

**Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Departamento de Estatística**  
**Programa de Pós-Graduação**

**Controle On-Line de Atributos com Erros de Diagnóstico e**  
**Classificações Repetidas**

**Mestrando: Neander Ferreira Almeida**

**Orientador: Prof. Roberto da Costa Quinino**

**Belo Horizonte, agosto de 2007**

## Controle On-Line de Atributos com Erros de Diagnóstico e Classificações Repetidas

Neander Ferreira Almeida – Mestrando

Roberto da Costa Quinino – Orientador

### Resumo

O procedimento de controle on-line de processos por atributos, denominado controle on-line de Taguchi, consiste em amostrar um item a cada  $m$  produzidos e decidir, a cada inspeção, se houve ou não a redução da fração de itens conformes produzidos. Caso o item inspecionado for não conforme, pára-se o processo para ajuste. Como o sistema de inspeção pode estar sujeito a erros de classificação, desenvolve-se um modelo probabilístico que classifica repetidamente o item amostrado até que se observe uma determinada quantidade de classificações conformes ( $a$ ) ou não conformes ( $b$ ). O primeiro evento a ocorrer ( $a$  conformes ou  $b$  não conformes) define a classificação final do item amostrado. Utilizando-se as propriedades de uma cadeia de Markov ergódica, obtém-se uma expressão do custo médio do sistema de controle, que pode ser minimizada por três parâmetros: o intervalo entre inspeções ( $m$ ); o número de classificações conformes repetidas ( $a$ ); e o número de classificações não conformes repetidas ( $b$ ). O resultado ótimo é comparado com duas abordagens alternativas: a primeira consiste de uma simples política preventiva onde ajusta-se o sistema (sem a necessidade de inspeção) a cada  $n$  itens produzidos; a segunda diferencia-se em relação ao sistema aqui proposto apenas nas classificações repetidas do item amostrado uma vez que este é classificado um número fixo ( $r$ ) de vezes. Como resultado observamos que a política aqui proposta é superior ao procedimento que fixa o número de classificações repetidas no item amostrado. Também concluímos que o ajuste preventivo deve ser sempre verificado, pois dependendo da magnitude dos erros de classificação e custos envolvidos, este pode ser uma opção mais econômica em média do que políticas que requerem inspeção. Um exemplo numérico ilustra todo o procedimento proposto.

**Palavras-Chave:** controle *on-line* de qualidade por atributos; erros de classificação; classificação repetida seqüencial, cadeias de Markov.

## Sumário

1. Introdução .....	3
2. Modelo probabilístico .....	5
3. Modelo para Minimização dos custos.....	11
4. Modelo de Ajuste Preventivo.....	17
5. Exemplo numérico e discussões .....	19
6. Conclusão.....	26

## 1. Introdução

Taguchi et al.(1989) apresentaram um planejamento econômico para monitoramento on-line do controle de qualidade baseado em atributos onde o sistema de inspeção é automático e permite apenas a coleta de um item. O objetivo foi propor uma política de inspeção que minimizasse os custos decorrentes de uma mudança no processo de produção. Em um instante aleatório o processo migrava de um estado onde a quantidade de peças conformes era de 100% para um novo estado onde a quantidade de peças conformes era inferior a 100%. Em termos simbólicos a probabilidade de conformidade migrava de  $p_1 = 1$  (Estado I) para  $p_2$  (Estado II), com  $0 \leq p_2 < p_1$ . O controle constituía-se em inspecionar o  $m$ -ésimo item a cada  $m$  produzidos. Se o item inspecionado fosse julgado conforme a produção era continuada, caso contrário o processo era ajustado. Na solução apresentada, Taguchi et al. (1989) não assumiram explicitamente uma distribuição de probabilidade para a mudança de  $p_1 = 1$  para  $p_2$  e várias simplificações e aproximações foram empregadas na obtenção do custo médio esperado e do valor ótimo de  $m$ , que designaremos como  $m^\circ$ .

Nayebpour & Woodall (1993) desenvolveram um procedimento alternativo, no qual assumiram uma distribuição geométrica para mudança do Estado I para II, e concluíram que esta abordagem era mais apropriada quando comparada àquela de Taguchi et al. (1989), principalmente no caso em que  $p_2 > 0$ . Segundo os autores, isto acontece porque Taguchi et al. (1989) assumiram implicitamente que a mudança do Estado I para o Estado II ocorreria com distribuição uniforme entre as inspeções. Este fato permite a obtenção da função custo de forma mais simplificada, mas muitas vezes não representa bem situações reais.

Borges et al. (2001) observaram que o procedimento de inspeção discutido em Taguchi et al.(1989) e Nayebpour & Woodall (1993) pode apresentar erros de classificação, comprometendo a determinação do valor ótimo  $m^*$ . Os autores desenvolveram uma abordagem para incorporação destes erros e demonstraram o impacto econômico decorrente da sua desconsideração. Entretanto, não consideraram a possibilidade da realização de classificações repetidas independentes no item inspecionado como possível critério de minimização do custo médio esperado. Greenberg & Stokes (1995) mostram que classificações repetidas podem gerar uma economia média no sistema de classificação quando existe a possibilidade de erros.

Trindade et. al. (2007a,b) assumiram a possibilidade de  $p_1 \leq 1$  e consideraram a possibilidade de realização de  $r$  ( $r \geq 1$  e inteiro) classificações repetidas no item inspecionado com julgamento final do item em conforme se a quantidade de itens conformes (entre as  $r$  classificações repetidas) fosse igual a pelo menos  $w$  ( $0 \leq w \leq r$  e inteiro). A estratégia ótima consistiu na determinação do intervalo entre inspeções ( $m$ ), do número de classificações repetidas do item inspecionado ( $r$ ) e do número mínimo de classificações conformes (dentre as  $r$ ) para julgar o item conforme ( $w$ ) que minimizam o custo médio do sistema de controle. Entretanto a política adotada de classificações repetidas utilizada por Trindade et. al. (2007a,b) pode realizar classificações desnecessárias para julgamento final do item em conforme ou não conforme. Por exemplo, se  $r = 5$  e  $w = 1$  a observação da primeira classificação repetida conforme já seria suficiente para uma tomada de decisão e conseqüentemente teríamos uma economia decorrente da não necessidade de realização de todas as  $r$  classificações repetidas independentes.

Neste trabalho adotamos um procedimento discutido em Quinino & Ho (2004) que implicará na não realização de classificações repetidas desnecessárias. Consideraremos que um item será repetidamente e independentemente classificado até observarmos  $a$  (inteiro e  $a \geq 1$ ) conformes ou

$b$  (inteiro e  $b \geq 1$ ) não conformes (admitindo a possibilidade de erros de classificação). O item será julgado conforme se primeiramente encontrarmos  $a$  conformes nas classificações repetidas ou será julgado não conforme se primeiramente encontrarmos  $b$  não conformes nas classificações repetidas. Neste sentido, o número máximo de classificações repetidas por item será  $a + b - 1$ . Assim, o objetivo primordial será encontrar os valores de  $a$ ,  $b$  e  $m$  que minimizam o custo médio do sistema de controle. É nosso objetivo também compararmos os resultados com uma simples abordagem de manutenção preventiva (ajustes previamente determinados sem a necessidade de inspeções).

Na seção 2, o modelo probabilístico para o processo de classificações repetidas é descrito. Na seção 3 um modelo de custo é desenvolvido para determinar os valores ótimos. Na seção 4, avaliamos economicamente a possibilidade da realização de ajustes preventivos em comparação com a política de classificações repetidas. Um exemplo numérico para ilustrar o modelo proposto é apresentado na seção 5, e finalizando, as conclusões são apresentados na seção 6.

## **2. Modelo probabilístico**

Considere um processo de produção onde os itens produzidos são conformes ou não conformes. O sistema de controle consiste em inspecionar apenas o  $m$ -ésimo item a cada  $m$  produzidos. Se o item inspecionado for julgado conforme a produção é continuada, caso contrário o processo é ajustado. Neste trabalho denominaremos este sistema de controle como processo de ajuste corretivo. Cada item inspecionado será classificado independentemente até observarmos  $a$  conformes ou  $b$  não conformes. O item inspecionado, classificado repetidamente e independentemente em conforme ou não conforme, será julgado conforme se encontrarmos primeiramente  $a$  conformes ou será julgado não conforme se encontrarmos primeiramente  $b$  não conformes. O número máximo de classificações repetidas para uma tomada de decisão será  $a + b - 1$ . As classificações podem apresentar dois tipos de erros: tipo I,  $\alpha$ , no

qual classifica-se um produto como não conforme quando ele na realidade é conforme e o tipo II,  $\beta$ , no qual classifica-se um produto como conforme quando na realidade é não conforme. Neste trabalho consideramos  $\alpha$  e  $\beta$  menores do que 0,5 o que é razoável em casos reais e pode ser constatada nos vários exemplos descritos em Johnson et al. (1991).

