os autores ainda determinam uma grandeza denominada Peso da Evidência. Se submetermos todos os R modelos à equação seguinte, teremos um panorama do nível de qualidade do ajuste observado em cada modelo frente aos demais, facilitando o ranqueamento dos mesmos.

$$W_r = \frac{e^{\left(\frac{-\Delta_r}{2}\right)}}{\sum_{r=1}^R e^{\left(\frac{-\Delta_r}{2}\right)}} \quad (2.13)$$

Essa equação fornece um valor de W_r dentro do intervalo $[0,1]$, podendo o r assumir qualquer valor no intervalo $r = 1, 2, \dots, R$. Pelo fato de que cada W_r é uma partição do espaço que contém todos os possíveis valores de bondade do ajuste, $\sum_{r=1}^R W_r = 1$.

Se analisarmos conjuntamente os valores de Δ_r e W_r cujos cálculos procedem conforme supracitado, o melhor modelo ajustado ao problema será aquele que obtiver menor Δ_r e, conseqüentemente, maior W_r (entenda como mais próximo de 1).

Como uma nova proposta à teoria voltada à seleção de modelos, Toledo *et al.* (2015) apresentam um método gráfico de seleção que propõe estimar a função média acumulada (MCF) a partir de cada modelo (ARA_m ou ARI_m , com diferentes ordens de memória m , calculando a média global da área sob a função intensidade $\hat{\lambda}$ de cada modelo) e comparar esse valor ao encontrado por meio do MCF empírico ou procedimento de Nelson-Aalen (AALEN, 1978). Os passos para a determinação do MCF baseado nos modelos se encontram a seguir:

Passo 1 - Estimam-se os parâmetros do modelo (PLP sob o ARA_m ou ARI_m) a partir dos dados de falha provenientes dos $k_1 + k_2$ sistemas, maximizando as respectivas log-verossimilhanças apresentadas na seção 2.2.

Passo 2 - Em seguida, utilizam-se os tempos de falha coletados para o i -ésimo sistema truncado por tempo (isto é, $t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,n_i}^*$) e o j -ésimo sistema truncado por falha ($t_{j,1}, t_{j,2}, \dots, t_{j,n_j}$), bem como as estimativas dos parâmetros β , η e θ nas funções intensidade de falha estimada $\hat{\lambda}_i(t)$ e $\hat{\lambda}_j(t)$ referentes a cada um sistema (como já apresentadas na seção 2.1).

Passo 3 - Pode-se integrar cada uma das funções $\hat{\lambda}_i(t)$ (referentes a cada sistema truncado por tempo) e $\hat{\lambda}_j(t)$ (referentes a cada sistema truncado por falha), todas no intervalo $[0, t]$ com $t \in [0, t_{i,n_i}^*]$, se truncado por falha ou $t \in [0, t_{i,n_i}^*]$, se truncado por tempo. Por meio dessa integral será possível determinar as funções média acumulada estimada $\hat{\Phi}_i(t)$ (para o i -ésimo sistema truncado por tempo) e $\hat{\Phi}_j(t)$ (para o j -ésimo sistema truncado por falha).

Passo 4 - Os passos 2 e 3 são feitos para cada um dos $k_1 + k_2$ sistemas.

Passo 5 - Estima-se o MCF baseado nos modelos no tempo t como

$$\frac{\sum_{i=1}^{k_1} \hat{\Phi}_i(t) + \sum_{j=1}^{k_2} \hat{\Phi}_j(t)}{k_1 + k_2} \quad (2.14)$$

Logo, segundo Toledo *et al.* (2015), ao encontrarmos um modelo cujos valores estimados de MCF (pelo ARA_m ou ARI_m) estiverem mais próximos do MCF empírico, esse será então o modelo com maior qualidade de ajuste.

Os gráficos obtidas por Toledo *et al.* (2015) estão apresentados na Figura 7. O objetivo aqui é de exemplificar a aplicação do método gráfico para a seleção de modelos utilizando o roteiro anterior.

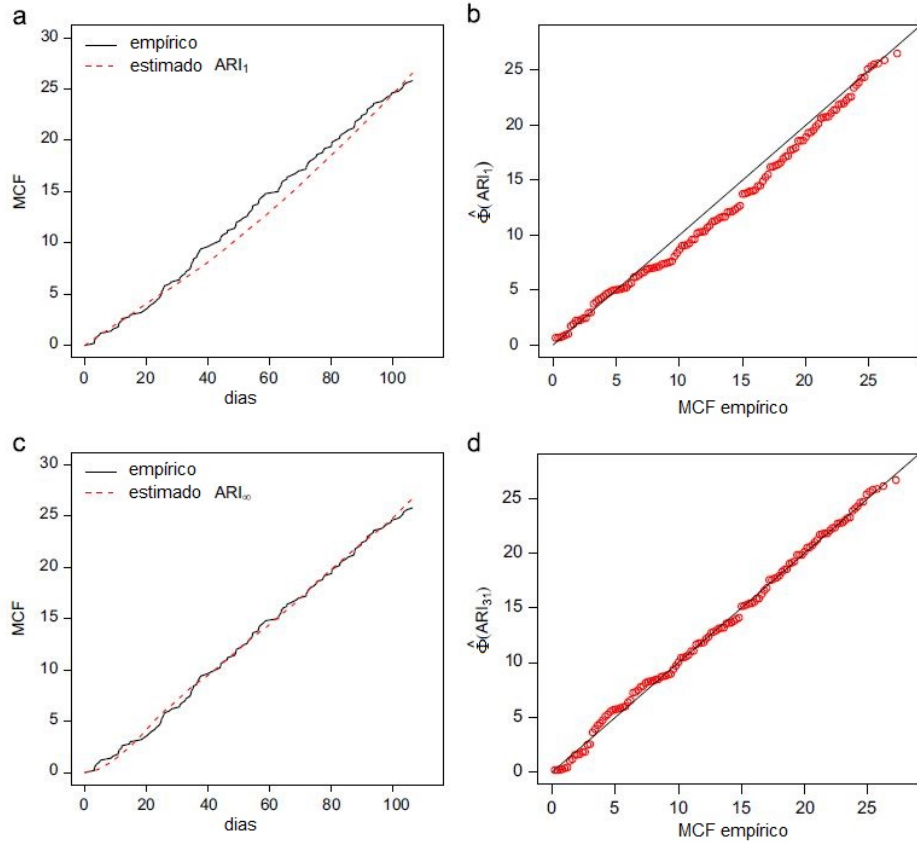


Figura 7: Gráficos de diagnóstico: comparação entre o MCF empírico e o MCF estimado para ARI_1 (a e b) e ARI_∞ (c e d). Fonte (TOLEDO *et al.*, 2015, p. 113)

Percebe-se que para o modelo ARI_∞ apresentado nas Figuras 7-c e 7-d, há uma maior aderência dos valores estimados pelo ajuste em relação ao MCF empírico. Essa constatação foi suficiente para Toledo *et al.* (2015) concluírem que esse é melhor modelo.

