Probabilidade de Ruína Com Fluxo de Caixa e Investimento Governados Por Processos de Difusão

Roger William Câmara Silva

Orientador: Gregório Sarávia Atuncar

Co-orientadora: Aniura Milanés Barrientos

"Ainda que eu tenha o dom de profetizar e conheça todos os mistérios e toda a ciência; ainda que eu tenha tamanha fé, a ponto de transportar montes, se não tiver amor, nada serei."

I Coríntios 13:2 - Bíblia Sagrada

À Sara, minha amada, pelo amor e compreensão.

Aos meus pais pelo esforço, amor e incentivo imensuráveis.

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de agradecer a Deus, por ter me habilitado a realizar este trabalho e por ter estado presente em todos os momentos desta jornada.

Meus agradecimentos também ao professor e amigo Dr. Gregório Sarávia Atuncar pela orientação, direção e companheirismo, não somente durante a realização deste trabalho, mas durante os últimos 6 anos.

Quero agradecer também à professora Dra. Aniura Milanés Barrientos, a qual teve participação fundamental no desenvolvimento dessa dissertação.

Agradeço à Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), por me conceder a oportunidade de realização deste trabalho.

Agradeço aos professores Dr. Michel Spira e Dr. Bernardo Nunes Borges de Lima, do departamento de Matemática da UFMG, pelo incentivo nos primeiros passos desta caminhada.

Finalmente, agradeço à Sara, meus pais e à minha irmã, por sempre estarem ao meu lado fortalecendo-me com bondosas palavras.

Sumário

1 INTRODUÇÃO **9**

2 REVISÃO DA LITERATURA **11**

3 PRELIMINARES **12**

3.1 Definições básicas 12

3.1.1 Movimento Browniano 12

3.1.2 Martingal 12

3.2 Cálculo estocástico e a integral de Itô 13

3.2.1 Construção da integral de Itô 14

3.2.2 A fórmula de Itô 15

3.2.3 Processo de variação quadrática 17

4 MODELO CLÁSSICO SEM INVESTIMENTO **19**

4.1 Processo de reserva de risco 19

4.2 Modelo clássico de Cramér-Lundberg 19

5 MODELO COM INVESTIMENTO **21**

5.1 Descrição do modelo 21

5.2 Probabilidade de ruína 22

6 MODELO DE DIFUSÃO **23**

6.1 Conceitos básicos 23

6.1.1 O processo da reserva 23

6.1.2 Noções de ruína 24

6.2 Modelo de difusão para a reserva 24

6.3 Probabilidade de ruína 26

6.3.1 Probabilidade de ruína em tempo finito 26

6.3.2 Caso homogêneo no tempo 28

6.4 Casos especiais 30

6.4.1 Ausência de juros 30

6.4.2 Juros determinísticos 31

6.4.3 Juros estocásticos 32

7 MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO **34**

7.1 Solução numérica via esquemas de diferenças finitas 34

7.1.1 Conceitos iniciais 34

7.1.2 Esquemas explícitos e esquemas implícitos 35

7.1.3 Solução numérica da equação diferencial parcial 35

7.1.4 Algoritmo de Thomas 37

7.2 Simulação do modelo clássico com investimento 38

7.3 Mudança de medida 39

7.3.1 Aplicação a um modelo mais simples 40

7.3.2 Processo com investimento determinístico e processo com prêmio dependendo da reserva 42

7.3.3 Coeficiente de Lundberg local 42

8 RESULTADOS NUMÉRICOS **45**

8.1 Probabilidade de ruína em tempo finito 45

8.1.1 Indenizações com distribuição Gama 46

8.1.2 Indenizações com distribuição Exponencial 48

8.1.3 Indenizações com distribuição Uniforme 51

8.1.4 Erro de estimação 53

8.2 Probabilidade de ruína em tempo infinito 55

8.2.1 Indenizações com distribuição Gama 56

8.2.2 Indenizações com distribuição Exponencial 57

9 CONCLUSÕES **62**

10 REFERÊNCIAS **64**

A ANEXO I **66**

B ANEXO II **67**

C ANEXO III **68**

Lista de Tabelas

1 Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Gama$(2.25, 1.5)$ e $\delta = 0.1$, fixando ER. 46

2 Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Gama$(2.25, 1.5)$ e $\delta = 0.1$. 47

3 Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Gama$(2.25, 1.5)$ e $\delta = 0.05$. 47

4 Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Gama$(2.25, 1.5)$ e $\delta = 0.01$. 48

5 Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Exponencial$(2/3)$ e $\delta = 0.1$, fixando ER. 49

6 Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Exponencial$(2/3)$ e $\delta = 0.1$. 49

7 Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Exponencial$(2/3)$ e $\delta = 0.05$. 50

8 Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Exponencial$(2/3)$ e $\delta = 0.01$. 50

9 Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Uniforme$(1, 2)$ e $\delta = 0.1$, fixando ER. 51

10 Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Uniforme$(1, 2)$ e $\delta = 0.1$. 52

11 Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Uniforme$(1, 2)$ e $\delta = 0.05$. 52

12 Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Uniforme$(1, 2)$ e $\delta = 0.01$. 53

13 Erro de estimação para a probabilidade de ruína em tempo finito quando $\delta = 0.1$. 54

14 Erro de estimação para a probabilidade de ruína em tempo finito quando $\delta = 0.05$. 54

15 Erro de estimação para a probabilidade de ruína em tempo finito quando $\delta = 0.01$. 55

16 Probabilidade de ruína em tempo infinito quando as indenizações têm distribuição Gama$(2.25, 1.5)$ e $\delta = 0.1$. 57
17 Probabilidade de ruína em tempo infinito quando as indenizações têm distribuição Exponencial$(2/3)$ e $\delta = 0.1$. 59
18 Probabilidade de ruína em tempo infinito quando as indenizações têm distribuição Exponencial$(2/3)$ e $\delta = 0.05$. 60
19 Probabilidade de ruína em tempo infinito quando as indenizações têm distribuição Exponencial$(2/3)$ e $\delta = 0.01$. 60

Resumo

O problema da ruína tem sido amplamente investigado sob diferentes suposições para o processo estocástico que modela as reservas de uma companhia de seguros. O foco desta dissertação consiste em estudar uma das mais importantes partes da matemática atuarial, a qual é conhecida como Teoria da Ruína, dando ênfase ao cálculo da probabilidade de ruína de uma seguradora com o capital sujeito a investimento a uma taxa de juros constante. Supõe-se que as indenizações pagas pela seguradora têm distribuição do tipo cauda leve, o que na prática significa que nenhuma delas é grande o suficiente para afetar o resultado total significativamente. Este estudo começa com a descrição do modelo de risco sem investimentos fazendo-se, em particular, uma descrição minuciosa do modelo clássico de Cramér - Lundberg, o qual descreve, de maneira simples, a evolução do capital de uma companhia de seguros. Em seguida apresenta-se o modelo de risco com investimento, o qual descreve o capital de uma companhia de seguros que recebe juros de suas reservas a uma taxa constante no tempo. Feito isto, passa-se ao estudo do modelo de difusão para a reserva de uma seguradora. Salienta-se que este tópico será visto com um cuidado maior que os demais, sendo analisado em todos os seus detalhes. Considera-se um processo de risco com investimento das reservas, de forma que o fluxo de caixa e a taxa acumulada de juros são aproximados por processos de difusão com coeficientes dependendo do tempo e do atual saldo financeiro. Estuda-se uma equação diferencial parcial (ordinária) para a probabilidade de ruína em tempo finito (infinito). Nesta dissertação investiga-se o regime de validade desta aproximação comparando a solução numérica da referida equação diferencial parcial com os valores obtidos por simulação das probabilidades de ruína em tempo finito para o modelo de risco com investimento, para diferentes tipos de distribuição das indenizações. Realiza-se também o mesmo tipo de comparação para a probabilidade de ruína em tempo infinito. Neste caso, a solução da equação diferencial ordinária é exata e uma técnica de mudança de medida deve ser realizada afim de realizar as simulações. Constata-se que a qualidade das aproximações depende dos parâmetros do modelo. Um objeto de estudo para o futuro seria encontrar uma relação entre os parâmetros, a qual defina em quais situações a aproximação por difusão é satisfatória.

1 INTRODUÇÃO

Cálculos e aproximações para a probabilidade de ruína têm sido uma grande fonte de inspiração e de desenvolvimento de técnicas em matemática atuarial. Neste trabalho, considera-se uma companhia de seguros com valor de sua reserva no instante t denotada por U_t , ou seja, $\{U_t, t \geq 0\}$ é o processo de reserva de risco, sendo $U_0 = 0$ a reserva inicial da seguradora. Denota-se por N_t o número de indenizações a serem pagas aos segurados no intervalo de tempo $(0, t]$. Seja X_i o tamanho (ou valor) da i-ésima indenização. Assumimos que $\{N_t, t \geq 0\}$ é um processo de Poisson homogêneo com intensidade λ, e que os tamanhos das indenizações são independentes do processo do número de indenizações, positivos, mutuamente independentes e identicamente distribuídos com distribuição F, com $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$. A companhia recebe o prêmio de seus segurados que são pagos continuamente a uma taxa constante p. Nesta dissertação dá-se ênfase à situação em que a reserva de uma companhia de seguros está sujeita a investimentos a uma taxa de juros determinística δ.

No capítulo 3 são fornecidos alguns conceitos da teoria de cálculo estocástico e da integral de Itô para o desenvolvimento deste trabalho.

Para o caso em que $\delta = 0$, obtém-se o modelo clássico de Cramér-Lundberg, que teve sua origem no trabalho de Filip Lundberg, o qual em 1903 estabeleceu os fundamentos da teoria do risco atuarial. Posteriormente Harold Cramér incorporou a teoria de processos estocásticos às idéias de Lundberg, contribuindo assim no estabelecimento de fundamentos matemáticos em finanças, assim como na teoria de probabilidades. Mais detalhes deste modelo serão vistos no capítulo 4.

Uma generalização natural do modelo de Cramér-Lundberg é considerar o caso que $\delta > 0$. No capítulo 5 é dada uma descrição deste modelo e suas propriedades. Neste mesmo capítulo mostra-se também a equivalência entre o referido modelo e o caso em que o prêmio pago à seguradora não é constante, mas depende do valor da reserva $U_t = x$, ou seja, $p = p(x)$. Este caso têm grande importância neste trabalho, pois será fundamental para a simulação da probabilidade de ruína em tempo infinito, quando utilizaremos a técnica de mudança de medida.

No capítulo 6, estudamos a situação em que o fluxo de caixa de uma seguradora e a taxa acumulada de juros à qual a reserva desta seguradora está sujeita são processos de difusão. Este capítulo foi elaborado com mais detalhes. Em Norberg (1999), o autor obteve uma equação diferencial parcial (ordinária) para probabilidade de ruína em tempo finito (infinito). Neste trabalho, os principais objetivos são apresentar a aproximação por difusão e investigar a validade da mesma, comparando a solução numérica da equação diferencial parcial, obtida pelo método de diferenças finitas, com simulações do modelo descrito no capítulo 5, utilizando as distribuições Exponencial, Gama e Uniforme para as indenizações. A mesma comparação é feita para a equação diferencial ordinária, porém neste caso a solução da equação é exata e se faz necessária uma mudança de medida para as simulações.

Os métodos para obtenção da solução numérica da equação diferencial parcial, alguns aspectos da técnica de mudança de medida e as técnicas de simulação são detalhados no capítulo 7.

Por fim, no capítulo 8 são apresentados os resultados obtidos para as simulações e comparações realizadas. Foi possível observar que a qualidade das aproximações depende dos parâmetros do modelo, δ, λ, p, u e o tempo até a ruína no caso finito. Um objeto de estudo para o futuro seria encontrar uma relação entre os parâmetros, que defina em quais situações a aproximação por difusão é satisfatória.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Para uma detalhada descrição do modelo de risco clássico de Cramér-Lundberg veja Embrechts e outros (2003). Há uma vasta literatura dedicada ao estudo do caso especial em que $\delta = 0$, para o qual podemos citar Grandell (1991), que trata este caso detalhadamente, apresentando fórmulas exatas e algumas aproximações para a probabilidade de ruína em tempo infinito para algumas distribuições para as indenizações, inclusive aproximação por difusão. Para o caso da probabilidade em tempo finito veja Silva & Atuncar (2004), onde os autores comparam a aproximação por difusão com valores simulados do modelo de Cramér-Lundberg.

Pode-se dizer que existem poucos trabalhos que tratam do caso geral em que $\delta > 0$, comparado à literatura que trata do caso anterior. Dos trabalhos que tratam o caso geral pode-se citar Segerdahl (1954), Harrison (1977) entre outros. Em Sundt & Teugels (1995) os autores tratam este caso e obtém uma fórmula para a probabilidade de ruína em tempo infinito no caso de indenizações com distribuição exponencial. Valores aproximados para a probabilidade de ruína em tempo finito e infinito, com $\delta \geq 0$, para o caso de indenizações com distribuição Exponencial e Pareto são obtidos em Dickson & Waters (1999). Os autores também obtêm valores exatos para a probabilidade de ruína em tempo infinito no caso de indenizações com distribuição Exponencial. Resultados assintóticos para a probabilidade de ruína com $\delta > 0$ podem ser encontrados em Embrechts & Schmidli (1994). Métodos gerais para produzir limites superiores e inferiores para a probabilidade de ruína são dados em Taylor (1980). Para o modelo de difusão com $\delta > 0$, a referência básica deste trabalho é Norberg (1999). Outras referências são Ruohonen (1980) e Paulsen (1993). Salienta-se que nesses trabalhos é considerado o caso mais geral em que δ é estocástico.

3 PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos e resultados importantes, com o objetivo de fornecer as ferramentas necessárias para desenvolvimento desta dissertação.

3.1 Definições básicas

3.1.1 Movimento Browniano

O processo movimento Browniano é de fundamental importância no estudo de outros processos estocásticos. Em nosso estudo, este processo desempenha um papel importante, visto que ele está fortemente ligado aos processos de difusão.

Definição 3.1.1 *Um processo estocástico* $\{W_t, t \geq 0\}$ *é um movimento Browniano unidimensional se:*

i) $W_0 = 0$ *e* W_t *é contínuo em* $t = 0$.

ii) *Todo incremento* $W_{t+s} - W_s$ *é normalmente distribuído com média zero e variância* $\sigma^2 t$*, onde* $\sigma^2 > 0$ *é um parâmetro fixo.*

iii) *Para cada par de intervalos de tempo disjuntos* $[t_1, t_2]$*,* $[t_3, t_4]$*, com* $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$*, os incrementos* $W_{t_4} - W_{t_3}$ *e* $W_{t_2} - W_{t_1}$ *são variáveis aleatórias independentes com distribuição dada em ii), e similarmente para* n *intervalos de tempo disjuntos, onde* n *é um inteiro positivo arbitrário.*

Quando $\sigma^2 = 1$, o processo é chamado movimento Browniano padrão. Para mais detalhes sobre este processo veja Karlin & Taylor (1975).

3.1.2 Martingal

Nesta seção definimos uma filtração e um martingal a tempo contínuo. No estudo da probabilidade de ruína os martingais exercem um papel fundamental, principalmente na técnica de mudança de medida.

Definição 3.1.2 *Seja* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *espaço de probabilidade. Uma filtração em* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *é uma família* $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_t, t \geq 0\}$ *de* σ*-álgebras* $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}$ *tal que*

$$0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_t,$$

ou seja, $\mathcal{A}_t$ é crescente.

Definição 3.1.3 *Um processo $\{N_t, t \geq 0\}$ é adaptado a uma filtração $\{\mathcal{A}_t, t \geq 0\}$ se $N_t \in \mathcal{A}_t \ \forall \ t$.*

Definição 3.1.4 *Um processo estocástico $\{M_t, t \geq 0\}$ é chamado um martingal com respeito à filtração $\{\mathcal{A}_t, t \geq 0\}$ se*

i) *M_t é $\mathcal{A}_t$-adaptado,*

ii) *$E[|M_t|] < \infty$ para todo t e*

iii) *$E[M_{t+s}|\mathcal{A}_t] = M_t$ para todo $s \geq 0$.*

De maneira análoga, pode-se definir um martingal a tempo discreto. Para uma definição formal, veja Shiryaev (1996).