O processo produtivo pode mudar de uma probabilidade de conformidade  $p_1$  (Estado I) para  $p_2$  (Estado II),  $p_2 < p_1$ , de acordo com uma distribuição geométrica com parâmetro  $\pi$ ,  $0 < \pi < 1$ . Assume-se que a probabilidade do processo de produção mudar do Estado II para o Estado I, sem que ocorra uma intervenção sobre o processo (um ajuste), é zero.

Com as considerações anteriores podemos modelar o processo de inspeção como uma Cadeia de Markov com espaço de estados discretos  $(s, k)$ , onde  $s$  e  $k$  assumem valores 1 ou 2. A variável  $s$  indica se o processo de produção no instante da inspeção está no Estado I ( $s = 1$ ) ou no Estado II ( $s = 2$ ) e a variável  $k$  indica se o item inspecionado foi julgado conforme ( $k = 1$ ) ou não conforme ( $k = 2$ ). Usaremos os símbolos  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $k_1$  e  $k_2$  para indicar respectivamente as situações  $s = 1$ ,  $s = 2$ ,  $k = 1$  e  $k = 2$ . A Figura 1 representa esquematicamente os possíveis estados e migrações no processo markoviano aqui utilizado.

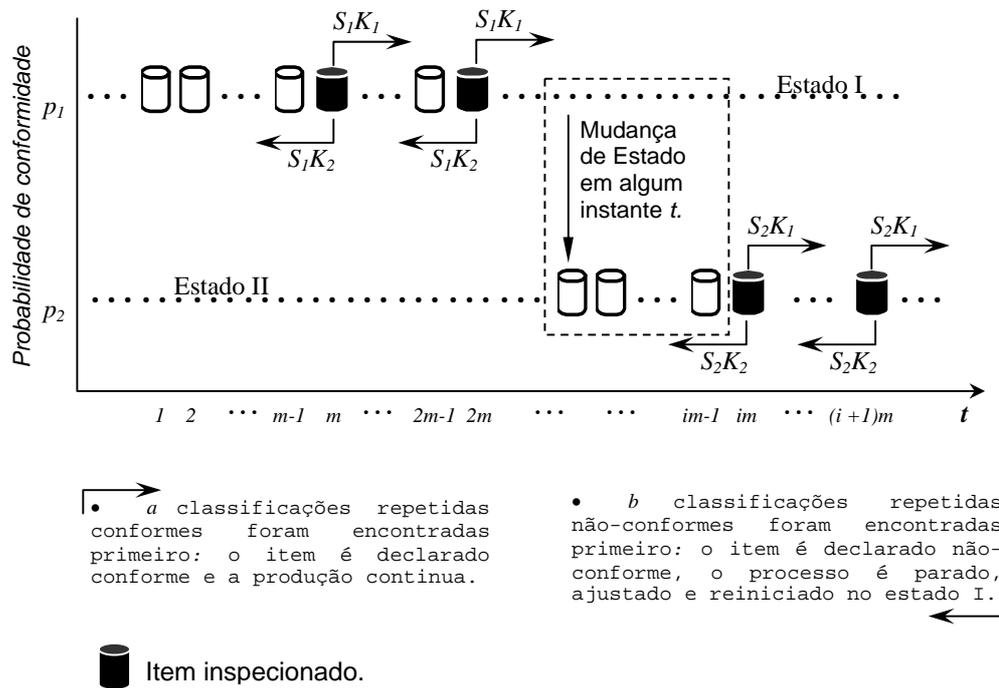


Figura 1 – Processo de controle proposto.

As probabilidades de transição de um estado  $(s;k)_i$  no instante de inspeção  $i$  para o estado  $(s;k)_{i+1}$  no instante de inspeção  $i+1$  constituem os elementos da matriz de transição  $\mathbf{P}$ , como descrito na Figura 2.

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1;k_1 & s_1;k_2 & s_2;k_2 & s_2;k_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1;k_1 \\ s_1;k_2 \\ s_2;k_2 \\ s_2;k_1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figura 2 – Matriz de Transição do processo de inspeção.

Por exemplo,  $A_{11}$  indica a probabilidade de migrarmos para o estado  $(s=1;k=1)_{i+1}$  dado que o estado anterior era  $(s=1;k=1)_i$ , ou esquematicamente  $(s_1;k_1)_i \rightarrow (s_1;k_1)_{i+1}$ . Considerando as possíveis transições a partir do estado  $(s_1;k_1)$ , tem-se:

$$A_{11} = (s_1;k_1)_i \rightarrow (s_1;k_1)_{i+1} = (1-\pi)^m \left[ p_1 BN[a, (1-\alpha)] + (1-p_1) BN[a, \beta] \right] \quad (2.1)$$

$$A_{12} = (s_1;k_1)_i \rightarrow (s_1;k_2)_{i+1} = (1-\pi)^m \left[ p_1 BN[b, \alpha] + (1-p_1) BN[b, (1-\beta)] \right] \quad (2.2)$$

$$A_{13} = (s_1;k_1)_i \rightarrow (s_2;k_2)_{i+1} = \left[ 1 - (1-\pi)^m \right] \left[ p_2 BN[b, \alpha] + (1-p_2) BN[b, (1-\beta)] \right] \quad (2.3)$$

$$A_{14} = (s_1;k_1)_i \rightarrow (s_2;k_1)_{i+1} = \left[ 1 - (1-\pi)^m \right] \left[ p_2 BN[a, (1-\alpha)] + (1-p_2) BN[a, \beta] \right] \quad (2.4)$$

A quantidade  $(1-\pi)^m$  é a probabilidade de não haver mudança do estado I para o estado II entre duas inspeções sucessivas (com produção de  $m$  itens).

O termo  $BN[a, q] = \sum_{x=a}^{a+b-1} \frac{(x-1)!}{(a-1)!(x-a)!} q^a (1-q)^{x-a}$  indica a probabilidade de classificarmos o

item inspecionado e submetido a classificações repetidas como conforme. Para entender a fórmula devemos relembrar inicialmente que o número de classificações repetidas máximo é  $a+b-1$ . Como desejamos calcular a probabilidade do item ser conforme então a última classificação repetida deverá ser necessariamente conforme. Evento que acontece com probabilidade  $q$ . Fixado a última prova em conforme resta-nos calcular a probabilidade de que nas  $(x-1)$  classificações repetidas anteriores tenhamos  $(a-1)$  classificações conformes. Tal acontecimento pode ser modelado como uma distribuição binomial com parâmetros  $(x-1)$  e  $q$ . Assim, a probabilidade da peça ser considerada

conforme na  $x$ -ésima classificação repetida será  $q \times \binom{x-1}{a-1} q^{a-1} (1-q)^{x-a}$ . Além disso, temos que

considerar que o número de classificações repetidas pode variar entre o mínimo  $x = a$  e o máximo  $x = a + b - 1$ . Conseqüentemente, a probabilidade de julgar a peça conforme será

$$BN[a, q] = \sum_{x=a}^{a+b-1} \frac{(x-1)!}{(a-1)!(x-a)!} q^a (1-q)^{x-a}.$$

Similarmente,  $BN[b, q] = \sum_{x=b}^{a+b-1} \frac{(x-1)!}{(b-1)!(x-b)!} q^b (1-q)^{x-b}$  indica a probabilidade de

classificarmos o item inspecionado e submetido a classificações repetidas como não conforme.

Observe que o cálculo das probabilidades de transição dependem exclusivamente da probabilidade de mudança do Estado I para o Estado II e da probabilidade do item inspecionado ser julgado conforme ou não conforme. Os instantes de inspeção em que o item é julgado não conforme implicam em um ajuste do processo, levando-o necessariamente ao Estado I.

Por isso, tem-se:

$$A_{11} = A_{21} = A_{31}; A_{12} = A_{22} = A_{32}; A_{13} = A_{23} = A_{33}; A_{14} = A_{24} = A_{34} \quad (2.5)$$

Adota-se que o processo não muda do Estado II para o Estado I sem que ocorra um ajuste no processo.

Como o ajuste só ocorre quando o item é julgado não conforme ( $k=2$ ), tem-se:

$$A_{41} = (s_2; k_1)_i \rightarrow (s_1; k_1)_{i+1} = 0 \quad (2.6)$$

$$A_{42} = (s_2; k_1)_i \rightarrow (s_1; k_2)_{i+1} = 0 \quad (2.7)$$

Por fim, as demais transições a partir do estado  $(s_2; k_1)_i$  são dadas por:

$$A_{43} = (s_2; k_1)_i \rightarrow (s_2; k_2)_{i+1} = \left[ p_2 BN[b, \alpha] + (1 - p_2) BN[b, (1 - \beta)] \right] \quad (2.8)$$

$$A_{44} = (s_2; k_1)_i \rightarrow (s_2; k_1)_{i+1} = \left[ p_2 BN[a, (1 - \alpha)] + (1 - p_2) BN[a, \beta] \right] \quad (2.9)$$

A matriz de transição  $\mathbf{P}$  é ergódica recorrente e conseqüentemente  $\mathbf{Q} = \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{P}^u$  existe e é independente da probabilidade dos estados iniciais do processo, o que implica que todas as linhas de  $\mathbf{Q}$  são iguais. Denotaremos o vetor  $\mathbf{Y}$  igual a primeira linha da matriz  $\mathbf{Q}$ , sendo representado por  $Y = [Y_1; Y_2; Y_3; Y_4]$  e podendo ser calculado através da equação (2.10) que é a solução do sistema de equação linear dado por  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}\mathbf{P}$  e  $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = 1$ .

