

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

**Estudo do Efeito das Deformações Devidas ao  
Esforço Cortante no Cálculo de Vigas de  
Concreto Armado**

Monografia

Laudiney Guedes Martins Soares

Julho de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

**Estudo do Efeito das Deformações Devidas ao Esforço  
Cortante no Cálculo de Vigas de Concreto Armado**

Laudiney Guedes Martins Soares

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Especialista em Engenharia de Estruturas".

---

Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula  
DEES/UFMG - (Orientador)

---

Prof. Dr. Armando César Campos Lavall  
DEES/UFMG

Belo Horizonte, Julho de 2017

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por me dar força e sabedoria para enfrentar desafios cada vez maiores.

Um muito obrigado em especial ao meu orientador, o Professor Dr. Fernando Amorim de Paula, pela paciência, sabedoria e dedicação em me ensinar.

À minha esposa e companheira Livia Maria Guimarães Soares por me apoiar em todos os momentos da minha vida.

À minha mãe Geralda de Fátima Guedes Soares, por me mostrar o melhor caminho a seguir sempre.

Ao meu pai Geraldo Martins Soares, que me ensinou muitas coisas, dentre elas uma em especial, a ser homem.

Aos meus irmãos Reginaldo e Marcília por me amarem e serem além de irmãos, amigos incondicionais.

Aos meus sobrinhos e sobrinhas e aos meus amigos por me alegrarem e me apoiarem em momentos difíceis.

Aos professores, colegas e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas pelos bons momentos passados juntos.

## RESUMO

Neste trabalho é apresentado um estudo comparativo dos valores de deslocamentos máximos em vigas obtidos a partir de metodologias nas quais se considera ou não os efeitos dos esforços de cisalhamento combinados aos efeitos dos esforços de flexão. Visto que é comum que estes efeitos sejam desconsiderados nos dimensionamentos estruturais, o presente estudo é proposto com a intenção de ressaltar a importância da consideração do cisalhamento nos cálculos de deslocamentos para que se obtenha resultados que representem o comportamento real da estrutura, evitando que as verificações do Estado Limite de Serviço da estrutura sejam comprometidas pela imprecisão dos resultados. Para esta análise, são realizados os cálculos das deflexões de vigas de concreto armado de larguras e comprimentos iguais e diferentes alturas pelo Método de Elementos Finitos através de processos manuais e por meio de programa computacional. Os cálculos são desenvolvidos através da composição da matriz de rigidez de elementos de viga unidimensionais, onde, para os casos em que se propõe a consideração dos efeitos do cisalhamento combinados aos da flexão, é incorporado um fator para a correção do valor do deslocamento máximo e a obtenção do respectivo acréscimo. Ao final dessa análise, os valores obtidos dos diferentes métodos são comparados para que sejam apresentadas as diferenças para cada uma das vigas analisadas.

**Palavras-chave:** Linha elástica; deslocamentos em vigas; cisalhamento; módulo de elasticidade.

## **ABSTRACT**

The present is a comparative study of the values of maximum displacements in beams obtained from methodologies in which the effects of the shear stresses combined or not with the effects of the flexion strains. As it is common for these effects to be disregarded in structural design, the present study is proposed with the intention of emphasizing the importance of considering the shear in displacement calculations to obtain results that represent the actual behavior of the structure, avoiding that the checks of the structure's service limit state are impaired by the inaccuracy of the results. For this analysis, the calculations of the deflections of reinforced concrete beams of equal widths and lengths and different heights by the Finite Element Method are carried out through manual processes and by means of a computational program. The calculations are developed through the composition of the stiffness matrix of one-dimensional beam elements, where, in cases where it is proposed to consider the effects of shear combined with those of flexion, a factor is incorporated for the correction of the maximum displacement value and the respective increase. At the end of this analysis, the values obtained from the different methods are compared, and the differences for each of the analyzed beams are presented.

**Key words:** elastic line; displacement in beams; shear; modulus of elasticity.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>8</b>
<b>LISTA DE GRÁFICOS .....</b>	<b>10</b>
<b>LETRAS LATINAS.....</b>	<b>11</b>
<b>LETRAS GREGAS .....</b>	<b>13</b>
<b>SIGLAS .....</b>	<b>14</b>
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>15</b>
1.1 <i>Generalidades.....</i>	15
1.2 <i>Justificativas .....</i>	15
<b>2 OBJETIVO .....</b>	<b>17</b>
<b>3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>18</b>
3.1 <i>Livros Específicos.....</i>	18
<b>4 TEORIA DE FLEXÃO NORMAL SIMPLES, CISALHAMENTO, MÓDULO DE ELASTICIDADE E DEFLEXÕES EM VIGAS .....</b>	<b>19</b>
4.1 <i>Flexão Normal Simples.....</i>	19
4.2 <i>Cisalhamento .....</i>	20
4.3 <i>Módulo de Elasticidade .....</i>	21
4.4 <i>Deflexões Em Vigas .....</i>	22
<b>5 ANÁLISE DA DEFORMAÇÃO PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS .....</b>	<b>26</b>
5.1 <i>Montagem da Matriz de Rigidez Com Apenas Rigidez à Flexão .....</i>	26
5.2 <i>Matriz de Rigidez Incluindo Efeitos de Deformação Por Cisalhamento (ALVES FILHO, 2012) .....</i>	28
5.3 <i>Matriz de Rigidez Incluindo Efeitos de Deformação Por Cisalhamento (VASCONCELLOS FILHO, 1986) .....</i>	29
<b>6 APLICAÇÃO DAS DIFERENTES MATRIZES DE RIGIDEZ EM UMA VIGA DE CONCRETO ARMADO .....</b>	<b>31</b>
6.1 <i>Dados Para o Dimensionamento das Vigas de Concreto Armado.....</i>	31
6.2 <i>Cálculo das Deformações Para Viga 01 (20x50cm) .....</i>	33
6.2.1 <i>Análise dos deslocamentos sem efeitos de cisalhamento (método manual) .....</i>	33
6.2.2 <i>Análise dos deslocamentos sem efeitos de cisalhamento (utilizando programa computacional) .....</i>	36
6.2.3 <i>Análise dos deslocamentos com efeitos de cisalhamento (método manual – ALVES FILHO, 2012) .....</i>	37
6.2.4 <i>Análise dos deslocamentos com efeitos de cisalhamento (método manual – VASCONCELLOS FILHO, 1986) .....</i>	40

6.2.5	Análise dos deslocamentos com efeitos de cisalhamento (utilizando programa computacional) .....	42
6.3	<i>Cálculo das Deformações Para Vigas 03 (20x75cm), 04 (20x100cm) e 05 (20x200cm)</i> .....	44
<b>7</b>	<b>ANÁLISE DOS RESULTADOS</b> .....	<b>45</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES</b> .....	<b>46</b>
<b>9</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	<b>47</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1 – Distribuição de tensões para uma viga submetida à compressão normal simples	19
Figura 4.2 – Resultante de tensões de cisalhamento .....	20
Figura 4.3 – Efeito do cisalhamento longitudinal em viga composta de placas soltas.....	20
Figura 4.4 - (a) Esquema de deformação de viga em balanço; (b) Diagrama de corpo livre de um trecho da viga .....	24
Figura 5.1 – Elemento de viga com sentido positivo dos esforços e deslocamentos .....	27
Figura 5.2 – Efeito do cisalhamento na deflexão de viga.....	28
Figura 6.1 – Viga bi-engastada sob carga distribuída .....	31
Figura 6.2 – Croqui da estrutura.....	33
Figura 6.3 – Carregamento na barra .....	33
Figura 6.4 – Componentes de força em cada nos nós da barra discretizada .....	33
Figura 6.5 – Componentes de deslocamentos nos nós da barra discretizada .....	34
Figura 6.6 – Elemento da viga com componentes de deslocamento (graus de liberdade) .....	34
Figura 6.7 – Fatores de modificação dos parâmetros de rigidez da seção da viga.....	36
Figura 6.8 – Componentes de força em cada nos nós da barra discretizada. ....	36
Figura 6.9 – Carregamento na barra .....	37
Figura 6.10 – Linha elástica e indicação do deslocamento máximo .....	37
Figura 6.11 – Elemento da viga com componentes de deslocamento (graus de liberdade) .....	38
Figura 6.12 – Elemento da viga com componentes de deslocamento (graus de liberdade) .....	40
Figura 6.12 – Fatores de modificação dos parâmetros de rigidez da seção da viga.....	43
Figura 6.13 – Linha elástica e indicação do deslocamento máximo .....	43



**LISTA DE TABELAS**

Tabela 6.1 – Valores dos deslocamentos máximos nas diversas seções de vigas. ....	44
Tabela 7.1 – Comparação dos resultados e percentual do acréscimo de deslocamento. ....	45

