

VILAR FIUZA DA CAMARA NETO

**CALIBRAÇÃO DE FONTES DE LUZ PONTUAIS  
BASEADA EM SOMBRAS**

Belo Horizonte — MG

Junho de 2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**CALIBRAÇÃO DE FONTES DE LUZ PONTUAIS  
BASEADA EM SOMBRAS**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciência da Computação.

VILAR FIUZA DA CAMARA NETO

Belo Horizonte — MG  
Junho de 2005

# Resumo

A maioria das pesquisas feitas sobre calibração de fontes de luz pontuais baseiam-se no modelo de fontes distantes, isto é, se propõem a determinar a direção de um iluminante localizado a uma distância infinita da cena. Esse modelo é conveniente principalmente para as aplicações baseadas na iluminação solar, mas revela-se inadequado quando os iluminantes estão em uma distância relativamente próxima da cena — situação comum em ambientes fechados, onde geralmente a claridade parte de um conjunto de lâmpadas localizadas a poucos metros do observador.

Este trabalho apresenta uma nova abordagem para a calibração de fontes de luz cuja principal vantagem está em considerar que as fontes pontuais são próximas (não distantes). Assim, o objetivo da calibração é recuperar não a direção, mas as coordenadas tridimensionais do ponto emissor de luz. O método proposto não faz qualquer restrição sobre as características das superfícies dos objetos, requer um conjunto mínimo de informações sobre a cena e é estatisticamente ótimo, no sentido de considerar as métricas de erro baseadas em um modelo realístico de propagação de ruídos. Em paralelo, o método também é capaz de realizar a reconstrução parcial da geometria da cena: são calculadas as coordenadas tridimensionais de alguns pontos-chave dos objetos, como extremidades e vértices.

Os testes realizados, tanto com simulações em computador quanto com cenas reais, comprovam a eficácia do método mesmo na presença de ruídos significativos. Além disso, o tempo requerido para a solução de uma instância do problema — na ordem de décimos de segundo, utilizando um computador pessoal comum — sugere que o método poderá ser utilizado em aplicações de tempo real.

# Abstract

Most researches done so far about punctual light sources are based on the model of directional sources, i.e., they determine the direction of an illuminant placed in an infinite distance from the scene. This model is convenient mainly for solar-light based applications, but turns out to be inadequate when the illuminants are relatively close to the scene — an indoor typical situation, where the illumination often arises from a set of lamps located a few feet from the observer.

In this work we propose a novel approach for this problem. Its main advantage is to consider that the sources aren't far from the scene. So, the objective is to retrieve the sources' 3-D coordinates instead of its direction. The proposed method doesn't care about object's surface properties (the so-called BRDF), is based on very little knowledge about the scene, and is statistically optimal, because error metrics follows a realistic noise-propagation model. In parallel, the method is able to perform partial scene reconstruction: it retrieves the 3-D coordinates of certain points of objects, such as vertexes and tips.

A series of tests were performed both with computer-generated simulations and real scenes. They prove that the method is precise even in presence of expressive noise. Besides, the average time spent to solve an instance of the problem — about tenths of a second in a common PC — suggests that the method can be used in real-time applications.

*Para minhas três gerações de alegrias:  
Meus pais, Araguacy e Vilar,  
minha esposa, Giselle,  
e meu filhote, Eduardo.*

# Agradecimentos

À minha esposa, Giselle Cordeiro, por todo o incentivo, dedicação e paciência ao longo de tantos anos, pelas alegrias vividas e por muitas outras ainda por vir, em especial com o nascimento do pequeno Eduardo.

Aos meus pais, Araguacy Camara e Vilar Camara Jr., por uma vida inteira de carinho e dedicação e por jamais me deixarem esquecer que a vida é calcada no esforço contínuo de trabalho e estudos.

Aos caros amigos Eduardo e Fabíola Nakamura, Maurício e Ingrid Figueiredo e José Pinheiro por terem ido muito além do apoio técnico e por representarem o verdadeiro sentido da amizade.

Ao professor e orientador Rodrigo Carceroni, peça fundamental para a realização desta dissertação, pela presença e suporte constantes em cada passo do desenvolvimento deste trabalho. Ao professor Mário Campos, pelas palavras de incentivo nas horas certas. Aos professores Antonio Loureiro e Newton Vieira, por todo o apoio pessoal oferecido na mudança para a cidade de Belo Horizonte.

Ao Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Minas Gerais (PPGCC/UFMG) pela excelência do curso oferecido e pelo esforço constante em oferecer aos alunos a melhor estrutura possível.

À Fundação Centro de Análise, Pesquisa e Inovação Tecnológica (FUCAPI) pelo apoio prestado na realização deste curso.

Por fim, estendo meus agradecimentos a todos aqueles que, direta ou indiretamente, me auxiliaram no progresso deste trabalho.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	1
1.2	Definições preliminares . . . . .	4
1.3	Objetivo do problema . . . . .	6
1.4	Formalização do problema . . . . .	8
1.4.1	Dados de entrada . . . . .	8
1.4.2	Incógnitas . . . . .	8
1.4.3	Restrições . . . . .	9
1.5	Linhas gerais da metodologia . . . . .	12
1.6	Contribuições . . . . .	12
1.7	Estrutura desta dissertação . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Trabalhos Relacionados</b>	<b>15</b>
2.1	Recuperação da direção de fontes pontuais distantes . . . . .	16
2.1.1	Métodos baseados em sombreado ( <i>shading</i> ) . . . . .	16
2.1.2	Métodos baseados em objetos poliédricos . . . . .	23
2.1.3	Métodos baseados em sombras . . . . .	23
2.1.4	Uso de alvos de calibração . . . . .	24
2.1.5	Análise de informações combinadas . . . . .	24
2.2	Recuperação das coordenadas de fontes pontuais próximas . . . . .	24
2.2.1	Análise de sombras . . . . .	25
2.2.2	Métodos baseados na imagem de objetos com geometria conhecida	25
2.2.3	Métodos baseados na aparência desejada da cena . . . . .	26
2.3	Recuperação de mapas de iluminação . . . . .	27
2.3.1	Análise de sombras . . . . .	27
2.3.2	Análise da reflectância de objetos . . . . .	28
2.4	Classificação e relevância do trabalho apresentado . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>32</b>
3.1	Questões geométricas . . . . .	32
3.1.1	Parâmetros de calibração da câmera . . . . .	32

3.1.2	Pontos da cena e da imagem . . . . .	35
3.1.3	Formação de sombras . . . . .	37
3.1.4	Barras e ocorrências . . . . .	37
3.1.5	Ocorrência e propagação dos ruídos . . . . .	43
3.2	Questões algorítmicas . . . . .	51
3.2.1	Algoritmo para o problema bidimensional . . . . .	52
3.2.2	Estimativas iniciais para o problema bidimensional . . . . .	52
3.2.3	Algoritmo para o problema tridimensional . . . . .	54
3.2.4	Estimativas iniciais para o problema tridimensional . . . . .	56
3.3	Aplicação da metodologia . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Experimentos</b>	<b>59</b>
4.1	Experimentos simulados . . . . .	59
4.1.1	Parâmetros da câmera e da fonte . . . . .	60
4.1.2	Objetos da cena . . . . .	61
4.1.3	Gerando instâncias do problema . . . . .	66
4.1.4	Organização dos experimentos . . . . .	67
4.2	Experimentos simulados em duas dimensões . . . . .	67
4.2.1	Parâmetros das instâncias geradas . . . . .	68
4.2.2	Exibição dos resultados . . . . .	68
4.2.3	Análise das simulações bidimensionais . . . . .	70
4.3	Experimentos simulados em três dimensões . . . . .	73
4.3.1	Grupos de simulações e parâmetros das instâncias geradas . . . . .	73
4.3.2	Geração dos resultados . . . . .	77
4.3.3	Exibição dos resultados . . . . .	78
4.3.4	Análise das simulações tridimensionais . . . . .	81
4.4	Experimentos reais . . . . .	94
4.4.1	Caso Real 1 . . . . .	95
4.4.2	Caso Real 2 . . . . .	98
4.4.3	Caso Real 3 . . . . .	99
4.4.4	Caso Real 4 . . . . .	100
4.5	Observações finais . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>105</b>
5.1	Conclusões . . . . .	105
5.2	Trabalhos futuros . . . . .	107
<b>A</b>	<b>Glossário de símbolos e convenções</b>	<b>110</b>
A.1	Convenções tipográficas . . . . .	110
A.2	Símbolos do alfabeto romano . . . . .	110

A.3	Símbolos do alfabeto grego . . . . .	112
A.4	Operadores relacionais . . . . .	114
<b>B</b>	<b>Resultados dos experimentos bidimensionais</b>	<b>115</b>
<b>C</b>	<b>Resultados dos experimentos tridimensionais</b>	<b>144</b>
C.1	Simulações gerais . . . . .	144
C.2	Simulações sobre a variação do comprimento da barra . . . . .	168
C.3	Simulações sobre a variação na riqueza da descrição de entrada . . . . .	187
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>212</b>

# Lista de Figuras

1.1	Modelo de câmara <i>pinhole</i> . . . . .	5
1.2	Obtenção de imagens para o algoritmo proposto . . . . .	7
1.3	Restrição fundamental da perspectiva (Restrição 1) . . . . .	9
1.4	Restrição de formação de sombras (Restrição 2) . . . . .	10
1.5	A constância no comprimento das barras não determina necessariamente a rigidez do objeto . . . . .	11
3.1	Convenção do sistema global de coordenadas . . . . .	33
3.2	Vetores unitários que definem a orientação da câmara . . . . .	33
3.3	Convenção do sistema de coordenadas na imagem . . . . .	34
3.4	Exemplo de um conjunto de imagens do objeto mais simples possível: uma barra reta de comprimento constante . . . . .	38
3.5	O conhecimento prévio de informações sobre a cena pode reduzir o número de incógnitas . . . . .	40
3.6	Medidas do paralelepípedo que serve de base para o exemplo de identificação de barras e ocorrências . . . . .	41
3.7	Exemplo de um conjunto de imagens do paralelepípedo da Figura 3.6 em várias posições . . . . .	41
3.8	Proposição do problema bidimensional . . . . .	45
4.1	Montagem adotada nos experimentos simulados . . . . .	61
4.2	Medidas dos desvios das estimativas bidimensionais . . . . .	68
4.3	Experimentos em 2D: exibição dos resultados de um grupo de testes com os mesmos parâmetros . . . . .	69
4.4	Desvios-padrão dos erros percentuais observados para experimentos sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ) . . . . .	71
4.5	Médias dos erros percentuais observadas para experimentos com ruídos ( $\sigma_N > 0$ ) . . . . .	71
4.6	Médias absolutas dos erros percentuais observadas para experimentos com ruídos ( $\sigma_N > 0$ ) . . . . .	72
4.7	Desvios-padrão dos erros percentuais observados para experimentos com ruídos ( $\sigma_N > 0$ ) . . . . .	72