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \quad (2.10)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 - 1 & A_1 & A_1 & 0 \\ A_2 & A_2 - 1 & A_2 & 0 \\ A_3 & A_3 & A_3 - 1 & A_{15} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

As probabilidades  $Y_1, Y_2, Y_3$  e  $Y_4$  podem ser interpretadas como a proporção média do número de inspeções nos estados  $(s_1; k_1)$ ,  $(s_1; k_2)$ ,  $(s_2; k_2)$  e  $(s_2; k_1)$ , respectivamente, para um número suficientemente grande de inspeções.

### 3. Modelo para Minimização dos custos

Para obtenção da função de custo, algumas suposições são necessárias. Caso um item examinado seja declarado defeituoso será decidido pela realização de um ajuste. A decisão de ajuste não é instantânea, o que implica que  $L$  unidades serão produzidas entre o início da inspeção e a decisão de ajuste. A unidade inspecionada assim como as  $L$  unidades produzidas durante a inspeção do processo são descartadas. Após o ajuste o processo passa a produzir unidades conformes com probabilidade  $p_1$ . Considere os seguintes custos:  $c_0$  - o custo de inspecionar uma vez um item produzido;  $c_1$  - o custo de produzir e não eliminar um item defeituoso;  $c_2$  - o custo de ajuste;  $c_3$  - o custo de produzir e eliminar um item defeituoso;  $c_4$  - o custo de produzir e eliminar um item perfeito. Observe que estamos considerando que a inspeção é destrutiva, mas pode ser realizada repetidas vezes.

Em cada ciclo de inspeção,  $(m-1)$  itens são enviados para o mercado ou para os próximos estágios de produção. Para um número suficientemente grande de inspeções realizadas,  $\mathbf{Y}$  corresponde ao vetor de probabilidade de ocorrência de cada estado da cadeia  $\mathbf{P}$ . Sejam  $V$  e  $K$  as variáveis aleatórias que indica respectivamente o custo incorrido em cada ciclo de inspeção e o custo por item produzido no ciclo, então o custo médio por item produzido e não descartado (em cada ciclo de inspeção) é:

$$E(K) = \frac{E(V)}{m-1} \quad (3.1)$$

Os valores que a variável aleatória  $V$  assume são discretos e estão vinculados aos estados  $(s;k)$ . A Tabela 1 apresenta estes vínculos, bem como as respectivas probabilidades de permanência no estado.

Tabela 1 - Distribuição de probabilidades de V.

Estados	Valores de V	Probabilidades
$(s_1; k_1)$	$V_1$	$Y_1$
$(s_1; k_2)$	$V_2$	$Y_2$
$(s_2; k_2)$	$V_3$	$Y_3$
$(s_2; k_1)$	$V_4$	$Y_4$

Os cálculos dos valores possíveis de  $V$  dependem do custo das classificações repetidas, da ocorrência de ajuste, do atraso, do número de itens não conformes enviados para o mercado e do real estado do item inspecionado. É importante observar que a probabilidade do item inspecionado ser realmente conforme ou não é condicionada ao julgamento realizado.

Consideremos inicialmente o custo  $V_1$ , ou seja, o custo do ciclo em que o estado de inspeção é  $(s_1; k_1)$ . Neste caso são feitas classificações repetidas do item inspecionado, todas os itens produzidos no ciclo estão no Estado I e o item inspecionado é julgado conforme, ou seja, não há custo decorrente de ajuste ou atraso. Como o item inspecionado é destruído, deve-se calcular a probabilidade de que ele seja conforme, dado que foi julgado conforme ( $p_{1/1}^I$ ) e a probabilidade do item ser não conforme, dado que foi julgado conforme ( $p_{2/1}^I$ ). Estas probabilidades são dadas por 3.2 e 3.3. Para facilitar a explicação defini-se uma nova variável aleatória  $T$  que assume o valor 1 se a peça inspecionada for realmente conforme e 2 caso contrário. Utilizando-se o teorema de Bayes e a propriedade de probabilidades complementares, temos:

$$p_{1/1}^I = P[T = 1 | (s_1; k_1)] = \frac{p_1 BN[a, (1 - \alpha)]}{p_1 BN[a, (1 - \alpha)] + (1 - p_1) BN[a, \beta]} \quad (3.2)$$

$$p_{2/1}^I = P[T = 2 | (s_1; k_1)] = 1 - p_{1/1}^I \quad (3.3)$$

Assim, o custo  $V_I$  é dado por:

$$V_I = c_0 \sum_{x=a}^{a+b-1} x \cdot z_1 + c_1(m-1)(1-p_1) + p_{2/1}'c_3 + p_{1/1}'c_4 \quad (3.4)$$

em que

$$z_1 = p_1 \frac{\binom{x-1}{a-1} (1-\alpha)^a \alpha^{x-a}}{BN[a, (1-\alpha)]} + (1-p_1) \frac{\binom{x-1}{a-1} \beta^a (1-\beta)^{x-a}}{BN[a, \beta]} \quad (3.5)$$

O termo  $\sum_{x=a}^{a+b-1} x \cdot z_1$  indica o número esperado de classificações repetidas condicionado ao fato que o item inspecionado foi julgado conforme. O número de classificações repetidas necessárias para definição do item como conforme pode variar entre  $x = a$  e  $x = a + b - 1$  classificações. O termo  $z_1$  é a probabilidade condicional do número de classificações repetidas ter sido  $x$  dado que o item foi julgado conforme. Para facilidade do cálculo do valor esperado utilizamos o teorema da probabilidade total condicionando a peça avaliada em conforme [probabilidade  $p$ ] ou não-conforme [probabilidade  $(1-p)$ ]. As probabilidades  $\binom{x-1}{a-1} (1-\alpha)^a \alpha^{x-a}$  e  $\binom{x-1}{a-1} \beta^a (1-\beta)^{x-a}$  precisam ser “normalizadas” respectivamente em relação a  $BN[a, (1-\alpha)]$  e  $BN[a, \beta]$  uma vez que essas são menores ou iguais a um.

O custo  $V_2$  refere-se ao ciclo em que o estado de inspeção é  $(s_1; k_2)$ . Todos os itens são produzidos no Estado I, mas o item inspecionado foi julgado não conforme, sendo efetuado o ajuste e ocorrendo o respectivo atraso. As probabilidades para o estado real do item inspecionado condicionado ao julgamento são dadas por

$$p_{1/2}^I = P[T = 1 | (s_1; k_2)] = \frac{p_1 BN[b, \alpha]}{p_1 BN[b, \alpha] + (1 - p_1) BN[b, (1 - \beta)]} \quad (3.6)$$

$$p_{2/2}^I = P[T = 2 | (s_1; k_2)] = 1 - p_{1/2}^I \quad (3.7)$$

Conseqüentemente, o custo  $V_2$  é

$$V_2 = c_0 \sum_{x=b}^{a+b-1} x \cdot z_2 + c_2 + c_1(m-1)(1-p_1) + p_{2/2}^I c_3 + p_{1/2}^I c_4 + L(1-p_1)c_3 + Lp_1 c_4 \quad (3.8)$$

em que

$$z_2 = p_1 \frac{\binom{x-1}{b-1} \alpha^b (1-\alpha)^{x-b}}{BN[b, \alpha]} + (1-p_1) \frac{\binom{x-1}{b-1} (1-\beta)^b \beta^{x-b}}{BN[b, (1-\beta)]} \quad (3.9)$$

O cálculo do custo  $V_3$ , associado ao estado  $(s_2; k_2)$ , não é calculado diretamente. Entretanto, este pode ser facilitado considerando a possibilidade do sistema de produção no atual ciclo de inspeção ter produzido parte das peças no Estado I ou todas as peças no Estado II. Um ciclo que termina no Estado II pode ter iniciado no Estado II ou no Estado I. A probabilidade  $[P_{I \rightarrow II}^{s_2 k_2}]$  de que na inspeção anterior o estado era  $(s_2; k_2)$  ou  $(s_1; k_2)$  ou  $(s_1; k_1)$  dado que o estado atual seja  $(s_2; k_2)$  e a probabilidade  $[P_{II \rightarrow II}^{s_2 k_2}]$  de que na inspeção anterior o estado era  $(s_2; k_1)$  dado que o estado atual seja  $(s_2; k_2)$  são calculadas em função das probabilidades de migração da matriz  $\mathbf{P}$  e pelos valores estacionários de  $\mathbf{Y}$ . Estas probabilidades são calculadas através do teorema de Bayes e são dadas por:

