

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO  
ESCOLA DE ENGENHARIA

**Modelos e decomposição *Dantzig-Wolfe* no  
abastecimento centralizado de postos de trabalho**

**Diego Fernandes Pantuza Moura**

**Orientador:** Prof. Dr. Maurício Cardoso de Souza

**Belo Horizonte  
2018**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO  
ESCOLA DE ENGENHARIA

## Modelos e decomposição *Dantzig-Wolfe* no abastecimento centralizado de postos de trabalho

Diego Fernandes Pantuza Moura

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

**Área de Concentração:** Pesquisa Operacional e Engenharia de Manufatura

**Linha de Pesquisa:** Modelos e Algoritmos de Produção e de Redes

**Orientador:** Prof. Dr. Maurício Cardoso de Souza

Belo Horizonte  
2018

# Resumo

O presente estudo tem como objetivo abordar o problema de abastecimento centralizado de postos de trabalho. A motivação para o estudo é a situação prática observada numa grande indústria de automóveis localizada no estado de Minas Gerais. Em termos mais específicos, o modelo estudado visa determinar o melhor tamanho de embalagem a ser utilizado para movimentar cada item demandado pelo posto de trabalho dentro de um horizonte de planejamento, com o objetivo de minimizar os custos totais associados. No estudo será apresentada uma formulação visando abranger um maior número de situações práticas, serão propostas heurísticas buscando encontrar melhores soluções para o problema e será aplicada também a Decomposição *Dantzig-Wolfe*, para se obter limites inferiores melhores para instâncias reais analisadas.

**Palavras chave:** Planejamento e controle da produção, Decomposição *Dantzig-Wolfe*, Método de geração de colunas, Abastecimento de postos de trabalho, Logística interna, Heurísticas.

# Abstract

The present study aims to address the problem of centralized supply of jobs. The motivation for the study is the practical situation observed in a large automobile industry located in the state of Minas Gerais. In more specific terms, the model studied aims to determine the best size of packaging to be used to move each item demanded by the workstation within a planning horizon, in order to minimize the associated total costs. In the study it will be presented a formulation to cover a greater number of practical situations, will be also proposed heuristics to find better solutions to the problem, and a *Dantzig-Wolfe* Decomposition to obtain better lower bounds for real instances analyzed.

**Keywords:** Planning and production control, Dantzig-Wolfe Decomposition, Column generation, Supply of work centers, Internal logistics, Heuristics.

# Agradecimentos

Antes de tudo, gostaria de agradecer a Deus por me iluminar durante toda essa caminhada e por me proporcionar uma família que sempre me apoiou.

Gostaria de agradecer ao meu orientador professor Dr. Maurício Cardoso de Souza pelos ensinamentos, confiança e disponibilidade durante a elaboração deste trabalho.

Agradeço também a todos os meus familiares, minha mãe Nelma e meu Pai Eduardo, que abdicaram de muitos de seus sonhos e lutaram para que eu pudesse realizar os meus, ao meu Tio Elmo pelo suporte e conselhos dados durante a vida. Agradeço também ao meu irmão Thiago pelo apoio, e pelas dicas dadas durante toda a minha formação.

Gostaria de agradecer a CAPES, pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

Por fim, gostaria também de agradecer a meus avós (em memória) vovô João e vovó Titinha por todo o carinho, paciência e pelos ensinamentos dados, que serão levados durante toda a minha vida.

# Lista de Figuras

1.1	Movimentação das embalagens . . . . .	2
2.1	Movimentação do abastecimento . . . . .	6
3.1	Funcionamento do algoritmo proposto para a geração de colunas . . . . .	14
4.1	Comparação da qualidade dos limites inferiores obtidos para o modelo FLK	29
4.2	Comparação da qualidade das soluções apresentadas pelas heurísticas . . .	30
4.3	Resultados de PGA III com o aumento do conjunto $O$ para o grupo I . . .	30
4.4	Resultados de PGA III com o aumento do conjunto $O$ para o grupo II . . .	31

# Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros presentes na formulação original . . . . .	7
3.1	Demanda do item $i$ no período $t$ para o exemplo 1 . . . . .	10
3.2	Valores do parâmetro $w_{ikt}$ para o exemplo 1 . . . . .	10
4.1	Resultados encontrados pelas heurísticas: Grupo I . . . . .	24
4.2	Resultados encontrados pelas heurísticas: Grupo II . . . . .	25
4.3	Resultados encontrados para o modelo FLK para o grupo I . . . . .	27
4.4	Resultados encontrados para o modelo FLK para o grupo II . . . . .	28
4.5	Resultados encontrados para a heurística PGA III: $O = 50$ . . . . .	32

# Lista de Algoritmos

1	Pseudocódigo para a resolução do subproblema. . . . .	15
2	Pseudocódigo para o cálculo de $\phi_{ik}^I$ : Heurística PGA I . . . . .	16
3	Pseudocódigo para o cálculo de $\phi_{ik}^{II}$ : Heurística PGA II. . . . .	18
4	Pseudocódigo para o cálculo de $\phi_{iko}$ : Heurística PGA III. . . . .	20

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>iv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos . . . . .	4
1.1.1 Objetivos gerais . . . . .	4
1.1.2 Objetivos específicos . . . . .	4
1.2 Organização do texto . . . . .	4
<b>2 Definição do problema</b>	<b>5</b>
2.1 Modelo Matemático . . . . .	6
<b>3 Análises e propostas de solução</b>	<b>9</b>
3.1 Discussão a respeito do modelo original (D) . . . . .	9
3.2 Formulação com a variável de frequência na restrição de capacidade . . . . .	11
3.2.1 Aplicação da Decomposição <i>Dantzig-Wolfe</i> no modelo FLK . . . . .	11
3.2.2 Resolução dos subproblemas . . . . .	14
3.3 Heurísticas propostas . . . . .	16
3.3.1 Heurística PGA I . . . . .	16
3.3.2 Heurística PGA II . . . . .	18
3.3.3 Heurística PGA III . . . . .	19
<b>4 Resultados computacionais</b>	<b>22</b>
4.1 Características das instâncias . . . . .	22
4.2 Resultados obtidos por meio das heurísticas . . . . .	23
4.3 Resultados para o modelo FLK . . . . .	25
<b>5 Considerações finais</b>	<b>33</b>
5.1 Conclusões . . . . .	33
5.2 Trabalhos futuros . . . . .	34
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>35</b>

# Capítulo 1

## Introdução

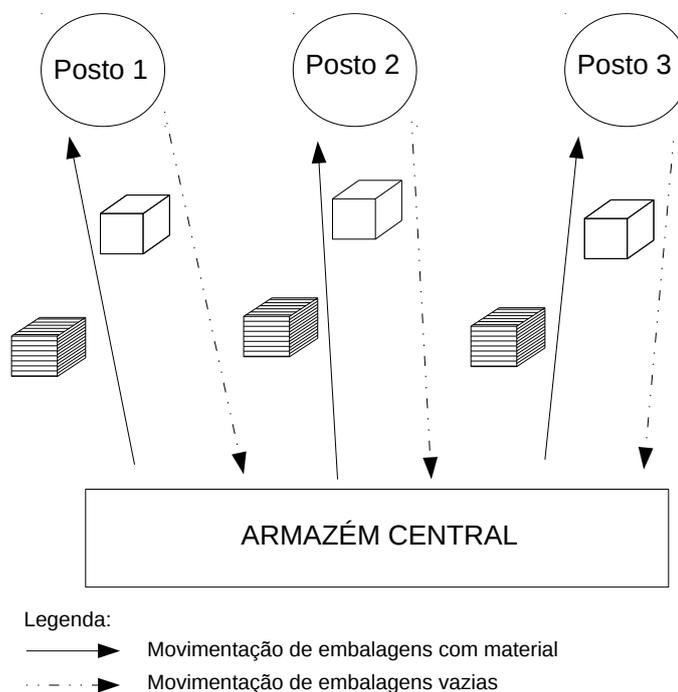
Em um sistema produtivo, um dos grandes problemas que afetam o planejamento e controle da produção é a questão do ressuprimento dos postos de trabalho. Neste estudo, será tratado o problema logístico de abastecimento destes postos a partir de um armazém central.

A figura 1.1 representa como é feito o abastecimento no contexto de estudo analisado. Existe uma quantidade  $Q$  de postos de trabalho, que possuem demanda independente por itens e são abastecidos utilizando embalagens de tamanhos padronizados. As embalagens são movimentadas até o posto de trabalho com uma quantidade de itens pré-definida, e retornam vazias até o armazém para que possam ser utilizadas novamente. Existe um limite de embalagens disponíveis para realizar as movimentações que deve ser respeitado.

A tomada de decisão do tamanho do lote a ser enviado do armazém central até o posto de trabalho deve levar em consideração fatores relacionados aos custos de movimentação e de estoque “lado-linha” de cada um dos componentes do sistema. Os custos de movimentação estão relacionados com o custo de se retirar o item do armazém central e levá-lo até o posto de trabalho, já os custos com estoque se referem à manutenção de determinado item em estoque no próprio posto de trabalho, além de possíveis problemas que esse item pode levar para o sistema, pois geralmente os postos possuem espaços escassos.

Segundo Emde e Boysen (2012), no contexto atual, as empresas estão sendo pressionadas pelo mercado para cada vez mais oferecerem uma maior variedade de produtos sem deixar que isso afete diretamente os custos. Uma das formas de lidar com essa situação é utilizar uma linha de montagem “base” para conseguir produzir uma maior diversidade de produtos, variando apenas as peças que irão abastecer essa linha. Battini et al. (2013) e Boysen et al. (2015) citam que as tendências levam a um número crescente de peças e de fornecedores, o que torna ainda mais importante a administração dos processos logísticos.

Figura 1.1: Movimentação das embalagens



O trabalho feito por Boysen et al. (2015) destacou a importância do gerenciamento de peças dentro do sistema produtivo, apresentou uma revisão bibliográfica sobre estudos já realizados, além de propor alguns problemas logísticos a serem trabalhados na indústria automotiva. A falta de algum item na linha de produção pode implicar em altos custos para a organização, e por conta disso as montadoras possuem exigências rigorosas na logística de suas peças (Battini et al., 2013).

Kilic e Durmusoglu (2015) destacam em seu estudo que o processo de alimentação dos postos de trabalho deve levar em consideração a política de armazenamento das peças, de alimentação dos postos e o meio de transporte que será utilizado. Esses três componentes não podem ser analisados de forma independente, pois se afetam mutuamente.

Nos sistemas de manufatura é necessário tomar decisões a respeito de como será feita a alimentação dos postos de trabalho. Caputo et al. (2015) apresentam em seu estudo uma metodologia para comparar duas abordagens de como pode ser feito o abastecimento. O primeiro método citado pelos autores é baseado na junção das abordagens do *just in time* com o sistema *kanban*, onde as peças são enviadas somente para atender a demanda, sem permitir estoques ao lado do posto de trabalho. O segundo método é denominado *line storage*, em que se permite ter estoques ao lado do posto de trabalho. Os modelos propostos se destinam a um ambiente determinístico e auxiliam a determinar qual dos métodos se adequam melhor a cada organização.

O meio de transporte escolhido para distribuir as peças dentro da planta pode reduzir

consideravelmente os custos de produção (Kilic e Durmusoglu, 2015). Os autores citam que a movimentação das peças pode ser dividida em duas categorias de problemas, a primeira delas é a seleção do equipamento correto para movimentar os itens, que já foi trabalhada na literatura por Fonseca et al. (2004), Mirhosseyni e Webb (2009) e Tuzkaya et al. (2010). A segunda categoria é a de roteamento dos equipamentos de movimentação dentro da planta de produção, que já foi estudada nas pesquisas realizadas por El Khayat et al. (2006), Costa et al. (2008) e Kilic e Durmusoglu (2013).

Em Bitran e Chang (1987), é apresentado um estudo em que um dos objetivos foi o de auxiliar os gerentes na tomada de decisão relacionada a quantidade de itens que deveria se ter em estoque no sistema produtivo. Fattahi et al. (2011) apresentam um modelo para resolver o problema de linhas de montagem multi-equipadas, onde um grupo de trabalhadores executam simultaneamente mais de uma operação em um mesmo produto final. Para resolver esse problema, os autores propõem uma heurística baseada na abordagem de colônia de formigas para encontrar uma boa solução para a formulação apresentada. As linhas de montagem multi-equipadas podem trazer grandes benefícios para as organizações, porém a sua utilização vem acompanhada de um grande desafio (Battini et al., 2010).

Para lidar com essa situação, Faccio et al. (2013) fizeram um estudo utilizando o conceito de *supermarket*, que se caracteriza por ser áreas de armazenamento descentralizadas dentro do sistema de produção. Dessa forma, os itens em estoque ficam mais próximos dos postos de trabalho e podem ser entregues de modo mais eficiente, sem que haja interrupções na produção por falta de matéria-prima. Faccio et al. (2013) formularam um modelo com o objetivo de minimizar o custo total de operações levando em consideração variáveis como o número de operadores necessários, os melhores locais para se instalar os *supermarkets*, e como seria feita a movimentação das peças dentro da planta de produção.

O conceito de *supermarket* vem ganhando a atenção dos pesquisadores nos últimos anos, e diversas publicações estão tratando o assunto através de diferentes abordagens. Battini et al. (2009) e Battini et al. (2010) propõem metodologias para auxiliar na decisão de descentralizar os estoques, definindo a localização e a quantidade necessária de *supermarkets* para uma determinada planta de produção.

