

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO Nº 1079

**FUNÇÕES DE FORMA DE ORDEM SUPERIOR BASEADAS EM H(CURL)
PARA O MÉTODO SEM MALHA DE AREST**

Luilly Alejandro Garcia Ortiz

DATA DA DEFESA: 30/08/2018

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**FUNÇÕES DE FORMA DE ORDEM SUPERIOR BASEADAS EM
H(CURL) PARA O MÉTODO SEM MALHA DE AREST**

Luilly Alejandro Garcia Ortiz

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Renato Cardoso Mesquita

Belo Horizonte - MG

Agosto de 2018

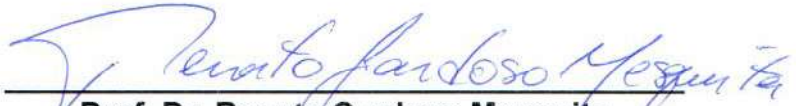
**"Funções de Forma de Ordem Superior Baseadas em H(curl)
para o Método Sem Malha de Arest"**

Luilly Alejandro Garcia Ortiz


Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 30 de agosto de 2018.

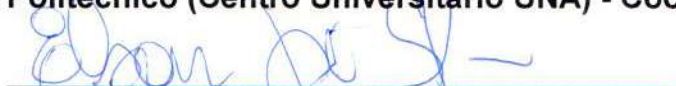
Por:



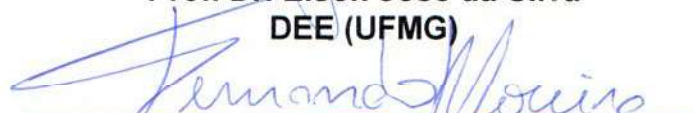
Prof. Dr. Renato Cardoso Mesquita
DEE (UFMG) - Orientador



Prof. Dr. Naisses Zoia Lima
Instituto Politécnico (Centro Universitário UNA) - Coorientador



Prof. Dr. Elson José da Silva
DEE (UFMG)



Prof. Dr. Fernando José da Silva Moreira
DELT (UFMG)

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me dar saúde, sabedoria e fortaleza física para realizar este trabalho e para superar todos os obstáculos que se apresentam na minha vida.

A minha mãe, Celmira Ortiz, por ter me ensinado esse conjunto de valores que só em casa são apreendidos e que hoje, fora de casa, são a base para eu cumprir com minhas metas e sonhos propostos. A ela, por estar comigo naqueles momentos complicados no começo do meu mestrado, por ser meu maior exemplo de vida e por ser meu motor do dia a dia. MEUS triunfos sempre serão TEUS triunfos. Te amo madre!

A meus irmãos Yency, Carlos, Edgar e a minha sobrinha Hanna, por cada mensagem e palavra de ânimo. Quero agradecer de forma especial a meu irmão Carlos que sem o apoio econômico dele este sonho não teria sido realizado. Também, aos outros membros da minha família pelo apoio prestado durante este tempo.

A meu orientador Renato Cardoso Mesquita e coorientador Naïsses Zoia Lima, por terem acreditado em mim para a elaboração deste trabalho, pela excelente orientação e pela paciência com meu portunhol. Pela educação para realizar as diferentes críticas construtivas durante meu mestrado. Aos profs. Fernando José da Silva Moreira e Cássio Gonçalves do Rego, pela formação acadêmica durante minha mestrado. Todos eles, serão de inspiração para minha formação como docente.

A todos meus amigos e colegas com os quais compartilhei tempo durante meu mestrado, de forma especial ao José (El patrón) e o Andrés pelo apoio e amizade de muitos anos. À Maria e a o Diego por terem me recebido na sua casa sem me conhecer e pela disponibilidade ante de qualquer situação. Ao pessoal do Laboratório de Otimização de Projetos assistidos por Computador (Lopac) pela parceria e a tradução automática. Aos times de futsal da engenharia (griffo) e da UFMG, por terem me acolhido no seu time e continuar apoiando essa minha louca paixão pelo futebol. A essa menina feia, horrorosa e chata por me acompanhar neste tempo, por tantas madrugadas de conversas fora só para eu não dormir e conseguir acabar meus trabalhos, por dar esse “toque” diferente a minha vida, para ela muito obrigado.

À CAPES pelo apoio financeiro e à FUMP pelo excelente atendimento durante meu mestrado.

Nada en la vida es facil!

Resumo

O Método sem Malha de Aresta é um método numérico em que, diferentemente dos métodos sem malha tradicionais, se constrói as aproximações baseado em arestas ao invés de nós. Uma das finalidades deste método é garantir a condição do divergente nulo e eliminar os modos espúrios presentes na solução numérica. Nesta dissertação é desenvolvida uma formulação matemática para gerar as funções de forma vetoriais, de modo que quatro, cinco e seis arestas possam ser tomadas no domínio de suporte. Para isso, a ordem do polinômio das funções de base deve ser aumentada. As funções de base estão baseadas nos espaços $H(\text{curl})$ e no caso de quatro arestas também estão baseadas nos elementos de primeiro tipo de Nédélec. Para testar as novas funções de forma vetoriais o método é aplicado a vários problemas eletromagnéticos. O método sem malha de aresta consegue resolver satisfatoriamente esses problemas, isto é, a solução numérica satisfaz a condição tanto do divergente nulo, como da continuidade da componente tangencial do campo elétrico entre dois materiais diferentes além da solução numérica não apresentar modos espúrios. As novas funções de forma vetoriais geram um incremento na ordem de convergência quando seis arestas são usadas no domínio de suporte, pois esta função de base utiliza um polinômio de ordem mais elevada.

Palavras chave: Espaços $H(\text{curl})$, Funções de forma vetoriais de alto ordem, Método sem malha de aresta.

Abstract

The Edge Meshless Method (EMM) is a numerical method that unlike traditional meshless methods, constructs its approximations based on edges instead of nodes. One of the purposes of this method is to guarantee the condition of the null divergent and to eliminate the spurious modes present in the numerical solution. In this dissertation a mathematical formulation is developed to generate the vector shape functions, so that four, five and six edges can be taken in the support domain. For this, the order of the basic polynomial functions must be increased. The basic functions are based on the $H(\text{curl})$ spaces and in the case of four edges are also based on Nédélec's element of first type. The EMM with the new vector shape functions is applied to several electromagnetic problems, for which the permeability and permittivity of the materials are modified. The meshless method can solve these problems satisfactorily, that is, the numerical solution satisfies both the null divergent condition and the continuity of the tangential component of the electric field between two different materia. Besides, the numerical solution does not present spurious modes. The new vector-shape functions generate an increase in the order of convergence when six edges are used in the support domain, because the base function uses a high-order polynomial.

Keywords: High order vectorial shape functions, Space $H(\text{curl})$, Meshless Method

Sumario

Agradecimentos	III
Resumo	IV
Lista de figuras	IX
Lista de tabelas	x
Lista de Símbolos	x
1 Introdução	2
2 Revisão Bibliográfica	6
2.1 Elementos Finitos de Aresta	7
2.2 Método sem Malha de Aresta com funções de forma originais	11
2.3 Método sem Malha de Arestas com funções de forma vetoriais baseadas nos elementos de primeiro tipo de Nédélec	16
3 Funções de Forma Vetoriais com mais arestas no domínio de suporte	18
3.1 Funções de forma vetoriais para 4 arestas no domínio de suporte	18
3.2 Funções de forma vetoriais para 5 e 6 arestas no domínio de suporte baseadas no elemento de primeiro tipo de Nédélec	19
3.3 Funções de forma de aresta vetoriais em $H(\text{curl})$ para 5 e 6 arestas no domínio de suporte baseadas apenas nos espaços $H(\text{curl})$	24
4 Resultados Numéricos	28
4.1 Circulação nas arestas	29
4.2 Interpolação de campos vetoriais	34
4.3 Problema de autovalores	38
4.3.1 Definição do problema	38
4.3.2 Guia de onda com meio homogêneo e isotrópico	41
4.3.3 Guia de onda com saliência e meio homogêneo e anisotrópico	46
4.3.4 Guia de onda com meio não homogêneo e anisotrópico	47
4.4 O EMM com ordem polinomial híbrida	50
4.5 O EMM com redução do comprimento das arestas	52

5 Conclusões	56
5.1 Trabalhos Futuros	57
Referências Bibliográficas.	58

Lista de Figuras

1-1. Distribuição de nós na fronteira e no domínio nos métodos sem malha. Figura retirada de [12]	3
1-2. Distribuição de arestas na fronteira e no domínio nos métodos Mfree.	4
2-1. Elemento Triangular.	7
2-2. Elemento Quadrangular.	10
2-3. Função ϕ dependente da distância contida nas funções de forma vetoriais de aresta.	13
3-1. Representação gráfica das funções de forma vetoriais para 4 arestas no domínio de suporte. (a) \vec{N}_1 , (b) \vec{N}_2 , (c) \vec{N}_3 e (d) \vec{N}_4	20
3-2. Representação gráfica das funções de forma vetoriais para 5 arestas no domínio de suporte. (a) \vec{N}_1 , (b) \vec{N}_2 , (c) \vec{N}_3 , (d) \vec{N}_4 e (e) \vec{N}_5	26
3-3. Representação gráfica das funções de forma vetoriais para 5 arestas no domínio de suporte. (a) \vec{N}_1 , (b) \vec{N}_2 , (c) \vec{N}_3 , (d) \vec{N}_4 , (e) \vec{N}_5 e (f) \vec{N}_6	27
4-1. Distribuição de arestas quadrilateral e a circulação nas arestas.	30
4-2. Distribuições de arestas para 5 arestas no domínio de suporte.	31
4-3. Distribuição de arestas para seis arestas no domínio de suporte.	33
4-4. Distribuição de arestas para três, quatro, cinco e seis arestas no domínio de suporte.	35
4-5. Níveis de erro para as funções de forma com 5 arestas no domínio de suporte.	36
4-6. Níveis de erro para as funções de forma com 6 arestas no domínio de suporte.	36
4-7. Evolução do erro em função do número de arestas.	37
4-8. Representação do campo elétrico aproximado.	37
4-9. Evolução do erro no calculo dos autovalores no guia de onda quadrado para 3, 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte.	45
4-10. Guia de onda com saliência e meio homogêneo anisotrópico.	46
4-11. Evolução do erro do autovalor 1 para o guia de onda com saliência e meio homogêneo anisotrópico.	48
4-12. Geometria da guia de onda inomogênea anisotrópica	48
4-13. Distribuições das arestas no guia de onda com meio inomogêneo anisotrópico	49
4-14. Distribuições de arestas para as possíveis combinações das funções de forma.	51

4-15. Variação dos erros dos autovalores para o guia de onda homogêneo isotrópico em função do número de arestas quando são combinadas várias ordens de funções de forma vetoriais.	52
4-16. Geometrias dos problemas apresentando a distribuição quadrangular das arestas com comprimento igual a 50 % das arestas originais.	53
4-17. Erro da aproximação vs comprimento das arestas.	54

Lista de Tabelas

4-1. Autovalores para quatro arestas no domínio de suporte.	43
4-2. Autovalores para cinco arestas no domínio de suporte.	43
4-3. Autovalores para 6 arestas no domínio de suporte.	44
4-4. Autovalores para três, quatro, cinco e seis arestas no domínio de suporte. . .	44
4-5. Solução numérica para o guia de onda com saliência e meio homogêneo anisotrópico.	47
4-6. Solução numérica para o guia de onda com meio inhomogêneo anisotrópico utilizando a distribuição 1.	49
4-7. Solução numérica para o guia de onda com meio inhomogêneo anisotrópico utilizando a distribuição 2 de arestas.	50
4-8. Solução numérica para cavidade quadrada com comprimento das arestas igual 0,0001 %.	54
4-9. Solução numérica para o guia de onda com saliência, meio homogêneo anisotrópico e comprimento das arestas igual a 0,0001 %.	55
4-10. Solução numérica para o guia de onda com meio inhomogêneo anisotrópico reduzindo o comprimento das arestas.	55

Lista de Símbolos

ϵ	Condutividade
ϵ	Permissividade elétrica
ϵ_0	Permissividade elétrica do vácuo
ϵ_r	Permissividade elétrica relativa
Γ_n	Fronteira com condição de contorno de terceiro tipo
\hat{t}_i	Vetor unitário na direção da i -ésima aresta do domínio de suporte das funções de forma do EMM
\hat{t}_{pj}	Vetor unitário predefinido das funções de forma do EMM
$\tilde{\mathbb{P}}_k$	Espaços de polinômios homogêneos de grau k
\mathbb{P}_k	Espaços de polinômios de grau k
β_{ni}	É o vetor coluna contendo os n coeficientes da função de forma da i -ésima aresta no domínio de suporte
\mathbf{L}_i	É o vetor coluna que contem os comprimentos das arestas
\mathcal{R}^k	Espaços de polinômios conforme $H(\text{curl})$
L^2	Espaço de Hilbert.
μ	Permeabilidade magnética
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo
μ_r	Permeabilidade magnética relativa
$\vec{\phi}_i$	Função de forma vetorial da i -ésima aresta do EMM
$\vec{\phi}$	Função de teste no método de elementos finitos.
\vec{B}	Densidade de fluxo magnético ou indução magnética

\vec{D}	Densidade de fluxo elétrico ou indução elétrica
\vec{E}	Campo elétrico
\vec{H}	Campo magnético
\vec{t}	Vetor tangente unitário na borda de um triângulo ou quadrilátero.
\vec{W}_t	Função de teste vetorial do método dos resíduos ponderados
ϕ_i	Função associada à i -ésima aresta das funções de forma do EMM
ρ	Densidade volumétrica de carga elétrica
ρ_s	Densidade superficial de carga
\mathbf{B}_Q	Matriz de momentos das funções de forma do EMM
\mathbf{B}_u	Matriz com os termos de vetores nas direções das arestas das funções de forma do EMM
\mathbf{C}_Q	Matriz de momentos dos vetores predefinidos das funções de forma do EMM
\mathbf{c}_s	Vetor contendo as circulações dos campos vetoriais nas arestas
\mathbf{C}_u	Matriz com os termos de vetores predefinidos das funções de forma do EMM
c_i	Circulação do campo vetorial na i -ésima aresta
e_k	Aresta k
k_0	Número de onda para onda no vácuo
S^k	Espaços auxiliares formados pelos polinômios \mathbb{P}_k .
C	Quadrado de referência.
K	Triângulo de referência.

1 Introdução

Técnicas de simulação computacional são amplamente usadas para modelar e investigar fenômenos físicos. As equações de Maxwell são um grupo de equações diferenciais parciais que governam os fenômenos eletromagnéticos macroscópicos e para a maioria dos problemas eletromagnéticos não têm uma solução analítica. Por isto, são amplamente solucionadas usando métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (Finite Element Method, *FEM*) [1] e o Método das Diferenças Finitas (Finite Difference Method, *FDM*) [2]. Nestes métodos, o domínio espacial é discretizado em elementos, uma malha deverá ser predefinida para fornecer uma certa relação entre os nós e sistema de equações algébricas para o problema pode ser gerado a partir de contribuições de todos os elementos [3]. Para construir suas aproximações, são utilizadas funções de base escalares. Quando estes métodos são aplicados a problemas eletromagnéticos vetoriais, governados pelas equações de Maxwell [4], são observadas algumas dificuldades, entre elas, a não verificação da condição do divergente nulo e portanto, a presença dos modos espúrios na solução numérica, a dificuldade de impor as condições de interface na fronteira entre dois materiais diferentes e a dificuldade de impor condições de contorno vetoriais, a dificuldade de tratar bordas e quinas em condutores devido às singularidades de campo associadas a essas estruturas [5]. Para contornar esses problemas, é proposto em [6] uma nova abordagem para o método de elementos finitos que usa funções de bases vetoriais ou elementos vetoriais que atribuem os graus de liberdade às arestas e não aos nós, gerando os chamados elementos de aresta. Anos mais tarde, Nédélec em [7] apresenta a construção das funções de forma para tetraedros e hexaedros baseadas nos elementos de arestas, onde os graus de liberdade são associados às arestas, faces e volumes que compõem os tetraedros e hexaedros.

Os Métodos sem Malha (Meshless Method, Mfree) são usados para estabelecer um sistema de equações algébricas para todo o domínio sem o uso de uma malha predefinida. Os Métodos sem Malha, tais como Element Free Galerkin (EFG) [8], Point Interpolation Method (PIM) [9], Meshless Local Petrov-Galerkin Method (MLPG) [10], entre outros, usam um conjunto de nós espalhados no domínio e sua fronteira para gerar suas aproximações. Estes nós não formam uma malha, ou seja, não é requerida informação sobre a conexão entre os nós (Ver Figura 1-1). Estes métodos utilizam funções de base escalares similares às do FEM clássico, portanto, quando são aplicados a problemas eletromagnéticos vetoriais apresentam os mesmos problemas expostos anteriormente para o FEM. A fim de superar esses inconvenientes, em [11] é apresentada uma formulação mista para o método sem malha

nodal, em que são usados multiplicadores de Lagrange para impor a condição do divergente nulo. Como as funções de forma são construídas a partir de nós, continua-se associando um grau de liberdade a cada componente de campo vetorial. Como consequência da utilização dos multiplicadores de Lagrange, a ordem matricial do sistema a ser resolvido é aumentada consideravelmente. Em [12] são usadas formas fracas enfraquecidas e o método da penalidade para garantir o divergente nulo e eliminar os modos espúrios. Uma vantagem é que a ordem do sistema não é alterada mas, em contrapartida, se faz necessário um grau de liberdade para cada componente. Também é necessário encontrar o fator de penalidade, que varia de problema para problema. Além disso, os modos espúrios não são eliminados por completo, mas sim deslocados para diferentes faixas. Outra alternativa para suprimir os modos espúrios é proposta em [13], onde são desenvolvidas as funções de base radial vetorial (Vector Radial Base Functions, *VRBF*), para o método sem malha e estas são usadas junto com a forma fraca do problema para sua solução. O método é aplicado ao problema de autovalor de Maxwell e à propagação em um guia de onda e para os dois problemas a solução numérica não é corrompida por modos espúrios. As desvantagens encontradas no cálculo da solução são a sensibilidade aos parâmetros da RBF utilizada e a dificuldade de se impor as condições de interface entre materiais e as condições de contorno. Outro trabalho na linha das funções de base radial (Radial Base Function, *RBF*) é apresentado em [14], para este caso as RBFs são aplicadas em um guia de onda homogêneo e de forma arbitrária, conseguindo o cálculo eficiente e confiável dos modos do guia de onda. Ainda neste trabalho é desenvolvido um algoritmo de refinamento iterativo, que gera automaticamente novos pontos de colocação e parâmetros de forma definidos localmente para as RBFs, até que uma convergência prescrita seja alcançada. Isto remove o problema da dependência dos parâmetros das RBFs, mas a dificuldade de se impor condições de interface e de contorno continua a existir.

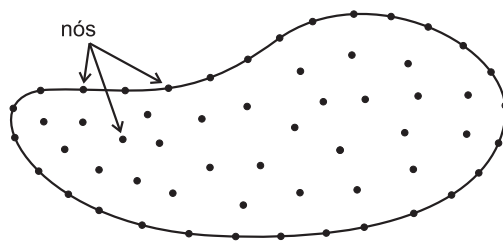


Figura 1-1: Distribuição de nós na fronteira e no domínio nos métodos sem malha. Figura retirada de [12]

Baseado na ideia dos elementos de aresta, foi proposto por [15] o Método sem Malha de Aresta (Edge Meshless Method, EMM). Tal método consiste em espalhar uma série de arestas pela fronteira e domínio para criar as funções que são utilizadas para computar a solução (ver Figura 1-2), onde, de forma similar ao FEM de Aresta, os graus de liberdade são associados às arestas e não aos nós. Para gerar as funções de forma, as funções de base devem satisfazer a condição da circulação em cada aresta do domínio de suporte

e, conseqüentemente, as condições de Dirichlet são impostas de forma simples. É utilizada como função de base uma função que depende da distância entre a aresta e o ponto onde é calculada a aproximação, garantindo-se que o divergente nulo seja imposto pelas funções de aproximação. O EMM consegue gerar soluções numéricas sem presença dos modos espúrios e, além disso, satisfaz as condições de continuidade na interface entre diferentes meios. Este resultado é obtido apenas quando são utilizadas três e quatro arestas no domínio de suporte. Quando o número de arestas no domínio de suporte é aumentado, a solução numérica é corrompida pelos modos espúrios.