$$P_{I \rightarrow II}^{s_2 k_2} = P[(s_1; k_1)_{i-1} \cup (s_1; k_2)_{i-1} \cup (s_2; k_2)_{i-1} | (s_2; k_2)_i] \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
P_{I \rightarrow II}^{s_2 k_2} &= \frac{P\{[(s_1; k_1)_{i-1} \cap (s_2; k_2)_i] \cup [(s_1; k_2)_{i-1} \cap (s_2; k_2)_i] \cup [(s_2; k_2)_{i-1} \cap (s_2; k_2)_i]\}}{P\{[(s_1; k_1)_{i-1} \cap (s_2; k_2)_i] \cup [(s_1; k_2)_{i-1} \cap (s_2; k_2)_i] \cup [(s_2; k_2)_{i-1} \cap (s_2; k_2)_i] \cup [(s_2; k_1)_{i-1} \cap (s_2; k_2)_i]\}} \\
P_{I \rightarrow II}^{s_2 k_2} &= \frac{A_{13}Y_1 + A_{23}Y_2 + A_{33}Y_3}{A_{13}Y_1 + A_{23}Y_2 + A_{33}Y_3 + A_{43}Y_4} = \frac{A_{13}(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{A_{13}(Y_1 + Y_2 + Y_3) + A_{43}Y_4} \\
P_{II \rightarrow II}^{s_2 k_2} &= 1 - P[(s_1; k_1)_{i-1} \cup (s_1; k_2)_{i-1} \cup (s_2; k_2)_{i-1} | (s_2; k_2)_i] \tag{3.11} \\
P_{II \rightarrow II}^{s_2 k_2} &= \frac{A_{43}Y_4}{A_{13}(Y_1 + Y_2 + Y_3) + A_{43}Y_4}
\end{aligned}$$

No caso em que o estado da inspeção imediatamente anterior era  $(s_2; k_2)$  ou  $(s_1; k_2)$  ou  $(s_1; k_1)$ , deve-se determinar o ponto em que ocorre a mudança no ciclo associado ao atual estado de inspeção  $(s_2; k_2)$  para que o número de itens defeituosos enviados para o mercado seja adequadamente calculado. A probabilidade de que a mudança ocorra no  $t$ -ésimo item produzido é dada por:

$$p_t = \frac{(1-\pi)^{t-1} \pi}{[1-(1-\pi)^m]}, \quad t = 1, \dots, m \tag{3.12}$$

Deve-se também calcular as probabilidades relativas ao estado real do item inspecionado, conhecendo-se o julgamento. De forma similar ao realizado na determinação dos custos de  $V_1$ , e  $V_2$ , tem-se:

$$p_{1/2}^H = P[T = 1 | (s = 2; k = 2)] = \frac{p_2 BN[b, \alpha]}{p_2 BN[b, \alpha] + (1 - p_2) BN[b, (1 - \beta)]} \tag{3.13}$$

$$p_{2/2}^H = P[T = 2 | (s = 2; k = 2)] = 1 - p_{1/2}^H \tag{3.14}$$

O custo  $V_3$  é dado por

$$V_3 = c_0 \sum_{x=b}^{a+b-1} x \cdot z_3 + c_2 + p_{I \rightarrow II}^{s_2 k_2} \left[ c_1 \sum_{t=1}^m p_t [(t-1)(1-p_1) + (m-t)(1-p_2)] \right] + p_{II \rightarrow II}^{s_2 k_2} [c_1(m-1)(1-p_2)] + p_{2/2}'' c_3 + p_{1/2}'' c_4 + L(1-p_2)c_3 + Lp_2 c_4 \quad (3.15)$$

em que

$$z_3 = p_2 \frac{\binom{x-1}{b-1} \alpha^b (1-\alpha)^{x-b}}{BN[b, \alpha]} + (1-p_2) \frac{\binom{x-1}{b-1} (1-\beta)^b \beta^{x-b}}{BN[b, (1-\beta)]} \quad (3.16)$$

De maneira similar, o custo  $V_4$  é dado por:

$$V_4 = c_0 \sum_{x=a}^{a+b-1} x \cdot z_4 + c_2 + p_{I \rightarrow II}^{s_2 k_1} \left[ c_1 \sum_{t=1}^m p_t [(t-1)(1-p_1) + (m-t)(1-p_2)] \right] + p_{II \rightarrow II}^{s_2 k_1} [c_1(m-1)(1-p_2)] + p_{2/1}'' c_3 + p_{1/1}'' c_4 \quad (3.17)$$

em que

$$p_{I \rightarrow II}^{s_2 k_1} = \frac{A_{14}Y_1 + A_{24}Y_2 + A_{34}Y_3}{A_{14}Y_1 + A_{24}Y_2 + A_{34}Y_3 + A_{44}Y_4} = \frac{A_{14}(Y_1 + Y_2 + Y_3)}{A_{14}(Y_1 + Y_2 + Y_3) + A_{44}Y_4} \quad (3.18)$$

$$p_{II \rightarrow II}^{s_2 k_1} = \frac{A_{44}Y_4}{A_{14}(Y_1 + Y_2 + Y_3) + A_{44}Y_4} \quad (3.19)$$

$$p_{1/1}'' = P[T = 1 | (s = 2; k = 1)] = \frac{p_2 BN[a, (1-\alpha)]}{p_2 BN[a, (1-\alpha)] + (1-p_2) BN[a, \beta]} \quad (3.20)$$

$$p_{2/1}'' = P[T = 2 | (s = 1; k = 1)] = 1 - p_{1/1}'' \quad (3.21)$$

$$z_4 = p_2 \frac{\binom{x-1}{a-1} (1-\alpha)^a \alpha^{x-a}}{BN[a, (1-\alpha)]} + (1-p_2) \frac{\binom{x-1}{a-1} \beta^a (1-\beta)^{x-a}}{BN[a, \beta]} \quad (3.22)$$

Assim,  $E(V)$  pode ser calculado por

$$E(V) = \sum_{i=1}^4 V_i Y_i \quad (3.23)$$

O problema consiste em determinar os valores de

$$(m^\circ, a^\circ, b^\circ) = \arg \min_{m,a,b} [E(K)] \quad (3.24)$$

#### 4. Modelo de Ajuste Preventivo

Uma política alternativa ao modelo desenvolvido no item 3 consiste em realizar ajustes preventivos sem a necessidade de inspeção a cada  $n$  itens produzidos. Com as considerações já apresentadas anteriormente podemos também modelar o processo de inspeção como uma Cadeia de Markov. Seja uma variável  $s$  indicando se o processo de produção no instante do ajuste está no Estado I ( $s = 1$ ) ou no Estado II ( $s = 2$ ). A figura 3 ilustra os possíveis estados e migrações no processo markoviano aqui utilizado.

$$\mathbf{W} = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & s_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Figura 3 – Matriz de Transição do processo de ajuste.

Em que  $w_{11}$  indica a probabilidade do processo permanecer no estado I durante a produção de  $n$  itens.

Pode ser expressa como:

$$w_{11} = (1 - \pi)^n \quad (4.1)$$

De maneira similar  $w_{12}$  é o complementar de  $w_{11}$  e indica a probabilidade do processo mudar do estado I para o estado II durante a produção de  $n$  itens, sendo expressa como:

$$w_{12} = 1 - (1 - \pi)^n \quad (4.2)$$

Uma vez que a cada  $n$  peças produzidas o processo é ajustado, voltando ao estado I, podemos concluir que  $w_{11} = w_{21}$  e  $w_{12} = w_{22}$ . Assim, a matriz  $\mathbf{H} = \lim_{u \rightarrow \infty} \mathbf{W}^u$  existe e é independente da probabilidade dos estados iniciais do processo o que implica que todas as linhas de  $\mathbf{H}$  são iguais. Denotaremos o vetor  $\mathbf{M} = [M_1; M_2]$  igual a primeira linha da matriz estacionária  $\mathbf{H}$ . Particularmente a obtenção de  $\mathbf{M}$  para o caso aqui discutido é trivial uma vez que todas as linhas da matriz  $\mathbf{W}$  são iguais. Assim,  $M_1 = w_{11}$  e  $M_2 = w_{12}$ . As probabilidades  $M_1$  e  $M_2$  podem ser interpretadas como a proporção média do número de ajustes realizados nos estados  $s_1$  e  $s_2$  respectivamente.

Para ação preventiva não incorremos na necessidade de inspeções, eliminação de itens inspecionados e atraso. Assim, entre os respectivos ajustes corretivos de tamanho  $n$ , os custos envolvidos são decorrentes exclusivamente do efetivo ajuste ( $c_2$ ), que acontece a cada  $n$  itens produzidos e de produzir itens defeituosos e não eliminá-los. Neste sentido o custo médio associado aos estados  $s_1$  e  $s_2$  podem ser respectivamente expressos pelas expressões (4.3) e (4.4).

$$N_1 = c_2 + n(1 - p_1)c_1 \quad (4.3)$$

$$N_2 = c_2 + \sum_{t=1}^n q_t [(t-1)(1 - p_1) + (n-t+1)(1 - p_2)]c_1 \quad (4.4)$$

Em que  $q_t$  é a probabilidade de que a mudança de parâmetro do processo [do Estado I ( $p_1$ ) para o

Estado II ( $p_2$ )] ocorra no  $t$ -ésimo item produzido e é expressa como  $q_t = \frac{(1 - \pi)^{t-1} \pi}{[1 - (1 - \pi)^n]}$ ,  $t = 1, \dots, n$ .

