

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Testes Para Quebras Estruturais em Modelos Não-Lineares

EDIMEIRE ALEXANDRA PINTO

Belo Horizonte

2008

EDIMEIRE ALEXANDRA PINTO

Testes Para Quebras Estruturais em Modelos Não-Lineares

Dissertação apresentada ao Departamento de Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientadora: Profa. Dra. Ela Mercedes Medrano de Toscano

Co-orientador: Prof. Dr. Aureliano Angel Bressan

Belo Horizonte

2008

DEDICATÓRIA

Esta dissertação é dedicada aos meus pais e irmãos que me ensinaram que as coisas que mais devemos valorizar na vida são a família, os amigos, a saúde, o espírito e o trabalho, sendo que as quatro primeiras são dádivas de Deus e devemos nos apegar à elas como se fossem nossas próprias vidas. A nunca desistir enquanto ainda somos capazes, pois são as esperanças que fortalecem nossos sonhos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus, por ter me dado saúde e luz para conseguir continuar a trilhar os caminhos da vida.

Aos meus pais e irmãos que me apoiaram e tanto me deram forças para seguir adiante, fazendo de tudo para que eu chegasse até onde pude chegar de forma digna e humilde.

Aos meus orientadores: Profa. Mercedes e Prof. Aureliano por terem acreditado em mim desde o início, pelas contribuições e sugestões oferecidas.

Aos professores Sueli Mingoti e Otávio Medeiros por terem dado importantes contribuições para a finalização deste trabalho.

Aos meus amigos mais do que especiais: Daniella (amiga) por ter ensinado a não deixar a vida escorrer pelas mãos vivendo presa ao passado ou ao futuro. A viver o presente intensamente, pois ontem é passado, amanhã é uma incógnita e hoje é uma oferenda de Deus, por isto se chama presente. Elias e Bruna (amigos do mestrado) por terem me dado sugestões e inestimáveis ajudas ao longo de todo meu trabalho. Aos professores Marcos de Azevedo e José Guilherme (amigos de estudos em Estatística do Banco Central e PUC-MINAS) pelos conselhos, sugestões e apoio nos momentos mais difíceis.

Ao Fábio (doutorado de Estatística) meu revisor e conselheiro.

Às minhas amigas: Débora e Flávia (amigas do mestrado) com quem pude dividir momentos de alegrias e tristezas. Fernanda (Estatística) que sempre me aconselhou a não diminuir meu próprio valor, pois todos somos seres especiais.

Aos professores do Departamento de Estatística, pelos conhecimentos que pude obter. Não existem palavras que possam expressar tanta gratidão que tenho para com todos, simplesmente todos os professores do Departamento.

À Secretaria de Graduação da Estatística e de Pós-Graduação pelo carinho e consideração que tiveram comigo.

Enfim, aos meus amigos Fabiana (mestrado), Rosilaine (mestrado), Olga (“aluna”), Eleonora (amiga), alunos de Estatística da FACE e do ICEX, etc.; que de uma forma ou de outra, tentaram me ajudar a concluir este estudo.

RESUMO

PINTO, E A. Testes Para Quebras Estruturais em Modelos Não-Lineares. 2008. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Estatística, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

Grande parte das pesquisas empíricas e teóricas para detectar mudanças nos parâmetros em modelos não-lineares vem sendo acumuladas durante as últimas duas décadas. Diante disso, ainda não existe um consenso sobre o melhor teste estatístico para a detecção de quebras estruturais. O objetivo deste trabalho é fazer um estudo sobre os principais testes da família CUSUM para detectar pontos de mudanças nos parâmetros e comparar as suas taxas de rejeições. A investigação procedeu-se por meio de simulações de Monte Carlo na família de processos Auto-Regressivos Condicionalmente Heterocedásticos, ARCH. O estudo indica a robustez de cada teste sob mudanças dos parâmetros na suposição da variância incondicional ser pouco alterada.

Palavras-chave: Pontos de mudanças, ARCH e CUSUM.

ABSTRACT

PINTO, E A. Structural Testing For Breaks in Non-Linear Models. 2008. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Estatística, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

Since 1980 theoretical and empirical researches to detect changes in the parameters of non-linear models have been accumulated. In this context, there is still no consensus on the best statistical test for the detection of structural breaks. This work aims to make a study about main tests of the CUSUM family to detect points of parameters changes, and to compare their rejection rates. This behavior was investigated through Monte Carlo simulations in the family of Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, ARCH, processes. The simulation indicates the robustness of each test on parameters change under the assumption of unconditional variance is little changed.

Keywords: Points of changes, ARCH and CUSUM.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1-INTRODUÇÃO.....	6
1.1 OBJETIVOS.....	11
1.2 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	11
CAPÍTULO 2- MODELOS NÃO-LINEARES DE VOLATILIDADE DETERMINÍSTICA.....	13
2.1 INTRODUÇÃO.....	13
2.2 MODELOS ARCH.....	16
2.2.1 <i>Propriedades.....</i>	<i>18</i>
2.2.2 <i>Previsão.....</i>	<i>20</i>
2.2.3 <i>Estimação.....</i>	<i>20</i>
2.3 MODELOS GARCH.....	22
CAPÍTULO 3- QUEBRAS ESTRUTURAIS EM MODELOS NÃO-LINEARES.....	24
3.1 INTRODUÇÃO.....	24
3.2 TESTES DA FAMÍLIA CUSUM.....	25
3.2.1 <i>Teste de Inclán e Tiao (1994).....</i>	<i>27</i>
3.2.2 <i>Teste de Sansó, Aragón e Carrion (2003).....</i>	<i>29</i>
3.2.3 <i>Teste Kokoszka e Leipus (2000).....</i>	<i>31</i>
3.2.4 <i>Teste de De Pooter e Van Dijk (2004).....</i>	<i>32</i>
3.2.5 <i>Resumo sobre as principais diferenças metodológicas entre as estatísticas de testes.....</i>	<i>34</i>
CAPÍTULO 4- COMPARAÇÕES ENTRE OS RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DAS ESTATÍSTICAS DE TESTES.....	36
4.1 DESCRIÇÃO DOS PROCESSOS GERADORES DE DADOS E HIPÓTESES A SEREM TESTADAS.....	36
4.1.1 <i>Resultados das taxas de rejeições empíricas dos testes: IT, k_1, DPD e KL nas simulações dos pontos de quebras.....</i>	<i>38</i>
4.1.2 <i>Conclusão geral.....</i>	<i>44</i>
CAPÍTULO 5- APLICAÇÃO EM DADOS REAIS.....	46
5.1 ÍNDICE DOW JONES.....	46
CAPÍTULO 6- CONCLUSÕES.....	51
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	53
APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DO RETORNO.....	61
APÊNDICE B - PROVAS DAS DISTORÇÕES DAS TAXAS DE REJEIÇÕES EMPÍRICAS DOS TESTES.....	63
APÊNDICE C – FIGURA E TABELAS DAS ESTATÍSTICAS DE AVALIAÇÕES DO MODELO AJUSTADO PARA OS RETORNOS DO DOW JONES.....	65

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A modelagem das variâncias das séries temporais, no início dos anos 80, apresentou-se como um grande problema estatístico. A referida problemática é ainda objeto de estudo, e apresenta grande importância no ajuste de séries heterocedasticamente condicionadas. O estudo de séries temporais, até então, era feito por meio de especificações lineares com média condicionada, obtido por meio de modelo Auto-Regressivo com Média Móvel (ARMA) cuja metodologia foi proposta por Box e Jenkins (1976) e procurava modelar a dependência linear existente entre as observações das séries temporais. O modelo ARMA assume constância da variância ao longo do tempo; no entanto, na prática, em algumas séries temporais, períodos de instabilidade sucedem-se entre si. Podem ocorrer períodos de variação alta com períodos de variação baixa de mesma magnitude. Diante disto, Engle (1982) propôs um modelo paramétrico por meio do qual tornou-se possível modelar não só a média, mas também a variância condicional. Este modelo ficou conhecido como Auto-Regressivo com Heterocedasticidade Condicional (ARCH).

Outro problema estatístico, que persiste até hoje, é o teste para homogeneidade de um processo, ou seja, testar se acontece mudança ou quebra estrutural em algum instante de tempo na amostra ou série e, nesse caso, calcular o ponto na série em que o mesmo ocorre. Esta alteração pode ter origem tanto na média quanto na variância da série. Esse problema tem recebido demasiada atenção por parte de vários estudiosos (CSÖRGO; HORVÁTH, 1997). Estudos teóricos recentes sobre quebras estruturais mostram que as quebras na variância têm implicações potencialmente importantes na volatilidade das séries ajustadas por modelos ARCH e GARCH. A volatilidade pode ser interpretada como sendo a variância dos retornos de uma série. Por retornos, entende-se a primeira diferença da série em logaritmo natural.

Quando se constroem modelos não-lineares e por meio dos mesmos tenta-se verificar a existência de quebras estruturais, a variável fundamental é a volatilidade ou variância das séries de retornos do ativo. As Figuras 1.1 e 1.2 são um exemplo ilustrativo da ocorrência

de possíveis quebras estruturais em processos com variância condicional. Estas figuras apresentam os retornos e a variância condicional medida pelos quadrados dos retornos da série Dólar comercial de 08/06/1996 a 05/05/2000 obtida por meio do banco de dados *Econômica*.

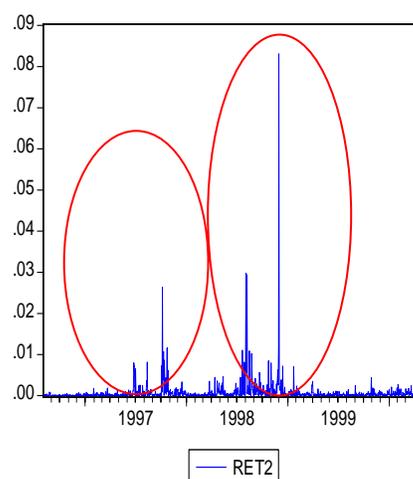
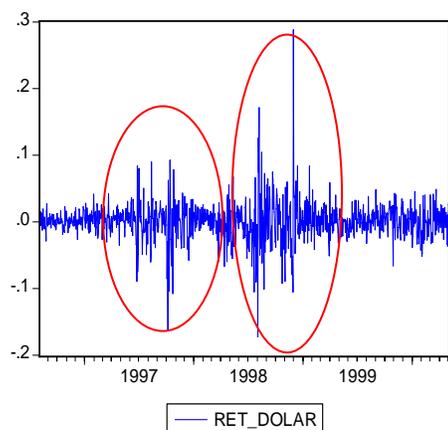


Figura 1.1 - Evolução dos retornos da série Dólar comercial.

Figura 1.2 – Evolução dos quadrados dos retornos da série Dólar comercial.

Vários fatores causam instabilidade em séries temporais, tais como: mudanças de regimes políticos, guerras, choque nos preços do petróleo, epidemias, momentos de euforia no mercado financeiro, bolhas especulativas que correspondem ao aumento prolongado e significativo dos preços dos ativos mantendo-os acima dos seus preços “justos” (ALDRIGHI; MILANEZ, 2005), *crash*, ou seja, após um período em que as ações estejam com cotações bastante valorizadas ocorre uma abrupta desvalorização. O mais famoso *crash* ocorreu na Bolsa de Valores de Nova York em 24/10/1929 (SANDRONI, 2000), etc. Estes fatores de instabilidades, que podem causar a origem tanto de *outliers* como também de quebras estruturais, geram conglomerados ou *clusters* de volatilidades, onde períodos de elevada (ou reduzida) volatilidade são sucedidos, em geral, por períodos semelhantes de volatilidade, como pode ser observado nas Figuras 1.1 e 1.2. É possível verificar a existência de 2 blocos formando *clusters* em 1997 e em 1998. Períodos como julho de 1997 e agosto de 1998, caracterizados pelas crises da Ásia e da Rússia, respectivamente, tiveram

repercussões em muitos países do mundo e foram um dos possíveis motivos para formações desses *clusters*.

Muitos estudos empíricos em economia e finanças não dão importância para as quebras estruturais e isto é uma “falha grave”, pois a existência de quebra pode alterar completamente os resultados destes estudos, por exemplo, na estacionariedade de uma série. Neste caso, de acordo com Santos (2004), o teste de Dickey-Fuller Aumentado tende a indicar a presença de tendência estocástica quando na realidade a série é estacionária ao redor de uma tendência determinística que contenha a mudança em algum ponto. Outro fator, a ser destacado por ser extremamente relevante, é o descrito por Zhang et al. (2005). Segundo estes autores, os coeficientes estimados e as previsões serão viesadas em processos que estejam sujeitos a uma ou múltiplas quebras.

Diebold (1986), Hendry (1986) e Lamoureux e Lastrapes (1990) foram alguns dos pioneiros a indicarem que a presença de quebra estrutural nos retornos das séries temporais ajustadas por modelos ARCH ou GARCH pode alterar a persistência da volatilidade. Para tais estudiosos, as quebras estruturais negligenciadas nos parâmetros estimados por modelos GARCH induzem a vícios de “sobre-estimativas” da persistência da volatilidade e tal fato torna-se preocupante, pois, em geral, existe forte persistência na variância. De acordo com Moraes, Ness e Batisti (2008), o teste de cointegração de Johansen (1988) torna-se inadequado para verificar a existência de combinação linear de longo prazo, dado que o mesmo pressupõe, sob hipótese alternativa, que o vetor cointegrante é invariante no tempo.

A aplicabilidade dos testes para verificação de quebras estruturais tem sido estudada tanto na economia como em finanças por diversos autores, dentre alguns destes, pode-se citar: Figueiredo e Staub (2001) que tiveram de estudar a sazonalidade do IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo) no período de janeiro de 1995 a dezembro de 2000 devido a presença de quebra estrutural existente neste índice no início do período de implantação do plano real. Mendonça et al. (2008) que avaliaram a forma como a administração da dívida pública no Brasil modificou a sua sustentabilidade ao longo do período de 1995 a 2007 e fizeram um estudo sobre a existência de quebra estrutural na inflação medida pelo IPCA (Índice de Preços ao Consumidor Amplo), no crescimento do PIB, na taxa de câmbio real, na taxa de juros real, na necessidade de financiamento do setor público e nos ajustes

patrimoniais. Cajueiro, Souza e Tabak (2006) que analisaram a taxa de câmbio diária, Real contra Dólar dos Estados Unidos, de 1995 a 2004 e concluíram que a mudança de regime de câmbio foi uma quebra estrutural que se refletiu no fato de que valores observados dos retornos em *lags* distantes estivessem correlacionados entre si. No artigo de Marçal e Pereira (2006) onde foram utilizados modelos multivariados de volatilidade e foram feitos testes de quebras estruturais para testar a hipótese de contágio entre várias crises financeiras que repercutiram na volatilidade dos títulos de dívida soberana de países como Brasil, México, Rússia e Argentina, nos anos noventa. Se a hipótese de presença de quebra estrutural não fosse rejeitada e a data de quebra estivesse associada ao efeito de alguma crise, então isto indicaria que existiu contágio. Andreou e Ghysels (2002) que estudaram as quebras existentes nos índices das ações das bolsas S&P500 (EUA), Nikkey (Japão) e Hang-Seng (Hong-Kong) no período de 04/01/1989 a 19/10/2001. Batalha (2008) que analisou modelos de volatilidade condicional para os retornos diários dos preços dos contratos futuros de petróleo *West Texas Intermediate* (WTI), transacionados na *New York Mercantile Exchange* (NYMEX) para o período de janeiro de 1985 a setembro de 2007 e também em sub-períodos que foram escolhidos de acordo com as quebras estruturais identificadas.