Definição 3.1.5 *Dada uma filtração $\{\mathcal{A}_t, t \geq 0\}$, um instante aleatório T é um tempo de parada em relação a esta filtração, se o evento $\{T \leq t\} \in \mathcal{A}_t$, para todo $t \geq 0$.*

Definição 3.1.6 *Seja $M = \{M_t, 0 \leq t < \infty\}$ um processo contínuo. Se existe uma sequência não-decrescente $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ de tempos de parada de $\{\mathcal{A}_t\}$, tal que $\{M_t^{(n)} \equiv M_{t \wedge T_n}, 0 \leq t < \infty\}$ é um martingal para cada $n \geq 1$ e $P[\lim_{n\to\infty} T_n = \infty] = 1$, então dizemos que M é um martingal local contínuo.*

Definição 3.1.7 *Um processo $N = \{N_t, t \geq 0\}$ é dito ser de variação limitada localmente se ele é adaptado e a função $t \to N_t$ é de variação limitada em cada intervalo limitado de $\mathbb{R}_+$ quase certamente.*

Definição 3.1.8 *Seja $X = M + V$, onde $M = \{M_t, t \geq 0\}$ é um martingal local contínuo e $V = \{V_t, t \geq 0\}$ é um processo contínuo de variação limitada localmente. Então $X = \{X_t, t \geq 0\}$ é um semimartingal.*

3.2 Cálculo estocástico e a integral de Itô

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e definições da teoria do Cálculo estocástico e da integral de Itô.

3.2.1 Construção da integral de Itô

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espaço de probabilidade. Começamos com a seguinte definição:

Definição 3.2.1 *Seja W_t um movimento Browniano. Definimos $\mathcal{F}_t$ como a σ-álgebra gerada pelas variáveis aleatórias $\{W_s\}_{0 \leq s \leq t}$.*

Se uma função $g(\omega)$ é $\mathcal{F}_t$-mensurável, isto significa, intuitivamente, que o valor de $g(\omega)$ pode ser decidido pelos valores de $W_s(\omega)$ para $s \leq t$. Observe que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para $s < t$ e que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}\ \forall\, t$.

Definição 3.2.2 *Seja $\Upsilon = \Upsilon(S, T)$ a classe de funções*

$$f(t, \omega) : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$$

tais que

i) *$(t, \omega) \to f(t, \omega)$ é $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$-mensurável, onde $\mathcal{B}$ representa a σ-álgebra de Borel em $[0, \infty)$.*

ii) *O processo $f(t, \cdot)$ é $\mathcal{F}_t$-adaptado.*

iii) $E\left[\int_S^T f(t, \omega)^2 \, dt\right] < \infty$.

Uma função $\varphi \in \Upsilon$ é chamada elementar se ela tem a forma

$$\varphi(t, \omega) = \sum_j e_j(\omega) \cdot I_{[t_j, t_{j+1})}(t), \tag{1}$$

onde I é a função indicadora. Observe que como $\varphi \in \Upsilon$, cada função e_j deve pertencer a $\mathcal{F}_{t_j}$. Para funções elementares $\varphi(t, \omega)$, definimos a integral de Itô como

$$\int_S^T \varphi(t, \omega) \, dW_t(\omega) = \sum_{j \geq 0} e_j(\omega)[W_{t_{j+1}} - W_{t_j}](\omega). \tag{2}$$

Definição 3.2.3 (A integral de Itô) *Seja $f \in \Upsilon(S, T)$. Definimos a integral de Itô de f de S a T como*

$$\int_S^T f(t, \omega) \, dW_t(\omega) = \lim_{n \to \infty} \int_S^T \varphi_n(t, \omega) \, dW_t(\omega), \tag{3}$$

onde $\{\varphi_n\}$ é uma sequência de funções elementares tais que

$$E\left[\int_S^T (f(t, \omega) - \varphi_n(t, \omega))^2 \, dt\right] \to 0 \qquad \textit{quando } n \to \infty.$$

O limite em (3) existe como um elemento de $L^2(P)$, pois $\{\int_S^T \varphi_n(t,\omega)dW_t(\omega)\}$ forma uma sequência de Cauchy em $L^2(P)$. Mais detalhes sobre a construção da integral de Itô e sobre a existência das funções φ_n podem ser vistos em Oksendal (2003). A seguir apresentamos dois teoremas. O primeiro fornece algumas propriedades da integral de Itô e o segundo mostra que ela é um martingal. As demonstrações podem ser vistas em Oksendal (2003).

Teorema 3.2.4 *Sejam f e $g \in \Upsilon(S,T)$ e $0 \leq S < U < T$. Então*

i) $\int_S^T f\, dW_t = \int_S^U f\, dW_t + \int_U^T f\, dW_t$ *para quase todo* ω

ii) $\int_S^T (cf+g)\, dW_t = c \cdot \int_S^T f\, dW_t + \int_S^T g\, dW_t$ *para quase todo* ω, *onde* c *é constante*

iii) $E[\int_S^T f\, dW_t] = 0$

iv) $\int_S^T f\, dW_t$ *é* $\mathcal{F}_T$*-mensurável.*

Teorema 3.2.5 *Seja* $f(t,\omega) \in \Upsilon(0,T)\ \forall\, T$. *Então*

$$M_t(\omega) = \int_0^t f(s,\omega)\, dW_s$$

é um martingal contínuo com respeito a $\mathcal{F}_t$.

3.2.2 A fórmula de Itô

A integral de Itô pode ser definida para uma classe de integrandos f maior que Υ. Fazemos isso enfraquecendo as condições (ii) e (iii) da Definição 3.2.2 para as seguintes:

ii)' Existe uma família crescente de σ-álgebras $\mathcal{A}_t$; $t \geq 0$ tais que

- **a)** W_t é um martingal com respeito a $\mathcal{A}_t$ e
- **b)** f_t é $\mathcal{A}_t$-adaptado

iii)' $P\left[\int_S^T f(s,\omega)^2\, ds < \infty\right] = 1$

Definição 3.2.6 *Denotamos por* $\Lambda_{\mathcal{A}}(S,T)$ *a classe de processos* $f(t,\omega) \in \mathbb{R}$ *que satisfazem (i) da Definição 3.2.2 e (ii)', (iii)' acima.*

Antes de definirmos a fórmula de Itô, precisamos definir um processo de Itô. Fazemos isso da seguinte maneira:

Definição 3.2.7 *Seja W_t um movimento Browniano em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Um processo de Itô unidimensional é um processo X_t em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ da forma*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)\,ds + \int_0^t v(s,\omega)\,dW_s \tag{4}$$

onde $v \in \Lambda_{\mathcal{A}}$, de forma que

$$P\left[\int_0^t v(s,\omega)^2\,ds < \infty \;\forall\, t \geq 0\right] = 1.$$

Também assumimos que u é $\mathcal{A}_t$-adaptada (onde $\mathcal{A}_t$ é como em (ii)') e

$$P\left[\int_0^t |u(s,\omega)|\,ds < \infty \;\forall\, t \geq 0\right] = 1.$$

Se X_t é um processo de Itô, então ele pode ser escrito de forma abreviada como

$$dX_t = udt + vdW_t. \tag{5}$$

Um dos resultados mais importantes da teoria de integração estocástica, o qual apresentaremos agora, é a regra conhecida como fórmula de Itô. Informalmente, esta regra é uma versão da regra da cadeia do cálculo diferencial clássico. Para uma prova formal deste teorema veja Oksendal (2003).

Teorema 3.2.8 (Fórmula de Itô unidimensional) *Seja X_t um processo de Itô unidimensional dado por*

$$dX_t = udt + vdW_t.$$

Seja $g(t,x) \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ (isto é, g é duas vezes continuamente diferenciável em $[0,\infty) \times \mathbb{R}$). Então

$$Y_t = g(t, X_t)$$

é também um processo de Itô, e

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)\cdot(dX_t)^2, \tag{6}$$

onde $(dX_t)^2 = (dX_t)\cdot(dX_t)$ é calculado de acordo às regras

$$dt\cdot dt = dt\cdot dW_t = dW_t\cdot dt = 0, \;\; dW_t\cdot dW_t = dt.$$

Para a fórmula de Itô n-dimensional veja Anexo I. A seguir enunciamos e provamos parte do exercício 4.3 de Oksendal (2003), o qual será utilizado no capítulo 6 desta dissertação.

Proposição 3.2.9 *Seja X_t e Y_t processos de Itô em $\mathbb{R}$. Então*

$$d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + dX_tdY_t.$$

Prova:

Sejam

$$W_t = \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix},$$

ou seja, W_t é um processo de Itô bidimensional (Veja Anexo I).

Seja $Z(t,\omega) = g(t, W_t) = xy$. Pela fórmula de Itô n-dimensional, n=2, temos que

$$d(X_tY_t) = 0 + Y_tdX_t + X_tdY_t + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot dY_tdX_t + \frac{1}{2} \cdot dY_t \cdot dX_t.$$

Logo

$$d(X_tY_t) = X_tdY_t + Y_tdX_t + dX_tdY_t.$$

□

3.2.3 Processo de variação quadrática

Definição 3.2.10 *Seja $N_t(.) : \Omega \to \mathbb{R}$ um processo estocástico contínuo. Defina*

$$[N]_t \equiv \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{t_k \leq t} (N_{t_{k+1}}(\omega) - N_{t_k}(\omega))^2 \qquad (\textit{limite em probabilidade})$$

onde $0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = t$ e $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$. Chamamos $[N]_t$ a variação quadrática de N no instante t, e $[N] = \{[N]_t, t \geq 0\}$ o processo variação quadrática associado a N.

O martingal M_t definido no Teorema 3.2.5 tem variação quadrática dada por

$$[M]_t = \int_0^t |f(s,\omega)|^2 ds.$$

Os dois teoremas que seguem serão de fundamental importância no capítulo 6, no qual discutimos o modelo de difusão para a reserva de uma seguradora. O primeiro é o Teorema 6.1 e o segundo é o Corolário 4.5 de Chung & Williams (1990).

Teorema 3.2.11 *Um processo $W = \{W_t, t \geq 0\}$ é um movimento Browniano em $\mathbb{R}$ se e somente se existe uma filtração $\{\mathcal{A}_t\}$ tal que W é um martingal local com respeito a $\{\mathcal{A}_t\}$ e com variação quadrática $[W]$ satisfazendo*

$$[W]_t = t \;\; q.c. \; \forall \, t.$$

Teorema 3.2.12 *Seja* $M = \{M_t, t \geq 0\}$ *um martingal local contínuo e de variação limitada localmente. Então*

$$P(M_t = M_0 \ \ \forall\, t \geq 0) = 1.$$

4 MODELO CLÁSSICO SEM INVESTIMENTO

4.1 Processo de reserva de risco

Nesta seção discutimos o modelo clássico de risco. Assumimos que a evolução da reserva $U = \{U_t, t \geq 0\}$ de uma companhia de seguros é embasada em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ como segue. Seja $U_0 = u > 0$ a reserva inicial. Prêmios chegam continuamente a uma taxa constante $p > 0$ e indenizações são pagas em instantes aleatórios $T_1, T_2, \ldots (0 < T_1 < T_2, \ldots)$ onde os valores a serem pagos nesses instantes são descritos por variáveis aleatórias não-negativas $X_1, X_2, \ldots$. O processo de risco resultante, para $t > 0$, é

$$U_t = u + pt - S_t, \tag{7}$$

onde $S_t = \sum_{i \geq 1} X_i I(T_i \leq t)$, e I é a função indicadora. Definimos a variável aleatória $\tau = inf\{t \geq 0 : U_t \leq 0\}$. O valor de τ nos dá o instante da ruína. Devemos também considerar a possibilidade de não haver ruína, o que significa que $\tau = \infty$. Estamos interessados na probabilidade de ruína em tempo infinito $P(\tau < \infty)$, e na probabilidade de ruína antes do tempo t, $P(\tau \leq t)$.

4.2 Modelo clássico de Cramér-Lundberg

O modelo clássico de Cramér Lundberg é caracterizado pelas seguintes suposições:

- Os valores das indenizações $X_1, X_2, \ldots$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição F, média $\mu = E(X_1) < \infty$ e variância $\sigma^2 = Var(X_1)$.

- Os tempos $T_1, T_2, \ldots$ nos quais as indenizações ocorrem são tais que as variáveis aleatórias

  $$Z_i = T_i - T_{i-1}, \qquad i \geq 1$$

  são independentes e identicamente distribuídas, com distribuição exponencial com $E(Z_1) = \lambda^{-1}$.

- O número de indenizações no intervalo $[0, t]$ é denotado por

  $$N_t = sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

onde $sup\{\emptyset\} = 0$.

- As sequências $X_1, X_2, \ldots$ e $T_1, T_2, \ldots$ são independentes.

Uma consequência da definição acima é que N_t é um processo de Poisson com taxa λ. O processo de risco resultante, para $t > 0$, é

$$U_t = u + pt - S_t \tag{8}$$

onde $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$. Pode-se mostrar (Veja Anexo II) que

$$E(S_t) = E\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right) = \lambda\mu t \tag{9}$$

e

$$Var(S_t) = Var\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right) = \lambda t(\sigma^2 + \mu^2). \tag{10}$$

Seja $\rho = \lambda\mu$ o valor total esperado de indenizações por unidade de tempo. Usando resultados sobre passeios aleatórios, é possível provar (veja Sundt, 1993) que se $p > \rho$, então $U_t \to \infty$ q.c. quando $t \uparrow \infty$ enquanto se $p < \rho$, então $U_t \to -\infty$ q.c. quando $t \uparrow \infty$. Pelo segundo resultado, $\psi(u) = 1 \; \forall \; u$. Esta probabilidade também é igual a 1 no caso $p = \rho$, apesar de não haver resultado de convergência. Sendo assim, uma condição óbvia de solvência é satisfeita se

$$p = (1 + \theta)\lambda\mu, \qquad \theta > 0. \tag{11}$$

A constante θ é chamada *coeficiente de segurança*. Para mais detalhes veja Embrechts e outros (2003). Em Silva & Atuncar (2004), os autores mostram resultados de simulações deste modelo para o cálculo da probabilidade de ruína em tempo finito e comparam com os resultados obtidos pela aproximação por difusão.

5 MODELO COM INVESTIMENTO

5.1 Descrição do modelo

Como anteriormente, seja X_i o valor da i-ésima indenização que acontece no instante T_i e N_t o número de indenizações ocorridas no intervalo de tempo $(0,t]$. Assumimos que $\{N_t, t \geq 0\}$ é um processo de Poisson homogêneo com taxa λ e que os valores das indenizações são mutuamente independentes e identicamente distribuídos com distribuição F, onde $E(X) = \mu$. Sendo assim, o valor esperado de indenizações por unidade de tempo é dado por $\rho = \lambda\mu$. Também assumimos que os valores das indenizações são independentes do processo do número de indenizações.

Seja

$$S_t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{N_t} X_i & \text{se} \quad N_t > 0, \\ 0 & \text{se} \quad N_t = 0. \end{cases} \tag{12}$$

o valor total das indenizações agregadas no intervalo de tempo $(0,t]$. O prêmio que a companhia de seguros recebe é pago continuamente com uma taxa constante p. A companhia também recebe juros de sua reserva com uma taxa constante δ. Seja $U_\delta(t)$ o valor da reserva no instante t. Com as suposições acima, Sundt & Teugels (1995) mostram que

$$U_\delta(t) = ue^{\delta t} + p\int_0^t e^{\delta v} dv - \int_0^t e^{\delta(t-v)} dS_v, \tag{13}$$

com $u = U(0)$. Na expressão acima, $ue^{\delta t}$ é o valor atual da reserva inicial no instante t, $\int_0^t pe^{\delta v} dv$ é o valor atual do total de prêmios recebidos pela seguradora até o instante t e $\int_0^t e^{\delta(t-v)} dS_v$ é o valor atual das indenizações pagas pela seguradora até o instante t. É importante observar que a última integral na expressão (13) é constante entre os instantes das chegadas das indenizações.

Considere também o *valor descontado* de U_t no tempo zero, isto é,

$$V_\delta(t) = e^{-\delta t} U_\delta(t) = u + p\, a_t^{(\delta)} - \int_0^t e^{-\delta v} dS_v \tag{14}$$

com

$$a_t^{(\delta)} = \begin{cases} t & \text{se} \quad \delta = 0, \quad ou \\ \frac{1-e^{-\delta t}}{\delta} & \text{se} \quad \delta > 0. \end{cases}$$

Omitiremos o índice δ quando a taxa de juros for zero.

5.2 Probabilidade de ruína

Seja $\psi_\delta(u)$ a probabilidade de ruína em tempo infinito de uma companhia de seguros com reserva inicial u. Então

$$\psi_\delta(u) = P\left\{\bigcup_{t\geq 0}(U_\delta(t)<0)\right\} = P\left\{\bigcup_{t\geq 0}(V_\delta(t)<0)\right\}.$$

Em Sundt & Teugels (1995), os autores dizem que se $U_\delta(v) \geq 0 \; \forall \; v \leq t$, então $U_\delta(v) \geq U(v) \; \forall \; v \leq t$ e $\forall \; \delta \geq 0$. Isto implica que $\psi_\delta(v) \leq \psi(v)$, ou seja, o modelo clássico com $\delta = 0$ fornece um limite superior para a probabilidade de ruína no caso geral $\delta \geq 0$.