O estudo proposto por de Souza et al. (2008) seguiu a abordagem do armazenamento centralizado, e alguns estudos já foram realizados se baseando na formulação proposta pelos autores. No estudo feito por da Cunha e de Souza (2008) foram realizados testes através da inclusão de desigualdades válidas para o modelo, e por meio dessa reformulação foram feitos experimentos para obter melhores limites inferiores e superiores. No trabalho desenvolvido por Mendonça (2011) foram realizados alguns testes de reformulação para o modelo, além de aplicar a técnica de *local branching* com o objetivo de alcançar melhores soluções para o modelo analisado.

O presente estudo foi conduzido baseado nos dados tratados por de Souza et al. (2008), oriundos de uma grande indústria automobilística localizada no Brasil, na qual se opera no modo *just in time*. No momento da coleta dos dados, a produção média da organização era de 2300 veículos por dia possuindo uma parcela de 25,3% do mercado brasileiro.

Ao longo do estudo, será analisado e discutido se a operação no *just in time* implica em uma economia nos custos de produção da organização. Serão realizados experimentos utilizando o princípio do *just in time* e também testes que permitem o acúmulo de estoques ao lado do posto de trabalho para realizar a comparação.

O problema logístico tratado neste trabalho consiste em determinar o tamanho de embalagem, na qual cada item deve ser acondicionado, de forma a atender a demanda dos postos de trabalho e minimizar os custos com estoques e movimentações. É possível formar estoques ao lado do posto de trabalho, porém existe um custo associado que é calculado baseado na quantidade de itens que estão armazenados ao final de cada período.

A formulação proposta por de Souza et al. (2008) para tratar o problema possui características relacionadas a outros problemas de otimização, dentre eles estão o problema do empacotamento, e de dimensionamento de lotes. Além disso, durante o desenvolvimento do estudo foi observado que é possível encontrar boas soluções através de heurísticas, que realizam um pré-processamento dos dados e tratam o problema como um problema de *generalized assignment problem* (GAP).

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivos gerais

Esta dissertação tem o objetivo de discutir o modelo proposto por de Souza et al. (2008), sanando algumas deficiências identificadas na formulação. Além disso, serão propostos métodos para encontrar soluções viáveis e limites inferiores para as instâncias analisadas, objetivando averiguar a qualidade das soluções encontradas.

### 1.1.2 Objetivos específicos

- Apresentar uma proposta de alteração da formulação original tratando algumas deficiências identificadas.
- Propor heurísticas para resolução do problema objetivando encontrar melhores soluções.
- Aplicar a decomposição *Dantzig-Wolfe* na formulação proposta para encontrar melhores limites inferiores.
- Comparar os resultados obtidos com os encontrados anteriormente na literatura.

## 1.2 Organização do texto

No capítulo 1, é apresentada uma introdução referente ao que será trabalhado e os objetivos da dissertação. O capítulo 2 apresenta uma contextualização referente ao problema estudado, enquanto que o capítulo 3 descreve os métodos utilizados para encontrar soluções para o modelo. Por fim, o capítulo 4 reporta os resultados computacionais dos testes realizados, e o capítulo 5 apresenta as conclusões tiradas com esse trabalho e propostas de trabalhos futuros.

## Capítulo 2

### Definição do problema

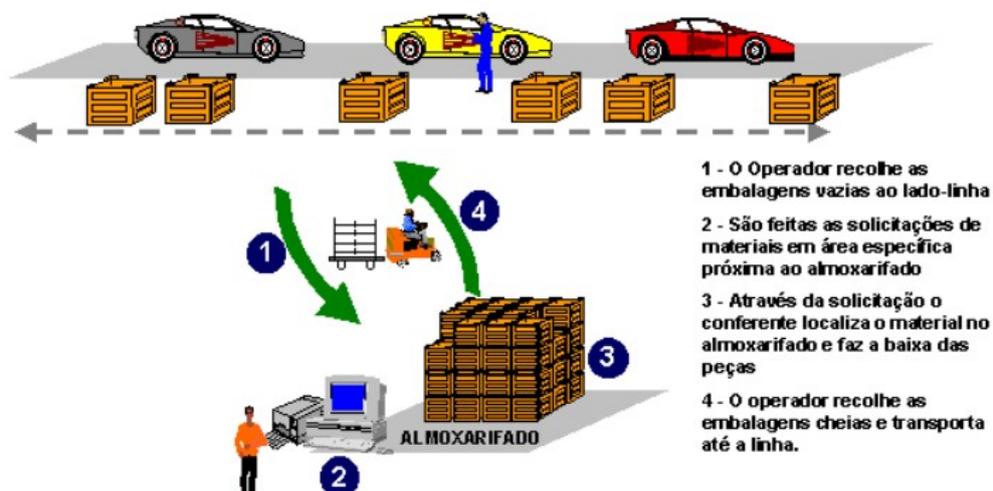
Para tratar o problema de abastecimento dos postos de trabalho, um modelo de distribuição de produtos com demanda variável foi proposto por de Souza et al. (2008). O principal objetivo do modelo é auxiliar a tomada de decisão sobre o tamanho de embalagem na qual cada item deve ser acondicionado, para abastecer o posto de trabalho de uma unidade de produção objetivando a minimização dos custos com movimentações e estoques.

A unidade fabril na qual o estudo feito por de Souza et al. (2008) foi conduzido possui o setor de produção dividido em cinco estágios: mecânica, prensas, funilaria, pintura e montagem final. O foco do estudo é no estágio de montagem final, que é composto por quatro linhas de produção independentes e produzem veículos de acordo com as características de cada família de produtos.

A movimentação dos itens dentro da unidade fabril, no contexto estudado, ocorre entre o almoxarifado central e o posto de trabalho. Um item é enviado até o posto de trabalho após feita a solicitação pelo setor responsável, que fica encarregado de atender a demanda se baseando no planejamento da produção feito anteriormente.

O exemplo do fluxo de movimentação dos itens e das embalagens dentro da planta de produção é apresentado na figura 2.1. A etapa 1 consiste no operador recolher as embalagens vazias ao lado da linha de produção, em seguida são feitas as solicitações dos materiais em uma área específica (etapa 2), baseado na demanda, o conferente seleciona o material no estoque (etapa 3), e os encaminha para serem embalados e enviados até a linha de montagem (etapa 4). O problema logístico estudado por de Souza et al. (2008) encontra-se entre as etapas 2 e 3 da figura 2.1 e consiste em definir, para cada peça, qual o melhor tamanho de embalagem deve ser utilizado, e qual a frequência de embalagens deve ser movimentada no abastecimento, de forma a minimizar os custos com estoques e movimentações.

Figura 2.1: Movimentação do abastecimento



Fonte: [de Souza et al., 2004]

A decisão de alocar um item a uma determinada embalagem deve respeitar algumas restrições. A primeira delas é que em todos os períodos as demandas devem ser atendidas, ou seja, o estoque do período anterior somado pela quantidade entregue de itens no período atual deve ser o suficiente para atender a demanda deste período. Outra restrição presente é que o limite de embalagens disponíveis deve ser respeitado em todos os períodos.

O abastecimento dos postos de trabalho possui algumas restrições operacionais, que foram inseridas para evitar grandes distúrbios no processo por conta de modificações sucessivas na alocação dos itens. Elas são apresentadas abaixo:

- Cada item pode ser movimentado somente em um tamanho de embalagem durante todos os períodos.
- As embalagens são sempre movimentadas com sua capacidade máxima.
- Cada embalagem pode ser carregada somente com um tipo de item.

## 2.1 Modelo Matemático

A formulação (D) apresentada por de Souza et al. (2008) representa uma situação onde a demanda de cada item varia nos períodos analisados, e apesar de ter sido formulada se baseando em uma indústria do setor automobilístico, pode ser aplicada em indústrias das mais diversas áreas.

O contexto industrial que motivou o estudo realizado por de Souza et al. (2008) é a indústria automobilística, na qual se opera no modo *just in time*. Assim, o número de

embalagens necessárias para realizar as movimentações é calculado a priori, de forma a se enviar o mínimo de itens possível para atender a demanda de cada período minimizando os estoques.

O conjunto  $I$  representa os tipos de itens que irão abastecer os postos de trabalho, dentro do horizonte de planejamento que é definido por  $T$ . O terceiro conjunto do modelo é denotado por  $K$ , e define os diferentes tamanhos de embalagens disponíveis.

O número  $w_{ikt}$  de embalagens de determinado tamanho necessárias para o abastecimento do posto de trabalho com o item é calculado utilizando a equação (2.1), se baseando em Krajewski e Ritzman (1993), onde  $r_{ik}$  representa o *lead time* para o abastecimento do posto com o item  $i$  na embalagem de tamanho  $k$ . O *lead time* inclui o tempo para as embalagens serem solicitadas, preenchidas com os itens, movimentadas até o posto de trabalho, além do processo de higienização e retorno para a área de armazenamento principal, onde ficarão disponíveis novamente para serem reutilizadas.

$$w_{ikt} = \left\lceil \frac{d_{it} r_{ik}}{q_{ik}} \right\rceil \quad (2.1)$$

Uma embalagem  $k$  leva em média  $\frac{q_{ik}}{d_{it}}$  unidades de tempo para ser esvaziada. Em de Souza et al. (2008) é apresentado um exemplo ilustrativo para o cálculo do parâmetro  $w_{ikt}$ , no abastecimento da linha com parafusos para a montagem das rodas. Considerando que a demanda é de 320 unidades por hora, e que a embalagem analisada pode movimentar 1000 parafusos. As operações de verificação e preenchimento da embalagem levam em média duas horas, o tempo de movimentação do almoxarifado até a linha de produção é de 15 minutos, e o tempo levado para a higienização e retorno da embalagem vazia para o almoxarifado é de 45 minutos. Com isso, totalizamos um *lead time* de 6,125 horas, e devemos ter  $\left\lceil \frac{320 * 6,125}{1000} \right\rceil = 2$  embalagens mobilizadas de tamanho  $k$  para alimentar a linha de produção com os parafusos de montagem das rodas no período analisado.

A tabela 2.1 apresenta o significado dos parâmetros utilizados na formulação original:

Tabela 2.1: Parâmetros presentes na formulação original

Parâmetros	Descrição
$d_{it}$	Demanda do item $i$ no período $t$
$q_{ik}$	Quantidade de itens $i$ que cabem na embalagem de tamanho $k$
$c_i$	Custo de estoque do item $i$
$l_k$	Limite de embalagens disponíveis do tamanho $k$
$b_{kt}$	Custo de movimentação da embalagem de tamanho $k$ no período $t$
$w_{ikt}$	Número de embalagens necessárias de tamanho $k$ contendo o item $i$ para atender a demanda do período $t$

As variáveis de decisão do modelo são:

$x_{ik}$ : Variável binária, que representa a decisão de alocação dos itens. Sendo 1 se o posto de trabalho for abastecido com o item  $i$  na embalagem de tamanho  $k$ , e 0 caso contrário.

$f_{ikt}$ : Variável inteira, que indica a frequência de abastecimento no período  $t$  com o item  $i$  na embalagem de tamanho  $k$ .

$s_{it}$ : Variável real, que representa o número de itens do tipo  $i$  em estoque no período  $t$ .

A formulação proposta por de Souza et al. (2008) é apresentada abaixo, acrescentando um refinamento do parâmetro  $M$  proposto por da Cunha e de Souza (2008):

**Formulação original (D):**

$$z_D = \min \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} (c_i s_{it} + \sum_{k \in K} b_{kt} f_{ikt}) \quad (2.2)$$

sujeito a:

$$s_{i(t-1)} - s_{it} + \sum_{k \in K} q_{ik} f_{ikt} = d_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.3)$$

$$\sum_{k \in K} x_{ik} = 1 \quad \forall i \in I \quad (2.4)$$

$$M_{ikt} x_{ik} - f_{ikt} \geq 0 \quad \forall i \in I, k \in K, t \in T \quad (2.5)$$

$$\sum_{i \in I} w_{ikt} x_{ik} \leq l_k \quad \forall t \in T, k \in K \quad (2.6)$$

$$x_{ik} \in \mathbb{B} \quad \forall i \in I, k \in K \quad (2.7)$$

$$s_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, t \in T \quad (2.8)$$

$$f_{ikt} \in \mathbb{N} \quad \forall i \in I, k \in K, t \in T \quad (2.9)$$

A função objetivo (2.2) é composta pelo somatório de todos os itens em conjunto com todo o intervalo de tempo analisado, e possui duas parcelas. A primeira corresponde ao custo de estoque ao lado do posto de trabalho, já a segunda parcela está relacionada ao custo de movimentação dos itens do armazém central até o posto de trabalho.

Em relação as restrições, a equação (2.3) garante que a demanda ao final de cada período será atendida. A restrição (2.4) garante que cada item será alocado somente em um tamanho de embalagem durante todos os períodos. Na restrição (2.5) o coeficiente  $M_{ikt}$  é calculado pela seguinte equação:

$$M_{ikt} = \sum_{u=t}^T \left\lceil \frac{d_{iu}}{q_{ik}} \right\rceil \quad (2.10)$$

Dessa forma, caso a embalagem seja escolhida para movimentar o item para o posto de trabalho (isso é,  $x_{ik} = 1$ ), a restrição é satisfeita pois o número de vezes que o posto é abastecido pela embalagem  $k$  não pode ser maior do que  $M_{ikt}$ . A restrição (2.6) garante que o número de embalagens utilizadas não vai superar o número disponível de embalagens, e as restrições (2.7), (2.8) e (2.9) representam o domínio das variáveis.