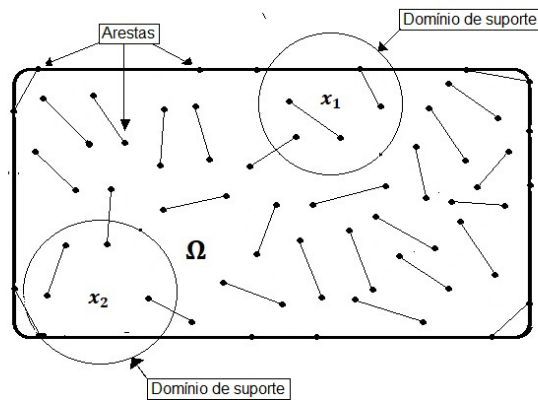


Figura 1-2: Distribuição de arestas na fronteira e no domínio nos métodos Mfree.

Posteriormente, uma nova estratégia para gerar as funções de forma é proposto em [16], na qual as novas funções de forma estão baseadas na teoria dos elementos de primeiro tipo de Nédélec e nos espaços $H(\text{curl})$. O polinômio utilizado na função de base é de primeira ordem e o espaço de funções tem dimensão igual a três. Conseqüentemente, são utilizadas três arestas no domínio de suporte. O EMM com estas funções de forma vetoriais consegue satisfazer a condição do divergente nulo e a solução numérica não é corrompida pelos modos espúrios. Além disto, são realizados testes onde o comprimento das arestas tende para zero e a solução numérica continua correta. Este fato indica a possibilidade de trabalhar com um método sem malha nodal com funções vetoriais cumprindo todos os requisitos para pertencer a $H(\text{curl})$.

Nesta dissertação, é proposto um novo caminho para gerar as funções de forma vetoriais, de modo que quatro, cinco e seis arestas possam ser tomadas no domínio de suporte e no qual as funções de forma também são baseadas nos espaços $H(\text{curl})$. Para gerar as novas funções de forma, a ordem do polinômio nas funções de base é aumentada, utilizando inicialmente os espaços polinomiais dos elementos de Nédélec de primeiro tipo. É mostrado que essa abordagem funciona corretamente para quatro arestas mas falha para 5 e 6 arestas. Por isto, nesta dissertação é proposto uma nova abordagem para a construção dos espaços polinomiais para 5 e 6 arestas, conforme é detalhado no Capítulo 3. O EMM é então aplicado

a vários problemas eletromagnéticos, gerando soluções numéricas que satisfazem a condição do divergente nulo, sem a presença dos modos espúrios e cumprindo as condições de continuidade na interface entre meios diferentes.

A presente dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica do método de elementos finitos de aresta e do método sem malha de aresta; no Capítulo 3 é apresentada a construção das funções de forma de aresta com um número maior de arestas (quatro, cinco e seis) aumentando a ordem dos polinômios usados na formulação; no Capítulo 4 são apresentados os resultados da aplicação do EMM com as novas funções de forma a problemas eletromagnéticos; no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões e as propostas de trabalhos futuros.

2 Revisão Bibliográfica

Os Métodos Sem Malha nodais utilizam nós para gerar suas funções de forma, por isso trabalham com funções de base escalares para gerar suas aproximações. Quando estes métodos são aplicados a problemas eletromagnéticos vetoriais são observadas algumas dificuldades como o não cumprimento da condição do divergente nulo e, portanto, a presença dos modos espúrios na solução numérica, a dificuldade de impor as condições de contorno na interface entre materiais diferentes e a dificuldade de tratar bordas e quinas elétricas condutoras devido às singularidades de campo associadas a essas estruturas [5].

Estas dificuldades também estão presentes no Método dos Elementos Finitos. Para este método é apresentada como solução a estas dificuldades o Método dos Elementos Finitos de Aresta [5], onde as funções são associadas a cada aresta do elemento e possuem as seguintes vantagens: primeiro, produzir soluções com divergente nulo e, portanto, sem modos espúrios; segundo, garantir a continuidade tangencial do campo ao longo das arestas e, consequentemente, entre elementos, fazendo com que as condições de continuidade na interface entre diferentes materiais sejam satisfeitas de maneira simples; e terceiro, não onerar computacionalmente o método numérico, pois associam apenas um grau de liberdade a cada aresta da malha, ao contrário do método nodal que associa um grau de liberdade por dimensão do problema para cada nó da malha.

Uma forma de contornar estas dificuldades nos Métodos Sem Malha é apresentada em [12]: o Método Sem Malha de Aresta, que baseia-se no conceito dos elementos finitos de aresta. Este método espalha arestas pelo domínio e sua fronteira e, para gerar as aproximações, são utilizadas funções de base vetoriais, ao invés de escalares como nos métodos sem malha tradicionais. Desta forma, é possível aproveitar as vantagens fornecidas pelo método dos elementos finitos de aresta nos métodos sem malha.

Neste capítulo será abordado o método dos elementos finitos de aresta, que é a base conceitual do EMM; posteriormente é apresentada a formulação matemática inicial do EMM e, finalmente, é apresentada a formulação matemática para gerar as funções de forma para três arestas no domínio de suporte.

2.1. Elementos Finitos de Aresta

Para introduzir o conceito de Elementos de Aresta em malhas triangulares, considere o elemento triangular da Figura 2-1. Os nós estão enumerados de 1 a 3, assim como as arestas.

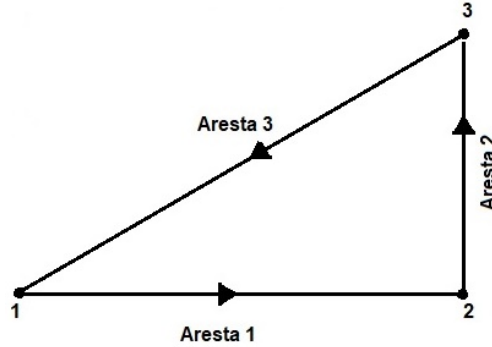


Figura 2-1: Elemento Triangular.

A construção das funções de forma em Elementos Finitos de Aresta para malhas triangulares e quadrangulares é proposta inicialmente em [7]. Em [17], é apresentada de forma mais detalhada a construção das funções de forma em duas e três dimensões para o FEM conforme $H(\text{curl})$ baseado nos elementos de primeiro tipo de Nédélec.

Para a construção das funções de forma vetoriais deste tipo, considera-se Ω um domínio Lipschitziano, aberto e limitado com uma fronteira regular $\partial\Omega$. Os espaços de Sobolev são subespaços vetoriais dos espaços $\mathbf{H}^s(\Omega)$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{H}^t(\partial\Omega)$ para qualquer $t \in [-1, 1]$ e são definidos no domínio Ω e na sua fronteira $\partial\Omega$, respectivamente [18]. Os espaços das funções vetoriais $H(\text{curl})$ são definidos em [17] como:

$$H(\text{curl}; \Omega) = \{\phi \in [L^2(\Omega)]^d : \text{curl}\phi \in [L^2(\Omega)]^{\bar{d}}\} \quad (2-1)$$

onde d é a dimensão dos espaços e $L^2(\Omega)$ é o espaço de Hilbert de funções com quadrado integrável.

E os subespaços S^k são definidos como:

$$S^k = \{p \in (\tilde{\mathbb{P}}_k)^d : p \cdot \hat{x} = \sum_{i=1}^d p_i x_i \equiv 0\} \quad (2-2)$$

onde $\tilde{\mathbb{P}}_k$ são os espaços de polinômios homogêneos de grau k e \hat{x} é um ponto dentro do elemento de referência. Para $d = 2$, o espaço S^k tem dimensão igual a k . E para $d = 3$, S^k tem dimensão igual a $k(k + 2)$ [17].

A família de elementos de primeiro tipo de Nédélec conforme no espaço $H(\text{curl}; \Omega)$ é baseado nos espaços polinomiais:

$$\mathcal{R}^k = (\mathbb{P}_{k-1})^d \oplus S^k \quad (2-3)$$

onde \mathbb{P}_{k-1} é o espaço polinomial de grau $k-1$ e a dimensão dos espaços \mathcal{R}^k é dada por [17]:

$$\dim(\mathcal{R}^k) = k(k+2) \quad \text{para } d=2 \quad (2-4)$$

Nesta dissertação trabalha-se em duas dimensões (2D). Para grau de polinômio igual a 1, \mathcal{R}^1 tem dimensão igual a 3 e é dado por:

$$\mathcal{R}^1 = (\mathbb{P}_0)^2 \oplus S^1 \quad (2-5)$$

onde S^1 é dado por:

$$S^1 = \{p \in (\tilde{\mathbb{P}}_1)^2 : p \cdot \hat{x} = \sum_{i=1}^2 p_i x_i \equiv 0\} \quad (2-6)$$

portanto, S^1 é igual a [17]:

$$S^1 = \xi_1 \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

Substituindo a Equação 2-7 na Equação 2-5, o espaço \mathcal{R}^1 pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathcal{R}^1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \right\rangle \quad (2-8)$$

Sendo, então, a função de forma para a i -ésima aresta do elemento triangular dada por:

$$\vec{N}_i = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

onde β_i são os coeficientes a serem encontrados.

Para ordem do polinômio $k=2$, \mathcal{R}^2 tem dimensão igual a 8 (ver Equação 2-4) e é definido por:

$$\mathcal{R}^2 = (\mathbb{P}_1)^2 \oplus S^2 \quad (2-10)$$

onde S^2 é definido por:

$$S^2 = \{p \in (\tilde{\mathbb{P}}_2)^2 : p \cdot \hat{x} = \sum_{i=1}^2 p_i x_i \equiv 0\} \quad (2-11)$$

E assume a forma [17]:

$$S^2 = \xi_1 \begin{bmatrix} xy \\ -x^2 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} y^2 \\ -xy \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

Substituindo a Equação 2-12 em 2-10 obtém-se a base do espaço \mathcal{R}^2 :

$$\mathcal{R}^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} xy \\ -x^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^2 \\ -xy \end{bmatrix} \right\rangle \quad (2-13)$$

Neste tipo de elementos de Nédélec, os graus de liberdade são distribuídos tanto nas arestas como no interior do elemento. Seja K o triângulo de referência, \vec{t} o vetor tangente unitário com relação à aresta de um triângulo ou quadrilátero, orientado no sentido anti-horário em relação ao triângulo ou quadrilátero correspondente e $\vec{\varphi}$ a função de teste. Os graus de liberdade são atribuídos da seguinte forma [17]:

Graus de liberdade na aresta

Para cada aresta e do triângulo de referencia K da Figura 2-1 tem-se

$$A(\vec{u}) := \int_e (\vec{t} \cdot \vec{u}) \varphi ds \quad \forall \varphi \in \mathbb{P}_{k-1}(e) \quad (2-14)$$

onde \mathbb{P}_{k-1} é o espaço de polinômios de grau $k - 1$ associado a função de teste da aresta (e) , com um total de $3k$ graus de liberdade na arestas.

Graus de liberdade no interior do elemento

$$A(\vec{u}) := \int_K \vec{u} \cdot \vec{\varphi} dx \quad \forall \vec{\varphi} \in (\mathbb{P}_{k-2}(K))^2 \quad (2-15)$$

onde \mathbb{P}_{k-2} é o espaço de polinômios de grau $k - 2$ associado a função de teste de cada elemento, com um total de $k(k - 1)$ graus de liberdade no interior do elemento.

Para $k = 1$, a dimensão dos espaços é igual a três, portanto é atribuído um grau de liberdade a cada aresta. Para $k = 2$, a dimensão dos espaços é igual a 8, neste caso são atribuídos dois graus de liberdade por cada aresta e dois graus de liberdade no interior do elemento.

Expandindo o conceito de Elemento de Aresta para malhas quadrangulares, a Figura 2-2 representa o elemento de referência. Primeiramente, definem-se os espaços polinomiais vetoriais $P_{l,m}$, que são os espaços de polinômios com grau máximo l em \hat{x} e m em \hat{y} . Os espaços utilizados para a construção das funções de forma vetoriais em 2D são [17]:

$$\rho^k = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \in P_{k-1,k}; u_2 \in P_{k,k-1} \right\} \quad (2-16)$$

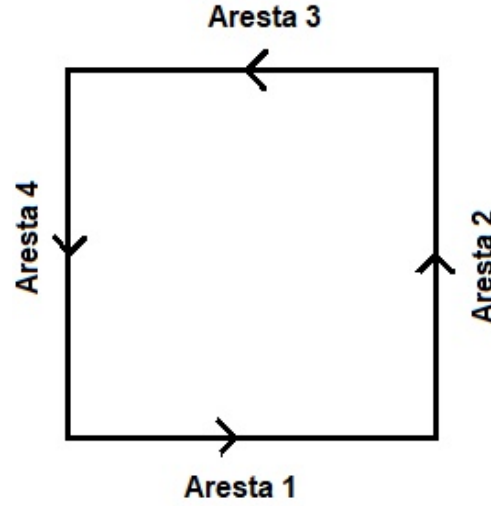


Figura 2-2: Elemento Quadrangular.

E possuem dimensão [17]:

$$\dim(\rho^k) = 4k + 2k(k - 1) \quad \text{para } d=2 \quad (2-17)$$

Com o grau de polinômio igual a um ($k = 1$), o espaço ρ^k tem dimensão igual a 4 e sua base é denotada por:

$$\rho^1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \right\rangle \quad (2-18)$$

Com esta base, a função de forma vetorial é dada por [17]:

$$\vec{N}_i = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

Os graus de liberdade para o elemento quadrangular são atribuídos tanto às arestas quanto ao interior do elemento da seguinte forma:

Graus de liberdade na aresta

Para cada aresta e do quadrado de referência C da Figura 2-2 tem-se

$$A(\vec{u}) := \int_e (\vec{t} \cdot \vec{u}) \varphi ds \quad \forall \varphi \in \mathbb{P}_{k-1}(e) \quad (2-20)$$

onde \mathbb{P}_{k-1} é o espaço de polinômios de grau $k - 1$ associado a função de teste da aresta (e), com um total de $4k$ graus de liberdade nas arestas.

Graus de liberdade no interior do elemento

Os graus de liberdade no interior do elemento de referência são definidos por:

$$A(\vec{u}) := \int_C \vec{u} \cdot \vec{\varphi} dx \quad \forall \vec{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 \in P_{k-2,k-1}, \quad \varphi_2 \in P_{k-1,k-2} \quad (2-21)$$

com um total de $2k(k-1)$ graus de liberdade no interior do elemento.

Para $k = 1$, a dimensão dos espaços é igual a quatro, portanto é atribuído um grau de liberdade a cada aresta. Para $k = 2$, a dimensão dos espaços é igual a 12, neste caso são atribuídos dois graus de liberdade por cada aresta e quatro graus de liberdade no interior do elemento.

2.2. Método sem Malha de Aresta com funções de forma originais

Considere um campo vetorial \vec{u} dentro de um domínio Ω e \vec{u}^h como a aproximação do campo vetorial. Um grupo de arestas é espalhado no domínio e em sua fronteira. Para realizar a aproximação em um ponto \mathbf{x} , é definido o domínio de suporte do ponto o qual determina o número de arestas que são utilizadas para aproximar o valor da função no ponto. As arestas que são parte do domínio de suporte recebem o nome de **arestas de suporte**. Na Figura 1-2 é apresentado o domínio de suporte para dois pontos, x_1 e x_2 . A aproximação do campo vetorial em um ponto é dada por [12]:

$$\vec{U}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i a_i + \sum_{j=1}^m \hat{t}_{pj} b_j \quad (2-22)$$

onde o primeiro termo está associado à contribuição de cada aresta de suporte na aproximação do campo vetorial; o segundo termo não tem relação com as arestas de suporte, mas é utilizado para garantir a reprodução de campos vetoriais constantes. O parâmetro ϕ_i é a função de suporte de cada aresta, n é o número de arestas de suporte, \hat{t}_i é o vetor unitário na direção da i -ésima aresta no domínio de suporte, a_i é o coeficiente de interpolação da função ϕ associado à i -ésima aresta do domínio de suporte. Na parte constante e independente das arestas, \hat{t}_{pj} é um vetor unitário predefinido em uma direção específica, m é o número de vetores predefinidos na aproximação, e b_j é o coeficiente de interpolação associado ao j -ésimo vetor predefinido. O divergente de \vec{U}^h é dado por:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{U}^h(\mathbf{x}) &= \nabla \cdot \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i a_i + \nabla \cdot \sum_{j=1}^m \hat{t}_{pj} b_j \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla \cdot (\phi_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i) a_i + \sum_{j=1}^m \nabla \cdot (\hat{t}_{pj}) b_j \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla \cdot (\phi_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i) a_i = 0
\end{aligned} \tag{2-23}$$

Como os vetores \hat{t}_{pj} e o coeficiente b_j , são constantes o segundo somatório é cancelado. Da Equação 2-23 tem-se:

$$\nabla \cdot (\phi_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i) = 0 \tag{2-24}$$

Aplicando uma identidade vetorial na Equação 2-24, tem-se:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\phi_i(\mathbf{x}) \hat{t}_i) &= \phi(\mathbf{x}) \nabla \cdot \hat{t}_i + \hat{t}_i \cdot \nabla \phi_i(\mathbf{x}) \\
&= \hat{t}_i \cdot \nabla \phi_i(\mathbf{x}) = 0
\end{aligned} \tag{2-25}$$

Para satisfazer a Equação 2-25, podemos especificar ϕ como uma função da distância d_i entre o ponto \mathbf{x} e a reta de suporte da aresta e_i , de tal forma que este varie apenas na direção ortogonal à aresta. Desta forma, a condição do divergente nulo é garantida. Uma possível escolha para ϕ é a função linear em relação à distância d_i [12]:

$$\phi_i(\mathbf{x}) = 1 - \frac{d_i(\mathbf{x})}{dw_i} \tag{2-26}$$

onde dw_i é o parâmetro que controla o alcance da função de suporte, ou visto de outra maneira, pode ser o raio de influência da aresta e_i . A Figura **2-3** mostra a função linear ϕ considerando uma aresta com pontos extremos $(-10;0)$ e $(10;0)$.

A Equação 2-22 pode ser escrita na sua forma matricial, como:

$$\vec{U}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x}) \mathbf{a} + \mathbf{C}_u^T \mathbf{b} \tag{2-27}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_u^T(\mathbf{x}) &= [\phi_1(\mathbf{x}) \hat{t}_1, \phi_2(\mathbf{x}) \hat{t}_2, \dots, \phi_n(\mathbf{x}) \hat{t}_n] \\
\mathbf{C}_u^T &= [\hat{t}_{p1}, \hat{t}_{p2}, \dots, \hat{t}_{pm}] \\
\mathbf{a} &= [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \\
\mathbf{b} &= [b_1, b_2, \dots, b_m]^T
\end{aligned} \tag{2-28}$$

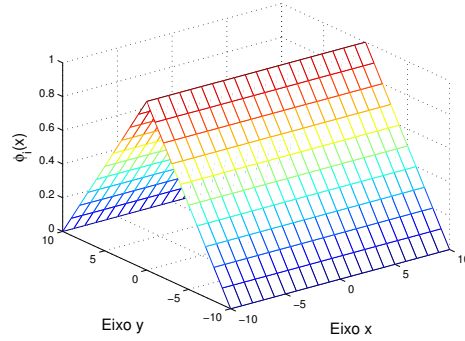


Figura 2-3: Função ϕ dependente da distância contida nas funções de forma vetoriais de aresta.