Para uma melhor compreensão das diferenças fundamentais entre os casos $\delta = 0$ e $\delta > 0$, vejamos o comportamento do processo $\{V_\delta(t),\, t \geq 0\}$ nestes dois casos. No caso $\delta = 0$, o comportamento de $V_t = U_t = u + pt - S_t$ foi descrito na seção 4.2.

No caso $\delta > 0$ não há convergência para $+\infty$ ou $-\infty$ e sim para a variável aleatória finita

$$V_\delta(\infty) = u + \frac{p}{\delta} - \int_0^\infty e^{-\delta v}\, dS(v). \tag{15}$$

Para ver que a integral na expressão (15) é finita, basta fazer

$$\int_0^\infty e^{-\delta v}\, dS(v) = \sum_{i\geq 1} e^{-\delta T_i} X_i.$$

A igualdade acima é válida pois a integral à esquerda é constante entre os instantes em que chegam as reinvidicações. Como X e T são variáveis aleatórias positivas e independentes, podemos obter

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i\geq 1} e^{-\delta T_i} X_i\right) &= \sum_{i\geq 1} E\left(e^{-\delta T_i} X_i\right) \\
&= \sum_{i\geq 1} E(e^{-\delta T_i}) E(X_i) \\
&= \mu \sum_{i\geq 1} E(e^{-\delta[(T_i - T_{i-1}) + (T_{i-1} - T_{i-2}) + \cdots + (T_1 - T_0)]}) \\
&= \mu \sum_{i\geq 1} [E(e^{-\delta \pi})]^i, \quad \pi \sim T_i - T_{i-1} \\
&= \mu \sum_{i\geq 1} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta}\right)^i < \infty.
\end{aligned}$$

Como $E\left(\int_0^\infty e^{-\delta v}\, dS(v)\right) < \infty$, então $\left(\int_0^\infty e^{-\delta v}\, dS(v)\right) < \infty \quad q.c$.

Desta forma, não é óbvio que $\psi_\delta(u) = 1$ sempre que $p < \rho$. No entanto, se $p \leq -\delta u$ então $\psi_\delta(u) = 1$. Para mais detalhes sobre este modelo, veja Sundt & Teugels (1995).

6 MODELO DE DIFUSÃO

Neste capítulo apresentamos a aproximação por difusão proposta por Norberg (1999) para modelar a reserva de uma seguradora e a taxa acumulada de juros à qual a reserva está sujeita. Chamamos o risco relacionado à reserva de *risco de seguro* e o risco relacionado ao investimento de *risco financeiro*. Salientamos que esta aproximação é válida apenas para o caso em que a distribuição das indenizações é de cauda leve, o que significa que nenhuma das indenizações isoladamente é grande o suficiente para afetar o valor total das indenizações agregadas significativamente.

6.1 Conceitos básicos

6.1.1 O processo da reserva

Considere uma companhia de seguros começando no tempo 0, e seja B_t o valor total de indenizações pagas menos prêmios recebidos no intervalo de tempo $[0, t]$. De acordo com nossa notação,

$$B_t = S_t - pt, \tag{16}$$

com S_t definido como no capítulo anterior. Suponha que a reserva desta companhia é investida continuamente no tempo (ou tomada emprestada) em mercados financeiros que produzem juros. Se existe uma taxa de juros δ_t em cada instante t, então o valor no tempo t de uma unidade monetária investida no tempo 0 é e^{Δ_t} (valor futuro) com $\Delta_t = \displaystyle\int_0^t \delta_\tau \, d\tau$. Da mesma forma, o valor no tempo 0 de uma unidade monetária a ser paga no tempo t é $e^{-\Delta_t}$ (valor presente) e, em geral, o valor de uma unidade monetária no tempo t em relação ao tempo s é $e^{\Delta_t - \Delta_s}$, um fator de desconto se $s \geq t$ e um fator de acumulação se $s \leq t$.

Seja U_0 a reserva inicial da seguradora no instante 0 e U_t a reserva da mesma no instante t. Com as suposições acima, Norberg (1999) mostra que

$$U_t = e^{\Delta_t} \left(U_0 - \int_0^t e^{-\Delta_\tau} \, dB_\tau \right). \tag{17}$$

A relação acima mostra o fato de que a reserva no instante t é feita do capital inicial menos o lucro (prejuízo) líquido até o tempo t, todo montante acumulado com juros compostos.

Uma relação recursiva mais geral pode ser deduzida como

$$U_v = e^{\Delta_v - \Delta_t} \left(U_t - \int_t^v e^{-(\Delta_\tau - \Delta_t)}\, dB_\tau \right), \quad t \leq v. \tag{18}$$

6.1.2 Noções de ruína

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, $\mathcal{A} = \{A_t, t \geq 0\}$ uma filtração, onde $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}$ representa a informação disponível até o tempo t. O risco de seguro é modelado fazendo $\{B_t, t \geq 0\}$ um processo estocástico $\mathcal{A}$-semimartingal com esperança finita, ou seja, $\{B_t, t \geq 0\}$ é $\mathcal{A}$-adaptado e com trajetórias contínuas à direita com limites pela esquerda. Da mesma forma o risco financeiro é introduzido fazendo $\{\Delta_t, t \geq 0\}$ um processo estocástico $\mathcal{A}$-semimartingal.

A ruína da seguradora, definida como o evento em que a reserva torna-se menor ou igual a zero, é o assunto principal desta dissertação. Estamos interessados em estudar a probabilidade de ruína em tempo finito,

$$\begin{aligned} \psi(u,v) &= P\left[\inf_{s\in[0,v]} U_s \leq 0 | U_0 = u\right] && (19)\\ &= P\left[\sup_{s\in[0,v]} \int_0^s e^{-\Delta_\tau} dB_\tau \geq u | U_0 = u\right], && (20)\end{aligned}$$

e a probabilidade de ruína em tempo infinito,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P\left[\inf_{s\geq 0} U_s \leq 0 | U_0 = u\right] && (21)\\ &= P\left[\sup_{s\geq 0} \int_0^s e^{-\Delta_\tau} dB_\tau \geq u | U_0 = u\right]. && (22)\end{aligned}$$

6.2 Modelo de difusão para a reserva

Como citado anteriormente, considerando uma carteira de seguros que é feita de um grande número de riscos individuais independentes, considerando que nenhum deles é grande o suficiente para afetar o valor total das indenizações agregadas significativamente, aproximamos a função B_t por uma difusão, isto é,

$$B_t = -\beta t - \sigma_b W_{b,t}, \tag{23}$$

onde β e σ_b são constantes e $W_{b,t} = \{W_{b,t}, t \geq 0\}$ é um movimento Browniano padrão. Aqui β representa o ganho esperado por unidade de tempo, devido a um coeficiente de segurança $\theta > 0$ no prêmio e σ_b é o desvio padrão do total de pagamentos das indenizações por unidade de tempo. Em nosso trabalho, utilizaremos as difusões para aproximar o modelo clássico com investimento. Sendo assim, representamos β e σ_b por

$$\beta = p - \lambda\mu, \ e \tag{24}$$

$$\sigma_b = \sqrt{\lambda(\sigma^2 + \mu^2)}. \tag{25}$$

Da mesma forma, assumimos que o fator de desconto Δ_t é uma difusão, ou seja,

$$\Delta_t = \delta t + \sigma_d W_{d,t}, \tag{26}$$

onde δ e σ_d são constantes e $W_{d,t} = \{W_{d,t}, t \geq 0\}$ é um movimento Browniano padrão. Se σ_d é positivo, estamos adicionando uma perturbação estocástica a uma taxa de juros constante δ.

Assumimos também que $W_{b,t}$ e $W_{d,t}$ são independentes. Pela Definição 3.2.7, temos que B_t e Δ_t são processos de Itô independentes. Sejam $Z_t = e^{\Delta_t}$ e $Y_t = \left(U_0 - \int_0^t e^{-\Delta_\tau}\, dB_\tau\right)$, ou seja, $U_t = Z_t Y_t$. Pelo Teorema 3.2.8, Z_t e Y_t também são processos de Itô em $\mathbb{R}_+$.

Pela Proposição 3.2.9 e pelo Teorema 3.2.8, temos que:

$$d(U_t) = d(Z_t Y_t) = -dB_t + \frac{U_t}{e^{\Delta_t}} d(e^{\Delta_t}) - d(e^{\Delta_t}) e^{-\Delta_t} dB_t.$$

Temos também que:

$$dB_t = -\beta dt - \sigma_b dW_{b,t}$$

e

$$d(e^{\Delta_t}) = \delta e^{\Delta_t} dt + \sigma_d e^{\Delta_t} dW_{d,t} + \frac{1}{2}\sigma_d^2 e^{\Delta_t} dt = e^{\Delta_t}\left(\delta + \frac{1}{2}\sigma_d^2\right) dt + \sigma_d e^{\Delta_t} dW_{d,t}.$$

Depois de alguns cálculos concluímos que:

$$dU_t = \left[U_t\left(\delta + \frac{1}{2}\sigma_d^2\right) + \beta\right] dt + U_t \sigma_d dW_{d,t} + \sigma_b dW_{b,t}. \tag{27}$$

Agrupando os termos da difusão na expressão (27), definimos

$$dW_t = \frac{U_t \sigma_d dW_{d,t} + \sigma_b dW_{b,t}}{(U_t^2 \sigma_d^2 + \sigma_b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sendo assim,

$$W_t = \int_0^t (U_s^2 \sigma_d^2 + \sigma_b^2)^{-\frac{1}{2}} (U_s \sigma_d dW_{d,s} + \sigma_b dW_{b,s}).$$

Temos que

$$d[W]_t = (dW_t)^2 = \frac{1}{U_t \sigma_d^2 + \sigma_b^2} (U_t \sigma_d dW_{d,t} + \sigma_b dW_{b,t})^2 =$$

$$= \frac{1}{U_t\sigma_d^2 + \sigma_b^2}(U_t^2\sigma_d^2 + \sigma_b^2)dt = dt.$$

Logo, integrando ambos os lados desta equação no intervalo $[0, t]$, obtemos

$$d[W]_t = dt \Rightarrow [W]_t = t.$$

Desta forma, temos que $W = \{W_t, t \geq 0\}$ é um martingal contínuo com variação quadrática $[W]_t = t$. Pelo Teorema 3.2.12, temos que W é um movimento Browniano padrão. Logo, podemos tratar (27) como um caso especial da equação diferencial da forma

$$dU_t = \mu(t, U_t)dt + \sigma(t, U_t)dW_t, \tag{28}$$

onde W é um movimento Browniano padrão e podemos considerar $\mathcal{A}_t = \sigma\{W_s; 0 \leq s \leq t\}$.

É importante dizer que, como U_t é uma difusão, então ele também é um processo Markoviano.

A princípio estaremos interessados na seguinte parametrização:

$$\mu(t, u) = u(\delta(t, u) + \frac{1}{2}\sigma_d^2(t, u)) + \beta(t, u) \tag{29}$$

$$\sigma^2(t, u) = u^2\sigma_d^2(t, u) + \sigma_b^2(t, u), \tag{30}$$

na qual permitimos que os coeficientes β, σ_b, δ, *e* σ_d dependam do tempo e da reserva atual.

Assumimos que os coeficientes $\mu(t, u)$ e $\sigma(t, u)$ são suficientemente suaves para admitir uma única solução para (28) e para assegurar a existência e continuidade de todas as derivadas que apresentaremos na próxima seção.

6.3 Probabilidade de ruína

6.3.1 Probabilidade de ruína em tempo finito

Seja $I[A]$ a função indicadora do evento A. Consideremos a distribuição de probabilidade condicional do mínimo atingido pelo processo da reserva em um intervalo de tempo finito,

$$P(t, u, v, y) = P\left[\inf_{s\in[t,v]} U_s \leq y | U_t = u\right], \quad 0 \leq t \leq v; \ \ u, y \in \mathbb{R}. \tag{31}$$

Para v e y fixos, seja

$$M_t = P\left[\inf_{s\in[0,v]} U_s > y|\mathcal{A}_t\right] = I_t(1 - P(t, U_t, v, y)), \tag{32}$$

onde

$$I_t = 1\left[\inf_{s\in[0,t]} U_s > y\right].$$

Então $M_t = \{M_t, t \geq 0\}$ é um martingal (Veja Anexo III). A segunda igualdade em (32) é devida à propriedade Markoviana do processo da reserva.

Aplicando a fórmula de Itô generalizada Chung & Williams (1990, Teorema 9.2) ao processo M_t, observando que a parte contínua da função I_t é constante e usando (28) obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} dM_t = & - I_t\frac{\partial}{\partial t}P(t, U_t, v, y)dt - I_t\frac{\partial}{\partial x}P(t, U_t, v, y)(\mu(t, U_t)dt + \sigma(t, U_t)dW_t) \\ & - I_t\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(t, U_t, v, y)\sigma^2(t, U_t)dt + I_t(1 - P(t, U_t, v, y)) \\ & - I_{t-}(1 - P(t_-, U_{t_-}, v, y)). \end{aligned} \tag{33}$$

Os cálculos necessários para obtenção desta equação vão além do escopo desta dissertação.

Como a função $I_t(1-P(t, U_t, v, y))$ é contínua em t quase certamente, a parte do salto, correspondente ao último termo, é zero quase certamente. O teorema a seguir, obtido em Norberg (1999), fornece uma equação diferencial para a probabilidade em (31).

Teorema 6.3.1 *A probabilidade em (31) satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t, u, v, y) + \frac{\partial}{\partial x}P(t, u, v, y)\mu(t, u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(t, u, v, y)\sigma^2(t, u) = 0, \tag{34}$$

sujeita às condições

$$\begin{aligned} P(v, u, v, y) &= \begin{cases} 1 & se \quad u \leq y, \\ 0 & se \quad u > y, \end{cases} \\ P(t, y, v, y) &= 1, \qquad 0 \leq t < v, \\ P(t, \infty, v, y) &= 0, \qquad 0 \leq t < v. \end{aligned}$$

Prova:

Em primeiro lugar, assumimos que $\int \frac{\partial}{\partial x}P(t, U_t, v, y)\sigma(t, U_t)dt$ é finita q.c.. Em (33), trocamos o termo com o fator dW_t para o lado esquerdo da equação. Como W e M são martingais, o que está do lado direito da equação também deve ser (o incremento de) um martingal. Temos que este martingal é absolutamente contínuo e portanto de variação limitada. Logo, pelo Teorema 3.2.13 ele deve ser constante, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial t}P(t,u,v,y)dt + \frac{\partial}{\partial x}P(t,u,v,y)\mu(t,u)dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(t,u,v,y)\sigma^2(t,u)dt = K,$$

onde K é constante. O resultado segue imediatamente.

□

É importante observar que a probabilidade de ruína em tempo finito (19) é um caso especial da probabilidade em (31), ou seja,

$$\psi(t,u,v) = P(t,u,v,0).$$

6.3.2 Caso homogêneo no tempo

No caso homogêneo no tempo, quando os coeficientes μ e σ são independentes de t, a função (31) depende de t e v somente através de $v-t$. Desta forma, torna-se útil a introdução da função de três parâmetros $P(u,v,y) = P(0,u,v,y)$, e correspondentemente colocamos

$$\psi(u,v) = P\left[\inf_{s\in[0,v]} U_s \leq 0 | U_0 = u\right]. \tag{35}$$

A seguir apresentamos dois corolários do teorema anterior.

Corolário 6.3.2 *A probabilidade de ruína (35) até o tempo v satisfaz a equação diferencial*

$$-\frac{\partial}{\partial v}\psi(u,v) + \frac{\partial}{\partial u}\psi(u,v)\mu(u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\psi(u,v)\sigma^2(u) = 0, \tag{36}$$

sujeita às condicões

$$\psi(u,0) = \begin{cases} 1 & se \quad u \leq 0, \\ 0 & se \quad u > 0, \end{cases} \tag{37}$$

$$\psi(0,v) = 1, \qquad v > 0, \tag{38}$$

$$\psi(\infty,v) = 0, \qquad v > 0. \tag{39}$$

Se observarmos que $\psi(u,v) = P(T-v,u,T,0)$, a prova deste corolário é imediata.