2.4 O problema da minimização de custo

Ao conceber uma política de manutenção para determinado sistema de uma companhia, o fator custo deve ser considerado. Isso porque, em geral, manutenções preventivas podem reduzir as chances de falha nesse sistema, como também aumentar os custos de manutenção caso o intervalo entre as manutenções não seja bem estabelecido.

Suponha que um sistema reparável e sujeito a falhas seja colocado em funcionamento no instante $t = 0$ sob o qual são colocadas algumas condições:

- **Unidades τ :** A manutenção preventiva é efetuada em intervalos de τ unidades de tempo;
- **Custo C_{PM} :** incide um custo esperado C_{PM} a cada manutenção preventiva;
- **PM:** o sistema retorna ao estado tão bom quanto novo (AGAN) após cada ação de manutenção preventiva;
- **IR:** entre as manutenções preventivas, um reparo (com $\theta \in [0,1]$) é executado;
- **Custo C_{IR} :** o custo estimado do reparo imperfeito é denominado C_{IR} ;
- **Independência:** os custos de reparo e tempos de falha são independentes;
- **Tempo de reparo:** desprezível;
- **Indisponibilidade:** os custos de indisponibilidade são absorvidos pelos C_{PM} e C_{IR} .

Garantidas as pressuposições supracitadas e conforme discutido por Gilardoni & Colosimo (2007) *apud* Toledo *et al.* (2015), o custo de manutenção esperado por unidade de tempo $C(\tau)$ para o sistema pode ser expresso por:

$$C(\tau) = \frac{C_{PM} + C_{IR} \cdot E[N(\tau)]}{\tau}, \tau > 0 \quad (2.15)$$

Deseja-se minimizar o valor numérico da expressão anterior, reduzindo assim, ao máximo, o custo inerente às atividades de manutenção da companhia. Toledo *et al.* (2015) aplicam derivada para executar essa otimização e apresentam o resultado desse cálculo sob a notação $D(\tau)$ que pode ser observado a seguir:

$$D(\tau) = \tau \phi(\tau) - \Phi(\tau) = \frac{C_{PM}}{C_{IR}} \quad (2.16)$$

Porém, os autores destacam que não há uma solução fechada para essa otimização (mais precisamente para $\hat{\Phi}(\tau)$) sob a suposição de reparo imperfeito, levando o problema à solução numérica cujo roteiro se encontra adiante. Outro ponto importante destacado pelos autores consiste na não obrigatoriedade de se definirem individualmente os valores de C_{PM} e C_{IR} , mas somente sua razão, o que já consiste em uma simplificação do problema por meio da aplicação dessa metodologia.

O roteiro definido por Toledo *et al.* (2015) para que se determine a periodicidade ótica de manutenção preventiva passa pela determinação dos parâmetros do modelo de falhas por meio das estimativas $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ e pela estimação da função média acumulada $\hat{\Phi}(t)$. Tal roteiro é apresentado a seguir:

Passo 1 - Geram-se as estimativas de máxima verossimilhança do modelo escolhido (escolha feita pelo método gráfico apresentado na seção anterior). Logo, nesse passo, determinam-se $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ por meio das funções de máxima verossimilhanças já apresentadas nesse trabalho;

Passo 2 - Estima-se a função média acumulada $\hat{\Phi}(t)$. Pode-se fazer uso da simulação de Monte Carlo segundo a qual, usam-se as estimativas $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ para gerar possíveis históricos de falha e consequente cálculo do MCF:

Passo 2.1 - Executa-se a simulação de Monte Carlo. Para mais detalhes, ver Anexos I e II.

Passo 2.2 - Calcula-se o MCF ($\hat{\Phi}(t)$). As etapas do cálculo podem ser vistas no Anexo III.

Passo 3 - Estima-se a periodicidade ótica de manutenção preventiva τ , isto é, aplica-se a fórmula $D(\tau) = \tau\phi(\tau) - \Phi(\tau) = \frac{C_{PM}}{C_{IR}}$. Porém, o uso desta fórmula exige que as funções intensidade $\phi(t)$ e média acumulada $\Phi(t)$ sejam determinadas previamente. A função $\Phi(t)$ será encontrada no **Passo 2.2** (ela é o MCF). Para encontrarmos $\phi(t)$ precisaríamos derivar $\Phi(t)$ em relação a t . Mas, como $\Phi(t)$ será provavelmente uma função degrau, sua derivada será igual a zero. O mecanismo que pode ser utilizado é o de aproximação dessa função degrau por uma função convexa. Esse princípio é denominado Maior Minorant Convexo (*Greatest Convex Minorant*, GCM). Boswell (1966) *apud* Toledo *et al.* (2015), define que a GCM de $\hat{\Phi}(t)$, que poderemos chamar de $\hat{\Phi}_{SG}(t)$ ou $\hat{\Phi}_{C-NPMLE}(t)$, será dada por:

$$\hat{\Phi}_{SG}(t) = \sup \left\{ g(t) : g(t) \text{ é convexa e } g(u) \leq \hat{\Phi}(u) \forall u \right\}$$

Logo, a derivada direita da maior função convexa menor ou igual a $\hat{\Phi}(t)$ será usada para se determinar $\hat{\phi}(t)$, isto é, $\hat{\phi}_{SG}(t) = \hat{\Phi}'_{SG}(t^+)$

Pode-se definir um intervalo de confiança para a periodicidade ótica de manutenção

preventiva τ utilizando a reamostragem de *bootstrap* a um nível de significância α pré-definido.