Os coeficientes a_i e b_j na Equação 2-28 são determinados fazendo com que a circulação do campo \vec{U} seja satisfeita sobre cada aresta e_k do domínio de suporte de \mathbf{x} . Para cada aresta e_k , tem-se:

$$\int_{e_k} \vec{U} \cdot \vec{dl} = \int_{e_k} \vec{U}^h \cdot \vec{dl}, \quad k = 1, \dots, n \quad (2-29)$$

Substituindo a Equação 2-27 na 2-29, obtém-se:

$$\int_{e_k} (\mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{C}_u^T\mathbf{b}) \cdot \vec{dl} = c_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2-30)$$

onde c_k é a circulação do campo \vec{U} sobre a aresta e_k . A Equação 2-30 pode ser escrita na forma matricial:

$$\mathbf{B}_Q\mathbf{a} + \mathbf{C}_Q\mathbf{b} = \mathbf{c}_s \quad (2-31)$$

onde \mathbf{c}_s é um vetor que contém as circulações c_k sobre as n arestas do domínio de suporte, \mathbf{B}_Q e \mathbf{C}_Q são dados por:

$$\mathbf{B}_Q = \begin{bmatrix} \int_{e_1} \phi_1 \hat{t}_1 \cdot \vec{dl} & \int_{e_1} \phi_2 \hat{t}_2 \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_1} \phi_n \hat{t}_n \cdot \vec{dl} \\ \int_{e_2} \phi_1 \hat{t}_1 \cdot \vec{dl} & \int_{e_2} \phi_2 \hat{t}_2 \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_2} \phi_n \hat{t}_n \cdot \vec{dl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{e_n} \phi_1 \hat{t}_1 \cdot \vec{dl} & \int_{e_n} \phi_2 \hat{t}_2 \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_n} \phi_n \hat{t}_n \cdot \vec{dl} \end{bmatrix}, \quad (2-32)$$

$$\mathbf{C}_Q = \begin{bmatrix} \int_{e_1} \hat{t}_{p1} \cdot \vec{dl} & \int_{e_1} \hat{t}_{p2} \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_1} \hat{t}_{pm} \cdot \vec{dl} \\ \int_{e_2} \hat{t}_{p1} \cdot \vec{dl} & \int_{e_2} \hat{t}_{p2} \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_2} \hat{t}_{pm} \cdot \vec{dl} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{e_n} \hat{t}_{p1} \cdot \vec{dl} & \int_{e_n} \hat{t}_{p2} \cdot \vec{dl} & \cdots & \int_{e_n} \hat{t}_{pm} \cdot \vec{dl} \end{bmatrix}. \quad (2-33)$$

O sistema de equações 2-31 possui n equações e $n + m$ incógnitas, portanto, não possui solução única. Uma forma de tornar o sistema determinado e com solução única é impor a seguinte restrição [15]:

$$\mathbf{C}_Q^T \mathbf{a} = 0 \quad (2-34)$$

Multiplicando a Equação 2-31 por \mathbf{B}_Q^{-1} e fazendo algumas manipulações matemáticas, tem-se:

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}_Q^{-1} \mathbf{c}_s - \mathbf{B}_Q^T \mathbf{C}_Q \mathbf{b} \quad (2-35)$$

Substituindo a Equação 2-35 em 2-34, chega-se:

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}_b \mathbf{c}_s \quad (2-36)$$

onde

$$\mathbf{S}_b = [\mathbf{C}_Q^T \mathbf{B}_Q^{-1} \mathbf{C}_Q]^{-1} \mathbf{C}_Q^T \mathbf{B}_Q^{-1} \quad (2-37)$$

Agora substituindo a Equação 2-36 em 2-35, chega-se a

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}_a \mathbf{c}_s \quad (2-38)$$

onde

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{B}_Q^{-1} [1 - \mathbf{C}_Q \mathbf{S}_b] \quad (2-39)$$

Combinando as Equações 2-38 e 2-36 com a Equação 2-27, a aproximação \vec{U}^h pode ser escrita como:

$$\vec{U}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \vec{\phi}_i(\mathbf{x}) c_i = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_s \quad (2-40)$$

onde $\vec{\phi}_i$ corresponde à função de forma vetorial da i -ésima aresta do domínio de suporte, $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ é a matriz das funções de forma vetoriais de cada aresta do domínio do suporte:

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = [\vec{\phi}_1(\mathbf{x}), \vec{\phi}_2(\mathbf{x}), \dots, \vec{\phi}_n(\mathbf{x})] \quad (2-41)$$

e sua expressão é

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x}) \mathbf{S}_a + \mathbf{C}_u^T \mathbf{S}_b \quad (2-42)$$

Levando a Equação 2-42 na Equação 2-40 e aplicando o rotacional na aproximação de campo \vec{U}^h tem-se:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{U}^h(\mathbf{x}) &= \nabla \times \Phi(\mathbf{x})\mathbf{c}_s \\ &= [\nabla \times \Phi(\mathbf{x})]\mathbf{c}_s\end{aligned}\quad (2-43)$$

Tomando só o rotacional das funções de forma

$$\begin{aligned}\nabla \times \Phi(\mathbf{x}) &= \nabla \times (\mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a + \mathbf{C}_u^T\mathbf{S}_b) \\ &= \nabla \times \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})\mathbf{S}_a \\ &= [\nabla \times \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x})]\mathbf{S}_a\end{aligned}\quad (2-44)$$

onde

$$\nabla \times \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x}) = [\nabla \times \phi_1(\mathbf{x})\hat{t}_1, \nabla \times \phi_2(\mathbf{x})\hat{t}_2, \dots, \nabla \times \phi_n(\mathbf{x})\hat{t}_n] \quad (2-45)$$

Da identidade vetorial

$$\nabla \times u\vec{v} = u\nabla \times \vec{v} - \vec{v} \times \nabla u \quad (2-46)$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned}\nabla \times \phi_i(\mathbf{x})\hat{t}_i &= \phi_i(\mathbf{x})\nabla \times \hat{t}_i - \hat{t}_i \times \nabla \phi_i(\mathbf{x}) \\ &= -\hat{t}_i \times \nabla \phi_i(\mathbf{x}) \\ &= \nabla \phi_i(\mathbf{x}) \times \hat{t}_i\end{aligned}\quad (2-47)$$

onde $\nabla \times \hat{t}_i = 0$ uma vez que \hat{t}_i é constante. Aplicando a Equação 2-47 para cada termo da Equação 2-45, tem-se que

$$\nabla \times \mathbf{B}_u^T(\mathbf{x}) = [\nabla \phi_1(\mathbf{x}) \times \hat{t}_1, \nabla \phi_2(\mathbf{x}) \times \hat{t}_2, \dots, \nabla \phi_n(\mathbf{x}) \times \hat{t}_n] \quad (2-48)$$

Na Equação 2-40, as funções de forma são construídas para satisfazer a condição do divergente nulo. Além disso, a circulação do campo vetorial é satisfeita sobre cada aresta no domínio e, desta forma, é possível garantir de forma simplificada a condição de Dirichlet mediante a distribuição de arestas na fronteira que são governadas por esta condição. Numericamente é observado que a circulação das funções de forma sobre as outras arestas é nula [12]. Isto pode ser expressado matematicamente como:

$$\int_{e_k} \vec{\phi}_i \cdot \vec{dl} = \delta_{ik} \quad (2-49)$$

onde as funções de forma constituem uma função de interpolação para campos vetoriais e o δ_{ik} é dado por:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } k \neq i \end{cases} \quad (2-50)$$

2.3. Método sem Malha de Arestas com funções de forma vetoriais baseadas nos elementos de primeiro tipo de Nédélec

Nesta seção é apresentada a formulação matemática para gerar as funções de forma vetoriais em $H(\text{curl})$ para o método sem malha de aresta quando são utilizadas três arestas no domínio de suporte. Estas funções foram introduzidas por [16] e são baseadas nos elementos de primeiro tipo de Nédélec utilizando uma distribuição de arestas triangular [7]. O procedimento para criar as funções de forma é o mesmo apresentado na Seção 2.1, onde para um polinômio de ordem igual a 1, a função de forma vetorial é a apresentada na Equação 2-9.

Seja \vec{u}^h a aproximação do vetor de campo \vec{u} no domínio Ω . Um grupo de arestas é distribuído sobre o domínio e seu contorno como mostrado na Figura 1-2. A aproximação em um ponto x é dada pela Equação 2-40.

Como três coeficientes precisam ser encontrados para gerar as funções de forma vetoriais, três arestas no domínio de suporte são tomadas. Para garantir que as funções \vec{N}_i apenas tenham componente tangencial ao longo da aresta e_k , fazemos com que a circulação da aresta seja igual a um sobre ela e zero nas outras arestas, isto é:

$$\int_{e_k} \vec{N}_i \cdot \vec{t}_k \, dl = \delta_{ik} \quad (2-51)$$

onde \vec{t}_k é o vetor unitário na direção da aresta e_k e o δ_{ik} é definido na Equação 2-50.

Portanto, o seguinte sistema é resolvido para encontrar os coeficientes β_{ni} .

$$\mathbf{A}\beta_i = \mathbf{L}_i, \quad i = 1 \dots n \quad (2-52)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} (yt_{1x} - xt_{1y}) \, dl \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{nx} & t_{ny} & \int_{e_n} (yt_n x - xt_n y) \, dl \end{bmatrix} \quad (2-53)$$

$$\beta_{\mathbf{i}} = [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i} \dots \beta_{ni}]^T \quad (2-54)$$

$$(\mathbf{L}_i)_j = \frac{1}{l_j} \delta_{ij} \quad (2-55)$$

onde n é o número de arestas no domínio de suporte, $\beta_{\mathbf{ni}}$ é o vetor coluna contendo os n coeficientes da função de forma da i -ésima aresta no domínio de suporte e \mathbf{L}_i é o vetor coluna que contém os comprimentos das arestas. Para três arestas no domínio de suporte tem-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} (yt_1x - xt_1y) dl \\ t_{2x} & t_{2y} & \int_{e_2} (yt_2x - xt_2y) dl \\ t_{3x} & t_{3y} & \int_{e_3} (yt_3x - xt_3y) dl \end{bmatrix} \quad (2-56)$$

$$\beta_{\mathbf{i}} = [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}]^T \quad (2-57)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1/l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/l_3 \end{bmatrix} \quad (2-58)$$

onde t_{ix} e t_{iy} são as componentes dos vetores unitários da i -ésima aresta no domínio de suporte e, l_i denota o comprimento da aresta i -ésima aresta.

Uma vez que as funções de forma são definidas, a aproximação \vec{u}^h pode ser escrita como:

$$\vec{u}^h = \sum_{i=1}^3 \vec{N}_i c_i = \Phi(x) c_s \quad (2-59)$$

onde c_s é um vetor que contém a circulação do campo vetorial sobre cada aresta de suporte e Φ é a matriz que contém as funções de forma:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \vec{N}_1 & \vec{N}_2 & \vec{N}_3 \end{bmatrix} \text{ e } c_s = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

3 Funções de Forma Vetoriais com mais arestas no domínio de suporte

Agora o Método sem Malha de Aresta é estendido para trabalhar com mais arestas no domínio de suporte. Neste capítulo propõe-se a criação das funções de forma vetoriais baseadas nos espaços $H(\text{curl})$ e nos elementos de primeiro tipo de Nédélec, de tal forma que 4, 5 e 6 arestas possam ser tomadas no domínio de suporte.

3.1. Funções de forma vetoriais para 4 arestas no domínio de suporte

A seguir é apresentada a geração das funções de forma vetoriais para o EMM quando são utilizadas quatro arestas no domínio de suporte. As funções de forma estão baseadas nos espaços $H(\text{curl})$ e nos elementos de primeiro tipo de Nédélec utilizando uma distribuição de arestas quadrilateral [7]. A criação da função de forma segue o procedimento apresentado na Seção 2.1, onde para um polinômio de ordem 1, a função de forma vetorial é apresentada na Equação 2-19.

Para este caso, é necessário encontrar quatro coeficientes para gerar a função de forma vetorial, portanto quatro arestas são utilizadas no domínio de suporte. Os coeficientes são encontrados aplicando a condição de circulação imposta na Equação 2-51 e solucionando o sistema da Equação 2-52 para quatro arestas, $n = 4$. A matriz \mathbf{A} e o vetor coluna β_i são dados por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} (yt_{1x}) dl & \int_{e_1} (xt_{1y}) dl \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{nx} & t_{ny} & \int_{e_n} (yt_{nx}) dl & \int_{e_n} (xt_{ny}) dl \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

$$\beta_i = [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}]^T \quad (3-2)$$

e \mathbf{L}_i segue a forma da Equação 2-55 modificado para 4 arestas, isto é, possui 4 linhas.

Desta forma, a aproximação da Equação 2-40 para quatro arestas no domínio de suporte pode ser escrita como:

$$\vec{u}^h = \sum_{i=1}^4 \vec{N}_i c_i = \Phi(x) c_s \quad (3-3)$$

onde,

$$\Phi(x) = \left[\vec{N}_1 \quad \vec{N}_2 \quad \vec{N}_3 \quad \vec{N}_4 \right] \text{ e } c_s = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

A Figura 3-1 apresenta as funções de forma para o quadrado da Figura 2-2. Lembrando que a circulação deve ser igual a 1 sob a mesma aresta e zero nas outras, de modo que, o vetor resultante da circulação forma um ângulo diferente de 90° com a mesma aresta e é perpendicular às outras arestas no domínio de suporte.

Sendo obtidas a função de forma, serão realizados no Capítulo 4, dois testes para verificar seu correto comportamento. Primeiramente será testada a condição de circulação nas arestas e posteriormente, o EMM é aplicado na resolução do problema de autovalores de um guia de onda quadrada. Conforme será visto, a função de forma vetorial satisfaz a condição de circulação e consegue gerar soluções numéricas sem a presença de modos espúrios no problema de autovalores.

3.2. Funções de forma vetoriais para 5 e 6 arestas no domínio de suporte baseadas no elemento de primeiro tipo de Nédélec

Nesta seção são apresentadas as funções de forma vetoriais, de modo que 5 e 6 arestas possam ser tomadas no domínio de suporte. Estas funções são baseadas nos espaços $H(curl)$ e nos elementos de primeiro tipo de Nédélec utilizando uma distribuição de arestas triangular [7].

Para gerar as funções de forma, o grau do polinômio da Equação 2-3 é aumentado ($k = 2$). A dimensão dos espaços é igual a 8 e sua base é dada pela Equação 2-13. No FEM de Aresta os graus de liberdade são atribuídos da seguinte forma: dois para cada aresta (totalizando 6) e dois no interior do elemento. Nos métodos sem malhas não existe o conceito de “elemento”, devido a isso, nesta formulação os graus de liberdade serão todos associados às arestas. Então, tomando o polinômio completo na função de base, precisam-se de 8 arestas no domínio de suporte pois, conforme a Equação 2-13, os espaços \mathcal{R}^2 tem dimensão igual a

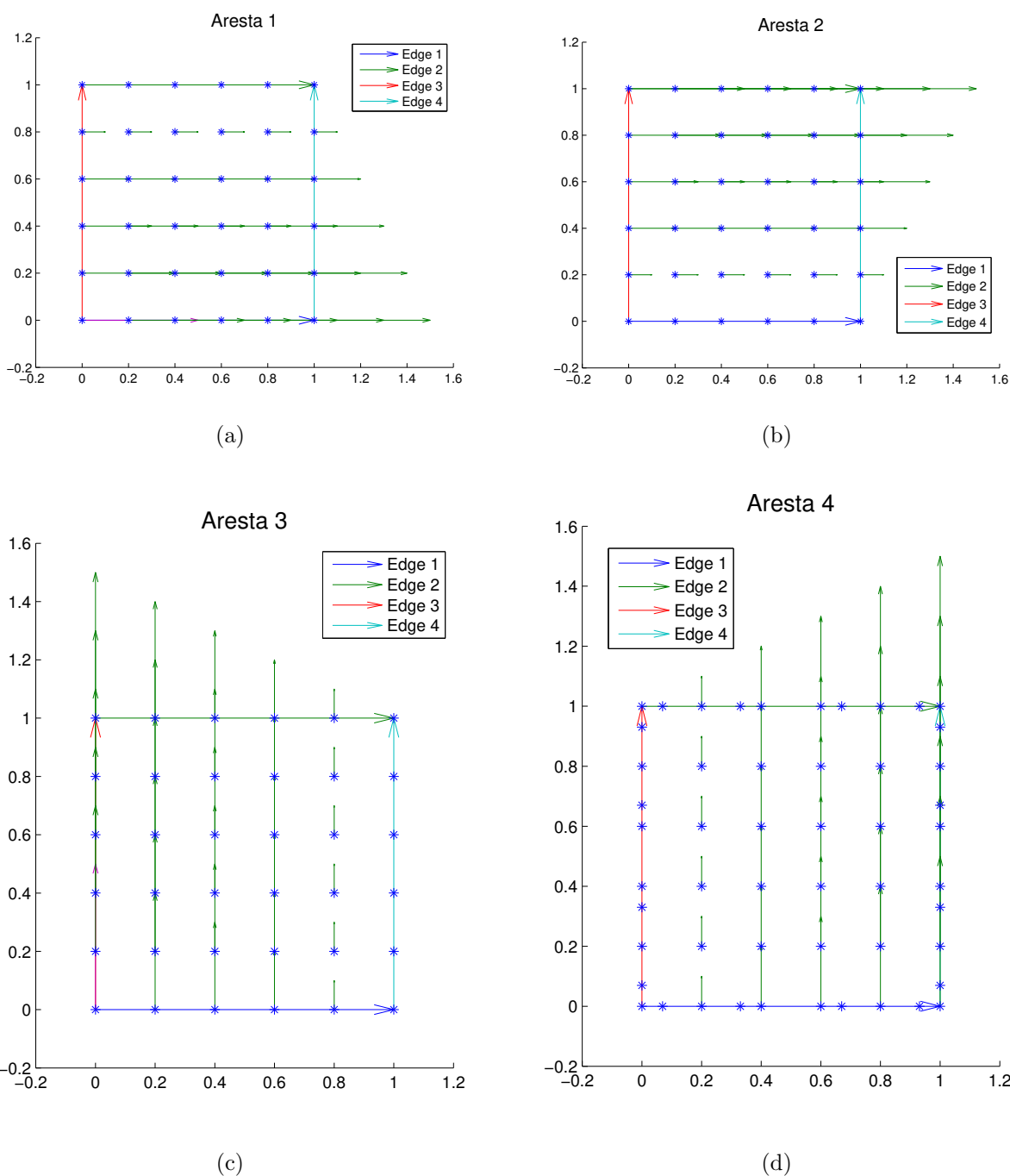


Figura 3-1: Representação gráfica das funções de forma vetoriais para 4 arestas no domínio de suporte. (a) \vec{N}_1 , (b) \vec{N}_2 , (c) \vec{N}_3 e (d) \vec{N}_4

8. Como a dimensão dos espaços deve ser 5 e 6, para atribuir um grau de liberdade a cada aresta e assim tomar 5 e 6 arestas no domínio de suporte, utiliza-se um polinômio incompleto na base. São formadas três funções de forma vetoriais: nas funções das Equações 3-5 e 3-6 são tomados os termos da Equação 2-19 e é adicionado um quinto termo com componente

de grau elevado; na função da Equação 3-7 combinam-se os dois últimos termos da Equação 2-19 e são adicionados os dois termos com grau elevado da função de base expressada na Equação 2-13.

$$\vec{N}_{5i}^1 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} y^2 \\ -xy \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

$$\vec{N}_{5i}^2 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} xy \\ -x^2 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

$$\vec{N}_{5i}^3 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} y^2 \\ -xy \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} xy \\ -x^2 \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

onde o subíndice indica a quantidade de arestas que devem ser tomadas no domínio de suporte e o sobrescrito numera as funções de forma que tomam o mesmo número de arestas.