Devemos observar que estas são condições iniciais e de fronteira. A equação (37) nos diz que, para $v = 0$, a probabilidade de ruína é igual a zero com uma reserva inicial positiva e igual a 1 com uma reserva inicial não positiva. A equação (38) nos diz que com um capital inicial igual a zero, a probabilidade de ruína é igual a 1 para todo instante de tempo v. A equação (39) mostra que com um capital inicial suficientemente grande, a probabilidade de ruína é zero para todo instante de tempo v.

A equação (36) é de fundamental importância para nós, no que diz respeito à obtenção da probabilidade de ruína em tempo finito. Estaremos interessados na solução desta equação quando fizermos as comparações com os valores obtidos da probabilidade de ruína em tempo finito através de simulações do modelo (14). No entanto, a solução de (36) não é facilmente obtida, fazendo-se necessária a obtenção da solução numérica desta equação. Este assunto será discutido com mais detalhes no próximo capítulo.

No caso da probabilidade de ruína em tempo infinito a situação é mais simples. No caso homogêneo no tempo ela é uma função de apenas uma variável:

$$\psi(u) = P\left[\inf_{s\geq 0} U_s \leq 0 | U_0 = u\right]. \tag{40}$$

Denotamos por ψ' e ψ'' a primeira e segunda derivadas de ψ respectivamente.

Corolário 6.3.3 *A probabilidade de ruína (40) satisfaz a equação diferencial ordinária*

$$\psi'(u)\mu(u) + \frac{1}{2}\psi''(u)\sigma^2(u) = 0 \tag{41}$$

sujeita às condições

$$\psi(0) = 1, \tag{42}$$

$$\psi(\infty) = 0. \tag{43}$$

A prova deste corolário é imediata a partir do corolário 2.

Estaremos interessados na solução de (41), afim de comparar os valores desta solução, para alguns casos especiais, com os resultados obtidos para a probabilidade de ruína em tempo infinito utilizando uma técnica de mudança de medida.

A função ψ definida por (41) é reconhecida como a função escala da difusão, veja Karatzas & Shreve (1991). Se a integral da função $\mu(u)/\sigma^2(u)$ está bem definida $\forall\ u > 0$, então

$$\psi'(u) = \eta(u), \tag{44}$$

onde

$$\eta(u) = c\exp\left(-2\int_0^u \frac{\mu(\xi)}{\sigma^2(\xi)}d\xi\right) \tag{45}$$

com c constante. Em Ruohonen (1980), o autor mostra que se η em (45) é integrável em $(0,\infty)$, então a solução de (44) sujeita à (42) e (43) é dada por

$$\psi(u) = \frac{\int_u^\infty \eta(\varsigma)d\varsigma}{\int_0^\infty \eta(\varsigma)d\varsigma}. \tag{46}$$

Considerando Z uma variável aleatória com distribuição acumulada H obtida pela normalização de η a uma densidade de probabilidade, obtemos

$$\psi(u) = \frac{1 - H(u)}{1 - H(0)} = P[Z > u | Z > 0]. \tag{47}$$

Com este procedimento, pode-se obter a solução diretamente através do reconhecimento de η como parte essencial de uma densidade de probabilidade.

6.4 Casos especiais

Nesta seção estudamos o caso especial de (29) e (30), onde $\beta,\ \sigma_b,\ \delta\ e\ \sigma_d$ são constantes. Devido a (29) e (30), U é homogêneo no tempo e (41) se aplica. Neste caso são obtidas fórmulas explícitas para a probabilidade de ruína em tempo infinito.

6.4.1 Ausência de juros

No caso em que os juros não existem, consideramos $\beta > 0$ (condição de solvência), $\sigma_b > 0$ e $\delta = \sigma_d = 0$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P\left[\inf_{s\geq 0}(U_0 - \int_0^s dB_\tau) \leq 0 | U_0 = u\right] = P\left[\inf_{s\geq 0}(u - B_s) \leq 0\right] \\ &= P\left[\inf_{s\geq 0}(B_s) \geq u\right]\end{aligned}$$

Este é um problema clássico e sua solução é bem conhecida, veja, por exemplo Lerche (1986), o qual mostra que

$$\psi(u) = \exp\left(-\frac{2\beta}{\sigma_b^2}u\right). \tag{48}$$

Este resultado segue facilmente pelo método da função escala. As condições (42) e (43) podem ser verificadas, pois $\{-\beta t - \sigma_b dW_{b,t}, t \geq 0\}$ é um movimento Browniano começando em zero, com coeficiente de tendência negativo e portanto tem um máximo finito. Sendo assim, existe um u suficientemente grande, tal que (43) é satisfeita.

Para este caso $\mu(\xi) = \beta$ e $\sigma^2(\xi) = \sigma_b^2$. Portanto, por (45),

$$\eta(u) = c \exp\left(-2\int_0^u \frac{\beta}{\sigma_b^2} d\xi\right) = c \exp\left(-\frac{2\beta}{\sigma_b^2}u\right), \tag{49}$$

que essencialmente é a densidade da distribuição Exponencial com parâmetro $2\beta/\sigma_b^2$. Consequentemente, por (47) temos que

$$\psi(u) = \frac{1 - H(u)}{1 - H(0)} = \frac{1 - (1 - \exp(-2\beta/\sigma_b^2))}{1 - (1 - \exp(0))} = \exp\left(-\frac{2\beta}{\sigma_b^2}u\right). \tag{50}$$

Em Grandell (1991), o autor apresenta algumas comparações dos resultados obtidos pela aproximação por difusão para $\psi(u)$ com resultados exatos para algumas distribuições das indenizações.

6.4.2 Juros determinísticos

Esta é a situação na qual teremos mais interesse nesta dissertação, tanto na obtenção da probabilidade de ruína em tempo finito quanto infinito. Para estudar este caso, basta considerar $\sigma_d = 0$. Então $\mu(\xi) = \xi\delta + \beta$ e $\sigma^2(u) = \sigma_b^2$. Portanto, por (45)

$$\eta(u) = c\exp\left(-2\int_0^u \frac{\xi\delta+\beta}{\sigma_b^2}d\xi\right) = c\exp\left(\frac{-(\delta u^2 + 2\beta u)}{\sigma_b^2}\right)$$

$$c\exp\left(-\frac{\delta}{\sigma_b^2}\left[\left(u+\frac{\beta}{\delta}\right)^2 - \frac{\beta^2}{\delta^2}\right]\right) = k\exp\left(-\frac{\delta}{\sigma_b^2}\left(u+\frac{\beta}{\delta}\right)^2\right), \tag{51}$$

onde k é constante. Reconhecemos $\eta(u)$ como a parte essencial da densidade de uma distribuição Normal $(-\beta/\delta, \sigma_b^2/2\delta)$. Segue que H em (47) é dada por

$$H(u) = \Phi\left(\frac{u+\beta/\delta}{\sigma_b/\sqrt{2\delta}}\right), \tag{52}$$

onde Φ é a distribuição acumulada da Normal$(0,1)$. Este resultado também foi encontrado em Harrison (1977).

Inserindo (51) em (46) obtemos o seguinte:

$$\psi(u) = \frac{\int_u^\infty \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\sigma_b}\left(\varsigma+\frac{\beta}{\delta}\right)\right)^2\right)d\varsigma}{\int_0^\infty \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{\delta}}{\sigma_b}\left(\varsigma+\frac{\beta}{\delta}\right)\right)^2\right)d\varsigma}.$$

Fazendo $x = \frac{\sqrt{\delta}}{\sigma_b}\varsigma + \frac{\beta}{\sigma_b\sqrt{\delta}}$, $a = \frac{\beta}{\sigma_b\sqrt{\delta}}$ e $b = \frac{\sqrt{\delta}}{\sigma_b}u$, temos que

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \frac{\int_{a+b}^\infty \exp\left(-x^2\right)dx}{\int_a^\infty \exp\left(-x^2\right)dx} \\
&= \frac{\int_a^\infty \exp\left(-(x+b)^2\right)dx}{\int_a^\infty \exp\left(-x^2\right)dx} \\
&= \exp(-b^2)\frac{\int_a^\infty \exp\left(-x^2-2xb\right)dx}{\int_a^\infty \exp\left(-x^2\right)dx} \\
&\leq \exp(-b^2-2ab) \\
&= \exp\left(-\frac{\delta u^2 + 2\beta u}{\sigma_b^2}\right)
\end{aligned} \tag{53}$$

Por (53) podemos ver que a probabilidade de ruína neste caso tem um limite superior superexponencial. De fato, ela é a probabilidade de ruína (50) multiplicada pelo fator

$\exp(-\delta u^2/\sigma_b^2)$, o qual determina o comportamento de (53) para u grande. Portanto, concluímos que se existe uma taxa de juros positiva e determinística, então a probabilidade de ruína diminui de maneira considerável em relação ao caso sem juros.

6.4.3 Juros estocásticos

Nesta seção assumimos que os coeficientes β, σ_b, δ e σ_d são estritamente positivos. Neste caso, estamos adicionando uma componente estocástica para o *risco de seguro* e para o *risco financeiro*. Por (45) temos que

$$\begin{aligned}
\eta(u) &= c\exp\left(-2\int_0^u \frac{\xi(\delta+\sigma_d^2/2)+\beta}{\xi^2\sigma_d^2+\sigma_b^2}\,d\xi\right) \\
&= c\exp\left(-2\left(\frac{(\delta+\sigma_d^2/2)}{2\sigma_d^2}\int_{\sigma_b^2}^{u^2\sigma_d^2+\sigma_b^2}\frac{1}{x}\,dx+\frac{\beta}{\sigma_d}\int_0^{u\sigma_d}\frac{1}{w^2+\sigma_b^2}\,dw\right)\right) \\
&= c\left(\frac{\sigma_d^2}{\sigma_b^2}u^2+1\right)^{-(\delta/\sigma_d^2+1/2)}\exp\left(-\frac{2\beta}{\sigma_d\sigma_b}\,arctg\left(\frac{\sigma_d}{\sigma_b}u\right)\right). \qquad (54)
\end{aligned}$$

Este resultado também foi encontrado por Paulsen (1993).

Como a função *arctg* é limitada, (46) nos diz que

$$\psi(u)\le c\int_u^\infty w^{-(2\delta/\sigma_d^2+1)}\,dw = ku^{-2\delta/\sigma_d^2}, \qquad (55)$$

onde c e k são constantes, e também que

$$\psi(u)\sim ku^{-2\delta/\sigma_d^2}. \qquad (56)$$

É interessante notar que, no caso de indenizações de cauda leve, para o modelo clássico (8), em Grandell (1991), o autor mostra que a probabilidade de ruína em tempo infinito é limitada superiormente por

$$\psi(u)\le e^{-u\gamma*}, \qquad (57)$$

e além disso o autor mostra que

$$\lim_{u\to\infty} e^{u\gamma*}\psi(u) = \frac{\theta\mu}{g'(\gamma*)-p/\lambda}, \qquad (58)$$

ou seja,

$$\psi(u)\sim Ce^{-u\gamma*}, \qquad (59)$$

onde θ está definido em (10). Aqui $\gamma*$ é chamado *coeficiente de Lundberg* e é a solução positiva de

$$h(r) = \frac{pr}{\lambda}, \qquad (60)$$

onde

$$h(r) = \int_0^\infty e^{rz}\, dF(z) - 1. \tag{61}$$

Por (56) podemos perceber que a probabilidade de ruína em tempo infinito no caso de juros estocásticos é assintoticamente da forma subexponencial e por isso tem um comportamento mais pobre do que o modelo clássico (7). Isto significa que a chance de sobrevivência da seguradora não necessariamente aumenta com a introdução de juros estocásticos.

7 MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO

Neste capítulo apresentamos os métodos utilizados para obtenção da solução numérica da equação diferencial parcial (36), as técnicas de aproximação da probabilidade de ruína para o modelo (14) via simulação de Monte Carlo e em particular aspectos da técnica de mudança de medida. Começamos com o método de esquemas de diferenças finitas, o qual é utilizado para obtenção da solução numérica de (36).

7.1 Solução numérica via esquemas de diferenças finitas

7.1.1 Conceitos iniciais

Começamos nossa discussão definindo uma grade retangular de pontos no plano (t, x). Sejam h e k números positivos; então a grade é definida como sendo os pontos $(t_n, x_m) = (nk, mh)$ para n e m inteiros. Para uma função w definida na grade retangular, escrevemos w_m^n para o valor de w no ponto (t_n, x_m) da grade. Estamos interessados em grades com valores de h e k pequenos.

A idéia básica destes esquemas é substituir as derivadas por diferenças finitas. Por exemplo, considere a equação diferencial

$$\partial_t \psi + \alpha \partial_x \psi = 0, \tag{62}$$

onde a é uma constante, t representa o tempo e x representa a variável espacial. Aqui o subescrito significa diferenciação, ou seja, $\partial_t \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t}$. Podemos construir vários esquemas para resolver numericamente essa equação. Como exemplo podemos citar o seguinte:

$$\frac{w_m^{n+1} - w_m^n}{k} + \alpha \frac{w_{m+1}^n - w_m^n}{h} = 0. \tag{63}$$

A propriedade mais desejada para um esquema de diferenças finitas é que ele seja convergente, ou seja, que as suas soluções aproximem a solução da equação diferencial parcial correspondente e que esta aproximação melhore à medida que h e k tendem a zero. No entanto, provar que um determinado esquema é convergente não é, em geral, uma tarefa fácil. Contudo, existem dois conceitos relacionados à convergência que são fáceis de serem verificados: consistência e estabilidade.

Consistência está relacionada com a proximidade entre a equação diferencial e o esquema de diferenças finitas. Desta forma, consistência é certamente necessária para convergência mas não suficiente.

O conceito que, juntamente com a consistência, nos garantirá convergência é a estabilidade. Na prática, a estabilidade de um esquema deve garantir que a solução não explode quando $h \downarrow 0$ e $k \downarrow 0$. Para uma discussão formal sobre estes conceitos, veja Strikwerda (2004). Sendo assim, um esquema consistente é convergente se, e somente se, ele é estável Strikwerda (2004, Teorema 1.5.1).

Estas definições são formuladas em princípio para equações lineares com coeficientes constantes. Para equações com coeficientes variáveis trabalha-se fixando os valores dos coeficientes.

7.1.2 Esquemas explícitos e esquemas implícitos

Um esquema de diferença finita explícito é qualquer esquema que pode ser escrito na forma

$$w_m^{n+1} = uma\ soma\ finita\ de\ w_{m'}^{n'}\ com\ n' \leq n, \tag{64}$$

caso contrário o esquema é chamado de esquema implícito. Estes esquemas são condicionalmente estáveis ou condicionalmente convergentes Strikwerda (2004, Teoremas 1.5.1 e 6.3.1). Isto significa que, na nossa procura por esquemas incondicionalmente estáveis e convergentes, devemos nos restringir a esquemas implícitos. Considere a seguinte equação diferencial parcial:

$$\psi_t + \alpha\psi_x = \gamma\psi_{xx} \tag{65}$$

Para esta equação, definimos o seguinte esquema implícito de diferença finita:

$$\frac{w_m^{n+1} - w_m^n}{k} + \alpha\frac{w_{m+1}^{n+1} - w_m^{n+1}}{h} = \gamma\frac{w_{m+1}^{n+1} - 2w_m^{n+1} + w_{m-1}^{n+1}}{h^2} \tag{66}$$

Este esquema é consistente e incondicionalmente estável e portanto é convergente. Para uma prova formal veja Strikwerda (2004).

7.1.3 Solução numérica da equação diferencial parcial

A equação (36) pode ser escrita na forma

$$\psi_v - \mu(u)\psi_u - \frac{1}{2}\sigma^2(u)\psi_{uu} = 0 \tag{67}$$

Como os coeficientes desta equação são variáveis em geral, escolhemos o esquema (66) que é incondicionalmente estável, com $\alpha = -\mu(u)$ e $\gamma = \frac{1}{2}\sigma^2(u)$, sujeito às condições

$$w_m^0 = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad m = 0, \\ 0 & \text{se} \quad m > 0, \end{cases} \tag{68}$$

$$w_0^n = 1, \qquad n > 0, \tag{69}$$

$$w_M^n = 0, \qquad n > 0, \tag{70}$$

para M suficientemente grande. De forma mais específica, o esquema (66) pode ser escrito como

$$\frac{w_m^{n+1} - w_m^n}{k} - \mu(m)\frac{w_{m+1}^{n+1} - w_m^{n+1}}{h} - \frac{1}{2}\sigma^2(m)\frac{w_{m+1}^{n+1} - 2w_m^{n+1} + w_{m-1}^{n+1}}{h^2} = 0,$$

ou seja,

$$w_{m-1}^{n+1}\left(-\frac{\sigma^2(m)}{2h^2}\right) + w_m^{n+1}\left(\frac{1}{k} + \frac{\mu(m)}{h} + \frac{\sigma^2(m)}{h^2}\right) + w_{m+1}^{n+1}\left(-\frac{\mu(m)}{h} - \frac{\sigma^2(m)}{2h^2}\right) = w_m^n \cdot \frac{1}{k}. \tag{71}$$

É útil definir os seguintes coeficientes no instante de tempo $n+1$.