**LISTA DE GRÁFICOS**

Grafico 7.1 – Quantidade de vezes que o deslocamento por cisalhamento + flexão supera o deslocamento apenas por flexão.....	45
---	----

**LETRAS LATINAS**

$dy / dx$	primeira derivada da função $y(x)$	
$d^2 y / dx^2$	segunda derivada da função $y(x)$	
$d^3 y / dx^3$	terceira derivada da função $y(x)$	
$C$	Constante	
$F$	força	N
$M$	momento fletor	Nm
$V$	força cortante	N
$E$	módulo de elasticidade longitudinal	Pa
$E_{ci}$	módulo de deformação tangente inicial do concreto	Pa
$E_{cs}$	módulo de deformação secante do concreto	Pa
$f_{ck}$	resistência característica à compressão do concreto	Pa
$G$	módulo de elasticidade transversal do concreto	Pa
$I$	momento de inércia	$m^4$
$A$	Área da seção transversal	$m^2$
$P$	carregamento concentrado	N
$q$	carregamento uniformemente distribuído	N/m
$K$	coeficiente de rigidez	
$x$	coordenada na direção do eixo da viga	m
$y$	eixo perpendicular ao eixo da viga	
$y_0$	deslocamento na direção do eixo $y$	m
$d$	deslocamento	m
$\ell$	comprimento do elemento de viga	m
$b$	parâmetro de rigidez	

$g$	fator de correção	
$f$	fator geométrico	
$L$	comprimento da viga	m

**LETRAS GREGAS**

$\Theta$	deslocamento angular da viga	rad
$\sigma$	tensão	Pa
$\varepsilon$	deformação	m
$\alpha_E$	parâmetro em função da natureza do agregado que influencia o módulo de elasticidade	
$\Phi$	fator de correção	

**SIGLAS**

LN

Linha neutra

MEF

Método de Elementos Finitos

# **1 INTRODUÇÃO**

## **1.1 Generalidades**

Nos projetos de estruturas de concreto armado, além do dimensionamento dos elementos estruturais visando garantir a segurança e economia da obra, deve-se preocupar também com a utilização da estrutura. As deformações devem ser tomadas como um fator importante de projeto, não apenas por questões estéticas, mas também por questões de funcionalidade da estrutura, especialmente em concepções de edifícios que valorizam grandes vãos. Estas deflexões são observadas desde a retirada dos escoramentos até dezenas de dias após a cura do concreto, conforme características específicas do material. Tanto as deformações lentas como as imediatas, quando excessivas, podem desencadear várias patologias como fissuras e rachaduras em elementos de vedação, danificar esquadrias e resultar em aspecto visual desconfortável para a edificação.

No intuito de utilizar de forma correta e com bom senso as ferramentas hoje disponíveis para a automatização dos dimensionamentos de estruturas, serão realizados cálculos com o emprego dos princípios teóricos da análise estrutural. Neste estudo, será utilizado um software que utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF) como ferramenta para obtenção dos resultados estruturais, permitindo comparar os valores das deformações induzidas apenas por flexão e deformações obtidas pela combinação dos efeitos de flexão e esforço cortante.

## **1.2 Justificativas**

Atualmente, diante das necessidades de melhoria da qualidade na engenharia de estruturas à fim de combater a incidência de patologias que podem comprometer a funcionalidade de edifícios e, ao mesmo tempo viabilizar uma racionalização da etapa de dimensionamento através da customização dos processos de confecção de projetos, se faz necessário que sejam estudados meios de proporcionar maior otimização nos procedimentos de cálculo para que o projeto a ser entregue se apresente como um produto capaz de viabilizar construções seguras, eficientes e comercialmente competitivas.

Observando alguns softwares para cálculo de estruturas de concreto armado comercializados no mercado nacional, nota-se que entre os dimensionamentos realizados por métodos manuais ou por planilhas e aqueles realizados a partir dos softwares mais consagrados é comum a incidência de divergência nos resultados das análises das deformações reais da estrutura. Este fato se deve ao desconhecimento, por parte de muitos profissionais, e da escassez de bibliografias que tratam do assunto.

O presente trabalho tem o intuito de apresentar alguns pontos a serem levados em conta na verificação quanto às deformações de uma estrutura de forma que se evidencie a possibilidade de melhoria na qualidade dos projetos através de considerações mais próximas da realidade das deformações sem abrir mão da produtividade. Desta forma, a alternativa que será apresentada durante este estudo prioriza a técnica e produtividade dentro de um escritório de cálculo.



## 2 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é mostrar as diferenças causadas pela consideração ou não do efeito do cisalhamento no cálculo de vigas de concreto armado. Ao final é feita uma comparação entre as deformações de diferentes seções de vigas de concreto armado considerando os efeitos do cisalhamento.

Os cálculos serão realizados por métodos manuais e também por meio de programa computacional – nesse caso, foi utilizado o SAP2000<sup>®</sup> versão 14.0.0. Serão levados em consideração os efeitos das deformações por flexão e a combinação de flexão e esforço cortante.

Como objeto da comparação proposta, serão realizados os dimensionamentos de quatro vigas de seções diferentes e mesmas condições similares. Após a análise, serão apresentadas tabelas com as diferenças de resultados obtidos das verificações com os diferentes métodos adotados no decorrer deste estudo para que se ressalte a importância da consideração correta para os dimensionamentos estruturais.

### **3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

#### **3.1 Livros Específicos**

Os métodos utilizados usualmente para verificação das deformações de vigas de concreto armado são procedimentos cujos resultados levam em conta apenas as deformações devidas à flexão. Poucos softwares consideram este tipo de efeito, mas ainda assim é necessário que o usuário modifique alguns parâmetros padrões do programa.

Vasconcellos Filho (1986) apresenta em uma de suas tabelas um fator de correção para o cisalhamento no qual leva em consideração os módulos de elasticidades longitudinal e transversal, a inércia e a área (sendo estas variáveis todas constantes). Para esta correção o autor refaz a matriz de rigidez alterando alguns termos e incrementando o esforço cortante nestes termos.

De acordo com Alves Filho (2007), ainda que normalmente as deflexões ocasionadas pelo cisalhamento sejam ignoradas, em alguns casos, a sua consideração torna-se importante. Pode-se observar que a deformação causada pelo cisalhamento se torna cada vez mais significativa quando verificada em vigas que apresentam o comprimento não muito maior que sua altura, sendo que a ordem de grandeza das deflexões por flexão e por cisalhamento podem ser iguais. Para tal consideração, se faz necessária a correção das deformações por meio de um fator constante chamado de coeficiente de cisalhamento.

Sendo assim, os cálculos para obtenção dos deslocamentos máximos que consideram apenas as deformações por flexão, resultam em valores inferiores aos reais devido à não contabilização da deformação por cisalhamento (ALVES FILHO, 2007).

## 4 TEORIA DE FLEXÃO NORMAL SIMPLES, CISALHAMENTO, MÓDULO DE ELASTICIDADE E DEFLEXÕES EM VIGAS

### 4.1 Flexão Normal Simples

As ações de carregamentos transversais aplicados em vigas geram ao longo da extensão do eixo forças internas de cisalhamento e momento fletor (HIBBELER, 2010).

Conforme Silva (2014), o momento fletor é o esforço preponderante quando se trata do dimensionamento estrutural de edifícios e, quando o eixo de solitação coincide com um dos principais eixos de inércia da seção transversal, a flexão denomina-se normal. Este efeito é também chamado de flexão normal simples caso não atue força normal em conjunto com o momento fletor.

Quando da atuação de um momento fletor sobre uma barra deformável, as tensões internas na seção podem ser verificadas como de compressão na região superior e de tração na região inferior da barra. De acordo com Beer e Johnston (1995), este efeito ocasiona a existência de uma superfície que intercepta a seção transversal através de uma reta chamada *linha neutra*, onde não há ocorrência tensões de compressão ou tração.

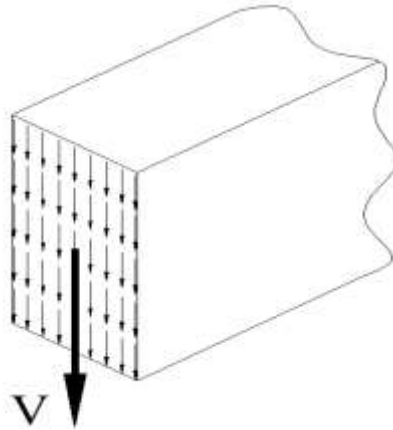


Figura 4.1 – Distribuição de tensões para uma viga submetida à compressão normal simples

Hibbeler (2010) observa que em vigas de concreto armado, existe a particularidade de que o concreto não é eficiente para resistir aos esforços de tração, visto que é muito suscetível à fratura, desta forma, por si só, não é adequado para resistir a esforços de momento fletor. Esta deficiência é compensada através das barras de aço posicionadas o mais distante possível da linha neutra com o cuidado de que se respeite os cobrimentos mínimos normativos.