Como são necessários cinco coeficientes para gerar as funções de forma vetoriais, então cinco arestas são utilizadas no domínio de suporte. Para cada função de forma, os coeficientes são obtidos solucionando o sistema da Equação 2-52. Para cada sistema, a matriz \mathbf{A} é dada por:

$$\mathbf{A}_5^1 = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1}(yt_{1x}) dl & \int_{e_1}(xt_{1y}) dl & \int_{e_1}(y^2t_{1x} - xyt_{1y}) dl \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{nx} & t_{ny} & \int_{e_n}(yt_{nx}) dl & \int_{e_n}(xt_{ny}) dl & \int_{e_n}(y^2t_{nx} - xyt_{ny}) dl \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

$$\mathbf{A}_5^2 = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1}(yt_{1x}) dl & \int_{e_1}(xt_{1y}) dl & \int_{e_1}(xyt_{1x} - x^2t_{1y}) dl \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{nx} & t_{ny} & \int_{e_n}(yt_{nx}) dl & \int_{e_n}(xt_{ny}) dl & \int_{e_n}(xyt_{nx} - x^2t_{ny}) dl \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

$$\mathbf{A}_5^3 = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1}(yt_{1x} - xt_{1y}) dl & \int_{e_1}(y^2t_{1x} - xyt_{1y}) dl & \int_{e_1}(xyt_{1x} - x^2t_{1y}) dl \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{nx} & t_{ny} & \int_{e_n}(yt_{nx} - xt_{ny}) dl & \int_{e_n}(y^2t_{nx} - xyt_{ny}) dl & \int_{e_n}(xyt_{nx} - x^2t_{ny}) dl \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

Para os três sistemas é utilizado o mesmo vetor coluna β_{ni}

$$\beta_i = [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}, \beta_{5i}]^T \quad (3-11)$$

e \mathbf{L}_i para cada sistema segue a forma da Equação 2-55 modificado para 5 arestas.

A aproximação do campo \vec{u}^h para 5 arestas no domínio de suporte pode ser escrita como:

$$\vec{u}^h = \sum_{i=1}^5 \vec{N}_i c_i = \Phi(x) c_s \quad (3-12)$$

onde Φ e c_s seguem a forma da Equação 3-4 modificada para cinco arestas.

No Capítulo 4, é testado o correto funcionamento das funções de forma aplicando-as à solução dos mesmos dois testes da seção anterior. Conforme será mostrado, as três funções de forma garantem a condição de circulação e no problema de autovalores, as funções de forma geram soluções numéricas corrompidas pelos modos espúrios.

Para seis arestas no domínio de suporte, são geradas três funções de forma da seguinte maneira: N_{6i}^1 tomando os seis primeiros termos da Equação 2-13, N_{6i}^2 tomando os termos da Equação 2-19 e adicionados os dois últimos termos de grau elevada da função de base expressada na Equação 2-13 e N_{6i}^3 tomando os quatro primeiros e os dois últimos termos da Equação 2-13.

$$\vec{N}_{6i}^1 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{6i} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

$$\vec{N}_{6i}^2 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} y^2 \\ -xy \end{bmatrix} + \beta_{6i} \begin{bmatrix} xy \\ -x^2 \end{bmatrix} \quad (3-14)$$

$$\vec{N}_{6i}^3 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} y^2 \\ -xy \end{bmatrix} + \beta_{6i} \begin{bmatrix} xy \\ -x^2 \end{bmatrix} \quad (3-15)$$

Seis coeficientes precisam ser encontrados, então seis arestas são tomadas no domínio de suporte. Os coeficientes de cada função de forma são encontrados aplicando a condição de circulação imposta na Equação 2-51 e solucionando o sistema da Equação 2-52 para seis arestas no domínio de suporte. Para cada sistema, a matriz \mathbf{A} é dada por:

$$\mathbf{A}_6^1 = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} (yt_{1x}) dl & \int_{e_1} (xt_{1y}) dl & \int_{e_1} (xt_{1x}) dl & \int_{e_1} (yt_{1y}) dl \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{nx} & t_{ny} & \int_{e_n} (yt_{nx}) dl & \int_{e_n} (xt_{ny}) dl & \int_{e_n} (xt_{nx}) dl & \int_{e_n} (yt_{ny}) dl \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

$$\mathbf{A}_6^2 = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} (yt_{1x}) dl & \int_{e_1} (xt_{1y}) dl & \int_{e_1} (y^2 t_{1x} - xy t_{1y}) dl & \int_{e_1} (xy t_{1x} - x^2 t_{1y}) dl \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{nx} & t_{ny} & \int_{e_n} (yt_{nx}) dl & \int_{e_n} (xt_{ny}) dl & \int_{e_n} (y^2 t_{nx} - xy t_{ny}) dl & \int_{e_n} (xy t_{nx} - x^2 t_{ny}) dl \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

$$\mathbf{A}_6^3 = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} (xt_{1x}) dl & \int_{e_1} (yt_{1y}) dl & \int_{e_1} (y^2t_{1x} - xyt_{1y}) dl & \int_{e_1} (xyt_{1x} - x^2t_{1y}) dl \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{nx} & t_{ny} & \int_{e_n} (xt_{nx}) dl & \int_{e_n} (yt_{ny}) dl & \int_{e_n} (y^2t_{nx} - xyt_{ny}) dl & \int_{e_n} (xyt_{nx} - x^2t_{ny}) dl \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

Para os três sistemas é utilizado o mesmo vetor coluna β_i

$$\beta_i = [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}, \beta_{5i}, \beta_{6i}]^T \quad (3-19)$$

e \mathbf{L}_i para cada sistema segue a forma da Equação 2-58 modificado para 6 arestas.

A aproximação de campo \vec{u}^h para seis arestas é dada por:

$$\vec{u}^h = \sum_{i=1}^6 \vec{N}_i c_i = \Phi(x) c_s \quad (3-20)$$

onde Φ e c_s seguem a forma da Equação 3-4 modificada para seis arestas.

No Capítulo 4 aplicam-se os mesmos dois testes utilizados para 4 e 5 arestas no domínio de suporte com a finalidade de testar o correto funcionamento das funções de forma. As funções de forma N_{6i}^1 e N_{6i}^3 não garantem a condição de circulação, porque as matrizes \mathbf{A}_6^1 e \mathbf{A}_6^3 se tornam singulares. A função N_{6i}^2 satisfaz a condição de circulação, mas no problema de autovalores, modos espúrios são encontrados na solução numérica.

As funções de forma com base completa e com os graus de liberdade atribuídos de maneira correta seriam livres de modos espúrios. Então, as funções de forma vetoriais geradas para 3 e 4 arestas no domínio de suporte, expressadas nas Equações 2-9 e 2-19 funcionam também corretamente para os Métodos sem Malha vetoriais. Já as funções de forma vetoriais para 5 e 6 arestas baseadas nos elementos de Nédélec, foram construídas de forma incompleta e seus graus de liberdade não seguem as regras impostas pelas equações 2-14 e 2-15. Por isso não se tem a garantia da ausência de modos espúrios.

Para tentar remediar este fato, uma análise comparativa é realizada entre a função de forma para 5 arestas e as funções de forma para 3 e 4 arestas no domínio de suporte. A análise consiste em comparar e modificar cada componente do polinômio que compõe as funções de forma para 5 arestas, onde as modificações tendem a colocar o mesmo polinômio da função de base para quatro arestas no domínio de suporte e adicionar um quinto termo para que a função de forma tenha divergência nula e assim eliminar os modos espúrios. Da análise é concluído que *cada componente do divergente da função de base deve ser igual a zero*, isto é, na função de base a variável x não pode estar na componente \hat{x} e a variável y não pode estar na componente \hat{y} . Por este motivo, é proposto na seção 3.3 a construção de

funções polinomiais que não são baseadas nos elementos de primeiro tipo de Nédélec, mas somente nos espaços $H(\text{curl})$.

3.3. Funções de forma de aresta vetoriais em $H(\text{curl})$ para 5 e 6 arestas no domínio de suporte baseadas apenas nos espaços $H(\text{curl})$

Nesta seção, introduzimos uma nova maneira de construir as funções de forma vetoriais para 5 e 6 arestas no domínio de suporte. As funções estão baseadas nos espaços $H(\text{curl})$ e, além disso, é imposta a nova condição discutida no final da seção anterior: cada componente do divergente deve ser nula. Sejam os espaços das funções de base definidos por:

$$\mathcal{L}^k = \left\{ u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1, u_2 \in \mathbb{P}_k; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \right\} \quad (3-21)$$

onde \mathbb{P}_k é o espaço de polinômios de grau k .

As funções de base para três e quatro arestas no domínio de suporte, Equações 2-8 e 2-18, podem ser geradas considerando $k = 1$ na Equação 3-21. Para gerar as funções de forma com 5 e 6 arestas no domínio de suporte, o grau do polinômio da Equação 3-21 é aumentado para $k = 2$. Para gerar a função de base com 5 arestas no domínio de suporte, toma-se os termos da Equação 2-18 e adiciona-se um quinto termo de modo que, cada componente do divergente da função de base seja igual a zero. Também define-se o sinal negativo na componente \hat{y} baseado na função de base desenvolvida para os elementos de primeiro tipo de Nédélec. Sendo assim, a base dos espaços para cinco arestas é dada por:

$$\mathcal{L}^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^2 \\ -x^2 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3-22)$$

A Equação 3-22 é tomada como base para construir a base dos espaços polinomiais de 6 arestas no domínio de suporte. Para o sexto termo da função, o quinto termo na Equação 3-22 é dividido em dois. Esta divisão tem duas vantagens: a primeira é obter graus de liberdade separados para os termos y^2 e $-x^2$ e assim, ter um maior controle sobre eles; a segunda é que são usadas as mesmas variáveis em cada componente, garantindo assim a condição de que cada componente do divergente seja nula. Desta forma, a função de base para seis arestas é:

$$\rho^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -x^2 \end{bmatrix} \right\rangle \quad (3-23)$$

Substituindo as Equações 3-22 e 3-23 na Equação 2-40, as funções de forma para cinco e seis arestas no domínio de suporte são expressas como:

$$\vec{N}_{5i}^4 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} y^2 \\ -x^2 \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

$$\vec{N}_{6i}^4 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} y^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{6i} \begin{bmatrix} 0 \\ -x^2 \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

Como é necessário encontrar 5 e 6 coeficientes para gerar as funções de forma, cinco e seis arestas são tomadas no domínio de suporte. Os coeficientes das funções de forma são encontrados aplicando a condição de circulação. Para 5 arestas, o sistema da Equação 2-52 é dado por:

$$\mathbf{A}_5^4 = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} (yt_{1x}) dl & \int_{e_1} (xt_{1y}) dl & \int_{e_1} (y^2t_{1x} - x^2t_{1y}) dl \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{nx} & t_{ny} & \int_{e_n} (yt_{nx}) dl & \int_{e_n} (xt_{ny}) dl & \int_{e_n} (y^2t_{nx} - x^2t_{ny}) dl \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

$$\beta_i = [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}, \beta_{5i}]^T \quad (3-27)$$

e para 6 arestas no domínio de suporte o sistema é dado por:

$$\mathbf{A}_6^4 = \begin{bmatrix} t_{1x} & t_{1y} & \int_{e_1} (yt_{1x}) dl & \int_{e_1} (xt_{1y}) dl & \int_{e_1} (y^2t_{1x}) dl & \int_{e_1} (-x^2t_{1y}) dl \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{nx} & t_{ny} & \int_{e_n} (yt_{nx}) dl & \int_{e_n} (xt_{ny}) dl & \int_{e_n} (y^2t_{nx}) dl & \int_{e_n} (-x^2t_{ny}) dl \end{bmatrix} \quad (3-28)$$

$$\beta_i = [\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}, \beta_{5i}, \beta_{6i}]^T \quad (3-29)$$

onde \mathbf{L}_i para ambos sistemas, segue a forma da Equação 2-55 modificada para 5 e 6 arestas, respectivamente.

A aproximação de \vec{u}^h para 5 e 6 arestas é dada pelas Equações 3-12 e 3-20, respectivamente.

As Figuras **3-2** e **3-3** apresenta as funções de forma quando são tomadas 5 e 6 arestas no domínio de suporte. Lembrando que a circulação deve ser igual a 1 sob a mesma aresta e zero nas outras, de modo que, o vetor resultante da circulação forma um angulo diferente de 90° com a mesma aresta e é perpendicular às outras arestas no domínio de suporte.

No Capítulo 4 será testado o correto funcionamento destas funções de forma vetoriais, aplicando os mesmo dois testes das seções anteriores. Será mostrado que as duas funções de forma satisfazem a condição de circulação e no problema de autovalores, geram soluções livres de modos espúrios.

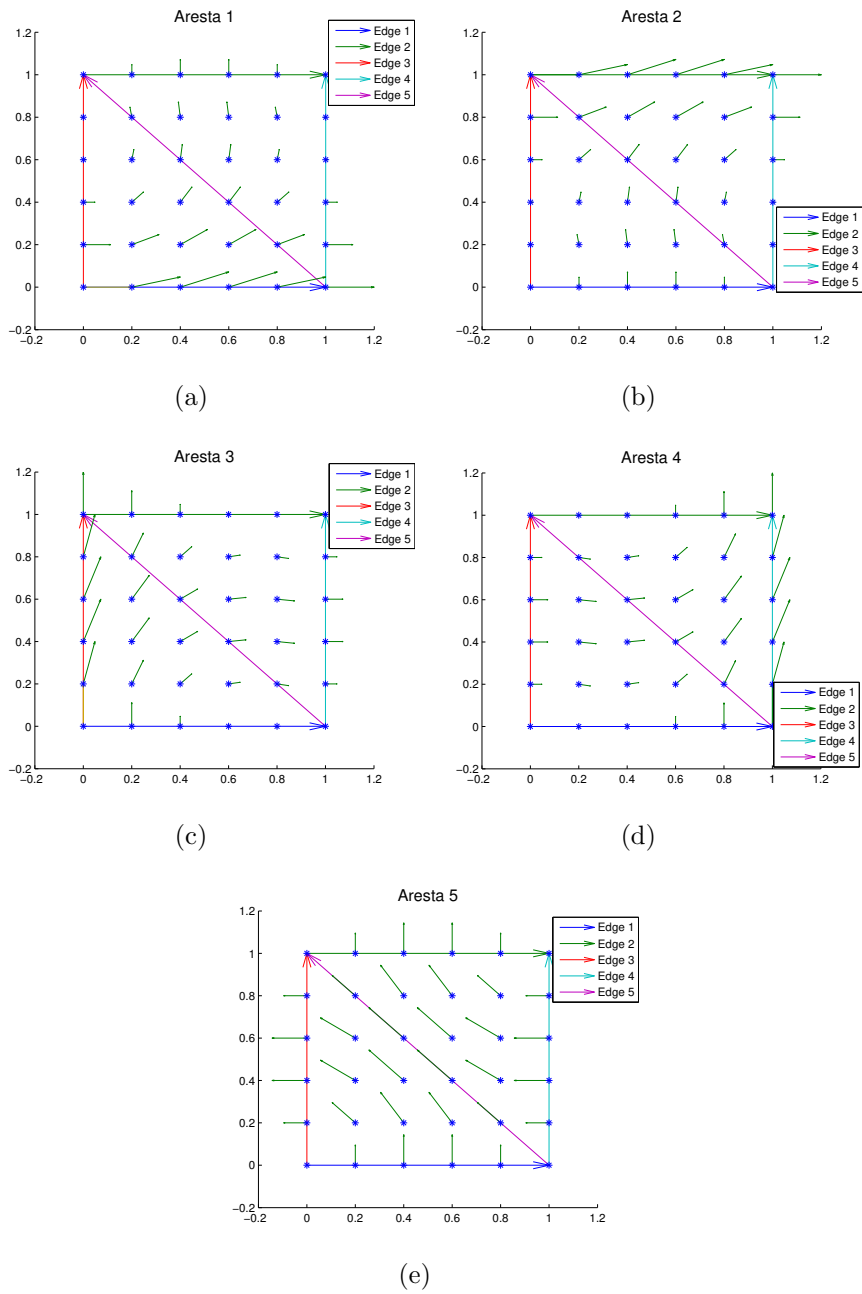


Figura 3-2: Representação gráfica das funções de forma vetoriais para 5 arestas no domínio de suporte. (a) \vec{N}_1 , (b) \vec{N}_2 , (c) \vec{N}_3 , (d) \vec{N}_4 e (e) \vec{N}_5

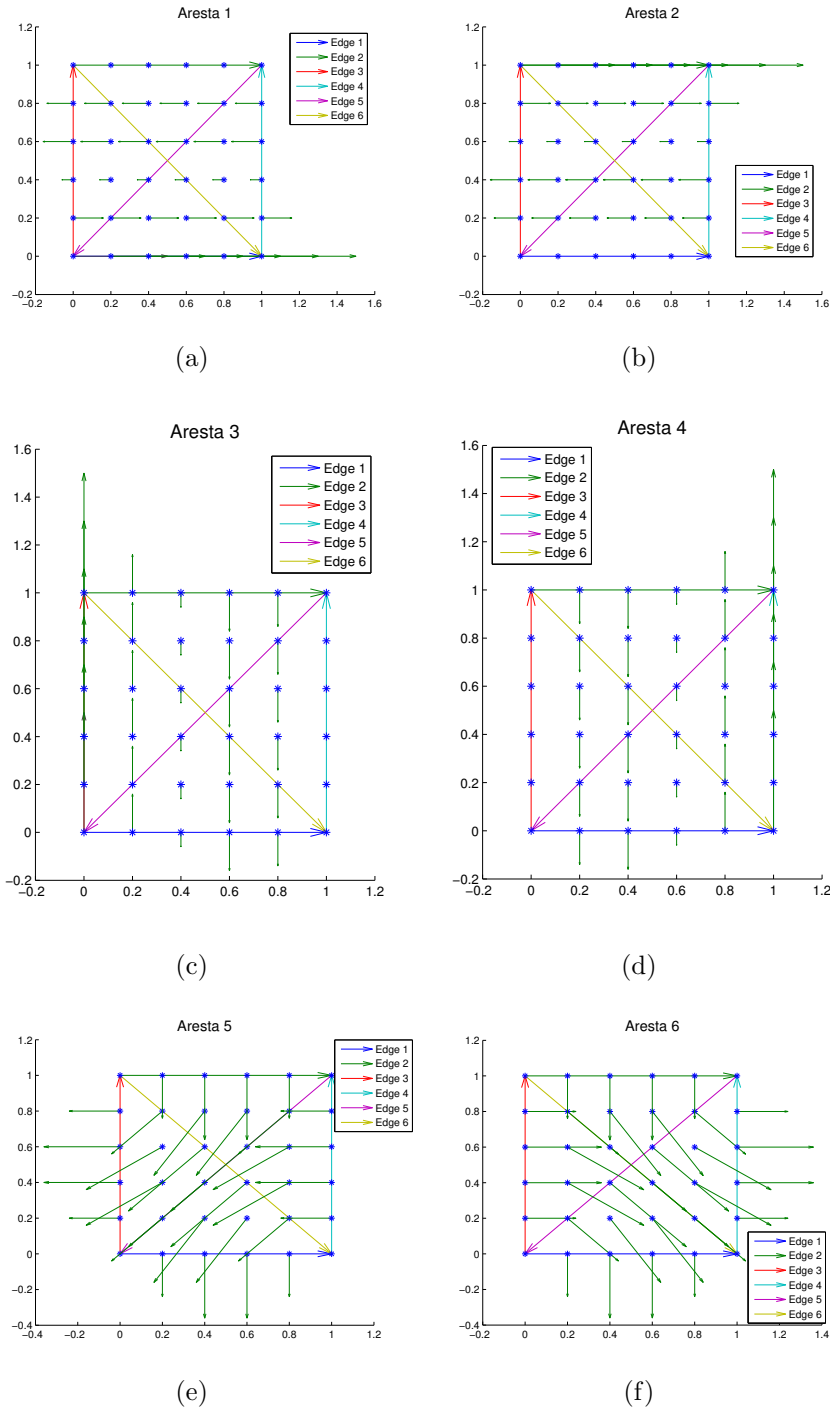


Figura 3-3: Representação gráfica das funções de forma vetoriais para 5 arestas no domínio de suporte. (a) \vec{N}_1 , (b) \vec{N}_2 , (c) \vec{N}_3 , (d) \vec{N}_4 , (e) \vec{N}_5 e (f) \vec{N}_6

4 Resultados Numéricos

Neste capítulo são avaliadas as funções de forma vetoriais apresentadas no capítulo anterior. Para isso, primeiro é testada a circulação do campo nas arestas. Com este teste garantimos que as funções de forma satisfaçam a condição de delta de Kronecker. Uma vez atendida essa condição, a condição de contorno de Dirichlet são imposta de forma simplificadas. Logo, o EMM é aplicado a diversos problemas eletromagnéticos, onde é testada a interpolação de campo vetorial, além da condição do divergente nulo e a condição de continuidade na interface entre dois meios diferentes. Finalmente, são apresentados dois testes importantes, o primeiro quando o comprimento das arestas tende para um ponto e o segundo quando são tomados diferentes números de arestas no domínio de suporte para solucionar um problema.