1. $a(m) = -\frac{\sigma^2(m)}{2h^2}$

2. $b(m) = \frac{1}{k} + \frac{\mu(m)}{h} + \frac{\sigma^2(m)}{h^2}$

3. $c(m) - \frac{\mu(m)}{h} - \frac{\sigma^2(m)}{2h^2}$

4. $d(m) = w_m^n \cdot \frac{1}{k}$

Para encontrar a solução w_m^{n+1} no instante de tempo $n+1$ precisamos resolver um sistema tridiagonal de equações da forma

$$a_i w_{i-1} + b_i w_i + c_i w_{i+1} = d_i, \quad i = 1, ..., k-1 \tag{72}$$

observando as condições (68)-(70). Resolveremos este sistema utilizando o *algoritmo de Thomas*, descrito a seguir.

7.1.4 Algoritmo de Thomas

Suponha que queremos resolver o sistema linear tridiagonal $Bu = d$, com

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_{N-2} & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} \\ & & & \gamma_{N-1} & \alpha_N \end{bmatrix}.$$

O algoritmo de Thomas consiste dos três passos seguintes:

1. Decomposição LR: Decompomos B como o produto de uma matriz bidiagonal inferior

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_{N-1} & 1 \end{bmatrix},$$

e uma matriz bidiagonal superior

$$R = \begin{bmatrix} m_1 & r_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & m_{N-1} & r_{N-1} \\ & & & m_N \end{bmatrix},$$

Comparando os coeficientes temos que $r_i = \beta_i$ para todo i, e m_i e l_i podem ser obtidos como segue:

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha_1 \\ \text{para } & i = 1, 2, \cdots, N-1 : \\ & l_i = \gamma_i / m_i \\ & m_{i+1} = \alpha - i + 1 - l_i \beta_i \end{aligned}$$

Resolver $LRu = d$ para u requer dois passos:

2. Substituições sucessivas: Resolvemos $Ly = d$ para y.

$$\begin{aligned} y_1 &= d_1 \\ \text{para } & i = 2, 3, \cdots, N : \\ & y_i = d_i - l_{i-1} y_{i-1} \end{aligned}$$

3. Substituições retroativas: Resolvemos $Ru = y$ para u.

$$u_N \quad = y_N/m_N$$

$$\text{para} \ \ i = N-1, N-2, \cdots, 1:$$

$$u_i = (y_i - \beta_i u_{i+1})/m_i$$

Isto completa a descrição do algoritmo de Thomas.

Em relação ao sistema (72), para que o algoritmo de Thomas seja bem condicionado, precisamos que a condição $|a_i| + |c_i| \leq |b_i|$ seja satisfeita. Isto é verificado facilmente, pois

$$|b_i| - (|a_i| + |c_i|) = \frac{1}{k} \quad \forall\, i. \tag{73}$$

7.2 Simulação do modelo clássico com investimento

Para fazer as devidas comparações com a solução numérica da equação (36), utilizaremos o modelo (14) para proceder à simulação da probabilidade de ruína em tempo finito $\psi_\delta(u,T) = P(\inf_{0\leq t\leq T} V_\delta(t) \leq 0)$, referente ao caso em que δ é determinístico. Para estas simulações utilizaremos uma abordagem simples, como segue:

Como a ruína só pode ocorrer nos instantes T_n em que ocorrem as indenizações, podemos dizer que

$$\psi_\delta(u) = P\left\{\bigcup_{0\leq t\leq T} (U_\delta(t) < 0)\right\} = P\left\{\bigcup_{n:0\leq T_n\leq T} (U_\delta(T_n) \leq 0)\right\} \tag{74}$$

$$= P\left\{\bigcup_{n:0\leq T_n\leq T} (V_\delta(T_n) \leq 0)\right\}, \tag{75}$$

onde

$$V_\delta(T_n) = u + p\left(\frac{1-e^{-\delta T_n}}{\delta}\right) - \sum_{i=1}^{n} e^{-\delta T_i} X_i. \tag{76}$$

O que fazemos então, é simular l replicações independentes de V_δ até que a ruína aconteça. Para isso, seja τ o instante da ruína, como definido na seção 4.1. Para cada replicação, definimos a variável aleatória $Z(u) = I_{\{\tau(u)\leq T\}}$. Em cada replicação paramos o experimento em T, a menos que a ruína aconteça antes de T, caso em que paramos no instante da ruína. Consideramos então, como um estimador para $\psi(u,T)$, a razão

$$\overline{\psi} = \frac{Z_1(u) + Z_2(u) + ... + Z_l(u)}{l} = \overline{Z}(u).$$

Como

$$\sum_{k=1}^{l} Z_k(u)$$

tem distribuição Binomial$(l, \psi(u,T))$, então

$$E\left(\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} Z_k(u)\right) = \psi(u,T) \tag{77}$$

e

$$Var\left(\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} Z_k(u)\right) = \psi(u,T)(1-\psi(u,T))/l. \tag{78}$$

Além de uma estimativa pontual, também estamos interessados em um intervalo de confiança para $\psi(u,T)$. Dado um coeficiente de confiança α, o intervalo de confiança assintótico, obtido através do Teorema Central do Limite, é dado por

$$\left[\overline{Z}(u) - \frac{D}{\sqrt{l}}\, z_\alpha,\ \overline{Z}(u) + \frac{D}{\sqrt{l}}\, z_\alpha\right], \tag{79}$$

onde

$$D^2 = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} {Z_k}^2(u) - \overline{z}^2(u) \tag{80}$$

e z_α é determinado por $P(|N| > z_\alpha) = 1 - \alpha$, onde N é uma variável aleatória com distribuição Normal padrão. Também definimos o erro relativo (ER) que é dado por

$$ER = \frac{\text{semi-amplitude do intervalo}}{\overline{\psi}}. \tag{81}$$

Para algumas simulações que vamos realizar, fixamos $ER = 0,1$ e em outras situações não nos preocupamos com o valor do ER e sim com o número de replicações que serão realizadas. Obviamente, para atingir o ER desejado, será necessário um determinado número l de replicações, o qual dependerá da distribuição das indenizações.

7.3 Mudança de medida

Salientamos que este tópico não foi estudado com detalhes e profundidade, pois exige um nível maior de conhecimento. Descrevemos aqui apenas alguns aspectos desta teoria.

A técnica de mudança de medida será utilizada para as simulações da probabilidade de ruína em tempo infinito para o processo de risco (13). Uma grande vantagem desta técnica, é que sob a nova medida de probabilidade, a ruína ocorre com probabilidade 1. Nesta seção apresentamos, apenas para ilustração, alguns aspectos desta teoria, nos restringindo à aplicação da mesma ao processo de risco sem investimento em tempo discreto. Para maiores detalhes sobre a técnica de mudança de medida veja Asmussen (1995).

7.3.1 Aplicação a um modelo mais simples

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espaço de probabilidade. Supomos que as indenizações $X_1, X_2, ...$ a serem pagas são independentes e identicamente distribuídas, onde X_n representa a indenização agregada no n-ésimo período $(n-1, n]$. Também assumimos que X_n toma valores em $\mathbb{N}$ e que o prêmio a ser recebido em cada período é constante e igual a 1. Supomos também que a reserva inicial é igual a $u \in \mathbb{N}$. Desta forma, o processo de risco resultante é dado por

$$R_n = u + n - \sum_{j=1}^{n} X_j. \tag{82}$$

Definimos também

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j - n = \sum_{j=1}^{n} (X_j - 1) = \sum_{j=1}^{n} Y_j, \tag{83}$$

onde $Y_1, Y_2, ...$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição F e $E(Y) < 0$. Temos que

$$R_n < 0 \Longleftrightarrow S_n > u \tag{84}$$

Pela Lei dos Grande Números,

$$\frac{S_n}{n} \to E(Y) < 0 \quad \text{quase certamente}, \tag{85}$$

e portanto

$$\lim_{n \to \infty} S_n = -\infty, \quad \text{quase certamente}. \tag{86}$$

Seja $M_Y(s)$ a função geradora de momentos de Y avaliada em s. Pode-se provar que, se $\exists\ \gamma$ tal que $M_Y(\gamma) = 1$, então

$$Z_n = e^{\gamma S_n} = e^{\gamma \sum_{j=1}^{n} Y_j}, \ \ n \geq 1, \tag{87}$$

é um P-martingal a tempo discreto em relação à filtração $\mathcal{F}_n^Y = \sigma(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$, com $E(Z_n) = 1$. Desta forma, podemos definir uma probabilidade $\tilde{P}_n$ tal que

$$\tilde{P}_n(A) = \int_A Z_n(\omega)\, dP_n(\omega), \tag{88}$$

onde $A \in \mathcal{F}_n^Y$ e $P_n = P_{/\mathcal{F}_n^Y}$. Se $\tilde{P}_n \ll P_n$, $\forall n$, pode-se provar, utilizando o teorema de Radon-Nikodym, que $Z_n(\omega) = \frac{d\tilde{P}}{dP}(\omega)$.

Usando o Teorema da Extensão de Kolmogorov, $\exists\ \tilde{P}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\tilde{P}_{/\mathcal{F}_n^Y} = \tilde{P}_n$ e

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z_n(\omega)\, dP(\omega), \tag{89}$$

onde $A \in \mathcal{F}_n^Y\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. Sob a nova probabilidade $\tilde{P}$, pode-se mostrar que as variáveis aleatórias $(Y_1, Y_2, ...)$ são independentes e identicamente distribuídas com distribuição $\tilde{F}(w) = F_\gamma(w)$. Como $M_Y(\gamma) = 1$, a distribuição de Y_j é dada por

$$F_\gamma(w) = \int_{-\infty}^{w} e^{\gamma y}\, dF(y). \tag{90}$$

Seja $\tilde{E}$ a esperança com respeito a $\tilde{P}$. Então

$$\tilde{E}(Y) = \int_0^\infty y e^{\gamma y} dF(y) = M_Y'(\gamma). \tag{91}$$

Porém, $M_Y'(\gamma) > 0$ e portanto $\tilde{E}(Y) > 0$. Logo, pela Lei dos Grandes Números

$$\frac{S_n}{n} \to \tilde{E}(Y) > 0 \quad \tilde{P}\ q.c. \Rightarrow S_n \to \infty \quad \tilde{P}\ q.c., \tag{92}$$

e o tempo de parada $\tau(u) = \inf\{n : S_n > u\}$ é finito com $\tilde{P}$-probabildade 1. Além disso, temos que $\tilde{Z}_n = \frac{dP}{d\tilde{P}} = \exp(-\gamma S_n)$ é um $\tilde{P}$-martingal com relação a $\mathcal{F}_n^Y$ e

$$P(A) = \int_A \tilde{Z}_n(\omega)\, d\tilde{P}(\omega), \quad A \in F_n^Y. \tag{93}$$

Um resultado importante Rolski e outros (1998, Teorema 9.2.3) estabelece que se $A \subset \{\tau(u) < \infty\}$ e $A \in \mathcal{F}_{\tau(u)}^Y$, então

$$P(A) = \int_A exp(-\gamma \sum_{j=1}^{\tau(u)} Y_j) d\tilde{P}. \tag{94}$$

Portanto, basta considerar $A = \{\tau(u) < \infty\}$ para obtermos a probabilidade de ruína em tempo infinito $\psi(u)$, ou seja,

$$\psi(u) = \tilde{E}(\tilde{Z}_{\tau(u)}). \tag{95}$$

O que se faz na prática é realizar m replicações de S_n, tomando o cuidado de simular Y_n com distribuição F_γ, parando cada uma delas no instante τ_k, $k = 1, 2, ..., m$. Feito isso, calculamos a média aritmética

$$\psi(u) = \frac{\sum_{k=1}^{m} e^{-\gamma S_{\tau_k}}}{m}. \tag{96}$$

Os detalhes desta técnica, quando aplicada a processos de risco contínuos e com investimento, são mais complicados e vão além do escopo desta dissertação. Desta forma, utilizaremos alguns resultados, omitindo a demonstração dos mesmos. Em Asmussen & Nielsen (1995), o autor utiliza esta técnica para obter a probabilidade de ruína em tempo infinito para um processo de risco com prêmio dependendo da reserva atual.

Na próxima seção, mostramos que certo processo de risco sem investimento e com taxa de prêmio dependendo da reserva é equivalente ao processo de risco com investimento e com taxa de prêmio constante no tempo, e em seguida discutimos alguns aspectos de Asmussen & Nielsen (1995).

7.3.2 Processo com investimento determinístico e processo com prêmio dependendo da reserva

Considere o seguinte processo de risco com prêmio dependendo da reserva atual:

$$U_t = u + \int_0^t (p + \delta U_s)\, ds - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \tag{97}$$

onde, como anteriormente, u é a reserva inicial, $p > \lambda\mu$ é o prêmio puro, calculado com base em um coeficiente de segurança $\theta > 0$, δ é uma constante positiva, N_t é um processo de Poisson com taxa λ e X_i são as indenizações. Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} dU_t &= (p + \delta U_t)\, dt - d\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right) \\ \Rightarrow e^{-\delta t} dU_t - e^{-\delta t}\delta U_t dt &= p e^{-\delta t} dt - e^{-\delta t} d\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right) \\ \Rightarrow d(e^{-\delta t} U_t) &= c e^{-\delta s} ds - e^{-\delta s} d\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right) \\ \Rightarrow e^{-\delta t} U_t &= u + p\left(\frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}\right) - \int_0^t e^{-\delta s}\, d\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right). \end{aligned} \tag{98}$$

Portanto, (97) e (13) são equivalentes.

7.3.3 Coeficiente de Lundberg local

Em Asmussen & Nielsen (1995), os autores consideram um processo de risco com reserva inicial u. O processo $\{N_t, t \geq 0\}$ das chegadas das indenizações é Poisson com taxa λ e as indenizações são independentes e identicamente distribuídas com distribuição

F e independente de $\{N_t, t \geq 0\}$. Assume-se também que o prêmio $p(r)$ depende da atual reserva de forma que o prêmio é $p(w)$ quando $U_t = w$. Então, se $r_u(t)$ é a solução da equação diferencial ordinária

$$\frac{d}{dt} r_u(t) = p(r_u(t)), \quad r_u(0) = u, \tag{99}$$

e T_n é o instante de chegada da n-ésima indenização, $T_0 = 0$, tem-se

$$U_{T_n+t} = r_{U_{T_n}}(t), \quad 0 \leq t < T_{n+1} - T_n \quad U_{T_{n+1}} = U_{T_{n+1^-}} - X_{n+1}. \tag{100}$$

No caso clássico, no qual $p(r) = p^*$ é constante, uma ferramenta importante para se obter a probabilidade de ruína $\psi^*(u)$ é o coeficiente de Lundberg γ^*, definido como a solução positiva da equação

$$\lambda(M_X(\gamma^*) - 1) - \gamma^* p^* = 0, \tag{101}$$

onde $M_X(s) = \int_0^\infty e^{sx} dF(x)$.

Para o caso em que o prêmio depende da reserva, o que se faz é substituir γ^* pela função $\gamma(w)$ da reserva w, onde para um w fixo, $\gamma(w)$ é definido como o coeficiente de Lundberg do modelo clássico com $p^* = p(w)$, isto é, como a solução da equação

$$\lambda(\hat{B}(\gamma(w)) - 1) - \gamma(w)p(w) = 0. \tag{102}$$

Intuitivamente, a idéia é de que o modelo clássico com $p^* = p(w)$ serve como uma aproximação local para o modelo (100) quando a reserva está próxima de w.