3 Determinação da Política Ótima de Manutenção Preventiva para a base de dados *Correias*

Esse capítulo apresenta uma análise do problema já introduzido no Capítulo 1 quanto aos tempos de falhas de transportadores de correia de uma empresa mineradora. A finalidade aqui é a de conceber uma política de manutenção que minimiza os custos inerentes à prática dessa manutenção àquelas correias transportadoras.

Vale ressaltar que esses transportadores de correias são máquinas de manipulação de materiais que, em combinação com outros dispositivos, são utilizados em vários processos com o propósito de proporcionar um fluxo contínuo de materiais entre as diversas etapas de operação.

Foram observados 172 tempos de falhas dos transportadores de correias abauladas. Essas falhas estavam ligadas diretamente ao motor elétrico acoplado àquelas correias.

Por sigilo de dados, os tempos de falha que aqui são considerados não correspondem aos tempos reais. Isso se deve ao fato que os dados divulgados pela empresa são, na verdade, um produto dos reais tempos de falha por uma constante K desconhecida nesse trabalho.

Para construir as análises adequadas à concepção da política ótima de manutenção preventiva ao problema em estudo, foram utilizados os pacotes desenvolvidos em linguagem R por Madureira (2015) e Fernandes (2015).

O presente capítulo apresenta as etapas para o atendimento da finalidade desse trabalho e está dividido em três seções.

A primeira seção, 3.1, corresponde à análise preliminar dos dados. Nessa seção serão apresentados os gráficos de Eventos e de Média Acumulada. Por meio desses gráficos é possível fazer uma caracterização dos momentos em que houve falhas no processo em estudo e ainda, verificar se há ou não indícios de que o sistema estaria se degenerando com o passar do tempo.

Em seguida, as estimativas pontuais e intervalares dos parâmetros dos modelos são apresentadas na seção 3.2. Esta seção se encerra com a aplicação de metodologias de seleção do modelo com melhor qualidade de ajuste baseadas na verossimilhança e no peso da

evidência.

Por fim, a seção 3.3 executa e exhibe os passos para a determinação da periodicidade ótima de manutenção preventiva para o problema em questão.

3.1 Análise Preliminar dos Dados

A empresa mineradora disponibilizou dados de 7 transportadores de correia abauladas. Cada um desses transportadores será aqui designado como um sistema. Esses sistemas são considerados reparáveis, uma vez que após uma falha, não é necessária sua substituição completa para o reestabelecimento de suas funções.

Começaremos nossa análise pelo gráfico de eventos que está apresentado na Figura 8.

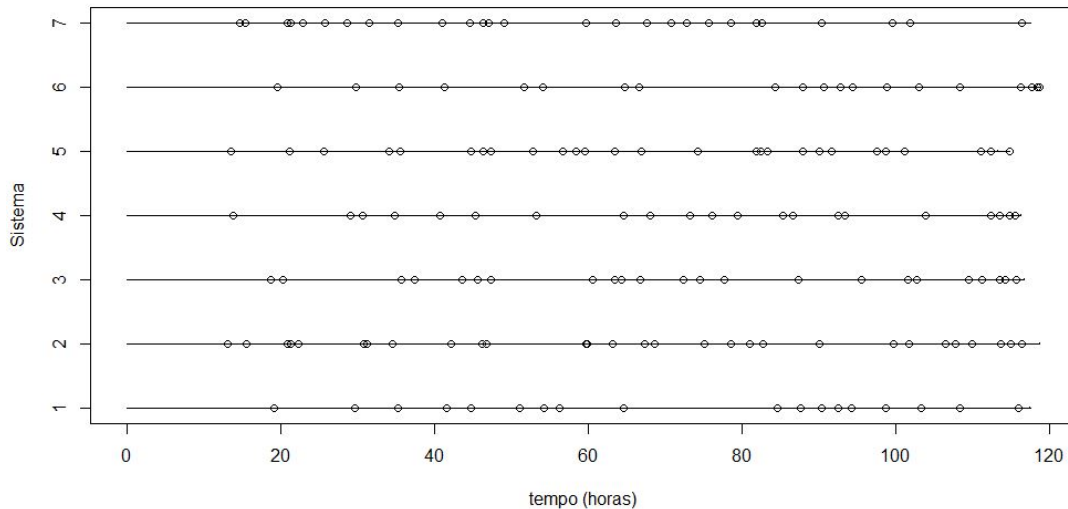


Figura 8: Gráfico de eventos para a base de dados *Transportadores* (tempo em horas)

Entende-se como evento, nesse contexto, a ocorrência de uma falha. Cada linha representa um sistema (do sistema 1 ao sistema 7). O eixo horizontal traz a variável aleatória *tempo* (em horas) e cada mini-círculo presente nas linhas internas ao gráfico corresponde a uma falha (podendo haver mais de um mini-círculo em cada linha).

Por meio da Figura 8 é possível destacar a necessidade de se implantar uma política de manutenção preventiva no processo em estudo, haja vista que vários sistemas falharam quase ao mesmo tempo, repetidas vezes, reduzindo nesses casos, a disponibilidade de recursos necessários para a execução do serviço de transporte de material. É notório

que essas falhas prejudicam a prestação do serviço final porque geram atrasos indesejáveis durante as tentativas de recuperação do sistema, isto é, durante as manutenções corretivas realizadas.

Pode-se fazer uso, ainda, de outra estatística descritiva: da função MCF (*Mean Cumulative Function* ou Função Média Acumulada do Número de Falhas), apresentada por Aalen (1978). A MCF é um estimador não paramétrico da função $\Phi(t) = E[N(t)]$ do processo pontual. Essa função pode ser visualizada na Figura 9. Por meio desse gráfico é possível verificar qual o valor esperado de falhas até certo instante de tempo.