Hillebrand e Medeiros (2007) mostraram as conseqüências estatísticas de se negligenciarem quebras estruturais ou mudanças de regimes e também propuseram modelos GARCH sob múltiplos regimes, semelhantes aos Coeficientes Flexíveis GARCH ou FIGARCH. Cai (1994) incorporou características de modelos *Markov-Switching* e ARCH levando em conta mudanças que ocorressem na variância assintótica de processos ARCH-*Markov*. Caporale e Kontonikas (2006) fizeram um estudo sobre a variância da taxa de inflação em países da União Européia por meio de modelos GARCH com coeficientes variáveis que foram estimados usando-se filtro de Kalman.

Rapach e Strauss (2005) investigaram a relevância empírica de quebras estruturais na volatilidade dos retornos da taxa de câmbio por meio de testes aplicados à série e às previsões. Na primeira, foi utilizado o teste de Inclán e Tiao (1994) para verificar a presença de variância incondicional constante; na segunda foram comparadas previsões da volatilidade diária dos retornos por meio de modelos que possuíam ajustes na janela de estimação.

Rodrigues e Rúbia (2006) derivaram as propriedades assintóticas de alguns testes da família CUSUM em pequenas amostras. O objetivo era analisar formalmente os efeitos de contaminação estocástica, como os *outliers* aditivos ou os erros de medidas. Sabe-se que, em geral, os retornos possuem distribuições leptocúrticas, mas até mesmo depois de se levar em conta esta característica, movimentos extremos dos mercados e outros eventos imprevisíveis conduzem a observações anormalmente discrepantes que são consideradas como *outliers*. Igualmente, negociações não sincronizadas de ativos de baixa liquidez podem gerar erros de medidas nos valores registrados de ações e índices de mercados. Este problema pode ser particularmente sério nos mercados emergentes. Em particular, estes autores focalizaram-se nos testes de Inclán e Tiao (1994) e Kokoszka e Leipus (1998 e 2000) que foram intensivamente usados na literatura aplicada. Em seus resultados, mostraram que a distribuição assintótica da estatística de teste IT pode ser afetada, em grande parte, por contaminação estocástica (por *outliers* aditivos e erros de medidas), enquanto que a distribuição da estatística de teste de KL permanece invariante.

Para os testes da família Multiplicadores de Lagrange, uma das primeiras tentativas de se construir testes para quebras estruturais em modelos GARCH foi de Chu (1995) que estudou as propriedades do supremo da estatística F e dos testes de Multiplicador de Lagrange (ML). Chu (1995) verificou a existência de bom poder nos testes sob suposição de distribuição de probabilidade normal para os erros. Smith (2004) considerou uma função de distribuição empírica por meio da qual construiu testes de quebras estruturais. Posteriormente, Davies (1977 e 1987), Andrews (1993), Andrews e Ploberger (1994), construíram estatísticas de testes baseadas no supremo ou em médias suavizadas do tradicional teste ML para uma variedade de problemas de interesse em econometria, tais como: testes para uma única quebra estrutural, múltiplas quebras estruturais, constância de parâmetros em *cross-section*, de efeitos *threshold* em modelos auto-regressivos, variáveis relevantes e forma funcional em modelos não-lineares GARCH.

Para testes da família de Máxima Verossimilhança, destacaram-se os estudos de Kokoszka e Teyssière (2002). Estes autores tiveram por objetivo específico, por meio de simulações de Monte Carlo, propor, investigar e fazer aplicações de testes baseados em processos empíricos de soma acumulada de seqüências dos quadrados dos resíduos (CUSUM) e testes de Máxima Verossimilhança Generalizada (MVG) para descobrir ponto

de mudança em séries temporais que pudessem ser ajustadas por modelos GARCH. Uma boa revisão bibliográfica para se fazer uma pesquisa teórica e também fazer a aplicação destes testes pode ser encontrada nos trabalhos de Rice (1995), Csörgo e Horváth (1997) e Kokoszka e Teyssière (2002).

O problema de pesquisa deste trabalho consiste em identificar se existem diferenças estatísticas relevantes entre alguns testes da família CUSUM na detecção de quebras estruturais na volatilidade incondicional, uma vez que não há resposta definitiva na literatura sobre a superioridade de um teste sobre os demais. Alguns testes são predominantemente utilizados na literatura, como: teste de Inclán e Tiao (1994) e teste Kokoszka e Leipus (1998 e 2000), sendo que a aplicação do primeiro em modelos ARCH e GARCH é bastante questionada por ser um teste específico para processos independentes e identicamente distribuídos com distribuição de probabilidade normal.

1.1 Objetivos

O objetivo geral desta dissertação é comparar alguns testes da família CUSUM na identificação de quebras estruturais em processos ARCH(1).

O primeiro objetivo específico consiste em avaliar, por meio de simulações de Monte Carlo, quais testes possuem taxas de rejeições empíricas próximas ao nível de significância nominal de 5% adotado sob ausência de quebra estrutural na variância incondicional de processos que se ajustam a modelos ARCH(1) e qual teste tem maiores taxas de rejeições empíricas na presença de uma única quebra na variância incondicional. O segundo objetivo específico consiste em realizar uma aplicação empírica dos testes na identificação de quebra estrutural em série real.

1.2 Organização da Dissertação

Esta dissertação está estruturada em seis Capítulos. No Capítulo 2 é apresentada uma breve descrição dos modelos da família ARCH, propriedades, métodos de estimação e previsão. Também é exposto, resumidamente, o modelo GARCH.

No Capítulo 3 são descritos alguns testes para quebras estruturais, da família CUSUM, em modelos não-lineares.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados das simulações realizadas para os testes descritos no Capítulo 3.

Já no Capítulo 5 é apresentada a aplicação, em série real, de alguns testes estudados neste trabalho.

No Capítulo 6 é feito um resumo das principais conclusões do trabalho e suas extensões em pesquisas futuras.

CAPÍTULO 2

MODELOS NÃO-LINEARES DE VOLATILIDADE DETERMINÍSTICA

Este Capítulo apresenta os métodos de estimação, propriedades e previsão da volatilidade determinística em séries temporais que se ajustam aos modelos ARCH. No presente capítulo também é apresentada uma descrição resumida dos modelos GARCH.

2.1 Introdução

Modelos ARCH ou Auto-Regressivos com Heterocedasticidade Condicional são muito utilizados para analisar a variabilidade de séries temporais que possuem heterocedasticidade condicional. Estes modelos foram propostos por Engle (1982) que em seu artigo destacou a importância de se estudar a variância das séries temporais. O autor começou por descrever o fato de que a teoria econômica frequentemente sugere que os agentes econômicos respondem não apenas à média como também à variância de séries da economia. Esta importância também está presente no estudo de finanças pois ao se determinar a composição de um portfólio, não só a média como a variância das séries financeiras são relevantes. Em macroeconomia, Engle (1982) citou vários estudiosos, sendo um destes Friedman (1977) que argumentava que uma inflação alta, em geral, estava associada com uma alta variabilidade da mesma e que a relação estatística entre inflação e desemprego era positiva e não negativa como mostrado pela tradicional curva de Phillips.

A aplicação do estudo de Engle (1982) baseou-se justamente na análise da variância da taxa de inflação que, segundo o referido autor, a investigação estatística sobre esta série é de fundamental importância para a compreensão do “bem estar social”. Para tanto, o autor propôs os modelos ARCH ou Auto-Regressivos com Heterocedasticidade Condicional.

A importância destes modelos é que eles consideram a existência de uma regressão convencional que é em função da média, e, além disto, permitem que a variância mude

estocasticamente ao longo do período amostral. Para sua construção, Engle (1982), primeiramente, considerou os resíduos de um modelo de regressão entre a primeira diferença do logaritmo do índice de preços do consumidor, \hat{p} , e o logaritmo do índice de salário, w . O período amostral se estendia do segundo trimestre de 1958 ao segundo trimestre de 1977, na Inglaterra.

O modelo inicial era:

$$\hat{p} = \beta_1 \hat{p}_{-1} + \beta_2 \hat{p}_{-4} + \beta_3 \hat{p}_{-5} + \beta_4 (p - w)_{-1} + \beta_5, \quad (2.1)$$

em que os coeficientes a serem estimados são os β 's e p é o logaritmo do índice de preços sem estar em diferença. A inflação presente é explicada pela inflação do primeiro trimestre anterior e quarto e quinto trimestres anteriores. Segundo o autor, o valor defasado dos salários reais é um mecanismo de correção de erro.

O modelo estimado por Mínimos Quadrados Ordinários foi:

$$\hat{p} = 0,334 \hat{p}_{-1} + 0,408 \hat{p}_{-4} - 0,404 \hat{p}_{-5} - 0,0559 (p - w)_{-1} + 0,0257. \quad (2.2)$$

Engle (1982) chamava a atenção para o fato de que \hat{p}_{-4} e \hat{p}_{-5} têm coeficientes com valores parecidos, mas com sinais opostos, sugerindo que é a aceleração da inflação de um ano atrás que explica muito do comportamento de curto prazo dos preços.

Desta forma, para Engle (1982) chegar a um modelo ARCH, foi calculada a autocorrelação de ordem um para o modelo da equação (2.1) utilizando-se o teste LM ou Multiplicador de Lagrange. Neste caso, o resultado indicou ausência de autocorrelação. No entanto, quando se aplicou o mesmo teste até a quarta ordem, o resultado indicou a presença de autocorrelação. Engle (1982) então partiu do seguinte raciocínio: Assumindo-se que os agentes econômicos respondem lentamente a choques passados nos resíduos, pode-se supor pesos que decaem linearmente, conforme mostrado no modelo a seguir:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (0,4\varepsilon_{t-1}^2 + 0,3\varepsilon_{t-2}^2 + 0,2\varepsilon_{t-3}^2 + 0,1\varepsilon_{t-4}^2), \quad (2.3)$$

onde h_t é a volatilidade da inflação, α_0 e α_1 são coeficientes e ε_t são os resíduos da equação (2.1). Engle (1982) utilizou apenas dois parâmetros, α_0 e α_1 e com as ponderações mostradas na equação da variância em (2.3) porque se conjecturava que a não-negatividade e

restrição de estacionariedade dos α 's pudessem ser difíceis de serem satisfeitas em um modelo irrestrito. Desta maneira, o modelo da equação (2.1) estimado por Máxima Verossimilhança e considerando a equação da variância foi:

$$\hat{p} = 0,162\hat{p}_{-1} + 0,264\hat{p}_{-4} - 0,325\hat{p}_{-5} - 0,0707(p-w)_{-1} + 0,0328, \quad (2.4)$$

sendo $\hat{\alpha}_0 = 14$ e $\hat{\alpha}_1 = 0,955$ na equação (2.3).

Engle (1982) concluiu que a estimativa do modelo por método de Mínimos Quadrados Ordinários diferia com relação a de Máxima Verossimilhança não só nos valores dos coeficientes estimados como também no termo de aceleração da inflação, pois este já não é tão visível como na equação (2.2) dado que os coeficientes estimados de \hat{p}_{-4} e \hat{p}_{-5} já não possuem valores tão próximos. Por fim, os modelos ARCH são úteis para melhorar as estimativas dos coeficientes, erros-padrão e obter previsões menos viciadas para a variância. Desta forma, o mérito sobre o estudo da variabilidade das séries temporais deve-se a Engle (1982) que foi o primeiro pesquisador a propor um modelo por meio do qual fosse possível ajustar a variância condicional de tais séries.

Conforme Costa et al. (2004) os modelos ARCH pertencem à classe de modelos não-lineares¹ e uma das suas principais características em relação aos modelos lineares é que se ajustam bem às séries que apresentam: i) leptocurtose; ii) conglomerados de valores extremos e iii) assimetrias e *leverage* ou *alavancagem*.

Alguns fatores determinam o potencial destes modelos, segundo Pereira et al. (1995):

- i) Favorecem o melhor entendimento das características das séries financeiras.
- ii) São modelos complementares na obtenção de previsões de outros métodos, como por exemplo: redes neurais, regressões lineares, etc.
- iii) As mudanças estruturais ou até mesmo *outliers* que podem provocar conglomerados de valores extremos são um dos fatos estilizados de séries financeiras e podem ser mais bem entendidos utilizando-se modelos não-lineares.
- iv) Modelos ARCH apesar de não fornecerem “boas previsões”, avaliadas pelo erro quadrático médio, para a média das séries como ocorrem com as previsões de modelos

¹ Existem outros modelos muito comuns para ajustar a variância condicional de séries com heterocedasticidade condicional. Por exemplo, Bollerslev (1986) propôs uma extensão dos modelos ARCH, chamada de modelos Auto-Regressivos Generalizados Condicionalmente Heterocedásticos (GARCH) e Harvey (1994) propôs os modelos de Volatilidade Estocástica (VE).

lineares, são capazes de fornecer “boas estimativas” dos parâmetros e previsões das variâncias condicionais de séries financeiras, o que por sua vez possibilita obter medidas de risco destas séries (PEREIRA et al., 1995).

A seguir serão descritas as definições, propriedades e estimações² de modelos ARCH.

2.2 Modelos ARCH

Os modelos ARCH (Auto-Regressivos com Heterocedasticidade Condicional) permitem ajustar as variâncias que são condicionadas à informação no período passado das séries temporais. Vale ressaltar que estes modelos não existem apenas para séries financeiras, apesar de serem muito aplicados na modelagem de risco dos ativos no mercado financeiro. Devido a algumas propriedades como estacionariedade e ergodicidade, torna-se mais adequado trabalhar com os retornos e não com os preços dos ativos financeiros. Por retornos³, entendem-se séries expressas da seguinte forma:

$$X_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}), \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.5)$$

Onde P_t é o preço do ativo no presente e P_{t-1} é o preço do ativo no passado.

Considere $\mu_t = E(X_t | F_{t-1})$ e $h_t = Var(X_t | F_{t-1})$ como sendo a média e a variância condicional de X_t , respectivamente. O conjunto de informações disponíveis até o período $t-1$ é F_{t-1} que será definido como $\{X_{t-1}, \dots, X_1\}$.

Segundo Christoffersen (2003) e Taylor (2005), alguns fatos devem ser destacados sobre os retornos antes de se derivar a expressão matemática final dos modelos ARCH, tais como:

- i) Os retornos possuem autocorrelação não significativa.
- ii) A distribuição dos retornos tem caudas mais pesadas do que a distribuição normal e é assimétrica.

² Para isto, consideram-se como referências básicas os estudos de Hamilton (1994), Morettin (2004) e Tsay (2002). Outras revisões bibliográficas podem ser encontradas em Greene (2000), Morais e Portugal (1999), Gouriéroux (1997) e Enders (1995).

³ A derivação do retorno encontra-se no Apêndice A.

iii) Enquanto que os retornos praticamente não apresentam autocorrelação significativa, a variância, que é medida pelos quadrados dos retornos, possui autocorrelação que é significativa.

iv) Na volatilidade existe a presença do efeito *alavancagem* que consiste no efeito mais prolongado de notícias más sobre a volatilidade, aumentando-a, do que o efeito das notícias boas, reduzindo-a.

O modelo ARCH(m) é definido como:

$$X_t = \sqrt{h_t} z_t, \quad t = 1, \dots, T \quad \text{e} \quad (2.6)$$

$$h_t = w + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_2 X_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m X_{t-m}^2, \quad (2.7)$$

onde X_t é o retorno definido na equação (2.5), z_t é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com média zero e variância um, h_t é a variância condicional ou volatilidade condicional⁴, $w \geq 0$ e $\alpha_j \geq 0$, $j=1, \dots, m$, devido a restrição de não-negatividade da variância, pois seus valores devem ser positivos. Segundo Brooks (2002), para garantir que a variância condicional seja positiva, todos os coeficientes terão de ser não-negativos e se pelo menos um dos coeficientes for negativo, então para um número de defasagens suficientemente grande correspondente a estes coeficientes, os valores ajustados da variância serão negativos e isto seria inadequado. Para o referido autor, estas condições são suficientes, mas não necessárias para se ter a volatilidade condicional não-negativa.