# Capítulo 3

## Análises e propostas de solução

Nesse capítulo, será apresentada uma discussão a respeito da relação entre o uso do parâmetro  $w_{ikt}$  e a variável de frequência  $f_{ikt}$  do modelo original (apresentado no capítulo 2). A partir desta discussão, será proposta uma alteração no modelo D, vão ser apresentadas heurísticas para a resolução do problema e será aplicada a Decomposição *Dantzig-Wolfe* no modelo apresentado.

O cálculo de  $w_{ikt}$  pressupõe uma dada frequência de movimentação, e considera que nunca é vantajoso acumular estoque ao final do período. Essa frequência é dada por  $\lceil \frac{d_{it}}{q_{ik}} \rceil$  e, ao se considerar o *lead time*  $r_{ik}$ , o cálculo de  $w_{ikt}$  determina a quantidade de embalagens mobilizadas simultaneamente para o atendimento da demanda.

Porém o modelo D considera a possibilidade de manter estoque acima do mínimo, caso isso seja vantajoso em termos de custo, ou mesmo como única forma de obter solução viável. Acontece que identificamos que a formulação apresenta uma dissociação entre a variável de frequência  $f_{ikt}$  e o parâmetro  $w_{ikt}$ , com isso as movimentações feitas antecipadamente arcando com os custos de estoque não são consideradas na restrição de capacidade.

Neste estudo, serão trabalhadas situações onde o parâmetro  $r_{ik}$  (utilizado no cálculo de  $w_{ikt}$ ) tem valor igual a 1, ou seja, o *lead time* é de um período independente do item do tipo  $i$  e da embalagem do tamanho  $k$ . Isso se justifica pela alteração no modelo original D que será proposta, onde a variável de frequência ( $f_{ikt}$ ) será inserida na restrição de capacidade.

### 3.1 Discussão a respeito do modelo original (D)

Por meio da análise do modelo original, foi observado que a restrição de capacidade (2.6) não abrange casos em que se antecipa o envio de produtos para o posto de trabalho. Esse tipo de situação pode ocorrer com frequência principalmente para instâncias onde há variação dos custos de envio no horizonte, ou mesmo ser a única forma possível de viabilizar o abastecimento devido a restrição de capacidade.

Abaixo será apresentado um exemplo ilustrativo, onde os dados são inviáveis para o modelo original, porém se fazendo a alteração da frequência de envio dos itens na embalagem escolhida, com um acréscimo de custo, a instância se viabiliza.

**Exemplo 1** Considere uma pequena instância com 2 itens, 3 períodos e 2 embalagens. Onde os custos de estoque são  $c_1 = 2$  e  $c_2 = 3$ , o número de embalagens  $l_1$  é de 4 unidades e  $l_2$  é 2 unidades. Os custos de movimentação ( $b_{1t}$ ) nos períodos 1, 2 e 3 são respectivamente 90, 200 e 300, e de  $b_{2t}$  são 140, 230 e 330. A embalagem 1 tem capacidade de movimentar 20 unidades do item 1 e 40 unidades do item 2, já a embalagem 2 pode movimentar 30 unidades do item 1 e 50 do item 2. A tabela abaixo (3.1) apresenta as demandas de cada item.

Tabela 3.1: Demanda do item  $i$  no período  $t$  para o exemplo 1

Item	Período		
	1	2	3
1	35	40	90
2	100	108	55

A execução da instância apresentada no modelo original retorna que não existe solução viável para esses dados. Isso se explica pelo fato do modelo  $D$  possuir em sua restrição de capacidade o parâmetro  $w_{ikt}$ , que representa o mínimo de embalagens necessárias para atender a demanda daquele período. A tabela 3.2 apresenta os valores de  $w_{ikt}$ , por meio de sua análise pode-se observar que em qualquer combinação de itens a embalagens ( $i, k$ ) haverá inviabilidade em algum dos períodos. Para o item 1, independentemente da escolha da embalagem 1 ou 2, haverá inviabilidade para o modelo no terceiro período, pois os valores de  $w_{113}$  e  $w_{123}$  extrapolam a capacidade destes períodos.

Tabela 3.2: Valores do parâmetro  $w_{ikt}$  para o exemplo 1

t	$w_{i,1,t}$			$w_{i,2,t}$		
	1	2	3	1	2	3
i = 1	2	2	5	2	2	3
i = 2	3	3	2	2	3	2

A inviabilidade revelada para o modelo  $D$  mostra que existe uma lacuna que ele não é capaz de preencher, pois a instância pode sim encontrar uma solução viável, através da alteração da frequência de movimentação das embalagens. A execução desses dados no modelo inserindo a variável de frequência na restrição de capacidade (que será apresentado nas próximas seções de forma detalhada) retorna uma solução ótima para esses dados. A solução encontrada diz para enviar 2 unidades de embalagens do tamanho 2 com o item 1 durante todos os períodos, e 3 embalagens do tamanho 1 com o item 2 nos dois primeiros períodos, e no terceiro levar até o posto de trabalho uma única embalagem. Dessa forma a solução ótima é encontrada com um custo associado de 2947.

## 3.2 Formulação com a variável de frequência na restrição de capacidade

A situação descrita no exemplo 1 justifica a formulação proposta a seguir, que será chamada de FLK. Esse modelo corrige a deficiência apresentada pela formulação D, pois a restrição de capacidade deixa de ter o parâmetro  $w_{ikt}$  e passa a conter a variável de frequência ( $f_{ikt}$ ). Dessa forma, é possível garantir que o número de embalagens utilizadas não irá exceder ao limite de capacidade em nenhum dos períodos (3.5), o que poderia não acontecer na formulação original (D). Cabe notar que só é possível reescrever a restrição (3.5) com a variável de frequência se o *lead time* ( $r_{ik}$ ) for igual a um período.

**Formulação (FLK):**

$$z_{FLK} = \min \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} (c_i s_{it} + \sum_{k \in K} b_{kt} f_{ikt}) \quad (3.1)$$

sujeito a:

$$s_{i(t-1)} - s_{it} + \sum_{k \in K} q_{ik} f_{ikt} = d_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.2)$$

$$\sum_{k \in K} x_{ik} = 1 \quad \forall i \in I \quad (3.3)$$

$$M_{ikt} x_{ik} - f_{ikt} \geq 0 \quad \forall i \in I, k \in K, t \in T \quad (3.4)$$

$$\sum_{i \in I} f_{ikt} \leq l_k \quad \forall t \in T, k \in K \quad (3.5)$$

$$x_{ik} \in \mathbb{B} \quad \forall i \in I, k \in K \quad (3.6)$$

$$s_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.7)$$

$$f_{ikt} \in \mathbb{N} \quad \forall i \in I, k \in K, t \in T \quad (3.8)$$

A função objetivo busca minimizar os custos totais, assim como no modelo original (D), e as restrições tem exatamente o mesmo significado, exceto a (3.5) que foi explicada anteriormente.

### 3.2.1 Aplicação da Decomposição *Dantzig-Wolfe* no modelo FLK

Em Dantzig e Wolfe (1961), foi apresentado um algoritmo de decomposição para resolver problemas de otimização, que posteriormente ficou conhecido como a Decomposição *Dantzig-Wolfe* (DWD). O trabalho feito pelos autores apresenta um método para resolver problemas de programação linear, em que a matriz dos coeficientes tem uma estrutura em blocos, que podem ser divididos em blocos de restrições que não se relacionam entre si (independentes) e restrições que possuem alguma ligação (acoplamento).

Segundo Martin (2012) o método de decomposição *Dantzig-Wolfe* é considerado o dual da decomposição de *Benders*, enquanto a decomposição de *Benders* divide o problema em dois conjuntos de variáveis, a decomposição *Dantzig-Wolfe* busca uma divisão das restrições em dois conjuntos. Em um dos conjuntos ficam as restrições do problema

mestre, e no outro ficam as restrições que pertencem ao subproblema, com o objetivo de tornar a resolução de problemas de grande escala mais eficiente.

Este método pode ser aplicado em diversos tipos de problemas da programação inteira para obter soluções viáveis, caso seja utilizado em conjunto com alguma outra técnica. Vanderbeck (2000) cita alguns problemas em que se aplicou a geração de colunas, dentre eles estão roteamento de veículos, problemas de atribuição generalizada e de alocação de embalagens. Em todas essas aplicações o método se mostrou eficiente.

Pimentel et al. (2010) apresentaram um estudo voltado para a aplicação do algoritmo de geração de colunas para o problema de dimensionamento de lotes. No artigo, os autores aplicaram o método *Dantzig-Wolfe* de três maneiras diferentes, inicialmente dividindo os subproblemas por itens e depois por períodos. A terceira aplicação foi através do conceito de *Multiple Dantzig-Wolfe Decomposition*, onde se tem um problema mestre e um conjunto de subproblemas. Após isso, foi utilizada a técnica *branch-and-price*, que se caracteriza por ser uma combinação do *branch-and-bound* com a geração de colunas, e vem sendo muito utilizada para a resolução de problemas de programação inteira.

Neste estudo, se optou por aplicar a decomposição *Dantzig-Wolfe* objetivando encontrar melhores limites inferiores para o modelo FLK, para isso se utilizou da estratégia da decomposição por itens, deixando apenas a restrição (3.5) de limitação de embalagens no problema mestre. As demais restrições foram inseridas no subproblema.

Para definir o problema mestre foram considerados os conjuntos, variáveis e parâmetros já definidos anteriormente, além disso foi criado um conjunto  $H$  que representa as colunas geradas pelo subproblema.

Os parâmetros relacionados com as variáveis originais do problema foram obtidos através das equações (3.9), (3.10) e (3.11). A variável  $\lambda_r$  foi criada para garantir que qualquer ponto de um determinado polítopo possa ser escrito como uma combinação convexa dos pontos extremos do mesmo. O modelo analisado possui apenas pontos extremos, pois o seu subproblema é limitado, portanto qualquer solução do problema mestre (apresentado abaixo) pode ser expressada como uma combinação linear convexa de pontos extremos dos subproblemas.

$$x_{ik} = \sum_{r \in H} \bar{x}_{ikr} \lambda_r \quad (3.9)$$

$$s_{it} = \sum_{r \in H} \bar{s}_{itr} \lambda_r \quad (3.10)$$

$$f_{ikt} = \sum_{r \in H} \bar{f}_{iktr} \lambda_r \quad (3.11)$$

A restrição (3.13) foi obtida substituindo (3.11) em (3.5), e foi inserida no problema mestre que é apresentado abaixo:

### Problema Mestre I (MPI):

$$z_{mpI} = \min \sum_{r \in H} \left( \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} (c_i \bar{s}_{itr} + \sum_{k \in K} b_{kt} \bar{f}_{iktr}) \right) \lambda_r \quad (3.12)$$

sujeito a:

$$\sum_{r \in H} \left( \sum_{i \in I} \bar{f}_{iktr} \right) \lambda_r \leq l_k \quad \forall k \in K, t \in T(\pi_{kt}) \quad (3.13)$$

$$\sum_{r \in H} \lambda_r = 1, \quad (\mu_0) \quad (3.14)$$

$$\lambda_r \geq 0 \quad \forall r \in H \quad (3.15)$$

A função objetivo (3.12) busca minimizar os custos, assim como no problema original, a inequação (3.13) representa o limite de embalagens utilizadas que deverá respeitar o limite disponível, a restrição (3.14) é a restrição de convexidade, e a restrição (3.15) representa a não negatividade da variável do problema mestre. As variáveis  $\pi_{kt}$  e  $\mu_0$  são as variáveis duais associadas as restrições (3.13) e (3.14).