4.8	Ocorrências em cadeia . . . . .	75
4.9	Grupo de simulações gerais em 3D: exibição dos resultados de um conjunto de testes com os mesmos parâmetros . . . . .	79
4.10	Grupo de simulações sobre a variação na riqueza da descrição de entrada em 3D: exibição dos resultados de um conjunto de testes com os mesmos parâmetros . . . . .	80
4.11	Desvios-padrão dos erros percentuais observados para as simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ) . . . . .	82
4.12	Médias absolutas dos erros percentuais observadas para as simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ) . . . . .	82
4.13	Erros médios quadráticos (RMS) observados para as simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ) . . . . .	83
4.14	Desvios-padrão dos erros percentuais observados para as simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ), desconsiderando as instâncias que convergiram para mínimos locais . . . . .	84
4.15	Médias absolutas dos erros percentuais observadas para as simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ) . . . . .	84
4.16	Erros médios quadráticos (RMS) observados para as simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ) . . . . .	85
4.17	Desvios-padrão dos erros percentuais observados para as simulações gerais com ruídos ( $\sigma_N > 0$ ) . . . . .	86
4.18	Erros médios quadráticos (RMS) observados para as simulações gerais com ruídos ( $\sigma_N > 0$ ) . . . . .	87
4.19	Desvios-padrão dos erros percentuais observados para as simulações de variação do comprimento da barra . . . . .	89
4.20	Médias dos erros percentuais observadas para as simulações de variação do comprimento da barra . . . . .	90
4.21	Erros médios quadráticos (RMS) observados para as simulações de variação do comprimento da barra . . . . .	90
4.22	Desvios-padrão dos erros percentuais da estimação de $\lambda$ , observados para as simulações de variação na riqueza da descrição do modelo . . . . .	92
4.23	Erros médios quadráticos (RMS) da estimação de $\lambda$ , observados para as simulações de variação na riqueza da descrição do modelo . . . . .	93
4.24	Exemplos de imagens reais capturadas . . . . .	95
4.25	Localização de pontos de interesse em uma imagem . . . . .	95
4.26	Localização de ocorrências em uma imagem . . . . .	96
4.27	Montagem adotada nos Casos Reais 1, 2 e 3 . . . . .	97
4.28	Montagem adotada no Caso Real 4 . . . . .	101

# Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros extrínsecos de calibração da câmera para as simulações . . . . .	61
4.2	Parâmetros intrínsecos de calibração da câmera para as simulações . . . . .	61
4.3	Parâmetros da fonte de luz . . . . .	61
4.4	Parâmetros adotados para definir a validade de pontos aleatórios . . . . .	63
4.5	Parâmetros para os experimentos em 2D . . . . .	68
4.6	Parâmetros para as simulações gerais em 3D . . . . .	74
4.7	Parâmetros para as simulações de variação de comprimento da barra em 3D . . . . .	74
4.8	Parâmetros para as simulações de ocorrências em cadeia em 3D . . . . .	76
4.9	Convergência das simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ) para resultados falsos (mínimos locais) e corretos . . . . .	83
4.10	Valores observados para o desvio-padrão percentual das simulações gerais com ruídos ( $\sigma_N > 0$ ) . . . . .	88
4.11	Parâmetros extrínsecos de calibração da câmera para os casos reais . . . . .	96
4.12	Parâmetros intrínsecos de calibração da câmera para os casos reais . . . . .	96
4.13	Parâmetros da fonte de luz para os Casos Reais 1, 2 e 3 . . . . .	97
4.14	Dados da cena para o Caso Real 1 . . . . .	97
4.15	Resultados do problema bidimensional para os Casos Reais 1, 2 e 3 . . . . .	97
4.16	Resultados do problema tridimensional para o Caso Real 1 . . . . .	98
4.17	Dados da cena para o Caso Real 2 . . . . .	98
4.18	Resultados do problema tridimensional para o Caso Real 2 . . . . .	99
4.19	Dados da cena para o Caso Real 3 . . . . .	100
4.20	Resultados do problema tridimensional para o Caso Real 3 . . . . .	100
4.21	Parâmetros da fonte de luz para o Caso Real 4 . . . . .	101
4.22	Dados da cena para o Caso Real 4 . . . . .	101
4.23	Resultados do problema bidimensional para o Caso Real 4 . . . . .	102
4.24	Resultados do problema tridimensional para o Caso Real 4 . . . . .	102

# Lista de Algoritmos

4.1	VERIFICA_SE_PONTO_É_VÁLIDO . . . . .	64
4.2	GERA_PONTO_VÁLIDO . . . . .	64
4.3	GERA_VETOR_UNITÁRIO . . . . .	65
4.4	GERA_OCORRÊNCIA . . . . .	65
4.5	GERA_DADOS_DE_OCORRÊNCIA . . . . .	66
4.6	GERA_OCORRÊNCIAS_EM_CADEIA . . . . .	75
4.7	GERA_DADOS_DE_OCORRÊNCIAS_EM_CADEIA . . . . .	75

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

A visão é um dos sentidos mais extraordinários do corpo humano, e sem dúvida é o mais importante meio para obtenção de informações sobre o que nos rodeia. Mais do que isso, a visão nos permite uma interação inteligente com o ambiente — um conceito amplo, que pode ser bem percebido, por exemplo, quando um simples relance permite que nos esquivemos de obstáculos enquanto nos movimentamos, ou pressintamos e evitemos situações de perigo. Evidentemente, a visão, neste sentido, não se refere simplesmente à capacidade de *captação* de imagens pela retina: aqui entra também a *interpretação* dessas imagens por parte do cérebro — um processo tão complexo que pouco se conhece a respeito, apesar de décadas de pesquisa nessa área.

Compreender o processo de interpretação das imagens tem consumido grandes esforços da ciência para que se possa, entre outros objetivos, implementar essa capacidade em sistemas computacionais. A Robótica, por exemplo, se beneficia dessas pesquisas para tornar os robôs *autônomos*, ou seja, capazes de realizar tarefas com níveis cada vez menores de interferência humana. Muitas aplicações recentes (a exploração das superfícies lunar e marciana por robôs remotos [Simmons et al., 1995; Hayati, 1996; Matijevic, 1996; Washington et al., 1999] e o desenvolvimento de aeronaves não-tripuladas e veículos autônomos [Kelly e Stentz, 1998a,b; Broggi et al., 2000; McDonald et al., 2001; Bertozzi et al., 2002], para citar alguns exemplos) necessitam de uma certa autonomia para tomar decisões, simplesmente porque o ser humano não está presente ou não teria tempo para reagir diante de situações de risco.

Dotar o computador de um certo sentido de “visão” é um problema frequentemente associado à Robótica, mas há outras áreas da computação beneficiadas pelas pesquisas nessa área: a interpretação de imagens médicas, como raios-X e tomografias, em busca de traços de moléstias; o desenvolvimento de sistemas de segurança, na identificação de rostos ou impressões digitais; a contagem do fluxo de pessoas em terminais de ônibus e metrô, para fins de planejamento urbano; o controle de qualidade em linhas de

montagem, pela inspeção visual dos produtos — todos são ramos de atividades que podem ser substancialmente auxiliados por sistemas computacionais, se estes forem capazes de simular, em algum grau, o processo de inteligência que está por trás da nossa capacidade de enxergar e entender a realidade.

Entretanto, implementar em computador esse processo inteligente é uma tarefa desafiadora, pois reúne áreas tão diversas quanto a química, a biologia, a psicologia e a cognição. O homem está muito longe de simular a inteligência simplesmente porque ainda não foi capaz de compreendê-la. Não obstante, isto não impede que várias técnicas computacionais tenham sido desenvolvidas e combinadas para reproduzir algumas funções de reconhecimento e interpretação, ainda que num grau primitivo e com objetivos bem específicos. Essas pesquisas compõem a chamada *Visão Computacional*, um ramo relativamente recente dentro da Ciência da Computação: por meio de câmeras filmadoras ou fotográficas, que constituem os “olhos” do computador, essas técnicas visam extrair informações que descrevem o ambiente que está sendo observado. Em outras palavras, visam “gerar uma descrição simbólica da cena a partir de uma ou mais imagens” [Horn, 1986].

A primeira dificuldade da Visão Computacional está relacionada às limitações inerentes a qualquer câmera. Por melhor que seja sua qualidade, ela possui uma resolução finita de captação; as lentes introduzem distorções na imagem, às vezes difíceis de serem modeladas; e outros fatores, como flutuações eletromagnéticas e algoritmos de compressão de imagens, introduzem artefatos indesejáveis. Esses são os chamados *ruidos* e qualquer algoritmo que trata com imagens deve levá-los em consideração. Como princípio geral, um dado de entrada nunca deve ser tratado como se fosse exato, mas sim como sendo uma pista sobre a informação original.

Uma das principais complexidades da Visão Computacional está no fato de que as câmeras comuns não são capazes de captar diretamente a estrutura tridimensional da cena. Por via de regra as imagens geradas são bidimensionais, o que significa que a medida de profundidade é simplesmente perdida no processo de aquisição. Isso torna os problemas desta ciência não-triviais, no sentido de que é necessário pesquisar e combinar outras fontes de informação para que seja possível até mesmo modelar alguma solução, sob o ponto de vista matemático. Ainda assim, tais soluções geralmente estão sujeitas a uma série de restrições e não raro envolvem algumas heurísticas — de modo que alguns resultados calculados podem ser completamente irrealis.

Várias técnicas utilizadas para recuperar o sentido de profundidade (e, por conseguinte, a geometria tridimensional do ambiente) tentam reproduzir alguns mecanismos engenhosos usados pelo sistema orgânico de visão. Alguns exemplos: o uso de mais de uma câmera em posições diferentes é chamado de *visão estéreo*, onde as informações fornecidas por cada câmera são cruzadas, em um processo análogo ao casamento das imagens captadas por um par de olhos. Quando se usa somente uma câmera, há várias

soluções propostas: uma abordagem comum é a análise da geometria das sombras ou das nuances de sombreamento (isto é, dos gradientes entre claro e escuro), que são as técnicas chamadas de *shape-from-shading* [Brooks e Horn, 1985; Horn e Brooks, 1989; Worthington e Hancock, 1997; Zhang et al., 1999; Ikeda, 2004]; há as que analisam padrões repetidos de formas e cores, que são as soluções de *shape-from-texture*.

Cada uma dessas propostas têm suas limitações e desvantagens. As soluções por visão estéreo tendem a ser caras (pois requerem pelo menos duas câmeras) e de montagem complicada; as abordagens por *shape-from-shading* se baseiam em uma série de restrições sobre a suavidade das superfícies e não são apropriadas para cenas com muitas descontinuidades; as técnicas de *shape-from-texture*, por sua vez, requerem a ocorrência de padrões ou texturas com um certo nível de contraste, o que as tornam inadequadas para a captação de cenas com cores uniformes e superfícies lisas.

Uma abordagem interessante e menos sujeita a essas limitações baseia-se em um princípio chamado de *iluminação estruturada*: conhecendo as características da fonte que ilumina o ambiente observado (suas coordenadas, basicamente), é possível traçar algumas relações matemáticas entre as sombras produzidas, a imagem captada e a geometria tridimensional da cena. Algumas técnicas efetivamente alteram a fonte de iluminação — por exemplo, cobrindo-a parcialmente com algum obstáculo [Asada et al., 1988; Vuytsteke e Oosterlinck, 1990; Guisser et al., 1992; Horn e Kiryati, 1999; Bouguet e Perona, 1999], ou iluminando a cena com feixes planos de *laser* [Agin e Binford, 1976; Turk e Levoy, 1994; Levoy et al., 2000; Haverinen e Rönning, 2000; Teutsch et al., 2004] — para observar o comportamento das sombras e das regiões iluminadas e recuperar a estrutura do ambiente.

Entretanto, já que o princípio da iluminação estruturada se baseia no conhecimento da posição da fonte de luz, as suas coordenadas devem ser inicialmente conhecidas: ou a cena é preparada pela colocação da fonte luminosa em uma posição predeterminada ou, o que é mais comum, a fonte está em um local arbitrário e é necessária uma etapa preliminar para se descobrir a sua posição. Esta etapa é conhecida por *calibração da fonte de luz*<sup>1</sup>.