Assim, o custo médio por unidade produzida entre ajustes preventivos ( $K_p$ ) pode ser expresso como,

$$K_p = \frac{M_1 N_1 + M_2 N_2}{n} \quad (4.5)$$

O problema consiste em determinar o valor de

$$n^\circ = \arg \min_n [K_p] \quad (4.6)$$

De maneira geral o objetivo desta dissertação é comparar a política de ajustes corretivos com a política de ajuste preventivos e escolher aquela com o menor custo esperado. Isto será feito pela comparação direta das expressões (3.24) e (4.6).

## 5. Exemplo numérico e discussões

O exemplo descrito nesta seção é baseado em Trindade et. al. (2007a,b) e tem como objetivo avaliar o impacto dos erros de diagnósticos e dos testes repetitivos em um planejamento econômico baseado nas políticas corretiva e preventiva desenvolvidas neste trabalho. Consideramos o caso em que  $c_0 = 0.25$ ;  $c_1 = 20$ ;  $c_2 = 100$ ;  $c_3 = 2$ ;  $c_4 = 2$ ;  $p_1 = 0.99$ ,  $p_2 = 0.8$ ,  $\pi = 0.0001$ ,  $\alpha = \beta = 0.01$  e  $L = 10$ . Para realização dos cálculos foi implementado um programa utilizando o software MatLab 6.5 (Anexo 1).

A Figura 4 mostra o custo médio do sistema de controle por item produzido em função do intervalo entre inspeções ( $m$ ) e do número mínimo de classificações conformes ( $a$ ) e não conformes ( $b$ ) para julgar um item respectivamente em conforme ou não conforme. Ilustramos apenas as políticas que resultam nos seis menores custos médios locais. Os valores ótimos globais foram obtidos para  $m^\circ = 46$ ,  $a^\circ = 1$  e  $b^\circ = 2$ , o que resultou em um custo médio de  $E(K) = \$0,3667$ . Trindade et. al. (2007a,b) utilizando os mesmos dados e uma política de classificar cada item inspecionado  $r$  vezes e julgá-lo conforme somente se for observado pelo menos  $w$  classificações conformes, obteve um custo

médio ótimo de \$0,3762 ou seja, 2,6% maior do que o valor obtido neste trabalho. A política de classificar o item inspecionado apenas uma vez resulta em um custo ótimo de \$0,3853, ou seja, 5,1% maior do que a política ótima obtida neste trabalho. Caso desprezásemos os erros de classificação e utilizássemos a política corretiva desenvolvida neste trabalho obteríamos como política ótima  $a^{\circ}=1$  e  $b^{\circ}=1$  o que é equivalente a classificar o itens inspecionado apenas uma vez e conseqüentemente geraria um custo ótimo de \$0,3876 (5,7% maior do que a política ótima correta considerando os erros de classificação). Isto mostra o quanto é importante considerar os erros de classificação.

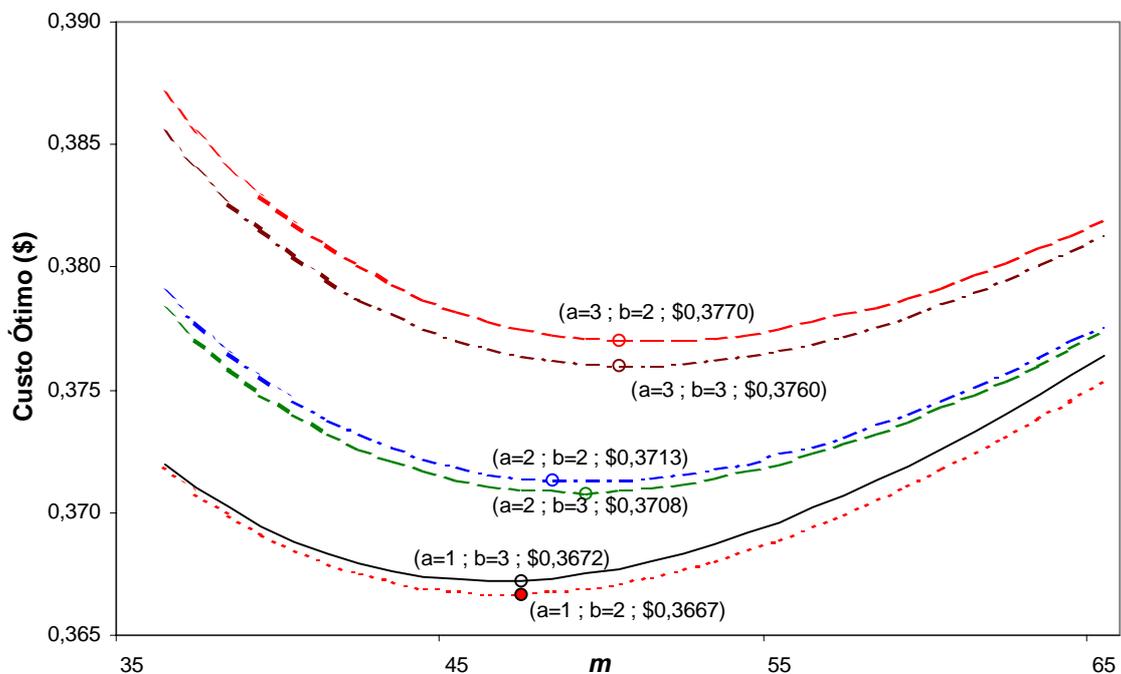


Figura 4 – Gráfico de Custo Médio em função de  $m, a, b$ .

As Figuras 5 a 14 mostram a comparação entre os custos médios obtidos pela política corretiva ( $E(K)$ ) e pela política preventiva ( $K_p$ ). Cada parâmetro é analisado dentro de uma faixa que apesar de arbitrária é ampla o suficiente para ser útil para o estudo de sensibilidade. Para cada caso supõe-se que os demais parâmetros são mantidos constantes nos valores utilizados no exemplo numérico do início da

seção. Comparando as duas políticas de manutenção, observamos que o aumento dos custos  $c_1$ ,  $c_3$  e dos erros de classificação  $\alpha$  e  $\beta$  não alteram a política de controle, permanecendo mais vantajoso a política corretiva. Para valores pequenos de  $\pi$  e dos custos  $c_0$  e  $c_4$ , a política de ajuste corretivo obtém custos ótimos menores, mas com aumento destes ocorre uma inversão e a política de ajustes preventivos passa a obter custos ótimos menores. Comportamento oposto é observado com o aumento de  $c_2$ , para valores menores os ajustes preventivos geram menor custo, mas depois há uma inversão e os ajustes corretivos passam a gerar menor custo.

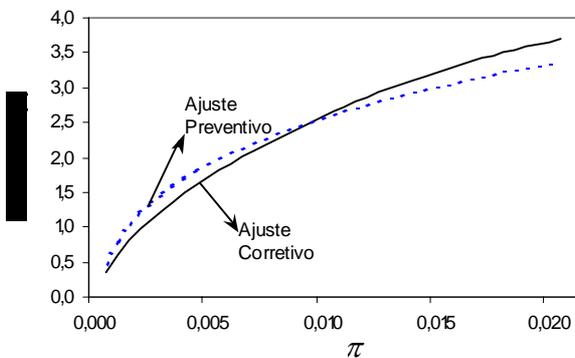


Figura 5 – Gráfico de  $E(K)$  vs  $K_p$  em função de  $\pi$ .

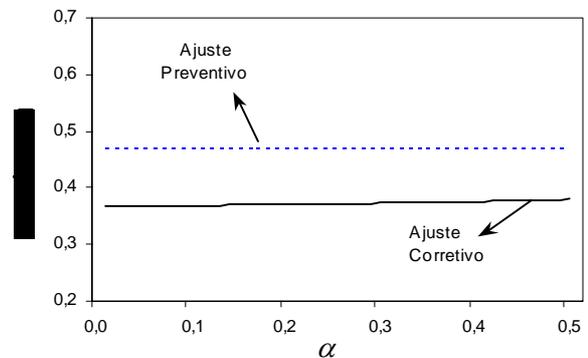


Figura 6 - Gráfico de  $E(K)$  vs  $K_p$  em função de  $\alpha$ .

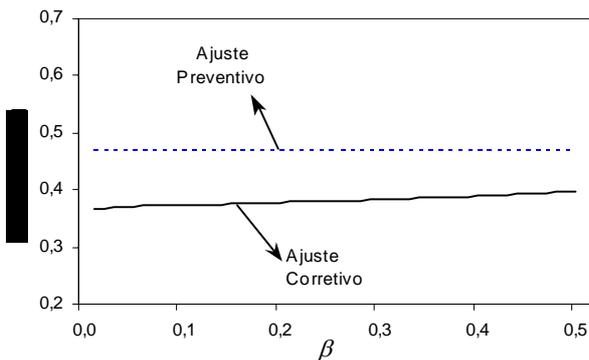


Figura 7 - Gráfico de  $E(K)$  vs  $K_p$  em função de  $\beta$ .