As funções de forma a serem testadas são:

$$\vec{N}_3 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_4 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_5^1 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} y^2 \\ -xy \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_5^2 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} xy \\ -x^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_5^3 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} y^2 \\ -xy \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} xy \\ -x^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_5^4 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} y^2 \\ -x^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_6^1 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{6i} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_6^2 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} y^2 \\ -xy \end{bmatrix} + \beta_{6i} \begin{bmatrix} xy \\ -x^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_6^3 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} y^2 \\ -xy \end{bmatrix} + \beta_{6i} \begin{bmatrix} xy \\ -x^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_6^4 = \beta_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_{3i} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{4i} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} + \beta_{5i} \begin{bmatrix} y^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_{6i} \begin{bmatrix} 0 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

onde o subíndice indica a quantidade de arestas que devem ser tomadas no domínio de suporte e o sobrescrito identifica a função de forma entre aquelas que tomam o mesmo número de arestas.

4.1. Circulação nas arestas

A circulação do campo vetorial é satisfeita sobre cada aresta no domínio e, desta forma, é possível garantir de forma simplificada a condição de Dirichlet mediante a distribuição de arestas na fronteira que são governadas por esta. Assim, é limitando o esforço extra necessário para lidar com as condições de contorno essenciais. A circulação nas arestas é expressa na Equação 2-51.

A *insolvência* é definida como uma expressão para a compatibilidade do conjunto de graus de liberdade com o espaço polinomial onde são definidas as funções de base $(\mathcal{R}^k, \rho^k, \mathcal{L}^k)$. Diz-se que o sistema expresso na Equação 2-51 é insolvente se e somente se existe uma única base que pertence ao espaço polinomial definido e satisfaz a propriedade de delta de Kronecker [19].

Para quatro arestas no domínio de suporte, é usada a função de forma vetorial \vec{N}_4 . A circulação é calculada nas arestas de um quadrado com dimensões $[0, 1] \times [1, 0]$. A Figura 4-1 mostra a distribuição de arestas utilizada. A matriz da Equação 4-1 apresenta os resultados da circulação nas arestas. Observa-se que a circulação das funções de forma têm valor igual a 1 na própria aresta e zero nas outras, portanto a função de forma vetorial \vec{N}_4 satisfaz a

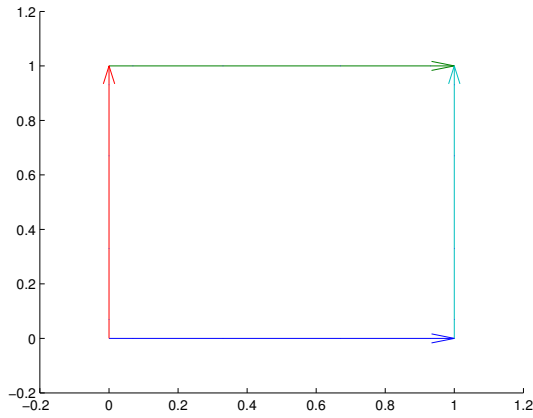


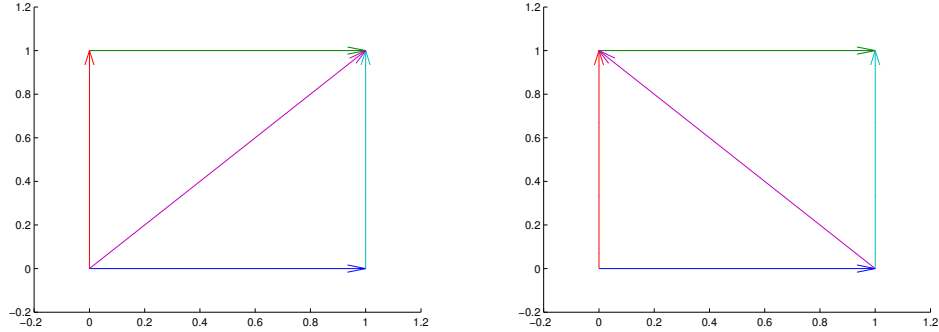
Figura 4-1: Distribuição de arestas quadrilateral e a circulação nas arestas.

condição de circulação.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2,2204 \times 10^{-16} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2,2204 \times 10^{-16} & 1 \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

Para as funções de forma vetoriais com 5 arestas no domínio de suporte, são testados duas distribuição de arestas, conforme a Figura 4-2. Primeiro, é testado a distribuição de arestas “contra slash”. As funções de forma vetoriais utilizadas são \vec{N}_5^1 , \vec{N}_5^2 , \vec{N}_5^3 e \vec{N}_5^4 , os resultados da circulação nas arestas para essas funções são apresentados nas Equações 4-2, 4-3, 4-4 e 4-5, respectivamente. Observa-se que as quatro funções de forma satisfazem a propriedade da circulação nas arestas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2,4409 \times 10^{-16} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4,2793 \times 10^{-16} & 1,9429 \times 10^{-16} & -3,3307 \times 10^{-16} & -1,5360 \times 10^{-16} & 1 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$



(a) Distribuição de arestas sentido “slash”. (b) Distribuição de arestas sentido “contra slash”.

Figura 4-2: Distribuições de arestas para 5 arestas no domínio de suporte.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,4409 \times 10^{-16} & 1 & 0 \\ 1,3878 \times 10^{-16} & 1,4165 \times 10^{-16} & -4,2666 \times 10^{-16} & -8,3267 \times 10^{-17} & 1 \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,6653 \times 10^{-16} & 1 & 0 & -2,7756 \times 10^{-17} & 4,4409 \times 10^{-16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1,5701 \times 10^{-16} & 1,1102 \times 10^{-16} & -3,3307 \times 10^{-16} & 1 & 4,4409 \times 10^{-16} \\ 3,6082 \times 10^{-16} & 2,7756 \times 10^{-17} & -2,4980 \times 10^{-16} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-4)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2,2204 \times 10^{-16} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,2204 \times 10^{-16} & 1 & 0 \\ -1,3878 \times 10^{-17} & -1,6653 \times 10^{-16} & -8,3267 \times 10^{-17} & 2,0142 \times 10^{-16} & 1 \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

Agora é testada a distribuição de arestas sentido “slash”. Para as funções de forma vetoriais \vec{N}_5^1 e \vec{N}_5^2 , são apresentados os resultados da circulação nas Equações 4-6 e 4-7, respectivamente. Pode ser observado que as duas funções de forma satisfazem a propriedade de circulação nas arestas. Por outro lado, na Equação 4-8 são apresentados os resultados da circulação nas arestas utilizando as funções de forma vetoriais \vec{N}_5^3 e \vec{N}_5^4 . Observa-se que não é possível encontrar os coeficientes das funções de forma vetoriais, pois no sistema de equações 2-52, as matrizes A_5^3 e A_5^4 definidas nas Equações 3-10 e 3-26, tornam-se singulares. Portanto

as funções de forma vetoriais não podem ser geradas.

Uma matriz quadrada é singular se e somente se seu determinante for nulo. O determinante de uma matriz é nulo quando duas filas ou colunas são iguais ou proporcionais. A matriz A_5^4 , expressa na Equação 4-10, tem as colunas três e quatro proporcionais, pois após de efetuar a operação *coluna 4 = coluna 4 + coluna 5*, as colunas 3 e 4 são iguais.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4,4409 \times 10^{-16} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1,1102 \times 10^{-16} & 1,1102 \times 10^{-16} & -1,1102 \times 10^{-16} & 1 & -2,2204 \times 10^{-16} \\ -1,1102 \times 10^{-16} & 6,1016 \times 10^{-17} & -5,5511 \times 10^{-17} & -3,7549 \times 10^{-17} & 1 \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,1102 \times 10^{-16} & 1 & 1,1102 \times 10^{-16} & 1,1102 \times 10^{-16} & -2,2204 \times 10^{-16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,4409 \times 10^{-16} & 1 & 0 \\ -5,5511 \times 10^{-17} & 3,7549 \times 10^{-17} & -1,1102 \times 10^{-16} & -6,1016 \times 10^{-17} & 1 \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

$$\begin{bmatrix} NaN & NaN & NaN & NaN & NaN \\ NaN & NaN & NaN & NaN & NaN \\ NaN & NaN & NaN & NaN & NaN \\ NaN & NaN & NaN & NaN & NaN \\ NaN & NaN & NaN & NaN & NaN \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

$$\mathbf{A}_5^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0,5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -0,5 \\ 0,7071 & 0,7071 & 0 & -2,7756 \times 10^{-17} & 2,7756 \times 10^{-17} \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

$$\mathbf{A}_5^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0,7071 & 0,7071 & 0,3536 & 0,3536 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

Finalmente são testadas as funções de forma vetoriais para seis arestas no domínio de suporte. A Figura 4-3 mostra a distribuição de arestas utilizada. Para as funções de forma vetoriais \vec{N}_6^1 e \vec{N}_6^3 são apresentados os resultados da circulação nas arestas na Equação 4-11. Observa-se que não é possível encontrar os coeficientes das funções de forma, pois as matrizes A_6^1 e A_6^3 , expressas nas Equações 3-16 e 3-18 tornam-se singulares. Portanto as funções de forma vetoriais não podem ser geradas.

As matrizes A_6^1 e A_6^3 apresentadas nas Equações 4-12 e 4-13, respectivamente, tem determinante nulo. Nas duas matrizes, as colunas 1 e 3 são proporcionais, porque depois de realizar a operação $coluna\ 3 = coluna\ 3 * 2$, as colunas 1 e 3 são iguais.

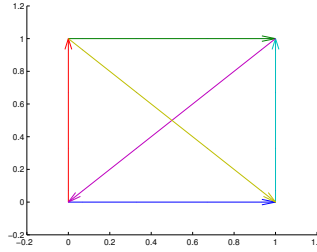


Figura 4-3: Distribuição de arestas para seis arestas no domínio de suporte.

$$\begin{bmatrix} NaN & NaN & NaN & NaN & NaN & NaN \\ NaN & NaN & NaN & NaN & NaN & NaN \\ NaN & NaN & NaN & NaN & NaN & NaN \\ NaN & NaN & NaN & NaN & NaN & NaN \\ NaN & NaN & NaN & NaN & NaN & NaN \\ NaN & NaN & NaN & NaN & NaN & NaN \end{bmatrix} \quad (4-11)$$

$$\mathbf{A}_6^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ -0,7071 & -0,7071 & -0,3536 & -0,3536 & -0,3536 & -0,3536 \\ 0,7071 & -0,7071 & 0,3536 & 0,3536 & -0,3536 & -0,3536 \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

$$\mathbf{A}_6^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0,5 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 & -0,5 & -1 \\ -0,7071 & -0,7071 & -0,3536 & -0,3536 & 0 & 0 \\ 0,7071 & -0,7071 & 0,3536 & -0,3536 & 0,3536 & 0,3536 \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

Por outro lado, as funções de forma vectoriais \vec{N}_6^2 e \vec{N}_6^4 satisfazem a condição de circulação nas arestas. Os resultados numéricos são apresentados nas Equações 4-14 e 4-15,

respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2,8708 \times 10^{-16} & 1 & 1,1102 \times 10^{-16} & 1,1102 \times 10^{-16} & 1,1102 \times 10^{-16} & 4,4409 \times 10^{-16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,4409 \times 10^{-16} & 1 & 1,3878 \times 10^{-16} & -4,4409 \times 10^{-16} \\ 1,1102 \times 10^{-16} & -1,0522 \times 10^{-16} & 2,7756 \times 10^{-16} & -6,7416 \times 10^{-17} & 1 & 0 \\ -2,3722 \times 10^{-16} & 1,1102 \times 10^{-16} & 2,3509 \times 10^{-16} & 2,7756 \times 10^{-17} & 8,3267 \times 10^{-16} & 1 \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4,4409 \times 10^{-16} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,4409 \times 10^{-16} & 1 & 0 & 0 \\ 1,3878 \times 10^{-16} & -3,4348 \times 10^{-16} & 1,3878 \times 10^{-16} & -6,7416 \times 10^{-17} & 1 & 0 \\ -1,3878 \times 10^{-16} & 3,4348 \times 10^{-16} & 1,7347 \times 10^{-16} & -3,8858 \times 10^{-16} & 2,3888 \times 10^{-17} & 1 \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

Com base nos resultados obtidos, determinou-se que para os próximos testes não será utilizada a distribuição de arestas “Slash”. Para 6 arestas no domínio de suporte, apenas serão utilizadas as funções de forma vetoriais \vec{N}_6^2 e \vec{N}_6^4 .

4.2. Interpolação de campos vetoriais

A interpolação de campo é o primeiro problema em que o EMM é aplicado com as novas funções de forma vetoriais. Para analisar os resultados, será calculado o erro percentual relativo das aproximações sobre um conjunto de pontos espalhadas no domínio:

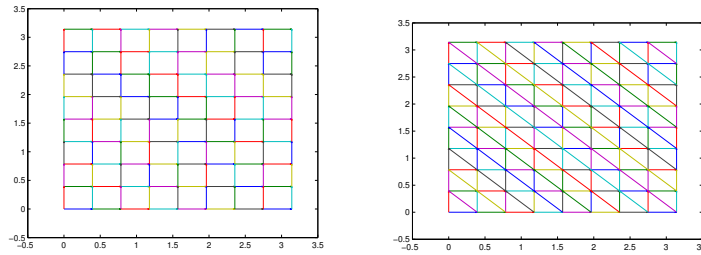
$$erro(\%) = \frac{\sum_{i=1}^n |\vec{E}(x_i) - \vec{E}^h(x_i)|}{\sum_{i=1}^n |\vec{E}(x_i)|} \times 100 \quad (4-16)$$

onde x_i é o i -ésimo ponto distribuído no domínio, \vec{E} representa a intensidade de campo elétrico e \vec{E}^h é a aproximação do campo elétrico.

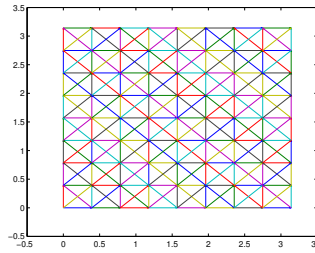
Considere Ω o domínio de um guia de onda com seção transversal quadrada, $\Omega = [\pi \times \pi]$, o meio interno espaço livre, portanto, $\mu = 1$ e $\epsilon = 1$ e todas as paredes são do tipo PEC. O modo interpolado corresponde ao oitavo modo, o qual é associado ao autovalor igual a 8 e é dado por [4]:

$$\vec{E} = (2\pi^2)[\cos(\pi x)\text{sen}(\pi y)\hat{x} - \text{senn}(\pi x)\cos(\pi y)\hat{y}] \quad (4-17)$$

O campo será interpolado em um conjunto de 144 pontos distribuídos uniformemente no domínio. A Figura 4-4 mostra as distribuições de arestas utilizadas para três, quatro, cinco e seis arestas no domínio de suporte.



(a) Distribuição de arestas quadrilateral.
 (b) Distribuição em uma direção, sentido “contra slash”, para três e cinco arestas no domínio de suporte.



(c) Distribuição de arestas para seis arestas no domínio de suporte.

Figura 4-4: Distribuição de arestas para três, quatro, cinco e seis arestas no domínio de suporte.

Para 4 arestas no domínio de suporte é utilizada a função de forma \vec{N}_4 e a distribuição de arestas quadrilateral da Figura 4-4a com 33024 arestas, obtendo um erro médio percentual de 1,6110 %.

Para 5 arestas, são utilizadas as funções de forma \vec{N}_5^1 , \vec{N}_5^2 , \vec{N}_5^3 e \vec{N}_5^4 com uma distribuição de arestas unidirecional sentido “contra slash” com 49408 arestas. As funções de forma \vec{N}_5^1 e \vec{N}_5^2 apresentam exatamente o mesmo valor de erro, 6,9701 %, as funções de forma \vec{N}_5^3 e \vec{N}_5^4 apresentam um erro médio percentual igual a 7,3559 e 1,6044 %, respectivamente. A Figura 4-5 apresenta a variação dos erros à medida que aumenta-se o número de arestas. Observa-se que a função de forma \vec{N}_5^4 apresenta níveis de erro menores que as demais funções.

Para 6 arestas são utilizadas as funções de forma \vec{N}_6^2 e \vec{N}_6^4 com a distribuição da Figura 4-4c, obtendo um erro médio percentual igual a 7,4958 % e 1,5895 % quando são utilizadas 16384 arestas. A Figura 4-6 apresenta o erro médio obtido conforme o número de arestas aumenta, observa-se que a função de forma \vec{N}_6^4 apresenta menores níveis de erro.

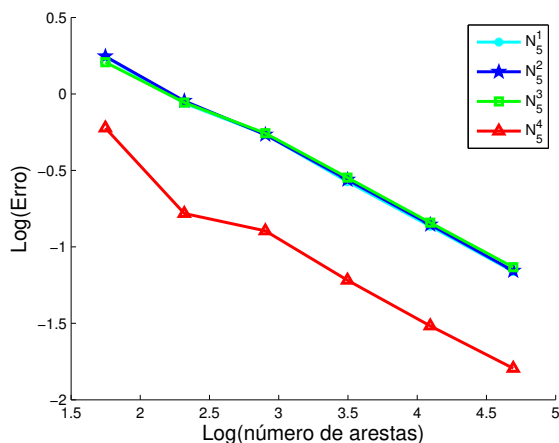


Figura 4-5: Níveis de erro para as funções de forma com 5 arestas no domínio de suporte.

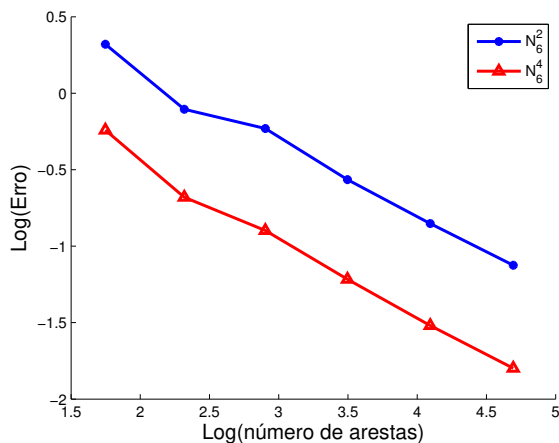


Figura 4-6: Níveis de erro para as funções de forma com 6 arestas no domínio de suporte.