A classe de processos sobre a qual se tem interesse é em processos fracamente estacionários⁵ e que, de acordo com Morettin (2004), possuem as seguintes características:

- i) $E\{X(t)\} = \mu(t) = \mu$ para qualquer $t \in T$;
- ii) $E\{X^2(t)\} < \infty$ para qualquer $t \in T$;
- iii) $Cov\{X(t_1), X(t_2)\}$ é função de $|t_1 - t_2|$.

⁴ A volatilidade condicional será uma série ao se estimar os coeficientes.

⁵ Na família GARCH, quando os processos não são estacionários, utilizam-se os modelos IGARCH, ou seja, GARCH Integrado. Para melhores detalhes, ver Gouriéroux (1997).

Desta forma, o processo X_t^2 é estacionário se as raízes do polinômio $1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_m L^m = 0$, em que L é o operador de defasagem, estiverem fora do círculo unitário ou equivalentemente:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m < 1. \quad (2.8)$$

Conforme Brooks (2002), o modelo ARCH(m) também pode ser definido, por exemplo, da seguinte maneira:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t, \quad (2.9)$$

$$u_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1), \quad (2.10)$$

$$h_t = w + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_m u_{t-m}^2, \quad (2.11)$$

em que Y_t é a variável dependente; a equação da média dada em (2.9) é escrita em função de variáveis exógenas, X_{2t} , X_{3t} e X_{4t} e com um termo de erro, u_t , sendo que este, por sua vez, é função de uma seqüência de variáveis aleatórias, ε_t , que seguem a distribuição de probabilidade normal de média zero e variância um e também é função da volatilidade condicional, h_t .

Dentre estas possíveis formas de se definir um ARCH(m), neste estudo dar-se-á maior ênfase às descritas nas equações (2.6) e (2.7).

2.2.1 Propriedades

Seguem-se as seguintes propriedades para um ARCH(m):

- i. A média incondicional do processo X_t é:

$$E(X_t) = E\{E(X_t | F_{t-1})\} = 0 \quad (2.12)$$

- ii. A variância incondicional é dada por:

$$Var(X_t) = E(X_t^2) = E\{E(X_t^2 | F_{t-1})\} = \frac{w}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_m}. \quad (2.13)$$

Devido à restrição de não-negatividade da variância, deve-se ter $w \geq 0$, $\alpha_j \geq 0$ e

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j < 1, j=1, \dots, m.$$

iii. Se X_t é uma seqüência de variáveis aleatórias com média e variância dadas pelas equações (2.12) e (2.13), respectivamente, então a covariância é:

$$\begin{aligned} Cov(X_{t+k}, X_t) &= E(X_{t+k} X_t) = E\{E(X_{t+k} X_t | F_{t+k-1})\} = E\{X_t E(X_{t+k} | F_{t+k-1})\} = \\ &= E\{X_t E(\sqrt{h_{t+k}} z_{t+k} | F_{t+k-1})\} = 0, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

iv. O quarto momento, μ_4 , para um processo ARCH(1) estacionário de quarta ordem é dado por:

$$\begin{aligned} \mu_4 &= E(X_t^4 | F_{t-1}) = E(h_t^2 z_t^4 | F_{t-1}) = 3E\{(w + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2\} \\ &= 3E(w^2 + 2w\alpha_1 X_{t-1}^2 + \alpha_1^2 X_{t-1}^4) = 3(w^2 + 2w\alpha_1 Var(X_t) + \alpha_1^2 \mu_4) \\ &= 3(w^2 + 2w\alpha_1 [\frac{w}{1-\alpha_1}] + \alpha_1^2 \mu_4) = 3w^2 [1 + 2\alpha_1 / (1-\alpha_1)] + 3\alpha_1^2 \mu_4 \\ &= \frac{3w^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Observa-se que o quarto momento, admitindo-se estacionariedade do processo, só existe se $0 \leq \alpha_1^2 < 1/3$.

v. A curtose, K , do processo é definida como:

$$K = \frac{\mu_4}{\text{var}^2(X_t)} = \frac{3w^2(1+\alpha_1)}{(1-\alpha_1)(1-3\alpha_1^2)} \frac{(1-\alpha_1)^2}{w^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2}. \quad (2.16)$$

Verifica-se que $3 \frac{(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2} > 3$. Desta maneira, em modelos ARCH as caudas dos

retornos são mais pesadas do que as caudas de processos lineares, como foi descrito na introdução desta seção.

2.2.2 Previsão

Em modelos ARCH(m), a previsão, $h_s(l)$, com origem em s e l passos à frente é dada por:

$$\hat{h}_s(l) = w + \sum_{j=1}^m \alpha_j h_s(l-j), \quad (2.17)$$

onde $\hat{h}_s(l-j) = X_{s+l-j}^2$, se $l-j \leq 0$. Além disto, $w \geq 0$, $\alpha_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^m \alpha_j < 1$, $j=1, \dots, m$ para um processo estacionário e que satisfaça a restrição de não-negatividade da variância condicional.

2.2.3 Estimação

O método de Máxima Verossimilhança é comumente usado para se estimar os parâmetros de um modelo ARCH. Sob hipótese de que os erros seguem a distribuição de probabilidade normal com média zero e variância h_t , a função de verossimilhança de um ARCH(m) é:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_T | \theta) &= f(x_T | F_{T-1}) f(x_{T-1} | F_{T-2}) \dots f(x_{m+1} | F_m) f(x_1, \dots, x_m | \theta) \\ &= \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left[-\frac{x_t^2}{2h_t}\right] f(x_1, \dots, x_m | \theta), \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde T é o tamanho da série, h_t é a volatilidade condicional, $\theta = (w, \alpha_1, \dots, \alpha_m)'$ é o vetor de parâmetros, $f(x_1, \dots, x_m | \theta)$ é a função densidade de probabilidade conjunta de x_1, \dots, x_m e F_{T-1} é a informação disponível até o tempo $T-1$. Desde que a forma exata de $f(x_1, \dots, x_m | \theta)$ não é de fácil manipulação algébrica, então usa-se uma função de verossimilhança condicional, onde o vetor x_{m+1}, \dots, x_T é condicionado ao vetor de parâmetros, θ , e informações disponíveis até o tempo m , especialmente quando o tamanho da amostra é grande. O resultado, usando esta função de verossimilhança condicional, é:

$$f(x_{m+1}, \dots, x_T | \theta, x_1, \dots, x_m) = \prod_{t=m+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left[-\frac{x_t^2}{2h_t}\right], \quad (2.19)$$

onde h_t pode ser calculada recursivamente.

Em algumas aplicações é mais apropriado assumir que a distribuição dos erros, z_t , possua caudas pesadas semelhantes à distribuição de probabilidade *t de student*. Assuma t_v ser uma distribuição *t de student* com v graus de liberdade. Então $Var(t_v) = \frac{v}{v-2}$ para $v > 2$

e assumamos $z_t = \frac{t_v}{\sqrt{\frac{v}{v-2}}}$.

Assim, a função densidade de z_t é $f(z_t | v) = \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)\sqrt{(v-2)\pi}} \left(1 + \frac{z_t^2}{v-2}\right)^{-(v+1)/2}$, $v > 2$

onde $\Gamma(x)$ é a função Gamma. Fazendo $x_t = \sqrt{h_t} z_t$, obtém-se a função de verossimilhança condicional da seguinte forma:

$$f(x_{m+1}, \dots, x_T | \theta, A_m) = \prod_{t=m+1}^T \frac{\Gamma((v+1)/2)}{\Gamma(v/2)\sqrt{(v-2)\pi}} \frac{1}{\sqrt{h_t}} \left[1 + \frac{x_t^2}{(v-2)h_t}\right]^{-(v+1)/2} \quad (2.20)$$

onde $v > 2$ e $A_m = (x_1, \dots, x_m)$. A equação (2.20) é a função de verossimilhança condicional sob distribuição *t de student*.

De acordo com Tsay (2002), os modelos ARCH possuem alguns inconvenientes que precisam ser destacados. O primeiro deles é que assumem que choques negativos e positivos possuem o mesmo efeito devido às suas dependências com relação aos quadrados dos choques anteriores. Isto não é fato na evidência empírica, pois os investidores financeiros respondem de forma diferente aos choques positivos e negativos. Segundo Tsay (2002), os modelos ARCH são bastante restritivos, pois foi observado que $0 \leq \alpha_1^2 < 1/3$ para que se possa ter o quarto momento definido. Esta restrição torna-se bastante complicada para modelos ARCH de ordens maiores. Os modelos ARCH provavelmente “superestimam” a volatilidade devido ao fato de que respondem lentamente a grandes choques isolados nos retornos das séries.

De acordo com Brooks (2002), outro inconveniente é que a restrição de não-negatividade da variância pode ser violada, ou seja, pode ocorrer que um ou mais parâmetros estimados possam ser negativos. Por fim, ainda segundo Brooks (2002), modelos ARCH não são parcimoniosos, pois o número de defasagens necessárias para “capturar” toda a estrutura de dependência presente na volatilidade condicional pode ser muito grande.

2.3 Modelos GARCH

Os modelos da família GARCH foram criados por Bollerslev (1986). Neles, a variância é um processo auto-regressivo e média móvel.

A equação do modelo GARCH(m,n) é dada por:

$$\begin{aligned} X_t &= z_t \sqrt{h_t}, \quad t = 1, \dots, T, \\ h_t &= w + \sum_{i=1}^m \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j h_{t-j}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde X_t é a série de retornos, z_t é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância um, h_t é a variância condicional ou volatilidade e os parâmetros são $w \geq 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ e $\sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) < 1$ com $q = \max(m,n)$. Segundo Morettin (2004), a restrição de coeficientes positivos é uma condição suficiente para se ter a não-negatividade da variância condicional.

Uma outra maneira de se definir um processo GARCH(m,n) é:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t, \quad (2.22)$$

$$u_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t}, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1), \quad (2.23)$$

$$h_t = w + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j h_{t-j}, \quad (2.24)$$

onde Y_t é a variável dependente; a equação da média apresentada em (2.22) é função de variáveis exógenas, X_{2t} , X_{3t} e X_{4t} , e u_t representa o erro aleatório. Em (2.23), u_t é função

de uma seqüência de variáveis aleatórias, ε_t , que seguem a distribuição de probabilidade normal com média zero e variância um e também é função da volatilidade condicional, h_t .

CAPÍTULO 3

QUEBRAS ESTRUTURAIS EM MODELOS NÃO-LINEARES

Neste Capítulo apresenta-se o estudo da metodologia de alguns testes da família CUSUM para quebras estruturais em modelos não-lineares, como: Inclán e Tiao (1994), Sansó, Aragón e Carrion (2003), Kokoszka e Leipus (1998) e De Pooter e Van Dijk (2004).

3.1 Introdução

Pesquisadores freqüentemente não verificam a presença de quebra estrutural e assumem que os retornos das séries temporais possam ser ajustados por modelos GARCH de modo que a variância incondicional dos mesmos seja constante. Entretanto, tais séries estão sujeitas a todos os tipos de choques que podem causar rupturas abruptas na variância incondicional e são equivalentes às quebras estruturais nos parâmetros destes modelos (RAPACH; STRAUSS, 2005).

Os métodos estatísticos especificamente desenvolvidos para estimar quebras na volatilidade, que foram principalmente usados na literatura aplicada, estão baseados nos procedimentos do tipo CUSUM. Nesta categoria, encontram-se os métodos paramétricos e não paramétricos discutidos em Inclán e Tiao (1994), Kokoszka e Leipus (2000), Sansó, Aragón e Carrion (2003), Rodrigues e Rúbia (2006), como também várias extensões destes procedimentos. O uso difundido de testes CUSUM não só é devido a sua eficiência computacional, mas principalmente pela sua aplicação estatística a vários tipos de modelos lineares e não-lineares. Além disso, não especificam um padrão particular de estrutura de quebra e têm bom poder (RODRIGUES; RÚBIA, 2006) contra vários tipos de quebra: seja na média ou na variância dos processos, assim como para diferentes tipos de mudanças nas distribuições de probabilidade dos processos geradores dos dados.

A eficiência dos testes CUSUM para identificar mudanças súbitas nos processos depende das características reais das séries. Para séries que possuem certos padrões de volatilidade com dependência temporal, Andreou e Ghysels (2002) mostraram, por meio de

simulação de Monte de Carlo, que a presença de volatilidade fortemente persistente pode conduzir a distorção das frequências de rejeições empíricas em testes da família CUSUM.

Uma quantidade grande de pesquisas empíricas e teóricas para detectar mudanças em observações linearmente dependentes ou independentes tem surgido durante as últimas duas décadas. Neste estudo considerar-se-á apenas os testes da família CUSUM, como foi proposto por Inclán e Tiao (1994) e posteriormente foi modificado por Kim et al. (2000), Kokoszka e Leipus (1998) e Lee e Park (2001). A seguir, são discutidos os principais testes CUSUM.

3.2 Testes da Família CUSUM

Em testes da família CUSUM, a idéia central é obter a soma dos quadrados dos retornos, X_t , dada por $C_k = \sum_{t=1}^k X_t^2$. Estes testes utilizam os quadrados dos retornos porque eles são os estimadores da volatilidade. O cálculo do CUSUM centrado e normalizado é definido como:

$$D_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^k X_t^2 - \frac{k}{T\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T X_t^2, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.1)$$

D_k também pode ser reescrito da seguinte forma:

$$D_k = T^{-1/2} \left(C_k - \frac{k}{T} C_T \right). \quad (3.2)$$

Quando X_t satisfaz a hipótese de variância ou volatilidade incondicional constante, o gráfico de D_k contra k oscilaria em torno de zero. No entanto, sob hipótese alternativa de mudança inesperada na variância ocorrendo em um determinado ponto k^* na amostra ou série, o valor de D_k alcançará seu máximo ou mínimo em $k = k^*$, depois é que ele retornará ao redor de zero, como mostra a Figura 3.1.

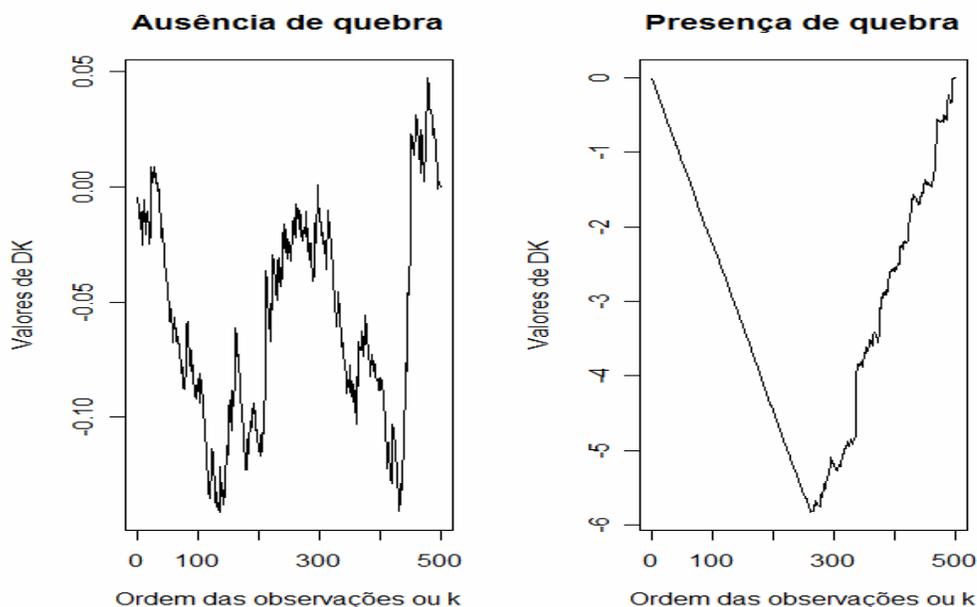


Figura 3.1 - Evolução do processo de CUSUM centrado e normalizado na ausência e presença de uma quebra estrutural em $k^* = 250$, respectivamente.