Exemplo 7.3.1 *Suponha que F é exponencial com taxa α. Temos que*

$$M_X(\gamma^*) = \int_0^\infty e^{\gamma^* x} dF(x) = \frac{\alpha}{\alpha - \gamma^*}.$$

Então

$$\lambda(M_X(\gamma^*) - 1) - \gamma^* p^* = 0 \Rightarrow \gamma^* = \alpha - \frac{\lambda}{p}.$$

Logo,

$$\gamma(w) = \alpha - \frac{\lambda}{p(w)}. \tag{103}$$

Em Asmussen & Nielsen (1995) os autores também provam que

$$M_t = \exp\left\{ -\int_0^t \gamma(U_s)p(U_s)ds + \sum_{i=1}^{N_t} \gamma(U_{T_i-})X_i \right\} \tag{104}$$

é um martingal, tal que é possível definir uma nova medida de probabilidade $\tilde{P}$ por $\tilde{P}(A) = E[M_T; A]$, $A \in \mathcal{F}_T$, onde $\mathcal{F}_T = \sigma(U_t : 0 \leq t \leq T)$. Sob a probabilidade $\tilde{P}$, $\{U_t\}$ é um processo de risco com o mesmo prêmio p(r), porém o processo das chegadas $\{N_t, t \geq 0\}$ é Poisson não homogêneo com taxa de chegada λ_w dependendo do valor atual da reserva $U_t = w$, os tempos entre as chegadas $T_j - T_{j-1} = \pi$ são tais que

$$\pi \sim f_\pi(t) = \lambda_{r_w(t)} \exp\left\{-\int_0^t \lambda_{r_w(v)} dv\right\}, \tag{105}$$

onde

$$\lambda_x = \lambda M_X(\gamma(x)).$$

As indenizações X são tais que $X|\tau = t \sim F_{r_w(t)}$ dada por

$$F_{r_w}(dy) = \frac{e^{\gamma(w)y}}{M_X(\gamma(w))} \cdot F(dy). \tag{106}$$

Se $\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : U_t \leq 0\}$, os autores mostram em Asmussen & Nielsen (1995, corolário 2) que $\tilde{P}(\tau(u) < \infty) = 1$ e $\psi(u) = \tilde{E}(M^{-1}_{\tau(u)})$.

A consequência deste resultado em simulação é que podemos simular o processo de risco utilizando λ_w e F_w como os parâmetro básicos. Sendo assim, a ruína ocorre eventualmente e $M^{-1}_{\tau(u)}$ é não-viciado para $\psi(u)$.

8 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos para a solução numérica da equação (36), assim como os resultados obtidos pela simulação do modelo (14), afim de verificar a validade da aproximação da probabilidade de ruína em tempo finito e infinito quando utilizamos processos de difusão para descrever a evolução da reserva de uma companhia de seguros.

8.1 Probabilidade de ruína em tempo finito

Afim de verificar a validade da aproximação por difusão, nesta seção apresentamos os resultados obtidos para a solução numérica da equação (36) e os resultados obtidos pela simulação do modelo (14), utilizando as distribuições Gama, Exponencial e Uniforme como a distribuição das indenizações. As tabelas que seguem apresentam os resultados para a probabilidade de ruína em tempo finito, ou seja,

$$\psi(u,T) = P\left(\inf_{0\leq t\leq T} U_t \leq 0 | U_0 = u\right), \tag{107}$$

quando a taxa de juros δ é determinística, ou seja, quando $\sigma_d = 0$. Para as simulações consideramos o processo de chegada Poisson com taxa $\lambda = 1$ e o prêmio $p = 1.65$. Os tamanhos dos passos h e k no esquema de diferenças finitas (66), utilizado para obtenção da solução numérica de (36), são 1/8 e 1/230 respectivamente. As tabelas também mostram a taxa de juros δ considerada, o tempo T considerado para observação do processo, os intervalos de confiança obtidos através da simulação do modelo (14), o erro relativo (ER) e o número de replicações (Rep.) de $V_\delta(t)$ em (14). Nas tabelas, $\psi_D(u,T)$ se refere à solução numérica da equação diferencial (36), ou seja, ao valor obtido para a probabilidade de ruína em tempo finito quando utilizamos a aproximação por difusão, $\psi_S(u,T)$ é a probabilidade de ruína em tempo finito obtida pela simulação do modelo (14), $\psi_{li}(u,T)$ e $\psi_{ls}(u,T)$ são os limites inferior e superior do intervalo de confiança obtido respectivamente, DP é o desvio padrão e RI é a reserva inicial. Para a construção dos intervalos de confiança, utilizamos $\alpha = 0.05$.

8.1.1 Indenizações com distribuição Gama

A tabela 1 mostra os resultados obtidos quando a distribuição das indenizações X é Gama(2.25,1.5) e $\delta = 0.1$. Para este caso, temos que

$$E(X) = 1.5 \tag{108}$$

e

$$Var(X) = \frac{2.25}{(1.5)^2} = 1. \tag{109}$$

Os parâmetros do modelo de difusão definidos em (24) e (25), os quais serão utilizados para encontrar a solução numérica de (36), são dados por

$$\beta = 1.65 - 1.5 = 0.15 \tag{110}$$

e

$$\sigma_b = \sqrt{1 + 2.25} \simeq 1.8027. \tag{111}$$

Tabela 1: Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Gama(2.25, 1.5) e $\delta = 0.1$, fixando ER.

Juros	RI	Tempo	$\psi_D(u,T)$	$\psi_S(u,T)$	$\psi_{li}(u,T)$	$\psi_{ls}(u,T)$	ER	Rep.
$\delta = 0.1$	u = 3	T = 10	0.3559	0.3150	0.2828	0.3471	0.0990	800
		T = 50	0.3720	0.3287	0.2961	0.3613	0.1021	800
	u = 5	T = 10	0.1365	0.1424	0.1287	0.1560	0.0957	2500
		T = 50	0.1500	0.1436	0.1298	0.1573	0.0961	2500
	u = 10	T = 10	0.0045	0.0132	0.0118	0.0146	0.1060	25500
		T = 50	0.0061	0.0163	0.0145	0.0180	0.1076	20000

Podemos observar que a aproximação por difusão é melhor quando $u = 5$. Nos casos $u = 3$ e $u = 10$ a aproximação não é eficiente. Observa-se que os valores de $\psi_D(u,T)$ não estão nem sequer contidos no intervalo de confiança construído com coeficiente de confiança $\alpha = 0.05$. Devemos ressaltar o baixo número de replicações necessárias para um erro relativo $ER \simeq 0.1$ para os casos $u = 3$ e $u = 5$. No entanto, para o caso $u = 10$ o número de replicações necessárias para atingir o ER especificado é demasiadamente alto em relação aos outros casos.

Tabela 2: Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Gama$(2.25, 1.5)$ e $\delta = 0.1$.

Juros	RI	Tempo	$\psi_D(u,T)$	$\psi_S(u,T)$	$\psi_{li}(u,T)$	$\psi_{ls}(u,T)$	ER	Rep.
$\delta = 0.1$	u = 3	T = 10	0.3559	0.2989	0.2937	0.3041	0.0173	30000
		T = 50	0.3720	0.3252	0.3198	0.3305	0.0163	30000
	u = 5	T = 10	0.1365	0.1382	0.1342	0.1421	0.0282	30000
		T = 50	0.1500	0.1569	0.1528	0.1610	0.0262	30000
	u = 10	T = 10	0.0045	0.0135	0.0122	0.0148	0.0966	30000
		T = 50	0.0061	0.0168	0.0154	0.0183	0.0863	30000

A tabela 2 mostra a mesma situação apresentada na tabela 1, porém aumentamos o número de replicações para 30000 sem nos preocupar com o erro relativo. Pode-se perceber que o mesmo padrão anterior se repete, ou seja, a aproximação por difusão é eficiente apenas no caso em que $u = 5$, não sendo satisfatória nos demais casos. Fica claro também que a amplitude do intervalo de confiança é menor devido ao aumento do número de replicações.

A tabela 3 mostra os resultados obtidos quando a distribuição das indenizações X é Gama(2.25,1.5) e $\delta = 0.05$, sem nos preocupar em fixar o ER.

Tabela 3: Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Gama$(2.25, 1.5)$ e $\delta = 0.05$.

Juros	RI	Tempo	$\psi_D(u,T)$	$\psi_S(u,T)$	$\psi_{li}(u,T)$	$\psi_{ls}(u,T)$	ER	Rep.
$\delta = 0.05$	u = 3	T = 10	0.4274	0.3682	0.3628	0.3737	0.0148	30000
		T = 50	0.4884	0.4287	0.4231	0.4343	0.0130	30000
	u = 5	T = 10	0.2018	0.1971	0.1926	0.2016	0.0228	30000
		T = 50	0.2678	0.2578	0.2529	0.2628	0.0191	30000
	u = 10	T = 10	0.0152	0.0307	0.0280	0.0326	0.0635	30000
		T = 50	0.0376	0.0523	0.0498	0.0548	0.0481	30000

Podemos perceber, através da tabela 3, que o padrão anterior se repete novamente, ou seja, a aproximação funciona melhor no caso $u = 5$. No entanto, para os casos $u = 3$

e $u = 10$ a aproximação parece melhor no caso $\delta = 0.05$ em relação ao caso $\delta = 0.1$.

A tabela 4 a seguir apresenta o caso $\delta = 0.01$, no qual novamente não nos preocupamos em fixar ER.

Tabela 4: Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Gama$(2.25, 1.5)$ e $\delta = 0.01$.

Juros	RI	Tempo	$\psi_D(u,T)$	$\psi_S(u,T)$	$\psi_{li}(u,T)$	$\psi_{ls}(u,T)$	ER	Rep.
$\delta = 0.01$	u = 3	T = 10	0.4961	0.4235	0.4179	0.4291	0.0132	30000
		T = 50	0.6396	0.5865	0.5809	0.5921	0.0095	30000
	u = 5	T = 10	0.2751	0.2499	0.2450	0.2548	0.0196	30000
		T = 50	0.4588	0.4250	0.4194	0.4305	0.0131	30000
	u = 10	T = 10	0.0394	0.0564	0.0538	0.0590	0.0462	30000
		T = 50	0.1760	0.1846	0.1802	0.1890	0.0237	30000

Observando a tabela 4, podemos concluir que no caso $\delta = 0.01$, a aproximação por difusão já não é tão eficiente quando $u = 5$ como nos casos anteriores. Nota-se também que a aproximação por difusão melhora quando $u = 10$ em relação aos casos estudados anteriormente. Percebe-se que no caso de indenizações com distribuição Gama, a aproximação por difusão não é eficiente quando $u = 3$ independentemente do valor de δ.

8.1.2 Indenizações com distribuição Exponencial

A tabela 5 mostra os resultados obtidos quando a distribuição das indenizações X é Exponencial$(2/3)$ e $\delta = 0.1$, utilizando $ER \simeq 0.1$. Para este caso, temos que

$$E(X) = 1.5 \tag{112}$$

e

$$Var(X) = (1.5)^2 = 2.25. \tag{113}$$

Os parâmetros do modelo de difusão definidos em (24) e (25), são dados por

$$\beta = 1.65 - 1.5 = 0.15 \tag{114}$$

e

$$\sigma_b = \sqrt{2.25 + 2.25} \simeq 2.1213. \tag{115}$$

Tabela 5: Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Exponencial(2/3) e $\delta = 0.1$, fixando ER.

Juros	RI	Tempo	$\psi_D(u,T)$	$\psi_S(u,T)$	$\psi_{li}(u,T)$	$\psi_{ls}(u,T)$	ER	Rep.
$\delta = 0.1$	u = 3	T = 10	0.4342	0.3408	0.3049	0.3750	0.1032	700
		T = 50	0.4559	0.3528	0.3174	0.3882	0.1003	700
	u = 5	T = 10	0.2043	0.1928	0.1721	0.2135	0.1071	1400
		T = 50	0.2268	0.1942	0.1735	0.2150	0.1066	1400
	u = 10	T = 10	0.0145	0.0331	0.0295	0.0367	0.1085	9500
		T = 50	0.0203	0.0376	0.0338	0.0415	0.1016	9500

Deve ser observado que o coeficiente β é o mesmo do caso anterior, porém o coeficiente da difusão σ_b é maior que no caso anterior, aumentando assim a variância de $W_{b,t}$.

Como no caso de indenizações com distribuição Gama, a aproximação por difusão é mais eficiente no caso $u = 5$, seguido do caso $u = 10$, quando a distribuição das indenizações é Exponencial. No caso $u = 3$, a aproximação por difusão não é eficiente. Fica claro também que o número de replicações necessárias para se ter $ER = 0.1$ é ainda menor que no caso da distribuição Gama.

A tabela 6 apresenta os resultados obtidos para o caso $\delta = 0.1$ aumentado o número de replicações sem nos preocupar com o ER.

Tabela 6: Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Exponencial(2/3) e $\delta = 0.1$.

Juros	RI	Tempo	$\psi_D(u,T)$	$\psi_S(u,T)$	$\psi_{li}(u,T)$	$\psi_{ls}(u,T)$	ER	Rep.
$\delta = 0.1$	u = 3	T = 10	0.4342	0.3408	0.3354	0.3461	0.0157	30000
		T = 50	0.4559	0.3594	0.3539	0.3648	0.0151	30000
	u = 5	T = 10	0.2043	0.1911	0.1866	0.1955	0.0232	30000
		T = 50	0.2268	0.2045	0.2000	0.2091	0.0223	30000
	u = 10	T = 10	0.0145	0.0331	0.0310	0.0351	0.0611	30000
		T = 50	0.0203	0.0378	0.0356	0.0399	0.0570	30000

Analisando a tabela 6 fica claro o mesmo padrão anterior, ou seja, a aproximação por difusão funciona bem para $u = 5$. Também é importante notar que no caso $u = 10$, a aproximação por difusão funciona melhor no caso da distribuição exponencial que no caso da distribuição Gama.

A tabela 7 apresenta os resultados obtidos quando a distribuição das indenizações X é Exponencial(2/3) e $\delta = 0.05$, sem nos preocupar em fixar o ER.

Tabela 7: Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Exponencial(2/3) e $\delta = 0.05$.

Juros	RI	Tempo	$\psi_D(u,T)$	$\psi_S(u,T)$	$\psi_{li}(u,T)$	$\psi_{ls}(u,T)$	ER	Rep.
$\delta = 0.05$	u = 3	T = 10	0.5071	0.3996	0.3941	0.4052	0.0138	30000
		T = 50	0.5665	0.4714	0.4657	0.4770	0.0119	30000
	u = 5	T = 10	0.2829	0.2451	0.2402	0.2499	0.0198	30000
		T = 50	0.3555	0.3065	0.3013	0.3117	0.0170	30000
	u = 10	T = 10	0.0399	0.0619	0.0592	0.0646	0.0440	30000
		T = 50	0.0801	0.0981	0.0947	0.1014	0.0343	30000

Podemos perceber que para o caso $\delta = 0.05$ a aproximação não é eficiente em nenhum dos casos, sendo que $u = 10$ é o caso em que $\psi_D(u,T)$ e $\psi_S(u,T)$ mais se aproximam.

A tabela 8 apresenta os resultados obtidos quando a distribuição das indenizações X é Exponencial(2/3) e $\delta = 0.01$. Novamente, não nos preocupamos com o valor de ER.

Tabela 8: Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Exponencial(2/3) e $\delta = 0.01$.

Juros	RI	Tempo	$\psi_D(u,T)$	$\psi_S(u,T)$	$\psi_{li}(u,T)$	$\psi_{ls}(u,T)$	ER	Rep.
$\delta = 0.01$	u = 3	T = 10	0.5705	0.4565	0.4509	0.4622	0.0123	30000
		T = 50	0.7046	0.6134	0.6078	0.6189	0.0089	30000
	u = 5	T = 10	0.3597	0.3066	0.3013	0.3118	0.0170	30000
		T = 50	0.5443	0.4836	0.4779	0.4892	0.0116	30000
	u = 10	T = 10	0.0813	0.0980	0.0946	0.1013	0.0343	30000
		T = 50	0.2606	0.2495	0.2446	0.2544	0.0196	30000

Neste caso, a aproximação por difusão é mais eficiente quando $u = 10$, assim como aconteceu no caso de indenizações com distribuição Gama no caso $\delta = 0.01$.

8.1.3 Indenizações com distribuição Uniforme

A tabela 9 mostra os resultados obtidos quando a distribuição das indenizações X é Uniforme(1,2) e $\delta = 0.1$, utilizando $ER \simeq 0.1$. Para este caso, temos que

$$E(X) = 1.5 \tag{116}$$

e

$$Var(X) = 1/12. \tag{117}$$

Neste caso, os parâmetros do modelo de difusão definidos em (24) e (25), são dados por

$$\beta = 1.65 - 1.5 = 0.15 \tag{118}$$

e

$$\sigma_b = \sqrt{1/12 + 2.25} = 1.5275. \tag{119}$$

É importante notar que σ_b neste caso é menor que no caso da distribuição Gama e da distribuição Exponencial.

Tabela 9: Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Uniforme$(1,2)$ e $\delta = 0.1$, fixando ER.