A título de comparação, são apresentados os resultados para 3 arestas no domínio de suporte utilizando a função de forma \vec{N}_3 e a distribuição unidirecional sentido “contra slash” com 49408 arestas, o erro médio percentual é igual a 1,6007%. Para 5 e 6 arestas no domínio de suporte, são tomados os resultados das funções de forma \vec{N}_5^4 e \vec{N}_6^4 , respectivamente, pois apresentam os menores níveis de erro. Na Figura 4-7 são apresentados os erros para 3, 4, 5 e 6 arestas e as taxas de convergência. Observa-se que conforme o número de arestas no domínio aumenta, os níveis de erro diminuem. A função de forma vetorial para 4 arestas no domínio de suporte apresenta os menores níveis de erro e as taxas de convergência para todas as funções de forma têm valores similares. A Figura 4-8 mostra a representação do campo elétrico aproximado que visualmente é o mesmo para todos os casos.

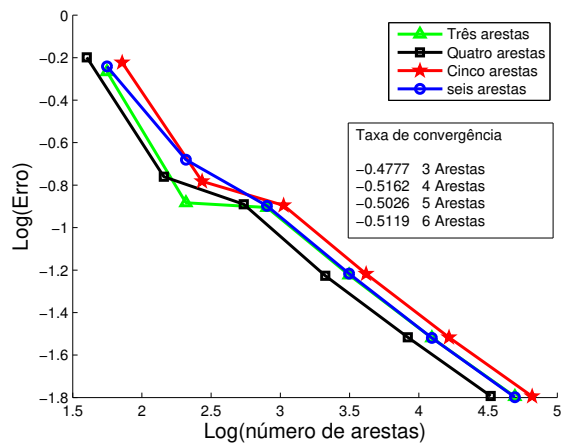


Figura 4-7: Evolução do erro em função do número de arestas.

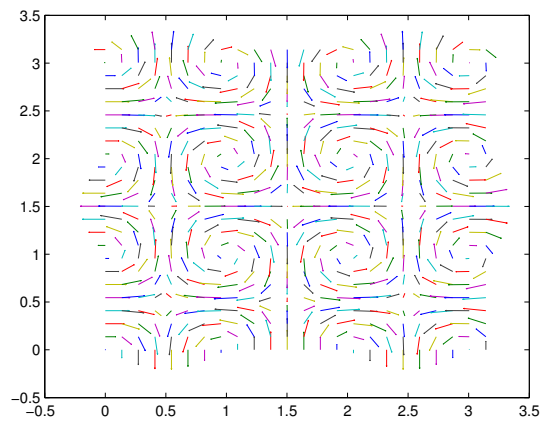


Figura 4-8: Representação do campo elétrico aproximado.

4.3. Problema de autovalores

Nesta seção, o EMM com as novas funções de forma vetorial será aplicado no problema de autovalores, com a finalidade de verificar se a formulação apresentará modos espúrios e determinar suas taxas de convergência. Primeiramente, a formulação matemática do problema é apresentada e, posteriormente, aplica-se o EMM em guias de onda com meio homogêneo isotrópico, homogêneo anisotrópico e não-homogêneo anisotrópico.

4.3.1. Definição do problema

Quando as variáveis nas equações de Maxwell são funções oscilando harmonicamente com uma única frequência, os campos são chamados *harmônicos no tempo*. Usando a notação fosorial complexa, as equações de Maxwell podem ser escritas como [5]:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (4-18)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \vec{D} + \vec{J} \quad (4-19)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (4-20)$$

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = 0 \quad (4-21)$$

$$\nabla \cdot \mu \vec{H} = 0 \quad (4-22)$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{Intensidade de campo Elétrico (V/m)} \\ \vec{D} &= \text{Densidade de fluxo Elétrico (C/m}^2\text{)} \\ \vec{H} &= \text{Intensidade de campo magnético (A/m)} \\ \vec{B} &= \text{Densidade de fluxo magnético (W/m}^2\text{)} \\ \vec{J} &= \text{Densidade de corrente elétrica (A/m}^2\text{)} \\ \rho &= \text{Densidade de carga elétrica (C/m}^3\text{)} \\ \epsilon &= \text{Permissividade (F/m)} \\ \mu &= \text{Permeabilidade (H/m)} \\ \sigma &= \text{Condutividade (S/m)} \\ \omega &= \text{Frequência angular} \end{aligned} \quad (4-23)$$

Nas equações anteriores, pode ser visto que os campos elétrico e magnético podem existir simultaneamente e eles interagem um com outro. O modelo de campo estático é o caso limite de campos harmônicos, quando a frequência se aproxima de zero.

Quando o domínio é composto por dois materiais com propriedades físicas diferentes, na interface entre os materiais o campo é descrito por:

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \quad (4-24)$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (4-25)$$

onde os índices 1 e 2 referem-se a qual material a grandeza física está associada, ρ_s é a densidade superficial de carga e \vec{n} é o vetor unitário normal à interface de materiais, sendo dirigida, por convenção, do meio 1 para o meio 2.

A Equação 4-18 pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{H} \quad (4-26)$$

Tomando o rotacional em ambos lados da Equação 4-26:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} \right) = \nabla \times \left(-j\omega \vec{H} \right) = -j\omega \nabla \times \vec{H} \quad (4-27)$$

Substituindo a Equação 4-19 em 4-27, chega-se a

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad (4-28)$$

com $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

Considere que as fronteiras Γ do domínio, isto é, $\Gamma = \partial\Omega$, são divididas em Γ_g e Γ_n , $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_n$, sendo Γ_g a fronteira onde são impostas as condições de contorno de Dirichlet e Γ_n a fronteira onde são impostas as condições de contorno mistas ou de terceiro tipo. Em Γ_g , considera-se um condutor elétrico perfeito:

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{em } \Gamma_g \quad (4-29)$$

E em Γ_n aplica-se uma condição de contorno de terceiro tipo [20]

$$\frac{1}{\mu_r} \vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{U} \quad \text{em } \Gamma_n \quad (4-30)$$

onde γ_e é um parâmetro da condição de contorno de terceiro tipo que depende da frequência e da dimensão física do meio onde o campo eletromagnético se propaga.

Forma forte

Dados ϵ_r , μ_r , e ω , determinar o campo elétrico \vec{E} que satisfaça:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4-31a)$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \text{em } \Gamma_g \quad (4-31b)$$

$$\frac{1}{\mu_r} \vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) + \gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{U} \quad \text{em } \Gamma_n \quad (4-31c)$$

onde μ_r é a permeabilidade magnética relativa, ϵ_r é a permissividade elétrica relativa e \vec{n} é o vetor unitário normal à interface de materiais.

Forma fraca

A forma fraca do problema é obtida através do método dos resíduos ponderados da maneira que se segue. Suponha uma função de teste $\vec{W}_t \in \mathbb{H}(\text{curl}, \Omega)$, com $\vec{n} \times \vec{W}_t = 0$ em Γ_g . O resíduo da Equação 4-31a ponderado pela função de teste é anulado no sentido integral:

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \right) \cdot \vec{W}_t d\Omega = 0 \quad (4-32)$$

que pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) \right) \cdot \vec{W}_t d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{W}_t d\Omega = 0 \quad (4-33)$$

Aplicando o teorema de Green vetorial na primeira integral da Equação 4-33 e após algumas manipulações vetoriais tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}_t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega - \\ & \int_{\Gamma_g} \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \cdot (\vec{n} \times \vec{W}_t) d\Gamma + \int_{\Gamma_n} \frac{1}{\mu_r} (\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{W}_t d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4-34)$$

com $\vec{n} \times \vec{W}_t = 0$ em Γ_g e aplicando a condição de contorno 4-31c, chega-se a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}_t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_n} \vec{W}_t \cdot (\gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})) d\Gamma = - \int_{\Gamma_n} \vec{W}_t \cdot \vec{U} d\Gamma \end{aligned} \quad (4-35)$$

Portanto, a forma fraca para o problema vetorial harmônico no tempo, 4-31, é escrita como:

Dados ϵ_r , μ_r , ω , γ_e e \vec{U} , determinar o campo elétrico $\vec{E} \in \mathbb{H}(\text{curl}, \Omega)$, tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}_t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W}_t \cdot \vec{E} d\Omega \\ - \int_{\Gamma_n} \vec{W}_t \cdot (\gamma_e \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})) d\Gamma = - \int_{\Gamma_n} \vec{W}_t \cdot \vec{U} d\Gamma \end{aligned} \quad (4-36)$$

4.3.2. Guia de onda com meio homogêneo e isotrópico

Na seção anterior foram apresentadas as formas forte e fraca de um problema vetorial harmônico no tempo. Essa classe de problemas pode ser relacionada a aplicações de guias de ondas e cavidades ressonantes, sendo representadas pelas Equações 4-31, onde geralmente deseja-se determinar os autovalores ω^2 associados às frequências de corte do guia. Então, a condição de contorno homogênea da Equação 4-29 é usada, uma vez que $\partial\Omega = \Gamma_g$ e a fronteira Γ_n não está presente. Assim, o problema representado na sua forma forte, como na Equação 4-31, pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} \right) - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = 0 \\ \hat{n} \times \vec{E} = 0 \end{aligned} \quad (4-37)$$

Considere um guia de onda com uma seção transversal quadrada de lado π , isto é, o domínio do problema é $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$, as características do meio são $\epsilon = 1$ e $\mu = 1$. Considere também que todas as fronteiras sejam do tipo PEC (condutores elétricos perfeitos). Este problema possui solução analítica [21] e é dada por:

$$\begin{aligned} \omega^2 = n^2 + m^2 \neq 0 \\ n, m = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4-38)$$

Para que o EMM possa computar os valores, precisa-se da forma fraca da Equação 4-37. Com base na Equação 4-36, a forma fraca é:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \vec{W}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) d\Omega - \int_{\Omega} k_0^2 \epsilon_r \vec{W} \cdot \vec{E} d\Omega = 0 \quad (4-39)$$

O problema em questão é um problema de autovalor, onde os autovalores estão associados às frequências de corte $\lambda = k_0^2$ e os autovetores associados são os modos do campo elétrico \vec{E} que propagam no guia. Neste trabalho, considera-se o campo em modo TE_z, isto

é, o campo elétrico tem componentes em x e y , enquanto a direção de propagação de onda é em z . O problema original pode ser aproximado como:

$$\begin{aligned}\vec{E}^h &= \sum_i \vec{N}_i(x) \cdot c_i \\ \vec{W} &= \sum_j \vec{N}_j(x) \cdot d_j\end{aligned}\quad (4-40)$$

Substituindo a Equação 4-40 em 4-39, obtemos o seguinte sistema matricial:

$$\mathbf{K}\mathbf{c} = \omega^2\mathbf{B}\mathbf{c} \quad (4-41)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} [\nabla \times \vec{N}_i]^T [\nabla \times \vec{N}_j] d\Omega \\ \mathbf{B} &= \int_{\Omega} \epsilon_r [\vec{N}_i]^T [\vec{N}_j] d\Omega\end{aligned}\quad (4-42)$$

Neste trabalho, a integração da forma fraca, expressa pela Equação 4-42, é realizada numericamente utilizando as diferentes distribuições de aresta e quadratura gaussiana com 4 pontos por célula de integração. Quando forem tomadas 3 arestas no domínio de suporte, a integração é feita em células triangulares e, para 4, 5 e 6 arestas, a forma fraca é integrada em células quadrangulares. Como no problema anterior, serão apresentados os resultados com 3 arestas no domínio de suporte utilizando a função de forma \vec{N}_3 para a distribuição de aresta unidirecional sentido “contra slash”, além disso são mostrados os resultados com 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte.

Aplicando o EMM com 4 arestas no domínio de suporte, é utilizada a função de forma \vec{N}_4 e a distribuição de arestas quadrilateral com 8320 arestas. Na Tabela **4-1** são apresentados os primeiros dez autovalores computados e os autovalores analíticos. Pode ser observado que a formulação encontra os autovalores de forma correta, satisfazendo a condição do divergente nulo e conseqüentemente, a solução numérica não é corrompida pelos modos espúrios.

Para 5 arestas, o EMM é aplicado utilizando a distribuição de arestas unidirecional sentido “contra slash” com 800 arestas espalhadas no domínio. Primeiramente são utilizadas as funções de forma baseadas nos elementos de Nédélec de primeiro tipo, \vec{N}_5^1 , \vec{N}_5^2 e \vec{N}_5^3 . Na Tabela **4-2** são apresentados os primeiros dez autovalores computados. Observa-se que, com estas funções de forma, os autovalores não são encontrados de forma correta, ou seja, modos espúrios são encontrados na solução numérica. Isto pode ser explicado pelo fato das funções de forma não terem divergência nula. Uma outra possível razão é porque as funções de base utilizadas estão baseadas nos elementos de Nédélec e os graus de liberdade são atribuídos apenas às arestas, quando na formulação original, os graus de liberdade são associados tanto às arestas como ao interior de elementos. Por outro lado, a função de forma \vec{N}_5^4 baseada apenas nos espaços $H(\text{curl})$ encontra os autovalores de forma correta, satisfazendo a condição do divergente nulo, sem a presença de modos espúrios. Os autovalores computados também

Tabela 4-1: Autovalores para quatro arestas no domínio de suporte.

Autovalores	
4 Arestas	
Arestas = 8320	Analíticos
1,0002	1
1,0002	1
2,0004	2
4,0032	4
4,0032	4
5,0034	5
5,0034	5
8,0064	8
9,0163	9
9,0163	9

são apresentados na Tabela 4-2.

Tabela 4-2: Autovalores para cinco arestas no domínio de suporte.

Autovalores				
Arestas = 800	Arestas = 800	Arestas = 800	Arestas = 800	Analítico
\vec{N}_5^1	\vec{N}_5^2	\vec{N}_5^3	\vec{N}_5^4	
4,0043	5,0396	5,2234	1,0003	1
4,0517	5,0515	5,2865	1,0029	1
4,1339	5,5153	5,4508	2,0000	2
4,1349	5,5219	5,4528	4,0257	4
4,1407	7,6123	5,4880	4,0259	4
4,1838	7,6128	5,5027	4,9898	5
5,0396	7,6143	5,5028	5,0392	5
5,0515	7,6166	5,6422	7,9969	8
5,4713	7,6198	5,9563	9,1189	9
5,4716	7,6237	6,0943	9,1431	9

O EMM é aplicado com 6 arestas no domínio de suporte. Para este caso, são utilizadas as funções de forma \vec{N}_6^2 , \vec{N}_6^4 e a distribuição da Figura 4-4c com 1056 arestas. Na Tabela 4-3 são apresentados os primeiros dez autovalores computados. observa-se que a formulação que emprega a função de forma \vec{N}_6^4 encontra os autovalores corretamente, sem a presença de modos espúrios. Por outro lado, a função de forma \vec{N}_6^2 apresenta modos espúrios na sua

solução numérica.

Tabela 4-3: Autovalores para 6 arestas no domínio de suporte.

AUTOVALORES		
\vec{N}_6^2	\vec{N}_6^4	Analítico
Arestas = 1056	Arestas = 1056	
5,5237	1,0000	1
5,5266	1,0000	1
7,6114	1,9936	2
7,6123	4,0003	4
7,6123	4,0003	4
7,6129	4,9750	5
7,6132	4,9750	5
7,6145	7,9003	8
7,6157	9,0030	9
7,6166	9,0030	9

Sintetizando, a Tabela 4-4 apresenta os primeiros dez autovalores computados para 3, 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte utilizando as funções de forma vetoriais \vec{N}_3 , \vec{N}_4 , \vec{N}_5^4 e \vec{N}_6^4 .

Tabela 4-4: Autovalores para três, quatro, cinco e seis arestas no domínio de suporte.

AUTOVALORES				
3	4	5	6	Analíticos
Arestas = 12416	Arestas = 8320	Arestas = 12416	Arestas = 16512	
0,9999	1,0002	1,0000	1,0000	1
1,0000	1,0002	1,0002	1,0000	1
2,0001	2,0004	2,0000	1,9996	2
3,9989	4,0032	4,0016	4,0000	4
3,9989	4,0032	4,0016	4,0000	4
4,9989	5,0034	4,9994	4,9984	5
5,0010	5,0034	5,0024	4,9984	5
8,0021	8,0064	8,0000	7,9936	8
8,9941	9,0163	9,0074	9,0000	9
8,9951	9,0163	9,0089	9,0000	9

Na Figura 4-9a é calculado o erro do primeiro autovalor e a taxa de convergência para 3, 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte. A formulação com 6 arestas apresenta o

melhor desempenho em comparação com as outras funções de forma, fornecendo níveis de erros menores e o dobro na taxa de convergência. Analisando a taxa de convergência para os primeiros dez autovalores, é encontrado que em 80 % dos autovalores a taxa de convergência é o dobro: 60 % quando são usadas 6 arestas e 20 % quando 5 arestas são usadas; os 20 % restantes têm a mesma taxa de convergência, com os menores níveis de erros encontrados para 5 e 3 arestas no domínio de suporte. Portanto, na maioria dos casos os melhores resultados são encontrados quando 6 arestas são utilizadas no domínio de suporte. Isto é devido ao fato da ordem do polinômio nas funções de base ter sido aumentada. Na Figura 4-9 são ilustrados os resultados para o primeiro, o terceiro e o sexto autovalor. O cálculo da taxa de convergência é realizado mediante a função *Polyfit* de Matlab.

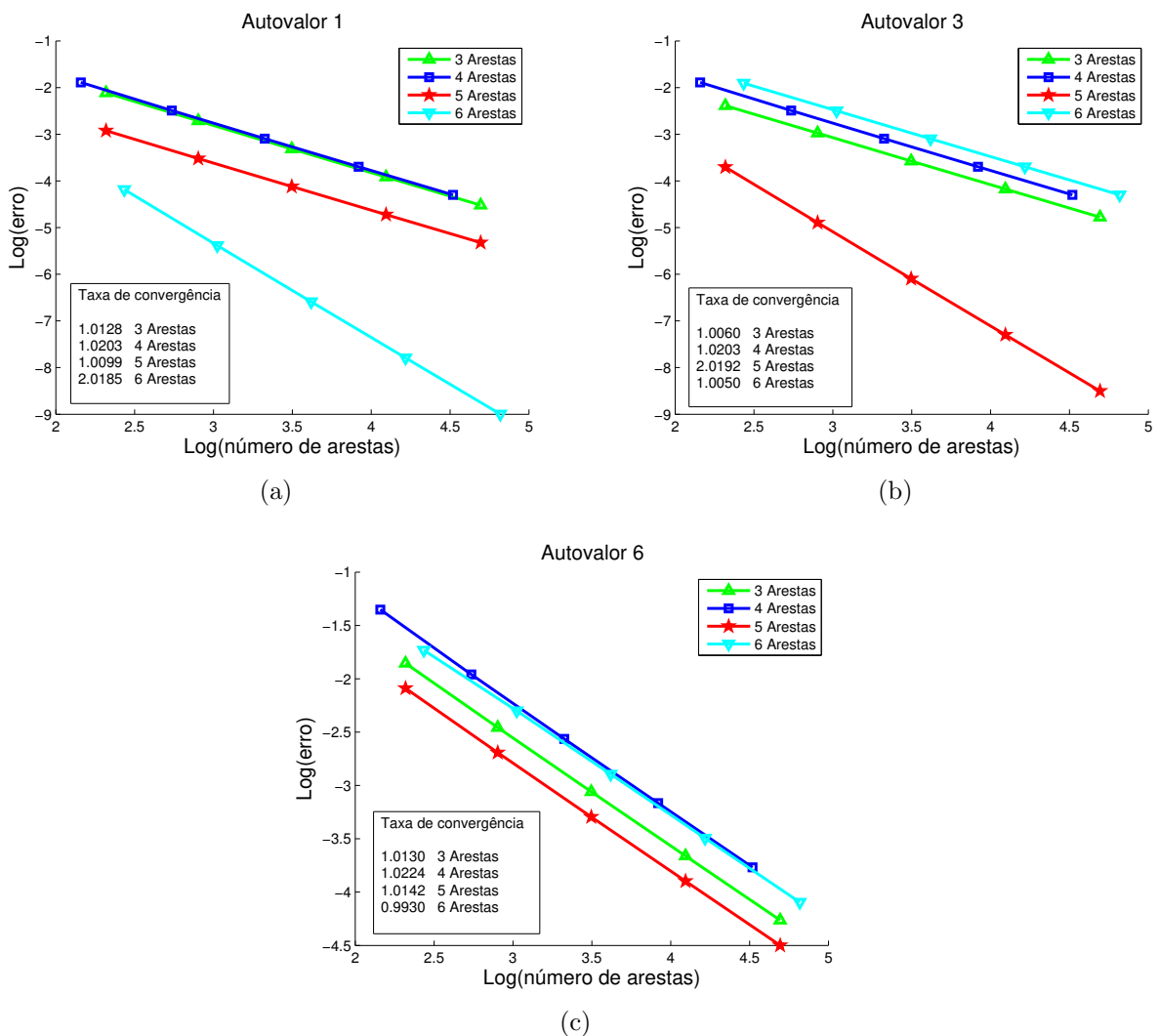


Figura 4-9: Evolução do erro no cálculo dos autovalores no guia de onda quadrado para 3, 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte.

