UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ESCOLA DE ENGENHARIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

ANÁLISE COMPARATIVA PARA ELEMENTOS DE BARRA DEFORMADOS AXIALMENTE

AUTOR: PAULO ESTEVÃO CARVALHO SILVERIO

PROF. ORIENTADOR: ROQUE LUIZ DA SILVA PITANGUEIRA

2016

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

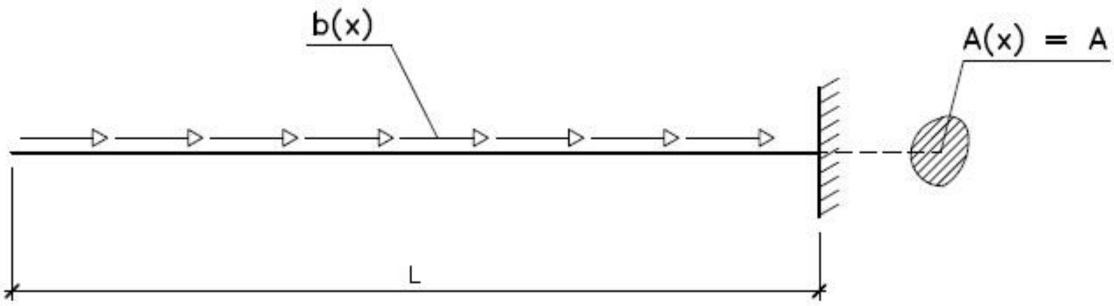
Este trabalho tem como objetivo avaliar um problema de uma barra submetida a uma carga distribuída de corpo, com uma extremidade livre e outra engastada.

Serão analisados os seguintes casos, para uma seção de área constante:

1º CASO: Carga Constante
2º CASO: Carga com variação linear
3º CASO: Carga com variação quadrática

Para esses casos de carregamento, serão calculados os deslocamentos e as tensões para os seguintes modos de análise:

- Solução Analítica, através da resolução da equação diferencial do problema;
- Utilizando 1 (um) Elemento finito de barra linear (2 Nós);
- Utilizando 1 (um) Elemento finito de barra quadrático (3 nós);
- Utilizando 1 (um) Elemento finito de barra cúbico (4 nós).



CASOS DE CARREGAMENTO:

1ª CASO: $b(x) = b$
2ª CASO: $b(x) = bx/L$
3ª CASO: $b(x) = bx^2/L^2$

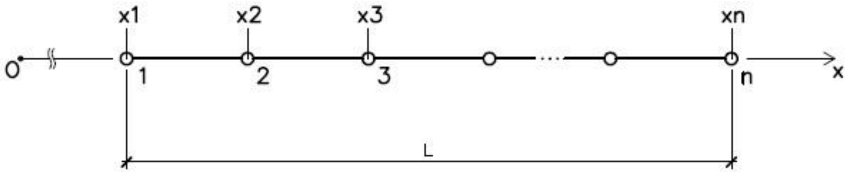
MODELOS PARA CADA CASO:

=> Solução Analítica
=> 1 EL. Linear
=> 1 EL. Quadrático
=> 1 EL. Cúbica

2. FORMULAÇÃO DO MÉTODO

2.1. Funções de Forma

Para um dado elemento finito de barra de *n* nós, conforme figura abaixo, deseja-se escrever uma função para aproximar os deslocamentos u(x), conhecendo-se os deslocamentos dos nós. Para isso faz-se utilização de polinômios, com grau necessário para aproximar os deslocamentos dos *n* nós, portanto de grau *n-1*.



Polinômio aproximador de u(x):

$$\mathrm{u(x)} = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \cdots + a_{n-1}.x^{n-1}$$

Escrevendo de forma matricial, temos:

$$\mathrm{u(x)} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{\,n-1} \end{Bmatrix} \quad \therefore \mathrm{u(x)} = \underline{\varphi}.\underline{\alpha}$$

Equação 1 - Deslocamentos u(x).

Conhecendo-se os deslocamentos nodais (u_1, u_2, u_3, ... , u_n), podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \underline{\varphi}\big|_{x=x1} \\ \underline{\varphi}\big|_{x=x2} \\ \vdots \\ \underline{\varphi}\big|_{x=xn} \end{bmatrix}.\underline{\alpha} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

Chamando a 1ª matriz de $\underline{G}$ (matriz das funções φ escrita em cada posição x para todos os nós), temos, portanto que:

$$\underline{G}.\underline{\alpha} = \underline{d}$$

Equação 2 - Equação do sistema linear em forma matricial.

Portanto, os coeficientes $\underline{\alpha}$ podem ser encontrados através da inversão da matriz G, ficando:

$$\underline{\alpha} = \underline{G}^{-1}.\underline{d}$$

Equação 3 – Coeficientes α.

Substituindo a Equação 3 na Equação 1, temos que:

$$u_{(x)} = \underline{\varphi}.\underline{G}^{-1}.\underline{d}$$

Ao produto matricial $\left(\underline{\varphi}.\underline{G}^{-1}\right)$ dá-se o nome de $\underline{N}$.

$$\underline{N} = \underline{\varphi}.\underline{G}^{-1} \qquad \therefore\ u_{(x)} = \underline{N}.\underline{d}$$

A matriz $\underline{N}$ é a matriz de funções de forma do elemento, composta pelas funções de cada nó.

$$\underline{N} = [N_1 \quad N_2 \quad \cdots \quad N_n]$$

Pode-se notar uma propriedade importante nas funções de forma.

Para cada nó *i* o valor de $N_{i(x)}$ é 1 para *x=xi* e 0 nos demais nós.

$N_{i(x=xi)} = 1$ para $x=x_i$
$N_{i(x\neq xi)} = 0$ para $x\neq x_i$

Esta propriedade, de ser 0 em outros pontos e diferente de zero no ponto avaliado, também é característica de polinômios de Lagrange.

Portanto, podem-se utilizar polinômios de Lagrange para escrever as funções de forma.

$$N_{i(x=xi)} = \frac{P_i^n(x)}{P_i^n(x_i)}\ ;\ P_i^n = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)$$

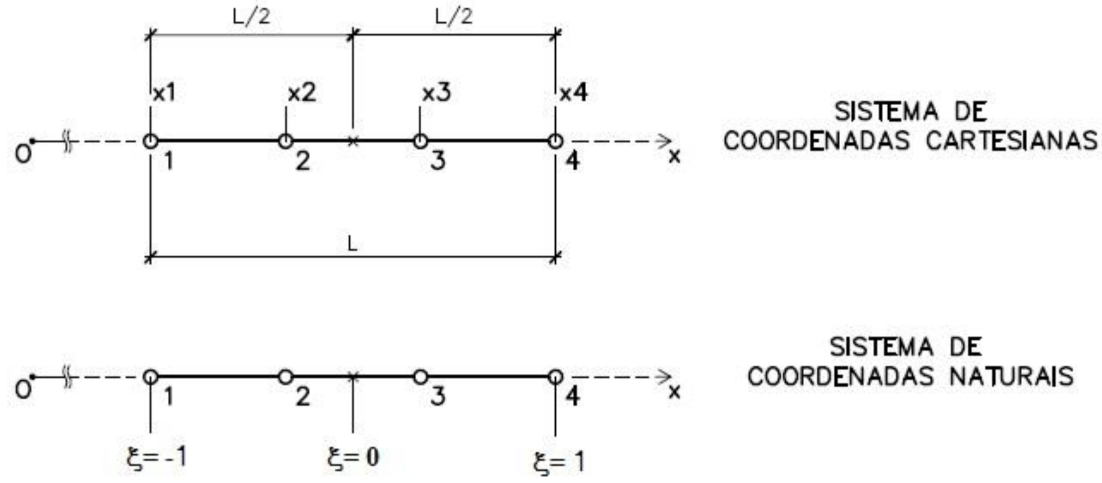
A divisão pelo próprio polinômio avaliado no ponto x_i é feita para garantir assim que a função de forma N_i para esse ponto seja 1.

Esses elementos que podem ser utilizados os polinômios de Lagrange também são chamados de Elementos Lagrangianos.

Observa-se que os deslocamentos nodais, que são graus de liberdade da estrutura, são contínuos na sua interface entre os nós de um elemento e também entre elementos consecutivos. Nesse caso, a função de forma aproximadora deve satisfazer esse requisito de continuidade na interface, neste caso apenas para os deslocamentos nodais. É dito, portanto elemento de continuidade Co, pois garante a continuidade da aproximação da grandeza aproximada, mas não de suas derivadas. Já um elemento C1, garante a continuidade da grandeza aproximada, e também de sua 1a derivada, e não garante as demais derivadas. Esse elemento de continuidade C_1 é utilizado, por exemplo, para vigas fletidas, pois deve-se garantir a continuidade das flechas e de sua 1ª derivada que são as rotações.

2.2. Formulação Paramétrica

Para tratar o elemento sem se preocupar e necessitar de sua localização no sistema cartesiano, suas coordenas *(x,y)*, será utilizado um *Sistema de Coordenadas Natural* na variável ξ, que tem sua origem no meio do domínio do elemento, e varia de -1 (extremidade da esquerda) a 1 (extremidade da direita).



Assim, a função que aproxima os deslocamentos u(x) será escrita agora em função de ξ.

$$u_{(\xi)} = \sum_{i=1}^{n} N_{i(\xi)} . u_i \qquad \underline{N} = \begin{bmatrix} N_{1(\xi)} & N_{2(\xi)} & \cdots & N_{n(\xi)} \end{bmatrix}$$

Porém, como os deslocamentos estão em função de ξ, suas derivadas em relação a *x* ficam:

$$\varepsilon_{x(\xi)} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{x(\xi)} = \frac{\partial u}{\partial \xi} . \frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(\frac{\partial \underline{N}_i}{\partial \xi} . \underline{d}_i \right) . \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

As derivadas de N_i em ξ são imediatas, mas a derivada de ξ em relação a *x*, se não se tem uma relação explícita entre *x* e ξ não é imediata.

Se não houver uma relação explícita entre *x* e ξ, faz-se uma aproximação da geometria do problema, da mesma forma em que se fez para os deslocamentos (podendo-se até mesmos utilizar as mesmas funções de forma).

$$x_{(\xi)} = \sum_{i=1}^{n} N_{i(\xi)} . x_i = \begin{bmatrix} N_{1(\xi)} & N_{2(\xi)} & \cdots & N_{n(\xi)} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \qquad \therefore \; x_{(\xi)} = \underline{N} . \underline{C_n}$$

Em que C_n é a matriz de coordenadas nodais.

Se para representar a geometria do problema foi utilizado as mesmas funções e pontos da aproximação dos deslocamentos, chama-se esta parametrização de *Isoparamétrica*.

Porém, muitas vezes a geometria é facilmente representada com menos pontos do que o que foi utilizado para representar os deslocamentos, nesse caso chama-se de parametrização *Subparamétrica*.

Esta formulação subparamétrica sempre ocorre para *Barras Retas*, pois podem-se utilizar *n* pontos para melhor discretização dos deslocamentos, mas bastam 2 (dois) pontos para representar um segmento de reta.

A derivada $\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)$ fica então:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = \left[\frac{\partial N_{1(\xi)}}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_{2(\xi)}}{\partial \xi} \quad \cdots \quad \frac{\partial N_{n(\xi)}}{\partial \xi}\right] . \underline{C_n}$$

À matriz de derivadas de N em relação a ξ dá-se o nome de $\underline{D_L}$ (Derivadas Locais), e o produto de $\left(\underline{D_L} . \underline{C_n}\right)$ tem-se a matriz jacobiana de transformação da geometria ($\underline{J}$), que para este casa unidimensional de barras é um escalar 1x1.