Por esta razão, $|D_k|$ fornece um teste “natural” para a mudança na volatilidade como também um estimador de ponto de quebra.

Suponha que o máximo de $|D_k|$ é alcançado quando $k = k^*$,

$$|D_{k^*}| = \max_{1 \leq k \leq T} |D_k|. \quad (3.3)$$

Desta forma, identifica-se um ponto de quebra em k^* , estatisticamente significativo, se $|D_{k^*}|$ for maior do que o valor crítico pré-determinado que pode ser obtido pela distribuição assintótica de D_k . Pode ser mostrado que, sob algumas condições de regularidade moderadas⁶, o máximo de D_k converge, em distribuição, para o supremo da ponte Browniana padronizada, tal que:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} \max_{1 \leq k \leq T} |D_k| \xrightarrow{d} \sup_{0 \leq \tau \leq 1} |W^*(\tau)|, \quad \tau = k/T, \quad (3.4)$$

⁶ Ver De Pooter e Van Dijk (2004).

onde ω é a variância dos quadrados da série de retornos, X_t^2 , $\omega = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j$, sendo que $\gamma_j = \text{cov}(X_j^2, X_0^2)$ é a j -ésima covariância de X_t^2 e onde $W^*(\tau)$ é a ponte Browniana padronizada, definida como: $W^*(\tau) = W(\tau) - \tau W(1)$, $0 \leq \tau \leq 1$.

Sendo $W(\cdot)$ um processo padronizado de Wiener e $0 \leq \tau = k/T \leq 1$, segue-se que a estatística de teste CUSUM é dada por:

$$U_{k^*} = \frac{1}{\sqrt{\hat{\omega}}} \max_{1 \leq k \leq T} |D_k|. \quad (3.5)$$

É com relação ao estimador $\hat{\omega}$ que ocorrem as principais diferenças entre os testes da família CUSUM. Estas principais diferenças são mostradas ao longo das seções 3.2.1 a 3.2.5.

A regra de rejeição dos testes que serão analisados a seguir é que se rejeita a hipótese nula de ausência de quebra estrutural sempre que (3.5) ultrapassar o valor crítico obtido pelo supremo da ponte Browniana padronizada.

3.2.1 Teste de Inclán e Tiao (1994)

O teste IT de Inclán e Tiao (1994) é uma extensão do teste do tipo CUSUM em modelos de regressão linear para detectar mudanças na variância. O seu procedimento computacional tem a vantagem de ser de fácil implementação e não requer estimação de parâmetro. Porém, a distribuição assintótica desta estatística de teste é derivada sob um grupo de condições suficientes que podem se tornar muito restritivas para a maioria das aplicações práticas.

Inclán e Tiao (1994) mostraram que é garantida a seguinte convergência em probabilidade: $\frac{C_T}{T} \xrightarrow{p} \sigma^2$. Sob suposição de independência e normalidade para o processo X_t de média zero e variância σ^2 , assim como com quarto momento finito, ou seja, $\hat{\eta}_4 = E(X_t - E(X_t))^4 = E(X_t^4) < \infty$, a estatística de teste IT contém o seguinte

estimador⁷, $\hat{\omega}$, da variância dos quadrados dos retornos na equação (3.5), definido como

$$\hat{\omega} = \hat{\gamma}_0 = 2(\hat{\sigma}^2)^2, \text{ sendo } \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^T X_t^2}{T}. \text{ Substituindo este estimador, } \hat{\omega}, \text{ na equação (3.5)}$$

conclui-se que a estatística de teste IT, utilizada por estes autores, assume a seguinte forma:

$$IT = \max_k \left| \sqrt{\frac{T}{2}} H_k \right|, \quad (3.6)$$

$$\text{onde } H_k = \frac{C_k}{C_T} - \frac{k}{T}.$$

Inclán e Tiao (1994) mostram que se X_t é uma série de observações independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) com distribuição de probabilidade normal de média zero e variância constante, então a estatística de teste de IT converge, em distribuição, para o supremo da ponte Browniana padronizada: $IT \xrightarrow{d} \sup_{0 \leq \tau \leq 1} |W^*(\tau)|$, onde $W^*(\tau) = W(\tau) - \tau W(1)$, $0 \leq \tau \leq 1$.

Quando as suposições de independência e normalidade não são satisfeitas, verifica-se que esta convergência não é assegurada, pois ao se utilizar o estimador $\hat{\omega} = \hat{\gamma}_0 = 2(\hat{\sigma}^2)^2$, a estatística de teste IT possui a seguinte distorção em sua convergência⁸:

$$IT \xrightarrow{d} \frac{\sqrt{\hat{\omega}}}{\sqrt{2\sigma^4}} \sup_{0 \leq \tau \leq 1} |W^*(\tau)|.$$

Portanto, as taxas de rejeições empíricas, na ausência de quebra estrutural, seriam superiores ao nível de significância adotado quando se usa o valor crítico do supremo da ponte Browniana padronizada. Em geral, os autores usam 5% de significância. Apenas quando os retornos são i.i.d com distribuição de probabilidade normal de média zero e variância constante é que esperar-se-iam taxas de rejeições empíricas próximas ao nível de significância.

Inclán e Tiao (1994) propõem o algoritmo Iterativo dos Quadrados da Soma Acumulada (ICSS). Este algoritmo pode ser aplicado de maneira seqüencial para testar e

⁷ A prova sobre o motivo do uso deste estimador pode ser encontrada em De Pooter e Van Dijk (2004) e está melhor explicada no Apêndice B em B.1.

⁸ A prova sobre o motivo desta distorção pode ser encontrada em Sansó, Aragó e Carrion (2003) e está melhor explicada no Apêndice B em B.2.

para identificar mudanças múltiplas na volatilidade. A idéia básica é que, primeiramente, a amostra ou série inteira é testada para a presença de uma única quebra na volatilidade usando a estatística (3.6). Se uma mudança significativa é descoberta, a amostra é partida em dois segmentos com o ponto de partição inicial igual ao ponto detectado como ponto de mudança. Logo, cada sub-amostra é examinada separadamente para uma quebra na volatilidade usando a estatística de teste (3.6) novamente. Este procedimento continua até que nenhuma mudança seja detectada em qualquer ponto da sub-amostra ou até que o número de mudanças alcance um número máximo pré-especificado. O passo final consiste na reavaliação de todos os pontos de quebras estimados.

3.2.2 Teste de Sansó, Aragón e Carrion (2003)

Sansó, Aragón e Carrion (2003) propuseram uma nova estatística de teste que tem distribuição assintótica livre de parâmetros de perturbação (*nuisance*) para evitar que as taxas de rejeições empíricas na ausência de quebra estrutural sejam extremamente diferentes do nível de significância adotado e pertence à família dos testes do tipo CUSUM.

Quando se supõe que as observações da série sejam independentes e identicamente distribuídas com distribuição de probabilidade que não seja apenas normal, mas também siga outras distribuições com média zero e variância σ^2 , então o estimador, $\hat{\omega}$, da equação (3.5) é dado por:

$$\hat{\omega} = \hat{\gamma}_0 = E(X_t^2 - \sigma^2)^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (X_t^2 - \sum_{t=1}^T X_t^2)^2}{T} = \frac{\sum_{t=1}^T X_t^4}{T} - \left(\frac{\sum_{t=1}^T X_t^2}{T} \right)^2 = \hat{\eta}_4 - \hat{\sigma}^4,$$

onde $\hat{\eta}_4 = T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t^4 < \infty$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^T X_t^2}{T}$.

Substituindo este estimador, $\hat{\omega}$, na equação (3.5), obtém-se a estatística de teste k_1 ,

$$k_1 = \max_k |T^{-1/2} B_k|, \quad (3.7)$$

$$\text{sendo } B_k = \frac{C_k - \frac{k}{T} C_T}{\sqrt{\hat{\eta}_4 - \hat{\sigma}^4}}.$$

Sansó, Aragón e Carrion (2003) mostraram que se a série X_t é independente e identicamente distribuída (i.i.d) com média zero e variância constante, então esta estatística converge, em distribuição, para o supremo da ponte Browniana padronizada: $k_1 \xrightarrow{d} \sup_{0 \leq \tau \leq 1} |W^*(\tau)|$, onde $W^*(\tau) = W(\tau) - \tau W(1)$, $0 \leq \tau \leq 1$.

Segundo Sansó, Aragón e Carrion (2003), ao contrário da estatística de teste IT, esperar-se-ia que, sob hipótese nula verdadeira de ausência de quebra estrutural, as taxas de rejeições empíricas tenham valores aproximadamente iguais ao nível de significância quando os retornos são independentes e identicamente distribuídos. Entretanto, quando os retornos possuem variância condicional, ao se utilizar o estimador $\hat{\omega} = \hat{\eta}_4 - \hat{\sigma}^4$, a distribuição assintótica não converge diretamente para o supremo da ponte Browniana

$$\text{padronizada}^9: k_1 \xrightarrow{d} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\eta_4 - \sigma^4}} \sup_{0 \leq \tau \leq 1} |W^*(\tau)|.$$

Devido a esta não convergência assintótica, observa-se que a estatística de teste k_1 também terá taxas de rejeições empíricas superiores ao nível de significância usualmente adotado de 5% na ausência de quebra estrutural, porém em menores magnitudes do que as da estatística de teste IT, posto que: $\sqrt{\eta_4 - \sigma^4} > \sqrt{2\sigma^4}$, então $\sqrt{\omega} / \sqrt{\eta_4 - \sigma^4} < \sqrt{\omega} / \sqrt{2\sigma^4}$.

De acordo com Sansó, Aragón e Carrion (2003), o algoritmo para verificação dos possíveis pontos de quebras consiste em calcular o teste k_1 várias vezes para tamanhos de amostras diferentes. Porém, usando um único valor crítico para qualquer tamanho de amostra (como ocorre com o algoritmo do teste IT) o desempenho do procedimento iterativo poderá ser reduzido. Para superarem esta desvantagem, Sansó, Aragón e Carrion (2003) ajustaram regressões de superfícies de respostas para amostras finitas de valores críticos. Conseqüentemente, para diferentes tamanhos de amostras, têm-se diferentes valores críticos.

⁹ O motivo para esta falta de convergência já foi provado e pode ser encontrado em Sansó, Aragón e Carrion (2003). No Apêndice B em B.3 encontra-se a explicação detalhada sobre esta prova.

3.2.3 Teste Kokoszka e Leipus (2000)

O teste de Kokoszka e Leipus (2000), KL, consiste numa extensão não paramétrica do teste IT em modelos ARCH(∞) ou GARCH(1,1) e é bastante utilizado para identificar quebras em séries com heterocedasticidade condicional. Além disso, pode ser utilizado para identificar quebras múltiplas dentro do mesmo princípio do método de ICSS (algoritmo Iterativo dos Quadrados da Soma Acumulada).

Em modelos das famílias ARCH e GARCH, a série X_t ao quadrado é autocorrelacionada em todos os *lags* e conseqüentemente, $\hat{\gamma}_0$, utilizado nas estatísticas de testes IT e k_1 , não fornece um estimador consistente para ω na equação (3.5). Neste caso, a covariância, $\gamma_j = \frac{1}{T} \sum_{t=j+1}^T (X_t^2 - \hat{\sigma}^2)(X_{t-j}^2 - \hat{\sigma}^2)$, dos processos já não será mais nula, pois assume-se heterocedasticidade condicional. Como “solução” para este problema, Kokoszka e Leipus (2000) usam o estimador, $\hat{\omega}$, não paramétrico de Bartlett definido como:

$$\hat{\omega} = \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^l \omega_{j,l} \hat{\gamma}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t^2 - \hat{\sigma}^2)^2 + \frac{2}{T} \sum_{j=1}^l \omega(j,l) \sum_{t=j+1}^T (X_t^2 - \hat{\sigma}^2)(X_{t-j}^2 - \hat{\sigma}^2), \quad (3.8)$$

onde $\omega(j,l)$ é a função *kernel* e l é o tamanho janela. Kokoszka e Leipus (2000) utilizam a função *kernel* $\omega(j,l) = 1 - j/(l+1)$, em que $l = \text{inteiro}(4(T/100)^{2/9})$ como sugerido por Newey-West (1994).

Desta forma, substituindo este estimador na equação (3.5), a estatística de teste de Kokoszka e Leipus (2000) é definida por:

$$KL = \max_k |T^{-1/2} G_k|, \quad (3.9)$$

onde $G_k = \hat{\omega}^{-1/2} (C_k - \frac{k}{T} C_T)$, sendo $\hat{\omega}$ definido em (3.8).

Esta estatística também converge, em distribuição, para o supremo da ponte Browniana padronizada $W^*(\tau)$: $KL \xrightarrow{d} \sup_{0 \leq \tau \leq 1} |W^*(\tau)|$, onde $W^*(\tau) = W(\tau) - \tau W(1)$, $0 \leq \tau \leq 1$.

O teste KL foi implementado por Kokoszka e Leipus (1998 e 2000) para um modelo GARCH(1,1) sob suposições de que: i) os retornos são estacionários de curta memória, ou

seja, os coeficientes de modelos GARCH(1,1) decaem exponencialmente; ii) retornos possuem média zero e variância incondicional constante; iii) os erros seguem quaisquer distribuições de probabilidade com média zero, variância um e devem possuir o quarto momento finito; iv) o estimador consistente, $\hat{\omega}$, é finito, isto é, $\hat{\omega} = \lim_{T \rightarrow \infty} E(T^{-1}[\sum_{t=1}^T (X_t^2 - \sigma^2)]) < \infty$. Este teste pode ser aplicado a muitas classes de modelos como: ARCH, GARCH, VE (modelos de Volatilidade Estocástica), etc. (ANDREOU; GHYSELS, 2005; ZHANG; DICKINSON; BARASSI, 2005; RAPACH; STRAUSS, 2005). Sansó, Aragó e Carrion (2003) também propuseram um teste semelhante ao de Kokoszka e Leipus (2000), porém se baseia em suposições mais generalizadas, pois além de (i) a (iv), parte da suposição de que os retornos possuem momentos finitos para ordens maiores do que quatro. O procedimento iterativo do teste KL é idêntico ao do teste IT.

3.2.4 Teste de De Pooter e Van Dijk (2004)

De Pooter e Van Dijk (2004) mostraram, em seus estudos, que testes para mudanças inesperadas na volatilidade incondicional de séries temporais, baseados em somas acumulativas dos quadrados dos retornos, sofrem significativas alterações das taxas de rejeições empíricas, onde a hipótese nula correta de nenhuma mudança de volatilidade incondicional é frequentemente rejeitada. Estas alterações são reduzidas quando se aplicam os resíduos padronizados de modelos GARCH às estatísticas de testes. Segundo De Pooter e Van Dijk (2004), tal procedimento também parece ser robusto a tipos diferentes de erros de especificação. As propriedades dos quadrados dos resíduos padronizados foram muito estudadas nos trabalhos de Foster e Nelson (1996), Barndorff-Nielsen e Shephard (2002a, 2002b e 2003), Andreou e Ghysels (2003), entre outros.