Este trabalho propõe um novo método para a recuperação da geometria tridimensional de objetos, baseado no princípio da iluminação estruturada: entretanto, ao invés de depender das coordenadas da iluminação como pré-requisito, o método tem por objetivo determinar simultaneamente a estrutura tridimensional da cena e a calibração da fonte de luz, com base na localização, na imagem, de certos pontos-chave dos objetos, como vértices em objetos poligonais, e das sombras correspondentes. As relações geométricas existentes entre todos esses pontos serão apresentadas e estudadas ao longo

---

<sup>1</sup>Na realidade, o termo é mais genérico e designa “o processo de obtenção dos parâmetros que descrevem uma fonte luminosa”, que podem incluir a sua intensidade ou cor, por exemplo. No entanto, neste trabalho o termo se refere à determinação de suas coordenadas espaciais.

desta dissertação. O método proposto trata a ocorrência de ruídos na imagem de modo a produzir, dentro das limitações do sistema de aquisição, os melhores resultados sob o ponto de vista estatístico.

Como observação final, é interessante ter em mente que, mesmo com a estrutura da cena recuperada, a calibração da fonte de luz pode ser posteriormente utilizada como entrada para outras técnicas (como as de *shape-from-shading*, que dependem dessa informação) para refinar e complementar as informações obtidas por este método.

## 1.2 Definições preliminares

Para que se possa entender o método proposto, é necessário primeiramente compreender determinados conceitos que serão utilizados exhaustivamente ao longo deste trabalho.

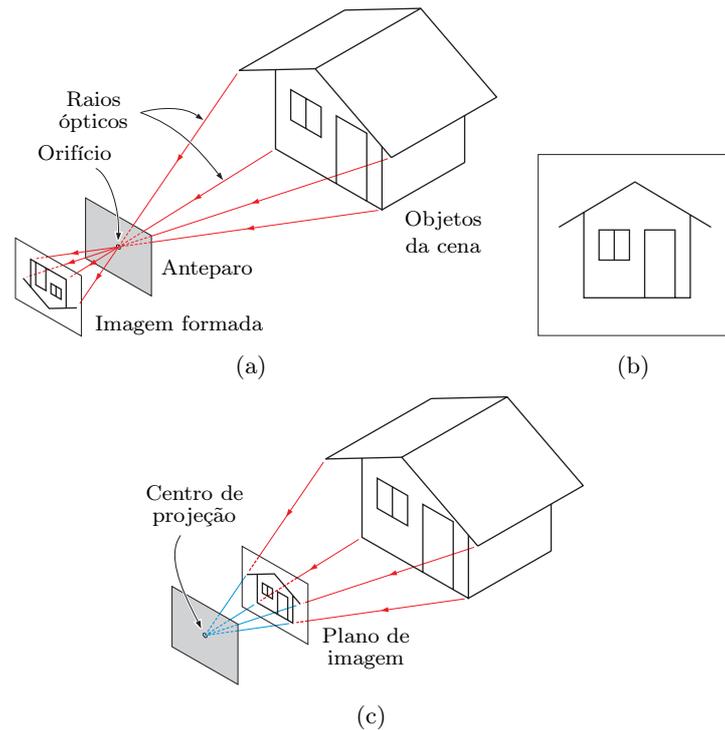
Uma *câmera* é um dispositivo que, por meio de componentes mecânicos e ópticos, capta parte dos raios luminosos de uma cena e projeta-os sobre uma superfície sensora, geralmente plana (como um filme fotográfico ou um dispositivo eletrônico). Esta projeção pode ser vista, em termos matemáticos, como sendo uma função de mapeamento de pontos com coordenadas tridimensionais (no escopo da cena) para pontos com coordenadas bidimensionais (no escopo da imagem formada).

As *câmeras projetivas* são aquelas em que esse mapeamento corresponde a uma transformação projetiva. Nesse tipo de transformação, as dimensões das projeções dos objetos são inversamente proporcionais à distância entre a câmera e esses objetos. Dispensados os rigores matemáticos, o fato é que quanto mais distante um objeto está da câmera, menor é a sua imagem. É o mesmo efeito que percebemos na visão humana.

Na prática, uma câmera projetiva pode ser construída segundo um modelo chamado de câmera *pinhole*, ou câmera de orifício. Neste modelo, um anteparo com um pequeno orifício é colocado a uma certa distância na frente da superfície sensora, de modo que os únicos raios luminosos a atingirem a superfície são os que passam através do orifício (Figura 1.1(a)). Forma-se, então, uma imagem invertida (vista na Figura 1.1(b) sem inversão).

Pela observação do modelo da câmera *pinhole*, fica claro que a distância entre o orifício e o plano de formação de imagem (chamada *distância focal*) apenas determina um fator de escala para a imagem gerada. Em particular, se pensarmos em um modelo teórico onde o plano de projeção da imagem se encontra *na frente* do orifício — isto é, entre este e a cena, como ilustrado na Figura 1.1(c) —, então teríamos uma câmera capaz de captar a imagem de forma não invertida. De fato, vários estudiosos preferem modelar deste modo, para não ter que lidar com as mudanças de sinal das coordenadas locais advindas da inversão da imagem, preservando também a distância focal (com sentido invertido), para manter inalterado o fator de escala.

Convenciona-se chamar o plano onde a imagem é formada de *plano de imagem* e



**Figura 1.1.** Modelo de câmera *pinhole*: (a) Os raios luminosos passam pelo orifício e são projetados sobre a superfície sensora, formando a imagem invertida; (b) Imagem observada (sem inversão); (c) Modelo virtual comumente adotado, onde a imagem, não invertida, é formada antes do orifício.

o orifício de convergência dos raios luminosos de *centro de projeção*. A distância entre um ponto da cena e o centro de projeção será chamada de *profundidade* deste ponto. Os raios de luz que partem da cena em direção ao centro de projeção são chamados de *raios ópticos*.

Já maioria das câmeras fotográficas e filmadoras convencionais, encontradas em qualquer loja, possuem uma construção diferente do modelo *pinhole*: em geral são constituídas por um conjunto de lentes que concentra vários raios ópticos sobre cada ponto da imagem e de um mecanismo regulador da abertura que controla a quantidade de luz captada. Uma câmera convencional não segue exatamente o modelo projetivo, por causa das distorções geométricas e aberrações cromáticas causadas pelas lentes e do efeito de desfocalização percebido na imagem de pontos que estão fora da profundidade de campo, entre outros fatores. Não obstante, considera-se que as câmeras convencionais aproximam de maneira razoável o modelo projetivo, especialmente se suas distorções dióptricas forem corrigidas pelo tratamento da imagem gerada.

Na seção anterior, o processo de calibração de fontes de luz foi convencionado como sendo “o processo de obtenção dos parâmetros que descrevem uma fonte luminosa”. De maneira similar, muitas vezes é necessário realizar a *calibração da câmera* [Tsai, 1987; Zhang, 2000; Bouguet, 2005], cuja definição é análoga: visa determinar os parâmetros

que descrevem uma câmera. Tais parâmetros dependem do modelo de câmera adotado, mas costumam ser divididos em dois grupos: os *parâmetros extrínsecos*, que se referem à pose da câmera (posição espacial e orientação); e os *parâmetros intrínsecos*, relacionados às características físicas e mecânicas do equipamento: distância focal, resolução espacial (tamanho dos pixels ou dos elementos sensores), coordenadas do centro da imagem, fatores de distorção de imagem (causada por imperfeições nas lentes), etc.

Em conjunto, os parâmetros da câmera permitem determinar o pixel da imagem correspondente a um ponto da cena. Em outras palavras, permitem modelar o processo de imageamento da cena. Em termos matemáticos, é possível definir uma transformação de pontos tridimensionais da cena em pontos bidimensionais da imagem: esta é chamada de *transformação projetiva*.

A transformação projetiva pode ser vista também como uma relação biunívoca entre raios ópticos e pontos da imagem, já que qualquer ponto de um raio óptico é projetado sobre o mesmo ponto na imagem<sup>2</sup>. Sob este ponto de vista, é possível estabelecer também, de maneira trivial, uma relação inversa onde, a partir das coordenadas de um ponto da imagem, se obtém o raio óptico correspondente. Neste trabalho, esta será chamada de *transformação inversa*.

### 1.3 Objetivo do problema

O objetivo do método é resumido na seguinte frase:

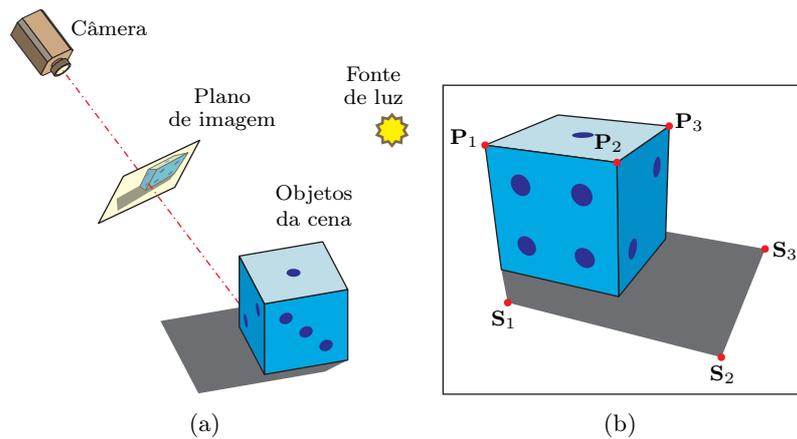
*Dado um conjunto de imagens de uma cena, obtidas com uma câmera fixa calibrada, onde se podem localizar as projeções de algumas barras de comprimento fixo e de suas respectivas sombras geradas por uma única fonte de luz pontual sobre uma superfície plana, o método tem por objetivo recuperar, ao mesmo tempo, as coordenadas tridimensionais dos extremos das barras e da localização da fonte luminosa.*

Como o método é baseado no princípio da iluminação estruturada, certas relações serão construídas entre alguns pontos da cena (os pontos-chave) e suas respectivas sombras. Evidentemente, para que isto seja possível é necessário que tanto os pontos-chave quanto as sombras estejam visíveis na imagem (isto é, dentro dos limites do sensor e não oclusas por outros objetos). A Figura 1.2 apresenta uma montagem típica para o problema.

O termo “barra”, utilizado na definição do problema, refere-se a qualquer par de pontos da cena cuja distância real (tridimensional) seja constante. O objeto que gerou a imagem não precisa ser realmente composto por um conjunto de peças retas: *qual-*

---

<sup>2</sup>Esta definição não leva em consideração efeitos de iluminação global que podem ocorrer na cena, como a refração ou a reflexão.



**Figura 1.2.** Obtenção de imagens para o algoritmo proposto: (a) A câmera é posicionada de modo a enquadrar vários pontos-chave dos objetos da cena, como vértices ou extremidades, e as sombras correspondentes; (b) Imagem observada, destacando os pontos-chave ( $\mathbf{P}_n$ ) e as suas sombras ( $\mathbf{S}_n$ ).

quer par de pontos do objeto, como vértices e extremidades, que possa ser observado nas imagens pode ser chamado de “barra”, contanto que a distância entre os pontos permaneça fixa.

Por exemplo: na Figura 1.2(b), sabe-se que a distância entre os vértices  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  é constante, assim como a distância entre  $\mathbf{P}_2$  e  $\mathbf{P}_3$ . Portanto, a aresta correspondente ao par  $\mathbf{P}_1$ – $\mathbf{P}_2$  (que une as faces  $\square$  e  $\square$ ) é uma barra e a aresta correspondente ao par  $\mathbf{P}_2$ – $\mathbf{P}_3$  (que une as faces  $\square$  e  $\square$ ) é outra barra. Em um conjunto de imagens desse objeto em várias posições, eventualmente essas mesmas barras podem ser observadas. (Na realidade, para o método apresentado neste trabalho basta que as extremidades das barras sejam observáveis: o resto das barras pode estar ocluído.)