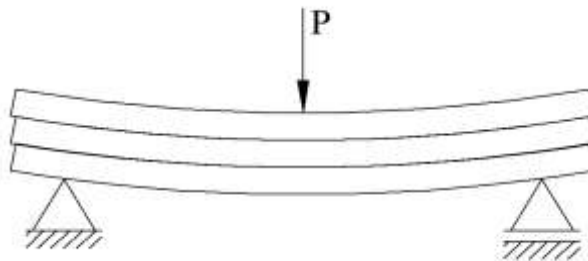
## 4.2 Cisalhamento

Ao resultado das distribuições das tensões cisalhantes que atuam na seção transversal de uma dada barra chamamos *cisalhamento*.



*Figura 4.2 – Resultante de tensões de cisalhamento*

Estas tensões ocorrem não apenas no plano transversal, mas também no longitudinal, visto que, caso um pequeno elemento seja retirado da seção de uma determinada viga, o mesmo estará sujeito à tensões de cisalhamento transversais e longitudinais. Para explicar o aparecimento das tensões longitudinais, basta imaginar uma viga constituída pela superposição de placas soltas que, submetidas a um carregamento transversal, deslizam umas sobre as outras (HIBBELER, 2010).



*Figura 4.3 – Efeito do cisalhamento longitudinal em viga composta de placas soltas*

Numa viga de concreto armado não ocorre o deslizamento devido ao material coesivo e homogêneo, mas existem tensões atuando tanto nos planos transversais quanto

longitudinais. Para este estudo, apenas serão observados os efeitos das tensões de cisalhamento atuantes nos planos transversais.

### 4.3 Módulo de Elasticidade

O módulo de elasticidade  $E$  é um parâmetro que diz respeito às deformações do material sob tensões. É uma das propriedades muito importante de um material, visto que é necessário a sua determinação para os cálculos das deformações das estruturas.

Esta propriedade é utilizada para medir a rigidez de determinado material, sendo que, no caso de estruturas de concreto, quanto maior a resistência à compressão, maior o módulo de elasticidade e menores as deformações (BASTOS, 2006).

A determinação do módulo de elasticidade longitudinal se dá pela análise do diagrama tensão x deformação ( $\sigma$  x  $\varepsilon$ ), onde temos que seu valor é obtido através da expressão simplificada abaixo:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (4.1)$$

A NBR-6118/2014, no item 8.2.8, determina que para concretos nos quais não forem realizados ensaios, o módulo de elasticidade inicial pode ser obtido da seguinte equação:

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (4.2)$$

sendo,

$$\alpha_E = 1,2 \text{ para basalto e diabásio}$$

$$\alpha_E = 1,0 \text{ para granito e gnaisse}$$

$$\alpha_E = 0,9 \text{ para calcário}$$

$$\alpha_E = 0,7 \text{ para arenito}$$

com  $E_{ci}$  e  $f_{ck}$  são dado em MPa.

Nas análises de projeto para as verificações estados-limites de serviço, deve-se utilizar o módulo de elasticidade secante, calculado pela equação abaixo:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (4.3)$$

sendo,

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (4.4)$$

Conforme Bastos (2006), a aplicação de uma força no concreto gera deformações tanto na direção da força quanto na direção transversal à força. A NBR-6118/2014, no item 8.2.9, define o módulo de elasticidade transversal em função do módulo de elasticidade secante, através da equação:

$$G_c = \frac{E_{cs}}{2,4} \quad (4.5)$$

#### 4.4 Deflexões Em Vigas

As deformações em uma estrutura são resultantes dos esforços a que estas estão submetidas e às características dos materiais e da geometria das peças. Estas deformações sempre ocorrerão quando da aplicação de uma força sobre um corpo e podem ser visíveis ou imperceptíveis a olho nu (HIBBELER, 2010).

Os dimensionamentos para estruturas de concreto armado são realizados preferencialmente de forma que levam em consideração que os materiais devem apresentar a capacidade de retornar à sua forma inicial quando, após a estrutura se deformar devido à aplicação de carregamentos externos, os mesmos são retirados. Nessas condições, diz-se que o material tem um comportamento elástico.

No caso de vigas em concreto armado, a NBR-6118/2014 estabelece como parâmetro para a admissão de flechas, valores máximos para que não ocorram deformações excessivas que possam prejudicar o funcionamento de outros elementos façam interface com a estrutura ou causar desconforto sensorial. Para limitar a deflexão de uma viga de forma que esteja em

acordo com as prescrições normativas, é necessária a definição da máxima deflexão através do diagrama que caracteriza a forma da viga deformada, a linha elástica (BEER e JOHNSTON, 1995).

Para a representação da linha elástica, é necessário que sejam conhecidas as condições de contorno, ou seja, como se dispõem as restrições de deslocamentos e inclinações para os diferentes tipos de apoio (HIBBELER, 2010).

Em se tratando do cálculo das deflexões, é conveniente a observação ao princípio da superposição, que afirma, de acordo com Gonçalves, 2006, que para um determinado carregamento combinado, pode-se obter o efeito provocado através da separação dos efeitos dos diferentes carregamentos e, finalmente, combinando-se os resultados.

A determinação da linha elástica e da deflexão máxima para uma viga de seção e módulo de elasticidade constantes, submetida a carregamento transversal uniformemente distribuído pode ser obtida a partir da dedução da equação diferencial linear de segunda ordem abaixo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (4.6)$$

onde,  $d^2y/dx^2$  é a curvatura,  $M(x)$  é a função que representa o momento fletor para todos os valores de  $x$ ,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal e  $I$  é o momento de inércia da área da seção transversal com relação à linha neutra.

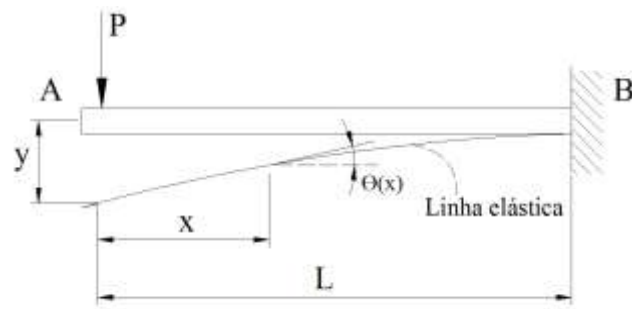
Beer e Johnston (1995) demonstra que pode-se obter a força de cisalhamento em qualquer ponto de uma viga de  $EI$  constante derivando a equação (4.6).

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{dM}{dx} = \frac{V(x)}{EI} \quad (4.7)$$

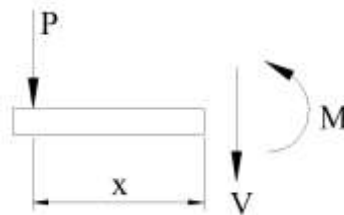
onde,  $V(x)$  é a função que representa a força de cisalhamento.

Para o momento fletor, conforme o diagrama da figura 4.4 temos a seguinte equação:

$$M(x) = -Px \quad (4.8)$$



(a)



(b)

Figura 4.4 - (a) Esquema de deformação de viga em balanço; (b) Diagrama de corpo livre de um trecho da viga

O ângulo formado entre a tangente à curva elástica e a horizontal  $\theta(x)$ , medido em radianos, pode ser escrito como:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta \approx \theta(x) \quad (4.9)$$

Considerando vigas de seção prismáticas de rigidez flexional  $EI$  constante, multiplica-se os dois membros por  $EI$  e integra-se na variável  $x$  (BEER e JOHNSTON, 1995).

$$EI \frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x) dx + C_1 \quad (4.10)$$



Integrando novamente, temos:

$$EIy = \int_0^x \left[ \int_0^x M(x)dx + C_1 \right] dx + C_2 \quad (4.10)$$

$$EIy = \int_0^x dx \int_0^x M(x)dx + C_1x + C_2$$

Sendo conhecidas as condições de contorno, ou seja, as restrições de deslocamentos e inclinações para os impostas pelos diferentes tipos de apoio, podem ser determinadas as constantes  $C_1$  e  $C_2$  (BEER e JOHNSTON, 1995).

## 5 ANÁLISE DA DEFORMAÇÃO PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

### 5.1 Montagem da Matriz de Rigidez Com Apenas Rigidez à Flexão

De acordo com Alves Filho (2012), o Método dos Elementos Finitos (MEF) é fundamentado na relação entre forças e deslocamentos dos nós de cada elemento individual. Este é um conceito já bastante comum no âmbito da Física Básica, especialmente nas aplicações com elementos de “mola”, onde a constante elástica da mola pode ser obtida da equação:

$$F = k \cdot d \quad (5.1)$$

onde,  $F$  é a força aplicada,  $k$  é a constante elástica (ou coeficiente de rigidez) e  $d$  é o deslocamento do nó de extremidade da mola.