De Pooter e Van Dijk (2004) utilizam os resíduos padronizados, \hat{z}_t , na estatística da equação (3.1), como descrito na equação (3.10):

$$D_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^k \hat{z}_t^2 - \frac{k}{T\sqrt{T}} \hat{z}_t^2, \quad (3.10)$$

onde $\hat{z}_t = \frac{X_t}{\sqrt{\hat{h}_t}}$, sendo \hat{h}_t a volatilidade estimada de um modelo GARCH(1,1) pelo método

de Máxima Verossimilhança.

Desta forma, a estatística de teste (3.5) pode ser reescrita como:

$$DPD = \max_k |T^{-1/2}G_k|, \quad (3.11)$$

em que $G_k = \hat{\omega}^{-1/2}(C_k - \frac{k}{T}C_T)$, sendo $\hat{\omega}$ o estimador não paramétrico de Bartlett da

equação (3.8) e $C_T = \sum_{t=1}^T \hat{z}_t^2$. A diferença deste estimador não paramétrico, $\hat{\omega}$, com o usado

por Kokoszka e Leipus (2000) está na função *kernel*, pois De Pooter e Van Dijk (2004) usam a função $\omega(j,l) = j/(l+1)$, com seleção automática do tamanho da janela ou *bandwidth* $l > 0$, tal que $l = 1,1447(\varphi T)^{1/3}$, onde $\varphi = 4\hat{\rho}/(1 - \hat{\rho}^2)^2$, sendo $\hat{\rho}$ o coeficiente estimado de um AR(1), como proposto por Andrews (1991).

A estatística DPD também converge, em distribuição, para o supremo da ponte Browniana $W^*(\tau)$: $DPD \xrightarrow{d} \sup_{0 \leq \tau \leq 1} |W^*(\tau)|$, sendo $W^*(\tau) = W(\tau) - \tau W(1)$, $0 \leq \tau \leq 1$.

As taxas de rejeições empíricas da estatística de teste DPD em modelos da família GARCH são maiores do que o nível nominal de significância. Um dos motivos para a freqüente rejeição da hipótese de constância da variância incondicional seria o uso da função *kernel* $\omega(j,l) = j/(l+1)$ com seleção do tamanho da janela, l , usando um AR(1) como proposto por Andrew (1991), pois de acordo com a teoria sobre estudos de funções *kernel* (HOBGIN; FRANCES; OOMS, 1998) seu uso tende a subestimar ω .

Os valores críticos em amostras finitas para a estatística de teste DPD são calculados, por simulação, usando regressões de superfícies de respostas para diferentes tamanhos de amostras, como sugerido por De Pooter e Van Dijk (2004). O procedimento é feito seguindo uma aproximação seqüencial semelhante à estatística de teste k_1 , porém o nível de exigência do algoritmo é maior do que nesta estatística. Tal procedimento trabalha com um número máximo de quebras permitidas e com uma distância mínima entre os pontos de mudanças adjacentes. O procedimento é repetido até o número de pontos de mudanças

igualar ao número de quebras permitidas ou não haver mais nenhum ponto de mudança significativo. O passo final ocorre quando todos os pontos de mudanças são reavaliados.

3.2.5 Resumo sobre as principais diferenças metodológicas entre as estatísticas de testes

As principais diferenças entre as estatísticas de testes estão resumidas no Quadro 3.1.

Quadro 3.1- Principais diferenças metodológicas entre as estatísticas de testes.

Processos	Autor	Estatística de teste
$X_t \sim iidN(0, \sigma^2)$	Inclán e Tiao (1994)	$IT = \max_k \left \sqrt{\frac{T}{2}} H_k \right , H_k = \frac{C_k}{C_T} - \frac{k}{T},$ $C_k = \sum_{t=1}^k X_t^2, k=1, \dots, T.$
$X_t \sim ARCH, GARCH$	Kokoszka e Leipus (2000)	$KL = \max_k \left T^{-1/2} G_k \right , G_k = \hat{\omega}^{-1/2} \left(C_k - \frac{k}{T} C_T \right),$ $C_k = \sum_{t=1}^k X_t^2, \hat{\omega} = \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^l \omega_{j,l} \hat{\gamma}_j,$ $\omega(j, l) = 1 - j/(l+1), k=1, \dots, T.$
$X_t \sim iid(0, \sigma^2)$	Sansó, Aragó e Carrion (2003)	$k_1 = \max_k \left T^{-1/2} B_k \right , B_k = \frac{C_k - \frac{k}{T} C_T}{\sqrt{\hat{\eta}_4 - \hat{\sigma}^4}},$ $C_k = \sum_{t=1}^k X_t^2, \hat{\eta}_4 = T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t^4, \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^T X_t^2}{T},$ $k=1, \dots, T.$
$X_t \sim GARCH$	De Pooter e Van Dijk (2004)	$DPD = \max_k \left T^{-1/2} G_k \right , G_k = \hat{\omega}^{-1/2} \left(C_k - \frac{k}{T} C_T \right)$ $C_k = \sum_{t=1}^k \hat{z}_t^2, \hat{z}_t = \frac{X_t}{\sqrt{\hat{h}_t}}, \hat{\omega} = \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^l \omega_{j,l} \hat{\gamma}_j,$ $\omega(j, l) = j/(l+1), k=1, \dots, T.$

A estatística de teste de Inclán e Tiao (1994) é usada em processos independentes e identicamente distribuídos segundo a distribuição de probabilidade normal com média zero e variância constante.

A estatística de Kokoszka e Leipus (2000) é utilizada em processos que possuam heterocedasticidade condicional e possam ser ajustados por modelos ARCH ou GARCH.

Além disto, o estimador da variância dos quadrados dos retornos, $\hat{\omega}$, já não possui covariância, $\hat{\gamma}_j$, nula e neste estimador existe a função *kernel* $\omega(j,l) = 1 - j/(l+1)$, em que $l = \text{inteiro}(4(T/100)^{2/9})$, como sugerido por Newey-West (1994).

A estatística de Sansó, Aragón e Carrion (2003) é usada em processos independentes e identicamente distribuídos com média zero e variância finita.

A estatística de teste de De Pooter e Van Dijk (2004) é utilizada em processos que possuam heterocedasticidade condicional e possam ser ajustados por modelos GARCH. Os autores fazem a padronização dos processos pela volatilidade estimada. Além disto, assim como a estatística de teste KL, possui o mesmo estimador da variância dos quadrados dos retornos, no entanto contém a função *kernel* $\omega(j,l) = j/(l+1)$ com seleção automática do tamanho da janela ou *bandwidth* $l > 0$, tal que $l = 1,1447(\varphi T)^{1/3}$, onde $\varphi = 4\hat{\rho}/(1 - \hat{\rho}^2)^2$, sendo $\hat{\rho}$ o coeficiente estimado de um AR(1), como proposto por Andrews (1991).

CAPÍTULO 4

COMPARAÇÕES ENTRE OS RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES DAS ESTATÍSTICAS DE TESTES

Este Capítulo apresenta os resultados das simulações de Monte Carlo para as estatísticas de testes IT de Inclán e Tiao (1994), p.27; k_1 de Sansó, Aragó e Carrion (2003), p.29; KL de Kokoszka e Leipus (2000), p.31 e DPD de De Pooter e Van Dijk (2004), p.32. O objetivo é avaliar, por meio de simulações das estatísticas de testes, quais testes possuem taxas de rejeições empíricas próximas do nível de significância nominal de 5% na ausência de quebra estrutural e qual teste possui maiores taxas de rejeições quando se gera uma única quebra na variância incondicional de um ARCH(1).¹⁰

4.1 Descrição dos processos geradores de dados e hipóteses a serem testadas

Para comparar os resultados das estatísticas de testes foram gerados dados de um modelo ARCH(1), como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} X_{q,t} &= z_{q,t} \sqrt{h_{q,t}}, \quad q = 0, 1, \quad t = 1, \dots, T, \\ h_{q,t} &= w_q + \alpha_q X_{q,t-1}^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde X_t é o retorno simulado, z_t é uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) possuindo distribuição com média zero e variância um, h_t é a variância condicional ou volatilidade, $w \geq 0$ e $0 \leq \alpha < 1$. O índice q é igual a zero quando não existe quebra estrutural, caso contrário, o índice q é igual a um.

Sob a suposição de normalidade dos erros e de forma parecida com as propriedades descritas no Capítulo 2 na seção 2.2.1, a variância incondicional, σ^2 , de um modelo

¹⁰ A escolha deste modelo deve-se ao fato de que este estudo limita-se a avaliar as taxas de rejeições para o caso mais simples e em pesquisas futuras possa estendê-lo para modelos mais generalizados, como Auto-Regressivos Generalizados Condicionamente Heterocedásticos, GARCH(1,1).

ARCH(1) é dada por: $\sigma^2 = w\sigma_z^2/(1-\alpha)$, onde w é o parâmetro de intercepto, α é o parâmetro da persistência dos retornos e σ_z^2 é a variância dos erros. Conseqüentemente, somente a quebra em α ou w ou σ_z^2 provoca alteração na variância incondicional dos retornos que se ajustam aos modelos ARCH(1).

As hipóteses testadas são resumidas como a seguir:

H_0^A : Ausência de quebra quando os erros, z_t , seguem a distribuição normal padrão.

H_0^B : Ausência de quebra quando os erros, z_t , seguem a distribuição *t de student* com 5 graus de liberdade, como analisado por De Pooter e Van Dijk (2004).

H_1^A : Mudança em α quando os erros, z_t , seguem a distribuição normal padrão e ocorra quebra nos pontos: $\tau = 0,33T$; $0,5T$ e $0,77T$.

H_1^B : Mudança em α quando os erros, z_t , seguem a distribuição de probabilidade *t de student* com 5 graus de liberdade (DE POOTER; VAN DIJK, 2004) e ocorra quebra no ponto: $\tau = 0,5T$.

H_1^C : Mudança no desvio padrão, σ_z : quando os erros, z_t , seguem a distribuição normal padrão para $t \leq 0,5T$ e normal com média zero e desvio padrão $1 + \theta$ para $t > 0,5T$, sendo $\theta = 0,25$; $0,5$; $0,75$; 1 , de forma parecida com o procedimento estudado por Andreou e Ghysels (2002) e Sansó, Aragón e Carrion (2003).

H_1^D : Mudança na média, μ : quando os erros, z_t , seguem a distribuição normal padrão para $t \leq 0,5T$ e normal com média zero μ e desvio padrão 1 para $t > 0,5T$, sendo $\mu = 0,25$; $0,5$; $0,75$; 1 , de maneira análoga ao procedimento analisado por Andreou e Ghysels (2002).

Os resultados das simulações são analisados para a existência de uma única quebra, o nível de significância nominal adotado é de 5% e o tamanho das séries é 500 observações¹¹. Para gerar uma amostra de tamanho 500, inicialmente gera-se uma amostra de tamanho 550 e descartam-se as primeiras 50 observações. As observações iniciais são descartadas porque atribui-se o valor 1 para X_1 e utiliza-se a equação (4.1) para simular os demais valores da

¹¹ O objetivo é estimar a taxas de rejeições dos testes em amostras pequenas. Além disto, este tamanho foi escolhido para que os valores críticos recomendados nos artigos de Sansó, Aragón e Carrion (2003) e de De Pooter e Van Dijk (2004) pudessem ser utilizados.

série. Portanto, é necessário um período de aquecimento (*Burn-in*), que é o período necessário para o processo atingir a distribuição objetivo. Foram realizadas 1000 simulações com o uso do *software* R, sendo que este *software* utiliza como gerador de números pseudo-aleatórios o *default* denominado *Mersenne-Twister* proposto por Matsumoto e Nishimura (1998).

4.1.1 Resultados das taxas de rejeições empíricas dos testes: IT, k_1 , DPD e KL nas simulações dos pontos de quebras

Sob hipótese H_0^A e H_0^B :

A Tabela 4.1 mostra as taxas de rejeições dos testes para as séries simuladas quando os erros seguem a distribuição de probabilidade normal padrão e *t de student* com 5 graus de liberdade. Os resultados das simulações indicam que em série mesocúrticas e com assimetria nula, que é o caso da distribuição de probabilidade normal, o teste KL tem taxa de rejeição empírica mais próxima do nível de significância de 5%. O teste DPD, para processos GARCH, possui taxa de rejeição bem mais desigual em relação ao nível de significância nominal quando o valor da persistência dos retornos está perto da região de não estacionariedade ($\alpha=0,9$). Os resultados das simulações também mostram que com relação aos testes IT e k_1 , as diferenças do nível estimado para o real, que é 5%, foram muito acentuadas (chegando a taxas próximas de um), sobretudo o teste IT, cuja taxa de rejeição aumenta à medida que a persistência dos retornos aumenta. Resultados parecidos são obtidos quando os erros seguem a distribuição *t de student*.

Tabela 4.1 – Taxas de rejeições empíricas dos testes na ausência de quebra estrutural.

ARCH (1), z_t segue a distribuição normal padrão e $w = 0,1$				
Parâmetro: α	k_1	IT	DPD	KL
0,100	0,077	0,082	0,050	0,055
0,300	0,218	0,320	0,059	0,052
0,500	0,333	0,640	0,061	0,045
0,700	0,460	0,876	0,066	0,044
0,900	0,508	0,965	0,101	0,057
ARCH (1), z_t segue a distribuição <i>t de student</i> com 5 graus de liberdade e $w = 0,1$				
0,100	0,098	0,546	0,047	0,057
0,300	0,267	0,807	0,055	0,040
0,500	0,311	0,988	0,070	0,041
0,700	0,382	0,995	0,090	0,035
0,900	0,456	1,000	0,112	0,030

Nota: Software utilizado: R.

A Figura 4.1 apresenta as diferenças entre os valores das estatísticas de testes para um modelo ARCH(1) de 500 observações com quebra na observação 250. A reta horizontal representa o valor crítico de 1,36 que é utilizado nas estatísticas de testes KL e IT, de acordo com Andreou e Ghysels (2002). Esta Figura mostra que a estatística de teste IT possui valores maiores do que as outras estatísticas de testes analisadas nesta seção, resultando assim em maiores taxas de rejeições empíricas na ausência de quebra estrutural.

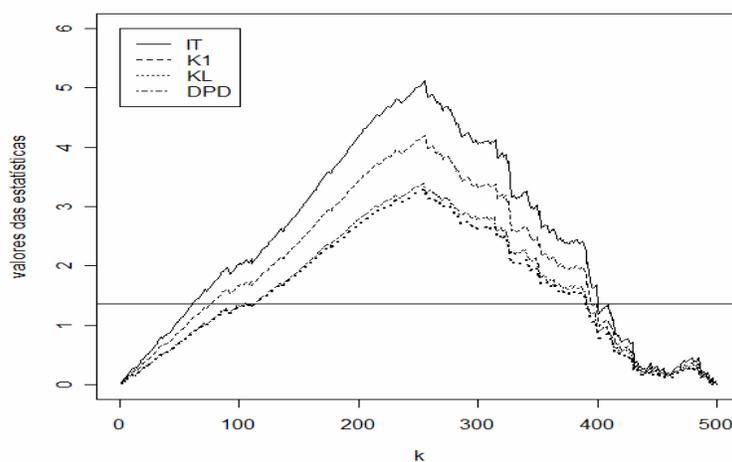


Figura 4.1 - Evolução das estatísticas de testes para um modelo ARCH(1) de série com tamanho 500 e com quebra na observação 250.