Em [16] são testadas as funções de forma com 3 arestas no domínio de suporte para o problema de autovalores com meio homogêneo e isotrópico e a interpolação de campos vetoriais. Em seguida, são testadas tanto a função de forma vetorial com 3 arestas como as funções de forma vetoriais desenvolvidas neste trabalho em problemas de autovalores com meio homogêneo anisotrópico e inhomogêneo anisotrópico. Salienta-se que as funções de forma vetoriais \vec{N}_5^1 , \vec{N}_5^2 , \vec{N}_5^3 e \vec{N}_6^2 não são levadas em consideração nestes testes, pois a solução numérica gerada com o uso dessas funções apresenta modos espúrios.

4.3.3. Guia de onda com saliência e meio homogêneo e anisotrópico

O EMM é aplicado a um guia de onda onde as características do meio e a geometria são mudadas. Para este caso o meio é homogêneo e anisotrópico e tem-se um guia de onda com saliência (*Ridged waveguide*) mostrado na Figura 4-10. As propriedades físicas do meio são iguais a:

$$\mu_r = 1, \quad \epsilon_r = \begin{bmatrix} 1 & -j \\ j & 4 \end{bmatrix} \quad (4-43)$$

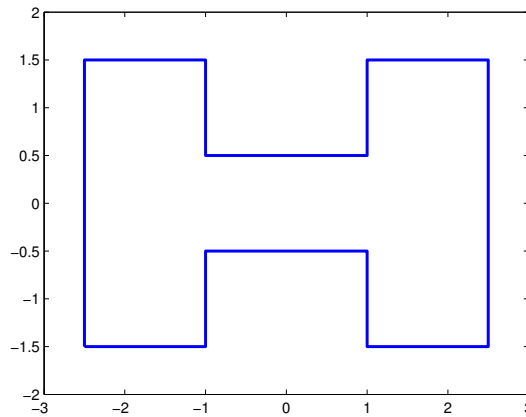


Figura 4-10: Guia de onda com saliência e meio homogêneo anisotrópico.

Este problema não tem solução analítica, porém, como solução de referência, é utilizada a solução por Elementos Finitos com uma malha de fundo bem refinada, 427492 arestas e 217615 elementos. Além disto, são apresentados os autovalores computados pelo EMM usando as funções de forma propostas originalmente para o método, apresentadas na seção 2.2. Os autovalores foram extraídos de [15]. Outros resultados apresentados são os autovalores computados pelo Método dos Elementos Finitos Misto [22]. Na Tabela 4-5 são apresentados os primeiros 5 autovalores computados para 3, 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte, os resultados de [22] e a solução de referência. As funções de forma vetoriais conseguem encontrar os autovalores de forma correta e a solução numérica não é perturbada pelos modos

espúrios. Os autovalores computados com as novas funções de forma vetoriais apresentam melhores resultados comparados com os obtidos em [15]. Para ilustrar, na Figura 4-11 são apresentados os erros para o primeiro autovalor, onde níveis de erro menores são encontrados para as funções de forma desenvolvidas nesta dissertação utilizando 3, 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte. Comparando os erros para 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte, era esperado que se obtivesse melhor resultado quando 6 arestas são tomadas, porém os melhores resultados são encontrados quando 4 arestas são tomadas no domínio de suporte. A geometria deste guia de onda apresenta quinas no centro da geometria, o que gera singularidades no campo que são melhor representadas através do refinamento da malha (refinamento tipo-h) do que com um aumento da ordem dos polinômios (refinamento tipo-p). Por este motivo, as taxas de convergência são quase as mesmas para todas as funções de forma e, para um mesmo número de arestas, os erros com 4 arestas no domínio de suporte são inferiores aos obtidos com 6 arestas no domínio de suporte.

Tabela 4-5: Solução numérica para o guia de onda com saliência e meio homogêneo anisotrópico.

AUTOVALORES						
[15]	3 Ares.	4 Ares.	5 Ares.	6 Ares.	[22]	Ref
Ares. = 1529	Ares. = 1645	Ares. = 1596	Ares. = 1645	Ares.=1400		Ares.=427492
0,040628	0,040793	0,041081	0,041040	0,040969	0,041206	0,041212
0,392058	0,394280	0,399122	0,398422	0,396879	0,400552	0,400641
0,783254	0,783443	0,787562	0,786619	0,784162	0,786704	0,786745
0,987213	0,989279	0,998491	0,996462	0,992081	0,998524	0,998524
1,615863	1,620009	1,640021	1,635850	1,626007	1,638369	1,638579

4.3.4. Guia de onda com meio não homogêneo e anisotrópico

O método é aplicado a um guia de onda com meio não homogêneo e anisotrópico. A geometria da cavidade é mostrada na Figura 4-12, onde o domínio do problema é a união de dois subdomínios $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde $\Omega_1 \subset x < 0$, $\Omega_2 \subset x > 0$. Cada subdomínio contém um objeto circular PEC. As propriedades dos meios são:

$$\mu_{r1} = 1, \quad \epsilon_{r1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mu_{r2} = 3, \quad \epsilon_{r2} = \begin{bmatrix} 3 & -2j \\ 2j & 8 \end{bmatrix} \quad (4-44)$$

Os primeiros 5 autovalores são computados para 3, 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte. Para este problema, são utilizadas duas distribuições de arestas definidas na Figura 4-13. Da mesma forma que no problema homogêneo anisotrópico, é tomado como referência o Método dos Elementos Finitos usando 340363 arestas e 226212 elementos e os resultados obtidos em [15] e [22]. Na Tabela 4-6 são apresentados os primeiros 5 autovalores computados para 3, 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte utilizando a distribuição da Figura

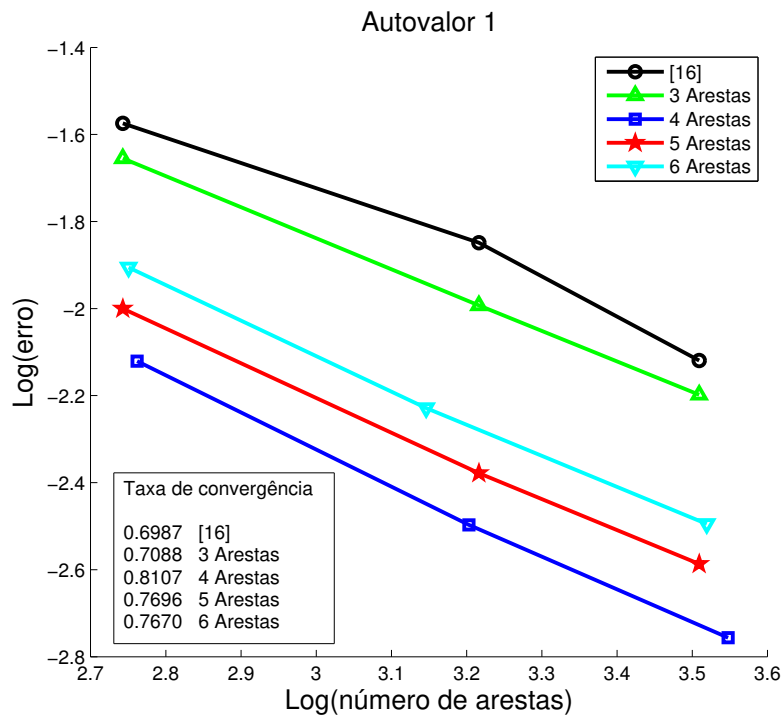


Figura 4-11: Evolução do erro do autovalor 1 para o guia de onda com saliência e meio homogêneo anisotrópico.

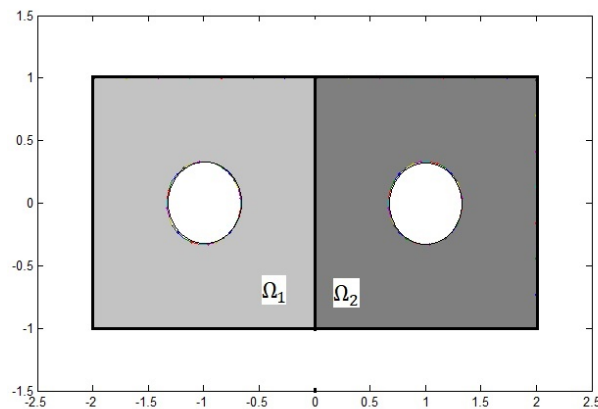
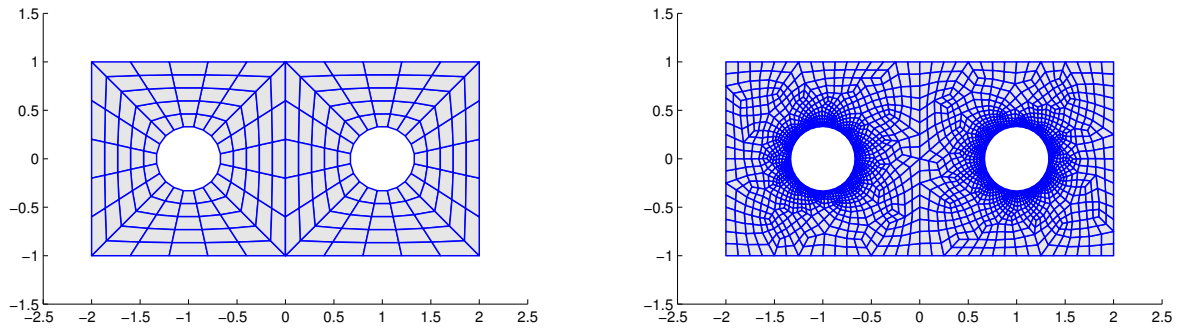


Figura 4-12: Geometria da guia de onda inhomogênea anisotrópica

4-13a, os resultados de [22] e a solução de referência. Nota-se que modos espúrios não são encontrados na solução numérica. Os autovalores calculados são muito próximos dos autovalores da solução de referência e dos obtidos em [22] e [15], diferindo a partir da terceira e quinta casa decimal, respectivamente. As funções de forma cumprem a propriedade do divergente nulo, além de satisfazerem a condição de continuidade na interface entre os dois meios. Para este problema não foram calculadas taxas de convergência, pois é inviável ela-

borar uma estratégia de refinamento da distribuição das arestas. Porém o EMM também foi aplicado utilizando a distribuição da Figura 4-13b, que tem um maior refinamento perto dos buracos da geometria em relação à distribuição da Figura 4-13a. Os primeiros 5 autovalores são computados e apresentados na Tabela 4-7. Os melhores resultados são encontrados para três arestas no domínio de suporte e isto talvez possa ser explicado pelas características geométricas do problema.



(a) Distribuição 1.

(b) Distribuição 2.

Figura 4-13: Distribuições das arestas no guia de onda com meio inhomogêneo anisotrópico

Tabela 4-6: Solução numérica para o guia de onda com meio inhomogêneo anisotrópico utilizando a distribuição 1.

AUTOVALORES						
[15]	3 Ares.	4 Ares.	5 Ares.	6 Ares.	[22]	Ref
Ares. = 8566	Ares. = 8797	Ares. = 8625	Ares. = 8797	Ares. = 8823		Ares.=340363
0,051825	0,051791	0,051864	0,051860	0,051862	0,051841	0,051876
0,204686	0,204507	0,204341	0,203980	0,203621	0,205012	0,205316
0,246919	0,246778	0,247156	0,246964	0,246807	0,247126	0,247201
0,423277	0,423236	0,423780	0,423105	0,422743	-	0,423569
0,624568	0,624185	0,625502	0,624198	0,623345	-	0,625603

Tabela 4-7: Solução numérica para o guia de onda com meio inhomogêneo anisotrópico utilizando a distribuição 2 de arestas.

AUTOVALORES			
3 Ares.	4 Ares.	5 Ares.	6 Ares.
Ares. = 24704	Ares. = 16552	Ares. = 24704	Ares. = 32856
0,051872	0,052026	0,052024	0,052022
0,205230	0,205335	0,205315	0,205295
0,247124	0,247840	0,247793	0,247746
0,423520	0,424584	0,424444	0,424305
0,625434	0,626841	0,626629	0,626407

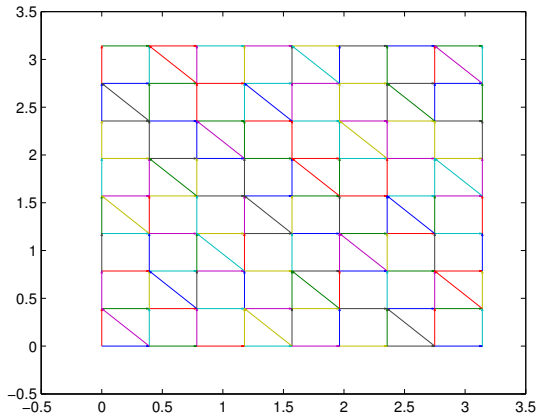
4.4. O EMM com ordem polinomial híbrida

Nesta seção é analisado o comportamento do EMM quando são tomados diferentes números de arestas no domínio de suporte, isto é, no mesmo problema são utilizadas diferentes funções de forma vetoriais com diversas ordens polinomiais. Então, o EMM é testado para trabalhar com ordem polinomial híbrida. As funções de forma vetoriais são combinadas da seguinte maneira: 3 – 4, 3 – 5, 3 – 6, 4 – 5, 4 – 6 e 5 – 6 arestas no domínio de suporte. A Figura 4-14 apresenta as distribuições de arestas para estas combinações para o problema da cavidade quadrada da seção 4.3.2.

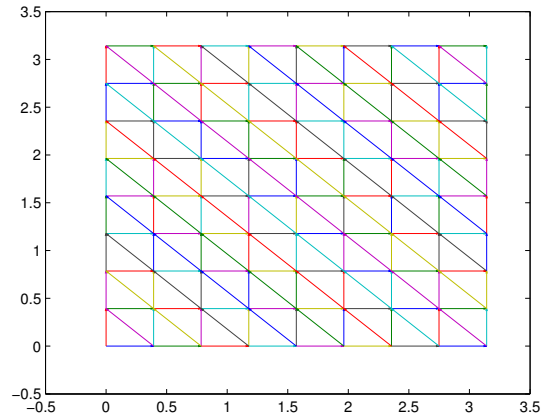
No guia de onda homogêneo isotrópico são computados os primeiros dez autovalores para todas as combinações. A solução numérica em todos os casos não é corrompida pelos modos espúrios. Para 80% dos autovalores encontrou-se a mesma taxa de convergência para todas as combinações de ordem polinomiais. Nos 20% restantes, a maior taxa de convergência ocorreu para a combinação das funções de 4 a 6 arestas.

Quando as taxas de convergência são as mesmas, em 6 casos os menores erros foram encontrados para a combinação de 3 e 6 arestas e em 2 casos para a combinação de 3 e 5 arestas no domínio de suporte.

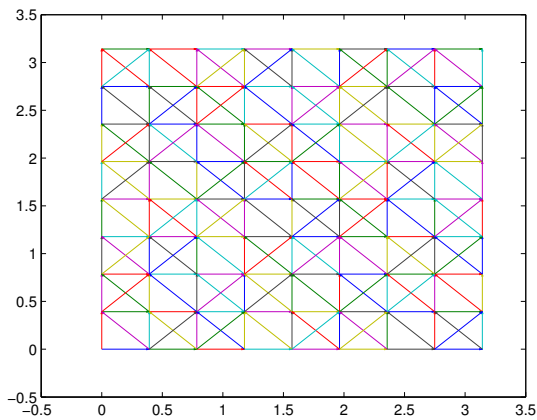
Na Figura 4-15 é mostrada a variação do erro em função do número de arestas para o oitavo e segundo autovalor. No primeiro caso, a taxa de convergência não é a mesma e no segundo caso tem-se a mesma taxa de convergência para todas as combinações.



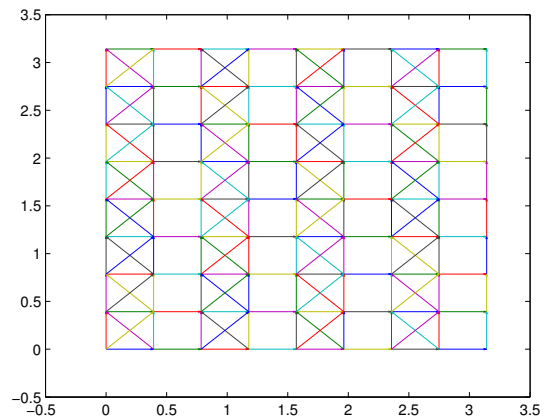
(a) Distribuição para tomar 3-4 e 4-5 arestas no domínio de suporte.



(b) Distribuição para tomar no domínio de suporte 3-5 arestas.



(c) Distribuição para tomar 3-6 e 5-6 arestas no domínio de suporte.



(d) Distribuição para tomar 4-6 arestas no domínio de suporte.

Figura 4-14: Distribuições de arestas para as possíveis combinações das funções de forma.

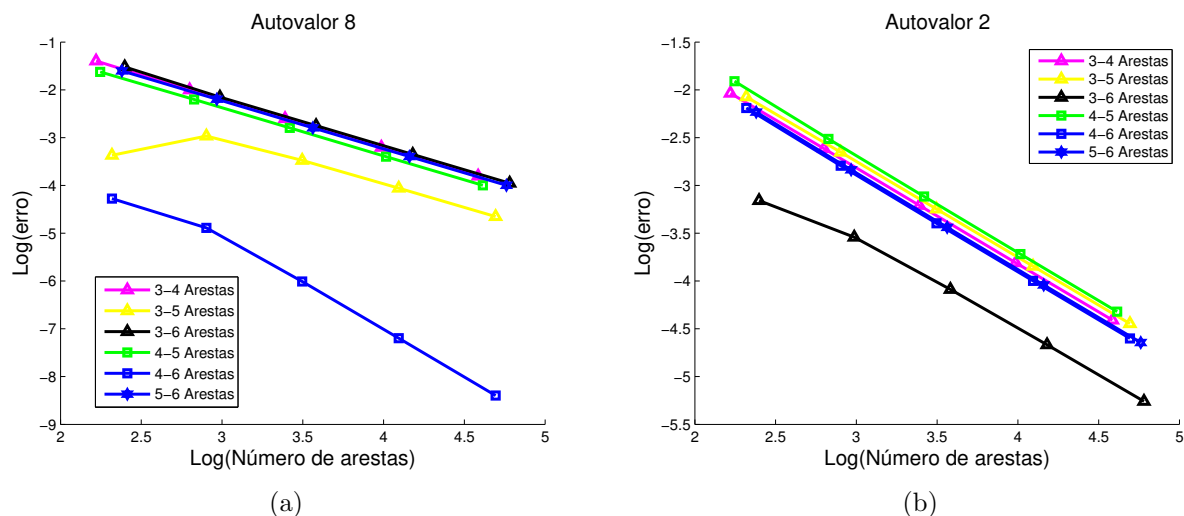


Figura 4-15: Variação dos erros dos autovalores para o guia de onda homogêneo isotrópico em função do número de arestas quando são combinadas várias ordens de funções de forma vetoriais.