Conforme informado anteriormente, as demais restrições foram inseridas no subproblema I, que é apresentado abaixo:

### Subproblema I (SPI):

$$z_{spI} = \min \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} (c_i s_{it} + \sum_{k \in K} (b_{kt} - \pi_{kt}) f_{ikt}) - \mu_0 \quad (3.16)$$

sujeito a:

$$s_{i(t-1)} - s_{it} + \sum_{k \in K} q_{ik} f_{ikt} = d_{it} \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.17)$$

$$\sum_{k \in K} x_{ik} = 1 \quad \forall i \in I \quad (3.18)$$

$$M_{ikt} x_{ik} - f_{ikt} \geq 0 \quad \forall i \in I, k \in K, t \in T \quad (3.19)$$

$$x_{ik} \in \mathbb{B} \quad \forall i \in I, k \in K \quad (3.20)$$

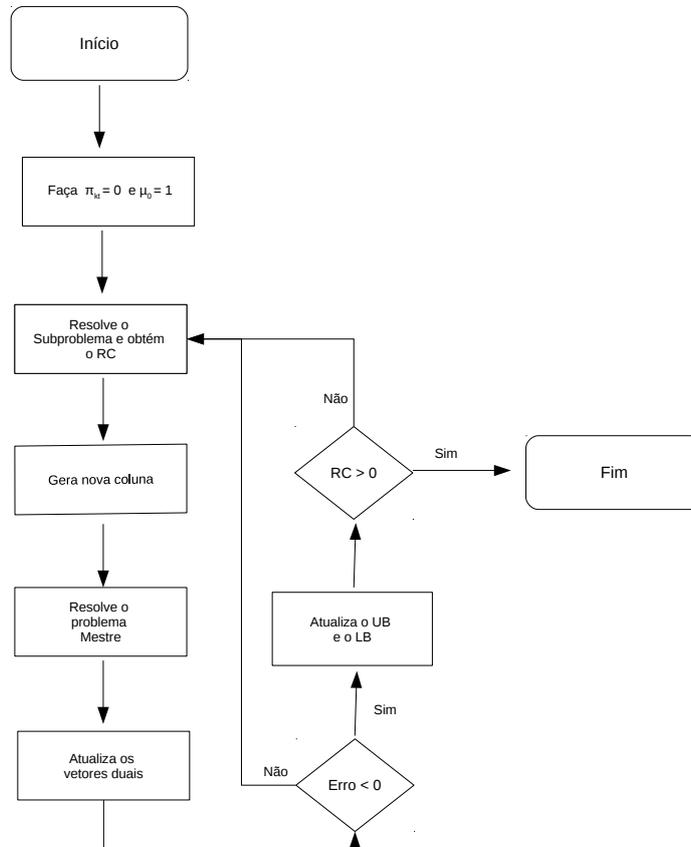
$$s_{it} \geq 0 \quad \forall i \in I, t \in T \quad (3.21)$$

$$f_{ikt} \in \mathbb{N} \quad \forall i \in I, k \in K, t \in T \quad (3.22)$$

Durante o processo de geração de colunas o subproblema pode ser resolvido através de um resolvidor, ou de algoritmos propostos para analisar se existem planos de alocação de itens a embalagens atraentes.

A figura 3.1 representada abaixo, demonstra como é o funcionamento do algoritmo de geração de colunas. O valor do  $\pi_{kt}$  inicial é nulo, e  $\mu_0$  é igual a um, a cada iteração o subproblema é resolvido e calcula o custo reduzido (RC) do plano de produção, que é considerado atraente se o seu valor for negativo. Após isso, são adicionados planos ao problema mestre, até que o erro associado seja nulo e com isso se obtenha valores para os limites inferior e superior, e também até que não haja mais planos atraentes, ou seja, até que o RC seja positivo, e com isso se encontre a solução ótima do problema mestre.

Figura 3.1: Funcionamento do algoritmo proposto para a geração de colunas



### 3.2.2 Resolução dos subproblemas

O subproblema é decomponível por peça e se caracteriza por ser um modelo de dimensionamento de lotes sem limites de capacidade para uma dada embalagem  $k$ . Esse tipo de modelo pode ser resolvido por meio de um algoritmo em tempo polinomial.

O algoritmo 1 apresenta o pseudocódigo para a resolução do subproblema. Os objetivos do algoritmo são garantir o atendimento das demandas e analisar para cada par de itens e embalagens, o menor custo possível averiguando o *trade-off* entre o custo de estoque e a variação dos custos de movimentação ao longo dos períodos, que sofrem uma perturbação pela variável dual  $(\pi_{kt})$ . Após a determinação do parâmetro  $\phi_{ik}$ , que determina o menor custo para cada par  $(i, k)$ , a melhor solução será a seleção da embalagem de menor custo

para cada item.

---

**Algoritmo 1:** Pseudocódigo para a resolução do subproblema.

---

```

1 início
2    $\Delta_{ik0} \leftarrow 0;$ 
3    $\Delta 2_{ik0} \leftarrow 0;$ 
4   para cada  $i \in I$  faça
5     para cada  $k \in K$  faça
6       para cada  $t \in T$  faça
7          $\bar{c}_{ikt} \leftarrow c_i q_{ik};$ 
8          $\bar{d}_{ikt} \leftarrow \lceil \frac{(d_{it} - \Delta_{ik}(t-1))}{q_{ik}} \rceil;$ 
9          $\Delta_{ikt} \leftarrow \Delta_{ik(t-1)} - d_{it} + (q_{ik} \bar{d}_{ikt});$ 
10      fim
11    fim
12  fim
13  para cada  $i \in I$  faça
14     $\phi_{besti} \leftarrow \infty;$ 
15    para cada  $k \in K$  faça
16       $\bar{t} \leftarrow 1;$ 
17       $\bar{f}_{ik1} \leftarrow \bar{d}_{ik1};$ 
18      para cada  $t = 2, \dots, |T|$  faça
19        se  $(b_{k\bar{t}} - \pi_{k\bar{t}} + \sum_{u=\bar{t}}^{t-1} \bar{c}_{iku} < b_{kt} - \pi_{kt})$  então
20           $\bar{f}_{ik\bar{t}} \leftarrow \bar{f}_{ik\bar{t}} + \bar{d}_{ikt};$ 
21        senao
22           $\bar{f}_{ikt} \leftarrow \bar{d}_{ikt};$ 
23           $\bar{t} \leftarrow t;$ 
24      fim
25    fim
26  fim
27  para cada  $t \in T$  faça
28     $\Delta 2_{ikt} \leftarrow (q_{ik} \bar{f}_{ikt}) - d_{it} + \Delta 2_{ik(t-1)};$ 
29  fim
30   $\phi_{ik} \leftarrow \sum_{t=1}^T (b_{kt} \bar{f}_{ikt} + c_i \Delta 2_{ikt});$ 
31  se  $(\phi_{ik} < \phi_{besti})$  então
32     $\phi_{besti} \leftarrow \phi_{ik};$ 
33     $k_{best} \leftarrow k;$ 
34  fim
35  fim
36   $x_{ik_{best}} \leftarrow 1;$ 
37  Atualize  $f_{ikt}$  e  $s_{it}$  com valores de  $k_{best};$ 
38  fim
39   $FO \leftarrow \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I (c_i s_{it} + \sum_{k=1}^K (b_{kt} - \pi_{kt}) f_{ikt}) - \mu_0$ 
40 fim

```

---

O funcionamento do algoritmo 1 ocorre dentro do algoritmo de geração de colunas (3.1), em cada iteração a função objetivo do subproblema é calculada com os custos de movimentação corrigidos pelas variáveis duais. Após isso, os valores obtidos são enviados para que o problema mestre seja resolvido até que o custo reduzido seja positivo.

### 3.3 Heurísticas propostas

Nesta seção, serão apresentadas as heurísticas propostas para tratar o problema. As heurísticas realizarão um pré-processamento dos dados, que posteriormente serão executados em um modelo de *generalized assignment problem* (GAP). As estratégias para realizar esse pré-processamento serão demonstradas ao longo da seção.

#### 3.3.1 Heurística PGA I

É possível utilizar a frequência de abastecimento associada ao cálculo de  $w_{ikt}$  para se tentar encontrar soluções viáveis para o modelo proposto por de Souza et al. (2008), eliminando as variáveis de estoque ( $s_{it}$ ) e de frequência ( $f_{ikt}$ ), o deixando somente com a variável  $x_{ik}$ <sup>1</sup>. É válido ressaltar que a heurística não garante a viabilidade para todas as instâncias, pois podem ocorrer situações nas quais o parâmetro  $w_{ikt}$  (presente em uma das restrições do modelo utilizado pela heurística) não seja capaz de respeitar a limitação de embalagens, como observado no exemplo 1.

O parâmetro  $\phi_{ik}^I$  representa o custo total de se utilizar a embalagem do tamanho  $k$  para movimentar o item do tipo  $i$  na frequência pressuposta por  $w_{ikt}$ , incluindo os custos com movimentações e estoques durante todo o horizonte de planejamento.

A principal ideia desta heurística é a possibilidade de calcular a priori os custos totais associados a cada par de itens e embalagens ( $i, k$ ). O algoritmo 2 apresenta o pseudocódigo para a obtenção dos valores de  $\phi_{ik}^I$ .

---

**Algoritmo 2:** Pseudocódigo para o cálculo de  $\phi_{ik}^I$ : Heurística PGA I

---

```

1 início
2    $\phi_{ik} \leftarrow 0$ ;
3    $\Delta_{ik0} \leftarrow 0$ ;
4   para cada  $i \in I$  faça
5     para cada  $k \in K$  faça
6       para cada  $t \in T$  faça
7          $\bar{d}_{ikt} \leftarrow \lceil \frac{(d_{it} - \Delta_{ik}(t-1))}{q_{ik}} \rceil$ ;
8          $\Delta_{ikt} \leftarrow \Delta_{ik(t-1)} - d_{it} + (q_{ik} \bar{d}_{ikt})$ ;
9          $\phi_{ik}^I \leftarrow \phi_{ik}^I + c_i \Delta_{ikt} + b_{kt} \bar{d}_{ikt}$ ;
10      fim
11    fim
12  fim
13 fim
```

---

A definição da frequência de movimentação parte do princípio de se minimizar o estoque em cada um dos períodos (*just in time*). Para isso, o algoritmo 2 calcula o valor de  $\bar{d}_{ikt}$ , que leva em consideração a demanda do período em análise, o estoque do período anterior e o número de itens que cabem na embalagem analisada para determinar a frequência de envio dos itens para o posto de trabalho. Após isso, é calculado o estoque remanescente de cada período e o custo  $\phi_{ik}^I$  é incrementado. O processo é repetido até que todos os itens e embalagens sejam analisados.

---

<sup>1</sup>Agradecemos a contribuição do professor Sebastián Alberto Urrutia, DCC-UFMG, que nos alertou para essa heurística.

Os valores encontrados para  $\phi_{ik}^I$  irão fornecer uma solução de se movimentar uma quantidade mínima de embalagens em cada período, garantindo o atendimento da demanda. Dessa forma, o acúmulo de estoques será o menor possível, caso haja solução viável com essa estratégia, serão obtidos *upper bounds* para o problema.

A heurística PGA I trata o problema como um *generalized assignment problem* (GAP). O parâmetro  $\phi_{ik}^I$  é calculado a priori por meio do algoritmo (2) descrito anteriormente. A função objetivo (3.23) busca minimizar os custos associados a movimentações e estoques, a equação (3.24) garante que cada item será alocado em somente um tamanho de embalagem, e a restrição (3.25) garante que o limite de embalagens disponíveis não será excedido em nenhum dos períodos. A variável  $x_{ik}$  mantém o seu significado original, que é o de determinar qual item será alocado a cada embalagem.

### Modelo PGA I:

$$z_{PGAI} = \min \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \phi_{ik}^I x_{ik} \quad (3.23)$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in K} x_{ik} = 1 \quad \forall i \in I \quad (3.24)$$

$$\sum_{i \in I} w_{ikt} x_{ik} \leq l_k \quad \forall t \in T, k \in K \quad (3.25)$$

$$x_{ik} \in \mathbb{B} \quad \forall i \in I, k \in K \quad (3.26)$$

A ideia de calcular a priori os custos associados a cada par  $(i, k)$  com frequência definida por  $w_{ikt}$ , faz com que o modelo se torne mais simples de ser resolvido. Isso acontece devido ao fato de as restrições de dimensionamento de lotes e de acoplamento das variáveis ( $x_{ik}$  e  $f_{ikt}$ ) deixarem de fazer parte do modelo utilizado na heurística.

O exemplo apresentado abaixo, mostra que a solução obtida por PGA I é uma solução também viável em FLK, porém é possível encontrar uma solução de menor custo por meio da alteração de frequência das embalagens movimentadas.

**Exemplo 2** *Aproveitando os dados utilizados no exemplo 1, alterando apenas o número de embalagens disponíveis  $l_1$  que passa a ser de 6 unidades,  $l_2$  de 3 unidades e o custo de movimentação da embalagem de tamanho 2 ( $b_{2t}$ ) nos períodos 1, 2 e 3 que serão respectivamente 1400, 2300 e 3300.*

*Após essas alterações a heurística PGA I passa a ser capaz de encontrar solução viável para essa instância, com um custo total de 15367 unidades monetárias. A PGA I retorna que o item 1 deve ser alocado na embalagem 1 com frequência de envio de 2 embalagens nos dois primeiros períodos e de 5 embalagens no último período. Já o item 2 deve ser alocado na embalagem de tamanho 2 (de maior custo) com frequência de 2 embalagens no primeiro período, 3 embalagens no segundo e de apenas uma no terceiro. Essa solução também é viável para o modelo FLK, entretanto é possível encontrar uma solução de menor custo alterando a frequência das entregas e com isso evitar o uso da embalagem de maior custo.*

*Por meio do remanejamento (feito por FLK), a embalagem de tamanho 1 passou a ser utilizada para ambos os itens. Para atender a demanda do item 1 foram entregues*

3 embalagens em todos os períodos, e para o item 2 foram enviadas 3 embalagens nos dois primeiros períodos, e no terceiro apenas uma embalagem foi movimentada. O custo ótimo para a formulação FLK foi de 3317 unidades monetárias, ou seja, a possibilidade de alterar a frequência de movimentação das embalagens pode representar uma grande economia.

### 3.3.2 Heurística PGA II

A heurística PGA II foi proposta com o objetivo de encontrar melhores soluções viáveis para a formulação FLK, principalmente para casos onde há uma variação nos custos de movimentação. Essa heurística é uma extensão da PGA I, e permite o acúmulo de estoques para casos onde é economicamente vantajoso.