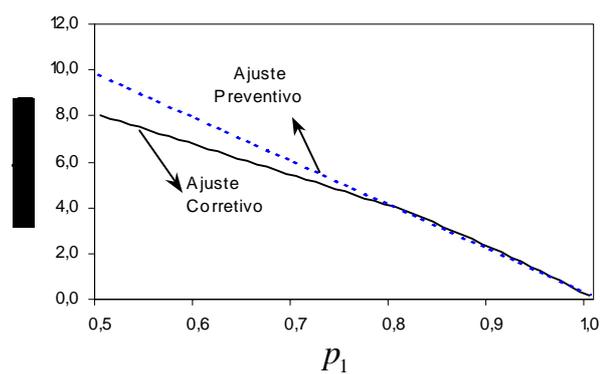


Figura 8 - Gráfico de  $E(K)$  vs  $K_p$  em função de  $p_1$ .

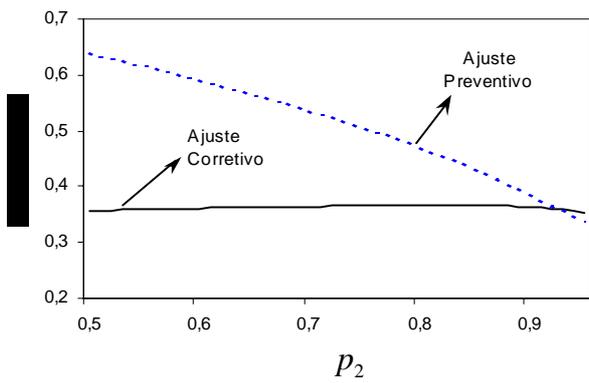


Figura 9 - Gráfico de  $E(K)$  vs  $K_p$  em função de  $p_2$ .

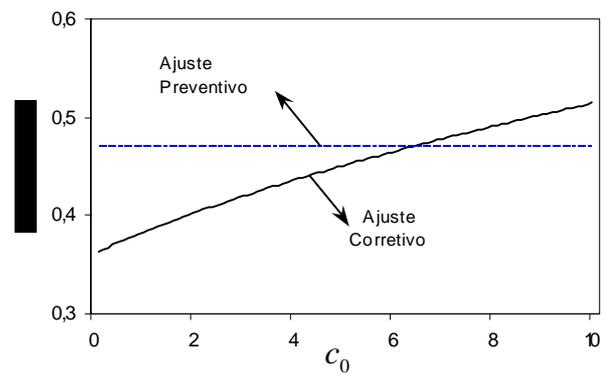


Figura 10 - Gráfico de  $E(K)$  vs  $K_p$  em função de  $c_0$ .

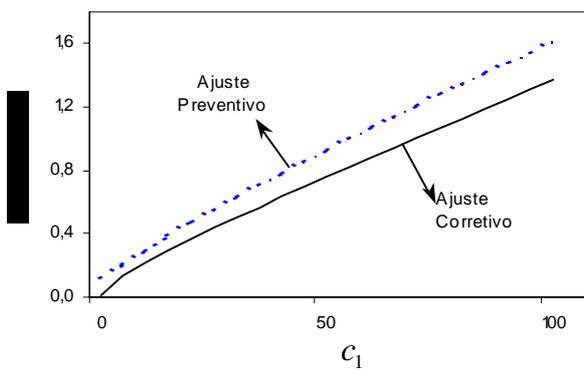


Figura 11 - Gráfico de  $E(K)$  vs  $K_p$  em função de  $c_1$ .

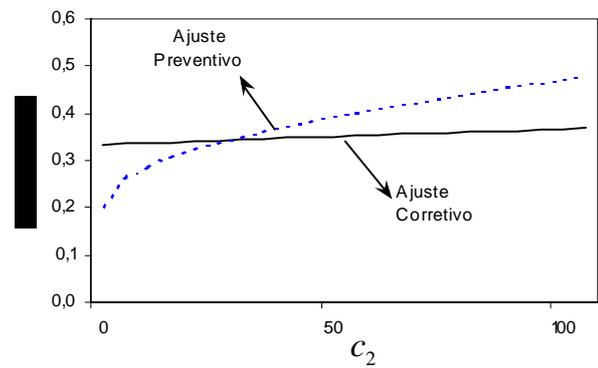


Figura 12 - Gráfico de  $E(K)$  vs  $K_p$  em função de  $c_2$ .

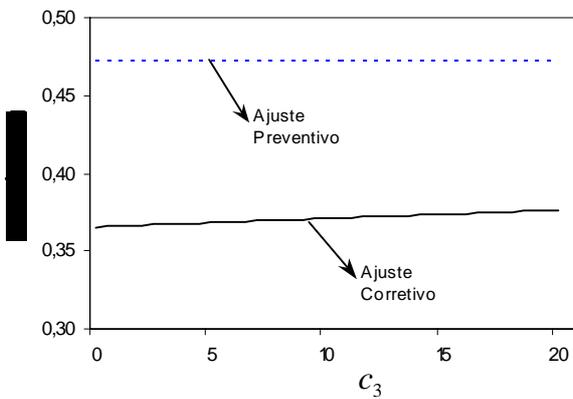


Figura 13 - Gráfico de  $E(K)$  vs  $K_p$  em função de  $c_3$ .

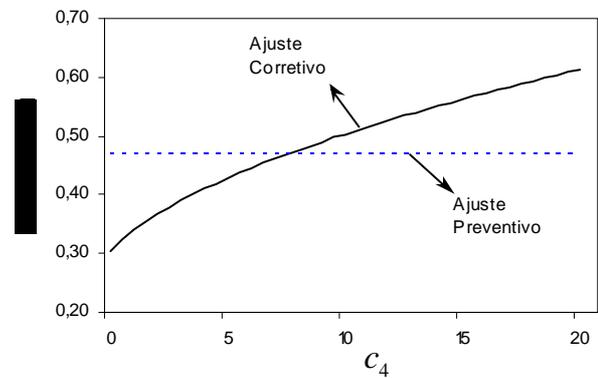


Figura 14 - Gráfico de  $E(K)$  vs  $K_p$  em função de  $c_4$ .

As figuras 15 a 24 mostram os valores ótimos para  $m$ ,  $a$  e  $b$ , variando-se apenas um parâmetro por vez, com os demais valores mantido constantes conforme o exemplo numérico do início desta seção.

Os parâmetros  $a^\circ$  e  $b^\circ$  mostram-se insensíveis aos custos  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  nas faixas utilizadas, enquanto o aumento do custo de produzir e eliminar um item conforme ( $c_4$ ) leva a um aumento do número de classificações necessárias para determinar o julgamento final do item inspecionado. Já o parâmetro  $m$  apresenta um comportamento distinto para cada um dos custos avaliados. Um aumento no custo de inspeção ( $c_0$ ), no custo de ajuste ( $c_2$ ) e no custo de produzir e eliminar um item conforme ( $c_4$ ) leva ao aumento de  $m^\circ$ , reduzindo a frequência das inspeções. Para a faixa pesquisada, o custo de produzir e eliminar um item não conforme ( $c_3$ ) altera levemente o parâmetro  $m^\circ$  em relação a estratégia ótima de inspeção. Um aumento no custo de envio de itens defeituosos para o mercado ( $c_1$ ) leva à redução do intervalo entre inspeções, ou seja, aumento na frequência das inspeções, com o objetivo de detectar mais prontamente a ocorrência da mudança de estado do processo.

Uma redução na fração de itens conformes produzidos no estado I ( $p_1$ ) leva a um aumento no intervalo entre inspeções e na diminuição do número de classificações não conformes necessárias para declarar um item não conforme. Isso ocorre porque, com mais itens não conformes sendo produzidos no estado I, aumenta a ocorrência de ajustes desnecessários, pois mais itens não conformes são amostrados.

Já para a fração de itens conformes produzidos no estado II ( $p_2$ ), alterações em seu valor não mudam a política ótima de classificação dos itens,  $a^\circ$  e  $b^\circ$ , mas leva a um aumento do intervalo entre inspeções visto que a diferença na proporção de itens conforme produzidos no estado I e II diminui.

O aumento do parâmetro ( $\pi$ ) leva inicialmente à redução no intervalo entre inspeções, pois em média a mudança de estado ( $I \rightarrow II$ ) passa a ocorrer após um menor número de itens produzidos pelo processo,  $a^\circ$  e  $b^\circ$  são sofrem alteração. Entretanto, se  $\pi$  se tornar muito grande passa a ser melhor, em termos econômicos, que o intervalo entre inspeções cresça.

Um aumento de  $\alpha$  eleva a probabilidade de declarar um item conforme como não conforme. A estratégia ótima contrapõe este aumento exigindo que um número maior de classificações repetidas por item inspecionado resulte em não-conformidade ( $b^\circ$ ) para julgar o item como não conforme.

Comportamento oposto é observado com o aumento de  $\beta$ , classificar um item defeituoso como conforme, exigindo que um número maior de classificações repetidas por item inspecionado resulte em conformidade ( $a^\circ$ ) para julgar o item como conforme.