4.5. O EMM com redução do comprimento das arestas

Um teste para validar a robustez do método é reduzir o comprimento das arestas fazendo-as tender para um ponto e observar o comportamento do EMM com as novas funções de forma vetoriais. Um outro objetivo deste teste é verificar se é possível modelar um método sem malha baseado em nós com a construção das funções de forma baseadas na formulação matemática desenvolvida nesta dissertação. Os mesmos 4 problemas solucionados nas seções anteriores são resolvidos com a mesma distribuição e número de arestas, porém com o comprimento da aresta reduzido. Para um melhor entendimento, na Figura 4-16 são apresentadas as distribuições de arestas quadrilaterais para as três geometrias usadas, com o comprimento das arestas igual a 50% de comprimento das arestas originais.

Para o problema de interpolação de campos vetoriais da seção 4.2, o comprimento da aresta é reduzido a 0,0001% do tamanho da aresta original. Para 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte, o erro médio percentual é de 1,6032%, 1,5990% e 1,5893% respectivamente. Os erros obtidos são, inclusive, menores do que os apresentados na Seção 4.2. O gráfico do campo elétrico aproximado é visualmente o mesmo da Figura 4-8. Na Figura 4-17 é mostrado o comportamento do erro para 3, 4, 5 e 6 arestas conforme o comprimento da aresta é reduzido, para todos os casos é observado que o erro decresce conforme o comprimento da aresta é diminuído.

Para a cavidade quadrada da seção 4.3.2 o comprimento da aresta é reduzido a 0,0001%

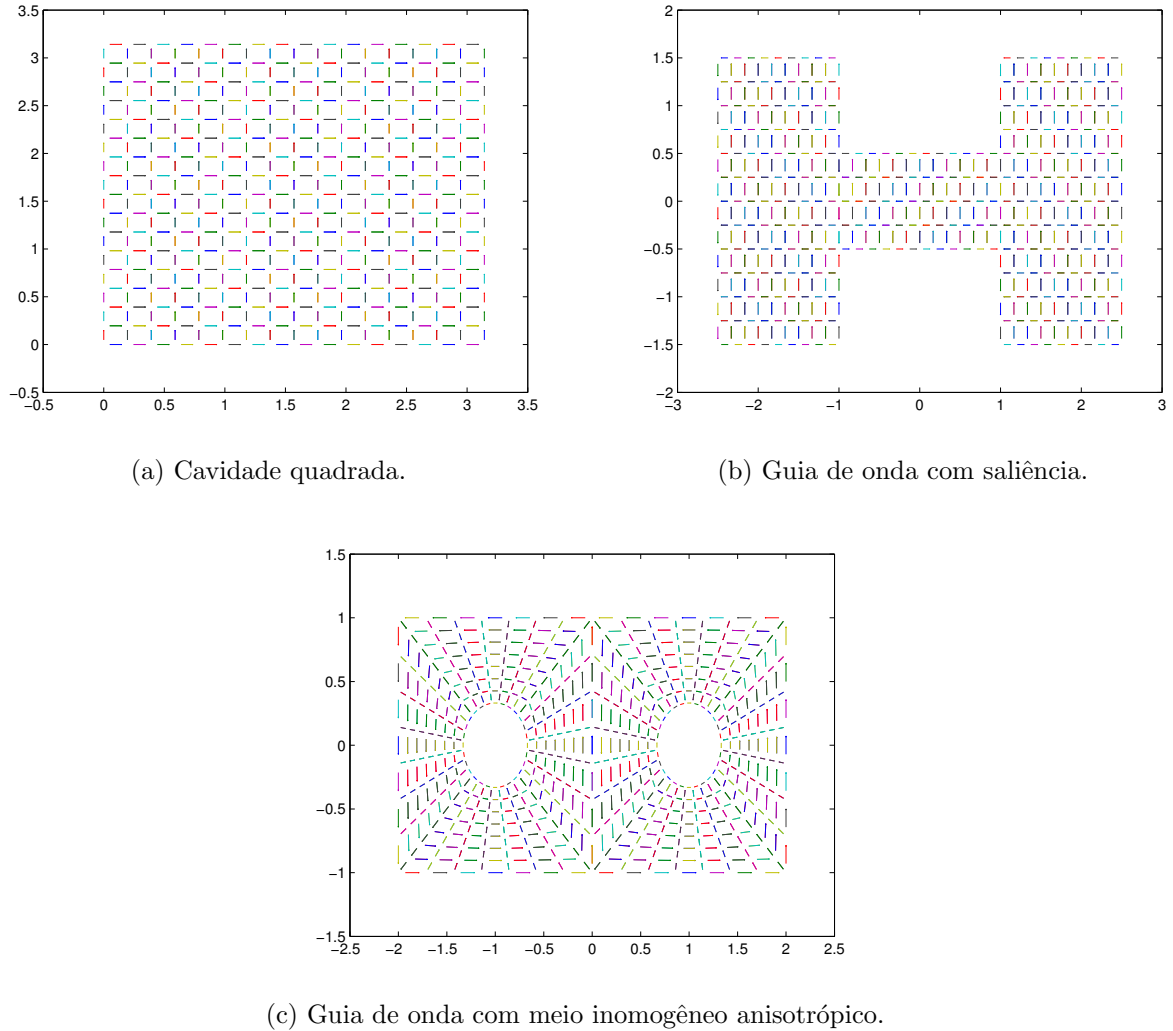


Figura 4-16: Geometrias dos problemas apresentando a distribuição quadrangular das arestas com comprimento igual a 50% das arestas originais.

do tamanho da aresta original. Na tabela 4-8 são apresentados os primeiros dez autovalores para 3, 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte. Os autovalores são computados de forma correta e eles diferem dos autovalores apresentados na Tabela 4-4 a partir da sexta casa decimal.

No guia de onda com saliência e meio homogêneo anisotrópico da Seção 4.3.3, o comprimento das arestas foi reduzido a 0,0001% do tamanho da aresta original. Na tabela 4-9 são apresentados os primeiros 5 autovalores. A solução numérica não apresenta modos espúrios e os autovalores diferem dos apresentados na Tabela 4-5 a partir da sexta casa decimal.

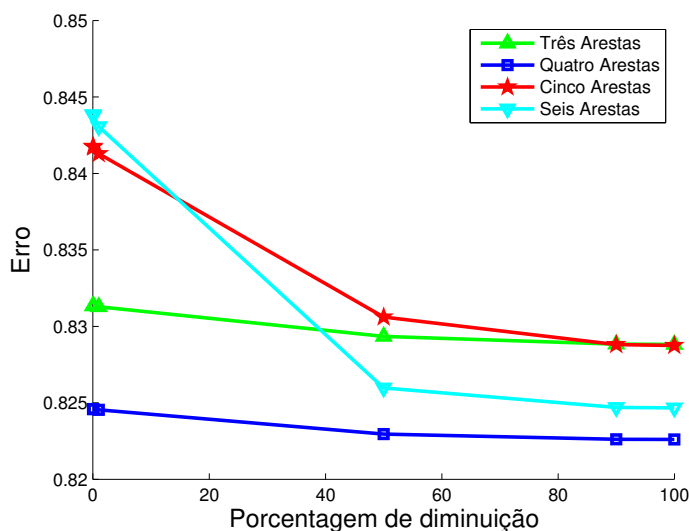


Figura 4-17: Erro da aproximação vs comprimento das arestas.

Tabela 4-8: Solução numérica para cavidade quadrada com comprimento das arestas igual 0,0001 %.

AUTOVALORES				
3 Arestas	4 Arestas	5 Arestas	6 Arestas	Analítico
Arestas = 12416	Arestas = 8320	Arestas = 12416	Arestas = 16512	
0,9999	1,0002	1,0000	1,0000	1
1,0000	1,0002	1,0002	1,0000	1
2,0001	2,0004	2,0000	1,9996	2
3,9989	4,0032	4,0016	4,0000	4
3,9989	4,0032	4,0016	4,0000	4
4,9989	5,0034	4,9994	4,9984	5
5,0010	5,0034	5,0024	4,9984	5
8,0021	8,0064	8,0000	7,9936	8
8,9941	9,0163	9,0074	9,0000	9
8,9951	9,0163	9,0089	9,0000	9

Para o guia de onda com meio não homogêneo anisotrópico da Seção 4.3.4, o comprimento da aresta é reduzido a 0,0001 % do comprimento da aresta original no caso de 3, 4 e 6 arestas no domínio de suporte, para 5 arestas o comprimento é reduzido a 0,01 %. Na tabela 4-10 são apresentados os primeiros 5 autovalores. As funções de forma vetoriais computam corretamente os autovalores, sem a presença de modos espúrios, garantem a condição na interface entre os dois meios e diferem dos autovalores apresentados na Tabela 4-6 a partir da sexta casa decimal.

Tabela 4-9: Solução numérica para o guia de onda com saliência, meio homogêneo anisotrópico e comprimento das arestas igual a 0,0001 %.

AUTOVALORES					
3 Ares.	4 Ares.	5 Ares.	6 Ares.	[22]	Ref
Ares. = 1645	Ares. = 1596	Ares. = 1645	Ares.=1400		Ares.=427492
0,040793	0,041081	0,041040	0,040969	0,041206	0,041212
0,394280	0,399122	0,398422	0,396879	0,400552	0,400641
0,783443	0,787562	0,786619	0,784162	0,786704	0,786745
0,989279	0,998491	0,996462	0,992081	0,998524	0,998524
1,620009	1,640021	1,635850	1,626007	1,638369	1,638579

Tabela 4-10: Solução numérica para o guia de onda com meio inhomogêneo anisotrópico reduzindo o comprimento das arestas.

AUTOVALORES			
3 Ares.	4 Ares.	5 Ares.	6 Ares.
Ares. = 24704	Ares. = 16552	Ares. = 24704	Ares. = 32856
0,051872	0,052026	0,052024	0,052022
0,205230	0,205335	0,205315	0,205295
0,247124	0,247840	0,247793	0,247746
0,423520	0,424584	0,424444	0,424305
0,625434	0,626841	0,626629	0,626407

Conclui-se que o EMM apresenta bons resultados quando o comprimento das arestas tende para um ponto, pois a interpolação dos campos vetoriais é feita corretamente e no cálculo dos autovalores não são gerados modos espúrios. O comprimento das arestas para os dois primeiros problemas, interpolação de campo e cavidade quadrada, pode ser diminuído sem nenhuma restrição. No guia de onda com saliência e meio homogêneo anisotrópico, o comprimento das arestas pode ser reduzido até 0,00001 % das arestas originais. Para o guia de onda com meio não homogêneo anisotrópico, o comprimento pode ser reduzido até 0,00001 % para 3, 4 e 6 arestas e para 5 arestas pode ser reduzido até 0,01 %. Com valores de comprimento das arestas inferiores a esses, os valores não foram computados corretamente, o que merece uma investigação futura para determinar as razões deste.

5 Conclusões

Nesta dissertação foi apresentado um novo procedimento para gerar as funções de forma vetoriais do Método sem Malha de Aresta. O EMM foi estendido para trabalhar com 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte. As funções de forma vetoriais foram primeiro criadas baseadas nos elementos de primeiro tipo de Nédélec. Porém, com essas funções, somente foram atingidos bons resultados com a função de forma baseada em 4 arestas no domínio de suporte. Acredita-se que a razão fundamental para isto seria o fato das funções de 5 e 6 arestas terem sido construídas de forma incompleta e com seus graus de liberdade não seguindo as regras impostas pelos elementos de primeiro tipo de Nédélec.

Por este motivo, um novo desenvolvimento foi efetuado e um novo espaço (\mathcal{L}^k), baseado nos espaços $H(\text{curl})$, com funções vetoriais de divergente nulo e com graus de liberdade associados somente às arestas, foi criado. Baseado nestes espaços, foram criadas as funções de forma para 5 e 6 arestas no domínio de suporte, com polinômios incompletos de segundo grau.

O EMM com as novas funções de forma foi aplicado para interpolar campos vetoriais e para encontrar os autovalores de diferentes guias de ondas e com diferentes características do meio. O EMM conseguiu interpolar campos vetoriais, com taxas de convergência similares para todos os casos e apresentando os menores níveis de erro para a função de forma vetorial com 4 arestas no domínio de suporte. No problema do guia de onda com meio homogêneo isotrópico, os autovalores foram computados corretamente e sem a presença dos modos espúrios. O uso da função de forma vetorial com 6 arestas no domínio de suporte forneceu os melhores resultados, com menores níveis de erro e com o dobro do valor da taxa de convergência em comparação com as outras funções de forma. Assim, um refinamento tipo-p poderia ser realizado neste problema. Nos guias de onda com meio homogêneo anisotrópico e não homogêneo anisotrópico, os autovalores foram computados sem a presença dos modos espúrios, satisfazendo a condição do divergente nulo e garantindo a continuidade da componente tangencial de campo elétrico ao longo da interface entre materiais diferentes.

O EMM com o comprimento da aresta tendendo para um ponto interpolou corretamente campos vetoriais e no problema de autovalores aplicado nos diferentes guias de onda, a solução numérica não foi corrompida pelos modos espúrios, com os autovalores diferindo a partir da sexta casa decimal. Com base nos resultados obtidos, conclui-se que é possível trabalhar com um método sem malha vetorial nodal, utilizando nós ao invés de arestas.

O EMM com ordem polinomial híbrida interpolou campos vetoriais de forma correta. Todas as combinações solucionaram corretamente o problema de autovalores do guia de onda com meio homogêneo isotrópico. Os autovalores foram computados corretamente, sem modos espúrios.

5.1. Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuro em continuidade a esta pesquisa, tem-se:

1. Nesta dissertação, foram propostas as funções de forma vetoriais em 2D para o Método sem Malha de Aresta utilizando mais de 3 arestas no domínio de suporte. Estas funções de forma vetoriais aplicadas em problemas eletromagnéticos vetoriais apresentaram bons resultados. Sugere-se, o desenvolvimento de uma formulação matemática para gerar as funções de forma vetoriais em 3D e aplicar o Método sem Malha de Aresta na solução de problemas eletromagnéticos vetoriais tridimensionais.

2. Neste trabalho, o Método sem Malha de Aresta foi estendido para utilizar 4, 5 e 6 arestas no domínio de suporte, mas, para cada caso, foi utilizada uma distribuição de arestas diferente. Sugere-se, estudar o comportamento do Método sem Malha de Aresta utilizando uma distribuição não uniforme de arestas para todos os casos. Com base nesse estudo, desenvolver uma metodologia para selecionar corretamente as arestas no domínio de suporte, pois obtém-se soluções numéricas com maior precisão quando são selecionadas de forma correta.

3. O Método sem Malha de Aresta com o comprimento das arestas tendendo para um ponto foi aplicado com sucesso na solução de problemas eletromagnéticos vetoriais. Com base nesses resultados, sugere-se, o desenvolvimento de uma formulação matemática para trabalhar com um Método sem Malha Vetorial nodal em duas e três dimensões, com as funções de forma vetoriais baseadas nos espaços $H(\text{curl})$.

Referências Bibliográficas

- [1] J.-F. Lee, R. Lee, and A. Cangellaris, “Time-domain finite-element methods,” *Antennas Propagation, IEEE Trans.*, vol. 45, no. 3, pp. 430–442, mar 1997.
- [2] A. Taflove, *Computational Electrodynamics - The Finite-Difference Time-Domain Method*. Norwood, MA: Artech House, 2000.
- [3] G. R. Liu, *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, 2nd ed. CRC Press, 2009.
- [4] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, 3rd ed. John Wiley & Sons, 2005.
- [5] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, 2nd ed. John Wiley & Sons, 2002.
- [6] H. Whitney, *Geometric Integration Theory*, P. U. Press, Ed., 1957.
- [7] J. C. Nedelec, “Mixed finite elements in R^3 ,” *Numer. Math.*, vol. 35, no. 3, pp. 315–341, 1980. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01396415>
- [8] S. Beissel and T. Belytschko, “Nodal integration of the element-free Galerkin method,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 139, no. 1–4, pp. 49–74, 1996. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782596010791>
- [9] G.-R. Liu and Y. Gu, “A point interpolation method for two-dimensional solids,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 50, no. 4, pp. 937–951, 2001. [Online]. Available: <http://eprints.qut.edu.au/13842/>
- [10] S. N. Atluri and T. Zhu, “A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics,” *Comput. Mech.*, vol. 22, no. 2, pp. 117–127, 1998. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/s004660050346>
- [11] W. L. de Nicomedes, “Mixed Meshfree Methods in Computational Electromagnetism: Mathematical Foundations and Problems in Wave Scattering,” Ph.D. dissertation, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - Universidade Federal de Minas Gerais, 2015.

-
- [12] N. Z. Lima, “Metodos sem Malha Aplicados ao Eletromagnetismo : Formas Fracas Enfraquecidas e Funções de Forma Vetoriais,” PhD Thesis, Universidad Federal de Minas Gerais, 2016.
- [13] N. Z. Lima and R. C. Mesquita, “Meshless Vector Radial Basis Functions with Weak Forms,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 53, no. 6, pp. 1–4, 2017.
- [14] V. Lombardi, M. Bozzi, and L. Perregrini, “A Novel Variational Meshless Method With Radial Basis Functions for Waveguide Eigenvalue Problems,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, pp. 1–10, 2018.
- [15] N. Z. Lima and R. C. Mesquita, “Edge Meshless Method Applied to Vector Electromagnetic Problems,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 53, no. 6, pp. 6–9, 2017.
- [16] P. M. I. Silva, R. C. Mesquita, and N. Z. Lima, “New Vectorial $H(\text{curl})$ Shape Functions for the Edge Meshless Method,” *IET Sci. Meas. Technol.*, no. 1, pp. 1–7, 2018.
- [17] A. Schneebeli, “An $H(\text{curl})$ - conforming FEM: Nedelec Element of first type,” Switzerland, p. 23, 2003.
- [18] A. Buffa, M. Costabel, and D. Sheen, “On traces for $H(\text{curl}, \Omega)$ in Lipschitz domains,” *Math. Anal. Appl.*, vol. 276, no. 2, pp. 845–867, 2002.
- [19] S. Pavel, S. Karel, and D. Ivo, *Higher-Order Finite Element Methods*, 1st ed. New York: Chapman and Hall/CRC, 2003.
- [20] J. Sarvas and S. Jarvenpaa, “Finite Element Method in Electromagnetic Field Computing,” Electromagnetics Laboratory, Helsinki University of Technology, 2004.
- [21] D. Boffi, P. Fernandes, L. Gastaldi, and I. Perugia, “Computational models of electromagnetic resonators: Analysis of edge element approximation,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 36, no. 4, pp. 1264–1290, 1999.
- [22] W. Jiang, N. Liu, Y. Tang, and Q. H. Liu, “Mixed Finite Element Method for 2D Vector Maxwell’S Eigenvalue Problem in Anisotropic Media,” *Prog. Electromagn. Res.*, vol. 148, no. 2, pp. 159–170, 2014. [Online]. Available: <http://www.jpier.org/PIER/pier.php?paper=14052608>