$\underline{J} = \underline{D_L} . \underline{C_n}$, assim temos que $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \underline{J}$, portanto:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \underline{J}^{-1}$$

Assim, teremos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial \underline{N}_i}{\partial \xi} . \underline{d}_i\right) . \frac{\partial \xi}{\partial x} = \underline{D_L} . \underline{d} . \underline{J}^{-1}$$

Como J, para este caso, é um escalar J_{1x1}, temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \underline{J}^{-1} . \underline{D_L} . \underline{d}$$

Ao produto $\left(\underline{J}^{-1} . \underline{D_L}\right)$ chama-se de matriz $\underline{B}$ $\quad \therefore \underline{B} = \underline{J}^{-1} . \underline{D_L}$

$$u = \left[\, N_1 \;\; | \;\; N_2 \;\; | \;\; N_3 \;\; | \;\; N_4 \,\right] . \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$ *Aproximação dos Deslocamentos*

$$x = \left[N_1^L \;\; | \;\; N_4^L \right] . \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$ *Aproximação da Geometria*

3. PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

3.1. P.T.V. para Barras Deformadas Axialmente

Trabalho Virtual Interno

$$\delta w_i = \int_v \sigma . \delta\varepsilon . dv$$

Trabalho Virtual Externo

$$\delta w_E = X_i . \delta u_i + X_j . \delta u_j + \int_L \left(b_{(x)} . dx \right) . \delta u_{(x)}$$

Em que, X_i e X_j são cargas concentradas aplicadas no ponto x_i e x_j.

$$\delta wi = \delta we$$

$$\int_v \sigma . \delta\varepsilon . dv = \int_L \left(b_{(x)} . dx \right) . \delta u_{(x)} + \sum_{i=1}^{NCC} X_i . \delta u_i$$

Sabendo que:

$$\delta\varepsilon = \frac{d\ \delta u_{(x)}}{dx}$$

$$\sigma = E . \frac{du_{(x)}}{dx}$$

$$\int_L \int_A \left(\frac{du_{(x)}}{dx} . E \right) . \left(\frac{d\ \delta u_{(x)}}{dx} \right) dA . dx = \int_L b_{(x)} . \delta u_{(x)} . dx + \sum_{i=1}^{NCC} X_i . \delta u_i$$

$$\int_L \frac{d\ \delta u_{(x)}}{dx} . EA . \frac{du_{(x)}}{dx}\ dx = \int_L \delta u_{(x)} . b_{(x)}\ dx + \sum_{i=1}^{NCC} X_i . \delta u_i$$

$$\int_L \delta\varepsilon_{(x)} . EA . \varepsilon_{(x)}\ dx = \int_L \delta u_{(x)} . b_{(x)}\ dx + \sum_{i=1}^{NCC} X_i . \delta u_i$$

3.2. Formato matricial do P.T.V.

$\underline{\sigma} = \{\sigma_{(x)}\}$	Vetor de Tensões
$\underline{\varepsilon} = \underline{L}.\underline{u} = \{\varepsilon_{(x)}\}$	Vetor de Deformações
$\underline{L} = \frac{d}{dx}$	Operador de Derivadas
$\underline{u} = \{u_{(x)}\}$	Vetor de Deslocamentos Reais
$\underline{\delta u} = \{\delta u_{(x)}\}$	Vetor de Deslocamentos Virtuais

$u_{(x)} = \underline{N}.\underline{d}$
$\delta u_{(x)} = \underline{N}.\underline{\delta d}$

$$\int_V \underline{\sigma}_{(nx1)}.\underline{\delta\varepsilon}_{(nx1)}.dv = \int_L \underline{b}_{(x)}.\underline{\delta u}_{(x)}\,dx + \sum_{i=1}^{NCC} \underline{X}_i.\underline{\delta u}_{(xi)}$$

Para efetuar a multiplicação matricial de $\underline{\sigma} \times \underline{\delta\varepsilon}$, deve-se transpor um dos termos, assim teremos:

$$\int_L \underline{\delta\varepsilon}^T_{(1xn)}.\underline{\sigma}_{(nx1)}.A\ dx = \int_L \underline{\delta u}^T_{(x)}.\underline{b}_{(x)}.dx + \sum_{i=1}^{NCC} \underline{\delta u}^T.\underline{X}_i$$

$\underline{\delta\varepsilon}^T = (\underline{B}.\underline{\delta d})^T = \underline{\delta d}^T.\underline{B}^T$
$\underline{\sigma} = \underline{E}.\underline{B}.\underline{d}$
$\underline{\delta u}^T = \underline{\delta d}^T.\underline{N}^T$

$\underline{X}_i \rightarrow$ Cargas Concentradas Não Nodais
$\underline{X} \rightarrow$ Cargas Nodais

Teremos então para $\delta wi = \delta we$:

$$\int_L \left(\underline{\delta d}^T.\underline{B}^T\right).\left(\underline{E}.\underline{B}.\underline{d}\right).A\ dx = \int_L \left(\underline{\delta d}^T.\underline{N}^T\right).\underline{b}_{(x)}dx + \underline{\delta d}^T.\underline{X} + \sum_{i=1}^{NCC}\left(\underline{\delta d}^T.\underline{N}^T\big|_{xi}\right).X_i$$

$$\underline{\delta d}^T_{(1xn)}.\left[\left(\left(\int_L \underline{B}^T.\underline{E}.A.\underline{B}\ dx\right).\underline{d} - \int_L \underline{N}^T.\underline{b}_{(x)}dx - \underline{X} - \sum_{i=1}^{NCC}\underline{N}^T\big|_{xi}.X_i\right]_{(nx1)} = 0$$

Como para o P.T.V. o deslocamento virtual (δd^T) é arbitrário e diferente de zero, para a igualdade ser válida temos que:

$$\left[\left(\left(\int_L \underline{B}^T.\underline{E}.A.\underline{B}\ dx\right).\underline{d} - \int_L \underline{N}^T.\underline{b}_{(x)}dx - \underline{X} - \sum_{i=1}^{NCC}\underline{N}^T\big|_{xi}.X_i\right]_{(nx1)} = 0$$

Portanto,

$$\left(\int_L \underline{B}^T.\underline{D}.\underline{B}\ dx\right).\underline{d} = \int_L \underline{N}^T.\underline{b}_{(x)}dx + \underline{X} + \sum_{i=1}^{NCC}\underline{N}^T\Big|_{xi}.X_i$$

$$\underline{k}.\underline{d} = \underline{f_{eq}}^b + \underline{X} + \underline{f_{eq}}^{Xi}$$

Em que:

$\underline{k} = \int_L \underline{B}^T.\underline{D}.\underline{B}\ dx$

$\underline{f_{eq}}^b = \int_L \underline{N}^T.\underline{b}_{(x)}dx$

$\underline{f_{eq}}^{Xi} = \sum_{i=1}^{NCC}\underline{N}^T\Big|_{xi}.X_i$ (N.C.C. = Número de cargas concentradas)

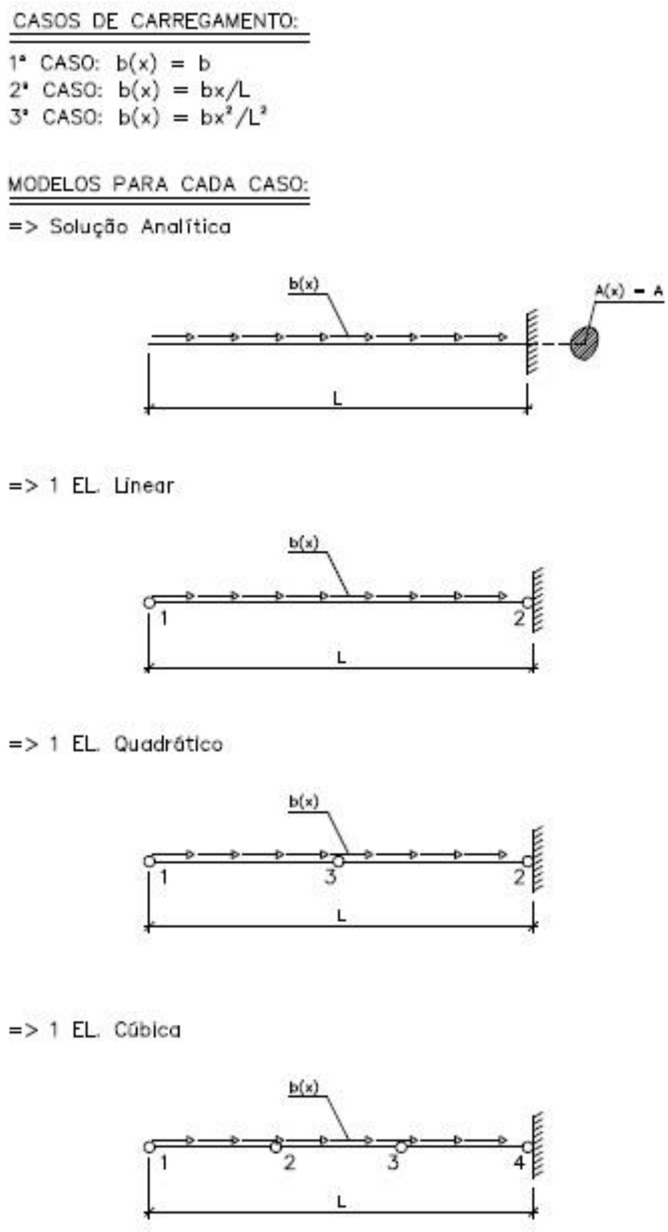
4. ANÁLISE COMPARATIVA

Será analisada uma barra engastada em uma extremidade e livre na outra, submetida a um carregamento de corpo distribuído de compressão ao longo de seu eixo axial, conforme figura abaixo.

O problema aqui proposto tem por objetivo comparar os resultados obtidos da solução analítica com os resultados utilizando elementos finitos de barra, com 2 graus de liberdade por nó, deslocamento horizontal e vertical.

Tal comparação será feita para 3 casos de carregamento diferentes, e em cada caso o problema será calculado de 4 modos diferentes:

- *Solução Analítica*
- *1 (um) Elemento Linear*
- *1 (um) Elemento quadrático*
- *1 (um) Elemento cúbico*



4.1. <u>1º CASO</u>: Carregamento constante, b(x) = b.

4.1.1. Solução Analítica

Dados que:
$A_{(x)} = A$
$b_{(x)} = b$
Módulo de Elasticidade *E*

Partindo da equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{b_{(x)}}{EA}$$

1ª Integração: $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{bx}{EA} + c_1$

2ª Integração: $u_{(x)} = -\frac{bx^2}{2EA} + c_1 . x + c_2$

Condições de contorno:

$u_{(x=L)} = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$\frac{\partial u}{\partial x}_{(x=0)} = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{bL^2}{2EA}}$

Assim, teremos:

<u>*Adimensionalizando*</u>*:*

$$u_{(x)} = \frac{bL^2}{2EA} . \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right) \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = u_{(x)} . \frac{EA}{bL^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

$$\sigma_{(x)} = E . \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{bL}{A} . \left(\frac{x}{L}\right) \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = \sigma_{(x)} . \frac{A}{bL} = -\left(\frac{x}{L}\right)$$

4.1.2. 1 (um) Elemento Linear de 2 (dois) nós

Apenas para esse caso será apresentado duas formas para obtenção da aproximação dos deslocamentos, a formulação clássica, nas coordenadas cartesianas (x, y), e a formulação paramétrica, no sistema de coordenadas naturais (ξ). Nos demais casos será utilizada e somente a formulação paramétrica.

4.1.2.1. Formulação clássica

Forças Concentradas nos nós: $\underline{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \end{Bmatrix}$

Deslocamentos Nodais: $\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$u_{(x)} = a_0 + a_1.x$$

$$\begin{cases} u_{(x=0)} = a_0 + a_1.x = u_1 \\ u_{(x=L)} = a_0 + a_1.x = u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_o = u_1 \\ a_1 = \dfrac{(u_2 - u_1)}{L} \end{cases}$$

$$u_{(x)} = \left(1 - \frac{x}{L}\right).u_1 + \left(\frac{x}{L}\right).u_2$$

$$\underline{N} = \left[1 - \frac{x}{L} \quad | \quad \frac{x}{L}\right]$$

$$\underline{B} = \left[-\frac{1}{L} \quad | \quad \frac{1}{L}\right]$$

$$\underline{D} = A.[E]$$

$$\underline{k}^{(1)} = \int_0^L \underline{B}^T.\underline{D}.\underline{B}\,dx = \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}.AE.\left[-\frac{1}{L} \quad | \quad \frac{1}{L}\right]dx = \frac{EA}{L}.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{f_{eq}}^b = \int_0^L \underline{N}^T.b_{(x)}\,dx = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix}.b\,dx = bL.\begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear abaixo, obtêm-se o deslocamento desconhecido u_1.

$$\underline{k}^{(1)}.\underline{d} = \underline{f_{eq}}^b + \underline{X}$$

$$\left(\frac{EA}{L}\right).\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = bL.\begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{bL^2}{2EA}}$$

Substituindo $\underline{d}$, teremos:

$$\underline{d} = \frac{bL^2}{2EA}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow u_{(x)} = \underline{N}.\underline{d}$$

Adimensionalizando:

$$u_{(x)} = \frac{bL^2}{2EA}.\left(1-\frac{x}{L}\right) \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = u_{(x)}.\frac{EA}{bL^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

$$\sigma_{(x)} = E.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{bL}{2A} \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = \sigma_{(x)}.\frac{A}{bL} = -\frac{1}{2}$$