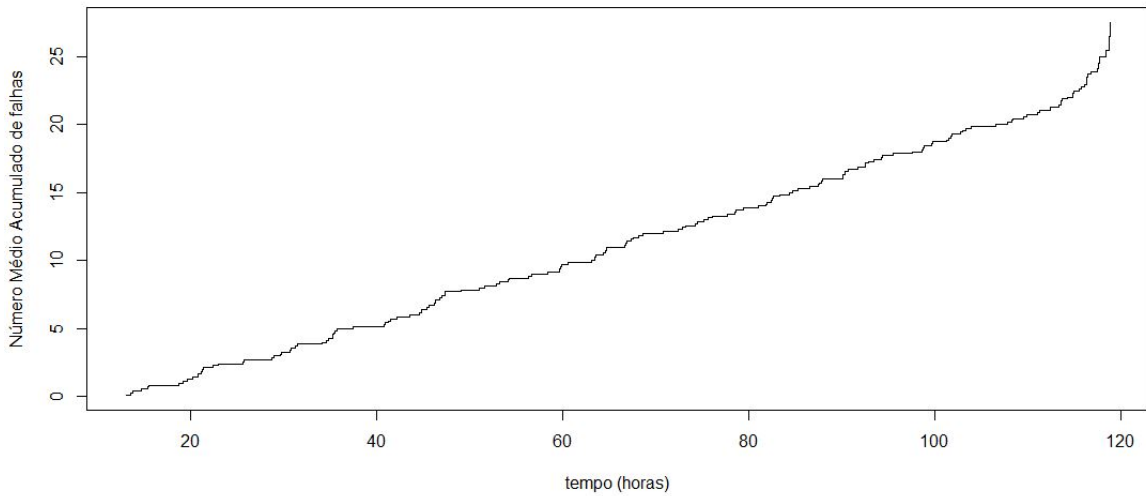


Figura 9: Gráfico da Média Acumulada do número de falhas para a base de dados *Transportadores*

É possível notar por meio do gráfico da Figura 9 que o mesmo apresenta uma curva ascendente e, para valores mais altos da variável tempo, uma ligeira concavidade para cima. Nota-se ainda que essa curva se comporta de modo muito parecido a uma reta. Se a presente pesquisa estivesse interessada em conceber uma política de manutenção com a suposição de reparo mínimo, poderíamos inferir, a partir desse comportamento da função média acumulada, que o processo de falha se tratasse de um HPP, isto é, um Processo de Poisson Homogêneo. Isso significaria dizer que, ao longo do tempo, os intervalos entre as falhas não aumentariam, tampouco diminuiriam. Se $\lambda(t)$ fosse modelada como uma Lei de Potência (equação 2.9), matematicamente poderíamos expressar $\lambda(t)$ como uma constante e, como consequência, o parâmetro de forma $\beta = 1$. Porém, nesse trabalho, submete-se o processo de falhas a manutenções com a suposição de reparo imperfeito. Na literatura referente a reparos imperfeitos, não há correlação entre a concavidade da

curva da função média acumulada e a classificação do sistema em degenerativo ou não. Já que iremos utilizar a forma funcional Power Law, isso será verificado quando estivermos discutindo o valor estimado do parâmetro β , que não é igual a 1, embora a função média acumulada esteja parecida com uma reta.

De maneira complementar, outras hipóteses estariam relacionadas ao gráfico do número esperado acumulado de falhas, caso tratássemos de reparos mínimos. Se o gráfico da Figura 9 apresentasse concavidade para baixo, o tempo entre as falhas seria maior à medida que observássemos maiores valores de tempo. Logo, poderíamos supor que o sistema estivesse melhorando, ficando menos sujeito a falhas em tempos cada vez mais distantes do momento em que a observação foi iniciada (isso poderia ser validado caso o valor de $\beta < 1$). Se, porém, a curva apresentasse concavidade para cima, poderíamos inferir que o sistema estivesse piorando, já que os intervalos de tempo entre as falhas ficariam cada vez menores com o passar do tempo.

3.2 Estimativas pontuais e intervalares dos parâmetros do modelo selecionado

Nessa etapa da pesquisa, após a análise preliminar dos dados, se procuram as estimativas pontuais e intervalares do modelo. Porém, na literatura, há vários modelos à disposição. Deve-se, pois, selecionar aquele que melhor se ajusta aos dados, isto é, o modelo que apresenta melhor qualidade de ajuste.

Por meio do pacote computacional em linguagem R desenvolvido por Fernandes (2015), foram testados 30 modelos ARA e outros 30 modelos ARI para a base de dados *Correias*. Para cada modelo usou-se uma ordem de memória diferente (de 1 a ∞ , sendo $\infty = 30$). A discussão teórica desses modelos foi apresentada no capítulo 2 desse trabalho, mas é válido lembrar que a ordem de memória m corresponde ao maior número de falhas observado entre os sistemas. O sistema 2 apresentou 30 falhas, superando todos os outros no número de falhas. Nesse sentido, a variável m , quando assumir o valor 30 (maior valor possível para esse processo de falha), será chamado de $m = \infty$.

A finalidade de tal abordagem, que executa todos esses modelos, foi a de utilizar uma metodologia que permitisse encontrar aquele modelo (ARA ou ARI, bem como sua ordem de

memória) que maximizasse a verossimilhança. Foram utilizadas, nesse passo, as fórmulas apresentadas na seção 2.3 desse trabalho que trata especificamente do critério de seleção de modelos baseada na Verossimilhança e no Peso da Evidência.