Nos casos de análises de estruturas, temos diversos nós dos quais se deseja obter diversos componentes de rigidez. Podemos então utilizar o método de *matrizes de rigidez*, que são ferramentas usadas no MEF com o propósito de simplificar a formulação das equações de rigidez dos elementos que, de outra forma, demandariam cálculos longos para a obtenção das soluções (LOGAN, 2006).

De maneira geral, pode-se então expandir a equação (5.1) da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{2n} \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{1x} \\ d_{1y} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{nz} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Nos elementos de viga, em cada um dos nós atuam um componente de momento fletor e um componente de força. Sendo assim, os quatro componentes de força (duas forças e dois momentos) geram quatro componentes de deslocamentos (dois deslocamentos transversais e

duas rotações. Pode-se dizer que um elemento de viga possui, então, quatro graus de liberdade.

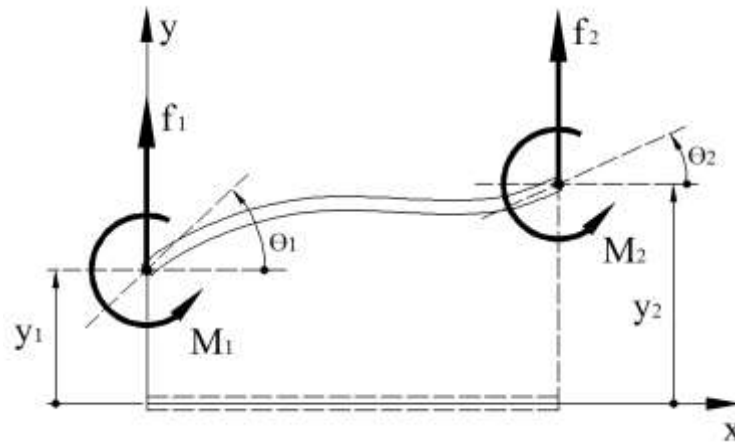


Figura 5.1 – Elemento de viga com sentido positivo dos esforços e deslocamentos

Logan (2006) demonstra a obtenção das equações para as forças de cisalhamento e momentos fletores de vigas e transcreve em forma de matriz conforme abaixo:

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

onde temos que:

$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ & & 12 & -6l \\ \text{Simetria} & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

## 5.2 Matriz de Rigidez Incluindo Efeitos de Deformação Por Cisalhamento (ALVES FILHO, 2012)

Conforme Alves Filho (2012), por ocorrência das tensões de cisalhamento que atuam na seção transversal de uma viga, ocorre o efeito de deslizamento de uma seção sobre outra, conforme demonstrado na figura (5.2). Estes deslocamentos devem ser combinados com os provocados pela flexão, mas são comumente ignorados devido, entre outros motivos, ao automatismo dos processos de cálculo que induz à não observação dos casos onde esta consideração se mostra importante.

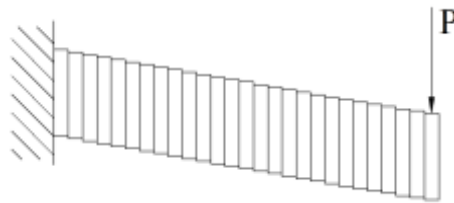


Figura 5.2 – Efeito do cisalhamento na deflexão de viga

Para a consideração dos efeitos do cisalhamento no deslocamento de uma viga, pode-se incluir na matriz de rigidez um “fator de correção” que diminua a rigidez da viga e aumente as deflexões.

Ao incorporar o efeito das deformações por cisalhamento ao parâmetro de rigidez à flexão, abaixo na equação (5.5):

$$b = \frac{EI}{\ell^3} \quad (5.5)$$

Após a incorporação do efeito das deformações do cisalhamento, temos:

$$b_z = \frac{E \cdot I_z}{(1 + \Phi) \cdot \ell^3} \quad (5.6)$$

sendo que o fator de correção  $\Phi$  é:

$$\Phi_y = \frac{12 \cdot E \cdot I_z}{G \cdot A_s \cdot \ell^2} \quad (5.7)$$

onde  $G$  é o módulo de elasticidade transversal e  $A_s$  é a área da seção transversal efetiva quanto ao cisalhamento.

Após a consideração do parâmetro  $\Phi_y$ , a matriz resultante para a combinação dos efeitos de deformação devidos à flexão e ao cisalhamento é:

$$[K] = \begin{bmatrix} 12 \cdot b_z & 6 \cdot b_z \cdot \ell & -12 \cdot b_z \cdot \ell & 6 \cdot b_z \cdot \ell \\ & (4 + \Phi_y) \cdot b_z \cdot \ell^2 & -6 \cdot b_z \cdot \ell & (2 - \Phi_y) \cdot b_z \cdot \ell^2 \\ & & 12 \cdot b_z & -6 \cdot b_z \cdot \ell \\ \text{Simetria} & & & (4 + \Phi_y) \cdot b_z \cdot \ell^2 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

### 5.3 Matriz de Rigidez Incluindo Efeitos de Deformação Por Cisalhamento (VASCONCELLOS FILHO, 1986)

Na metodologia adotada por Vasconcelos Filho (1986) verifica-se uma diferença que se dá na adoção de um fator para correção da fórmula que diz respeito à geometria da seção, ao qual chamaremos *fator geométrico*.

O fator de correção para o cisalhamento  $g$  é:

$$g_y = \frac{6 \cdot f \cdot E \cdot I_z}{G \cdot A_s \cdot \ell^2} \quad (5.9)$$

onde  $f$  é fator de correção relacionado à geometria (*fator geométrico*):

$$f = \frac{6}{5} \quad (\text{para seção retangular}) \quad (5.10)$$

Após a consideração do parâmetro  $g_y$ , a matriz resultante para a combinação dos efeitos de deformação devidos à flexão e ao cisalhamento é dada por:

$$[K] = \frac{E \cdot I}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 \cdot (1/(1+2g)) & 6 \cdot (1/(1+2g)) & -12 \cdot (1/(1+2g)) & 6 \cdot (1/(1+2g)) \\ 4 \cdot \ell^2 \cdot ((2+g)/(2 \cdot (1+2g))) & -6 \cdot (1/(1+2g)) & 2 \cdot \ell^2 \cdot ((1-g)/(1+2g)) & \\ 12 \cdot (1/(1+2g)) & -6 \cdot (1/(1+2g)) & & \\ 4 \cdot \ell^2 \cdot ((2+g)/(2 \cdot (1+2g))) & & & \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

*Simetria*

## 6 APLICAÇÃO DAS DIFERENTES MATRIZES DE RIGIDEZ EM UMA VIGA DE CONCRETO ARMADO

### 6.1 Dados Para o Dimensionamento das Vigas de Concreto Armado

Para as vigas analisadas foram consideradas as seguintes dimensões:

- a) Viga 01 - 20x50 cm -  $L = 500$  cm;
- b) Viga 02 - 20x75 cm -  $L = 500$  cm;
- c) Viga 03 - 20x100 cm -  $L = 500$  cm;
- d) Viga 04 - 20x200 cm -  $L = 500$  cm.

Para os todas as vigas, foi considerado um carregamento uniformemente distribuído conforme abaixo:

Peso próprio	= (*)
Reação da laje esquerda	= 10,45 kN/m
Reação da laje direita	= 10,45 kN/m
Alvenaria 0,20x13x3,50m	= 9,10 kN/m
TOTAL	= 30,0 kN/m

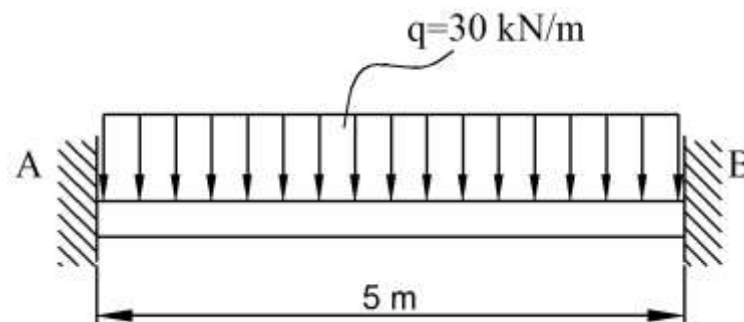


Figura 6.1 – Viga bi-engastada sob carga distribuída

(\*). De forma a simplificar a comparação dos efeitos da deformação apenas pela flexão e cisalhamento, o peso próprio das peças de concreto não foi levado em consideração.