4.1.2.2. Formulação Paramétrica

Forças Concentradas nos nós: $\underline{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \end{Bmatrix}$

Deslocamentos Nodais: $\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\underline{N} = \left[\tfrac{1}{2}(1-\xi) \;\middle|\; \tfrac{1}{2}(1+\xi)\right] \qquad \underline{D}_L = \left[-\tfrac{1}{2} \;\middle|\; \tfrac{1}{2}\right]$$

$$\underline{J} = \underline{D}_L.\underline{C_n} = \left[-\tfrac{1}{2} \;\middle|\; \tfrac{1}{2}\right].\begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix} = \tfrac{L}{2} \qquad \therefore \left|\underline{J}\right| = \tfrac{L}{2}$$

$$\underline{B} = \underline{J}^{-1}.\underline{D}_L = \tfrac{2}{L}.\left[-\tfrac{1}{2} \;\middle|\; \tfrac{1}{2}\right]$$

$$\underline{k}^{(1)} = \int_{-1}^{1} \underline{B}^T.\underline{D}.\underline{B}.\left|\underline{J}\right| d\xi = \int_{-1}^{1} \tfrac{2}{L}.\begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}.AE.\tfrac{2}{L}.\left[-\tfrac{1}{L} \;\middle|\; \tfrac{1}{L}\right].\tfrac{L}{2}d\xi$$

$$\therefore \; \underline{k}^{(1)} = \frac{EA}{L}.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{f_{eq}}^{b} = \int_{-1}^{1} \underline{N}^T.b.\left|\underline{J}\right| d\xi = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix}.b.\left|\underline{J}\right| d\xi = \frac{bL}{4}.\underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} (1-\xi) \\ (1+\xi) \end{bmatrix} d\xi}_{I_\xi}$$

Através de integração numérica, para: 2n – 1 = 1 (ξ), portanto n = 1 teremos:

$\xi_1 = 0$, $\omega_1 = 2$: $\quad I_\xi = 2\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \therefore \underline{f_{eq}}^{b} = bL.\begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$

Resolvendo o sistema, temos:

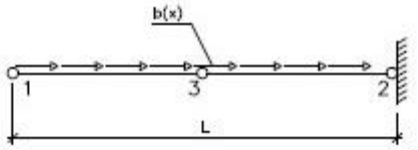
$$\underline{k}^{(1)}.\underline{d} = \underline{f_{eq}}^{b} + \underline{X} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{bL^2}{2EA}}$$

Adimensionalizando:

$$u_{(\xi)} = \frac{bL^2}{4EA}.(1-\xi) \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = u_{(x)}.\frac{EA}{bL^2} = \frac{1}{4}(1-\xi)$$

$$\sigma_{(\xi)} = E.\varepsilon = -\frac{bL}{2A} \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = \sigma_{(x)}.\frac{A}{bL} = -\frac{1}{2}$$

4.1.3. 1 (um) Elemento Quadrático de 3 (três) nós



Forças Concentradas nos nós: $\underline{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Deslocamentos Nodais: $\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \end{Bmatrix}$

$\underline{N} = [\ N_1 \ | \ N_2 \ | \ N_3\ ]$

$N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)$
$N_2 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$
$N_3 = 1-\xi^2$

$\underline{D}_L = [\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi}\ ]$

$N_{1,\xi} = -\frac{1}{2}+\xi$
$N_{2,\xi} = \frac{1}{2}+\xi$
$N_{3,\xi} = -2\xi$

Para discretizar a geometria (reta), bastam os nós 1 e 2, com coordenadas nodais:

$\underline{C}_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix}$, Subparametrizando, ou seja, utilizando as funções de forma linear adotando apenas os nós 1 e 2 teremos:

$$\underline{J} = \underline{D}_L . \underline{C}_n = \left[-\frac{1}{2} \ \middle| \ \frac{1}{2}\right] . \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{L}{2} \qquad \therefore \left|\underline{J}\right| = \frac{L}{2}$$

$$\underline{B} = \underline{J}^{-1} . \underline{D}_L = \frac{2}{L} . \left[-\frac{1}{2}+\xi \ \middle| \ \frac{1}{2}+\xi \ \middle| \ -2\xi\right]$$

$$\underline{k}^{(1)} = \int_{-1}^{1} \underline{B}^T . \underline{D} . \underline{B} . \left|\underline{J}\right| d\xi = \frac{2EA}{L} \underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+\xi \\ \frac{1}{2}+\xi \\ -2\xi \end{bmatrix} . \left[-\frac{1}{2}+\xi \ \middle| \ \frac{1}{2}+\xi \ \middle| \ -2\xi\right] d\xi}_{I_\xi}$$

Através de integração numérica, para: 2n – 1 = 2 (ξ^2), portanto n = 2 teremos:
ξ_1 = – 0.5773502692, ω_1 = 1
ξ_2 = + 0.5773502692, ω_2 = 1

$$\underline{I}_\xi = \begin{bmatrix} 1,16667 & 0,16667 & -1,33333 \\ 0,16667 & 1,16667 & -1,33333 \\ -1,33333 & -1,33333 & 2,66667 \end{bmatrix} \qquad \therefore \underline{k}^{(1)} = \frac{2EA}{L} . \underline{I}_\xi$$

$$\underline{f_{eq}}^{b} = \int_{-1}^{1} \underline{N}^{T}.b.\left|\underline{J}\right| d\xi = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \\ 1-\xi^2 \end{bmatrix} .b.\left|\underline{J}\right| d\xi = \frac{bL}{2}.\underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \\ 1-\xi^2 \end{bmatrix} d\xi}_{I_\xi}$$

Para o carregamento equivalente, 2n – 1 = 2 (ξ^2), portanto n = 2, utilizando os mesmos pontos de Gauss adotados para a rigidez teremos:

$$\underline{I}_\xi = \begin{Bmatrix} 0{,}33333 \\ 0{,}33333 \\ 1{,}33333 \end{Bmatrix} \qquad \therefore \underline{f_{eq}}^{b} = \frac{bL}{2}.\underline{I}_\xi = bL.\begin{Bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 4/6 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema abaixo, obtêm-se os deslocamentos incógnitos:

$$\underline{k}^{(1)}.\underline{d} = \underline{f_{eq}}^{b} + \underline{X} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{bL^2}{2EA}\begin{Bmatrix} 1/6 \\ 4/6 \end{Bmatrix}}$$

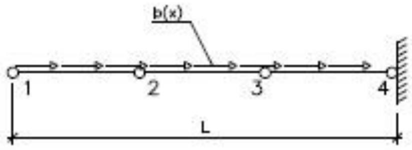
$$u_{(\xi)} = \frac{bL^2}{2EA}.\left[-\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \middle| \quad \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \quad \middle| \quad 1-\xi^2 \right].\begin{Bmatrix} 1{,}00 \\ 0 \\ 0{,}75 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = u_{(x)}.\frac{EA}{bL^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\xi(1-\xi).1{,}0 + (1-\xi^2).0{,}75\right]$$

$$\sigma_{(\xi)} = E.\varepsilon = \frac{bL}{A}.\left[-\frac{1}{2}+\xi \middle| \quad \frac{1}{2}+\xi \quad \middle| \quad -2\xi \right].\begin{Bmatrix} 1{,}00 \\ 0 \\ 0{,}75 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma_{(x)}.\frac{A}{bL} = \left[\left(-\frac{1}{2}+\xi\right).1{,}00 - 2\xi.0{,}75\right]$$

4.1.4. 1 (um) Elemento Cúbico de 4 (quatro) nós



Forças Concentradas nos nós: $\underline{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_4 \end{Bmatrix}$

Deslocamentos Nodais: $\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\underline{N} = [\ N_1 \ | \ N_2 \ | \ N_3 \ | \ N_4\ ]$ $\quad \underline{D}_L = [\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi} \ | \ N_{4,\xi}\ ]$

$$N_1 = -\frac{9}{16}.\left(\xi^3 - \xi^2 - \frac{\xi}{9} + \frac{1}{9}\right) \qquad N_{1,\xi} = -\frac{9}{16}.\left(3\xi^2 - 2\xi - \frac{1}{9}\right)$$
$$N_2 = \frac{27}{16}.\left(\xi^3 - \frac{\xi^2}{3} - \xi + \frac{1}{3}\right) \qquad N_{2,\xi} = \frac{27}{16}.\left(3\xi^2 - \frac{2\xi}{3} - 1\right)$$
$$N_3 = -\frac{27}{16}.\left(\xi^3 + \frac{\xi^2}{3} - \xi - \frac{1}{3}\right) \qquad N_{3,\xi} = -\frac{27}{16}.\left(3\xi^2 + \frac{2\xi}{3} - 1\right)$$
$$N_4 = \frac{9}{16}.\left(\xi^3 + \xi^2 - \frac{\xi}{9} - \frac{1}{9}\right) \qquad N_{4,\xi} = \frac{9}{16}.\left(3\xi^2 + 2\xi - \frac{1}{9}\right)$$

Para discretizar a geometria (reta), bastam os nós 1 e 4, com coordenadas nodais:

$\underline{C_n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix}$, Subparametrizando, ou seja, utilizando as funções de forma linear adotando apenas os nós 1 e 4 teremos:

$$\underline{J} = \underline{D}_L.\underline{C_n} = \left[-\frac{1}{2} \ \middle| \ \frac{1}{2}\right].\begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{L}{2} \qquad \therefore \left|\underline{J}\right| = \frac{L}{2}$$

$$\underline{B} = \underline{J}^{-1}.\underline{D}_L = \frac{2}{L}.[\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi} \ | \ N_{4,\xi}\ ]$$

$$\underline{k}^{(1)} = \int_{-1}^{1} \underline{B}^T.\underline{D}.\underline{B}.\left|\underline{J}\right| d\xi = \frac{2EA}{L}\underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_{1,\xi} \\ N_{2,\xi} \\ N_{3,\xi} \\ N_{4,\xi} \end{bmatrix}.[\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi} \ | \ N_{4,\xi}\ ]\, d\xi}_{I_\xi}$$

Através de integração numérica, para: 2n – 1 = 2 (ξ^4), portanto n = 3 teremos:
ξ_1 = – 0.774596697, ω_1 = 0.5555555556
ξ_2 = 0, ω_2 = 0,8888888889
ξ_3 = + 0.774596697, ω_3 = 0.5555555556

$$\underline{I}_\xi = \begin{bmatrix} 1,8500 & -2,3625 & 0,6750 & -0,1625 \\ -2,3625 & 5,4000 & -3,7125 & 0,6750 \\ 0,6750 & -3,7125 & 5,4000 & -2,3625 \\ -0,1625 & 0,6750 & -2,3625 & 1,8500 \end{bmatrix} \qquad \therefore \underline{k}^{(1)} = \frac{2EA}{L}.\underline{I}_\xi$$

$$\underline{f_{eq}}^{b} = \int_{-1}^{1} \underline{N}^T.b.\left|\underline{J}\right| d\xi = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}.b.\left|\underline{J}\right| d\xi = \frac{bL}{2}.\underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} d\xi}_{I_\xi}$$

Através de integração numérica, para: $2n - 1 = 3$ (ξ^3), portanto $n = 2$ teremos:
$\xi_1 = -0.5773502692$, $\omega_1 = 1$
$\xi_2 = +0.5773502692$, $\omega_2 = 1$

$$\underline{I}_\xi = \begin{Bmatrix} 0,25 \\ 0,75 \\ 0,75 \\ 0,25 \end{Bmatrix} \qquad \therefore \underline{f_{eq}}^{b} = \frac{bL}{2}.\underline{I}_\xi$$

Resolvendo o sistema abaixo, obtêm-se os deslocamentos incógnitos:

$$\underline{k}^{(1)}.\underline{d} = \underline{f_{eq}}^{b} + \underline{X} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{bL^2}{4EA}\begin{Bmatrix} 2,0000 \\ 1,7778 \\ 1,1111 \end{Bmatrix}}$$

$$u_{(\xi)} = \frac{bL^2}{4EA}.[\ N_1 \ | \ N_2 \ | \ N_3 \ | \ N_4\ ].\begin{Bmatrix} 2,0000 \\ 1,7778 \\ 1,1111 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = u_{(x)}.\frac{EA}{bL^2} = \frac{1}{4}[2.N_1 + 1,7778.N_2 + 1,1111.N_3]$$

$$\sigma_{(\xi)} = E.\varepsilon = \frac{bL}{2A}.[\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi} \ | \ N_{4,\xi}\ ].\begin{Bmatrix} 2,0000 \\ 1,7778 \\ 1,1111 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma_{(x)}.\frac{A}{bL} = \frac{1}{2}.\left[2.N_{1,\xi} + 1,7778.N_{2,\xi} + 1,1111.N_{3,\xi}\right]$$