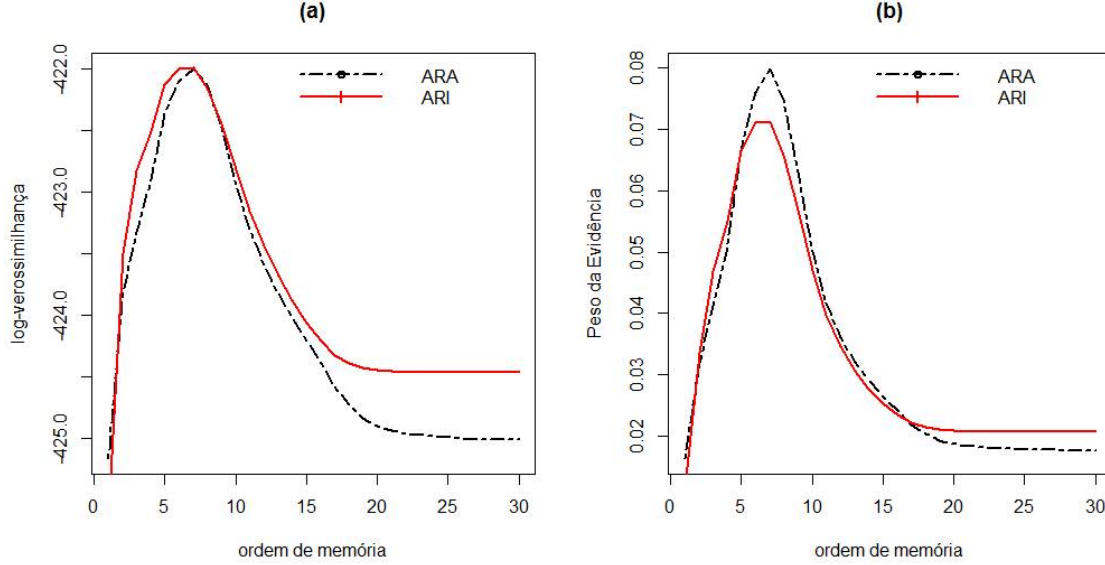


Figura 10: Critérios de seleção de modelos ARA e ARI com diferentes ordens de memória para os dados de *Correias*: (a) baseados puramente na log-verossimilhança (\hat{l}); (b) baseados no Peso da evidência W_r

A Figura 10 apresenta o gráfico referente àqueles cálculos. Por meio dessas figuras (a) e (b) é possível notar que os modelos com maiores log-verossimilhança e peso da evidência são aqueles com ordem de memória 7. Os modelos ARI_7 e ARA_7 , no gráfico da Figura 10-a aparecem muito próximos, com vantagem numérica ao ARI_7 (a diferença está na terceira casa decimal). Porém, ao analisarmos o Peso da Evidência presente na Figura 10-b, nota-se maior vantagem do modelo ARA_7 .

Dada a proximidade da log-verossimilhança e do peso da evidência apresentadas pelos dois modelos, iremos apresentar as conclusões de ambos: ARA_7 e ARI_7 .

Os valores estimados dos parâmetros do modelo ARA_7 são os seguintes:

- Parâmetro de Forma $\hat{\beta} = 2,2251690$ com $IC(\alpha = 0,05)$: $[1,7608346; 2,8119489]$. Isso contrasta com as inferências que poderiam ser feitas caso estivéssemos tratando de reparo mínimo. Como a curva da função média acumulada de falhas (Figura 9) comporta-se como uma linha reta, poderíamos dizer que o valor de beta deveria ser

$\hat{\beta} = 1$ (se estivéssemos tratando de reparo mínimo). Como percebe-se o valor estimado de β foi bastante superior a 1. Isso corrobora com as hipóteses apresentadas no início desse seção que afirmavam não haver uma correlação entre o comportamento do gráfico da função média acumulada e o fato de o sistema ser ou não degenerativo para casos que tratam de reparo imperfeito.

- Parâmetro de Escala $\hat{\eta} = 15,7893714$ com $IC(\alpha = 0,05)$: $[12,7334201; 19,5787343]$; e
- Coeficiente de Eficiência do Reparo $\hat{\theta} = 0,7870322$ com $IC(\alpha = 0,05)$: $[0,7159484; 0,8651737]$. Nesse caso, como o valor de $\hat{\theta}$ está mais próximo de 1 do que de 0, o reparo é imperfeito está mais próximo de um reparo mínimo (no qual $\theta = 1$).

Já os valores estimados dos parâmetros do modelo ARI_7 estão a seguir:

- Parâmetro de Forma $\hat{\beta} = 2,1593966$ com $IC(\alpha = 0,05)$: $[1,8458904; 2,5261487]$. Isso contrasta novamente com as inferências que poderiam ser feitas caso estivéssemos tratando de reparo mínimo. A curva da função média acumulada de falhas (Figura 9) comporta-se como uma linha reta, mas ainda assim o valor estimado de beta não é $\hat{\beta} = 1$.
- Parâmetro de Escala $\hat{\eta} = 15,7945118$ com $IC(\alpha = 0,05)$: $[12,6444599; 19,7293205]$; e
- Coeficiente de Eficiência do Reparo $\hat{\theta} = 0,7523131$ com $IC(\alpha = 0,05)$: $[0,6251974; 0,9052741]$. Novamente, nesse caso, como o valor de $\hat{\theta}$ está mais próximo de 1 do que de 0, o reparo é imperfeito está mais próximo de um reparo mínimo (no qual $\theta = 1$).

O valor do parâmetro $\beta > 1$ produz indícios de que os motores tenderão a falhar com mais frequência com o passar do tempo, ressaltando, novamente, a necessidade da implantação de uma política de manutenção adequada.

3.3 Periodicidade Ótima de Manutenção Preventiva

Essa seção discute a respeito da periodicidade ótima estimada de manutenções preventivas utilizando-se dos valores de $\hat{\beta} = 2,2251690$, $\hat{\eta} = 15,7893714$ e $\hat{\theta} = 0,7870322$ deter-

Tabela 1: Estimativas pontuais e intervalares de τ (intervalo de tempo ótimo entre manutenção preventiva) sob as suposições de reparo mínimo e reparo imperfeito para três razões de custos (*Bootstrap* $B = 10000$) - base: *Correias*; modelo ARA_7

C_{PM}/C_{MR}	$\hat{\tau}_{ARA_7,RI}$ (horas)	95% IC($\hat{\tau}_{ARA_7,RI}$) (horas)
1/1,23	22,70695	[12,48555;40,63287]
1/5	6,178499	[4,814716;21,63303]
1/15	3,358884	[2,747332;12,99968]

Tabela 2: Estimativas pontuais e intervalares de τ (intervalo de tempo ótimo entre manutenção preventiva) sob as suposições de reparo mínimo e reparo imperfeito para três razões de custos (*Bootstrap* $B = 10000$) - base: *Correias*; modelo ARI_7

C_{PM}/C_{MR}	$\hat{\tau}_{ARI_7,RI}$ (horas)	95% IC($\hat{\tau}_{ARI_7,RI}$) (horas)
1/1,23	22,87414	[12,38956;41,98463]
1/5	6,64402	[4,928574;22,20938]
1/15	3,67173	[2,983756;13,39857]

minados por meio da máxima verossimilhança do modelo ARA_7 , bem como dos valores $\hat{\beta} = 2,1593966$, $\hat{\eta} = 15,7945118$ e $\hat{\theta} = 0,7523131$ determinados por meio da máxima verossimilhança do modelo ARI_7 (lembrando que os modelos ARA_7 e ARI_7 foram escolhidos utilizando os critérios apresentados na seção anterior). Foi utilizado o pacote computacional proposto por Fernandes (2015) que incorpora os cálculos apresentados na seção 2.4 desse trabalho.