Entretanto, no exemplo da Figura 1.2(b), há uma outra maneira de descrever as mesmas arestas — igualmente correta, porém mais precisa: já que, por definição, uma barra é “qualquer par de pontos cuja distância seja constante”, e dado que se conhece *a priori* que os comprimentos das arestas são coincidentes (pois se trata de um cubo), pode-se dizer que tanto os pares  $\mathbf{P}_1$ – $\mathbf{P}_2$  quanto  $\mathbf{P}_2$ – $\mathbf{P}_3$  correspondem a uma única barra, observada em duas posições diferentes.

Em resumo, a cena de uma instância do problema é constituída por quatro elementos principais:

1. Uma câmera fixa;
2. Uma fonte de luz pontual, também fixa;
3. Um ou mais objetos, cujas posições variam em cada imagem adquirida pela câmera, de modo que se possa identificar as extremidades de barras (conforme a definição descrita anteriormente);
4. Uma superfície plana, sobre a qual as sombras dos objetos são projetadas.

## 1.4 Formalização do problema

Para que se estabeleça uma abordagem formal de qualquer problema matemático, é necessário definir com clareza:

1. os *dados de entrada*: as informações disponíveis *a priori*;
2. as *incógnitas*: as informações desconhecidas e relevantes para a reconstrução da cena;
3. as *restrições*: as relações matemáticas capazes de estabelecer um número suficiente de restrições sobre as incógnitas para tornar o problema tratável.

Esses itens serão apresentados nas subseções seguintes.

### 1.4.1 Dados de entrada

Como o método é baseado nas coordenadas das projeções de certos pontos-chave e pontos de sombra na imagem, as coordenadas bidimensionais dessas projeções, em pixels, são parte dos dados de entrada. Este trabalho não trata da localização desses pontos-chave — o que pode ser feito, por exemplo, por métodos de detecção de quinas ou de bordas [Ballard e Brown, 1982; Horn, 1986].

O método também se baseia no conhecimento das barras, isto é, de pares de pontos que mantêm sua distância constante em todas as imagens. Observe que o valor da distância não precisa ser conhecido: apenas o fato de que ela é constante entre cada par de pontos selecionados.

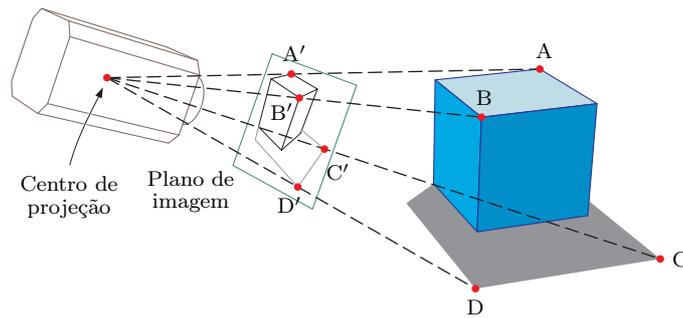
Finalmente, a câmera deve estar calibrada em relação à superfície sobre a qual as sombras são projetadas. Isto quer dizer que (a) os parâmetros intrínsecos da câmera são conhecidos e (b) a pose (posição e orientação) da câmera em relação à superfície é conhecida. Este trabalho também não trata dos métodos de calibração de câmera, que são largamente estudados e bastante precisos<sup>3</sup>.

### 1.4.2 Incógnitas

O que se deseja buscar são as coordenadas tridimensionais dos pontos da cena. Posto desta maneira, a primeira impressão é a de que há três incógnitas escalares para cada ponto que se deseja recuperar (uma para cada coordenada  $x$ ,  $y$  e  $z$ ), mas felizmente o problema é mais restrito. De fato, como a calibração da câmera é conhecida *a priori*, a transformação projetiva inversa nos fornece o raio óptico correspondente a cada ponto — restando saber, ao longo desta reta, a posição do ponto da cena, ou a sua *profundidade* em relação ao centro de projeção. Isto nos dá uma incógnita escalar para cada ponto.

---

<sup>3</sup>O método de calibração utilizado neste trabalho é uma implementação baseada no trabalho de Tsai [1987].



**Figura 1.3.** Restrição fundamental da perspectiva (Restrição 1): cada ponto da cena ( $A, B, C, \dots$ ), sua projeção sobre o plano de imagem ( $A', B', C', \dots$ ) e o centro de projeção são colineares.

A posição tridimensional dos pontos de sombra também é importante — mas não é desconhecida, pois pode-se obter trivialmente a interseção entre cada raio óptico de sombra e o plano de projeção de sombras.

As coordenadas da fonte de luz são essenciais para estabelecer as relações entre pontos e sombras, portanto entram na lista de incógnitas. Aqui há de fato três novas incógnitas escalares (a tripla de coordenadas espaciais).

Finalmente, o comprimento de cada barra é desconhecido e deve ser determinado para o fechamento das equações; portanto, há uma incógnita adicional para cada barra considerada.

### 1.4.3 Restrições

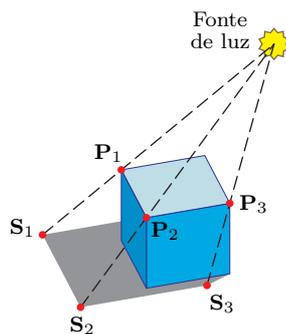
A fim de determinar de forma unívoca os valores de todas essas variáveis, é necessário pelo menos um número igual de restrições matemáticas. No presente trabalho, tais restrições são derivadas de algumas hipóteses a respeito da cena, que serão apresentadas e discutidas a seguir.

**Restrição 1 (Restrição fundamental da perspectiva):** *Cada ponto da cena (inclusive de sombra), o respectivo ponto no plano de imagem e o centro de projeção são colineares.*  $\square$

A Figura 1.3 apresenta um exemplo ilustrando a colinearidade entre alguns pares de pontos e o centro de projeção. Observe que a colinearidade é verdadeira para qualquer ponto da cena e sua projeção correspondente: ela não se restringe apenas aos vértices marcados.

A restrição fundamental da perspectiva é a base para qualquer algoritmo que estabeleça relações entre pontos da cena e de imagens geradas por câmeras projetivas<sup>4</sup>,

<sup>4</sup>A restrição também é adequada para câmeras ortográficas, se for considerado que o centro de projeção está em um ponto no infinito.



**Figura 1.4.** Restrição de formação de sombras (Restrição 2): cada reta formada por um ponto da cena e por sua sombra ( $P_1-S_1$ ,  $P_2-S_2$ ,  $P_3-S_3$ ) está alinhada com a fonte de luz.

tanto no sentido direto da projeção (geração de imagens a partir da cena) quanto no sentido inverso (análise da cena a partir de imagens).

Os desdobramentos desta restrição nos dois casos valem uma pequena análise: o processo projetivo direto (da cena para a imagem) consiste em determinar o raio óptico correspondente a cada ponto da cena e calcular sua interseção com o plano de imagem. Pontos da cena pertencentes ao mesmo raio óptico geram o mesmo ponto na imagem; desta maneira, a projeção pode ser compreendida como uma relação biunívoca entre raios ópticos e pontos da imagem. Por isto mesmo, ao tratar do processo inverso (da imagem para a cena) pode-se determinar o raio óptico que corresponde a um ponto na imagem, mas é impossível recuperar a profundidade do ponto original da cena apenas com base nesta restrição.

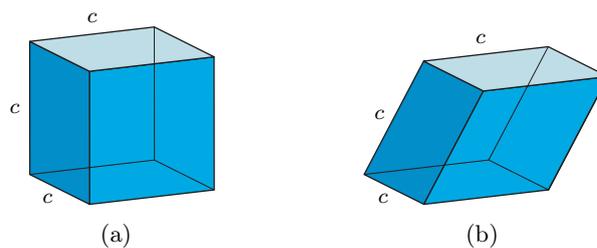
Em resumo, a Restrição 1 fornece informações importantes sobre a cena, mas não é suficientemente restritiva para se chegar à solução do problema proposto.

**Restrição 2 (Restrição de formação de sombras):** *A fonte de luz, cada ponto da cena e a respectiva sombra são colineares.*  $\square$

Esta restrição, ilustrada na Figura 1.4, é o fundamento dos algoritmos baseados em iluminação estruturada, onde são estabelecidas relações geométricas entre a iluminação, os objetos e as sombras.

O uso desta restrição neste trabalho impõe certas limitações sobre a montagem da cena, a pose da câmera e as características da iluminação. Antes de mais nada, a fonte de luz deve se aproximar do modelo pontual (onde a fonte da iluminação é um único ponto), senão o próprio conceito de “colinearidade” perde o sentido. Além disso, para que a iluminação estruturada possa ser analisada no domínio das imagens geradas, deve ser possível identificar na imagem a correspondência entre pontos dos objetos e das sombras (conforme ilustrado na Figura 1.2(b)).

A restrição de formação de sombras não é suficiente para fixar uma solução única para o problema. Esta restrição tem por objetivo específico estabelecer uma relação



**Figura 1.5.** A constância no comprimento das barras não determina necessariamente a rigidez do objeto: a descrição de um cubo como tendo arestas de mesmo comprimento  $c$  (a) é igual à descrição de um romboedro com o mesmo comprimento  $c$  das arestas (b).

entre as incógnitas tratadas na Restrição 1 — a profundidade dos pontos da cena — e a fonte de luz, cujas coordenadas surgem agora como incógnitas.

A restrição que estabelece uma relação direta entre as profundidades dos pontos é vista a seguir:

**Restrição 3 (Restrição de constância do comprimento das barras):** *Para cada par de pontos correspondentes à mesma barra, a distância (o comprimento da barra) é constante.*  $\square$

Vista de outra maneira, esta restrição determina que as barras são inelásticas: se um par de pontos forma uma barra, então a sua distância é sempre a mesma, ainda que os objetos sejam observados em posições diferentes em cada imagem.

Esta restrição deve ser bem compreendida, pois ela não impõe necessariamente que a cena ou os objetos sejam rígidos. De fato, ela permite que os objetos sejam articulados ou que a cena seja composta por objetos que se movimentam de maneira totalmente independente entre si: é o que se convencionou chamar de cena *rígida por partes*.

Em particular, é interessante notar que a Restrição 3 não impõe constância dos *ângulos* entre as barras. Por exemplo, a Figura 1.5 ilustra um objeto definido como tendo as 12 arestas de comprimento fixo  $c$ . Descrito dessa maneira, o objeto tanto pode ser um cubo (Figura 1.5(a)) quanto um romboedro (Figura 1.5(b)). A descrição não é suficiente para evitar que as barras sejam articuladas.

No escopo deste trabalho, a maneira mais completa possível de especificar que um objeto é rígido é definir que *todas* as combinações de pares de pontos formam barras. Não obstante, deve-se observar as limitações impostas para a Restrição 2: em particular, um ponto somente poderá ser usado como dado de entrada se a sua sombra também puder ser identificada na imagem. Além disso, embora não seja obrigatório que cada barra seja identificada em todas as imagens, certas condições matemáticas devem ser respeitadas para evitar a instabilidade no sistema de equações que será montado. Como regra geral, uma barra somente deverá ser usada no problema se ela puder ser identificada pelo menos duas vezes no conjunto de imagens.

## 1.5 Linhas gerais da metodologia

O método proposto é dividido em duas partes: na primeira trabalha-se estritamente no domínio da imagem, e na segunda o problema é tratado em três dimensões. Esta abordagem permite que a recuperação das coordenadas da fonte de luz seja feita de maneira bem mais simples.

Pode-se considerar que a fonte de luz, como qualquer ponto da cena, também pode ser projetada no plano de imagem e possui suas respectivas coordenadas bidimensionais em pixels, que podem extrapolar os limites da imagem. Ora, como consequência da Restrição 1, a Restrição 2 também se aplica no domínio da imagem, ou seja: as projeções (na imagem, em pixels) da fonte de luz, de cada ponto de cena e da respectiva sombra são colineares.