As características físicas e geométricas das vigas estudadas estão descritas abaixo:

**VIGA 01 - 20x50 cm**

$$E = 30 \text{ GPa};$$

$$G = 30 / 2,4 = 12,5 \text{ GPa};$$

$$I = (0,20 \times 0,50^3) / 12 = 2,083333 \times 10^{-3} \text{ m}^4;$$

$$EI = 30 \times 10^6 \times 2,083333 \times 10^{-3} = 62.500 \text{ kN.m}^2.$$

**VIGA 02 - 20x75 cm**

$$E = 30 \text{ GPa};$$

$$G = 30 / 2,4 = 12,5 \text{ GPa};$$

$$I = (0,20 \times 0,75^3) / 12 = 7,03125 \times 10^{-3} \text{ m}^4;$$

$$EI = 30 \times 10^6 \times 7,03125 \times 10^{-3} = 210.938 \text{ kN.m}^2.$$

**VIGA 03 - 20x100 cm**

$$E = 30 \text{ GPa};$$

$$G = 30 / 2,4 = 12,5 \text{ GPa};$$

$$I = (0,20 \times 1,00^3) / 12 = 1,666667 \times 10^{-2} \text{ m}^4;$$

$$EI = 30 \times 10^6 \times 1,666667 \times 10^{-2} = 500.000 \text{ kN.m}^2.$$

**VIGA 04 - 20x200 cm**

$$E = 30 \text{ GPa};$$

$$G = 30 / 2,4 = 12,5 \text{ GPa};$$

$$I = (0,20 \times 2,00^3) / 12 = 1,333333 \times 10^{-1} \text{ m}^4;$$

$$EI = 30 \times 10^6 \times 1,333333 \times 10^{-1} = 4.000.000 \text{ kN.m}^2.$$



## 6.2 Cálculo das Deformações Para Viga 01 (20x50cm)

### 6.2.1 Análise dos deslocamentos sem efeitos de cisalhamento (método manual)

Estrutura:

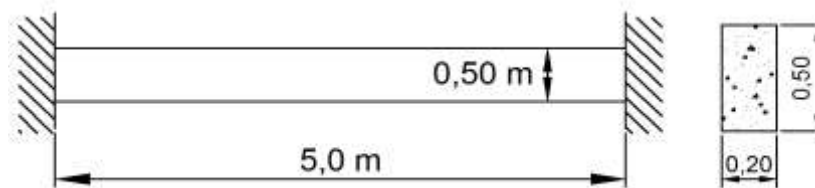


Figura 6.2 – Croqui da estrutura

Modelo:

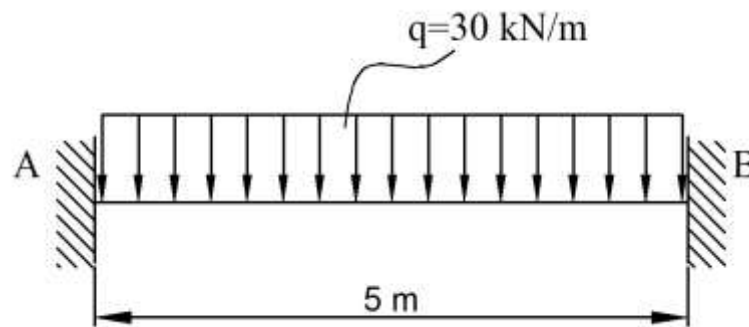


Figura 6.3 – Carregamento na barra

Discretização da barra:

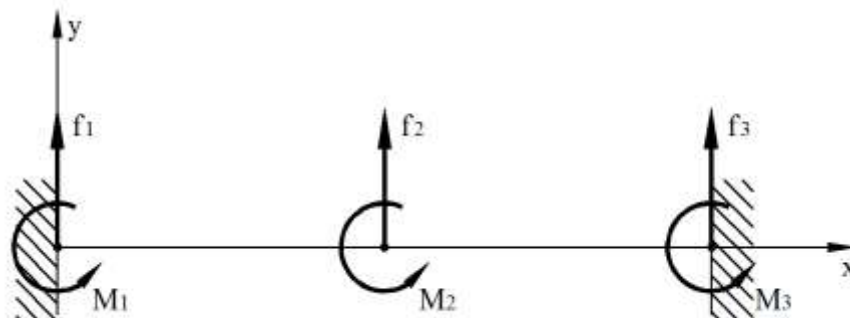


Figura 6.4 – Componentes de força em cada nos nós da barra discretizada

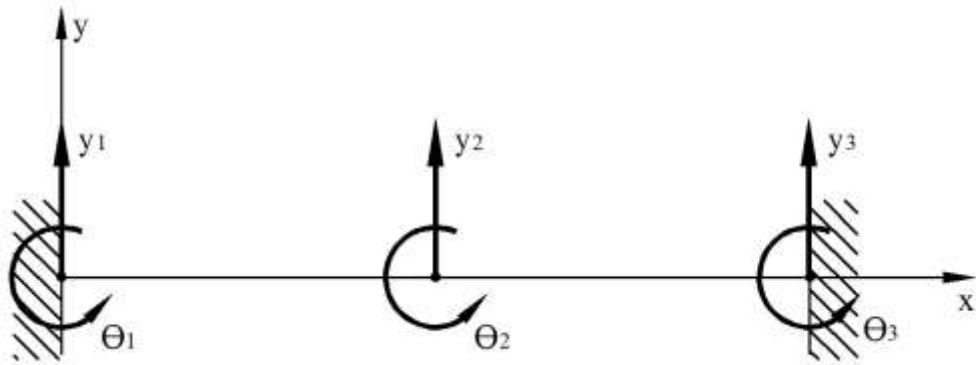


Figura 6.5 – Componentes de deslocamentos nos nós da barra discretizada

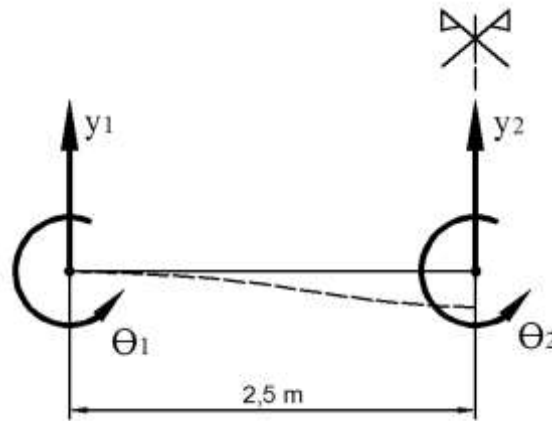


Figura 6.6 – Elemento da viga com componentes de deslocamento (graus de liberdade)

Dados para a análise do elemento:

$$f_1 = f_2 = -30 \times 2,5 / 2 = -37,5 \text{ kN}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = ?$$

A partir dos dados acima e das características físicas e geométricas da seção é possível efetuar a montagem da equação matricial para a obtenção do valor da deflexão máxima atuante na viga sem a consideração dos efeitos do cisalhamento.

$$\begin{Bmatrix} -37,5 \\ m_1 \\ -37,5 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{62500}{2,5^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6 \cdot 2,5 & -12 & 6 \cdot 2,5 \\ 6 \cdot 2,5 & 4 \cdot 2,5^2 & -6 \cdot 2,5 & 2 \cdot 2,5^2 \\ -12 & -6 \cdot 2,5 & 12 & -6 \cdot 2,5 \\ 6 \cdot 2,5 & 2 \cdot 2,5^2 & -6 \cdot 2,5 & 4 \cdot 2,5^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

onde temos que:

$$\begin{Bmatrix} -37,5 \\ m_1 \\ -37,5 \\ m_2 \end{Bmatrix} = 4000 \cdot \begin{bmatrix} 12 & 15 & -12 & 15 \\ 15 & 25 & -15 & 12,5 \\ -12 & -15 & 12 & -15 \\ 15 & 12,5 & -15 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

Portanto,

$$\begin{Bmatrix} -37,5 \\ m_1 \\ -37,5 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 48000 & 60000 & -48000 & 60000 \\ 60000 & 100000 & -60000 & 50000 \\ -48000 & -60000 & 48000 & -60000 \\ 60000 & 50000 & -60000 & 100000 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

Resolvendo a equação para a obtenção do deslocamento máximo sem a consideração do cisalhamento, temos:

$$\{f_2\} = [48000] \cdot \{y_2\}$$

$$\{-37,5\} = [48000] \cdot \{y_2\}$$

$$y_2 = -7,812 \times 10^{-4} \text{ m}$$

### 6.2.2 Análise dos deslocamentos sem efeitos de cisalhamento (utilizando programa computacional)

À fim de que os resultados apresentados sejam similares aos resultados obtidos pelo método manual sem consideração do efeito do cisalhamento, as propriedades da seção da viga serão modificadas de modo a “zerar” a rigidez da área da seção transversal ao esforço cortante.