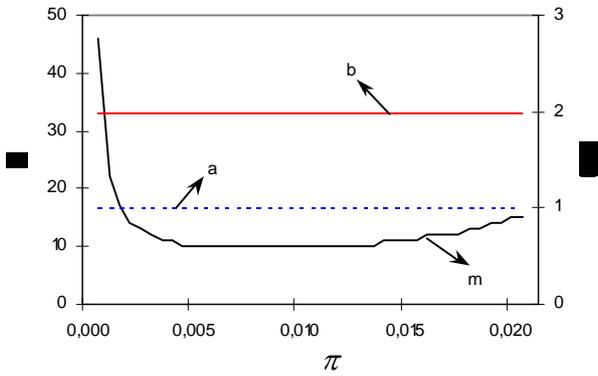


Figura 15 – Gráfico de valores ótimos para  $m$ ,  $a$  e  $b$  em função de  $\pi$ .

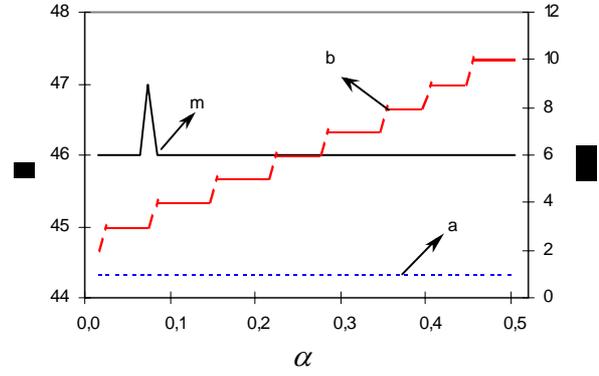


Figura 16 - Gráfico de valores ótimos para  $m$ ,  $a$  e  $b$  em função de  $\alpha$ .

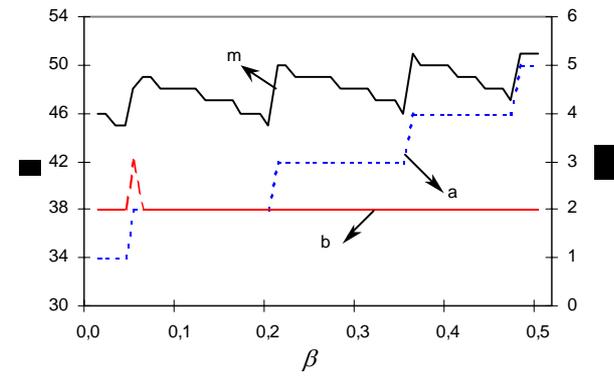


Figura 17 – Gráfico de valores ótimos para  $m$ ,  $a$  e  $b$  em função de  $\beta$ .

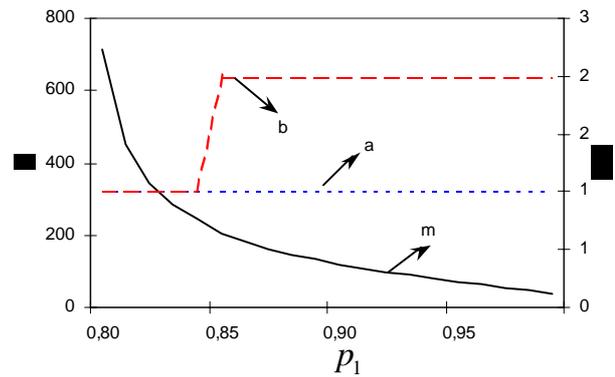


Figura 18 - Gráfico de valores ótimos para  $m$ ,  $a$  e  $b$  em função de  $p_1$ .

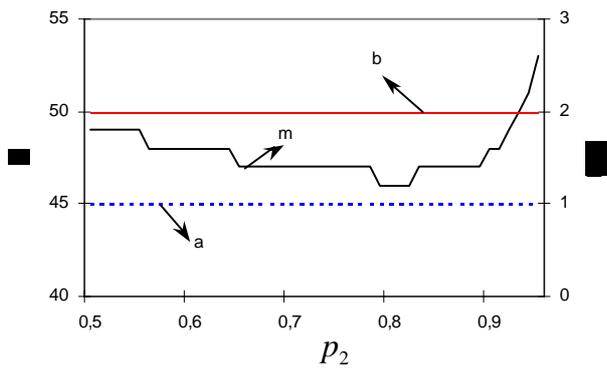


Figura 19 – Gráfico de valores ótimos para  $m$ ,  $a$  e  $b$  em função de  $p_2$ .

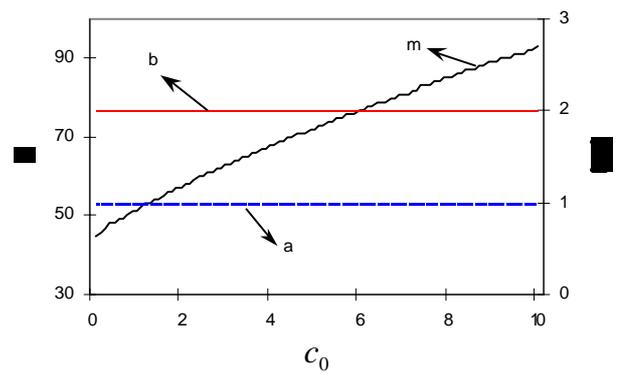


Figura 20 - Gráfico de valores ótimos para  $m$ ,  $a$  e  $b$  em função de  $c_0$ .

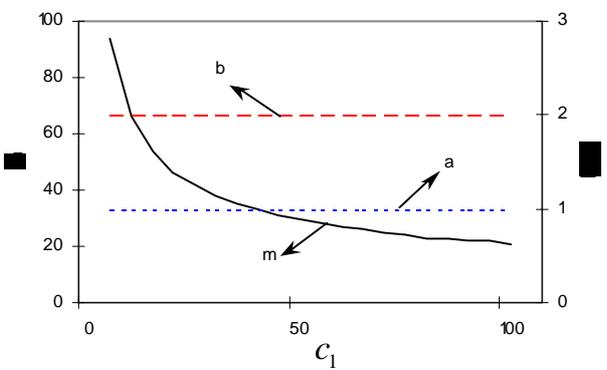


Figura 21 – Gráfico de valores ótimos para  $m$ ,  $a$  e  $b$  em função de  $c_1$ .

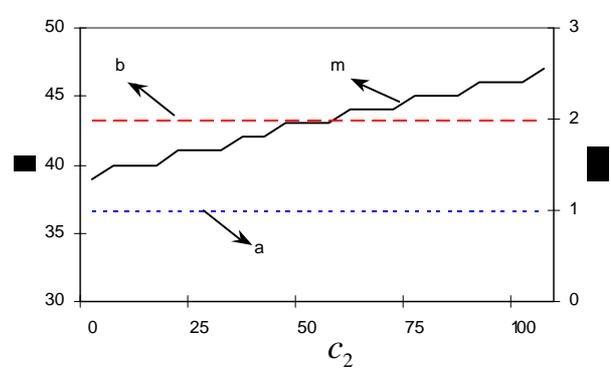


Figura 22 - Gráfico de valores ótimos para  $m$ ,  $a$  e  $b$  em função de  $c_2$ .

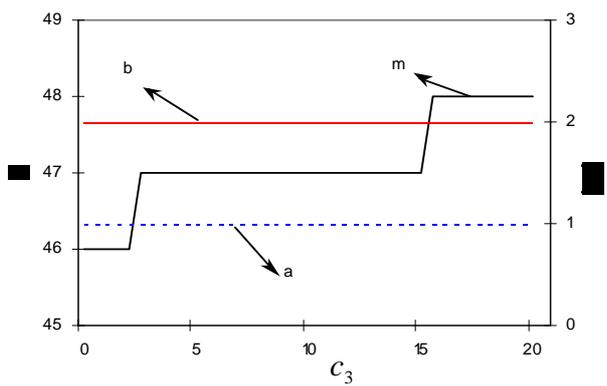


Figura 23 – Gráfico de valores ótimos para  $m$ ,  $a$  e  $b$  em função de  $c_3$ .

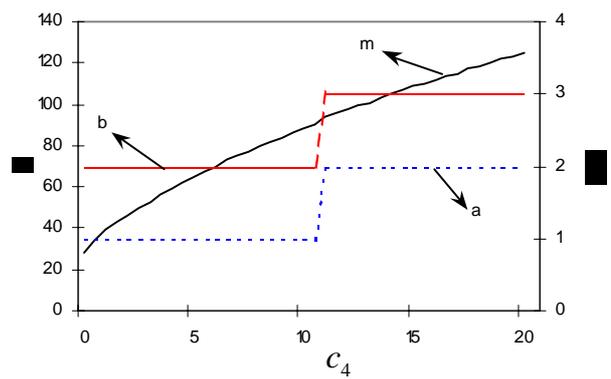


Figura 24 - Gráfico de valores ótimos para  $m$ ,  $a$  e  $b$  em função de  $c_4$ .