Para ilustrar a aplicação da metodologia, foram escolhidas algumas razões de custo entre os custos de manutenção preventiva (reparo perfeito) e os de manutenção corretiva (reparo imperfeito) utilizadas por Toletto *et al.* (2016) e Fernandes (2015). Os resultados estão nas Tabelas 1 e 2.

Percebe-se, pelas Tabelas 1 e 2, que os intervalos de tempo entre as manutenções preventivas tornam-se cada vez menores à medida que tomamos razões de custo menores para ambos os modelos.

Isso também pode ser visto por meio da Figura 11.

Após a execução desse roteiro, é interessante destacar alguns aspectos referentes à política

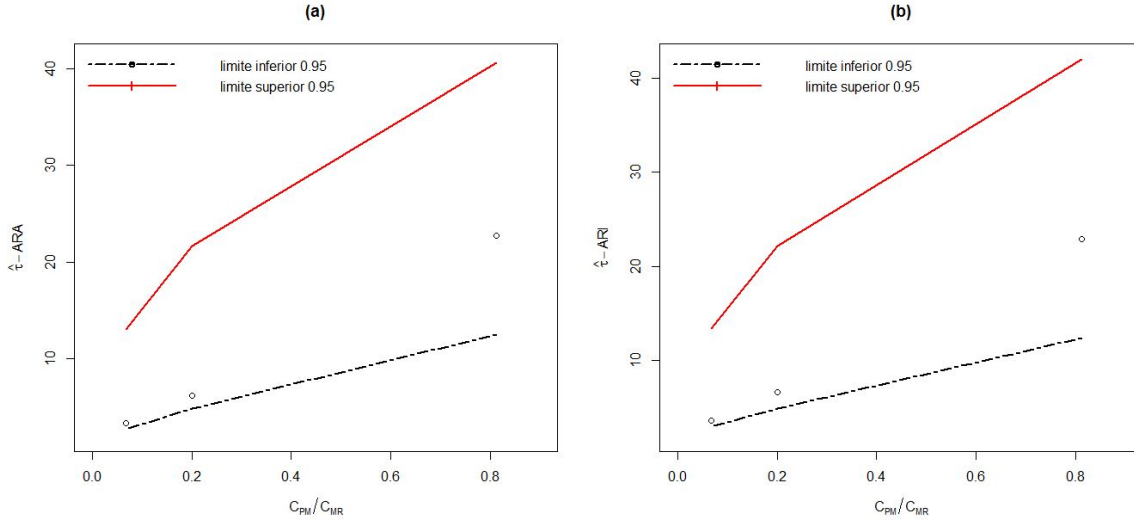


Figura 11: Gráfico dos Intervalos de Confiança da periodicidade ótima $\hat{\tau}$ com $\alpha = 0,05$ utilizando *Bootstrap* de tamanho $B = 10000$) para diferentes razões de custo entre a manutenção preventiva e os reparos mínimos nas manutenções corretivas C_{PM}/C_{MR} usando (a) ARA_7 e (b) ARI_7

ideal de manutenção preventiva:

O problema - O problema *Correia* aqui apresentado consiste na determinação de uma política de manutenção ideal aos 7 sistemas cujos tempos de falha foram observados e apresentados na Figura 8.

Função Média Acumulada Observada - Por meio da figura 9, percebem-se indícios de que os sistemas referentes a essas correias não seriam degenerativos, nem estariam melhorando, porém, o parâmetro β revelou que o sistema piora com o passa do tempo para os dois modelos escolhidos ARA_7 e ARI_7 .

Escolha do Modelo Ideal - Foi feita a escolha dos modelos ARI_7 e ARA_7 (ambos acoplados ao PLP) por fornecerem a maior log-verossimilhança estimada e maior peso da evidência, respectivamente.

Estimativas do Efeito de Reparo para o modelo $ARA_7 + PLP$ - Com base na escolha do modelo $ARA_7 + PLP$, foi possível perceber indícios de o sistema degenera, uma vez que $\hat{\beta} = 2,2251690 > 1$. O valor estimado pontualmente do efeito do reparo para as manutenções corretivas (reparos imperfeitos) foi $\hat{\theta} = 0,7870322$.

Estimativas do Efeito de Reparo para o modelo $ARI_7 + PLP$ - Com base na escolha do modelo $ARI_7 + PLP$, também pôde-se inferir que sistema degenera, uma vez que $\hat{\beta} = 2,1593966 > 1$. O valor estimado pontualmente do efeito do reparo para as manutenções corretivas (reparos imperfeitos) foi $\hat{\theta} = 0,7523131$.

Política Ótima de Manutenção para o modelo $ARA_7 + PLP$ - Enfim, por meio do roteiro apresentado na seção 2.4 para o cálculo da periodicidade ótima de manutenção τ e dos valores estimados por máxima verossimilhança a partir do modelo escolhido, conclui-se que a política ideal de manutenção consiste em realizar reparos perfeitos durante as paradas para manutenções preventivas em intervalos de $\hat{\tau} = 22,70695$ horas ($IC(\tau, \alpha = 0,05) = [12,48555; 40,63287]$ horas) entre os quais poderiam ser realizados reparos imperfeitos nas paradas para manutenções corretivas com efeito do reparo $\hat{\theta} = 0,7870322$ ($IC(\theta, \alpha = 0,05) = [0,7159484; 0,8651737]$). Vale destacar que o valor do intervalo τ entre os reparos perfeitos foi definido com base em uma razão de custo de 1/1,23, isto é, o custo dos reparos imperfeitos seriam 23% maiores que os custos das manutenções preventivas (essa razão de custo era uma especificação inicial do problema apresentado por Toletto *et al.* (2016)).