O algoritmo 3 apresenta o pseudocódigo para a obtenção do parâmetro  $\phi_{ik}^{II}$ . Para cada par de itens e embalagens, o algoritmo determina uma frequência de movimentação ( $\bar{f}_{ikt}$ ) levando em consideração o *trade-off* entre custo de estoque e movimentação. Após isso, é calculado o estoque remanescente em cada um dos períodos, e por fim é determinado o valor do parâmetro  $\phi_{ik}^{II}$ .

---

**Algoritmo 3:** Pseudocódigo para o cálculo de  $\phi_{ik}^{II}$ : Heurística PGA II.

---

```

1 início
2   Determina  $\bar{c}_{ikt}$ ,  $\bar{d}_{ikt}$ ,  $\Delta_{ikt}$  (análogo ao algoritmo 1);
3    $\Delta_{2_{ik0}} \leftarrow 0$ ;
4   para cada  $i \in I$  faça
5     para cada  $k \in K$  faça
6        $\bar{t} \leftarrow 1$ ;
7        $\bar{f}_{ik1} \leftarrow \bar{d}_{ik1}$ ;
8       para cada  $t = 2, \dots, |T|$  faça
9         se  $(b_{k\bar{t}} + \sum_{u=\bar{t}}^{t-1} \bar{c}_{iku} < b_{kt})$  então
10           $\bar{f}_{ik\bar{t}} \leftarrow \bar{f}_{ik\bar{t}} + \bar{d}_{ikt}$ ;
11          senão
12             $\bar{f}_{ikt} \leftarrow \bar{d}_{ikt}$ ;
13             $\bar{t} \leftarrow t$ ;
14          fim
15        fim
16      fim
17      para cada  $t \in T$  faça
18         $\Delta_{2_{ikt}} \leftarrow (q_{ik}\bar{f}_{ikt}) - d_{it} + \Delta_{2_{ik(t-1)}}$ ;
19      fim
20       $\phi_{ik}^{II} \leftarrow \sum_{t=1}^T (b_{kt}\bar{f}_{ikt} + c_i\Delta_{2_{ikt}})$ ;
21    fim
22  fim
23 fim
```

---

A heurística PGA II trata o problema como um *generalized assignment problem*, assim como a PGA I. O modelo PGA II é apresentado abaixo, e é bem semelhante ao modelo utilizado na heurística PGA I. A diferença entre eles é a restrição de limitação de capacidade das embalagens, que passou a ter o parâmetro de frequência definido previamente pelo algoritmo 3.

**Modelo PGA II:**

$$z_{PGAII} = \min \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \phi_{ik}^{II} x_{ik} \quad (3.27)$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in K} x_{ik} = 1 \quad \forall i \in I \quad (3.28)$$

$$\sum_{i \in I} \bar{f}_{ikt} x_{ik} \leq l_k \quad \forall t \in T, k \in K \quad (3.29)$$

$$x_{ik} \in \mathbb{B} \quad \forall i \in I, k \in K \quad (3.30)$$

**3.3.3 Heurística PGA III**

A heurística PGA III busca encontrar soluções viáveis para o Modelo FLK. Diferente das outras heurísticas propostas, onde somente uma possibilidade de frequência é definida, a proposta de PGA III é sugerir alternativas diferentes para a definição das movimentações. A motivação para propor essa heurística foi a limitação observada na PGA II, em que somente uma possibilidade de frequência ( $\bar{f}_{ikt}$ ) é calculada previamente considerando o *trade-off* entre custos de movimentação e estoque. Em casos onde a disponibilidade de embalagens é menor, pode ocorrer de PGA II não conseguir obter soluções viáveis.

O algoritmo 4 é bem semelhante aos algoritmos 2 e 3 descritos anteriormente. O que difere eles é a possibilidade de criar alternativas diferentes para determinar a frequência das movimentações. O conjunto  $O$  foi criado com o intuito de representar essas alternativas, que são definidas pelo algoritmo 4. O parâmetro  $\phi_{iko}$  representa o custo total de se utilizar a embalagem  $k$  para movimentar o item  $i$  na frequência  $o$ .

A primeira frequência ( $\bar{f}_{ikt1}$ ) determinada pelo algoritmo 4 segue a mesma estratégia do algoritmo 3 para determinar o custo  $\phi_{ik1}$ . A determinação das demais frequências insere uma aleatoriedade no algoritmo através do parâmetro  $\alpha$ , que é definido por meio de uma distribuição Uniforme com parâmetros no intervalo entre 0 e 1. Além disso, é calculado o parâmetro  $p_1$  que é a proporção entre o custo de se antecipar as entregas, e o somatório da antecipação acrescido do custo de movimentação do período que se está analisando.

Utilizando esses parâmetros é feita uma comparação, caso o valor de  $\alpha$  seja menor ou igual que  $1 - p_1$  é viável se antecipar a entrega e arcar com os custos de estoques. Em situações onde o custo de antecipar é muito menor, então o valor de  $1 - p_1$  será próximo de 1, e conseqüentemente a probabilidade do  $\alpha$  ser menor que ele irá crescer, porém a aleatoriedade na definição de  $\alpha$  faz com que o algoritmo determine diferentes alternativas de frequências. A comparação é feita para todas as alternativas de movimentações, para todo par de itens e embalagens, e são definidos os parâmetros  $\bar{f}_{ikto}$  e  $\phi_{iko}$  utilizados no

modelo PGA III.

---

**Algoritmo 4:** Pseudocódigo para o cálculo de  $\phi_{iko}$ : Heurística PGA III.

---

```

1 início
2   Determina  $\bar{c}_{ikt}$ ,  $\bar{d}_{ikt}$ ,  $\Delta_{ikt}$  (análogo ao algoritmo 1);
3    $\Delta_{2_{ik0}} \leftarrow 0$ ;
4   para cada  $o \in O$  faça
5     se ( $o = 1$ ) então
6       para cada  $i \in I$  faça
7         para cada  $k \in K$  faça
8            $\phi_{iko} \leftarrow \phi_{ik}^{II}$  (análogo ao algoritmo 3);
9         fim
10      fim
11    senao
12      para cada  $i \in I$  faça
13        para cada  $k \in K$  faça
14           $\bar{t} \leftarrow 1$ ;
15           $\bar{f}_{ik1o} \leftarrow \bar{d}_{ik1}$ ;
16          para cada  $t = 2, \dots, |T|$  faça
17             $\alpha \leftarrow \text{Uniforme}(0,1)$  ;
18             $p_1 \leftarrow \frac{b_{k\bar{t}} + \sum_{u=\bar{t}}^{t-1} \bar{c}_{iku}}{b_{k\bar{t}} + \sum_{u=\bar{t}}^{t-1} \bar{c}_{iku} + b_{kt}}$  ;
19            se ( $\alpha \leq 1 - p_1$ ) então
20               $\bar{f}_{ik\bar{t}o} \leftarrow \bar{f}_{ik\bar{t}o} + \bar{d}_{ikt}$ ;
21            senao
22               $\bar{f}_{ikto} \leftarrow \bar{d}_{ikt}$ ;
23             $\bar{t} \leftarrow t$ ;
24          fim
25        fim
26      fim
27      para cada  $t \in T$  faça
28         $\Delta_{2_{ikt}o} \leftarrow (q_{ik}\bar{f}_{ikt}o) - d_{it} + \Delta_{2_{ik(t-1)o}}$ ;
29      fim
30       $\phi_{iko} \leftarrow \sum_{t=1}^T (b_{kt}\bar{f}_{ikt}o + c_i\Delta_{2_{ikt}o})$ ;
31    fim
32  fim
33 fim
34 fim

```

---

A função objetivo (3.31) busca minimizar o custo total levando em consideração todas as alternativas de frequência das entregas. A equação (3.32) garante que somente um tamanho de embalagem e uma alternativa de frequência de entrega será utilizada para movimentar os itens, e a restrição (3.33) garante que o limite de embalagens disponíveis será respeitado durante todos os períodos.

**Modelo PGA III:**

$$z_{PGAIII} = \min \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{o \in O} \phi_{iko} x_{iko} \quad (3.31)$$

sujeito a:

$$\sum_{k \in K} \sum_{o \in O} x_{iko} = 1 \quad \forall i \in I \quad (3.32)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{o \in O} \bar{f}_{ikto} x_{iko} \leq l_k \quad \forall t \in T, k \in K \quad (3.33)$$

$$x_{iko} \in \mathbb{B} \quad \forall i \in I, k \in K, o \in O \quad (3.34)$$

# Capítulo 4

## Resultados computacionais

Nesse capítulo, serão apresentados os resultados computacionais obtidos através da aplicação do algoritmo de decomposição *Dantzig-Wolfe*, os resultados gerados pelo resolvidor (*CPLEX 12.6*) limitando o tempo de execução para cada uma das instâncias em 3600 segundos, e também os resultados gerados pelas heurísticas propostas. Além disso, será feita uma comparação com resultados encontrados anteriormente através de outros estudos.

Para a realização dos testes computacionais utilizou-se linguagem de programação AMPL, sendo estes executados em um computador com sistema operacional Linux, com 7.8 GB de memória e processador *Intel Core i7 3.4 GHz*.

### 4.1 Características das instâncias

Os experimentos computacionais foram realizados para um conjunto de 48 instâncias baseadas em dados reais, com 191 itens e 3 tipos de embalagens que possuem tamanhos diferentes (pequena, média e grande), de uma grande indústria localizada no Brasil. O horizonte de planejamento das operações é composto por 7 períodos, e as decisões do chão de fábrica são tomadas baseadas na demanda diária. As instâncias podem ser divididas em dois grupos, o grupo denominado I utilizou as instâncias do estudo feito por de Souza et al. (2008), e se refere aos dados cujo custo de movimentação não sofreu nenhuma variação durante o horizonte de planejamento, já o grupo II em que as instâncias utilizadas foram de Mendonça (2011), é mencionado para identificar os testes onde ocorre essa variação.

Os experimentos foram realizados em diversos cenários diferentes, e são divididos em dois segmentos, as instâncias que iniciam o nome sem o prefixo  $b$ , a razão  $\frac{l_k}{a_k}$  possui o mesmo valor para cada embalagem  $k$ , onde  $l_k$  é o percentual do número total  $a_k$  de embalagens do tipo  $k$  que são necessários para abastecer a linha considerando que apenas as embalagens do tipo  $k$  sejam utilizadas. Nas instâncias inicializadas com o prefixo  $b$ , a razão  $\frac{l_k}{a_k}$  pode variar de acordo com o tipo de embalagem. Dentro de cada segmento foram feitas também variações de acordo com a parametrização da função de demanda diária, políticas de custos de movimentação e configurações do parâmetro  $l_k$  utilizado na instância.

## 4.2 Resultados obtidos por meio das heurísticas

Nessa seção, serão demonstrados os resultados dos testes realizados por meio das heurísticas propostas no capítulo 3. Os testes foram feitos com o objetivo de comparar os resultados obtidos pelas heurísticas com os encontrados anteriormente pela literatura.

A tabela 4.1 apresenta os resultados encontrados para o grupo I de instâncias, nela estão contidos o valor ótimo encontrado da função objetivo dos modelos utilizados nas heurísticas ( $z_{PGAI}$ ,  $z_{PGAII}$  e  $z_{PGAIII}$ ), o tempo levado para encontrá-la, e também as melhores soluções encontradas para o grupo I ( $\bar{UB}_I$ ) que foram obtidas por da Cunha e de Souza (2008).

Por meio da análise das soluções encontradas para o grupo I de instâncias, é possível perceber que as soluções obtidas pelas heurísticas superaram consideravelmente as melhores alcançadas pela literatura até o momento. Além disso, o tempo de obtenção dessas soluções pode ser considerado pequeno, com média de 0,03 segundos para PGA I, 0,04 segundos para PGA II, e 0,16 segundos para PGA III.

A qualidade das soluções encontradas pelas heurísticas para o grupo I, também pode ser observada pelos valores obtidos para a relaxação linear dos modelos utilizados por elas. O GAP médio para todo o conjunto de instâncias foi de aproximadamente 0,01%, e demonstra que a casca convexa da formulação é consideravelmente restrita, explicando a facilidade para o resolvidor encontrar a otimalidade das instâncias.

Em todos os testes para esse grupo, a solução apresentada por PGA III superou a obtida por PGA I. Isso se explica pelo fato do modelo utilizado em PGA III possuir em sua restrição de capacidade a quantidade de embalagens reais ( $\bar{f}_{ikto}$ ) que estão sendo utilizadas, diferente de PGA I que contém  $w_{ikt}$ , já discutido no capítulo 3. Além disso, a solução encontrada por PGA II não superou PGA III em nenhum dos testes, isso se explica devido a primeira frequência gerada por PGA III ser a mesma gerada por PGA II.