4.1.5. Resultados Comparativos

1º CASO - b(x) = b									
ξ	(x/L)	DESLOCAMENTOS - U(x)				TENSÕES - σ(x)			
		Analítica	2 Nós	3 Nós	4 Nós	Analítica	2 Nós	3 Nós	4 Nós
-1,00	0,00	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,0000	-0,5000	0,0000	0,0001
-0,90	0,05	0,4988	0,4750	0,4988	0,4988	-0,0500	-0,5000	-0,0500	-0,0500
-0,80	0,10	0,4950	0,4500	0,4950	0,4950	-0,1000	-0,5000	-0,1000	-0,1000
-0,70	0,15	0,4888	0,4250	0,4888	0,4888	-0,1500	-0,5000	-0,1500	-0,1500
-0,60	0,20	0,4800	0,4000	0,4800	0,4800	-0,2000	-0,5000	-0,2000	-0,2000
-0,50	0,25	0,4688	0,3750	0,4688	0,4688	-0,2500	-0,5000	-0,2500	-0,2500
-0,40	0,30	0,4550	0,3500	0,4550	0,4550	-0,3000	-0,5000	-0,3000	-0,3000
-0,30	0,35	0,4388	0,3250	0,4388	0,4388	-0,3500	-0,5000	-0,3500	-0,3500
-0,20	0,40	0,4200	0,3000	0,4200	0,4200	-0,4000	-0,5000	-0,4000	-0,4000
-0,10	0,45	0,3988	0,2750	0,3988	0,3988	-0,4500	-0,5000	-0,4500	-0,4500
0,00	0,50	0,3750	0,2500	0,3750	0,3750	-0,5000	-0,5000	-0,5000	-0,5000
0,10	0,55	0,3488	0,2250	0,3488	0,3488	-0,5500	-0,5000	-0,5500	-0,5500
0,20	0,60	0,3200	0,2000	0,3200	0,3200	-0,6000	-0,5000	-0,6000	-0,6000
0,30	0,65	0,2888	0,1750	0,2888	0,2887	-0,6500	-0,5000	-0,6500	-0,6500
0,40	0,70	0,2550	0,1500	0,2550	0,2550	-0,7000	-0,5000	-0,7000	-0,7000
0,50	0,75	0,2188	0,1250	0,2188	0,2187	-0,7500	-0,5000	-0,7500	-0,7500
0,60	0,80	0,1800	0,1000	0,1800	0,1800	-0,8000	-0,5000	-0,8000	-0,8000
0,70	0,85	0,1388	0,0750	0,1388	0,1387	-0,8500	-0,5000	-0,8500	-0,8500
0,80	0,90	0,0950	0,0500	0,0950	0,0950	-0,9000	-0,5000	-0,9000	-0,9000
0,90	0,95	0,0488	0,0250	0,0488	0,0487	-0,9500	-0,5000	-0,9500	-0,9500
1,00	1,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,0000	-0,5000	-1,0000	-1,0000

Tabela 1 - Valores de Deslocamentos e Tensões para o 1º Caso (b).

Pode-se observar que para estes casos estudados, como a função de aproximação e a solução analítica são de mesma natureza (polinomial), os deslocamentos nodais obtidos pelas aproximações coincidem com os deslocamentos calculados a partir da solução analítica.

Nota-se também que para a aproximação obtida para *3 Nós e 4 Nós* qualquer deslocamento calculado irá coincidir com a solução analítica, pois o grau do polinômio aproximador é de mesma ordem de grandeza ou maior que a solução analítica, assim como para as tensões.

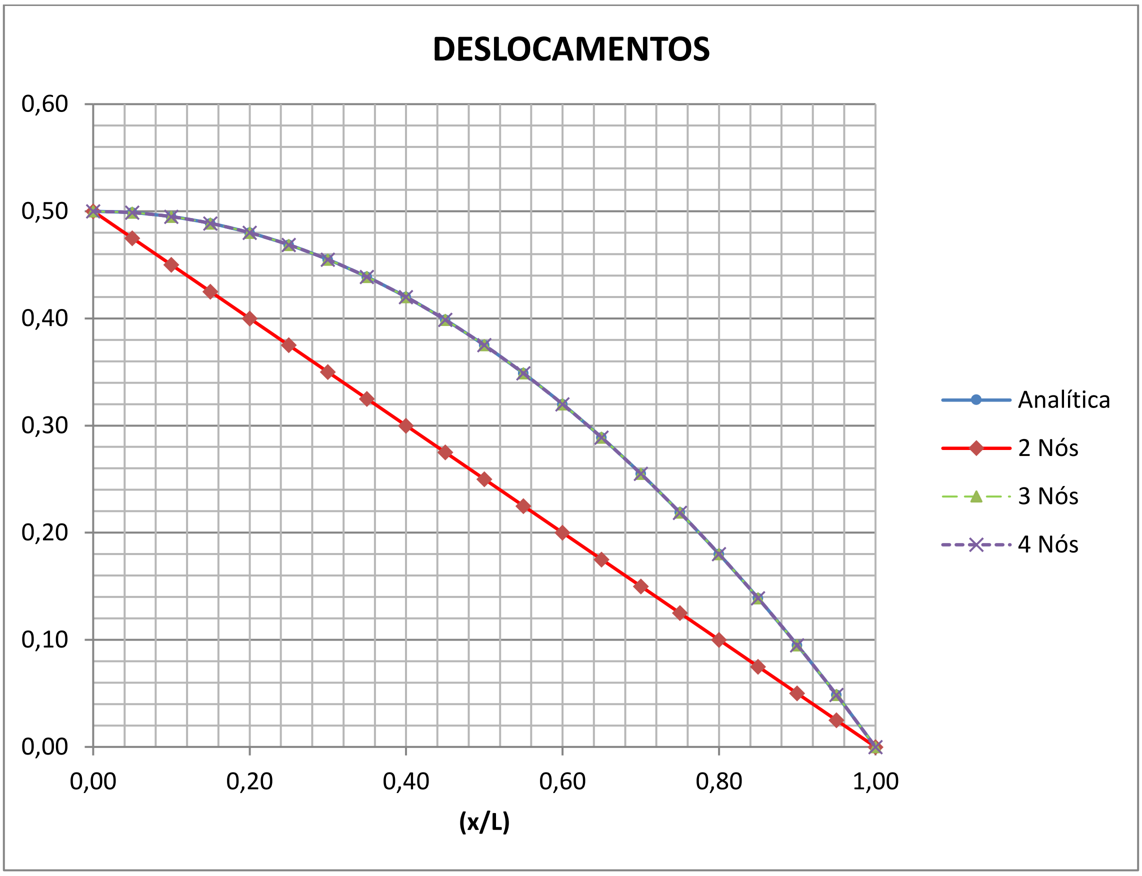


Gráfico 1 - Deslocamentos para 1º Caso (b).

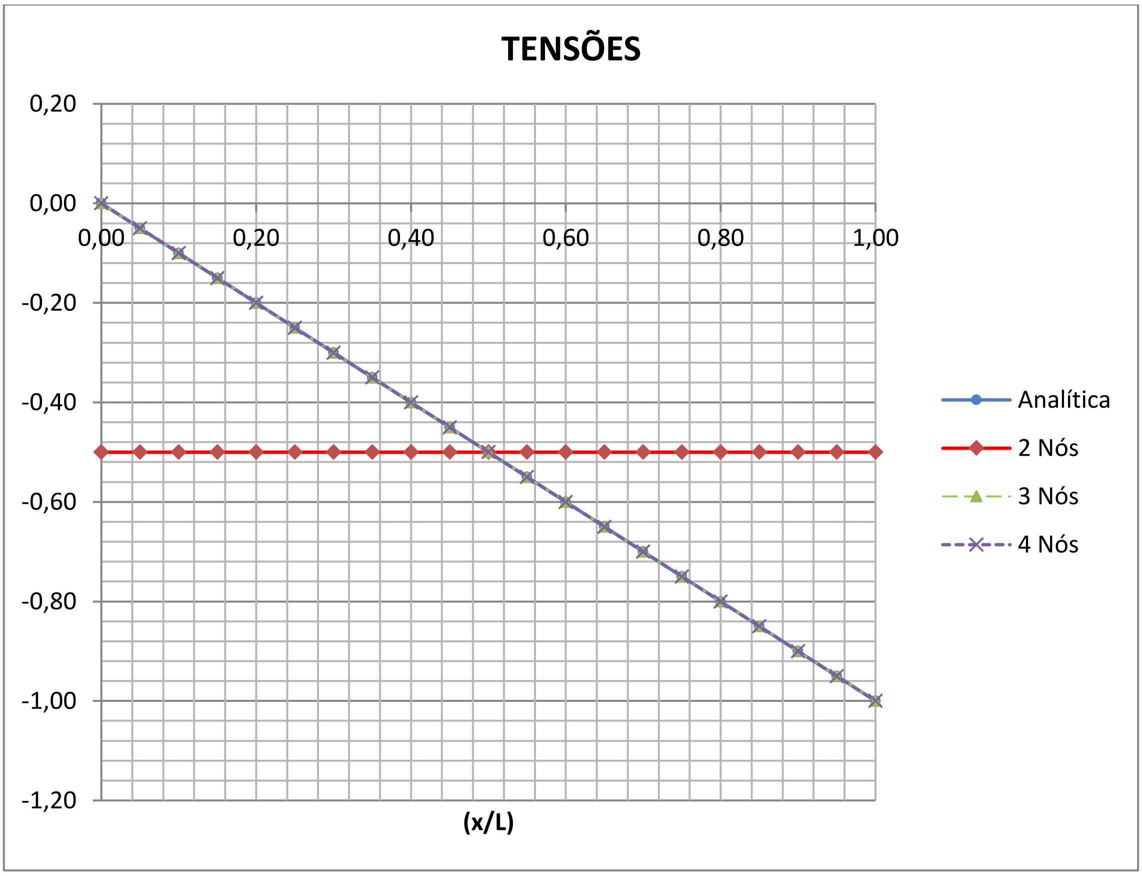


Gráfico 2 - Tensões para o 1º Caso (b).

4.2. 2º CASO: Carregamento linear, b(x) = b.x/L

4.2.1. Solução Analítica

Dados que:
$A_{(x)} = A$
$b_{(x)} = {b.x}/{L}$
Módulo de Elasticidade *E*

Partindo da equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{b_{(x)}}{EA} = -\frac{bx}{EAL}$$

1ª Integração: $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{bX^2}{2EAL} + c_1$

2ª Integração: $u_{(x)} = -\frac{bx^3}{6EAL} + c_1.x + c_2$

Condições de contorno:

$$\frac{\partial u}{\partial x}_{(x=0)} = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$u_{(x=L)} = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{bL^2}{6EA}}$$

Assim, teremos:

Adimensionalizando:

$$u_{(x)} = \frac{bL^2}{6EA}.\left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right) \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = u_{(x)}.\frac{EA}{bL^2} = \frac{1}{6}\left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

$$\sigma_{(x)} = E.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{bL}{2A}.\left(\frac{x}{L}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = \sigma_{(x)}.\frac{A}{bL} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

4.2.2. 1 (um) Elemento Linear de 2 (dois) nós

Forças Concentradas nos nós: $\underline{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \end{Bmatrix}$