Política Ótima de Manutenção para o modelo $ARI_7 + PLP$ - Conclui-se que a política ideal de manutenção consiste em realizar reparos perfeitos durante as paradas para manutenções preventivas em intervalos de $\hat{\tau} = 22,87414$ horas ($IC(\tau, \alpha = 0,05) = [12,38956; 41,98463]$ horas) entre os quais poderiam ser realizados reparos imperfeitos nas paradas para manutenções corretivas com efeito do reparo $\hat{\theta} = 0,7523131$ ($IC(\theta, \alpha = 0,05) = [0,6251974; 0,9052741]$). O valor do intervalo τ entre os reparos perfeitos foi definido, novamente, com base em uma razão de custo de 1/1,23, isto é, o custo dos reparos imperfeitos seriam 23% maiores que os custos das manutenções preventivas. Certamente, as conclusões acerca desse problema seriam diferentes se outra razão de custos fosse escolhida.

4 Conclusões

O presente trabalho discute e combina metodologias estatísticas/probabilísticas recentes na literatura para a solução de problemas de confiabilidade de sistemas reparáveis que visam determinar o tamanho ideal do intervalo de tempo entre manutenções preventivas (ideal no sentido de minimizar os custos inerentes a essas manutenções). Ele fornece uma revisão bibliográfica combinando métodos clássicos e outros mais recentes para o alcance dessa finalidade ao mesmo tempo em que exemplifica suas aplicações.

Discorreu-se sobre as classes de modelos de Redução Aritmética da Idade e da Intensidade (*ARA* e *ARI*, respectivamente) propostas por Doyen & Gaudoin (2004) e que servem de alicerce para as funções de máxima verossimilhança. Após o cálculo dessas funções, foram encontrados, para o problema em estudo, os estimadores pontuais e intervalares dos parâmetros do PLP (que modela a função intensidade de falhas) pressupondo a execução de reparo imperfeito na ocorrência de falhas.

Porém, há muitos modelos que podem ser utilizados para a solução do problema da política de manutenção preventiva. Nesse sentido, foram utilizados critérios de seleção clássicos na literatura baseados na máxima log-verossimilhança e no peso da evidência.

Por fim, é razoável destacar, que esse trabalho fornece um acoplamento de métodos para a determinação da política ótima de manutenção preventiva os quais, até momento, foram utilizados sem a correlação que aqui apresentam.

5 Referências bibliográficas

1. AALEN, O. **Nonparametric inference for a family of counting processes**. The Annals of Statistics, v. 6, p. 701-726, 1978.
2. BARLOW, R. E.; HUNTER, L. C. **Optimum preventive maintenance policies**. Operations Research, v. 8, n. 1, p. 90-100, 1960.
3. BARLOW, R. E.; PROSCHAN, F. **Mathematical Theory of Reliability**. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
4. COOK, R. J.; LAWLESS, J. F. **The Statistical Analysis of Recurrent Events**. 1a. ed. [S.l.]: Springer, 2007.
5. DOYEN, L.; GAUDOIN, O. **Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age**. Reliability Engineering & System Safety, v. 84, n. 1, p. 45-56, 2004.
6. EFRON, B.; STEIN, C. **The Jackknife Estimate of Variance**. Annals of Statistics, v. 9, n. 3, p. 586-596, 1981.
7. FERNANDES, R. S. **Modelos de Reparo Imperfeito no R** [Dissertação de Mestrado]. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2015
8. FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A. **Confiabilidade: análise de tempo de falha e testes de vida acelerados**. Escola de Engenharia da UFMG/Fundação Christiano Ottoni. Belo Horizonte, 1997.
9. GILARDONI, G. L.; COLOSIMO, Enrico A. **Optimal maintenance time for repairable systems**. Journal of Quality Technology, v. 39, n. 1, p. 48-53, 2007.
10. MADUREIRA, I. F. **Um pacote computacional para a análise estatística de processos de Lei de Potência** [Dissertação de Mestrado]. Universidade de Brasília. Brasília, 2014.
11. MORIMURA, H. **On some preventive maintenance policies for IFR**. Journal of Operations Research Society of Japan, v. 12, n. 3, p. 94-125, 1970.
12. PARK, D. H.; JUNG, G. M.; YUM, J. K. **Cost minimizations for periodic maintenance policy of a system subject to slow degradation**. Reliability Engineering and System Safety, v. 68, p. 105-112, 2000.

13. PHELPS, R. I. **Replacement policies under minimal repair**. The Journal of Operational Research Society, v. 32, p. 549-554, 1981.
14. RIGDON, S. E.; BASU, Asit P. **Statistical methods for the reliability of repairable systems**. New York: Wiley, 2000.
15. TOLEDO, M. L. G. **Determinação da Periodicidade Ótima de Manutenção sob a Suposição de Reparo Imperfeito**. Tese de doutorado. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2014.
16. TOLEDO, M. L. G.; FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A.; GILARDONI, G. L. **ARA and ARI imperfect repair models**: Estimation, goodness-of-fit and reliability prediction. Reliability Engineering & System Safety, v. 140, p. 107-115, 2015.
17. TOLEDO, M. L. G.; FREITAS, M. A.; COLOSIMO, E. A.; GILARDONI, G. L. **Optimal Periodic Maintenance Policy under Imperfect Repair**: A Case Study of Off-Road Engines. IIE Transactions, n. just-accepted, 2016.
18. WANG, H. **A survey of maintenance policies of deteriorating systems**. European Journal of Operational Research, v. 139, p. 469-489, 2002.

A Anexo I

Algoritmo proposto por Toledo *et al.* (2015) e Fernandes (2015)
para a geração de $K = k_1 + k_2$ sistemas sob suposição do
 ARA_m e PLP

Utilize os valores estimados $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ para gerar pseudodados dos tempos de falha para os K sistemas (os autores usaram um valor de K muito grande, 10000) por meio da execução do seguinte procedimento:

1. Suponha que a q -ésima falha no sistema tenha ocorrido no tempo t_q .
2. Seja $x = t_{q+1} - t_q$ o tempo entre as falhas q e $q + 1$ (duas falhas consecutivas).
3. Seja m a ordem de memória do modelo ARA_m . Dessa forma:

$$\begin{aligned}
 F_{X|t_{q-m}, \dots, t_q}(x) &= P(X \leq x | t_{q-m}, \dots, t_q) \\
 &= 1 - P(X > x | t_{q-m}, \dots, t_q) \\
 &= 1 - P[N(x + t_q) - N(t_q) = 0 | t_{q-m}, \dots, t_q] \\
 &= 1 - \exp \left[-\Lambda_R \left(x + t_q - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-1)} \theta^p t_{q-p} \right) \right] \\
 &\times \exp \left[\Lambda_R \left(t_q - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-1)} \theta^p t_{q-p} \right) \right]
 \end{aligned}$$

A primeira linha do raciocínio acima descrito corresponde à probabilidade de haver um intervalo de tempo X entre duas falhas consecutivas, dado o histórico de falhas considerado no modelo. A probabilidade de que esse intervalo X seja menor ou igual a um valor específico x é complementar à probabilidade de que o $X > x$, ou ainda, igual à probabilidade de que entre os intervalos de tempo t_q e $t_q + x$ (tempo da próxima falha) pode haver falhas, dado o histórico de falhas observadas.