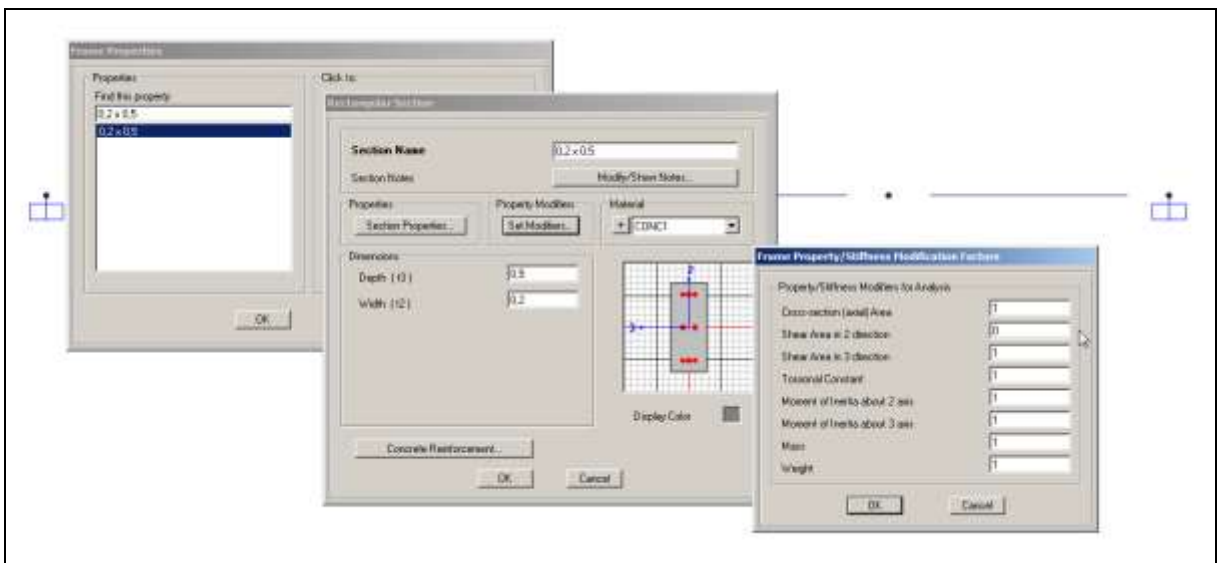


Figura 6.7 – Fatores de modificação dos parâmetros de rigidez da seção da viga

Discretização da barra:

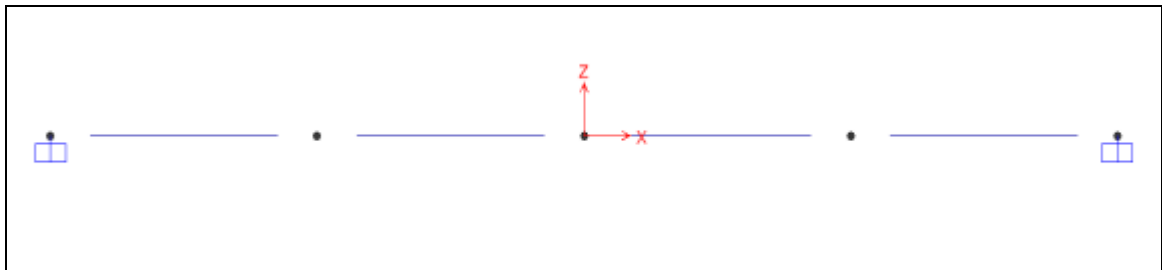


Figura 6.8 – Componentes de força em cada nos nós da barra discretizada.

Modelo:

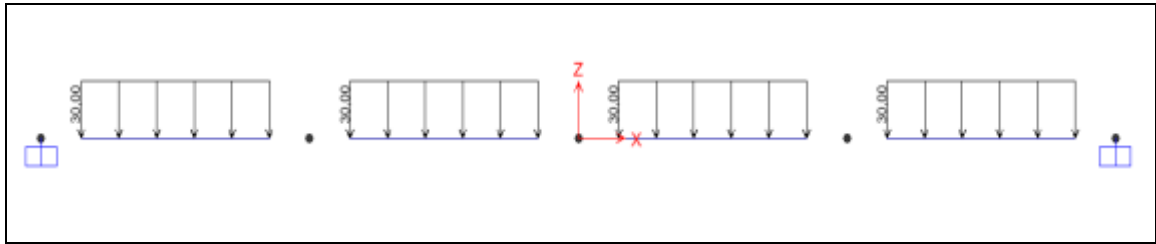


Figura 6.9 – Carregamento na barra

Deslocamento no nó central:

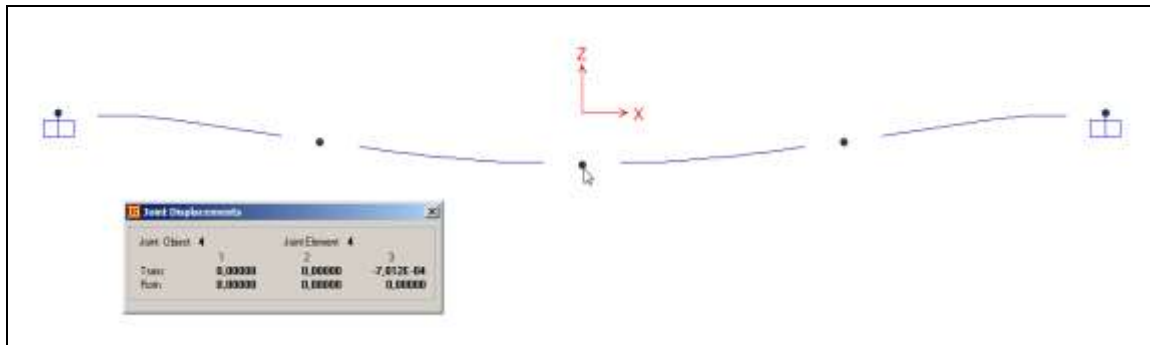


Figura 6.10 – Linha elástica e indicação do deslocamento máximo

O deslocamento máximo obtido através de programa computacional é:

$$y_{\text{máx}} = -7,812 \times 10^{-4} \text{ m}$$

### 6.2.3 Análise dos deslocamentos com efeitos de cisalhamento (método manual – ALVES FILHO, 2012)

Para a consideração dos efeitos do cisalhamento na deformação nas vigas, será utilizada primeiramente a metodologia adotada por Alves Filho (2012).

A discretização da barra será considerada conforme os critérios utilizados no item 6.2.1, sendo que o procedimento de análise para a obtenção da deflexão máxima é bastante similar, exceto pela inclusão do “fator de correção” na matriz de rigidez.

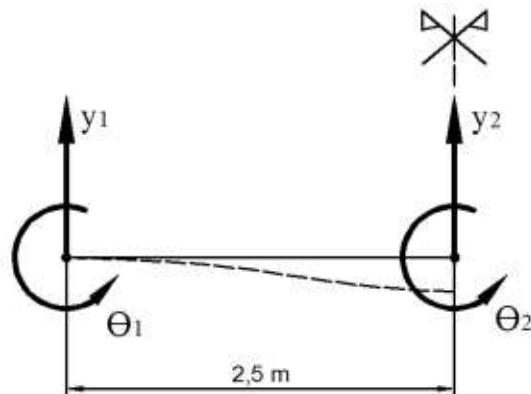


Figura 6.11 – Elemento da viga com componentes de deslocamento (graus de liberdade)

Dados para a análise do elemento:

$$f_1 = f_2 = -30 \times 2,5 / 2 = -37,5 \text{ kN}$$

$$\Theta_1 = \Theta_2 = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = ?$$

Temos então a seguinte equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} -37,5 \\ m_1 \\ -37,5 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \cdot b_z & 6 \cdot b_z \cdot 2,5 & -12 \cdot b_z \cdot 2,5 & 6 \cdot b_z \cdot 2,5 \\ & (4 + \Phi_y) \cdot b_z \cdot 2,5^2 & -6 \cdot b_z \cdot 2,5 & (2 - \Phi_y) \cdot b_z \cdot 2,5^2 \\ & & 12 \cdot b_z & -6 \cdot b_z \cdot 2,5 \\ & & & (4 + \Phi_y) \cdot b_z \cdot 2,5^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

*Simetria*

onde,

$$b_z = \frac{62500}{(1 + \Phi) \cdot 2,5^3} \quad (6.5)$$

sendo que o fator de correção  $\Phi$  é:

$$\Phi_y = \frac{12 \cdot 62500}{(12,5 \cdot 10^6) \cdot (0,2 \cdot 0,5) \cdot 2,5^2} \quad (6.6)$$

Resolvendo as equações acima temos:

$$\Phi_y = 0,096$$

$$b_z = 3649,635$$

Substituindo os valores de  $b_z$  e  $\Phi_y$ , temos a seguinte matriz de rigidez:

$$[K] = \begin{bmatrix} 12 \cdot 3649,635 & 6 \cdot 3649,635 \cdot 2,5 & -12 \cdot 3649,635 \cdot 2,5 & 6 \cdot 3649,635 \cdot 2,5 \\ & (4 + 0,096) \cdot 3649,635 \cdot 2,5^2 & -6 \cdot 3649,635 \cdot 2,5 & (2 - 0,096) \cdot 3649,635 \cdot 2,5^2 \\ & & 12 \cdot 3649,635 & -6 \cdot 3649,635 \cdot 2,5 \\ \textit{Simetria} & & & (4 + 0,096) \cdot 3649,635 \cdot 2,5^2 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Assim, a equação matricial pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} -37,5 \\ m_1 \\ -37,5 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 43795,62 & 54744,53 & -109489,05 & 54744,53 \\ & 93430,66 & -54744,53 & 43430,66 \\ & & 43795,62 & -54744,53 \\ \textit{Simetria} & & & 93430,66 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Resolvendo a equação para a obtenção do deslocamento máximo com a consideração do cisalhamento, temos:

$$\{f_2\} = [43795,62] \cdot \{y_2\}$$

$$\{-37,5\} = [43795,62] \cdot \{y_2\}$$

$$y_2 = -8,563 \times 10^{-4} \text{ m}$$

### 6.2.4 Análise dos deslocamentos com efeitos de cisalhamento (método manual – VASCONCELLOS FILHO, 1986)

Para efeito de comparação das diferentes metodologias, será demonstrado o cálculo do deslocamento com efeitos de cisalhamento conforme procedimentos adotados por Vasconcellos Filho (1986).