Essa transferência da restrição de formação de sombras para o plano de imagem nos permite montar um sistema de equações capaz de determinar as coordenadas bidimensionais da projeção da fonte de luz. Neste sistema, o número de incógnitas é fixo (2 incógnitas, que são as coordenadas procuradas) e há uma restrição para cada par de ponto/sombra projetados; portanto, o sistema se torna determinado com apenas dois pares localizados na imagem, e torna-se sobredeterminado para um número maior de pares.

Calculada a projeção da fonte de luz, a sua posição tridimensional pode ser tratada exatamente como qualquer ponto da cena, isto é: obtém-se o seu raio óptico pela transformação inversa e a incógnita passa a ser a sua profundidade. Portanto, para a segunda parte do método de resolução — a reconstrução tridimensional —, temos o seguinte conjunto de incógnitas: (a) a profundidade de cada ponto da cena; (b) a profundidade da fonte de luz; e (c) o comprimento de cada barra.

A Restrição 2 (de formação de sombras) e a Restrição 3 (de constância do comprimento das barras) são então utilizadas para relacionar as incógnitas do problema em uma série de equações: a Restrição 2 estabelece uma relação entre a profundidade da fonte de luz e a profundidade de cada ponto de cena, e a Restrição 3 relaciona o comprimento de cada barra com a profundidade de seu par de pontos.

Isto posto, todo o trabalho está na montagem e resolução dos sistemas de equações. Em particular, nenhum dos sistemas de equações é linear; portanto, é necessário convertê-los em problemas de otimização cujo objetivo é minimizar funções de erro bem definidas. O Capítulo 3 apresenta um estudo detalhado das equações envolvidas no problema e a abordagem de otimização proposta.

## 1.6 Contribuições

Esta dissertação é uma evolução do método apresentado nos trabalhos de Bouguet e Perona [1997, 1998, 1999]. O algoritmo apresentado pelos autores também

trata da calibração de uma fonte de luz pontual baseada em pontos da cena e suas respectivas sombras, porém usa uma abordagem mais simples e restritiva, descrita a seguir:

Por meio de uma câmera, obtém-se várias imagens de um objeto reto — um bastão ou um lápis, por exemplo — posicionado perpendicularmente a uma mesa, de modo que uma de suas extremidades repouse sobre a superfície. As coordenadas da fonte de luz são então calculadas com base em relações geométricas entre as extremidades do bastão e de sua sombra projetada sobre a mesa.

Esse método, embora bastante prático — foi desenvolvido para que pudesse ser reproduzido em qualquer residência ou escritório —, apresenta uma série de restrições: entre elas, o comprimento do objeto deve ser previamente conhecido e o usuário deverá posicioná-lo de maneira rigorosamente perpendicular à superfície. A principal falha, porém, não é de ordem prática, e sim matemática: o método não trata da modelagem da propagação dos ruídos, isto é, do fato de que os ruídos ocorrem principalmente devido à amostragem no plano sensor da câmera e dos métodos de obtenção de coordenadas de pontos de interesse na imagem. Assim, os autores adotam uma métrica de erros puramente geométrica (não baseada na propagação de ruídos), o que gera resultados não-ótimos sob o ponto de vista estatístico.

O método apresentado neste trabalho visa contornar as limitações dos trabalhos de Bouguet e Perona: não depende de informações prévias sobre as dimensões dos objetos, não requer que esses estejam em posições específicas e, o mais importante, adota uma abordagem matemática totalmente centrada no modelo de propagação de ruídos.

O método proposto vai um pouco mais além: lança as bases para a *reconstrução tridimensional da cena*. De fato, o algoritmo retorna, além das coordenadas da fonte de luz, as coordenadas tridimensionais de cada ponto de interesse e os comprimentos de cada barra da cena.

## 1.7 Estrutura desta dissertação

Este trabalho está organizado em vários capítulos, apresentados a seguir:

O Capítulo 2 realiza um apanhado dos trabalhos relacionados, organizando-os em uma taxonomia e apresentando os principais aspectos de cada um.

O Capítulo 3 define o método proposto com detalhes, lança as convenções necessárias para formalizá-lo matematicamente, apresenta as incógnitas, restrições e equações e descreve a abordagem utilizada para resolver o sistema.

O Capítulo 4 apresenta uma série de experimentos — tanto teóricos, feitos por simulações em computador, quanto práticos, por meio da análise de casos reais — efetuados sobre o método matemático desenvolvido.

Finalmente, o Capítulo 5 apresenta as conclusões sobre esta dissertação e lança sugestões para melhorias e extensões, que podem constituir trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Trabalhos Relacionados

O presente capítulo tem por objetivo apresentar uma revisão extensiva dos trabalhos publicados sobre calibração de fontes de luz. A revisão será classificada em uma taxonomia hierárquica, a fim de compreender a relação entre os trabalhos. No final do capítulo, o trabalho apresentado por esta dissertação será posicionado na estrutura e sua importância será discutida.

Embora o conceito de *calibração de fonte de luz* seja amplo — pode tratar da recuperação de diversos parâmetros da fonte iluminante, como a cor, intensidade, geometria, etc. —, os artigos levantados durante a revisão bibliográfica restringem-se apenas ao escopo desta dissertação: são trabalhos cujo objetivo específico é a recuperação da posição ou da orientação da fonte.

Historicamente, o primeiro algoritmo para detecção de fontes de luz foi apresentado no trabalho de Ullman [1975]. O objetivo do método é a análise dos níveis de intensidade dos pixels da imagem, a fim de detectar as áreas claras e determinar se elas correspondem ou não a fontes luminosas. Esse método é bastante limitado, pois trabalha estritamente no domínio da imagem: não é capaz de identificar qualquer fonte fora do campo visual da câmera. Além disso, não se propõe a recuperar a posição das fontes em relação à cena: a informação recuperada é a direção das fontes em relação ao centro de projeção, sem qualquer consideração sobre as profundidades.

Os trabalhos descritos a seguir não se restringem ao domínio da imagem (ou seja, recuperam informações no escopo da cena, tridimensionais) e não se limitam ao campo visual da câmera (são capazes de detectar fontes que não são diretamente observáveis na imagem). A taxonomia adotada neste capítulo é resumida na estrutura abaixo:

1. Recuperação da direção de fontes pontuais distantes
  - a) Métodos baseados em sombreamento (*shading*)
    - i. Abordagens estatísticas
    - ii. Abordagens probabilísticas
    - iii. Recuperação de *shape-from-shading*

- iv. Análise do sombreamento de superfícies conhecidas
  - v. Análise do contorno das imagens dos objetos
  - vi. Análise de fronteiras críticas
  - vii. Análise da especularidade das superfícies
  - viii. Análise do movimento de objetos
  - b) Métodos baseados em objetos poliédricos
  - c) Métodos baseados em sombras
  - d) Uso de alvos de calibração
  - e) Análise de informações combinadas
2. Recuperação das coordenadas de fontes pontuais próximas
- a) Análise de sombras
  - b) Métodos baseados na imagem de objetos com geometria conhecida
  - c) Métodos baseados na aparência desejada da cena
3. Recuperação de mapas de iluminação
- a) Análise de sombras
  - b) Análise da reflectância de objetos
    - i. Objetos com superfície espelhada
    - ii. Objetos com superfície lambertiana

As seções seguintes tratam detalhadamente de cada item desta estrutura.

## 2.1 Recuperação da direção de fontes pontuais distantes

A maioria dos métodos de recuperação de fontes de luz trata da estimação das direções de iluminação. Em geral, esses métodos assumem que as fontes estão relativamente distantes da cena, de modo que os raios luminosos gerados por cada fonte são considerados paralelos. Por este motivo, muitas vezes esses métodos se referem a “fontes de luz pontuais distantes” ou “fontes direcionais”. A iluminação solar direta é o melhor exemplo desse modelo.

Nessa modelagem, cada fonte de luz é identificada pela direção e sentido de seu feixe luminoso. Pode, portanto, ser representada por um par de ângulos (azimute e elevação, por exemplo) ou — o que é mais comum — por um vetor tridimensional, cujo módulo não possui significado ou representa outra característica da fonte, como sua intensidade luminosa.

### 2.1.1 Métodos baseados em sombreamento (*shading*)

Tais métodos baseiam-se no fato de que a luminosidade refletida pela superfície dos objetos depende do ângulo de incidência dos raios luminosos: a radiância é maior quando

a incidência se aproxima da normal da superfície.

Essa premissa é válida para superfícies com propriedades lambertianas ou com pouca especularidade. Objetos cuja aparência depende fortemente do ângulo de observação, como aqueles com superfície metálica ou espelhada, não são adequados aos métodos baseados em sombreamento. Além disso, os métodos geralmente assumem que as superfícies observadas são homogêneas (desprovidas de texturas ou de variações nas cores) e suaves (não possuem vértices ou descontinuidades: são superfícies planas ou curvas). Finalmente, os métodos baseados em sombreamento em geral assumem que há uma única fonte de iluminação.

### 2.1.1.1 Abordagens estatísticas

Essa abordagem não se baseia na análise de formas na imagem ou na recuperação de qualquer informação sobre a geometria da cena. Ela determina a direção de uma fonte distante com base em análises estatísticas sobre a intensidade dos pixels. Sustenta-se no fato de que as normais são isotropicamente distribuídas na cena, o que é uma conjectura apropriada para cenas com muitos objetos esféricos, mas inadequada para a maioria das cenas comuns, onde a presença de superfícies como o solo, paredes ou móveis estabelece a predominância de certas direções normais.

O trabalho de Pentland [1982] é historicamente considerado como sendo a primeira abordagem de detecção de fontes de luz externas ao campo visual. Requer que os objetos observados sejam convexos. Lee e Rosenfeld [1985, 1989] simplificam as equações do método de Pentland, restringindo a abordagem à imagem de uma esfera. Chojnacki et al. [1994] apresentam erros na abordagem original de Pentland e introduzem correções e melhorias sobre o método.

Zheng e Chellapa [1991a,b] apresentam uma abordagem diferente para a distribuição das normais das superfícies na cena, trazendo melhorias na precisão dos resultados em relação às demais abordagens estatísticas.

Gibbins [1994] realiza um estudo comparativo entre os trabalhos de Pentland, Lee e Rosenfeld e Zheng e Chellapa e apresenta novas técnicas para estimar a direção da fonte, mas assume que os objetos observados são aproximadamente esféricos ou pelo menos possuem uma silhueta redonda, o que limita bastante o seu uso. Também apresenta uma abordagem distinta, baseada em imagens de terrenos (*terrain-like surfaces*): superfícies localmente acidentadas, mas aproximadamente planas em larga escala.

O trabalho de Drew [1996] lança uma modificação sobre o método de Pentland, aproveitando certas restrições específicas do problema abordado (*orientation-from-color*) para melhorar a robustez do método original.

Essas abordagens puramente estatísticas foram abandonadas com o tempo, pois apóiam-se em hipóteses muito restritivas e geram resultados com erros grosseiros se a restrição da distribuição isotrópica das normais não for respeitada. De fato, o trabalho

de Gibbins et al. [1991] compara vários métodos estatísticos e conclui que, em certas circunstâncias, nenhum método é capaz de produzir resultados remotamente toleráveis.

### 2.1.1.2 Abordagens probabilísticas

Algumas abordagens baseiam-se na detecção de fontes de luz por métodos probabilísticos. Em geral, esses métodos requerem treinamento prévio com um conjunto de imagens sobre as quais a informação procurada (direção da fonte de luz) é conhecida e baseiam-se sobre probabilidades de correspondência entre uma dada imagem e o conjunto de treinamento.

Dentre as abordagens probabilísticas, algumas tratam de imagens de um conjunto de objetos pertencentes a uma mesma classe: objetos que, embora diferentes em seus detalhes, compartilham certas características invariantes. O interesse da calibração de fontes de luz de cenas com esses objetos surgiu em particular com a necessidade de tratar imagens de rostos humanos para os algoritmos de reconhecimento de faces. Dessa maneira, os trabalhos vistos a seguir baseiam-se em objetos pertencentes à classe de faces humanas.