4. Em seguida, o tempo de falha t_{q+1} é obtido a partir dos passos (a), (b) e (c):

- (a) gere um valor u de uma variável aleatória com distribuição Contínua Uniforme $(0,1)$;
- (b) resolva a equação $F_{X|t_{q-m},\dots,t_q}(x) = u$, encontrando o valor de x ;
- (c) calcule $t_{q+1} = t_q + x$ usando a expressão abaixo:

$$t_{q+1} = \eta \left[\left(\frac{t_q - (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-1)} \theta^p t_{q-p}^{\beta}}{\eta} \right) - \log(1 - u) \right]^{\frac{1}{\beta}} + (1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-1)} \theta^p t_{q-p}$$

Particularmente, se o PLP for usado, tendo encontradas anteriormente as estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$, usaremos

$$\hat{\Lambda}_R(t) = \left(\frac{t}{\hat{\eta}} \right)^{\hat{\beta}}$$

e

$$\hat{\Lambda}_R^{-1}(t) = \hat{\eta} t^{1/\hat{\beta}}$$

5. Finalmente, gere um histórico de falhas para um sistema truncado no tempo t , utilizando recursivamente os passos (a) a (c). Os tempos de falha t_1, t_2, \dots, t_q são gerados até $t_{q+1} > T$.

B Anexo II

Algoritmo proposto por Fernandes (2015) para a geração de
 $K = k_1 + k_2$ sistemas sob suposição do ARI_m e PLP

Utilize os valores estimados $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$ para gerar pseudodados dos tempos de falha para os K sistemas (pode-se usar um valor de K muito grande, como 10000, por exemplo) por meio da execução do seguinte procedimento:

1. Suponha que a q -ésima falha no sistema tenha ocorrido no tempo t_q .
2. Seja $x = t_{q+1} - t_q$ o tempo entre as falhas q e $q + 1$ (duas falhas consecutivas).
3. Seja m a ordem de memória do modelo ARI_m . Dessa forma:

$$\begin{aligned}
 F_{X|t_{q-m}, \dots, t_q}(x) &= P(X \leq x | t_{q-m}, \dots, t_q) \\
 &= 1 - P(X > x | t_{q-m}, \dots, t_q) \\
 &= 1 - P[N(x + t_q) - N(t_q) = 0 | t_{q-m}, \dots, t_q] \\
 &= 1 - \exp \left[-\Lambda_R(t_q + x) + \Lambda_R(t_q) + x(1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-1)} \theta^p \lambda_R(t_{q-p}) \right] \\
 &= \log(1 - u)
 \end{aligned}$$

Novamente, é valido destacar que a primeira linha do raciocínio acima se refere à probabilidade de haver um intervalo de tempo X entre duas falhas consecutivas, dado o histórico de falhas considerado no modelo. Sabemos que a probabilidade de que esse intervalo X seja menor ou igual a um valor específico x é complementar à probabilidade de que o $X > x$, (também igual à probabilidade de que entre os intervalos de tempo t_q e $t_q + x$ pode haver falhas, dado o histórico de falhas observadas).

4. Em seguida, o tempo de falha t_{q+1} é obtido a partir dos passos (a), (b) e (c):
 - (a) gere um valor u de uma variável aleatória com distribuição Contínua Uniforme $(0,1)$;

- (b) resolva a equação $F_{X|t_{q-m}, \dots, t_q}(x) = u$, encontrando o valor de x ;
- (c) calcule $t_{q+1} = t_q + x$ usando a equação abaixo:

$$(t_q + x)^\beta - t_q^\beta - x\beta(1 - \theta) \sum_{p=0}^{\min(m-1, q-1)} \theta^p (t_{q-p})^\beta + \eta^\beta \log(1 - u) = 0$$

Particularmente, se o PLP for usado, tendo encontradas anteriormente as estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$, $\hat{\eta}$ e $\hat{\theta}$, usaremos

$$\hat{\Lambda}_R(t) = \left(\frac{t}{\hat{\eta}} \right)^{\hat{\beta}}$$

e

$$\hat{\Lambda}_R^{-1}(t) = \hat{\eta} t^{1/\hat{\beta}}$$

5. Finalmente, gere um histórico de falhas para um sistema truncado no tempo t , utilizando recursivamente os passos (a) a (c). Os tempos de falha t_1, t_2, \dots, t_q são gerados até $t_{q+1} > T$.

C Anexo III

Algoritmo proposto por Toledo *et al.* (2015) para a determinação da função média $\hat{\phi}_{C-NPMLE}(t)$

Suponha que um sistema seja observado e que $N(t) = \sum_{j=1}^n I(t \geq t_j)$ seja o número de falhas observadas nesse sistema até o tempo t (com tempos de falhas $0 < t_1 < \dots < t_n < T$). Para um sistema truncado no tempo, o risco será $Y(t) = I(0 \leq t \leq T)$.

A partir dessas considerações, o algoritmo seguinte será útil para calcular a função média $\hat{\phi}_{C-NPMLE}(t)$:

1. Faça $i_0 = 0$;
2. repita até $i_{E+1} = m + 1$. Faça i_{h+1} como o índice que minimiza a inclinação entre $(i_{i_h}, i_h - 1)$ e $(t_i, i - 1)$ com $i = (i_h + 1), \dots, (n + 1)$;
3. a constante de NPMLE é então dada por

$$\hat{\phi}_{C-NPMLE}(t) = \frac{i_{j+1} - i_j}{t_{i_{j+1}} - t_j}$$

com $t_{i_j} < t \leq t_{i_{j+1}}$.