Tabela 4.1: Resultados encontrados pelas heurísticas: Grupo I

Instâncias	$\bar{U}B_I$	PGA I		PGA II		PGA III	
		$z_{PGAI}$	Tempo(s)	$z_{PGAII}$	Tempo(s)	$z_{PGAIII}$	Tempo(s)
<i>btest191b111</i>	220235	186142	0,06	185755	0,23	185755	0,20
<i>btest191b112</i>	207971	189670	0,64	189144	0,06	189144	0,32
<i>btest191b113</i>	213953	191635	0,05	190872	0,03	190872	0,12
<i>btest191b121</i>	202148	180793	0,04	180189	0,05	180189	0,11
<i>btest191b122</i>	234213	208604	0,02	207837	0,01	207837	0,10
<i>btest191b123</i>	252720	219804	0,05	218480	0,03	218848	0,07
<i>btest191b211</i>	225353	201734	0,04	198050	0,04	196784	0,31
<i>btest191b212</i>	221008	200210	0,07	199017	0,05	199017	0,40
<i>btest191b213</i>	220534	202353	0,03	200387	0,02	200387	0,18
<i>btest191b221</i>	215095	193950	0,05	192930	0,04	192893	0,09
<i>btest191b222</i>	239685	221781	0,02	219721	0,02	219721	0,10
<i>btest191b223</i>	256420	232510	0,02	229000	0,04	228982	0,07
<i>test191 – 111</i>	206841	185191	0,03	185191	0,02	185191	0,08
<i>test191 – 112</i>	203102	185600	0,04	185285	0,02	185285	0,08
<i>test191 – 113</i>	222904	192539	0,08	191282	0,02	191250	0,23
<i>test191 – 121</i>	190713	177712	0,03	177712	0,02	177712	0,08
<i>test191 – 122</i>	192290	178534	0,05	178248	0,03	178248	0,08
<i>test191 – 123</i>	207914	182868	0,05	182288	0,04	182274	0,10
<i>test191 – 211</i>	213046	195468	0,03	195468	0,02	195468	0,08
<i>test191 – 212</i>	210576	196735	0,03	196153	0,02	195971	0,36
<i>test191 – 213</i>	225963	205014	0,05	203331	0,03	203102	0,19
<i>test191 – 221</i>	198930	188992	0,05	188982	0,02	188982	0,34
<i>test191 – 222</i>	199320	189808	0,03	189534	0,03	189528	0,14
<i>test191 – 223</i>	220180	194506	0,09	193538	0,05	193502	0,09

A tabela 4.2 apresenta os resultados obtidos pelas heurísticas para o grupo II de instâncias, e também as melhores soluções encontradas pela literatura para esse grupo ( $\bar{U}B_{II}$ ), que foram obtidas por Mendonça (2011). Em boa parte dos testes, as soluções encontradas pela literatura foram melhores que as alcançadas pelas heurísticas propostas neste estudo, entretanto como já foi explicado, as soluções encontradas para o modelo original (D) não levam em consideração a antecipação de envio dos itens, e por isso podem ser inviáveis para a formulação FLK.

Através da análise dos resultados obtidos pelas heurísticas, é possível observar que as soluções foram encontradas em um tempo considerado pequeno. Assim como para os testes do grupo I, isso se explica por conta dos valores do GAP da relaxação linear dos modelos utilizados pelas heurísticas. O GAP médio foi de aproximadamente 0,02% para todos os testes realizados para esse grupo.

A heurística PGA III obteve melhores soluções para todos os testes do grupo II, quando comparados aos resultados alcançados pelas demais. Para PGA I, isso se explica pelo fato de não levar em consideração a variação dos custos de movimentação, e somente buscar a minimização dos estoques. Assim como para o grupo I, o fato de PGA II está contida em PGA III explica a superioridade das soluções encontradas por PGA III.

Os resultados apresentados com ” \* ” na tabela 4.2 representam as situações nas quais as heurísticas não conseguiram encontrar solução viável para os testes. Somente PGA II não conseguiu encontrar soluções para todas as instâncias analisadas (em 10 dos 24 testes), isso se explica devido a PGA II propor somente uma frequência de movimentações permitindo o acúmulo de estoques. Com isso, em situações onde a disponibilização de embalagens é menor, o modelo utilizado pela heurística pode ser inviável.

Tabela 4.2: Resultados encontrados pelas heurísticas: Grupo II

Instâncias	$\bar{U}_{BII}$	PGA I		PGA II		PGA III	
		$z_{PGAI}$	Tempo(s)	$z_{PGAII}$	Tempo(s)	$z_{PGAIII}$	Tempo(s)
<i>btest191b111</i>	471283	536763	0,03	*	*	492600	0,69
<i>btest191b112</i>	427580	473231	0,32	450974	0,30	450974	0,03
<i>btest191b113</i>	427646	473231	0,26	426784	0,03	426784	0,11
<i>btest191b121</i>	475095	598662	0,08	*	*	525863	1,54
<i>btest191b122</i>	513017	670976	0,03	511300	0,04	511300	0,39
<i>btest191b123</i>	523746	682459	0,03	522298	0,03	521973	0,09
<i>btest191b211</i>	514226	657668	0,05	*	*	529530	0,83
<i>btest191b212</i>	455319	505990	0,06	479133	0,04	477804	0,14
<i>btest191b213</i>	454341	504743	0,10	452575	0,03	452575	0,11
<i>btest191b221</i>	514031	655695	0,07	*	*	577671	2,65
<i>btest191b222</i>	552175	730755	0,02	549571	0,03	549571	0,38
<i>btest191b223</i>	562702	741437	0,03	559129	0,03	558924	0,16
<i>test191 – 111</i>	433448	475202	0,02	465815	0,05	454169	0,16
<i>test191 – 112</i>	449250	513501	0,03	502853	0,10	470503	0,27
<i>test191 – 113</i>	505124	620769	0,06	*	*	552165	0,95
<i>test191 – 121</i>	465279	594877	0,02	468575	0,05	468459	0,14
<i>test191 – 122</i>	474479	595477	0,23	*	*	480650	0,44
<i>test191 – 123</i>	477283	603883	0,03	*	*	548680	6,86
<i>test191 – 211</i>	468212	510052	0,03	487381	0,10	479543	0,30
<i>test191 – 212</i>	477346	556168	0,04	524408	0,09	494377	0,28
<i>test191 – 213</i>	534720	683339	0,27	*	*	572959	1,34
<i>test191 – 221</i>	502942	649160	0,03	505242	0,02	505225	0,35
<i>test191 – 222</i>	552734	649686	0,03	*	*	513227	0,46
<i>test191 – 223</i>	514787	658056	0,03	*	*	581695	3,14

### 4.3 Resultados para o modelo FLK

Nesta seção, serão apresentados os resultados dos testes feitos através da formulação FLK. Foram realizados testes por meio do *CPLEX* para analisar a complexidade encontrada pelo resolvidor para obter a otimalidade, testes utilizando os algoritmos descritos anteriormente para calcular um limite inferior através da decomposição *Dantzig-Wolfe* (DWD), além das heurísticas propostas.

Os resultados dos testes realizados para o grupo I são demonstrados na tabela 4.3, que apresenta o GAP em relação a melhor solução viável encontrada pelo resolvidor limitando o seu tempo de execução em 3600 segundos ( $GAP_{CPLEX}$ ), o  $GAP_{RL}$  da relaxação linear, que

foi calculado pela equação  $GAP_{RL}(\%) = ((best_{ub} - RL_{FLK})/best_{ub})100$ , onde  $RL_{FLK}$  representa o valor da relaxação linear da formulação, e  $best_{ub}$  é a melhor solução viável encontrada pelo *CPLEX* ou por alguma das heurísticas apresentadas. A tabela também apresenta os resultados obtidos através da aplicação da DWD para o modelo FLK, o  $GAP_{DWD-PGA}$  foi calculado de forma análoga ao da relaxação linear, porém substituindo os valores de  $RL_{FLK}$  pela solução apresentada pelo algoritmo de geração de colunas. É demonstrado na tabela também o número de iterações, e o tempo levado para a obtenção do limite inferior.

Por meio da análise dos resultados para o grupo I presentes na tabela 4.3, observamos a dificuldade do resolvidor encontrar boas soluções para as instâncias testadas. Dos 24 testes realizados para esse grupo, 4 não apresentaram solução viável após o limite de tempo estipulado. Apesar da relaxação linear ter sido obtida em um tempo muito próximo de nulo, os resultados encontrados apresentaram um  $GAP_{RL}$  elevado, com média de 69,52%, sendo que em 8 instâncias ultrapassou 75%.

As linhas em negrito presentes na tabela representam as instâncias nas quais as melhores soluções foram encontradas encontradas pela heurística PGA III, as demais indicam os casos onde houve um empate entre as três heurísticas. O conjunto  $O$  (alternativas de frequência de movimentações) foi estipulado com tamanho 10, de forma a não aumentar muito a complexidade do modelo utilizado na heurística PGA III.

Apesar de não ter obtido melhores soluções que a heurística PGA III, a PGA II também se mostrou eficiente para o tratamento das instâncias deste grupo. Dos 24 testes realizados, em 15 oportunidades a solução encontrada pela heurística foi a mesma da encontrada pela PGA III, inclusive nos 6 casos onde foi provada a otimalidade.

Em relação aos resultados encontrados pelo algoritmo de geração de colunas para esse grupo, podemos considerá-los promissores, pois apresentaram limites inferiores consideravelmente melhores que os da relaxação linear. O  $GAP_{DWD-PGA}$  médio foi de 0,03%, e o tempo médio de execução do algoritmo foi de aproximadamente 2 segundos, sendo que em 6 dos testes o  $GAP_{DWD-PGA}$  foi nulo, provando a otimalidade dessas instâncias.

Tabela 4.3: Resultados encontrados para o modelo FLK para o grupo I

Instâncias	$GAP_{Cplex}(\%)$	$GAP_{RL}(\%)$	$Tempo_{PGA}(s)$	$GAP_{DWD-PGA}(\%)$	$It$	$Tempo(s)$
<i>btest191b111</i>	20,98	<b>75,72</b>	0,20	<b>0,0073</b>	9	1
<i>btest191b112</i>	8,76	<b>79,43</b>	0,32	<b>0,0000</b>	10	0
<i>btest191b113</i>	87,89	<b>79,61</b>	0,12	<b>0,0134</b>	19	3
<i>btest191b121</i>	*	<b>61,56</b>	0,11	<b>0,0155</b>	20	2
<i>btest191b122</i>	37,62	<b>63,78</b>	0,10	<b>0,0000</b>	16	2
<i>btest191b123</i>	23,03	<b>65,54</b>	0,07	<b>0,0037</b>	30	4
<i>btest191b211</i>	*	<b>73,21</b>	0,31	<b>0,1843</b>	53	9
<i>btest191b212</i>	17,04	<b>79,72</b>	0,40	<b>0,0035</b>	10	1
<i>btest191b213</i>	24,72	<b>79,88</b>	0,18	<b>0,0070</b>	21	2
<i>btest191b221</i>	8,36	<b>62,79</b>	0,09	<b>0,0942</b>	35	5
<i>btest191b222</i>	11,46	<b>64,47</b>	0,10	<b>0,0004</b>	16	1
<i>btest191b223</i>	33,53	<b>65,91</b>	0,07	<b>0,0072</b>	27	4
<i>test191 – 111</i>	14,37	78,99	0,08	0,0000	1	0
<i>test191 – 112</i>	7,35	<b>74,16</b>	0,08	<b>0,0062</b>	18	2
<i>test191 – 113</i>	21,95	<b>68,27</b>	0,23	<b>0,0851</b>	22	3
<i>test191 – 121</i>	12,68	61,02	0,08	0,0000	1	0
<i>test191 – 122</i>	8,98	<b>61,14</b>	0,08	<b>0,0068</b>	11	1
<i>test191 – 123</i>	*	<b>61,98</b>	0,10	<b>0,0150</b>	21	1
<i>test191 – 211</i>	25,13	79,15	0,08	0,0000	1	0
<i>test191 – 212</i>	19,72	<b>75,36</b>	0,36	<b>0,0028</b>	8	1
<i>test191 – 213</i>	*	<b>69,72</b>	0,19	<b>0,0500</b>	16	1
<i>test191 – 221</i>	4,28	<b>62,02</b>	0,34	<b>0,0000</b>	1	0
<i>test191 – 222</i>	45,72	<b>62,13</b>	0,14	<b>0,0072</b>	13	2
<i>test191 – 223</i>	5,78	<b>62,90</b>	0,09	<b>0,0906</b>	23	3

A tabela 4.4 apresenta os resultados encontrados para o grupo II, a dificuldade para encontrar soluções viáveis para esse grupo foi ainda maior. Dos 24 testes feitos, em 7 oportunidades o resolvidor não encontrou solução viável, e o  $GAP_{Cplex}$  encontrado após o tempo estipulado teve média de 12,93% (para as instâncias que encontraram solução). As linhas em negrito da tabela representam as instâncias nas quais a melhor solução foi encontrada pela heurística PGA III, as demais linhas indicam que houve um empate entre as heurísticas PGA II e PGA III.

A dificuldade de resolução também pode ser observada através dos resultados apresentados pela relaxação linear, apesar de ter sido obtida em um tempo muito próximo de zero. A média do  $GAP_{RL}$  foi de aproximadamente 34,27% para as 24 instâncias em análise.

Os resultados para a geração de colunas também se mostraram promissores para esse grupo, porém o tempo de resolução foi um pouco maior quando comparado ao grupo I de instâncias. O tempo médio de execução do algoritmo de geração de colunas foi de 9,62 segundos, com uma média de aproximadamente 46 iterações.

A qualidade dos limites inferiores encontrados podem ser considerados satisfatórios, o  $GAP_{DWD-PGA}$  médio utilizando a heurística PGA III como limite superior foi de 0,92%, para as 24 instâncias desse grupo, sendo que em 15 dos testes foi inferior a 1%. Além

disso, foi possível provar a otimalidade de duas instâncias através das heurísticas PGA II e PGA III.