Juros	RI	Tempo	$\psi_D(u,T)$	$\psi_S(u,T)$	$\psi_{li}(u,T)$	$\psi_{ls}(u,T)$	ER	Rep.
$\delta = 0.1$	u = 3	T = 10	0.2646	0.2427	0.2173	0.2680	0.1043	1100
		T = 50	0.2843	0.2770	0.2492	0.3047	0.1001	1000
	u = 5	T = 10	0.0733	0.0780	0.0696	0.0863	0.1065	4000
		T = 50	0.0865	0.1003	0.0899	0.1107	0.1037	3200
	u = 10	T = 10	0.00064	0.0029	0.0025	0.0032	0.1282	80000
		T = 50	0.0011	0.0036	0.0032	0.0040	0.1144	80000

A tabela 9 mostra que a aproximação por difusão é mais eficiente no caso $u = 5$, seguido do caso $u = 10$, fato ocorrido também nos casos da distribuição Gama e distribuição Exponencial. Deve-se observar o elevado número de replicações necessárias para atingir um erro relativo $ER = 0.1282$ e $ER = 0.1144$ no caso $u = 10$.

A tabela 10 apresenta os resultados obtidos para o caso $\delta = 0.1$, considerando 35000 replicações.

Tabela 10: Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Uniforme$(1, 2)$ e $\delta = 0.1$.

Juros	RI	Tempo	$\psi_D(u, T)$	$\psi_S(u, T)$	$\psi_{li}(u, T)$	$\psi_{ls}(u, T)$	ER	Rep.
$\delta = 0.1$	u = 3	T = 10	0.2646	0.2514	0.2468	0.2559	0.0180	30000
		T = 50	0.2843	0.2678	0.2632	0.2725	0.0173	30000
	u = 5	T = 10	0.0733	0.0866	0.0836	0.0895	0.0340	30000
		T = 50	0.0865	0.0975	0.0944	0.1006	0.0318	30000
	u = 10	T = 10	0.00064	0.0028	0.0022	0.0033	0.1967	30000
		T = 50	0.0011	0.0030	0.0024	0.0035	0.1909	30000

Novamente notamos que a aproximação é mais eficiente quando $u = 5$. Devemos notar também que para $u = 3$, este é o caso em que a aproximação por difusão funciona melhor em relação às distribuições Gama e Exponencial. Podemos notar também que para um mesmo número de replicações, o ER quando $u = 10$ é maior que os demais.

A tabela 11 apresenta os resultados obtidos quando a distribuição das indenizações X é Uniforme$(1, 2)$ e $\delta = 0.05$, sem nos preocuparmos em fixar o ER.

Tabela 11: Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Uniforme$(1, 2)$ e $\delta = 0.05$.

Juros	RI	Tempo	$\psi_D(u, T)$	$\psi_S(u, T)$	$\psi_{li}(u, T)$	$\psi_{ls}(u, T)$	ER	Rep.
$\delta = 0.05$	u = 3	T = 10	0.3408	0.3161	0.3108	0.3213	0.0166	30000
		T = 50	0.4005	0.3696	0.3642	0.3751	0.0147	30000
	u = 5	T = 10	0.1281	0.1351	0.1312	0.1390	0.0286	30000
		T = 50	0.1826	0.1823	0.1779	0.1866	0.0239	30000
	u = 10	T = 10	0.0040	0.0100	0.0089	0.0111	0.1124	30000
		T = 50	0.0132	0.0206	0.0190	0.0222	0.0779	30000

Podemos perceber que neste caso a aproximação por difusão é mais eficiente quando $u = 5$, principalmente pata $T = 50$. Apesar da aproximação não ser suficientemente boa quando $u = 3$, ela é melhor que nos casos de indenizações com distribuição Gama e Exponencial.

A tabela 12 apresenta os resultados obtidos quando a distribuição das indenizações X é Uniforme$(1, 2)$ e $\delta = 0.01$. Novamente, não nos preocupamos com o valor de ER.

Tabela 12: Probabilidade de ruína em tempo finito quando as indenizações têm distribuição Uniforme$(1, 2)$ e $\delta = 0.01$.

Juros	RI	Tempo	$\psi_D(u,T)$	$\psi_S(u,T)$	$\psi_{li}(u,T)$	$\psi_{ls}(u,T)$	ER	Rep.
$\delta = 0.01$	u = 3	T = 10	0.4124	0.3786	0.3731	0.3841	0.0144	30000
		T = 50	0.5609	0.5267	0.5211	0.5324	0.0107	30000
	u = 5	T = 10	0.1924	0.1904	0.1859	0.1948	0.0233	30000
		T = 50	0.3636	0.3491	0.3437	0.3545	0.0154	30000
	u = 10	T = 10	0.0147	0.0234	0.0217	0.0251	0.0730	30000
		T = 50	0.1028	0.1109	0.1073	0.1144	0.0320	30000

Podemos observar que quando $u = 5$ a aproximação por difusão é melhor que nos casos $u = 3$ e $u = 10$. No entanto estes dois últimos apresentam melhores aproximações que nos casos vistos nas seções 8.1.1 e 8.1.2.

8.1.4 Erro de estimação

Nesta seção introduzimos o *erro de estimação*, definido como

$$\xi_E = \frac{\psi_D - \psi_S}{\psi_S}. \tag{120}$$

A tabela 13 a seguir apresenta os erros de estimação, para cada distribuição das indenizações, quando $\delta = 0.1$.

É interessante notar na tabela 13 que, quando $u = 3$, à medida que σ_b aumenta, a aproximação por difusão fica menos eficiente. Quando $u = 10$ observamos o comportamento inverso, ou seja, a aproximação fica melhor à medida que σ_b aumenta. Por último, quando $u = 5$, a aproximação é melhor para o valor intermediário de σ_b.

Um fato interessante também é que quando $u = 3$, ψ_D está sempre superestimando ψ_S e quando $u = 10$, ψ_D está sempre subestimando ψ_S. De acordo com (23), na aproximação por difusão estamos adicionando uma componente estocástica ao valor do ganho

Tabela 13: Erro de estimação para a probabilidade de ruína em tempo finito quando $\delta = 0.1$.

Juros	RI	Tempo	Unif.($\sigma_b \simeq 1.52$)	Gama ($\sigma_b \simeq 1.80$)	Exp.($\sigma_b \simeq 2.12$)
$\delta = 0.1$	u = 3	T = 10	5%	19%	27%
		T = 50	6%	14%	26%
	u = 5	T = 10	15%	1%	6%
		T = 50	11%	4%	10%
	u = 10	T = 10	77%	66%	56%
		T = 50	64%	63%	46%

esperado por unidade de tempo devido a um coeficiente de segurança θ e a variância desta componente estocástica está diretamente ligada ao coeficiente σ_b. Desta forma podemos conjecturar que, para $u = 3$, a aproximação por difusão será menos eficiente quanto maior for o valor de σ_b. Isto porque, neste caso, como a variabilidade de $\sigma_b W_{b,t}$ é maior, U_t iria abaixo de zero com maior frequência.

Fica claro também que para o caso $\delta = 0.1$ e indenizações com distribuição Uniforme $(1, 2)$, a aproximação por difusão é mais eficiente quando $u = 3$. Para indenizações com distribuição Gama$(2.25, 1.5)$ e Exponencial$(2/3)$ a aproximação é melhor quando $u = 5$.

A tabela 14 a seguir apresenta os erros de estimação, para cada distribuição das indenizações, quando $\delta = 0.05$.

Tabela 14: Erro de estimação para a probabilidade de ruína em tempo finito quando $\delta = 0.05$.

Juros	RI	Tempo	Unif.($\sigma_b \simeq 1.52$)	Gama ($\sigma_b \simeq 1.80$)	Exp.($\sigma_b \simeq 2.12$)
$\delta = 0.05$	u = 3	T = 10	7.8%	16%	26.9%
		T = 50	8.3%	13.9%	20.1%
	u = 5	T = 10	5.1%	2.3%	15.4%
		T = 50	0.1%	3.8%	15.9%
	u = 10	T = 10	60%	50.4%	35.5%
		T = 50	35%	28.1%	18.3%

Podemos observar que, como anteriormente, quando $u = 3$, à medida que σ_b aumenta, a aproximação por difusão fica menos eficiente. Para $u = 10$ ocorre o contrário, ou seja, a aproximação por difusão fica mais eficiente quando σ_b aumenta. De forma geral, a aproximação por difusão funciona melhor quando $u = 5$.

A tabela 15 a seguir apresenta os erros de estimação, para cada distribuição das indenizações, quando $\delta = 0.01$.

Tabela 15: Erro de estimação para a probabilidade de ruína em tempo finito quando $\delta = 0.01$.

Juros	RI	Tempo	Unif.($\sigma_b \simeq 1.52$)	Gama ($\sigma_b \simeq 1.80$)	Exp.($\sigma_b \simeq 2.12$)
$\delta = 0.01$	u = 3	T = 10	8.9%	17.1%	24.9%
		T = 50	6.4%	9%	14.8%
	u = 5	T = 10	1%	10%	17.3%
		T = 50	4.1%	7.9%	12.5%
	u = 10	T = 10	37.1%	30%	17%
		T = 50	7.3%	4.6%	4.4%

Novamente, quando $u = 3$, à medida que σ_b aumenta, a aproximação por difusão fica menos eficiente. Para $u = 10$ ocorre o contrário, ou seja, a aproximação por difusão fica mais eficiente quando σ_b aumenta. De forma geral, a aproximação por difusão funciona melhor quando $u = 5$. Devemos ressaltar também a melhora significativa da aproximação por difusão para $T = 50$ quando $u = 10$ no caso $\delta = 0.01$.

8.2 Probabilidade de ruína em tempo infinito

Nesta seção, $\psi_D(u)$ representa a probabilidade de ruína em tempo infinito quando utilizamos a aproximação por difusão, $\psi_S(u)$ é a probabilidade de ruína em tempo infinito obtida via simulação através da mudança de medida, $\psi_{li}(u)$ e $\psi_{ls}(u)$ são os limites inferior e superior do intervalo de confiança respectivamente. Os intervalos de confiança são construídos utilizando coeficiente se confiança $\alpha = 0.05$.

Em Grandell (1991), o autor apresenta resultados para a probabilidade de ruína em tempo infinito quando $\delta = 0$. Ele mostra que para que a aproximação por difusão seja eficiente, é necessário que o coeficiente de segurança $\theta = p/\lambda\mu - 1$ seja pequeno e u grande de forma que θ^{-1} e u sejam da mesma ordem.

Nesta seção consideramos a situação em que δ é positivo e determinístico, ou seja, consideramos σ_d em (26) igual a zero. Sendo assim, aplicaremos as fórmulas (47) e (52) para encontrar a probabilidade de ruína em tempo infinito quando utilizamos a aproximação por difusão. Para fins de comparação, utilizaremos a técnica de mudança de medida descrita na seção 7.3.3 para obter uma estimativa pontual e intervalar para essa probabilidade. Feito isto, estaremos aptos para verificar a eficiência da aproximação por difusão neste caso.

Utilizando a notação da seção 7.3.3, consideramos nesta seção que $\lambda = 1$ e a taxa de prêmio é uma função linear da reserva, mais precisamente

$$p(r) = 1.65 + 0.1r. \tag{121}$$

Como visto na seção 7.3.2 este modelo é equivalente ao modelo com prêmio constante no tempo, no qual $\lambda = 1$, $p = 1.65$ e $\delta = 0.1$. Por (99), temos que

$$\frac{d}{dt} r_u(t) = 1.65 + 0.1 r_u(t), \quad r_u(0) = u. \tag{122}$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{dr_u(t)}{1.65 + 0.1 r_u(t)} = dt \quad &\Rightarrow \quad \int \frac{dr_u(t)}{1.65 + 0.1 r_u(t)} = t + \text{const.} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{0.1} \int \frac{0.1}{1.65 + 0.1 r_u(t)} \, dr_u(t) = t + \text{const.} \\
&\Rightarrow \quad \ln(1.65 + 0.1 r_u(t)) = 0.1t + \text{const.} \\
&\Rightarrow \quad 1.65 + 0.1 r_u(t) = k e^{0.1t} \\
&\Rightarrow \quad r_u(t) = k e^{0.1t} - \frac{1.65}{0.1}.
\end{aligned}$$

Utilizando a condição inicial $r_u(0) = u$, temos que

$$r_u(t) = e^{0.1t} \left(u + \frac{1.65}{0.1} \right) - \frac{1.65}{0.1}. \tag{123}$$

8.2.1 Indenizações com distribuição Gama

A tabela 16, retirada de Asmussen & Nielsen (1995), apresenta o caso em que as indenizações têm distribuição Gama$(2.25, 1.5)$ e $\delta = 0.1$.

Os resultados apresentados na tabela 16 foram obtidos realizando-se 1000 replicações de $M_{\tau(u)}$ em (104). Podemos perceber que a aproximação por difusão é eficiente quando

Tabela 16: Probabilidade de ruína em tempo infinito quando as indenizações têm distribuição Gama$(2.25, 1.5)$ e $\delta = 0.1$.

Juros	RI	$\psi_D(u)$	$\psi_S(u)$	$\psi_{li}(u)$	$\psi_{ls}(u)$	ξ_E
	u = 5	0.1505	0.156	0.152	0.160	3.5%
$\delta = 0.1$	u = 10	0.0061	0.0160	0.0156	0.0165	61%
	u = 15	0.0000599	0.0011	0.00106	0.0013	94.5%

$u = 5$, não sendo satisfatória nos outros casos. É interessante notar que os valores da probabilidade de ruína em tempo finito mostrados na tabela 1 e tabela 2 convergem para os valores da probabilidade de ruína em tempo infinito mostrados na tabela 16.

A tabela 16 também apresenta os erros de estimação em $\psi_D(u)$ quando utilizamos a aproximação por difusão em relação à $\psi_S(u)$. Fica claro que à medida que o valor de u aumenta, a aproximação por difusão fica menos eficiente.

8.2.2 Indenizações com distribuição Exponencial

Nesta seção utilizaremos os seguintes *erros de estimação*:

$$\xi_E = \frac{\psi_D - \psi(u)}{\psi(u)} \tag{124}$$

e

$$\xi_S = \frac{\psi_S - \psi(u)}{\psi(u)}, \tag{125}$$

onde $\psi(u)$ é a probabilidade de ruína em tempo infinito exata para o caso de indenizações com distribuição Exponencial, ψ_S é a probabilidade de ruína em tempo infinito obtida pela simulação do martingal definido na expressão (104) e ψ_D é a probabilidade de ruína em tempo infinito obtida pela aproximação por difusão.

No caso de indenizações com distribuição Exponencial, em Sundt & Teugels (1995) os autores mostram uma fórmula exata para a probabilidade de ruína em tempo infinito quando δ é determinístico. Nesta seção utilizamos esta fórmula, fazendo uma pequena correção na mesma, e comparamos os resultados exatos com os resultados obtidos com a aproximação por difusão. Como anteriormente, $\lambda = 1$, $p = 1.65$ e $\delta = 0.1$.

Seja $\rho = \lambda\mu$, $\bar{\psi}_\delta(u) = 1 - \psi_\delta(u)$. Definimos também

$$G_\delta(u) = \frac{\bar{\psi}_\delta(u) - \bar{\psi}_\delta(0)}{1 - \bar{\psi}_\delta(0)} \tag{126}$$

e

$$K_\delta = p\left(\frac{p}{\delta\mu}\right)^{\lambda/\delta - 1} \cdot e^{-p/\delta\mu}\Gamma^{-1}\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{p}{\delta\mu}\right). \tag{127}$$

Em (Sundt & Teugels, 1995), os autores mostram que

$$\psi_\delta(0) = \frac{\rho}{K_\delta + \rho} \tag{128}$$

e

$$\psi_\delta(u) = \psi_\delta(0)[1 - G_\delta(u)]. \tag{129}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\psi_\delta(u) &= \frac{\rho}{p\left(\frac{p}{\delta\mu}\right)^{\lambda/\delta-1} \cdot e^{-p/\delta\mu}\Gamma^{-1}\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{p}{\delta\mu}\right) + \rho} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{p}{\delta\mu} + \frac{u}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{p}{\delta\mu}\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{p}{\delta\mu} + \frac{u}{\mu}\right)}{\frac{1}{\rho}p\left(\frac{p}{\delta\mu}\right)^{\lambda/\delta-1} \cdot e^{-p/\delta\mu} + \Gamma\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{p}{\delta\mu}\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{p}{\delta\mu} + \frac{u}{\mu}\right)}{\frac{1}{\lambda\mu}p\left(\frac{p}{\delta\mu}\right)^{\lambda/\delta-1} \cdot e^{-p/\delta\mu} + \Gamma\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{p}{\delta\mu}\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{p}{\delta\mu} + \frac{u}{\mu}\right)}{\frac{\delta}{\lambda}p\left(\frac{p}{\delta\mu}\right)^{\lambda/\delta} \cdot e^{-p/\delta\mu} + \Gamma\left(\frac{\lambda}{\delta}, \frac{p}{\delta\mu}\right)},
\end{aligned} \tag{130}$$

onde Γ é a função gamma incompleta. Em Sundt & Teugels (1995) os autores omitem o termo $(1/\mu)^{\lambda/\delta}$ no denominador da expressão (130).