Deslocamentos Nodais: $\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$\underline{N} = \left[\tfrac{1}{2}(1-\xi) \;\middle|\; \tfrac{1}{2}(1+\xi) \right]$$

$$\underline{D}_L = \left[-\tfrac{1}{2} \;\middle|\; \tfrac{1}{2} \right]$$

$$\underline{J} = \underline{D}_L . \underline{C_n} = \left[-\tfrac{1}{2} \;\middle|\; \tfrac{1}{2} \right] . \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix} = \tfrac{L}{2} \qquad \therefore \left|\underline{J}\right| = \tfrac{L}{2}$$

$$\underline{B} = \underline{J}^{-1} . \underline{D}_L = \tfrac{2}{L} . \left[-\tfrac{1}{2} \;\middle|\; \tfrac{1}{2} \right]$$

$$\underline{k}^{(1)} = \int_{-1}^{1} \underline{B}^T . \underline{D} . \underline{B} . \left|\underline{J}\right| d\xi = \int_{-1}^{1} \tfrac{2}{L} . \begin{bmatrix} -\tfrac{1}{L} \\ \tfrac{1}{L} \end{bmatrix} . AE . \tfrac{2}{L} . \left[-\tfrac{1}{L} \;\middle|\; \tfrac{1}{L} \right] . \tfrac{L}{2} d\xi$$

$$\therefore \; \underline{k}^{(1)} = \frac{EA}{L} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Parametrizando a carga para o sistema natural, teremos:

$$\left. \begin{matrix} b_{1(x=0)} = 0 \\ b_{1(x=L)} = b \end{matrix} \right\rangle \; b_{(\xi)} = N_1 b_1 + N_2 b_2 \Rightarrow b_{(\xi)} = \tfrac{b}{2}(1+\xi)$$

$$\underline{f_{eq}}^{b} = \int_{-1}^{1} \underline{N}^T . b_{(\xi)} . \left|\underline{J}\right| d\xi = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}(1-\xi) \\ \tfrac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} . \tfrac{b}{2}(1+\xi) . \tfrac{L}{2} d\xi = \tfrac{bL}{8} . \underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} (1-\xi) \\ (1+\xi) \end{bmatrix} (1+\xi)\, d\xi}_{I_\xi}$$

Através de integração numérica, para: $2n - 1 = 1$ (ξ^2), portanto $n = 2$ teremos:

$\xi_1 = -0.5773502692$, $\omega_1 = 1$
$\xi_2 = +0.5773502692$, $\omega_2 = 1$

$$I_\xi = \begin{Bmatrix} 1{,}33333 \\ 2{,}66667 \end{Bmatrix} \qquad \therefore \underline{f_{eq}}^{b} = \tfrac{bL}{8} . I_\xi$$

Resolvendo o sistema, temos:

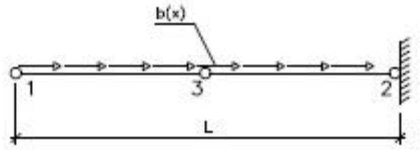
$$\underline{k}^{(1)} . \underline{d} = \underline{f_{eq}}^{b} + \underline{X} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{bL^2}{6EA}}$$

Adimensionalizando:

$$u_{(\xi)} = \frac{bL^2}{12EA} . (1-\xi) \qquad \Rightarrow \qquad \bar{u} = u_{(x)} . \frac{EA}{bL^2} = \frac{1}{12}(1-\xi)$$

$$\sigma_{(\xi)} = E . \varepsilon = -\frac{bL}{6A} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{\sigma} = \sigma_{(x)} . \frac{A}{bL} = -\frac{1}{6}$$

4.2.3. 1 (um) Elemento Quadrático de 3 (três) nós



Forças Concentradas nos nós: $\underline{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Deslocamentos Nodais: $\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \end{Bmatrix}$

$\underline{N} = [\ N_1 \ | \ N_2 \ | \ N_3\ ]$ $\qquad$ $\underline{D}_L = [\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi}\ ]$

$$N_1 = -\tfrac{1}{2}\xi(1-\xi) \qquad N_{1,\xi} = -\tfrac{1}{2} + \xi$$
$$N_2 = \tfrac{1}{2}\xi(1+\xi) \qquad N_{2,\xi} = \tfrac{1}{2} + \xi$$
$$N_3 = 1 - \xi^2 \qquad N_{3,\xi} = -2\xi$$

Para discretizar a geometria (reta), bastam os nós 1 e 2, com coordenadas nodais:

$\underline{C_n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix}$, Subparametrizando, ou seja, utilizando as funções de forma linear adotando apenas os nós 1 e 2 teremos:

$$\underline{J} = \underline{D}_L . \underline{C_n} = \left[-\tfrac{1}{2} \ \middle| \ \tfrac{1}{2}\right] . \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix} = \tfrac{L}{2} \qquad \therefore \left|\underline{J}\right| = \tfrac{L}{2}$$

$$\underline{B} = \underline{J}^{-1} . \underline{D}_L = \tfrac{2}{L} . \left[-\tfrac{1}{2} + \xi \ \middle| \ \tfrac{1}{2} + \xi \ \middle| \ -2\xi\right]$$

$$\underline{k}^{(1)} = \int_{-1}^{1} \underline{B}^T . \underline{D} . \underline{B} . \left|\underline{J}\right| d\xi = \frac{2EA}{L} \int_{-1}^{1} \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} + \xi \\ \dfrac{1}{2} + \xi \\ -2\xi \end{bmatrix} . \left[-\frac{1}{2} + \xi \ \middle| \ \frac{1}{2} + \xi \ \middle| \ -2\xi\right]}_{I_\xi} d\xi$$

Através de integração numérica, para: 2n – 1 = 2 (ξ^2), portanto n = 2 teremos:
ξ_1 = – 0.5773502692, ω_1 = 1
ξ_2 = + 0.5773502692, ω_2 = 1

$$\underline{I}_\xi = \begin{bmatrix} 1{,}16667 & 0{,}16667 & -1{,}33333 \\ 0{,}16667 & 1{,}16667 & -1{,}33333 \\ -1{,}33333 & -1{,}33333 & 2{,}66667 \end{bmatrix} \qquad \therefore \underline{k}^{(1)} = \frac{2EA}{L} . \underline{I}_\xi$$

Parametrizando a carga para o sistema natural, teremos:

$$\left.\begin{array}{r} b_{1(x=0)} = 0 \\ b_{3\left(x=L/2\right)} = \frac{b}{2} \\ b_{2(x=L)} = b \end{array}\right\rangle b_{(\xi)} = N_1^L . b_1 + N_2^L . b_2 \Rightarrow b_{(\xi)} = \frac{b}{2}(1+\xi)$$

$$\underline{f_{eq}}^b = \int_{-1}^{1} \underline{N}^T . b . \left|\underline{J}\right| d\xi = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \\ 1-\xi^2 \end{bmatrix} . b . \left|\underline{J}\right| d\xi = \frac{bL}{8} . \underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -\xi(1-\xi) \\ \xi(1+\xi) \\ 2(1-\xi^2) \end{bmatrix} . (1+\xi)\, d\xi}_{I_\xi}$$

Para o carregamento equivalente, 2n – 1 = 3 (ξ^3), portanto n = 2, utilizando os mesmos pontos de Gauss adotados para a rigidez teremos:

$$\underline{I}_\xi = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1{,}33333 \\ 2{,}66667 \end{Bmatrix} \qquad \therefore \underline{f_{eq}}^b = \frac{bL}{8} . \underline{I}_\xi = bL . \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/6 \\ 1/3 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema abaixo, obtêm-se os deslocamentos incógnitos:

$$\underline{k}^{(1)} . \underline{d} = \underline{f_{eq}}^b + \underline{X} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{bL^2}{2EA} \begin{Bmatrix} 0{,}3333 \\ 0{,}2917 \end{Bmatrix}}$$

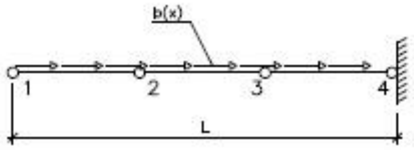
$$u_{(\xi)} = \frac{bL^2}{2EA} . \left[-\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \;\middle|\; \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \;\middle|\; 1-\xi^2 \right] . \begin{Bmatrix} 0{,}3333 \\ 0 \\ 0{,}2917 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = u_{(x)} . \frac{EA}{bL^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\xi(1-\xi) . 0{,}3333 + (1-\xi^2) . 0{,}2917 \right]$$

$$\sigma_{(\xi)} = E . \varepsilon = \frac{bL}{A} . \left[-\frac{1}{2} + \xi \;\middle|\; \frac{1}{2} + \xi \;\middle|\; -2\xi \right] . \begin{Bmatrix} 0{,}3333 \\ 0 \\ 0{,}2917 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma_{(x)} . \frac{A}{bL} = \left[\left(-\frac{1}{2} + \xi \right) . 0{,}3333 - 2\xi . 0{,}2917 \right]$$

4.2.4. 1 (um) Elemento Cúbico de 4 (quatro) nós



Forças Concentradas nos nós: $\underline{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_4 \end{Bmatrix}$

Deslocamentos Nodais: $\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\underline{N} = [\ N_1 \ | \ N_2 \ | \ N_3 \ | \ N_4\ ]$ $\quad \underline{D}_L = [\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi} \ | \ N_{4,\xi}\ ]$

$$N_1 = -\frac{9}{16}.\left(\xi^3 - \xi^2 - \frac{\xi}{9} + \frac{1}{9}\right) \qquad N_{1,\xi} = -\frac{9}{16}.\left(3\xi^2 - 2\xi - \frac{1}{9}\right)$$

$$N_2 = \frac{27}{16}.\left(\xi^3 - \frac{\xi^2}{3} - \xi + \frac{1}{3}\right) \qquad N_{2,\xi} = \frac{27}{16}.\left(3\xi^2 - \frac{2\xi}{3} - 1\right)$$

$$N_3 = -\frac{27}{16}.\left(\xi^3 + \frac{\xi^2}{3} - \xi - \frac{1}{3}\right) \qquad N_{3,\xi} = -\frac{27}{16}.\left(3\xi^2 + \frac{2\xi}{3} - 1\right)$$

$$N_1 = \frac{9}{16}.\left(\xi^3 + \xi^2 - \frac{\xi}{9} - \frac{1}{9}\right) \qquad N_{1,\xi} = \frac{9}{16}.\left(3\xi^2 + 2\xi - \frac{1}{9}\right)$$

Para discretizar a geometria (reta), bastam os nós 1 e 4, com coordenadas nodais:

$\underline{C_n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix}$, Subparametrizando, ou seja, utilizando as funções de forma linear adotando apenas os nós 1 e 4 teremos:

$$\underline{J} = \underline{D}_L.\underline{C_n} = \left[-\frac{1}{2} \ \middle| \ \frac{1}{2}\right].\begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{L}{2} \qquad \therefore \left|\underline{J}\right| = \frac{L}{2}$$

$$\underline{B} = \underline{J}^{-1}.\underline{D}_L = \frac{2}{L}.[\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi} \ | \ N_{4,\xi}\ ]$$

$$\underline{k}^{(1)} = \int_{-1}^{1} \underline{B}^T.\underline{D}.\underline{B}.\left|\underline{J}\right| d\xi = \frac{2EA}{L} \underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_{1,\xi} \\ N_{2,\xi} \\ N_{3,\xi} \\ N_{4,\xi} \end{bmatrix}.[\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi} \ | \ N_{4,\xi}\ ]\, d\xi}_{I_\xi}$$

Através de integração numérica, para: 2n – 1 = 2 (ξ^4), portanto n = 3 teremos:
ξ_1 = – 0.774596697, ω_1 = 0.5555555556
ξ_2 = 0, ω_2 = 0,8888888889
ξ_3 = + 0.774596697, ω_3 = 0.5555555556

$$\underline{I}_\xi = \begin{bmatrix} 1{,}8500 & -2{,}3625 & 0{,}6750 & -0{,}1625 \\ -2{,}3625 & 5{,}4000 & -3{,}7125 & 0{,}6750 \\ 0{,}6750 & -3{,}7125 & 5{,}4000 & -2{,}3625 \\ -0{,}1625 & 0{,}6750 & -2{,}3625 & 1{,}8500 \end{bmatrix} \qquad \therefore \underline{k}^{(1)} = \frac{2EA}{L}.\underline{I}_\xi$$

Parametrizando a carga para o sistema natural, teremos:

$$\left.\begin{array}{l} b_{1(x=0)} = 0 \\ b_{3(x=L/2)} = \frac{b}{2} \\ b_{2(x=L)} = b \end{array}\right\rangle b_{(\xi)} = N_1^L.b_1 + N_2^L.b_2 \Rightarrow b_{(\xi)} = \frac{b}{2}(1+\xi)$$

$$\underline{f_{eq}}^b = \int_{-1}^{1} \underline{N}^T.b.\left|\underline{J}\right| d\xi = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}.b.\left|\underline{J}\right| d\xi = \frac{bL}{4}.\underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}.(1+\xi)\, d\xi}_{I_\xi}$$

Através de integração numérica, para: $2n - 1 = 4$ (ξ^4), portanto $n = 3$ teremos:

$\xi_1 = -0.774596697$, $\omega_1 = 0.5555555556$

$\xi_2 = 0$, $\omega_2 = 0{,}8888888889$

$\xi_3 = +0.774596697$, $\omega_3 = 0.5555555556$

$$\underline{I}_\xi = \begin{Bmatrix} 0{,}06667 \\ 0{,}30000 \\ 1{,}20000 \\ 0{,}43333 \end{Bmatrix} \qquad \therefore \underline{f_{eq}}^b = \frac{bL}{4}.\underline{I}_\xi = bL.\begin{Bmatrix} 0{,}0167 \\ 0{,}0750 \\ 0{,}3000 \\ 0{,}1083 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema abaixo, obtêm-se os deslocamentos incógnitos:

$$\underline{k}^{(1)}.\underline{d} = \underline{f_{eq}}^b + \underline{X} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{bL^2}{EA}\begin{Bmatrix} 0{,}1667 \\ 0{,}1605 \\ 0{,}1173 \end{Bmatrix}}$$

$$u_{(\xi)} = \frac{bL^2}{EA}.[\ N_1 \ | \ N_2 \ | \ N_3 \ | \ N_4\ ].\begin{Bmatrix} 0{,}1667 \\ 0{,}1605 \\ 0{,}1173 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = u_{(x)}.\frac{EA}{bL^2} = [0{,}1667.N_1 + 0{,}1605.N_2 + 0{,}1173.N_3]$$

$$\sigma_{(\xi)} = E.\varepsilon = \frac{2bL}{A}.[\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi} \ | \ N_{4,\xi}\ ].\begin{Bmatrix} 0{,}1667 \\ 0{,}1605 \\ 0{,}1173 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma_{(x)}.\frac{A}{bL} = 2.\left[0{,}1667.N_{1,\xi} + 0{,}1605.N_{2,\xi} + 0{,}1173.N_{3,\xi}\right]$$

4.2.5. Resultados Comparativos

2º CASO - b(x) = b.x/L										
ξ	(x/L)	DESLOCAMENTOS - U(x)					TENSÕES - σ(x)			
		Analítica	2 Nós	3 Nós	4 Nós		Analítica	2 Nós	3 Nós	4 Nós
-1,00	0,00	0,1667	0,1667	0,1667	0,1667		0,0000	-0,1667	0,0835	-0,0002
-0,90	0,05	0,1666	0,1583	0,1702	0,1667		-0,0013	-0,1667	0,0584	-0,0014
-0,80	0,10	0,1665	0,1500	0,1725	0,1665		-0,0050	-0,1667	0,0334	-0,0051
-0,70	0,15	0,1661	0,1417	0,1735	0,1661		-0,0113	-0,1667	0,0084	-0,0113
-0,60	0,20	0,1653	0,1333	0,1733	0,1653		-0,0200	-0,1667	-0,0166	-0,0201
-0,50	0,25	0,1641	0,1250	0,1719	0,1641		-0,0313	-0,1667	-0,0416	-0,0313
-0,40	0,30	0,1622	0,1167	0,1692	0,1622		-0,0450	-0,1667	-0,0666	-0,0450
-0,30	0,35	0,1595	0,1083	0,1652	0,1595		-0,0613	-0,1667	-0,0916	-0,0612
-0,20	0,40	0,1560	0,1000	0,1600	0,1560		-0,0800	-0,1667	-0,1166	-0,0800
-0,10	0,45	0,1515	0,0917	0,1536	0,1515		-0,1013	-0,1667	-0,1416	-0,1012
0,00	0,50	0,1458	0,0833	0,1459	0,1458		-0,1250	-0,1667	-0,1667	-0,1250
0,10	0,55	0,1389	0,0750	0,1369	0,1389		-0,1513	-0,1667	-0,1917	-0,1512
0,20	0,60	0,1307	0,0667	0,1267	0,1307		-0,1800	-0,1667	-0,2167	-0,1800
0,30	0,65	0,1209	0,0583	0,1152	0,1209		-0,2113	-0,1667	-0,2417	-0,2112
0,40	0,70	0,1095	0,0500	0,1025	0,1095		-0,2450	-0,1667	-0,2667	-0,2450
0,50	0,75	0,0964	0,0417	0,0886	0,0964		-0,2813	-0,1667	-0,2917	-0,2813
0,60	0,80	0,0813	0,0333	0,0733	0,0813		-0,3200	-0,1667	-0,3167	-0,3200
0,70	0,85	0,0643	0,0250	0,0569	0,0643		-0,3613	-0,1667	-0,3417	-0,3613
0,80	0,90	0,0452	0,0167	0,0392	0,0452		-0,4050	-0,1667	-0,3667	-0,4051
0,90	0,95	0,0238	0,0083	0,0202	0,0238		-0,4513	-0,1667	-0,3917	-0,4514
1,00	1,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		-0,5000	-0,1667	-0,4168	-0,5002

Tabela 2 - Valores de Deslocamentos e Tensões para o 2º Caso (bx/L).

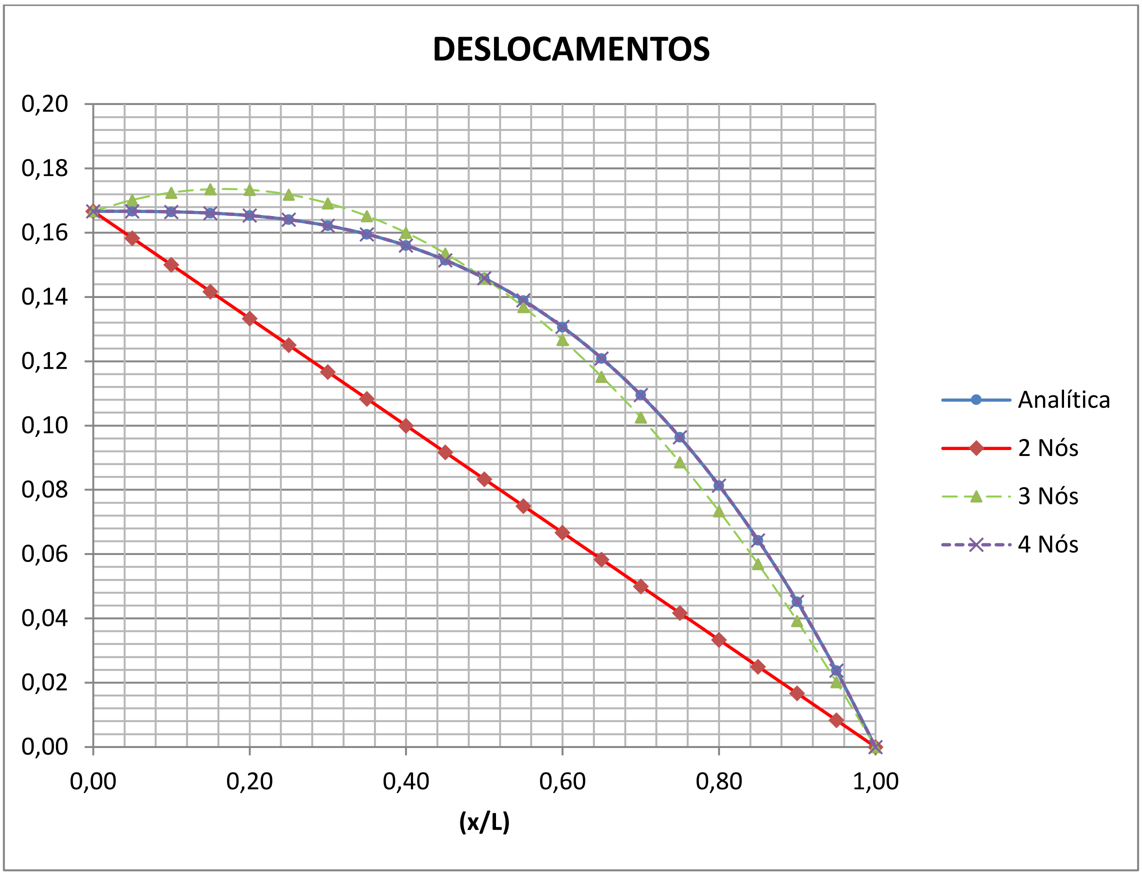


Gráfico 3 - Deslocamentos para o 2º Caso (bx/L).

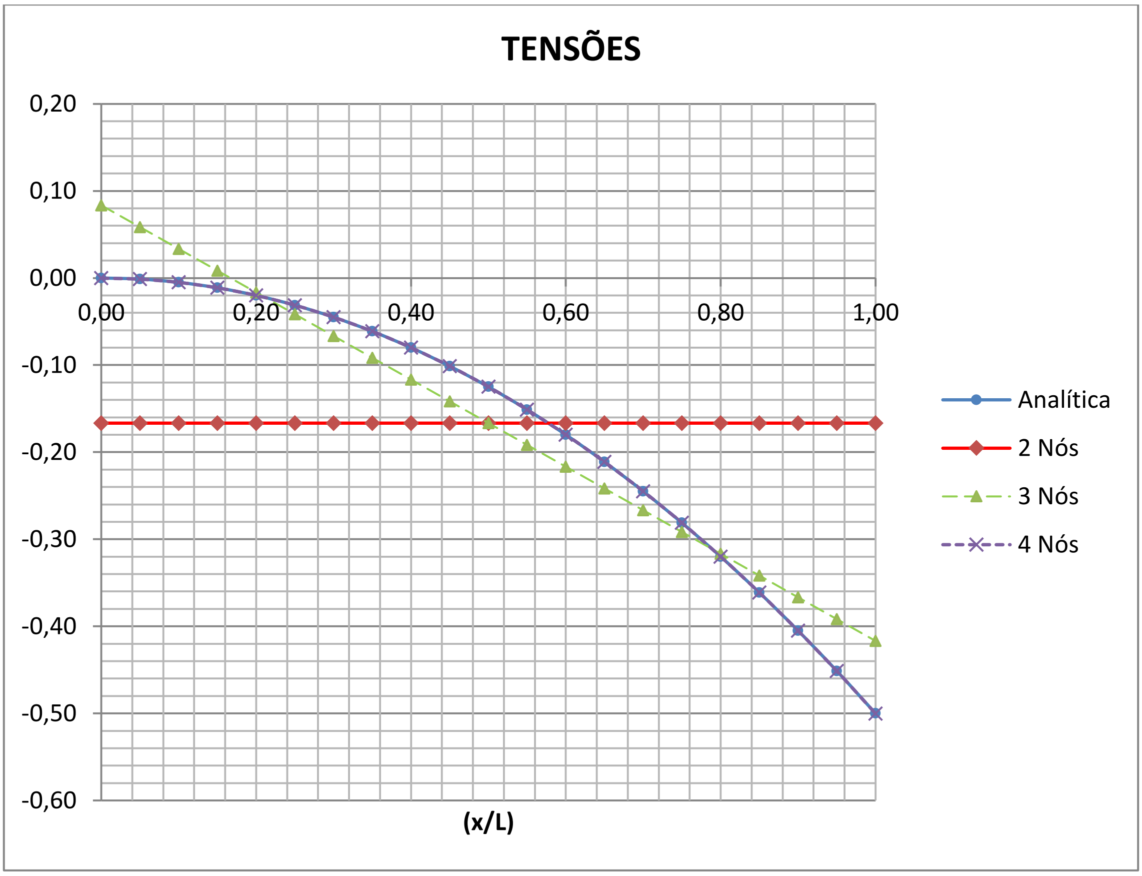


Gráfico 4 - Tensões para o 2º Caso (bx/L).