A heurística PGA II se mostrou eficiente para a resolução de algumas instâncias desse grupo, entretanto apresentou uma limitação para resolver alguns dos testes. O fato dessa heurística pressupor somente uma possibilidade de frequência de movimentação, faz com que ela não consiga encontrar soluções viáveis para todos os testes realizados, principalmente em casos onde o limite de embalagens disponíveis é menor. Dos 24 testes feitos, em 10 oportunidades o modelo utilizado na heurística não foi capaz de encontrar soluções viáveis. Porém, a heurística se mostrou eficiente para as instâncias em que conseguiu encontrar soluções, o  $GAP_{DWD-PGA}$  médio foi de 1,43%, e o tempo médio para obter a solução foi de 0,06 segundos.

A motivação para a proposição da heurística PGA III foi a limitação observada pela PGA II. A heurística PGA III foi capaz de encontrar boas soluções para todo o conjunto de instâncias em um tempo considerado satisfatório. Assim como para o grupo I, o tamanho do conjunto  $O$  (alternativas de frequência de movimentações) foi estipulado com tamanho 10. O  $GAP_{DWD-PGA}$  médio foi de 0,92%, e a média do tempo de obtenção da solução foi de 0,90 segundos.

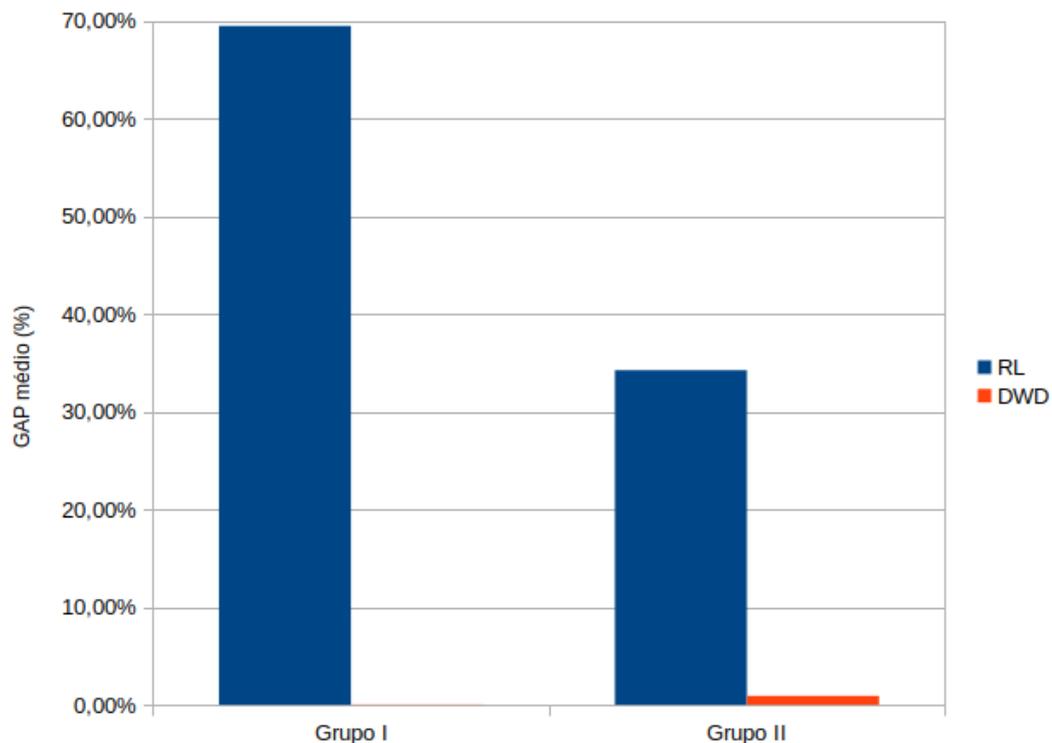
Tabela 4.4: Resultados encontrados para o modelo FLK para o grupo II

Instâncias	$GAP_{Cplex}(\%)$	$GAP_{RL}(\%)$	$Tempo_{PGA}(s)$	$GAP_{DWD-PGA}(\%)$	$It$	$Tempo(s)$
<i>btest191b111</i>	*	<b>44,00</b>	0,69	<b>2,6352</b>	62	11
<i>btest191b112</i>	26,42	45,52	0,30	0,5347	14	1
<i>btest191b113</i>	26,14	46,94	0,03	0,0000	1	0
<i>btest191b121</i>	*	<b>23,94</b>	1,54	<b>1,1930</b>	88	21
<i>btest191b122</i>	4,42	27,38	0,04	0,0033	20	3
<i>btest191b123</i>	10,50	<b>28,90</b>	0,03	<b>0,0314</b>	28	4
<i>btest191b211</i>	*	<b>42,44</b>	0,83	<b>2,8625</b>	75	15
<i>btest191b212</i>	10,14	<b>44,15</b>	0,14	<b>0,2892</b>	14	2
<i>btest191b213</i>	21,39	45,68	0,03	0,0000	1	0
<i>btest191b221</i>	7,41	<b>23,95</b>	2,65	<b>1,6326</b>	96	23
<i>btest191b222</i>	5,41	27,06	0,03	0,0002	18	2
<i>btest191b223</i>	5,91	<b>28,31</b>	0,16	<b>0,0287</b>	31	4
<i>test191 – 111</i>	15,56	<b>45,11</b>	0,16	<b>0,3379</b>	24	3
<i>test191 – 112</i>	14,06	<b>43,28</b>	0,27	<b>1,0890</b>	34	5
<i>test191 – 113</i>	*	<b>36,07</b>	0,95	<b>3,0071</b>	110	35
<i>test191 – 121</i>	7,37	<b>24,18</b>	0,14	<b>0,0131</b>	29	4
<i>test191 – 122</i>	9,60	<b>25,61</b>	0,44	<b>0,4940</b>	65	13
<i>test191 – 123</i>	*	<b>24,10</b>	6,86	<b>1,7370</b>	88	22
<i>test191 – 211</i>	23,82	<b>44,12</b>	0,30	<b>0,3591</b>	22	3
<i>test191 – 212</i>	20,79	<b>42,78</b>	0,28	<b>0,8227</b>	30	3
<i>test191 – 213</i>	*	<b>35,71</b>	1,34	<b>2,8304</b>	94	23
<i>test191 – 221</i>	6,93	<b>24,05</b>	0,35	<b>0,0030</b>	22	3
<i>test191 – 222</i>	4,01	<b>25,01</b>	0,46	<b>0,2978</b>	59	11
<i>test191 – 223</i>	*	<b>24,24</b>	3,14	<b>1.8321</b>	87	20

Foram realizados também testes resolvendo os subproblemas da decomposição *Dantzig-Wolfe* através do resolvidor *CPLEX*, com o objetivo de comparar com o tempo levado pelo algoritmo 1 para chegar na mesma solução. Enquanto o *CPLEX* levou aproximadamente 324 segundos (em média) para encontrar o melhor limite inferior para as instâncias do grupo II, o algoritmo 1 precisou de 9,62 segundos. Uma situação semelhante acontece para o grupo I, em que o resolvidor levou 88 segundos (em média) para resolver as instâncias, enquanto o algoritmo proposto obteve um tempo médio de resolução próximo de 2 segundos.

A figura 4.1 apresenta uma comparação da qualidade dos limites inferiores encontrados por meio da relaxação linear e pela decomposição *Dantzig-Wolfe*. Por meio de sua análise, fica em evidência a qualidade das soluções encontradas pela geração de colunas para todo o conjunto de instâncias. Para o grupo I, o  $GAP_{DWD-PGA}$  médio foi tão próximo de zero (0,03%) que prejudicou a visualização no gráfico.

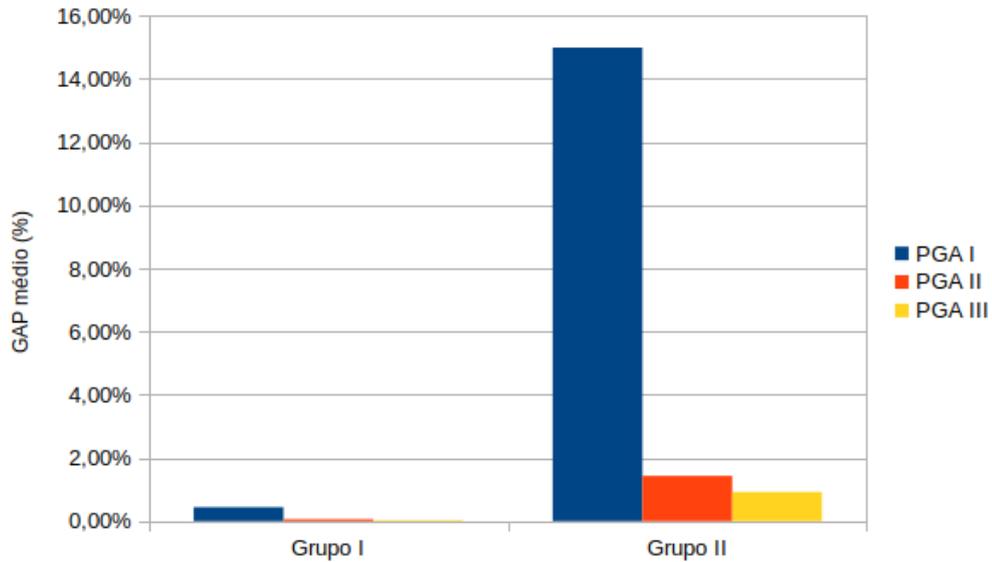
Figura 4.1: Comparação da qualidade dos limites inferiores obtidos para o modelo FLK



A figura 4.2 apresenta uma comparação da qualidade das soluções encontradas pelas heurísticas propostas para todo o conjunto de instâncias. Para o grupo I, as três se mostraram eficientes, porém a PGA III conseguiu se aproximar mais da otimalidade.

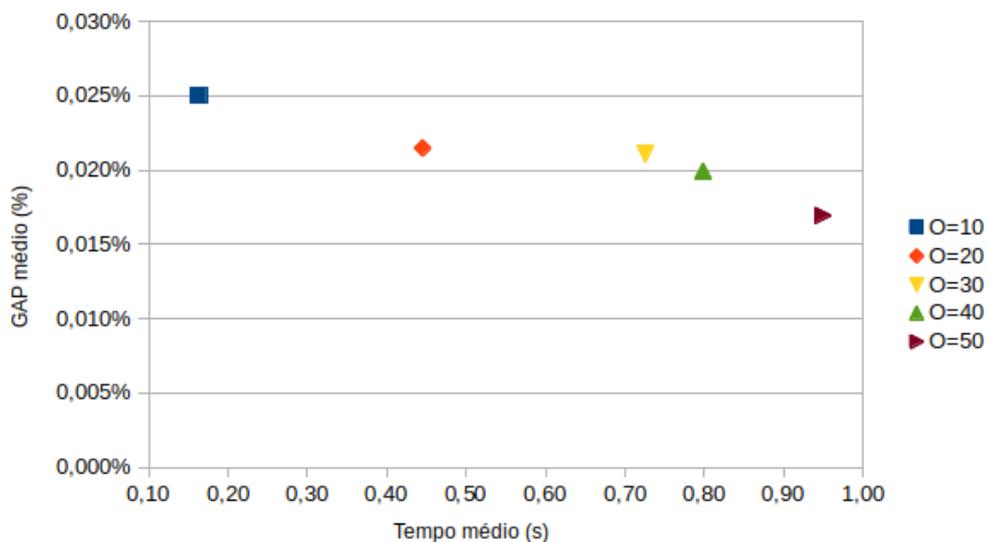
Em relação ao grupo II, a heurística PGA I não apresentou resultados tão bons, pois desconsiderou a variação dos custos de movimentação e buscou somente minimizar os estoques. A PGA II encontrou boas soluções, porém não conseguiu encontrar soluções viáveis para todas as instâncias, e a PGA III se mostrou mais eficiente, pois conseguiu boas soluções para todas as instâncias em um intervalo de tempo muito curto.

Figura 4.2: Comparação da qualidade das soluções apresentadas pelas heurísticas



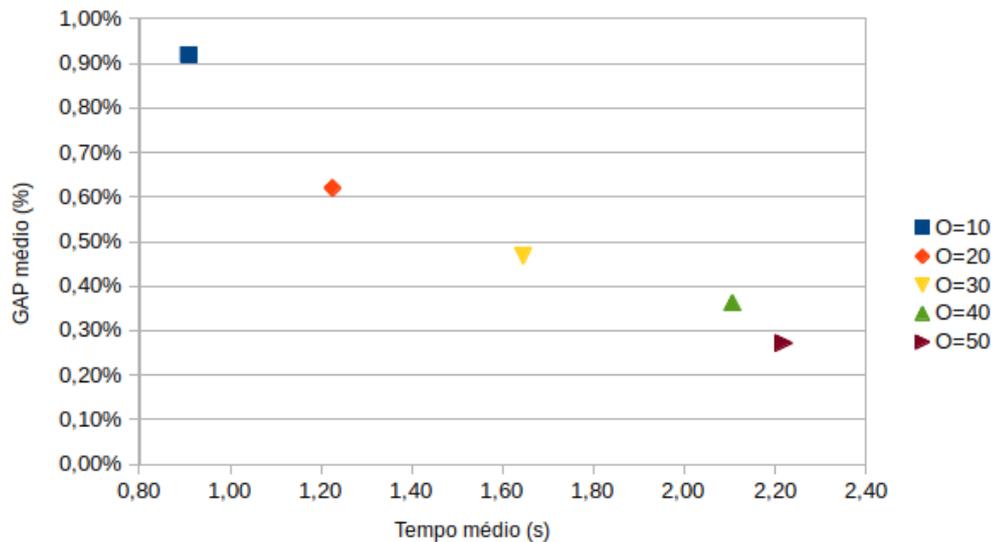
Foram realizados testes também variando o número de frequências geradas pelo algoritmo 4, com o objetivo de analisar o *trade-off* entre a qualidade das soluções encontradas pela heurística PGA III e o tempo de obtenção dessas soluções. O tamanho do conjunto  $O$  (utilizado na PGA III) foi definido em um intervalo de 10 a 50 frequências.