Para simular os valores da probabilidade de ruína em tempo infinito devemos realizar a mudança de medida, como visto na seção 7.3.3. Para o caso Exponencial, a função γ foi mostrada no exemplo 7.3.1. Pode-se mostrar que, para o caso de indenizações com distribuição Exponencial(α), para obter os tempos T entre as chegadas sob a nova medida, basta simular um valor T_s da distribuição Exponencial com taxa 1 e calcular

$$T = \frac{1}{\delta}\ln\left[1 + \left(\frac{\delta T_s}{\alpha}\right)\frac{1}{p + \delta x}\right]$$

e para obter o valor da i-ésima indenização $X|T = t$ basta simular um valor da distribuição Exponencial($1/e^{\delta t}(\delta x + p)$), onde x é o valor da reserva no instante imediatamente antes da i-ésima chegada.

A tabela 17 apresenta os resultados obtidos para a probabilidade de ruína em tempo infinito quando as indenizações têm distribuição Exponencial (2/3) e $\delta = 0.1$. Na tabela, RI é a reserva inicial, $\psi(u)$ é a probabilidade exata obtida através da fórmula (130).

Tabela 17: Probabilidade de ruína em tempo infinito quando as indenizações têm distribuição Exponencial(2/3) e $\delta = 0.1$.

Juros	RI	$\psi_D(u)$	$\psi(u)$	$\psi_S(u)$	$\psi_{li}(u)$	$\psi_{ls}(u)$	ξ_E	ξ_S
$\delta = 0.1$	u = 3	0.4559	0.3605	0.3628	0.3537	0.3719	26.4%	0.6%
	u = 5	0.2268	0.2055	0.2025	0.1967	0.2083	10.3%	1.4%
	u = 10	0.0203	0.0400	0.0403	0.0390	0.0416	49.2%	0.75%
	u = 20	0.00000077	0.00074	0.00074	0.00071	0.00076	98.9%	0.5%

Podemos observar que a aproximação por difusão funciona melhor quando $u = 5$. É interessante notar também que os valores da probabilidade de ruína até o tempo $T = 50$ apresentados na tabela 6 convergem para os valores mostrados na tabela 17. Devemos notar também que o erro de estimação quando $u = 20$ é quase 100%. Outro fato importante é que os valores $\psi_S(u,T)$ na tabela 6 estão bem próximos dos valores exatos no caso Exponencial, indicando que o método de simulação utilizado para obter a probabilidade de ruína em tempo finito $\psi_S(u,T)$ é razoável. Os valores obtidos para $\psi_S(u)$ são

excelentes aproximações para $\psi(u)$, independentemente do valor de u. Deve-se notar também a pequena amplitude do intervalo obtido para $\psi_S(u)$, mesmo com apenas 1000 replicações realizadas.

A tabela 18 apresenta os resultados obtidos para a probabilidade de ruína em tempo infinito quando as indenizações têm distribuição Exponencial (2/3) e $\delta = 0.05$.

Novamente observa-se que a aproximação por difusão funciona melhor quando $u = 5$. Nota-se também que quando $u = 3$, $u = 10$ e $u = 20$ o erro de estimação ξ_E é menor que no caso $\delta = 0.1$. Como anteriormente, observamos que os valores da probabilidade de ruína até o tempo $T = 50$ apresentados na tabela 7 convergem para os valores mostrados na

Tabela 18: Probabilidade de ruína em tempo infinito quando as indenizações têm distribuição Exponencial(2/3) e $\delta = 0.05$.

Juros	RI	$\psi_D(u)$	$\psi(u)$	$\psi_S(u)$	$\psi_{li}(u)$	$\psi_{ls}(u)$	ξ_E	ξ_S
$\delta = 0.05$	u = 3	0.5667	0.4659	0.4621	0.4523	0.4720	21.6%	0.8%
	u = 5	0.3559	0.3109	0.3051	0.2977	0.3126	14.4%	1.8%
	u = 10	0.0803	0.0960	0.0943	0.0918	0.0969	16.3%	1.7%
	u = 20	0.000926	0.005107	0.00503	0.00488	0.00519	81.8%	1.3%

tabela 18. Como no caso anterior, um fato importante é que os valores $\psi_S(u, T)$ na tabela 7 estão bem próximos dos valores exatos no caso Exponencial, indicando que o método de simulação utilizado para obter a probabilidade de ruína em tempo finito $\psi_S(u, T)$ é razoável. Novamente, os valores obtidos para $\psi_S(u)$ aproximam bem os valores de $\psi(u)$, no entanto podemos notar que quando $\delta = 0.05$, a aproximação é inferior em qualidade em relação ao caso anterior.

A tabela 19 apresenta os resultados obtidos para a probabilidade de ruína em tempo infinito quando as indenizações têm distribuição Exponencial (2/3) e $\delta = 0.01$.

Tabela 19: Probabilidade de ruína em tempo infinito quando as indenizações têm distribuição Exponencial(2/3) e $\delta = 0.01$.

Juros	RI	$\psi_D(u)$	$\psi(u)$	$\psi_S(u)$	$\psi_{li}(u)$	$\psi_{ls}(u)$	ξ_E	ξ_S
$\delta = 0.01$	u = 3	0.7252	0.6407	0.6415	0.6330	0.6500	13.1%	0.1%
	u = 5	0.5749	0.5179	0.5115	0.5038	0.5193	11%	1.2%
	u = 10	0.3012	0.2901	0.2891	0.2839	0.2944	3.8%	0.3%
	u = 20	0.0618	0.0747	0.0746	0.0730	0.0761	17.2%	0.1%

Podemos perceber que $\psi_S(u)$ aproxima $\psi(u)$ de maneira eficiente. Isto mostra que o método proposto em Asmussen & Nielsen (1995) parece funcionar bem. Fica claro que no caso $\delta = 0.01$ a aproximação por difusão funciona melhor quando $u = 10$. Podemos observar que no caso $\delta = 0.01$ os erros de estimação são menores do que nos outros casos independentemente do valor de u. É interessante notar também que os valores da probabilidade de ruína até o tempo $T = 50$ apresentados na tabela 8 convergem para os valores mostrados na tabela 19. Pode-se perceber também que os valores $\psi_S(u,T)$ na tabela 8 estão bem próximos dos valores exatos no caso Exponencial, indicando que o método de simulação utilizado para obter a probabilidade de ruína em tempo finito $\psi_S(u,T)$ é razoável. Conclui-se então, pelo menos neste caso, que quanto menor o valor de δ, melhores resultados serão obtidos com a aproximação por difusão. Obviamente, a qualidade desta aproximação depende dos valores de δ e σ_b quando os juros são determinísticos.

Como vimos anteriormente, para o caso $\delta = 0$, em Grandell (1991), o autor apresenta resultados para a probabilidade de ruína em tempo infinito. Ele mostra que para que a aproximação por difusão seja eficiente, é necessário que θ seja pequeno e u grande de forma que θ^{-1} e u sejam da mesma ordem. Para o caso $\delta > 0$, acreditamos que exista uma relação entre os parâmetros δ, σ_b, u e θ que permita que a aproximação por difusão seja eficiente. Porém esta relação é desconhecida e é objeto de estudo para o futuro.

9 CONCLUSÕES

Pode-se encontrar vários resultados sobre a probabilidade de ruína em tempo infinito quando a taxa de juros δ é zero. Resultados exatos e assintóticos podem ser encontrados na literatura. No entanto, quando $\delta > 0$, existem poucos resultados sobre a probabilidade de ruína nessas circunstâncias.

Neste trabalho, estudamos a aproximação por difusão proposta por Norberg (1999). Em sua exposição, o autor considera a possibilidade de que δ seja estocástico, sendo aproximado por um movimento Browniano com coeficiente de tendência positivo. Porém, em nosso trabalho discutimos a probabilidade de ruína de uma seguradora quando a taxa de juros δ é determinística.

Para a probabilidade de ruína em tempo finito, estudamos os casos em que as indenizações a serem pagas pela seguradora são independentes e identicamente distribuídas com distribuição Gama$(2.25, 1.5)$, Exponencial $(2/3)$ e Uniforme $(1, 2)$ respectivamente. Com o intuito de validar os resultados obtidos via aproximação por difusão, foram realizadas simulações do modelo (14) e obtidas estimativas pontuais e intervalares para a probabilidade de ruína em tempo finito. Desta forma foi possível comparar a solução numérica da equação (36) com os resultados da simulação acima referida. Foi possível observar que a qualidade dos resultados obtidos via aproximação por difusão depende dos parâmetros σ_b, δ e da reserva inicial u da seguradora. No entanto, essa relação não é conhecida e, para os casos estudados, observou-se que, de forma geral, a aproximação melhora quando δ e σ_b são pequenos.

Para a probabilidade de ruína em tempo infinito, foram estudados os casos em que as indenizações a serem pagas pela seguradora são independentes e identicamente distribuídas com distribuição Gama$(2.25, 1.5)$ e Exponencial $(2/3)$ respectivamente. No caso em que δ é determinístico, Norberg (1999) encontra a fórmula (52) para a probabilidade de ruína em tempo infinito, quando o mesmo utiliza a aproximação por difusão. Em nosso trabalho, utilizamos essa fórmula e os resultados obtidos em Asmussen & Nielsen (1995) para verificar a validade da aproximação por difusão quando as indenizações têm distribuição Gama$(2.25, 1.5)$. Quando $\delta = 0.1$, a aproximação por difusão é mais eficiente quando a reserva inicial u é pequena.

Para o caso de indenizações com distribuição Exponencial $(2/3)$, utilizamos a mesma fórmula (52) para a probabilidade de ruína em tempo infinito no caso da aproximação por difusão. Para validar essa aproximação, utilizamos a fórmula (130), a qual fornece a probabilidade de ruína exata em tempo infinito. Foi possível verificar que os resultados obtidos via aproximação por difusão são melhores quando δ é pequeno. Verificou-se também que o método proposto em Asmussen & Nielsen (1995) funcionou de forma eficiente no caso em que as indenizações têm distribuição Exponencial.

10 REFERÊNCIAS

Asmussen, S., (1995). *Ruin Probabilities.* World Scientific, Singapore.

Asmussen, S., Nielsen, H.M., (1995). *Ruin probabilities via local adjustment coefficients.* Journal of Apllied Probability 33, 736 - 755.

Chung, K.L., Williams, R.J., (1990). *Introduction to Stochastic Integration.* Birkhäuser, Basel.

Degerdahl, C.O., (1954). *A survey of results in the collective theory of risk.* In: Probability and Statistics. The Harold Cramér volume. John Wiley, Stockholm, p. 276-299.

Dickson, D.C.M., Waters, H.R., (1999). *Ruin probabilities with compounding assets.* Insurance: Mathematics and Economics 25, 49-62.

Embrechts, P. Kluppelberg, C., Mikosch, T., (2003). *Modelling Extremal Events For Insurance and Finance.* Springer, Berlim.

Embrechts, P., Shmidli, H.,(1994). *Ruin estimation for a general insurance risk model.* Advances of Applied Probability 26, 404-422.

Grandell, J., (1991). *Aspects of Risk Theory.* Springer-Verlag, New York.

Harrison, J.M., (1977). *Ruin problems with compounding assets.* Stochastic Processes Appl. 5, 67-79.

Karatzas, I., Shreve, S., (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second ed. Springer, Berlim.

Karlin, S., Taylor, H., (1975). *A First Course in Stochastic Processes*, Second Edition. Academic Press.

Lerche, H.R., (1986). *Boundary Crossing of Brownian Motion.* Springer, Berlin.

Norberg, R., (1999). *Ruin problems with assets and liabilities of diffusion type.* Stochastic Processes and Their Applications 81, 255 - 269.

Øksendal, B., (2003). *Stochastic Differential Equations*, sixth ed. Springer, Berlim.

Rolski, T., Schmidli, H., Schimidt, V., Teugels J.L. (1998). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wliley & Sons, New York.

Ruohonen, M., (1980). *On the probability of ruin of risk processes approximated by a diffusion process.* Scand. Actuarial. J. 113 - 120.

Shiryaev, A.N., (1996). *Probability*, second ed. Springer-Verlag, New York.

Silva, R.W.C., Atuncar, G. S., (2004). *Movimento Browniano e algumas aplicações.* Monografia submetida ao Departamento de Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais.

Strikwerda, J.,C., (2004). *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Second ed. Siam, Philadelphia.

Sundt, B., (1993). *An Introduction To Non-Life Insurance Mathematics*, 3rd edn. Verlag Versicherungswissenshaft, Karlsruhe.

Sundt, B., Teugels, J. l.., (1995). *Ruin Estimates Under Interest Force.* Insurance: Mathematics and Economics 16, 7-22.

Taylor, G.C., (1980). *Probability of ruin with variable premium rate.* Scandinavian Actuarial Journal, 57-76.

A ANEXO I

Nesta seção apresentamos a fórmula de Itô multi-dimensional.

Um movimento Browniano em $\mathbb{R}^m$ é uma m-upla

$$W = \{W_t = (W_t^1, W_t^2, \cdots, W_t^m), t \in \mathbb{R}_+\},$$

onde cada $W^i = \{W_t^i, t \in \mathbb{R}_+\}$, $i = 1, 2, \cdots, m$, é um movimento Browniano em $\mathbb{R}$.

Seja $B(t,\omega) = (B_1(t,\omega), ..., B_m(t,\omega))$ um movimento Browniano m-dimensional. Se cada um dos processos $u_{ij}(t,\omega)$ e $v_{ij}(t,\omega)$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m)$ satisfazem a condição dada na Definição 3.2.7, então podemos formar o seguinte processo n de Itô:

$$\begin{cases} dX_1 & = & u_1 dt & + & v_{11} dB_1 & + & \cdots & + & v_{1m} dB_m \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ dX_n & = & u_n dt & + & v_{n1} dB_1 & + & \cdots & + & v_{nm} dB_m. \end{cases}$$

Ou em notação matricial

$$dX(t) = udt + vdB(t),$$

onde

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix}, dB(t) = \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{pmatrix}.$$

Tal processo $X(t)$ é chamado um processo de Itô n-dimensional.

Teorema A.0.1 (Fórmula de Itô multi-dimensional) *Seja*

$$dX(t) = udt + vdB(t)$$

um processo de Itô n-dimensional. Seja $g(t,x) = (g_1(t,x), \cdots, g_p(t,x))$ *um mapa* C^2 *de* $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}^p$*. Então o processo*

$$Y(t,\omega) = g(t, X(t))$$

também é um processo de Itô, do qual o número da componente k, Y_k*, é dado por*

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t,X)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t,X)dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t,X)dX_i dX_j,$$

onde $dB_i dB_j = \delta_{ij} dt$ *e* $dB_i dt = dt dB_i = 0$.

B ANEXO II

Considere $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$ como em (8). Então

$$\begin{aligned} E(S_t) &= \sum_{k=0}^{\infty} E(S_t|N_t = k)P(N_t = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i|N_t = k\right) P(N_t = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) P(N_t = k) \\ &= \mu \sum_{k=1}^{\infty} kP(N_t = k) \\ &= \lambda\mu t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Var(S_t) &= E[Var(S_t|N_t)] + Var[E(S_t|N_t)] \\ &= E[N_t Var(X)] + Var[N_t E(X)] \\ &= E(N_t)Var(X) + Var(N_t)(E(X))^2 \\ &= \lambda t(\sigma^2 + \mu^2) \end{aligned}$$

$\square$

C ANEXO III

O processo M_t definido na expressão (32) é um Martingal com respeito à filtração $\mathcal{A}_t$. Obviamente, i) e ii) da Definição 3.1.4 são satisfeitos. Para iii), basta observar que

$$\begin{aligned} E[M_{t+s}|\mathcal{A}_t] &= E\left[P\left(\inf_{s\in[0,u]} X_s > y|\mathcal{A}_{t+s}\right)|\mathcal{A}_t\right] \\ &= E\left[P\left(\inf_{s\in[0,u]} X_s > y|\mathcal{A}_t\right)|\mathcal{A}_{t+s}\right] \\ &= P\left(\inf_{s\in[0,u]} X_s > y|\mathcal{A}_t\right) \\ &= M_t \end{aligned}$$

□