Com base nos resultados apresentados na Tabela 4.1, pode-se concluir que os testes IT e k_1 não são comparáveis, estatisticamente, com os testes DPD e KL, pois os primeiros apresentam taxas de rejeições extremamente diferentes em relação ao nível de significância nominal de 5% e suas taxas são bem mais acentuadas do que as destes últimos testes na região da hipótese nula onde a suposição de ausência de quebra é verdadeira. Na seção 3.2.1 do Capítulo 3 foi descrito o inconveniente de que o teste IT tende a apresentar grandes taxas de rejeições, pois sua estatística de teste não converge diretamente para o supremo da Ponte Browniana em processos que não sejam independentes e identicamente distribuídos segundo a distribuição de probabilidade normal. Desta maneira, deve-se destacar que em toda a análise que será feita neste Capítulo, não serão comparadas as taxas de rejeições de testes que não tenham taxas de rejeições empíricas semelhantes na ausência de quebra estrutural e, portanto, apenas com os testes DPD e KL é que serão feitas estas comparações, nos demais serão apenas verificadas como se comportam suas taxas para diferentes tipos de quebras.

Sob hipótese H_1^A :

As Tabelas 4.2 a 4.4 mostram as taxas de rejeições dos testes em identificar mudança na variância incondicional provocada por quebra na persistência dos retornos proveniente no início, meio e final das séries, respectivamente, e quando os erros seguem distribuição de probabilidade normal padrão.

Os resultados das simulações sugerem que k_1 , DPD e KL tendem a identificar melhor o ponto de quebra que ocorra no meio das séries e quando a persistência dos retornos é baixa, ou seja, $\alpha_0 = 0,1$, pois suas taxas são maiores neste caso. O teste IT também tende a detectar melhor o ponto de quebra que seja originado no meio das séries, no entanto sua taxa de rejeição é maior quando a persistência dos retornos é $\alpha_0 = 0,5$. Comparando-se os testes DPD e KL, salvo alguns valores para a persistência dos retornos, a taxa de rejeição do primeiro é superior à do segundo tanto em quebras que sejam geradas no início, meio e final das séries.

Tabela 4.2 – Taxas de rejeições dos testes na identificação de uma única quebra, 0,33T, T=500 observações, na volatilidade de um modelo ARCH(1).

z_t segue a distribuição normal padrão

σ_0^2	σ_1^2	w_0	w_1	α_0	α_1	k_1	IT	DPD	KL
0,170	0,300	0,150	0,150	0,100	0,500	0,424	0,728	0,067	0,065
0,280	0,500	0,250	0,250	0,100	0,500	0,399	0,735	0,033	0,067
0,300	1,500	0,150	0,150	0,500	0,900	0,241	0,887	0,024	0,007
0,500	2,500	0,250	0,250	0,500	0,900	0,258	0,860	0,012	0,006

Nota: $\sigma^2 = w\sigma_z^2/(1-\alpha)$ é a volatilidade incondicional. O índice $q=0,1$ em σ_q^2 e α_q denota que $q=0$ é o valor do parâmetro antes do ponto de quebra e $q=1$ é o valor do parâmetro depois da quebra. Por exemplo: $\sigma_0^2 = 0,17 = \frac{0,15 \times 1}{1-0,1}$ e

$$\sigma_1^2 = 0,3 = \frac{0,15 \times 1}{1-0,5}. \text{ Software utilizado: R.}$$

Tabela 4.3 - Taxas de rejeições dos testes na identificação de uma única quebra, 0,5T, T=500 observações, na volatilidade de um modelo ARCH(1).

z_t segue a distribuição normal padrão

σ_0^2	σ_1^2	w_0	w_1	α_0	α_1	k_1	IT	DPD	KL
0,170	0,300	0,150	0,150	0,100	0,500	0,695	0,819	0,320	0,342
0,280	0,500	0,250	0,250	0,100	0,500	0,719	0,863	0,355	0,316
0,300	1,500	0,150	0,150	0,500	0,900	0,530	0,888	0,110	0,100
0,500	2,500	0,250	0,250	0,500	0,900	0,517	0,884	0,105	0,087

Nota: $\sigma^2 = w\sigma_z^2/(1-\alpha)$ é a volatilidade incondicional. O índice $q=0,1$ em σ_q^2 e α_q denota que $q=0$ é o valor do parâmetro antes do ponto de quebra e $q=1$ é o valor do parâmetro depois da quebra. Por exemplo: $\sigma_0^2 = 0,17 = \frac{0,15 \times 1}{1-0,1}$ e

$$\sigma_1^2 = 0,3 = \frac{0,15 \times 1}{1-0,5}. \text{ Software utilizado: R.}$$

Tabela 4.4 - Taxas de rejeições dos testes na identificação de uma única quebra, 0,77T, T=500 observações, na volatilidade de um modelo ARCH(1).

z_t segue a distribuição normal padrão

σ_0^2	σ_1^2	w_0	w_1	α_0	α_1	k_1	IT	DPD	KL
0,170	0,300	0,150	0,150	0,100	0,500	0,553	0,583	0,310	0,300
0,280	0,500	0,250	0,250	0,100	0,500	0,552	0,602	0,334	0,303
0,300	1,500	0,150	0,150	0,500	0,900	0,515	0,682	0,192	0,157
0,500	2,500	0,250	0,250	0,500	0,900	0,511	0,724	0,154	0,146

Nota: $\sigma^2 = w\sigma_z^2/(1-\alpha)$ é a volatilidade incondicional. O índice $q=0,1$ em σ_q^2 e α_q denota que $q=0$ é o valor do parâmetro antes do ponto de quebra e $q=1$ é o valor do parâmetro depois da quebra. Por exemplo: $\sigma_0^2 = 0,17 = \frac{0,15 \times 1}{1-0,1}$ e

$$\sigma_1^2 = 0,3 = \frac{0,15 \times 1}{1-0,5}. \text{ Software utilizado: R.}$$

Sob hipótese H_1^B :

A Tabela 4.5 descreve as taxas de rejeições dos testes em detectar mudança na variância incondicional oriunda de quebra que ocorra na persistência dos retornos e no meio das séries quando os erros seguem a distribuição *t de student* com 5 graus de liberdade.

Os testes DPD e KL apresentam maiores taxas de rejeições para $\alpha_0 = 0,1$. Os resultados obtidos mostram que o teste IT não possui taxa muito modificada diante das alterações na persistência dos retornos por não possuir taxa de rejeição empírica próxima a 5% de significância na ausência de quebra estrutural. O teste k_1 tende a mostrar maior taxa para $\alpha_0 = 0,1$.

Tabela 4.5 - Taxas de rejeições dos testes na identificação de uma única quebra, 0,5T, T=500 observações, na volatilidade de um modelo ARCH(1), quando os erros seguem distribuição *t de student*.

z_t segue a distribuição <i>t de student</i> com 5 graus de liberdade						
w	α_0	α_1	k_1	IT	DPD	KL
0,150	0,100	0,500	0,5	0,926	0,198	0,151
0,750	0,100	0,500	0,517	0,933	0,139	0,138
0,150	0,500	0,900	0,319	0,912	0,029	0,027
0,750	0,500	0,900	0,328	0,924	0,017	0,029

Nota: O índice $q=0,1$ em α_q denota que $q=0$, ou seja, α_0 , é o valor do parâmetro antes do ponto de quebra e $q=1$, ou seja, α_1 , é o valor do parâmetro depois do ponto de quebra. Software utilizado: R

Sob hipótese H_1^C :

A Tabela 4.6 apresenta as taxas de rejeições dos testes em detectar pequena mudança na volatilidade incondicional que ocorra no meio das séries e devido à ocorrência de quebra de magnitude pequena no desvio padrão dos erros. Os resultados obtidos indicam que na presença de baixo grau de volatilidade incondicional ($\sigma_0^2=0,11$) e baixo grau de persistência dos retornos ($\alpha=0,1$); o teste IT mantém-se com taxa de 100% a partir de $\theta=0,75$. Quando o grau de volatilidade incondicional é alto ($\sigma_0^2=1,0$) e a persistência dos

retornos também é alta ($\alpha = 0,9$), todos os testes, com exceção do teste IT, têm taxas significativamente reduzidas. Os testes DPD e KL apresentam maiores taxas quando $\alpha = 0,1$, chegando a 99,9% e menor quando $\alpha = 0,9$, chegando a 0,2%.

Tabela 4.6 – Taxas de rejeições dos testes na identificação de uma única quebra, $\tau = 0,5T$, $T=500$ observações, na volatilidade de um modelo ARCH(1) e na presença de mudança no desvio padrão dos erros.

z_t segue a distribuição normal com média zero e desvio padrão $1 + \theta$ e $w = 0,1$							
σ_0^2	σ_1^2	θ	α	k_1	IT	DPD	KL
0,110	0,140	0,250	0,100	0,850	0,865	0,623	0,716
0,110	0,170	0,500	0,100	1,000	1,000	0,999	0,994
0,110	0,190	0,750	0,100	1,000	1,000	0,999	0,998
0,110	0,220	1,000	0,100	0,998	1,000	0,998	0,990
1,000	1,250	0,250	0,900	0,543	0,970	0,153	0,060
1,000	1,500	0,500	0,900	0,414	0,990	0,096	0,038
1,000	1,750	0,750	0,900	0,250	1,000	0,024	0,009
1,000	2,000	1,000	0,900	0,140	1,000	0,007	0,002

Nota: $\sigma^2 = w\sigma_z^2 / (1 - \alpha)$ é a volatilidade incondicional. O índice $q=0,1$ em σ_q^2 denota que $q=0$ é o valor do parâmetro antes do ponto de quebra e $q=1$ é o valor do parâmetro depois da quebra. Por exemplo: $\sigma_0^2 = 0,11 = 0,1 \times 1 / (1 - 0,1)$ e $\sigma_1^2 = 0,14 = 0,1 \times 1,25 / (1 - 0,1)$. z_t segue a distribuição normal padrão para $t=1, \dots, [0,5T]$ e z_t segue a distribuição normal com média zero e desvio padrão $1 + \theta$ para $t = [0,5T] + 1, \dots, T$, nível de significância adotado de 5%. Software utilizado: R.

Sob hipótese H_1^D :

Os resultados da Tabela 4.7 indicam que para $\alpha = 0,1$, as taxas de rejeições dos testes tendem a aumentar à medida que a mudança na média torna-se maior, sobretudo o teste IT. Para $\alpha = 0,9$, ou seja, quando a persistência dos retornos está perto da região de não estacionariedade, a taxa de rejeição do teste KL diminui para grandes alterações na média dos erros ($\mu = 0,75$ e $\mu = 1,00$).

Desta forma, tanto IT, k_1 , DPD, KL identificam, incorretamente, quebra na variância incondicional, pois a quebra na variância incondicional só ocorre quando σ_z^2 , α ou w alterarem (ANDREOU; GHYSELS, 2002; DE POOTER; VAN DIJK, 2004), dado que, sob

suposição de que os erros são independentes e identicamente distribuídos segundo a distribuição normal, a volatilidade incondicional é dada por $\sigma^2 = w\sigma_z^2 / (1 - \alpha)$. Logo, alterações em μ não mudam esta volatilidade.

Tabela 4.7 – Taxas de rejeições dos testes na identificação de uma única quebra, $\tau = 0,5T$, $T=500$ observações, na volatilidade de um modelo ARCH(1) e na presença de mudança na média dos erros.

z_t segue a distribuição normal com média μ e variância 1 e $w=0,1$					
μ	α	k_1	IT	DPD	KL
0,250	0,100	0,034	0,027	0,011	0,213
0,250	0,900	0,135	0,631	0,015	0,192
0,500	0,100	0,245	0,248	0,116	0,840
0,500	0,900	0,304	0,826	0,064	0,041
0,750	0,100	0,893	0,868	0,695	0,999
0,750	0,900	0,550	0,971	0,161	0,049
1,000	0,100	1,000	1,000	0,998	1,000
1,000	0,900	0,481	0,999	0,122	0,037

Nota: z_t segue a distribuição normal padrão para $t = 1, \dots, [0,5T]$ e z_t segue a distribuição normal com média μ e desvio padrão 1 para $t = [0,5T] + 1, \dots, T$, nível de significância adotado de 5%. Software utilizado: R.

4.1.2 Conclusão geral

De acordo com os cenários descritos neste Capítulo, observou-se que os testes IT e k_1 possuem taxas de rejeições empíricas, sob suposição verdadeira de ausência de quebra estrutural, com diferenças muito acentuadas em relação ao nível de significância nominal adotado de 5%. Com relação aos testes DPD e KL, suas taxas de rejeições empíricas são mais próximas do nível de significância, principalmente KL.

Observou-se também que a taxa de rejeição de IT é maior para quebra que ocorra no meio da série e praticamente não se altera muito para diferentes magnitudes de mudanças na volatilidade incondicional quando se muda o desvio padrão dos erros. O teste k_1 tem maior taxa de rejeição em detectar quebra que ocorra no meio da série e quando se tem valor baixo para a persistência dos retornos. Quando ocorre alteração no desvio padrão dos erros, sua taxa de rejeição é maior diante de valor pequeno para persistência dos retornos.

Os testes DPD e KL têm maiores taxas de rejeições em identificar quebra que ocorra no meio da série e quando a persistência dos retornos é baixa, ou seja, na medida em que se está mais longe da região de não estacionariedade. Quando se altera o desvio padrão dos erros, as taxas de rejeições destes testes são maiores quando a persistência dos retornos também é baixa. Comparando-se DPD com KL, salvo alguns valores para a persistência dos retornos, DPD tem maior taxa de rejeição do que KL.

Com relação à mudança que ocorra na média dos erros, todos os testes identificam, incorretamente, esta mudança como quebra na volatilidade incondicional.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO EM DADOS REAIS

Este Capítulo apresenta uma aplicação dos testes analisados no Capítulo 3 à série índice Dow Jones obtida por meio do banco de dados *Econômica*. Esta série tem regularidade diária e abrange o período de fevereiro de 2001 a janeiro de 2003, o que corresponde a 500 observações. De acordo com as informações coletadas do *New York Stock Exchange* (NYSE, 2008), o Dow Jones é um índice usado para medir o desempenho dos mercados financeiros dos E.U.A. Charles H. Dow o criou em 26 de maio de 1896 e é o mais antigo índice de ações. Ao longo do século passado tornou-se o índice mais amplamente reconhecido no mercado de ações dos E.U.A e provavelmente no mundo inteiro. A maioria das ações incluídas nele são cotadas na Bolsa de Valores de Nova York e são todas de grandes empresas *blue-chip* que refletem a “saúde” da economia norte-americana.

Este índice é composto por empresas que são ocasionalmente substituídas para que, desta forma, se possa acompanhar as mudanças que acontecem no mercado. Sempre que tais mudanças ocorrem, é utilizado um fator de escala para ajustar os valores do índice de tal maneira que estes não sejam afetados diretamente pelos impactos destas alterações.

5.1 Índice Dow Jones

A evolução do Dow Jones, os retornos e os quadrados dos retornos desta série são mostrados nas Figuras 5.1 a 5.3, respectivamente. As estatísticas descritivas dos retornos mostram excesso de curtose e assimetria positiva. O teste de Ljung-Box indica a presença de variância condicional não constante nos quadrados dos retornos, conforme o Quadro 5.1. Os períodos de setembro de 2001 e julho de 2002 apresentam volatilidades significativas tanto nos retornos quanto nos quadrados dos retornos do Dow Jones, de acordo com as Figuras 5.2 e 5.3, respectivamente. Tais períodos correspondem aos efeitos dos atentados terroristas de 11 de setembro de 2001 aos EUA e das repercussões de fraudes contábeis envolvendo as empresas *Enron* e *WorldCom*.

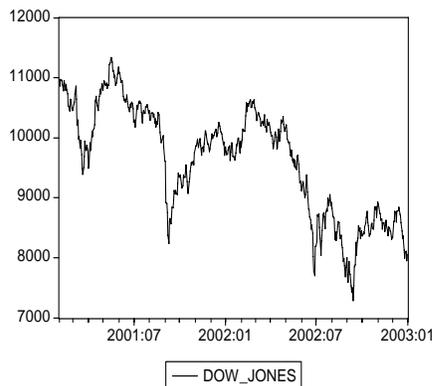


Figura 5.1- Evolução da série Dow Jones.