A discretização da barra será considerada conforme os critérios utilizados no item 6.2.1. O procedimento difere do adotado no item 6.2.3 pela devido à diferença na fórmula do fator de correção que inclui um fator para a consideração da geometria da seção.

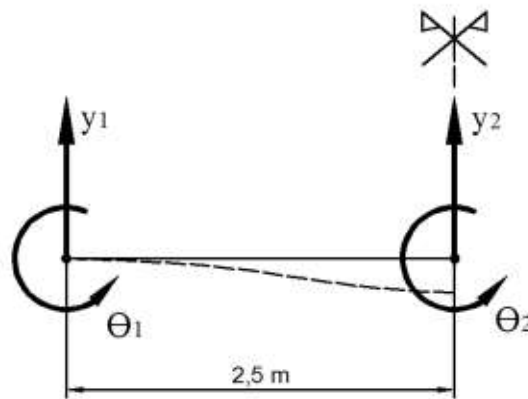


Figura 6.12 – Elemento da viga com componentes de deslocamento (graus de liberdade)

Dados para a análise do elemento:

$$f_1 = f_2 = -30 \times 2,5 / 2 = -37,5 \text{ kN}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = ?$$



Após a consideração do parâmetro  $g_y$ , a matriz de rigidez resultante para a combinação dos efeitos de deformação devidos à flexão e ao cisalhamento é dada por:

$$[K] = \frac{E \cdot I}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 \cdot (1/(1+2g)) & 6 \cdot (1/(1+2g)) & -12 \cdot (1/(1+2g)) & 6 \cdot (1/(1+2g)) \\ & 4 \cdot \ell^2 \cdot ((2+g)/(2 \cdot (1+2g))) & -6 \cdot (1/(1+2g)) & 2 \cdot \ell^2 \cdot ((1-g)/(1+2g)) \\ & & 12 \cdot (1/(1+2g)) & -6 \cdot (1/(1+2g)) \\ \textit{Simetria} & & & 4 \cdot \ell^2 \cdot ((2+g)/(2 \cdot (1+2g))) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

sendo que o fator de correção  $g$  é:

$$g_y = \frac{6 \cdot f \cdot 62500}{(12,5 \cdot 10^6) \cdot (0,2 \cdot 0,5) \cdot 2,5^2} \quad (6.6)$$

e o fator geométrico é:

$$f = \frac{6}{5} \quad (6.7)$$

Resolvendo as equações acima temos:

$$g_y = 0,0576$$

Substituindo os valores, temos:

$$[K] = 4000 \begin{bmatrix} 10,76 & 13,45 & -10,76 & 13,45 \\ & 23,06 & -13,45 & 10,76 \\ & & 10,76 & -13,45 \\ \textit{Simetria} & & & 23,06 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

logo,

$$[K] = \begin{bmatrix} 43042 & 53802 & -43042 & 53802 \\ & 92253 & -53802 & 42253 \\ & & 43042 & -53802 \\ \textit{Simetria} & & & 92253 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Assim, a equação matricial pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} -37,5 \\ m_1 \\ -37,5 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 43042 & 53802 & -43042 & 53802 \\ & 92253 & -53802 & 42253 \\ & & 43042 & -53802 \\ \textit{Simetria} & & & 92253 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

Resolvendo a equação para a obtenção do deslocamento máximo com a consideração do cisalhamento, temos:

$$\{f_2\} = [43042] \cdot \{y_2\}$$

$$\{-37,5\} = [43042] \cdot \{y_2\}$$

$$y_2 = -8,712 \times 10^{-4} \text{ m}$$

### 6.2.5 Análise dos deslocamentos com efeitos de cisalhamento (utilizando programa computacional)

A discretização da barra será considerada conforme os critérios utilizados no item 6.2.2, com a particularidade de que as propriedades da seção da viga não serão alteradas para que se mantenha a consideração do efeito do cisalhamento.

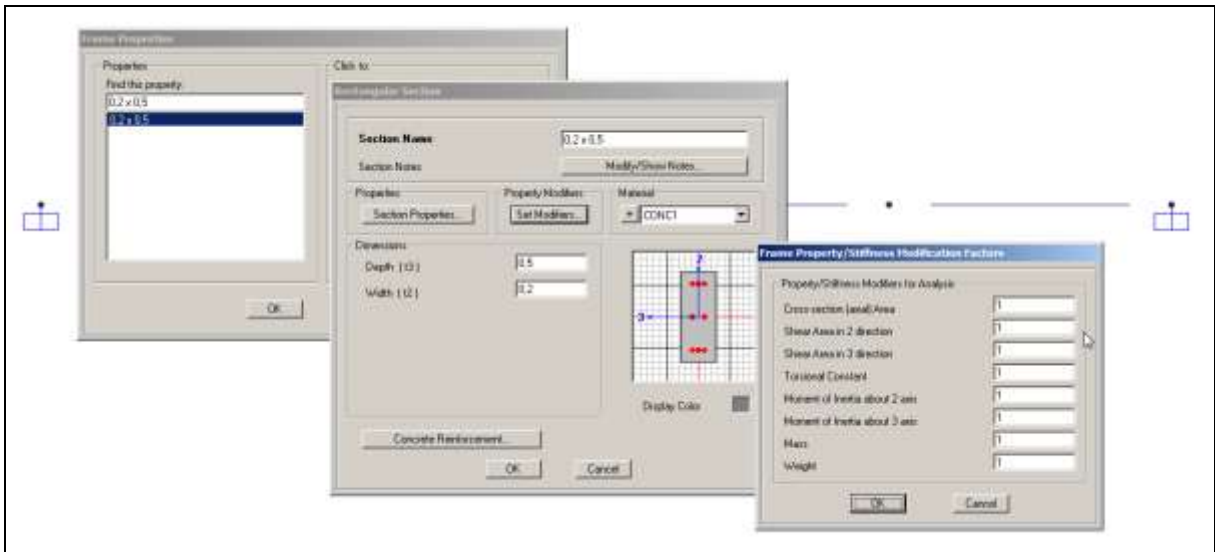


Figura 6.12 – Fatores de modificação dos parâmetros de rigidez da seção da viga

Deslocamento no nó central:

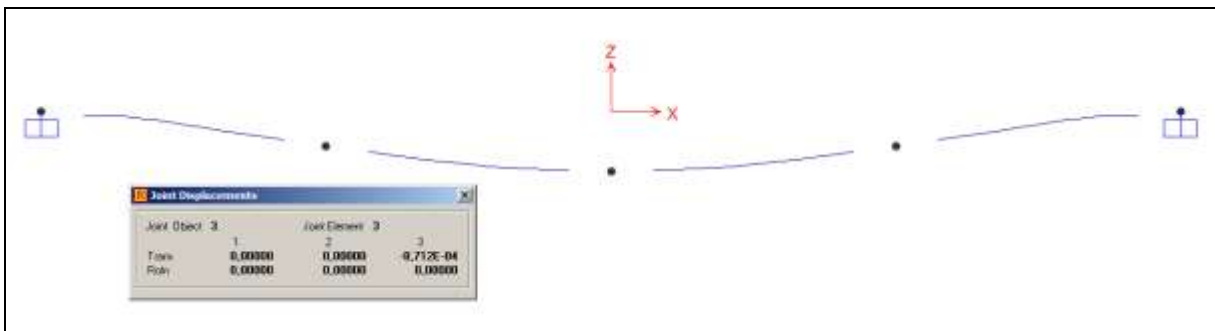


Figura 6.13 – Linha elástica e indicação do deslocamento máximo

O deslocamento máximo obtido através de programa computacional é:

$$y_{\text{máx}} = -8,712 \times 10^{-4} \text{ m}$$

### 6.3 Cálculo das Deformações Para Vigas 03 (20x75cm), 04 (20x100cm) e 05 (20x200cm)

Visto que o procedimento para a obtenção das deflexões nas vigas V03, V04 e V05 é similar ao utilizado para a viga analisada no item 6.2, os resultados dos deslocamentos máximos para as demais seções serão apresentados na tabela 6.1, abaixo:

<b>DESLOCAMENTOS MÁXIMOS DAS VIGAS DE CONCRETO ARMADO</b>			
<b>SEÇÃO DA VIGA</b>			
<b>TIPO DE DESLOCAMENTO</b>	V02 (20x75cm)	V03 (20x100cm)	V04 (20x200cm)
FLEXÃO Método manual	-0,2315 mm	-0,0977 mm	-0,0122 mm
FLEXÃO Programa computacional	-0,2315 mm	-0,0977 mm	-0,0122 mm
FLEXÃO + CISALHAMENTO Método manual (Alves Filho, 2012)	-0,2815 mm	-0,1352 mm	-0,0310 mm
FLEXÃO + CISALHAMENTO Método manual (Vasconcellos Filho, 1986)	-0,2915 mm	-0,1427 mm	-0,0347 mm
FLEXÃO + CISALHAMENTO Programa computacional	-0,2915 mm	-0,1427 mm	-0,0347 mm

*Tabela 6.1 – Valores dos deslocamentos máximos nas diversas seções de vigas.*

A tabela acima mostra que, para a verificação apenas com os deslocamentos por flexão os resultados pelos métodos manuais ou através de programas computacionais são iguais. Enquanto que para a verificação com a contribuição do cisalhamento, os resultados pelo método adotado por Alves Filho, 2012, são muito próximos e pelo método adotado por Vasconcellos Filho, 1986, os valores são iguais. Podemos concluir, diante disso, que métodos utilizados para o cálculo da deflexão são coerentes entre si.

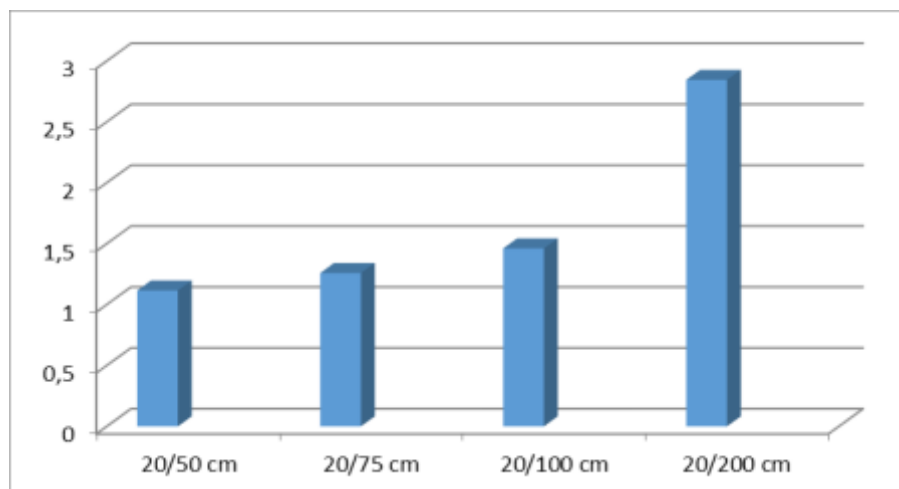
## 7 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Após a análise das vigas de concreto armado, foi possível a elaboração de um quadro comparativo para demonstrar o comportamento das peças em função da sua altura e do cálculo do deslocamento com apenas a consideração da flexão bem como a consideração da flexão combinada ao cisalhamento.

<b>TABELA COMPARATIVA DOS DESLOCAMENTOS MÁXIMOS OBTIDOS PELOS DOIS MÉTODOS</b>				
<b>SEÇÃO DA VIGA</b>	<b>V01 (20x50cm)</b>	<b>V02 (20x75cm)</b>	<b>V03 (20x100cm)</b>	<b>V04 (20x200cm)</b>
<b>TIPO DE DESLOCAMENTO</b>				
<b>FLEXÃO</b>	-0,7812 mm	-0,2315 mm	-0,0977 mm	-0,0122 mm
<b>FLEXÃO + CISALHAMENTO</b>	-0,8712 mm	-0,2915 mm	-0,1427 mm	-0,0347 mm
<b>PERCENTUAL DO ACRÉSCIMO DE DESLOCAMENTO DEVIDO AO CISALHAMENTO</b>	11,5 %	25,9 %	46,1%	184,4 %

*Tabela 7.1 – Comparação dos resultados e percentual do acréscimo de deslocamento.*

O gráfico 7.1, abaixo, mostra quantas vezes a deformação pela combinação entre flexão e cisalhamento supera a deformação com apenas a consideração da flexão.



*Gráfico 7.1 – Quantidade de vezes que o deslocamento por cisalhamento + flexão supera o deslocamento apenas por flexão.*

## 8 CONCLUSÕES

Este trabalho pôde reforçar a importância de que o processo de cálculo de flechas em vigas deve ser tratado de forma responsável e a partir de um conhecimento do comportamento da estrutura.

É comum que muitos engenheiros façam uso de planilhas ou métodos de cálculo “à mão” que, no intuito de aumentar a velocidade dos processos, acabam se tornando um empecilho para que se obtenha resultados corretos e fieis ao comportamento real das peças estruturais.

Com os resultados demonstrados das comparações entre os cálculos das deflexões nas vigas estudadas, foi verificado que, para vigas de maiores alturas, a contribuição dos efeitos do cisalhamento é tão significativa quanto a contribuição dos efeitos da flexão. Desta forma, a simplificação de procedimento de forma que se ignore o cisalhamento caracteriza um erro, pois não representa a situação real da estrutura.

Para as vigas analisadas, pôde-se observar que, quanto maior a altura da viga, mais discrepantes os resultados obtidos dos métodos que consideram os efeitos do cisalhamento e dos métodos que o desconsideram. Vale notar que, para os cálculos realizados neste trabalho, o peso próprio das estruturas não foi considerado, o que resulta no fato de que, caso este aumento de carregamento que seria natural com o aumento da seção fosse incluído nas verificações aqui realizadas, as distorções dos valores dos deslocamentos seriam ainda mais expressivas.

Não podemos desmerecer a importância da existência de programas de cálculo que são muito úteis para o aumento da produtividade dos profissionais responsáveis pela execução de projetos de estruturas de concreto. No entanto, o uso destes meios de melhoria de produtividade deve ser acompanhado por um bom conhecimento técnico por parte do usuário destes métodos de forma que, sendo o responsável pela eficiência da estrutura projetada, o engenheiro apresente um projeto seguro, viável economicamente, e que seja condizente com o comportamento esperado da estrutura.

## 9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**, 7. ed., São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

GONÇALVES, Ivan Henrique. **Análise De Deformações Em Vigas Com Comportamento Geometricamente Não-Linear**. Itajubá. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Itajubá, 2006.

BASTOS, Paulo Sérgio dos Santos. **Fundamentos do concreto armado: notas de aula**. Bauru: UNESP, 2006.

VASCONCELLOS FILHO, Alcebíades de. **Teoria das estruturas: Método dos deslocamentos, processo de Cross, tabelas**, 1986. Belo Horizonte: Escola de Engenharia – UFMG.

LOGAN, Daryl L. **A First Course in the Finite Element Method**. Ed. CL-Engineering, 4th edition, 2006.

SILVA, Ney Amorim. **Apostila Projeto de estruturas de concreto 1**. Belo Horizonte: Departamento de engenharia de estruturas – UFMG.

BEER, Ferdinand P; JOHNSTON JR., E. Russell. **Resistência dos materiais**, 1995. São Paulo: Pearson Makron Books.

ALVES FILHO, Avelino. **Elementos Finitos: A base da Tecnologia CAE**, Vol. 1. São Paulo: Érica, 2000.

LEONHARDT, F.; MONNIG, E.: **Construções de Concreto, Princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto, Vol. 1**, 1977. Editora Interciência Ltda.

LEONHARDT, F.; MONNIG, E.: **Construções de Concreto, Casos especiais de dimensionamento de estruturas de concreto, Vol. 2**, 1977. Editora Interciência Ltda.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: projeto de estruturas de concreto armado: procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

**SAP2000, Linear and Nonlinear Static and Dynamic Analysis and Design of Three-Dimensional Structures**, Introductory Tutorial for SAP2000.

RICARDO, Octávio Gaspar de Souza. **Teoria das estruturas**, 1978. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil: Ed. Da Universidade de São Paulo, 1978.

SUSSEKIND, José Carlos. **Curso de concreto vol. 1**, 1979. São Paulo: Editora Globo S.A.

SUSSEKIND, José Carlos. **Curso de concreto vol. 2**, 1979. São Paulo: Editora Globo S.A.