Brunelli [1997] usa técnicas de aprendizado por treinamento prévio com imagens controladas e desenvolve um método que aprende a determinar a direção de uma fonte de luz.

O trabalho de Riklin-Raviv e Shashua [2001] baseia-se em informações sobre invariantes em um conjunto de imagens para recuperar informações sobre uma fonte direcional, com o objetivo específico de construir uma imagem do mesmo objeto sob novas condições de iluminação.

Sim e Kanade [2001] usam um modelo simples de *kernel regression* [Atkeson et al., 1997] para estimar a direção da fonte como a combinação das direções que ocorrem em uma série de imagens previamente conhecidas.

Bouganis e Brookes [2003] lançam a idéia de detectar múltiplas fontes com base em imagens de faces e apresentam seis algoritmos estatísticos para a detecção de até três fontes de luz direcionais, embora várias restrições sejam impostas sobre a posição dessas fontes.

Outras abordagens probabilísticas tratam de imagens de superfícies texturizadas, como tecidos, madeira, pele, etc. Tais trabalhos integram o estudo de classificação de texturas, tornando-a mais robusta pelo conhecimento da direção da fonte de iluminação, conforme sustentado pelo trabalho de Chantler [1995].

O trabalho de Chantler et al. [2002], desenvolvido posteriormente em Chantler et al. [2005], determina a direção de uma fonte de luz incidente sobre uma superfície texturizada, enquanto realiza sua classificação. Embora o autor informe que o método apresentado “requer mais treinamento e processamento do que um classificador convencional”, os resultados dos experimentos apontam uma baixa acurácia dos resultados:

por exemplo, na estimação do ângulo de elevação em relação ao plano de textura, cerca de 18% das instâncias chegaram a um resultado com um erro superior a  $10^\circ$ .

Todos os trabalhos que se baseiam em abordagens probabilísticas apresentam algumas desvantagens comuns. Em primeiro lugar, dependem de um conjunto prévio de imagens para realizar o treinamento, portanto muito cuidado deve ser tomado para que as imagens não apresentem qualquer comportamento tendencioso. Além disso, as margens de erro são em geral bem maiores do que as observadas em outras abordagens.

### 2.1.1.3 Recuperação de *shape-from-shading*

Uma das técnicas mais comuns de reconstrução da geometria tridimensional de objetos é a chamada *shape-from-shading* [Brooks e Horn, 1985]. Essas técnicas estabelecem uma relação entre o ângulo de incidência dos raios de luz sobre a superfície e a intensidade percebida pela câmera: com base no conhecimento da direção da fonte de luz e em imagens do objeto, é possível recuperar a normal da superfície em uma série de pontos e reconstruir a geometria do objeto.

Pela própria descrição geral da técnica de *shape-from-shading*, percebe-se que a calibração da fonte de luz é um dado imprescindível para a resolução do problema. De fato, muitos trabalhos que tratam do assunto assumem que a direção da fonte de luz é previamente conhecida. Outros trabalhos abordam a resolução conjunta da determinação da fonte e da geometria da superfície e, portanto, podem ser considerados como métodos de calibração de fontes direcionais.

Um trabalho que sustenta essa resolução conjunta é o de Chojnacki e Brooks [1997], que faz uma análise teórica sobre a calibração de fontes direcionais com base no sombreamento, concluindo que não existe um método universal para a detecção da direção da fonte sem que haja um prévio conhecimento substancial da cena. O trabalho conclui que, nesses casos, o conhecimento sobre a geometria e a fonte devem ser obtidos simultaneamente. Infelizmente, a recuperação da geometria é um processo computacionalmente caro, o que é uma desvantagem importante para as aplicações que requerem somente a calibração da fonte.

Brooks e Horn [1985] propõem um método iterativo que recupera a direção de uma fonte de luz distante e a geometria dos objetos: com uma estimativa da primeira, calcula a segunda, que serve de base para o cálculo de uma nova estimativa para a fonte. Toma por base que as superfícies são lambertianas suaves com reflectância constante, o que torna o algoritmo bastante limitado (a maioria das cenas não apresenta essas características). Também apresenta uma solução fechada para a determinação da direção da fonte de luz se a forma dos objetos (o mapa normal da superfície) for previamente conhecida.

Ikeuchi e Sato [1990] propõem outro método iterativo, com base nas informações previamente obtidas por um *scanner* de profundidade a *laser*. A necessidade do uso

desse tipo de *scanner* torna o processo muito caro, lento e limitado, já que esses *scanners* geralmente são estacionários. Também assume que a superfície é lambertiana.

Pentland [1990] apresenta uma solução para o problema de *shape-from-shading*, com base em um método linear no domínio de Fourier, e lança um refinamento para a estimação da fonte de luz apresentada em Pentland [1982].

O trabalho de Hougen e Ahuja [1993], ao contrário da maioria dos métodos baseados em sombreamento, permite a recuperação de várias fontes de luz distantes. Sua abordagem utiliza pares estéreo para recuperar o mapa de profundidade e, embora não se limite a superfícies lambertianas, não considera inter-reflexões e funciona melhor quando a reflectância não é muito especular. No entanto, Yang [1998] avalia o trabalho de Hougen e Ahuja e apresenta certas instabilidades do método, demonstrando que o algoritmo não converge necessariamente para os valores corretos.

Deshpande e Chaudhuri [1998] também propõem a calibração de uma fonte direcional no contexto de *shape-from-shading*. Entretanto, baseiam-se em um conjunto de imagens onde a fonte muda de posição e o restante da cena permanece estacionário, o que limita bastante o seu uso (o método foi desenvolvido para a observação de uma paisagem estática ao longo do dia, com o Sol em diferentes posições).

Samaras e Metaxas [1999, 2003] apresentam um método baseado em modelos deformáveis e não limitado a superfícies lambertianas. Assim como o trabalho de Brooks e Horn [1985], este também estima alternadamente a forma dos objetos e a direção da iluminação, em um processo iterativo. Para o cálculo de uma estimativa inicial, utilizam o método de Zheng e Chellapa [1991b]. A qualidade dos resultados é comparada com este trabalho.

#### 2.1.1.4 Análise do sombreamento de superfícies conhecidas

A Subseção 2.1.1.3 analisa as alternativas para a recuperação da iluminação pelo sombreamento, dado que a forma das superfícies (mapa de normais) é desconhecido. Há também os métodos que se baseiam no sombreamento, assumindo, entretanto, que a geometria do objeto é previamente conhecido. Não estão, portanto, associados ao problema de *shape-from-shading*.

Luong et al. [2002] baseiam-se em um conjunto de imagens da cena iluminadas por uma fonte distante, onde em cada imagem a fonte está em em uma posição diferente. Considera-se que os objetos possuem geometria conhecida — o que é uma grande limitação do método — e superfícies com características lambertianas. O método recupera a direção da fonte de luz em cada uma das imagens.

Takai et al. [2004] lançam um método baseado na observação de duas esferas lambertianas de tamanho conhecido e analisam a diferença da imagem das esferas. O método proposto permite a recuperação simultânea de várias fontes direcionais, além da posição

de fontes próximas (veja a Subseção 2.2.2). A construção da cena com as duas esferas é relativamente complexa, se comparada com vários outros métodos de calibração.

#### 2.1.1.5 Análise do contorno das imagens dos objetos

Dada a imagem de uma cena com vários objetos com superfícies lambertianas, essa abordagem baseia-se em dois passos principais: (i) a localização, na imagem, do contorno de cada objeto, ou o perímetro da área que corresponde à sua projeção; e (ii) a análise da intensidade dos pixels que compõem esses contornos para determinar a direção das fontes de luz.

A base dessa abordagem está no fato de que a normal das superfícies é conhecida nos pontos da cena que correspondem ao contorno: a normal é sempre perpendicular ao raio óptico que liga o ponto da cena ao centro de projeção [Horn, 1986]. Esta premissa não é verdadeira nos casos em que o contorno coincide com descontinuidades na superfície dos objetos, como vértices.

Weinshall [1990] apresenta um método onde o contorno é usado para determinar o ângulo de incidência luminosa em relação a um plano ortogonal ao eixo óptico. Em seguida, a região mais brilhante do objeto (que ocorre onde a iluminação incide paralela à normal da superfície) é usada para estimar o ângulo em relação a esse plano.

O trabalho de Yang e Yuille [1991] é o primeiro capaz de recuperar mais de uma fonte: permite a determinação da direção de até três fontes de luz, apesar de certas restrições impostas — por exemplo, o ângulo entre cada par de fontes deve ser maior do que  $90^\circ$ .

Vega e Yang [1994] apresentam métodos para estimar a forma de objetos da cena com base apenas no contorno de suas imagens. Em seguida, determinam a direção da fonte de luz, assumindo que as normais das superfícies correspondem às formas estimadas. O processo de estimação das formas com base nos contornos é bastante limitado e pode gerar resultados totalmente diferentes da geometria real.

Nillius e Eklundh [2001] lançam um método totalmente automático para a resolução do problema: é apresentado um algoritmo para localizar os segmentos candidatos a contornos e uma heurística de classificação desses segmentos (que determina se estes são ou não contornos). A qualidade dos resultados depende totalmente de bons resultados da etapa de classificação.

#### 2.1.1.6 Análise de fronteiras críticas

O princípio por trás desses métodos está no fato de que o sombreamento observado na superfície lambertiana de objetos com superfícies curvas apresenta uma distinção perceptível de intensidade entre os pontos que sofrem iluminação de uma dada fonte de luz e os que não sofrem. Essa distinção ocorre no conjunto de pontos onde a normal da

superfície é ortogonal à direção da iluminação. Cada um desses conjuntos de pontos é chamado de “fronteira crítica” (em inglês, *critical boundary*).

Zhang e Yang [2000, 2001] abordam o problema de detecção da direção de várias fontes de luz pela análise das fronteiras críticas que ocorrem sobre uma esfera de superfície lambertiana e tamanho conhecido.

Wang e Samaras [2002b] estendem o trabalho de Zhang e Yang, propondo que o objeto não precisa ser esférico, mas pode possuir qualquer formato cuja geometria seja conhecida. Os trabalhos posteriores dos mesmos autores [Wang e Samaras, 2002a, 2003a,b] lançam e desenvolvem a idéia de aproveitar as sombras para aumentar a precisão na determinação das fronteiras críticas. Todos esses trabalhos, porém, requerem que o objeto seja digitalizado com precisão em uma etapa anterior (por exemplo, através de um *scanner a laser*), o que limita bastante o seu uso.

Wei [2003] baseia-se no trabalho de Zhang e Yang para recuperar a direção de várias fontes, mas aproveita uma quantidade maior de informações fornecidas pelas imagens — analisa a área de pontos provavelmente iluminados pelas mesmas fontes, ao invés de apenas os pontos das fronteiras críticas — para chegar a resultados mais robustos, minimizando a interferência de ruídos. Este trabalho também se baseia na análise de esferas de superfície lambertiana.

Bouganis e Brookes [2004] baseiam-se nos trabalhos de Wang e Samaras [2002a,b] e lançam métodos cujo objetivo específico é o de melhorar a estabilidade e a precisão dos trabalhos originais, no caso de objetos esféricos.

Salvador et al. [2004] não tratam especificamente de calibração de fontes, mas discutem diversos conceitos — entre eles o de fronteiras críticas — e lançam um método para a detecção do contorno de sombras. Esse trabalho pode ser usado de apoio aos demais apresentados nesta subseção.