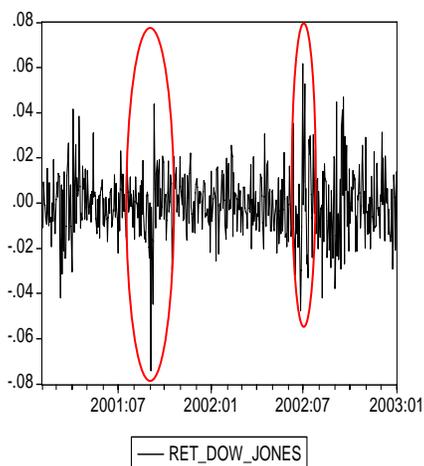


Figura 5.2 - Evolução dos retornos da série Dow Jones.

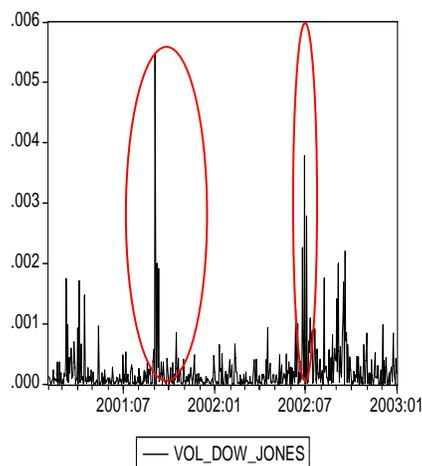


Figura 5.3 - Evolução dos quadrados dos retornos da série Dow Jones.

Para se selecionar o melhor modelo, foram verificados o ajuste e a validação dos pressupostos. A qualidade do ajuste foi avaliada segundo os critérios de informações de Akaike e Schwarz; as validações dos pressupostos de ausências de autocorrelação e de dependência dos resíduos e também a aderência destes à distribuição de probabilidade foram analisadas por meio dos testes de Multiplicadores de Lagrange, BDS e Kolmogorov-

Smirnov, respectivamente (HAMILTON,1994; TSAY,2002; MORETTIN, 2004; CERQUEIRA, 2006).

Quadro 5.1 - Estatísticas descritivas dos retornos da série Dow Jones.

Estatísticas descritivas	Retornos do Dow Jones
Média	-0,000622
Mediana	-0,000977
Máximo	0,061547
Mínimo	-0,073962
Desvio padrão	0,015000
Assimetria	0,103164
Curtose	5,048548
Ljung-Box	124,7961 (0)

Nota: Valor entre parênteses é o p-valor para a estatística de Ljung-Box utilizando 2 lags.

Após ser verificada a presença de variância condicional não constante para os quadrados dos retornos, a série de retornos do Dow Jones foi ajustada por um modelo GARCH(1,1), sob suposição de erros com distribuição de probabilidade *t de student*. Para se chegar a este ajuste final foram comparados seus critérios de informações de Akaike e Schwarz com os fornecidos pelas extensões dos modelos ARCH e GARCH. Além disto, em trabalhos como os de Gençay (1998), Bitencourt et al. (2005) e Sohn e Lim (2007) também podem ser encontradas análises estatísticas para o índice Dow Jones, onde os autores também utilizaram modelos GARCH. Estes modelos possuem algumas propriedades desejáveis, como: i) Ser possível a construção da função de verossimilhança que por sua vez possibilita a estimação dos coeficientes usando o método de Máxima Verossimilhança. Tal propriedade é importante porque os estimadores têm distribuições conhecidas, possibilitando a construção de testes de hipóteses alternativos. ii) Permitem que distribuições com caudas pesadas para os retornos possam ser estimadas. iii) De uma forma geral, existe a presença de alta persistência nos quadrados dos retornos e isto faz com que seja possível obter o ajuste sem ter que utilizar uma estrutura de defasagens tão grande para

a variância condicional como ocorre nos modelos ARCH, já que os modelos GARCH são mais parcimoniosos. iv) Por fim, a variância condicional contém informações não só dos retornos como também da própria variância passada (CERQUEIRA, 2006; COSTA et al., (2004); CHRISTOFFERSEN, 2003; TAYLOR, 2005).

Os resultados das estimações dos coeficientes, assim como suas estatísticas e p-valores estão na Tabela 5.1. No Apêndice C são apresentadas as estimações dos coeficientes, as medidas de adequação do ajuste e validação dos pressupostos.

Tabela 5.1 - Resultados da estimação de um modelo GARCH(1,1).

Retornos da série Dow Jones.

	Coefficiente	Erro-padrão	Estatística	P-Valor
w	$1,06 \times 10^{-5}$	$4,72 \times 10^{-6}$	2,252	0,0243
α	0,108	0,025	4,292	0,000
β	0,845	0,036	23,422	0,000

Nota: Nível de significância adotado de 5%. *Software* utilizado: Eviews.

A Tabela 5.2 apresenta as datas de quebras identificadas pelos testes da família CUSUM¹²: DPD e KL.

De acordo com os resultados, os testes DPD e KL identificam um mesmo ponto de quebra que corresponde à data 02/07/2002 para esta série.

Tabela 5.2 - Identificação de quebra estrutural em série real.

	DPD	KL
Dow Jones	02/07/2002	02/07/2002

Nota: Nível de significância adotado: 5%.

Os efeitos de alguns fatos econômicos e políticos possivelmente explicam o motivo destes testes terem identificado quebra estrutural nesta data. Segundo RAGAZZI (Folha de São Paulo 02/07/2002), na economia destacam-se: escândalos financeiros e fraudes contábeis envolvendo companhias americanas como a *Enron* e *WorldCom* (uma das principais empresas da *Wall Street*) geraram turbulências nos mercados financeiros

¹² Os testes IT e k_1 não são apresentados, pois como observado nas seções 3.2.1 e 3.2.2 do Capítulo 3, estes não são apropriados para verificar quebras estruturais em modelos da família ARCH ou GARCH.

mundiais; falência da empresa *Global Crossing*; demissão de 1,4% da força de trabalho de 142 mil pessoas da empresa *EDS* que possuía contratos com a empresa *WorldCom*.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

O objetivo desta dissertação esteve direcionado ao estudo de modelos não-lineares sob a presença de uma única quebra estrutural na variância incondicional das séries de retornos.

De acordo com os cenários descritos nas hipóteses apresentadas no Capítulo 4, os resultados das simulações indicaram que os testes IT e k_1 não possuíam taxas de rejeições empíricas, sob ausência de quebra estrutural verdadeira, próximas ao nível de significância nominal de 5%; logo, não puderam ter suas taxas, na presença de quebra, comparadas com KL e DPD. Tanto IT quanto k_1 não são apropriados para identificar quebras em modelos ARCH como foi observado no Capítulo 3. Estes testes são aplicáveis em séries que não possuam variância condicional. Com exceção de alguns valores para persistência dos retornos de processos ARCH(1), o teste KL apresentou taxas de rejeições empíricas, na ausência de quebra estrutural, mais próximas do nível de significância de 5% tanto sob suposição de erros com distribuições simétricas de probabilidade como a normal padrão quanto a *t de student* com 5 graus de liberdade. Em relação ao teste KL, DPD possuía taxas de rejeições empíricas de magnitudes bem mais diferentes do nível de significância nominal de 5%.

A análise de dados reais do Capítulo 5 mostrou que os testes DPD e KL identificaram a mesma data de quebra na série de retornos Dow Jones.

Algumas extensões deverão ser analisadas em trabalhos futuros, como:

- i) Estender as análises de todos os testes destacados no Capítulo 3 para modelos GARCH e suas extensões.
- ii) Estender o estudo das simulações, que foi feito apenas em modelos ARCH(1), para modelos GARCH e suas variantes. Esta é uma das principais limitações deste trabalho, pois um ARCH de ordem um não produz um bom ajuste em séries financeiras e mesmo que se consiga obter um ajuste de tais séries por meio de ordens maiores, existe a possibilidade de que se possa ter violação da restrição de não-negatividade da variância.

- iii) Estender o estudo das simulações para os modelos descritos em (ii) sob suposição de distribuições de probabilidade para erros que sigam padrões alternativos.
- iv) Estender o estudo das simulações não apenas para amostras pequenas, mas também para amostras de tamanho 1000, 2000 e 4000, como analisado por De Pooter e Van Dijk (2004).
- v) Estender as análises empíricas para diversas séries financeiras nacionais e estrangeiras.
- vi) Estudar as consequências de se quebrar o parâmetro de intercepto em modelos GARCH(1,1). Nesta dissertação não se objetivou quebrar este parâmetro porque ao se quebrá-lo, a variância incondicional dos retornos alterava-se significativamente e o interesse era avaliar as taxas de rejeições dos testes diante de pequenas mudanças na variância incondicional.
- vii) Estudar como se comportam as taxas de rejeições dos testes diante da presença de *outliers* nas séries.
- viii) Estudar como se comportam as taxas de rejeições dos testes quando se utilizam não apenas os quadrados dos retornos, mas também os retornos absolutos, conforme analisado por Andreou e Ghysels (2002).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALDRIGHI, D. M.; MILANEZ, D. Y. Finança Comportamental e a Hipótese dos Mercados Eficientes, *Revista de Economia Contemporânea*, V.9, P. 41-72, 2005
2. ANDREOU, E.; GHYSELS, E. Detecting Multiple Breaks in Financial Market Volatility Dynamics. *Journal of Applied Econometrics*, v.17, p. 579-600, 2002.
3. ANDREOU, E.; GHYSELS, E. Tests For Breaks in the Conditional Co-Movements of Asset Returns. *Statistica Sinica*, v. 13, p. 1045-1074, 2003.
4. ANDREOU E.; GHYSELS, E. Monitoring Disruptions in Financial Markets. *Journal of Econometrics*, v. 135, p. 77-124, 2005.
5. ANDREWS, D. W. K. Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation. *Econometrica*, v. 59, p. 817-858, 1991.
6. ANDREWS, D. W. K. Tests for Parameter Instability and Structural Change with Unknown Change Point. *Econometrica*, v. 61, n.4, p. 821-856, 1993.
7. ANDREWS, D. W. K.; PLOBERGER, W. Optimal Tests when a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative. *Econometrica*, v. 62, p. 1383-1414, 1994.
8. BARNDORFF-NIELSEN, O.; SHEPHARD, E. N. Econometric Analysis of Realized Volatility and its use in Estimating Stochastic Volatility Models. *Journal of the Royal Statistical Society B*, v. 64, p. 253-280, 2002a.
9. BARNDORFF-NIELSEN, O.; SHEPHARD, E. N. Estimating Quadratic Variation using Realized Variance. *Journal Applied Econometrics*, v. 17, p. 457-477, 2002b.

10. BARNDORFF-NIELSEN, O.; SHEPHARD, E. N. How Accurate is the Asymptotic Approximation to the Distribution of Realised Volatility, In *Identification and Inference for Econometric Models*. A Festschrift for Tom Rothenberg, Cambridge University Press, 2003.
11. BATALHA, J. M. S. T. *Uma Análise da Volatilidade Condicional dos Preços do Petróleo*. 86p. Dissertação (Mestrado em Ciências)- Faculdade de Economia e Finanças IBMEC, 2008.
12. BITENCOURT, W. A. ; SILVA, W. S.; SÁFADI, T.; FERREIRA, D. F. Uma Análise da Transmissão de Volatilidade entre os Índices Dow Jones e IBOVESPA, CONGRESSO: 50ª RBRAS, Londrina, BRASIL, 2005.
13. BOLLERSLEV, T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Econometrics Journal*, v. 31, p. 307-327, 1986.
14. BOX, G. E. P.; JENKINS, M. G. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Revised Edition, Oakland, CA: Holden-Day, 1976.
15. BROOKS, C. *Introductory Econometrics for Finance*, New York, Cambridge University Press, 2002.
16. CAI, J. A Markov Model of Switching-Regime ARCH, *Journal of Business & Economic Statistics*, v. 12, p.309-316, 1994.
17. CAJUEIRO, D.; SOUZA, S.; TABAK, B. Investigação da Memória de Longo Prazo na Taxa de Câmbio no Brasil. Rio de Janeiro, *Revista Brasileira de Economia*, v. 60, p.50-67, 2006.
18. CAPORALE, G. M.; KONTONIKAS, A. The Euro and Inflation Uncertainty in the European Monetary Union. CESifo, *Working Paper*, v. 1842, 2006.

19. CERQUEIRA, L.F. Metodologia para a Periodização Endógena da Taxa de Inflação no Brasil e Aproximação de seus Modelos ARIMA, 1960 a 2005. *Textos para Discussão*, Rio de Janeiro, v. 202, p. 15-55, 2006.
20. CHRISTOFFERSEN, P. F. *Elements of Financial Risk Management*. San Diego, Elsevier, 2003.
21. CHU, C. S. J. Detecting Parameter Shift in GARCH Models. *Econometrica*, v. 14, p. 241-266, 1995.
22. COSTA, B. M.; AIUBE, F. A. L.; BAIDYA, T. K. N. Fatos Estilizados e Volatilidade de Retorno do Petróleo WTI, XXIV ENEGEP - Encontro Nacional de Engenharia de Produção, Florianópolis - SC. Anais do XXIV ENEGEP, p. 01-08, 2004.
23. CSÖRGO, M.; HORVÁTH, L. *Limit Theorems in Change-Point Analysis*. Wiley, New York, 1997.
24. DAVIES, R. B. Hypothesis Testing when a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative. *Biometrika*, v. 64, p. 247-254, 1977.
25. DAVIES, R. B. Hypothesis Testing when a Nuisance Parameter is Present Only Under the Alternative. *Biometrika*, v. 74, p. 33-43, 1987.
26. DE POOTER, M.; VAN DIJK, D. Testing for Changes in Volatility in Heteroskedastic Time Series - a further examination. *Econometric Institute Research Report*, 38/A, 2004.
27. DIEBOLD, F. X. Modeling the Persistence of Conditional Variances: A Comment. *Econometrica*, v. 5, p. 51-56, 1986.

28. ENDERS, W. *Applied Econometric Analysis*, New York, Willey, 1995.
29. ENGLE, R. F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation. *Econometrica*, v. 50, p. 987-1008, 1982.
30. FARO, C. *Princípios e Aplicações do Cálculo Financeiro*, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1995.
31. FIGUEIREDO, F. M. R.; STAUB, R. B. Algumas Considerações sobre a Sazonalidade no IPCA, *Trabalhos para Discussão*, v. 31, p. 25-62, 2001.
32. FOSTER, D.; NELSON, D. Continuous Record Asymptotics for Rolling Sample Estimators. *Econometrica*, v. 64, p. 139-174, 1996.
33. FRIEDMAN, M. Nobel Lecture: Inflation and Unemployment. *Journal of Political Economy*, v. 85, p. 451-472, 1977.
34. GENÇAY, R. The Predictability of Security Returns with Simple Technical Trading Rules. *Journal Empirical Finance*. v. 5, p. 347-359, 1998
35. GOURIÉROUX, C. *ARCH Models and Financial Applications*. New York, Springer, 1997.
36. GREENE, W. H. *Econometric Analysis*. Macmillan, Nova York, Second Edition, 2000.
37. HAMILTON, J. D. *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1994.
38. HARVEY, A. C. *Time Series Models*. 2nd edition, Cambridge, MA: MIT Press, 1994.