4.3. <u>3º CASO</u>: Carregamento quadrático, $b(x) = b.x^2/L^2$

4.3.1. Solução Analítica

Dados que:
$A_{(x)} = A$
$b_{(x)} = \frac{b.x^2}{L^2}$
Módulo de Elasticidade *E*

Partindo da equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{b_{(x)}}{EA} = -\frac{bx^2}{EAL^2}$$

1ª Integração: $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{bX^3}{3EAL^2} + c_1$

2ª Integração: $u_{(x)} = -\frac{bx^4}{12EAL^2} + c_1.x + c_2$

Condições de contorno:

$\frac{\partial u}{\partial x}_{(x=0)} = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$u_{(x=L)} = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{bL^2}{12EA}}$

Assim, teremos:

<u>Adimensionalizando</u>:

$$u_{(x)} = \frac{bL^2}{EA}.\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12}.\left(\frac{x}{L}\right)^4\right) \Rightarrow \bar{u} = u_{(x)}.\frac{EA}{bL^2} = \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{12}.\left(\frac{x}{L}\right)^4\right]$$

$$\sigma_{(x)} = E.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{bL}{A}.\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma_{(x)}.\frac{A}{bL} = -\frac{1}{3}\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

4.3.2. 1 (um) Elemento Linear de 2 (dois) nós

Forças Concentradas nos nós: $\underline{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \end{Bmatrix}$

Deslocamentos Nodais: $\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$$u_{(x)} = a_0 + a_1.x$$

$$\begin{cases} u_{(x=0)} = a_0 + a_1.x = u_1 \\ u_{(x=L)} = a_0 + a_1.x = u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_o = u_1 \\ a_1 = \dfrac{(u_2 - u_1)}{L} \end{cases}$$

$$u_{(x)} = \left(1 - \frac{x}{L}\right).u_1 + \left(\frac{x}{L}\right).u_2$$

$$\underline{N} = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \middle| \quad \frac{x}{L}\right]$$

$$\underline{B} = \left[-\frac{1}{L} \quad \middle| \quad \frac{1}{L}\right]$$

$$\underline{D} = A.[E]$$

$$\underline{k}^{(1)} = \int_0^L \underline{B}^T.\underline{D}.\underline{B}\,dx = \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}.AE.\left[-\frac{1}{L} \quad \middle| \quad \frac{1}{L}\right]dx = \frac{EA}{L}.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{f_{eq}}^{b} = \int_0^L \underline{N}^T.b_{(x)}\,dx = \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix}.\frac{bx^2}{L^2}dx = bL.\begin{Bmatrix} 1/12 \\ 1/4 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema linear abaixo, obtêm-se o deslocamento desconhecido u_1.

$$\underline{k}^{(1)}.\underline{d} = \underline{f_{eq}}^{b} + \underline{X}$$

$$\left(\frac{EA}{L}\right).\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = bL.\begin{Bmatrix} 1/12 \\ 1/4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{bL^2}{12EA}}$$

Substituindo $\underline{d}$, teremos:

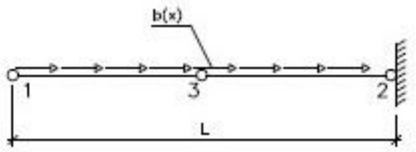
$$\underline{d} = \frac{bL^2}{12EA}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow u_{(x)} = \underline{N}.\underline{d}$$

Adimensionalizando:

$$u_{(x)} = \frac{bL^2}{EA}.\frac{1}{12}\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \Rightarrow \quad \bar{u} = u_{(x)}.\frac{EA}{bL^2} = \frac{1}{12}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$\sigma_{(x)} = E.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{bL}{12A} \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma} = \sigma_{(x)}.\frac{A}{bL} = -\frac{1}{12}$$

4.3.3. 1 (um) Elemento Quadrático de 3 (três) nós



Forças Concentradas nos nós: $\underline{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$

Deslocamentos Nodais: $\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \end{Bmatrix}$

$\underline{N} = [\ N_1 \ | \ N_2 \ | \ N_3\ ]$ $\underline{D}_L = [\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi}\ ]$

$$N_1 = -\tfrac{1}{2}\xi(1-\xi)$$
$$N_2 = \tfrac{1}{2}\xi(1+\xi)$$
$$N_3 = 1-\xi^2$$

$$N_{1,\xi} = -\tfrac{1}{2}+\xi$$
$$N_{2,\xi} = \tfrac{1}{2}+\xi$$
$$N_{3,\xi} = -2\xi$$

Para discretizar a geometria (reta), bastam os nós 1 e 2, com coordenadas nodais:

$\underline{C_n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix}$, Subparametrizando, ou seja, utilizando as funções de forma linear adotando apenas os nós 1 e 2 teremos:

$$\underline{J} = \underline{D}_L . \underline{C_n} = \left[-\tfrac{1}{2} \ \middle| \ \tfrac{1}{2} \right] . \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix} = \tfrac{L}{2} \qquad \therefore \left|\underline{J}\right| = \tfrac{L}{2}$$

$$\underline{B} = \underline{J}^{-1} . \underline{D}_L = \tfrac{2}{L} . \left[-\tfrac{1}{2}+\xi \ \middle| \ \tfrac{1}{2}+\xi \ \middle| \ -2\xi \right]$$

$$\underline{k}^{(1)} = \int_{-1}^{1} \underline{B}^T . \underline{D} . \underline{B} . \left|\underline{J}\right| d\xi = \frac{2EA}{L} \underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+\xi \\ \frac{1}{2}+\xi \\ -2\xi \end{bmatrix} . \left[-\frac{1}{2}+\xi \ \middle| \ \frac{1}{2}+\xi \ \middle| \ -2\xi \right] d\xi}_{I_\xi}$$

Através de integração numérica, para: 2n – 1 = 2 (ξ^2), portanto n = 2 teremos:
ξ_1 = – 0.5773502692, ω_1 = 1
ξ_2 = + 0.5773502692, ω_2 = 1

$$\underline{I}_\xi = \begin{bmatrix} 1{,}16667 & 0{,}16667 & -1{,}33333 \\ 0{,}16667 & 1{,}16667 & -1{,}33333 \\ -1{,}33333 & -1{,}33333 & 2{,}66667 \end{bmatrix} \qquad \therefore \underline{k}^{(1)} = \frac{2EA}{L} . \underline{I}_\xi$$

Parametrizando a carga para o sistema natural, teremos:

$$\left.\begin{array}{r} b_{1(x=0)} = 0 \\ b_{3(x=L/2)} = \frac{b}{4} \\ b_{2(x=L)} = b \end{array}\right\rangle\ b_{(\xi)} = N_1^L.b_1 + N_2^L.b_2 + N_3^L.b_3 \Rightarrow b_{(\xi)} = \frac{b}{4}(\xi^2 + 2\xi + 1)$$

$$\underline{f_{eq}}^{b} = \int_{-1}^{1} \underline{N}^T.b.\left|\underline{J}\right| d\xi = \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \\ \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \\ 1-\xi^2 \end{bmatrix}.b.\left|\underline{J}\right| d\xi$$

$$= \frac{bL}{16}.\underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} -\xi(1-\xi) \\ \xi(1+\xi) \\ 2(1-\xi^2) \end{bmatrix}.(\xi^2 + 2\xi + 1)\, d\xi}_{I_\xi}$$

Para o carregamento equivalente, 2n – 1 = 4 (ξ^4), portanto n = 3, utilizando os mesmos pontos de Gauss adotados para a rigidez teremos:

$$\underline{I}_\xi = \begin{Bmatrix} -0{,}2667 \\ 2{,}4000 \\ 3{,}2000 \end{Bmatrix} \qquad \therefore\ \underline{f_{eq}}^{b} = \frac{bL}{16}.\underline{I}_\xi = bL.\begin{Bmatrix} -0{,}0167 \\ 0{,}1500 \\ 0{,}2000 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema abaixo, obtêm-se os deslocamentos incógnitos:

$$\underline{k}^{(1)}.\underline{d} = \underline{f_{eq}}^{b} + \underline{X} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{bL^2}{2EA}\begin{Bmatrix} 0{,}1667 \\ 0{,}1583 \end{Bmatrix}}$$

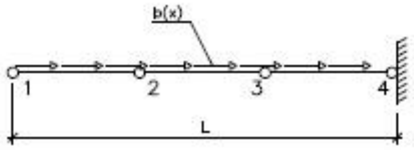
$$u_{(\xi)} = \frac{bL^2}{2EA}.\left[-\frac{1}{2}\xi(1-\xi) \quad \middle| \quad \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \quad \middle| \quad 1-\xi^2\right].\begin{Bmatrix} 0{,}1667 \\ 0 \\ 0{,}1583 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = u_{(x)}.\frac{EA}{bL^2} = \frac{1}{2}.\left[-\frac{1}{2}\xi(1-\xi).0{,}1667 + (1-\xi^2).0{,}1583\right]$$

$$\sigma_{(\xi)} = E.\varepsilon = \frac{bL}{A}.\left[-\frac{1}{2}+\xi \quad \middle| \quad \frac{1}{2}+\xi \quad \middle| \quad -2\xi\right].\begin{Bmatrix} 0{,}1667 \\ 0 \\ 0{,}1583 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma_{(x)}.\frac{A}{bL} = \left[\left(-\frac{1}{2}+\xi\right).0{,}1667 - 2\xi.0{,}1583\right]$$

4.3.4. 1 (um) Elemento Cúbico de 4 (quatro) nós



Forças Concentradas nos nós: $\underline{X} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ X_4 \end{Bmatrix}$

Deslocamentos Nodais: $\underline{d} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$\underline{N} = [\ N_1 \ | \ N_2 \ | \ N_3 \ | \ N_4\ ]$ $\underline{D}_L = [\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi} \ | \ N_{4,\xi}\ ]$

$$N_1 = -\frac{9}{16}.\left(\xi^3 - \xi^2 - \frac{\xi}{9} + \frac{1}{9}\right) \qquad N_{1,\xi} = -\frac{9}{16}.\left(3\xi^2 - 2\xi - \frac{1}{9}\right)$$
$$N_2 = \frac{27}{16}.\left(\xi^3 - \frac{\xi^2}{3} - \xi + \frac{1}{3}\right) \qquad N_{2,\xi} = \frac{27}{16}.\left(3\xi^2 - \frac{2\xi}{3} - 1\right)$$
$$N_3 = -\frac{27}{16}.\left(\xi^3 + \frac{\xi^2}{3} - \xi - \frac{1}{3}\right) \qquad N_{3,\xi} = -\frac{27}{16}.\left(3\xi^2 + \frac{2\xi}{3} - 1\right)$$
$$N_1 = \frac{9}{16}.\left(\xi^3 + \xi^2 - \frac{\xi}{9} - \frac{1}{9}\right) \qquad N_{1,\xi} = \frac{9}{16}.\left(3\xi^2 + 2\xi - \frac{1}{9}\right)$$

Para discretizar a geometria (reta), bastam os nós 1 e 4, com coordenadas nodais:

$\underline{C_n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix}$, Subparametrizando, ou seja, utilizando as funções de forma linear adotando apenas os nós 1 e 4 teremos:

$$\underline{J} = \underline{D}_L.\underline{C_n} = \left[-\frac{1}{2} \ \middle| \ \frac{1}{2}\right].\begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{L}{2} \qquad \therefore \left|\underline{J}\right| = \frac{L}{2}$$

$$\underline{B} = \underline{J}^{-1}.\underline{D}_L = \frac{2}{L}.[\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi} \ | \ N_{4,\xi}\ ]$$

$$\underline{k}^{(1)} = \int_{-1}^{1} \underline{B}^T.\underline{D}.\underline{B}.\left|\underline{J}\right| d\xi = \frac{2EA}{L}\underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_{1,\xi} \\ N_{2,\xi} \\ N_{3,\xi} \\ N_{4,\xi} \end{bmatrix}.[\ N_{1,\xi} \ | \ N_{2,\xi} \ | \ N_{3,\xi} \ | \ N_{4,\xi}\ ]\, d\xi}_{I_\xi}$$

Através de integração numérica, para: 2n – 1 = 4 (ξ^4), portanto n = 3 teremos:
ξ_1 = – 0.774596697, ω_1 = 0.5555555556
ξ_2 = 0, ω_2 = 0,8888888889
ξ_3 = + 0.774596697, ω_3 = 0.5555555556

$$\underline{I}_\xi = \begin{bmatrix} 1,8500 & -2,3625 & 0,6750 & -0,1625 \\ -2,3625 & 5,4000 & -3,7125 & 0,6750 \\ 0,6750 & -3,7125 & 5,4000 & -2,3625 \\ -0,1625 & 0,6750 & -2,3625 & 1,8500 \end{bmatrix} \qquad \therefore \underline{k}^{(1)} = \frac{2EA}{L}.\underline{I}_\xi$$

Parametrizando a carga para o sistema natural, de forma Isoparamétrica, teremos:

$$\left.\begin{aligned} b_{1(x=0)} &= 0 \\ b_{3\left(x={}^{L}/_{3}\right)} &= \frac{b}{9} \\ b_{2\left(x={}^{2L}/_{3}\right)} &= \frac{4b}{9} \\ b_{2(x=L)} &= b \end{aligned}\right\rangle \underline{b}_{(\xi)} = b.\left[\; N_1 \;|\; N_2 \;|\; N_3 \;|\; N_4 \;\right].\begin{Bmatrix} 0 \\ {}^{1}/_{9} \\ {}^{4}/_{9} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{f_{eq}}^{b} = \int_{-1}^{1} \underline{N}^{T}.\underline{b}.\left|\underline{J}\right| d\xi = \frac{bL}{2}.\underbrace{\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix}.\left[\; N_1 \;|\; N_2 \;|\; N_3 \;|\; N_4 \;\right].\begin{Bmatrix} 0 \\ {}^{1}/_{9} \\ {}^{4}/_{9} \\ 1 \end{Bmatrix} d\xi}_{I_\xi}$$