### 2.1.1.7 Análise da especularidade das superfícies

Poucos trabalhos se propõem a recuperar a direção de fontes pela observação da especularidade observada na superfície dos objetos da cena. Essa impopularidade se dá pelo fato de que a especularidade deve ser facilmente localizável — isto é, requer uma cena preparada para gerar um bom contraste entre a região especular e a lambertiana — e não suporta a localização de fontes próximas que causem a fusão da especularidade.

Zhou e Kambhamettu [2002] utilizam um par de imagens estéreo de uma esfera para calcular a direção de várias fontes de luz distantes, com base na especularidade observada na superfície da esfera. Assume-se que o material possui propriedades lambertianas e especulares combinadas. Não é necessário conhecer previamente o raio ou a posição da esfera, que são calculados pelo método apresentado.

Há outro método [Li et al., 2003] que se baseia parcialmente na especularidade para a calibração de fontes. Esse método é descrito na Subseção 2.1.5.

### 2.1.1.8 Análise do movimento de objetos

Alguns trabalhos baseiam-se em seqüências de imagens tomadas por uma câmera estacionária, com o objetivo de integrar as informações disponíveis em cada imagem e recuperar a descrição de certas características da cena. Nesse escopo, encontram-se abordagens para a recuperação da direção de uma fonte distante, designadas em inglês pelo nome de *illuminant direction from motion* (“direção do iluminante pela movimentação [de objetos]”).

Mukawa [1990] apresenta um método para a recuperação de várias informações sobre a cena com base em uma seqüência de imagens, incluindo a direção de uma fonte distante. O método não depende do conhecimento prévio da geometria dos objetos ou da reflectância de suas superfícies: de fato, esses parâmetros são estimados em conjunto com a direção da fonte.

Os trabalhos de Stauder [1993, 1994], também pela análise de seqüências de imagens, recuperam simultaneamente a direção de uma fonte e a descrição do movimento de objetos rígidos, mas depende do conhecimento prévio da sua geometria.

### 2.1.2 Métodos baseados em objetos poliédricos

Uma das limitações inerentes às abordagens baseadas em análise de sombreamento está no fato de que esses se baseiam em variações contínuas da normal das superfícies, ou seja, sustentam-se na hipótese de que as superfícies são suavemente curvas. Tais abordagens são inadequadas para objetos compostos por faces planas, que não apresentam fronteiras críticas e dificilmente exibem pontos de brilho singular, como pequenas áreas determinadas de especularidade [Barnes e Liu, 1999].

Os métodos apresentados a seguir tratam da observação da imagem das faces de poliedros na cena. Adota-se que as superfícies sejam uniformes e, por definição, planas: por conseqüência, e como as fontes de luz são distantes, espera-se que a cor percebida em cada face seja a mesma para todos os pixels correspondentes.

Sinha e Adelson [1993] lançam uma abordagem para recuperar a fonte de luz com base na observação das faces de objetos poliédricos (faces planas). O método baseia-se em relações binárias entre pares de faces: não realiza cálculos sobre a intensidade da luminosidade percebida em cada face, portanto tolera certas restrições em relação à BRDF. Em particular, as superfícies podem apresentar especularidade. O método, porém, não é capaz de determinar uma direção específica da fonte de luz, mas sim um intervalo de direções que contém a fonte de luz.

### 2.1.3 Métodos baseados em sombras

Esta abordagem compreende os métodos que se baseiam no fato de que pontos da cena e suas respectivas sombras estão alinhados com a fonte de luz.

Poulin e Fournier [1992] propõem o uso de sombras e especularidades para modelar fontes de luz. No caso de fontes pontuais, o trabalho é capaz de determinar a direção de fontes infinitamente distantes. Poulin et al. [1997] estendem o trabalho e estabelecem um critério simples: se as restrições impostas pelos dados de entrada permitirem uma fonte de luz direcional, a sua direção é computada; caso contrário, as coordenadas de uma fonte pontual são calculadas. O método, porém, depende do conhecimento prévio da geometria dos objetos que geram a sombra.

#### **2.1.4 Uso de alvos de calibração**

Pang et al. [2004] propõem um método para calibração de fontes em tempo real: consiste em fixar uma câmera em uma fonte direcional, de modo que a orientação das duas é coincidente e a posição de uma é sempre a mesma em relação à outra. O método consiste em calibrar a câmera pela observação de um alvo de calibração; com isso pode-se obter facilmente a orientação da fonte, que corresponde à orientação da câmera em relação ao sistema de coordenadas adotado.

#### **2.1.5 Análise de informações combinadas**

O trabalho de Li et al. [2003] realiza uma abordagem que combina várias técnicas apresentadas em outros artigos e integra informações sobre sombreamento, sombras e especularidade. O método determina um “mapa de probabilidade” de iluminação incidente e adota que as regiões de máximos locais correspondem a direções de fontes. O trabalho foi desenvolvido para lidar em particular com superfícies texturizadas. Requer, porém, o conhecimento prévio da geometria da cena.

## **2.2 Recuperação das coordenadas de fontes pontuais próximas**

A hipótese de que as fontes de luz pontuais estão infinitamente distantes da cena é adequada para a análise de cenários específicos: quando a cena é iluminada pela luz solar, quando a distância da cena à fonte é muito maior do que a dimensão dos objetos observados ou em casos particulares de canhões de luz que projetam a luz como um feixe paralelo. No entanto, no caso de cenas em ambientes internos (isto é, não iluminados pelo Sol) é comum encontrar fontes de luz suficientemente próximas dos objetos para que se perceba o caráter não-paralelo dos raios luminosos.

Para tratar com modelos de iluminação mais realistas nesse sentido, vários métodos de calibração de fontes de luz foram desenvolvidos para determinar não a direção da fonte, mas sim a sua posição em relação à cena, representada pelas suas coordenadas tridimensionais.

### 2.2.1 Análise de sombras

Ao contrário do que ocorre com as fontes direcionais, nas pontuais próximas a sombra não depende somente da geometria e orientação dos objetos da cena — depende também de sua posição em relação ao iluminante e ao plano de sombras. Dessa maneira, os trabalhos vistos neste grupo analisam a relação entre a geometria dos objetos e a posição das sombras formadas para determinar as coordenadas das fontes.

Bouguet e Perona [1997, 1998, 1999] estimam as coordenadas de uma fonte através da sombra produzida por uma barra de tamanho conhecido. Várias imagens são tomadas da barra, sendo que em cada uma a barra é posicionada perpendicularmente a um plano-base, de modo que seja possível identificar claramente os extremos da barra e da sombra. Dado que cada ponto da cena (o extremo superior da barra) e sua sombra devem estar alinhados com a fonte de luz, é construído um sistema de equações para determinar a melhor posição para a fonte.

O trabalho de Poulin et al. [1997] foi citado na Subseção 2.1.3 como sendo um algoritmo híbrido, que detecta fontes pontuais quando os cálculos concluem que uma determinada fonte não pode ser classificada como direcional. Entretanto, a exatidão dessa classificação depende totalmente da qualidade das informações fornecidas pelo usuário.

### 2.2.2 Métodos baseados na imagem de objetos com geometria conhecida

Os trabalhos apresentados a seguir baseiam-se em técnicas que analisam a imagem de alguns objetos cuja forma é previamente conhecida. O mais comum é o uso de esferas, pela facilidade de parametrizá-las e pela simplicidade de estabelecer relações entre a iluminação incidente e a radiância observada: neste caso, em geral a calibração da fonte se faz pela triangulação entre a direção de incidência da fonte sobre cada esfera.

Mancini e Wolff [1992] não se limitam a objetos esféricos: partem do conhecimento prévio da geometria dos objetos, obtido por um *scanner* de profundidade, e apresentam uma abordagem iterativa que combina a análise do sombreamento e o mapa de profundidade. O método simultaneamente estima as coordenadas da fonte de luz e refina a informação sobre a geometria dos objetos.

Weber e Cipolla [2001] desenvolvem um método para a determinação de fontes próximas com base em objetos de superfície lambertiana, com geometria convexa e previamente conhecida, embora o artigo apresente desenvolvimento e conclusões específicas para cubos. O objeto é imageado em várias posições distintas, sendo que sua posição em cada imagem em relação à câmera também deve ser calibrada. O processo analisa a radiância observada em cada ponto da superfície do objeto para obter primeiro a direção da fonte, e em seguida a distância desta ao objeto.

Powell et al. [2000] permite a calibração de fontes com base na especularidade observada em algumas esferas, cuja posição relativa é previamente conhecida. Cada esfera deve ter uma metade especular e transparente e outra metade lambertiana, o que é uma montagem bastante incomum. Dois métodos distintos são apresentados: utilizando duas esferas em conjunção com o mapa de profundidade, ou utilizando três esferas apenas com base nas imagens de intensidade. O trabalho seguinte, Powell et al. [2001], desenvolve o método com três esferas.

Zhou e Kambhamettu [2004a,b] estendem o trabalho anterior dos mesmos autores (2002) e tratam da calibração de fontes próximas. Consideram, porém, que essas fontes são não-pontuais, de modo que o algoritmo estima sua posição e área. Utilizam um conjunto de pares estéreo de uma esfera, colocada em posições diferentes para cada par de imagens. A superfície da esfera combina características lambertianas e especulares.

O trabalho de Takai et al. [2004], citado anteriormente na Subseção 2.1.1.4, permite o cálculo das coordenadas de múltiplas fontes pontuais próximas, além da orientação de fontes direcionais, com base na observação do sombreamento de um par de esferas.

O fato de que a geometria dos objetos deve ser previamente conhecida para todos os métodos apresentados limita bastante o seu uso. Vários métodos também requerem o conhecimento sobre posição dos objetos, ou recuperam essa informação pelo uso de *scanners* de profundidade ou visão estéreo. Dessa forma, os trabalhos apresentam restrições significativas de montagem e uso.

### 2.2.3 Métodos baseados na aparência desejada da cena

Alguns trabalhos para a determinação das coordenadas de fontes pontuais utilizam um objetivo diferente: ao invés de procurar fontes que descrevem a imagem de uma cena, esses métodos procuram calibrá-las com base no efeito final desejado — por exemplo, o usuário especifica quais são as regiões da cena que devem ser mais iluminadas ou que devem ficar na penumbra. Essas abordagens são chamadas de *projeto de iluminação* (*lighting design*) e se fundamentam em critérios psicológicos da percepção humana.

O termo “projeto de iluminação” é abrangente, pois refere-se à determinação de vários parâmetros das fontes de iluminação: posição, orientação, intensidade, cor, etc. Muitos trabalhos se propõem a recuperar apenas um subconjunto desses parâmetros: por exemplo, os de Schoeneman et al. [1993] e Kawai et al. [1993] não apresentam algoritmos para determinar as coordenadas das fontes, assumindo que são estabelecidas previamente pelo projetista. Os trabalhos que tratam especificamente da posição das fontes são apresentados a seguir.

O trabalho de Poulin et al. [1997] é bastante flexível e seus fundamentos podem ser utilizados tanto para a calibração de fontes distantes (Subseção 2.1.3) ou próximas (Subseção 2.2.1), mas seus métodos também podem ser usados como base para projetos de iluminação.

Costa et al. [1999] encontram as posições e as características das fontes com base na geometria e nos materiais, através de um algoritmo de refinamento sucessivo e de especificações de projeto estabelecidas pelo usuário.

Shacked [2001] e Shacked e Lischinski [2001] baseiam-se nos mesmos dados de entrada de Costa et al.. A principal diferença entre os dois trabalhos está nos critérios de percepção em que se baseia a função de otimização dos parâmetros.

## 2.3 Recuperação de mapas de iluminação

As técnicas de recuperação de mapas de iluminação compõem uma abordagem distinta para a calibração de fontes de luz: ao invés de tentar determinar a posição ou a direção de fontes de luz individuais, a iluminação da cena é baseada em um modelo composto por um grande número de fontes (alguns trabalhos descrevem experimentos considerando centenas delas), situadas em posições predefinidas, e os algoritmos visam estabelecer a *intensidade* ou *radiância* de cada uma dessas fontes.