A figura 4.3 apresenta os ganhos obtidos com o aumento do conjunto  $O$  para o grupo I de instâncias. Através da análise do gráfico, podemos observar que a medida em que o número de frequências aumenta, a qualidade das soluções encontradas pela heurística melhora e o tempo de execução cresce. Porém, o aumento do tempo e a melhora da qualidade das soluções podem ser considerados pequenos. A diferença entre o GAP médio (utilizando o limite inferior da DWD) das frequências 10 e 50 foi de 0,0081%, e o aumento do tempo médio para a obtenção da solução foi inferior a 1 segundo, demonstrando que é possível encontrar boas soluções para esse grupo em um intervalo de tempo pequeno.

Figura 4.3: Resultados de PGA III com o aumento do conjunto  $O$  para o grupo I

Os resultados encontrados com a variação do conjunto  $O$  para o grupo II de instâncias podem ser analisados através da figura 4.4. Assim como para o grupo I, a qualidade das soluções melhoraram a medida que a quantidade de frequências geradas pelo algoritmo cresceu. O GAP médio para 50 frequências foi de 0,27%, enquanto que para 10 frequências foi 0,92%, demonstrando que o maior número de possibilidades de frequências de movimentações das embalagens permite uma melhora considerável nas soluções encontradas para esse grupo. Além disso, não houve um crescimento significativo nos tempos de execução, o tempo médio para 50 frequências foi de 2,22 segundos.

Figura 4.4: Resultados de PGA III com o aumento do conjunto  $O$  para o grupo II



A tabela 4.5 apresenta os resultados gerados pela heurística PGA III para todo o grupo de instâncias, com 50 frequências sendo geradas pelo algoritmo 4 ( $O = 50$ ). Através da análise dos resultados, fica em evidência que o  $GAP_{DWD-PGA}$  melhorou para todos os testes, quando comparados com os resultados nos quais 10 frequências foram geradas. Além disso, não houve um aumento considerado relevante nos tempos de execução, o que mostra a eficiência dos resultados apresentados pela heurística PGA III.

Tabela 4.5: Resultados encontrados para a heurística PGA III:  $O = 50$ 

Instâncias	<i>Grupo I</i>		<i>Grupo II</i>	
	$GAP_{DWD-PGA}(\%)$	$Tempo_{PGA}(s)$	$GAP_{DWD-PGA}(\%)$	$Tempo_{PGA}(s)$
<i>btest191b111</i>	0,0073	0,29	0,5758	0,88
<i>btest191b112</i>	0,0000	0,90	0,0933	0,56
<i>btest191b113</i>	0,0134	0,34	0,0000	0,24
<i>btest191b121</i>	0,0156	1,25	0,5258	6,63
<i>btest191b122</i>	0,0000	0,86	0,0030	0,37
<i>btest191b123</i>	0,0037	0,60	0,0087	0,30
<i>btest191b211</i>	0,0985	1,90	0,7004	3,96
<i>btest191b212</i>	0,0035	1,05	0,0912	0,48
<i>btest191b213</i>	0,0070	0,27	0,0000	0,24
<i>btest191b221</i>	0,0418	2,12	0,7446	3,23
<i>btest191b222</i>	0,0004	1,07	0,0002	0,34
<i>btest191b223</i>	0,0059	0,77	0,0043	0,34
<i>test191 – 111</i>	0,0000	0,83	0,1566	0,72
<i>test191 – 112</i>	0,0062	0,95	0,2376	0,51
<i>test191 – 113</i>	0,0851	1,42	0,7283	4,18
<i>test191 – 121</i>	0,0000	0,47	0,0046	0,38
<i>test191 – 122</i>	0,0068	0,84	0,1833	1,33
<i>test191 – 123</i>	0,0150	0,81	0,9040	16,37
<i>test191 – 211</i>	0,0000	0,84	0,1144	0,46
<i>test191 – 212</i>	0,0028	0,40	0,2329	0,53
<i>test191 – 213</i>	0,0500	1,72	0,3605	3,38
<i>test191 – 221</i>	0,0000	0,79	0,0030	0,32
<i>test191 – 222</i>	0,0040	0,75	0,0696	0,91
<i>test191 – 223</i>	0,0394	1,54	0,7931	6,60

# Capítulo 5

## Considerações finais

### 5.1 Conclusões

Neste trabalho, foi apresentado um estudo em um modelo matemático de abastecimento centralizado de postos de trabalho, objetivando minimizar os custos relacionados com a movimentação das peças e também os custos com estoque ao lado dos postos. Foi apresentada uma formulação sanando algumas deficiências identificadas no modelo proposto por de Souza et al. (2008), e foi aplicada a decomposição *Dantzig-Wolfe* objetivando encontrar limites inferiores melhores para esta formulação. Além disso, foram propostas heurísticas para encontrar boas soluções em um intervalo de tempo satisfatório.

A aplicação da decomposição *Dantzig-Wolfe* na formulação FLK gerou bons limites inferiores em um intervalo de tempo considerado pequeno, quando comparados aos limites apresentados pela relaxação linear, ou pelo *CPLEX* após o limite de tempo definido. O algoritmo apresentado para a resolução dos subproblemas proporcionou um ganho computacional muito grande na obtenção dos limites inferiores, sem prejudicar a qualidade dos mesmos.

Os resultados obtidos por meio das heurísticas propostas podem ser considerados promissores. Para o grupo I, as três heurísticas se mostraram eficientes para a resolução dos 24 testes realizados, principalmente a PGA II e PGA III, que obtiveram a otimalidade para 6 instâncias em um intervalo de tempo muito pequeno. Mesmo para os casos onde a otimalidade não foi comprovada, o  $GAP_{DWD-PGA}$  médio foi de 0,02%, demonstrando que as soluções viáveis encontradas pela heurística PGA III, e os limites inferiores obtidos pelo algoritmo de geração de colunas se aproximaram muito da otimalidade das instâncias.

Para o grupo II de instâncias houve uma maior dificuldade para as heurísticas encontrarem boas soluções, quando comparadas ao grupo I. A heurística PGA II não obteve soluções para todas as instâncias, isso aconteceu por conta da sua inflexibilidade na definição da frequência de movimentações sugerida como parâmetro no modelo utilizado pela heurística. Apesar dessa limitação, a heurística obteve soluções boas para as instâncias nas quais ela conseguiu tratar, com um  $GAP_{DWD-PGA}$  médio de 1,43%.

A utilização da heurística PGA III para as instâncias do grupo II apresentou bons resultados para todos os testes realizados. O  $GAP_{DWD-PGA}$  médio encontrado foi de 0,92%, sendo que para duas instâncias a otimalidade foi comprovada. Além disso, após o aumento das alternativas de frequências de movimentações, o  $GAP_{DWD-PGA}$  médio foi de 0,27%, se

aproximando ainda mais da otimalidade das instâncias. Demonstrando assim, a qualidade dos limites inferiores alcançados pela geração de colunas e também das soluções apresentadas pela heurística para esse grupo.

Por meio da comparação dos resultados obtidos neste estudo com os encontrados anteriormente pela literatura, concluímos que para o grupo I de instâncias foi possível encontrar melhores soluções para todos os testes. Para o grupo II, a comparação ficou prejudicada por conta da deficiência encontrada no modelo original.

## 5.2 Trabalhos futuros

Como proposta para trabalhos futuros, fica a possibilidade de aprimorar a geração de colunas, buscando melhorar ainda mais os resultados encontrados. Uma outra proposta é a aplicação da técnica de *Branch-and-price*, que é um método para tratar problemas de grande porte, e se caracteriza por ser uma junção da geração de colunas com o *Branch-and-bound*, visando encontrar soluções viáveis para o conjunto de instâncias presentes na análise. Para que posteriormente seja feita uma comparação dos resultados encontrados com as heurísticas propostas neste estudo.

Uma outra possibilidade é abranger a formulação proposta para situações onde o parâmetro  $r_{ik}$  (*lead time*) seja diferente de um, e com isso atender a uma maior variedade de situações práticas para o problema em análise.

# Referências Bibliográficas

- D. Battini, M. Faccio, A. Persona, e F. Sgarbossa. Framework to optimise the inventory centralisation/decentralisation degree and feeding policy in assembly systems. *International Journal of Services and Operations Management*, 6(2):184–205, 2009.
- D. Battini, M. Faccio, A. Persona, e F. Sgarbossa. “supermarket warehouses”: stocking policies optimization in an assembly-to-order environment. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 50(5):775–788, 2010.
- D. Battini, N. Boysen, e S. Emde. Just-in-time supermarkets for part supply in the automobile industry. *Journal of Management Control*, 24(2):209–217, 2013.
- G. R. Bitran e L. Chang. A mathematical programming approach to a deterministic kanban system. *Management Science*, 33(4):427–441, 1987.
- N. Boysen, S. Emde, M. Hoeck, e M. Kauderer. Part logistics in the automotive industry: Decision problems, literature review and research agenda. *European Journal of Operational Research*, 242(1):107–120, 2015.
- A. C. Caputo, P. M. Pelagagge, e P. Salini. Planning models for continuous supply of parts in assembly systems. *Assembly Automation*, 35(1):35–46, 2015.
- B. Costa, L. S. Dias, J. A. Oliveira, e G. Pereira. Simulation as a tool for planning a material delivery system to manufacturing lines. In *Engineering Management Conference, 2008. IEMC Europe 2008. IEEE International*, pages 1–5. IEEE, 2008.
- A. S. da Cunha e M. C. de Souza. Stronger upper and lower bounds for a hard batching problem to feed assembly lines. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 30:159–164, 2008.
- G. B. Dantzig e P. Wolfe. The decomposition algorithm for linear programs. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 767–778, 1961.
- M. C. de Souza, C. R. de Carvalho, e W. B. Brizon. Packing items to feed assembly lines. *European Journal of Operational Research*, 184(2):480–489, 2008.
- G. El Khayat, A. Langevin, e D. Riopel. Integrated production and material handling scheduling using mathematical programming and constraint programming. *European Journal of Operational Research*, 175(3):1818–1832, 2006.
- S. Emde e N. Boysen. Optimally locating in-house logistics areas to facilitate jit-supply of mixed-model assembly lines. *International Journal of Production Economics*, 135(1):393–402, 2012.

- M. Faccio, M. Gamberi, e A. Persona. Kanban number optimisation in a supermarket warehouse feeding a mixed-model assembly system. *International Journal of Production Research*, 51(10):2997–3017, 2013.
- P. Fattahi, A. Roshani, e A. Roshani. A mathematical model and ant colony algorithm for multi-manned assembly line balancing problem. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 53(1):363–378, 2011.
- D. J. Fonseca, G. Uppal, e T. J. Greene. A knowledge-based system for conveyor equipment selection. *Expert systems with applications*, 26(4):615–623, 2004.
- H. S. Kilic e M. B. Durmusoglu. A mathematical model and a heuristic approach for periodic material delivery in lean production environment. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 69(5-8):977–992, 2013.
- H. S. Kilic e M. B. Durmusoglu. Advances in assembly line parts feeding policies: a literature review. *Assembly Automation*, 35(1):57–68, 2015.
- L. J. Krajewski e L. P. Ritzman. *Operations management: strategy and analysis*. Addison-Wesley, 1993.
- R. K. Martin. *Large scale linear and integer optimization: a unified approach*. Springer Science & Business Media, 2012.
- A. A. A. Mendonça. *Modelos e técnicas de local branching para o problema de abastecimento de linhas de montagem*. PhD thesis, Dissertação de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2011.
- S. H. L. Mirhosseini e P. Webb. A hybrid fuzzy knowledge-based expert system and genetic algorithm for efficient selection and assignment of material handling equipment. *Expert Systems with Applications*, 36(9):11875–11887, 2009.
- C. M. O. Pimentel, F. P. e. Alvelos, e J. M. Valério de Carvalho. Comparing dantzig-wolfe decompositions and branch-and-price algorithms for the multi-item capacitated lot sizing problem. *Optimization Methods & Software*, 25(2):299–319, 2010.
- G. Tuzkaya, B. Gülsün, C. Kahraman, e D. Özgen. An integrated fuzzy multi-criteria decision making methodology for material handling equipment selection problem and an application. *Expert systems with applications*, 37(4):2853–2863, 2010.
- F. Vanderbeck. On dantzig-wolfe decomposition in integer programming and ways to perform branching in a branch-and-price algorithm. *Operations Research*, 48(1):111–128, 2000.