Através de integração numérica, para: 2n – 1 = 6 (ξ^6), portanto n = 4 teremos:
$\xi_1 = -\xi_4 = -0.8611363115$, $\omega_1 = \omega_4 = 0.3478548451$
$\xi_2 = -\xi_3 = -0.3399810435$, $\omega_2 = \omega_3 = 0.6521451548$

$$\underline{I}_\xi = \begin{Bmatrix} 0,0167 \\ 0,0 \\ 0,4500 \\ 0,2000 \end{Bmatrix} \qquad \therefore \underline{f_{eq}}^{b} = \frac{bL}{2}.\underline{I}_\xi = bL.\begin{Bmatrix} 0,0083 \\ 0,0 \\ 0,2250 \\ 0,1000 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema abaixo, obtêm-se os deslocamentos incógnitos:

$$\underline{k}^{(1)}.\underline{d} = \underline{f_{eq}}^{b} + \underline{X} \Rightarrow \boxed{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{bL^2}{EA}\begin{Bmatrix} 0,0833 \\ 0,0827 \\ 0,0673 \end{Bmatrix}}$$

$$u_{(\xi)} = \frac{bL^2}{EA}.\left[\; N_1 \;|\; N_2 \;|\; N_3 \;|\; N_4 \;\right].\begin{Bmatrix} 0,0833 \\ 0,0827 \\ 0,0673 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = u_{(x)}.\frac{EA}{bL^2} = [0,0833.N_1 + 0,0827.N_2 + 0,0673.N_3]$$

$$\sigma_{(\xi)} = E.\varepsilon = \frac{2bL}{A}.\left[\; N_{1,\xi} \;|\; N_{2,\xi} \;|\; N_{3,\xi} \;|\; N_{4,\xi} \;\right].\begin{Bmatrix} 0,0833 \\ 0,0827 \\ 0,0673 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = \sigma_{(x)}.\frac{A}{bL} = 2.\left[0,0833.N_{1,\xi} + 0,0827.N_{2,\xi} + 0,0673.N_{3,\xi}\right]$$

4.3.5. Resultados Comparativos

3º CASO - b(x) = b.x²/L²										
ξ	(x/L)	DESLOCAMENTOS - U(x)					TENSÕES - σ(x)			
		Analítica	2 Nós	3 Nós	4 Nós		Analítica	2 Nós	3 Nós	4 Nós
-1,00	0,00	0,0833	0,0833	0,0834	0,0833		0,0000	-0,0833	0,0666	-0,0167
-0,90	0,05	0,0833	0,0792	0,0863	0,0827		0,0000	-0,0833	0,0516	-0,0079
-0,80	0,10	0,0833	0,0750	0,0885	0,0825		-0,0003	-0,0833	0,0366	-0,0016
-0,70	0,15	0,0833	0,0708	0,0900	0,0825		-0,0011	-0,0833	0,0216	0,0021
-0,60	0,20	0,0832	0,0667	0,0907	0,0826		-0,0027	-0,0833	0,0066	0,0034
-0,50	0,25	0,0830	0,0625	0,0906	0,0828		-0,0052	-0,0833	-0,0084	0,0022
-0,40	0,30	0,0827	0,0583	0,0898	0,0828		-0,0090	-0,0833	-0,0234	-0,0016
-0,30	0,35	0,0821	0,0542	0,0883	0,0826		-0,0143	-0,0833	-0,0384	-0,0078
-0,20	0,40	0,0812	0,0500	0,0860	0,0820		-0,0213	-0,0833	-0,0534	-0,0166
-0,10	0,45	0,0799	0,0458	0,0829	0,0809		-0,0304	-0,0833	-0,0684	-0,0278
0,00	0,50	0,0781	0,0417	0,0792	0,0792		-0,0417	-0,0833	-0,0834	-0,0416
0,10	0,55	0,0757	0,0375	0,0746	0,0767		-0,0555	-0,0833	-0,0983	-0,0578
0,20	0,60	0,0725	0,0333	0,0693	0,0733		-0,0720	-0,0833	-0,1133	-0,0766
0,30	0,65	0,0685	0,0292	0,0633	0,0690		-0,0915	-0,0833	-0,1283	-0,0979
0,40	0,70	0,0633	0,0250	0,0565	0,0635		-0,1143	-0,0833	-0,1433	-0,1216
0,50	0,75	0,0570	0,0208	0,0489	0,0568		-0,1406	-0,0833	-0,1583	-0,1479
0,60	0,80	0,0492	0,0167	0,0407	0,0487		-0,1707	-0,0833	-0,1733	-0,1767
0,70	0,85	0,0398	0,0125	0,0316	0,0391		-0,2047	-0,0833	-0,1883	-0,2080
0,80	0,90	0,0287	0,0083	0,0218	0,0278		-0,2430	-0,0833	-0,2033	-0,2418
0,90	0,95	0,0155	0,0042	0,0113	0,0149		-0,2858	-0,0833	-0,2183	-0,2781
1,00	1,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		-0,3333	-0,0833	-0,2333	-0,3169

Tabela 3 - Valores de Deslocamentos e Tensões para o 3º Caso (b.x²/L²).

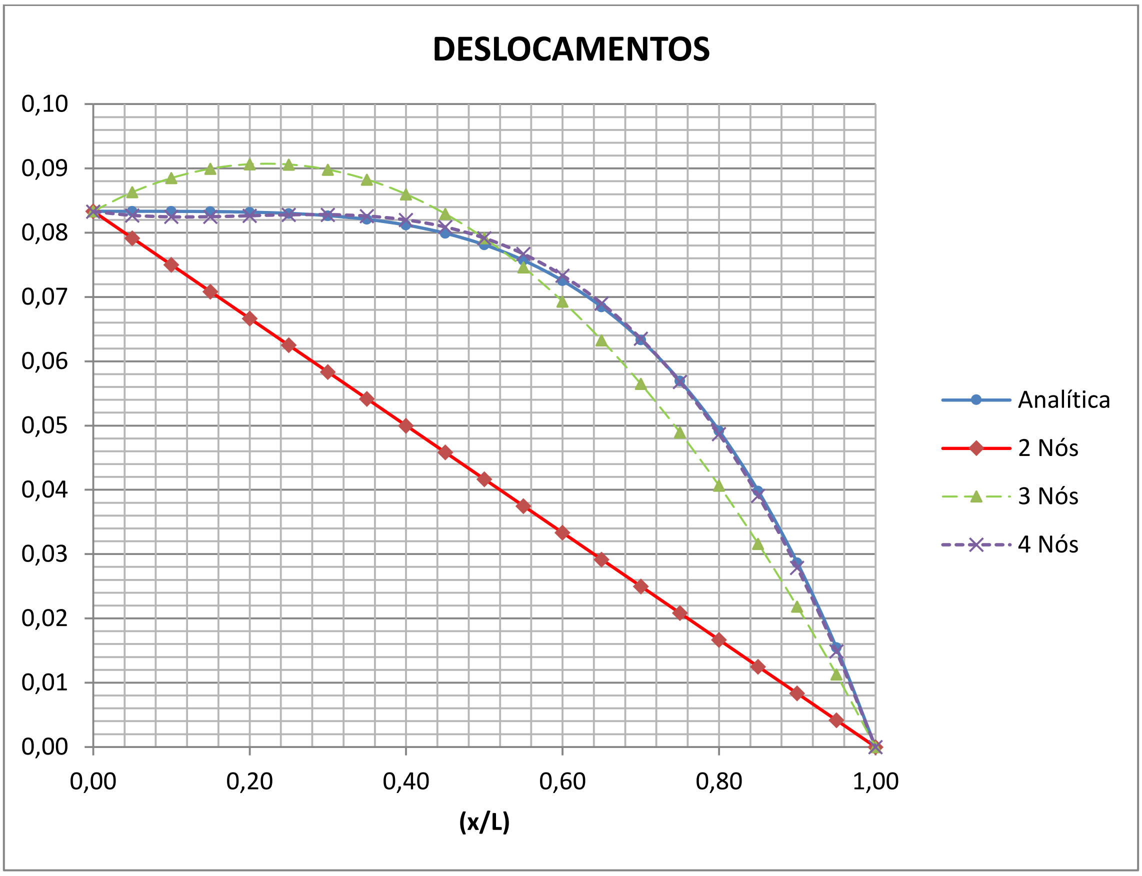


Gráfico 5 - Deslocamentos para o 3º Caso (b.x²/L²).

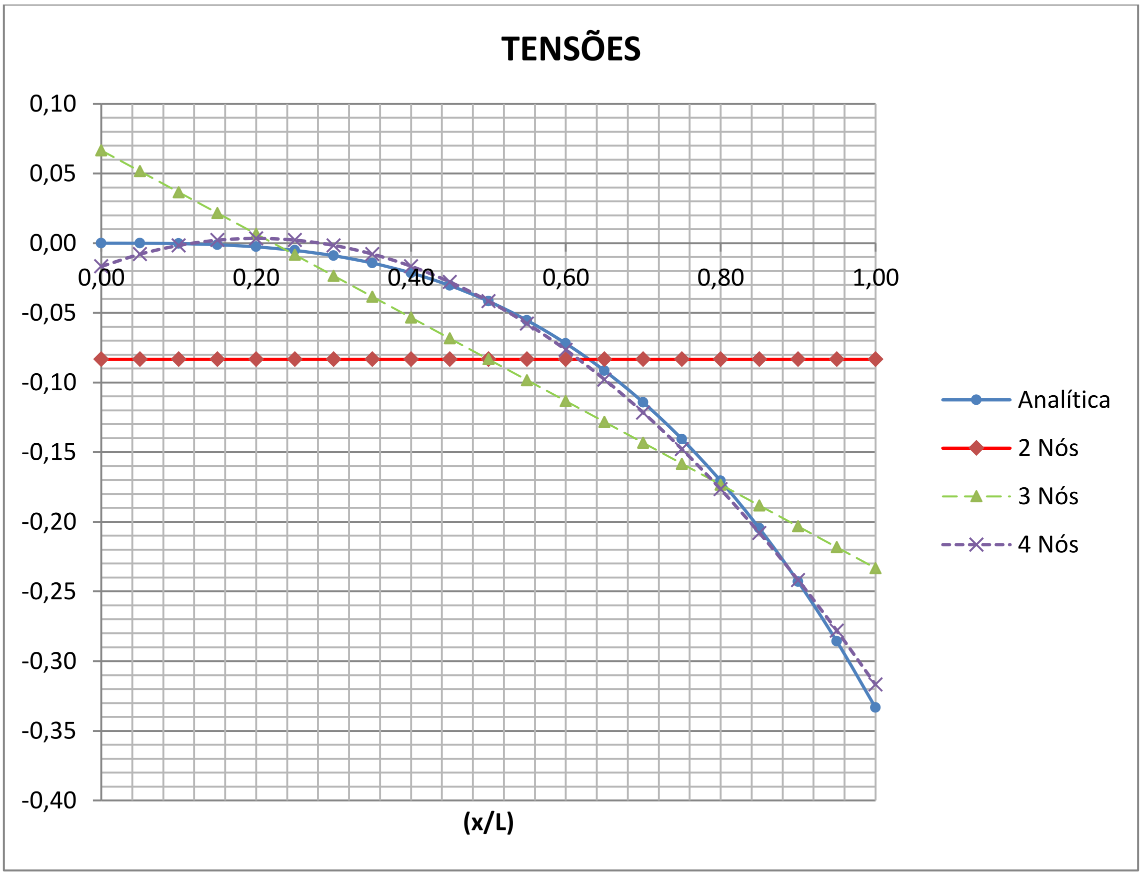


Gráfico 6 - Tensões para o 3º Caso (b.x²/L²).

5. CONCLUSÃO

Para os problemas avaliados neste trabalho, de uma barra engastada submetida a um carregamento de corpo distribuído axialmente, através da comparação com as soluções analíticas pode-se concluir que a utilização de elementos finitos de barra é válida. As aproximações são contínuas para o deslocamento. Como o elemento utilizado é de continuidade Co, pode-se notar que para as tensões não se obteve a mesma continuidade nos resultados.

Porém deve-se ressaltar que devido à natureza polinomial, tanto da solução analítica quanto das aproximações de deslocamentos utilizando-se elementos finitos, neste caso, houve uma convergência entre os valores calculados nos nós do modelo.

Para outro problema, como por exemplo, se a área da barra variasse em função de x, esta mesma convergência dos resultados calculados nos nós do modelo, não seria obtida, pois a solução matemática da equação diferencial que rege o problema não teria um caráter polinomial e, no caso desse exemplo, teria solução logarítmica.