39. HENDRY, D. F. An Excursion into Conditional Varianceland. *Econometrica*, v. 5, p. 63-69, 1986.
40. HILLEBRAND, E.; MEDEIROS, M. Estimating and Forecasting GARCH Models in the Presence of Structural Breaks and Regime Switches. *Textos para Discussão*, Rio de Janeiro, v. 80, p. 35-54, 2007.
41. HOBJIN, B.; FRANSES, P.H.; OOMS, M. Generalizations of the KPSS-Test for Stationarity. *Discussion Paper 9802*, Econometric Institute, Erasmus University Rotterdam, 1998.
42. INCLÁN, C.; TIAO, C. G. Use of Cumulative Sums of Squares for Retrospective Detection of Changes of Variance. *Journal of the American Statistical Association*, v. 89, n. 427, p. 913-923, 1994.
43. JOHANSEN, S. Statistical Analysis of Cointegration Vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control*, v.12, p. 231-254, 1988.
44. KIM, E. H.; SINGAL, V. Opening Up of Stock Markets: Lessons from Emerging Economies. *Journal of Business*, v. 73, p. 25-66, 2000.
45. KOKOSZKA, P.; LEIPUS, R. Change-Point in the Mean of Dependent Observations. *Statistics and Probability Letters*, v. 40, p. 385-393, 1998.
46. KOKOSZKA, P.; LEIPUS, R. Change-Point Estimation in ARCH Models. *Bernoulli*, v. 6, p. 513-539, 2000.
47. KOKOSZKA, P.; TEYSSIÈRE, G. Change-Point Detection in GARCH Models: Asymptotic and Bootstrap Tests. *CORE Discussion Paper*, v. 65, 2002.

48. LAMOUREUX, C.; LASTRAPES, W. Persistence in Variance, Structural-Change, and the GARCH Model. *Journal of Business and Economic Statistics*, v. 8, p. 225-234, 1990.
49. LEE, S.; PARK, S. The CUSUM of Squares Test for Scale Changes in Order Moving Order Average Processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, v. 28, p. 625-644, 2001.
50. MARÇAL, E. F.; PEREIRA, P. L. V. Testando a Hipótese de Contágio a partir de Modelos Multivariados de Volatilidade. *Seminário: MatLab Aplicações no Mercado Financeiro*. São Paulo, 2006.
51. MATSUMOTO, M.; NISHIMURA, T. Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, v. 8, p.3-30, 1998.
52. MENDONÇA, M. J.; PIRES, M. C. C.; MEDRANO, L. A. Administração e Sustentabilidade da Dívida Pública no Brasil: uma Análise para o Período 1995-2007. *Texto para Discussão*, v. 1342, p. 10-44, 2008.
53. MORAIS, I. A. C.; NESS, M.; BATISTI, V. Oferta e Demanda por Exportações de Automóveis (1992-2006), *Working Paper*, Departamento de Economia Aplicada, UNISINOS, 2008.
54. MORAIS, I. A. C.; PORTUGAL, M. S. Modelagem e Previsão de Volatilidade Determinística e Estocástica para a Série do IBOVESPA. *Estudos Econômicos*, v. 29, p. 303-341, 1999.
55. MORETTIN, P. A. *Econometria Financeira: Um Curso em Séries Temporais Financeiras*, São Paulo: Associação Brasileira de Estatística, no prelo, 2004.

56. NEW YORK STOCK EXCHANGE. Disponível em <<http://www.nyse.com/>>
Acesso em: 10 dez. 2008.
57. NEWEY, W. K.; WEST, K. D. Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation. *Review of Economic Studies*, v. 61, p. 631-653, 1994.
58. PEREIRA, P. L. V.; HOTTA, L. K.; HWANG, S.; SRACHELL, S. Testing for Structural Breaks in Exchange Rate Series. In: 7 WORLD CONGRESS OF THE ECONOMETRIC SOCIETY, Tokio. Abstract of the 7 World Congress of the Econometric Society. Japão: Econometric Society, p. 38-38, 1995.
59. RAGAZZI, A. P. *Dia de Estresse*. Folha de São Paulo, 02/jul.2002.
60. RAPACH, D. E.; STRAUSS, J. K. Structural Breaks and GARCH Models of Exchange Rate Volatility. *Journal of Applied Econometrics*, v. 23, p. 65-90, 2005.
61. RICE, J. A. *Mathematical Statistics and Data Analysis*, Second edn. Duxbury Press, 1995.
62. RODRIGUES, P. M. M; RÚBIA, A. Testing for Structural Breaks in Variance with Additive Outliers and Measurement Errors, *Fundación de las Cajas de Ahorros (FUNCAS)* , pp. —., 2006.
63. SANDRONI, P. *Novíssimo Dicionário de Economia*, São Paulo, Editora Best Seller, 2000.
64. SANSÓ, A.; ARAGÓ, V.; CARRION J. L. Testing for Changes in the Unconditional Variance of Financial Time Series, *Working Paper*, Department d' Economia Aplicada, Universitat de les illes Balears, 2003.

65. SANTOS, D. F. *Políticas Macroeconômicas e seus Efeitos sobre Importações de Lácteos no Brasil*. 121p. Tese (Doutorado em Ciências) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, 2004.
66. SMITH, D. R. Testing for Structural Breaks in GARCH Models. *Unpublished Working Paper*. Faculty of Business Administration, Simon Fraser University, 2004.
67. SOHN S. Y.; LIM, M. Hierarchical Forecasting Based on AR-GARCH Model in a Coherent Structure. *European Journal of Operational Research*. v. 176, p. 1033-1040, 2007.
68. TAYLOR, S. J. *Asset Price Dynamics Volatility, and Prediction*. Princeton and Oxford, 2005.
69. TSAY, R. S. *Analysis of Financial Times Series*, New York, Wiley, 2002.
70. ZHANG, D.; DICKINSON, D.; BARASSI, M. Volatility Switching In Shanghai Stock Exchange: Does Regulation Help Reduce Volatility. *Ecomod*, International Conference on Policy Modelling, 2005.
71. R: A Language and Environment for Statistical Computing, R Development Core Team, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2006, ISBN 3-900051-07-0. Disponível em < <http://www.R-project.org> >.

APÊNDICE

APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DO RETORNO

Para se chegar até a expressão:

$$X_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}), \quad t = 1, \dots, T. \quad (1)$$

Considere i como sendo a taxa efetiva de juros, R a taxa nominal de juros, r a taxa instantânea de juros, k o número de capitalizações ao longo de um período, X_t o retorno, VF o valor futuro, VP o valor presente, P_t o preço do ativo no presente e P_{t-1} o preço do ativo no passado.

O montante de uma unidade de tempo futuro com relação ao atual pode ser expresso da seguinte forma:

$$VF = VP(1 + i).$$

Logo,

$$1 + i = \frac{VF}{VP}.$$

$$\ln(1 + i) = \ln\left(\frac{VF}{VP}\right). \quad (2)$$

De acordo com Faro (1995), existe relação entre a taxa efetiva de juros e a taxa nominal de juros:

$$i = \left(1 + \frac{R}{k}\right)^k - 1. \quad (3)$$

Desta maneira, Faro (2005) descreve que à medida que o número de capitalizações, k , aumenta indefinidamente, a taxa nominal de juros, R , tende para a taxa instantânea de juros, r , conforme a seguir:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R = r.$$

De (3), resulta que:

$r = \lim_{k \rightarrow \infty} R = \lim_{k \rightarrow \infty} k[(1+i)^{1/k} - 1] = \ln(1+i)$. (Este resultado é obtido após se aplicar a regra matemática chamada de *L'Hôpital*).

Assim,

$$r = \ln(1+i). \quad (4)$$

A capitalização contínua pode ser obtida da seguinte forma:

$$VF = VP(1+i).$$

De (3), segue-se que:

$$VF = VP \left(1 + \frac{R}{k}\right)^k.$$

À medida que o número de capitalizações aumenta indefinidamente, tem-se que

$$VF = \lim_{k \rightarrow \infty} VP \left(1 + \frac{R}{k}\right)^k = VP \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{R}{k}\right)^k = VP e^R. \quad (\text{Este resultado é obtido após se}$$

aplicar a propriedade matemática de que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^1$ ou, conseqüentemente,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, \quad \text{sendo } a \text{ um número real}.$$

Deste modo,

$$VF = VP e^R. \quad (5)$$

Pode-se deduzir que, em um período t , obtém-se um montante futuro dado por:

$$VF = VP e^{Rt}. \quad (6)$$

Mas $VF = VP e^R$ pode ser reescrito como $\ln\left(\frac{VF}{VP}\right) = R$. Como foi sugerido por Faro (1995), para um número muito grande de capitalizações, a taxa nominal de juros tende a ser igual à taxa instantânea de juros e é possível obter a relação dada na equação (4). Então, conclui-se que:

$$r = \ln(1+i) = \ln\left(\frac{VF}{VP}\right), \quad \text{ou, analogamente, } X_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}). \quad (7)$$

APÊNDICE B - PROVAS DAS DISTORÇÕES DAS TAXAS DE REJEIÇÕES EMPÍRICAS DOS TESTES

Alguns destes lemas e proposições já estão demonstrados em Sansó, Aragó e Carrion (2003) e tiveram suas explicações mais pormenorizadas neste Apêndice.

B.1) Prova de que o estimador da variância dos quadrados dos retornos, onde $X_t \sim^{iid} N(0, \sigma^2)$, é dado por $\hat{\omega} = 2\hat{\sigma}^4$.

Inclán e Tiao (1994) mostraram que $\frac{C_T}{T} \xrightarrow{p} \sigma^2$. Sob suposição de independência e normalidade para o processo, ou seja, $X_t \sim^{iid} N(0, \sigma^2)$ e com quarto momento finito, $\hat{\eta}_4 = E(X_t - E(X_t))^4 = E(X_t^4) < \infty$, tem-se que a estatística de teste IT possui o seguinte estimador da variância dos quadrados dos retornos: $\hat{\omega} = 2\hat{\sigma}^4$. Sua derivação pode ser demonstrada por:

Prova

$$\hat{\omega} = \hat{\gamma}_0 = E[X_t^2 - E(X_t^2)]^2 = E(X_t^4) - E^2(X_t^2).$$

$$\text{Por definição } V(X_t) = E(X_t^2) - E^2(X_t) = E(X_t^2) = \hat{\sigma}^2.$$

A curtose é definida como: $\frac{E[X_t - E(X_t)]^4}{V^2(X_t)}$. Em variáveis aleatórias independentes e

gaussianas, a curtose é dada por: $\frac{E(X_t)^4}{V^2(X_t)} = 3 \Rightarrow \hat{\gamma}_0 = 3V^2(X_t) - E^2(X_t^2) =$

$$3\hat{\sigma}^4 - \hat{\sigma}^4 = 2\hat{\sigma}^4.$$

B.2) Prova das distorções das taxas de rejeições da estatística de teste IT .

Foi visto, no Capítulo 3, que:

$$T^{-1/2} \omega^{-1/2} (C_k - \frac{k}{T} C_T) \xrightarrow{d} W^*(\tau) \quad (1)$$

Prova

$$\omega^{1/2} [T^{-1/2} \omega^{-1/2} (C_k - \frac{k}{T} C_T)] \xrightarrow{d} \omega^{1/2} W^*(\tau), \text{ (multiplicando por } \omega^{1/2} \text{)}$$

$$T^{-1/2} (C_k - \frac{k}{T} C_T) \xrightarrow{d} \sqrt{\omega} W^*(\tau),$$

$$\frac{1}{\sqrt{T} \sqrt{2\sigma^4}} (C_k - \frac{k}{T} C_T) \xrightarrow{d} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\sigma^4}} W^*(\tau), \text{ (dividindo por } \sqrt{2\sigma^4} \text{)}$$

$$\sqrt{\frac{T}{2}} H_k \xrightarrow{d} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\sigma^4}} W^*(\tau), \quad H_k = \frac{C_k}{C_T} - \frac{k}{T},$$

$$IT \xrightarrow{d} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2\sigma^4}} W^*(\tau).$$

B.3) Prova das distorções das taxas de rejeições da estatística de teste k_1 .

Considere a equação (1), então:

Prova

$$\omega^{1/2} [T^{-1/2} \omega^{-1/2} (C_k - \frac{k}{T} C_T)] \xrightarrow{d} \omega^{1/2} W^*(\tau), \text{ (multiplicando por } \omega^{1/2} \text{)}$$

$$T^{-1/2} (C_k - \frac{k}{T} C_T) \xrightarrow{d} \sqrt{\omega} W^*(\tau),$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{C_k - \frac{k}{T} C_T}{\sqrt{\eta_4 - \sigma^4}} \xrightarrow{d} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\eta_4 - \sigma^4}} W^*(\tau), \text{ (dividindo por } \sqrt{\eta_4 - \sigma^4} \text{)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}} B_k \xrightarrow{d} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\eta_4 - \sigma^4}} W^*(\tau), \quad B_k = \frac{C_k - \frac{k}{T} C_T}{\sqrt{\eta_4 - \sigma^4}},$$

$$k_1 \xrightarrow{d} \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\eta_4 - \sigma^4}} W^*(\tau).$$

APÊNDICE C – FIGURA E TABELAS DAS ESTATÍSTICAS DE AVALIAÇÕES DO MODELO AJUSTADO PARA OS RETORNOS DO DOW JONES

Modelo GARCH(1,1)

TABELA C.1 - Modelo estimado sob suposição de resíduos com distribuição de probabilidade *t de student* com 120 graus de liberdade .

	Coefficiente	Erro-padrão	Estatística	P-valor
w	$1,06 \times 10^{-5}$	$4,72 \times 10^{-6}$	2,252	0,0243
α	0,108	0,025	4,292	0,000
β	0,845	0,036	23,422	0,000

TABELA C.2- Medidas de qualidade do ajuste: Akaike (AIC) e Schwarz (BIC).

Critérios	Valor
AIC	5,678
BIC	5,653

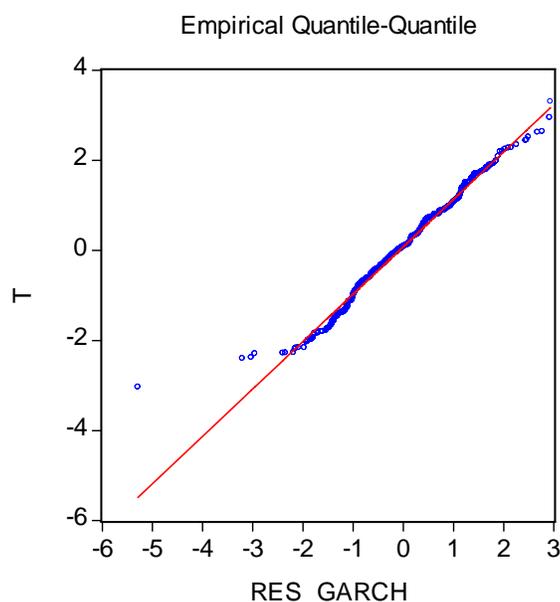


Figura C.1- Qqplot dos quantis dos resíduos de um GARCH (1,1), apresentados no eixo x , contra os quantis de uma distribuição *t de student* com 120 graus de liberdade, apresentados no eixo y .

TABELA C.3 -Verificação de aderência dos resíduos à distribuição de probabilidade *t de student* com 120 graus de liberdade por meio do teste de Kolmogorov-Smirnov

Estatística	0,057	Valor crítico	0,061
-------------	-------	---------------	-------

TABELA C.4- Teste Multiplicador de Lagrange para os resíduos padronizados com 10 defasagens.

Estatística F	1,569	P-valor	0,112
Estatística Qui-quadrado	15,547	P-valor	0,113

TABELA C.5 -Teste BDS aplicado aos resíduos padronizados.

Dimensão	Estatística BDS	P-valor
2	-0,0009	0,196
3	-0,0016	0,288
4	$8,37 \times 10^{-6}$	0,997
5	0,0008	0,818
6	0,0009	0,836

Nota: Parâmetro de distância igual a 0,95.