## 6. Conclusão

Nos casos em que existem erros de classificação no sistema de inspeção por atributos, o modelo probabilístico, desenvolvido nesta dissertação, que classifica repetidamente o item amostrado até que se observe uma determinada quantidade de classificações conformes ( $a$ ) ou não conformes ( $b$ ) apresentou uma política mais eficiente que o modelo de inspeção proposto por Trindade et. al. (2007) onde fixa-se o número de classificações repetidas a priori. O que determina o quão mais eficiente é a combinação específica dos fatores de custo, das probabilidades de produção nos estados I e II, da probabilidade de mudança de estado e dos erros de inspeção do sistema de controle em questão. Em relação ao ajuste Preventivo observamos que os custos de inspeção e a probabilidade de mudança do estado I para o estado II ( $\pi$ ) mostraram-se fundamentais para uma escolha da política Preventiva em substituição a política Corretiva. Em linhas gerais, o número de parâmetros é muito grande e torna-se muito complicado a avaliação das interações no custo médio. Diante deste cenário recomendamos a avaliação das duas políticas (corretiva e preventiva) por meio de um estudo de sensibilidade focado no particular problema em análise. Para tanto disponibilizamos um programa em Matlab para facilitar a operacionalização dos modelos discutidos nesta dissertação.

## Referências Bibliográficas

1. Borges, W; Ho, L.L. & Turnes, O. (2001). An analysis of Taguchi's on-line quality monitoring procedure for attributes with diagnosis errors. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **17**, 261-276.
2. Greenberg, B.S. & Stokes, S.L. (1995). Repetitive testing in the presence of inspection errors. *Technometrics*, **37**, 102-111.
3. Johnson, N. L., Kotz, S., & Wu, X. (1991). *Inspection errors for attributes in quality control*. London: Chapman & Hall.
4. Nayebpour, M.R. & Woodall, W.H. (1993). An analysis of Taguchi's on-line quality monitoring procedure for attributes. *Technometrics*, **35**, 53-60.
5. Quinino, R. & Ho, L.L. (2004). Repetitive tests as an economic alternative procedure to control attributes with diagnosis errors. *European Journal of Operation Research*, **155**, 209-225.
6. Trindade, A.; Ho, L.L. & Quinino, R. (2007a). Controle *on-line* por atributos com erros de classificação: uma abordagem econômica com classificações repetidas. *Pesquisa Operacional*, **27**, 105-116.
7. Trindade, A.; Ho, L.L. & Quinino, R. (2007b). Monitoring process for attributes with quality deterioration and diagnosis errors. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*. (in press).
8. Ross, S.M. (2003). *Introduction to probability models*. 8th edn. Academic Press, San Diego.
9. Taguchi, G.; Elsayed, E.A. & Hsiang, T. (1989). *Quality Engineering in Production in Systems*. McGraw-Hill, New York.
10. Taguchi, G.; Chowdhury, S. & Wu, Y. (2004). *Taguchi's Quality Engineering – Handbook*. John Wiley & Sons, Inc. New Jersey.

## Anexo I

```
clear all;
c0=0.25;
c1=20;
c2=100;
c3=2;
c4=2;
pi=0.0001;
p1=0.99;
p2=0.8;
alpha=0.01;
beta=0.01;
mmax=1000;
mmin=2;
L=10;
k1=1;
k=1;

for m=mmin:mmax

    vt=(1:1:m);
    pt=(1-pi).^(vt-1)*pi./(1-(1-pi)^m); %(3.12)

%=====
%Início da Manutenção Preventiva
%=====
    summation=sum(c1.*pt.*((vt-1).*(1-p1)+(m-vt+1).*(1-p2))); % summation (4.4)
    A1=(1-pi)^m; % (4.1)
    A2=1-(1-pi)^m; % (4.2)
    V1=c2+c1*m*(1-p1); % (4.3)
    V2=c2+summation; % (4.4)
    EK(k)=(A1*V1+A2*V2)/m; % (4.5)
    nn(k)=m;
    k=k+1;
%=====
%Fim da Manutenção Preventiva
%=====

%=====
%Início da Manutenção Corretiva
%=====
    summation=sum(c1.*pt.*((vt-1).*(1-p1)+(m-vt).*(1-p2))); % summation(3.15)e (3.17)
    esta=(1-pi)^m;
    estb=1-esta;
```

```

for a=1:3

for b=1:3

r=a+b-1;

P11=nbincdf(b-1,a,1-alpha); % (2.1) to (2.9)
P21=nbincdf(b-1,a,beta);
P12=nbincdf(a-1,b,alpha);
P22=nbincdf(a-1,b,1-beta);
A1=esta*(p1*(P11)+(1-p1)*(P21)); % (2.1)
A2=esta*(p1*(P12)+(1-p1)*(P22)); % (2.2)
A3=estb*(p2*(P12)+(1-p2)*(P22)); % (2.3)
A4=estb*(p2*(P11)+(1-p2)*(P21)); % (2.4)
A15=(p2*(P12)+(1-p2)*(P22)); % (2.8)
A16=(p2*(P11)+(1-p2)*(P21)); % (2.9)
A(1,1)=A1-1; A(1,2)=A1; A(1,3)=A1; A(1,4)=0;
A(2,1)=A2; A(2,2)=A2-1; A(2,3)=A2; A(2,4)=0;
A(3,1)=A3; A(3,2)=A3; A(3,3)=A3-1; A(3,4)=A15;
A(4,1)=1; A(4,2)=1; A(4,3)=1; A(4,4)=1;
B=[0;0;0;1];
Y=A\B; % (2.10)
Y=Y';
p11a = p1*P11/(p1*(P11)+(1-p1)*(P21)+eps); % (3.2)
p21a = 1-p11a; % (3.3)
p12a = p1*(P12)/(p1*(P12)+(1-p1)*(P22)+eps); % (3.6)
p22a = 1-p12a; % (3.7)
p11b = p2*P11/(p2*(P11)+(1-p2)*(P21)+eps); % (3.13)
p21b = 1-p11b; % (3.14)
p12b = p2*(P12)/(p2*(P12)+(1-p2)*(P22)+eps); % (3.20)
p22b = 1-p12b; % (3.21)
j=(a:r); i=(0:b-1); pa1=nbincdf(i,a,1-alpha)'; pa2=nbincdf(i,a,beta)';
res=j*(p1*(pa1/P11)+(1-p1)*(pa2/P21)); % (3.5)
V(1)=(res*c0+c1*(m-1)*(1-p1)+p21a*c3+p11a*c4); % (3.4)
k3=(b:r); i=(0:a-1); pb1=nbincdf(i,b,alpha)'; pb2=nbincdf(i,b,1-beta)';
res=k3*(p1*(pb1/P12)+(1-p1)*(pb2/P22)); % (3.9)
V(2)=(res*c0+c2+c1*(m-1)*(1-p1)+p22a*c3+p12a*c4+L*(1-p1)*c3+L*p1*c4); % (3.8)
ps2k2ItoII=A3*(Y(1)+Y(2)+Y(3))/(A3*(Y(1)+Y(2)+Y(3))+A15*Y(4)); % (3.10)
ps2k2IItoII=A15*Y(4)/(A3*(Y(1)+Y(2)+Y(3))+A15*Y(4)); % (3.11)
res=k3*(p2*(pb1/P12)+(1-p2)*(pb2/P22)); % (3.16)
V(3)=res*c0+c2+ps2k2ItoII*(summation)+p22b*c3+p12b*c4+
L*(1-p2)*c3+L*p2*c4+ps2k2IItoII*c1*(m-1)*(1-p2); % (3.15)
ps2k1ItoII=A4*(Y(1)+Y(2)+Y(3))/(A4*(Y(1)+Y(2)+Y(3))+A16*Y(4)); % (3.18)
ps2k1IItoII=A16*Y(4)/(A4*(Y(1)+Y(2)+Y(3))+A16*Y(4)); % (3.19)
res=j*(p2*(pa1/P11)+(1-p2)*(pa2/P21)); % (3.22)
V(4)=res*c0+p21b*c3+p11b*c4+ps2k1ItoII*(summation)+
ps2k1IItoII*(c1*(m-1)*(1-p2)); % (3.17)

```

```

VC=V(1)*Y(1)+V(2)*Y(2)+V(3)*Y(3)+V(4)*Y(4); % (3.23)
VT=m-1; % (3.3)

EKM(k1)=VC/VT; % (3.1)
aa(k1)=a;
bb(k1)=b;
mm(k1)=m;
k1=k1+1;
end
end
end
EKMmin,index]=min(EKM); % (3.24)
aoptimum=aa(index)
boptimum=bb(index)
moptimum=mm(index)
costCoptimum=EKM(index)
%=====
%Fim da Manutenção Corretiva
%=====

[EKmin,index]=min(EK); % (4.6)
noptimum=nn(index)
costPoptimum=EK(index)

SaidaGeral=[aa;bb;mm;EKM];
SaidaGeral=SaidaGeral';

SaidaGeral2=[nn;EK];
SaidaGeral2=SaidaGeral2';

'Fim'
save SaidaGeral.txt SaidaGeral -ASCII
save SaidaGeral2.txt SaidaGeral2 -ASCII

```