Em geral, as fontes são posicionadas em espaços regulares e de modo que formem uma esfera ou um domo hemisférico, de raio infinito e centrado na cena. Visto de outra maneira, as fontes, pontuais e distantes, são posicionadas de modo a estarem regularmente distribuídas em relação ao ângulo de incidência sobre a cena.

É importante frisar que esses algoritmos não visam determinar a geometria ou a posição das fontes de luz, ou sequer identificá-las ou contá-las. O que se deseja é encontrar as radiâncias para um conjunto de fontes rigidamente posicionadas, de modo a melhor explicar as imagens geradas. São abordagens adequadas para a descrição da iluminação ambiente comumente encontrada em salas ou escritórios, por exemplo, composta pela combinação de lâmpadas internas, da luz externa que entra por portas e janelas, da claridade refletida pelas paredes, entre outros fatores. Entretanto, esse mapa de radiâncias resultante pode ser posteriormente analisado para identificar grupos contíguos de fontes com radiância significativamente superior em relação ao conjunto total: assim, focos individuais de iluminação podem ser identificados, contados, classificados, etc.

### 2.3.1 Análise de sombras

Essa abordagem baseia-se na análise das sombras projetadas por objetos da cena sobre alguma superfície. É interessante que, como o modelo de mapas de iluminação prevê a ocorrência de muitas fontes de luz, tais sombras não precisam ser bem identificáveis, com contornos bem definidos.

O trabalho de Sato et al. [1998, 1999c] deriva a distribuição da iluminação pela análise das sombras ao redor de um objeto que repousa sobre uma superfície. As fontes estão regularmente espaçadas, formando um domo hemisférico. A geometria do objeto e da superfície de projeção das sombras devem ser previamente conhecidas, assim como

a calibração da câmera e a reflectância da superfície. Um refinamento do algoritmo é apresentado em Sato et al. [1999b], permitindo que a reflectância da superfície de sombras seja previamente desconhecida. Esses trabalhos não analisam inter-reflexões e adotam que a superfície das sombras possui reflectância uniforme. Posteriormente, os autores analisaram a estabilidade do método [Sato et al., 2001], que foi refinado em Sato et al. [2003].

Okabe et al. [2004] desenvolvem o trabalho baseado em sombras de Sato et al., formalizando matematicamente o método e apresentando algumas idéias para melhorar a precisão do mapa de iluminação resultante.

### 2.3.2 Análise da reflectância de objetos

Esta classe de trabalhos baseia-se na análise da imagem captada da superfície de determinados objetos da cena. O objetivo é determinar a iluminação com base em certas pressuposições sobre a reflectância desses objetos: é uniforme e com comportamento reflexivo (espelhado) ou lambertiano (difuso). É comum que os objetos em questão sejam esféricos ou hemisféricos.

#### 2.3.2.1 Objetos com superfície espelhada

Esta categoria baseia-se no fato de que os objetos-alvo possuem superfície reflexiva, como espelhos ou metais lisos. É importante observar, neste caso, que a qualidade da superfície é essencial para a geração de bons resultados: superfícies rugosas ou com um componente difuso ou especular significativo (como as bolas usadas como enfeites natalinos) são fonte potencial de ruídos expressivos, podendo produzir falsos resultados.

As abordagens baseadas em esferas espelhadas é bastante popular, pois a relação entre a direção dos iluminantes e o seu reflexo nos objetos é muito simples.

Miller e Hoffman [1984] propõem o uso de uma esfera espelhada para registrar a iluminação ambiente, mas não trata especificamente sobre calibração de fontes de luz: a abordagem do trabalho é específica para a renderização de objetos reflexivos.

Debevec [1998] recupera o mapa de iluminação pela análise da imagem de uma esfera espelhada, sendo conhecidas previamente todas as informações sobre a cena: o tamanho e posição da esfera e calibração da câmera. O método obtém várias imagens da esfera utilizando diferentes exposições, de modo a obter amostras não saturadas de todas as fontes de iluminação, seguindo o método publicado anteriormente pelo mesmo autor [Debevec e Malik, 1997].

Sato et al. [1999a] baseiam-se na análise de um par estéreo de imagens omnidirecionais — ou seja, em duas imagens de uma esfera espelhada, obtidas por câmeras locadas em duas posições distintas. O par estéreo é utilizado para criar o modelo geométrico da cena e mapear a radiância incidente. O resultado é um mapa de iluminação hemisférico. O algoritmo não considera inter-reflexões e requer a prévia calibração das câmeras.

Nishino et al. [2001] assumem o conhecimento prévio da calibração da câmera e da geometria do objeto, que pode ter qualquer forma. O método apresentado pelo trabalho recupera o mapa de iluminação com base na especularidade percebida na superfície dos objetos iluminados e faz parte de um processo mais amplo, que recupera também os parâmetros de reflectância.

O trabalho de Kanbara e Yokoya [2002] propõe uma abordagem, posteriormente refinada em Kanbara e Yokoya [2004], que recupera tanto a calibração da câmera quanto o mapa de iluminação através de uma peça quadrada fixada a um hemisfério espelhado. O método objetiva aplicações de realidade aumentada em tempo real, mas a resolução do mapa de iluminação é de baixa qualidade e os próprios exemplos apresentados nos artigos são pouco realísticos.

Unger et al. [2003] extrapolam a idéia de Debevec [1998], usando um conjunto de hemisférios espelhados dispostos em uma matriz planar. Cada hemisfério capta um espaço bidimensional de iluminação; com a matriz bidimensional, teoricamente é possível realizar uma interpolação para se obter a representação quadridimensional da iluminação incidente sobre a cena, conforme a classificação proposta por Langer e Zucker [1997a,b].

### 2.3.2.2 Objetos com superfície lambertiana

Os trabalhos desta categoria tomam por base que os objetos possuem superfícies lambertianas uniformes: não apresentam especularidade ou reflexividade. Bolas de borracha são bons candidatos a objetos analisados por esses algoritmos.

Os trabalhos de Marschner e Greenberg [1997] e Marschner [1998] baseiam-se em qualquer número de fontes distantes. Os resultados são apresentados com base em fontes distribuídas regularmente em uma esfera distante. Considera efeitos de iluminação global, mas requer o conhecimento completo da cena: geometria e reflectância dos objetos.

Singh e Ahuja [1998] recuperam o mapa de iluminação pela análise da imagem de uma esfera lambertiana de tamanho conhecido, sem considerar efeitos de iluminação global (ignora inter-reflexões).

## 2.4 Classificação e relevância do trabalho apresentado

A maioria dos trabalhos de calibração de fontes assume o modelo de fontes direcionais [Zhou e Kambhamettu, 2004b]. As fontes direcionais são uma aproximação razoável para as cenas, desde que a distância entre a fonte e os objetos seja comparativamente muito maior do que as dimensões dos objetos da cena.

Entretanto, muitas aplicações desenvolvidas na área de Visão Computacional são ambientadas em áreas fechadas, como laboratórios, salas e corredores. Sob essas cir-

cunståncias, as fontes de luz estão relativamente próximas, e considerar a fonte de luz como sendo puramente direcional pode gerar certos artificios indesejados durante o processamento de imagens adquiridas: o modelo de fonte distante simplesmente é inadequado.

No entanto, não há muitos trabalhos publicados que tratam especificamente da calibraao de fontes pontuais próximas. A taxonomia apresentada neste capitulo sugere três formas de abordar o problema, entre as quais:

- Os *métodos baseados na aparência desejada da cena* não tratam de fontes de luz existentes: seu objetivo é o de estabelecer a *futura* posiao das fontes, tratando do problema de projetistas de iluminaao que desejam obter certos efeitos para um ambiente. Esses métodos não podem determinar a posiao corrente de iluminantes;
- Os *métodos baseados na imagem de objetos com geometria conhecida* dependem, como o próprio título sugere, do conhecimento prévio da geometria de um ou mais objetos da cena para que se possa recuperar a posiao da fonte de luz. Comumente utilizam esferas, mas há métodos que, embora permitam a adoao de objetos com qualquer forma, exigem o mapeamento das normais de sua superfie, requerendo uma etapa anterior trabalhosa: a de digitalizar o objeto através de um *scanner* tridimensional. Além disso, em geral os métodos impõem algumas restrioes sobre a característica das superfies dos objetos: alguns exigem que seja lambertiana, outras requerem especularidade, e há até os que dependem de transparência.

Em resumo, nenhum dos métodos desses dois grupos representam uma soluao que seja ao mesmo tempo prática, simples e que dependa de objetos encontrados com facilidade em qualquer ambiente.

Sob este ponto de vista, fica clara a importância do terceiro grupo de trabalhos — os que se baseiam na *análise de sombras* para determinar as coordenadas da fonte de luz. Sob essa classificaao destacam-se duas linhas de pesquisa: uma delas é a apresentada por Poulin et al. [1997], cuja principal desvantagem está no fato de que a geometria dos objetos deve ser previamente conhecida — ou, mais especificamente, deve-se conhecer a maneira de gerar *silhuetas* dos objetos, o que é potencialmente bem mais complexo. O método baseia-se em algumas heurísticas e parte do princípio de que, dadas as restrioes de entrada, a fonte está o mais afastada possível, ou seja: o resultado pode facilmente identificar uma fonte muito mais distante do que a realidade (possivelmente no infinito).

A outra linha de pesquisa, apresentada por Bouguet e Perona [1997, 1998, 1999], é o trabalho que mais se enquadra em uma análise puramente geométrica, livre de heurísticas. No entanto, por uma série de motivos apresentados na Seao 1.6 — notadamente pelo fato de que a propagaao de erros não é abordada, gerando resultados estatisticamente não-ótimos —, o trabalho possui algumas limitaoes, deixando aberto o campo

para melhorias substanciais.

É dentro desse contexto que o método proposto nesta dissertação foi concebido. No escopo da taxonomia adotada, este é um trabalho do grupo de “Recuperação das coordenadas de fontes pontuais próximas”, subgrupo “Análise de sombras”, com o objetivo de apresentar um método puramente geométrico, não-heurístico, tão pouco restritivo quanto possível (em relação aos tipos de objetos e às informações prévias necessárias sobre a cena) e estatisticamente ótimo.

## Capítulo 3

# Metodologia

Este capítulo tem por objetivo expandir formalmente a metodologia apresentada no capítulo introdutório, desenvolvendo o sistema de equações e apresentando a maneira adotada para resolvê-lo.

### 3.1 Questões geométricas

A Seção 1.4 apresenta as idéias gerais do método que serve de base para este trabalho: consiste em usar as projeções conhecidas de pontos e sombras para criar restrições entre as incógnitas no universo tridimensional.

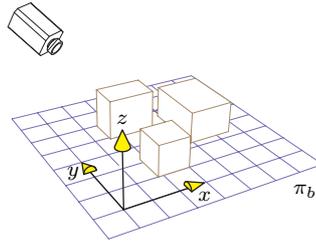
O objetivo desta seção é converter a descrição de todos os elementos do problema — pontos, barras, restrições, parâmetros da câmera — em relações matemáticas, para que o problema possa ser modelado na forma de um sistema de equações. A seguir são apresentados e discutidos esses formalismos.

#### 3.1.1 Parâmetros de calibração da câmera

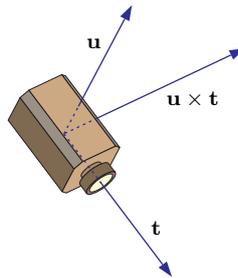
A superfície plana sobre a qual as sombras serão projetadas será chamada de *plano-base* ou *plano de sombras* e será identificada por  $\pi_b$ . Este trabalho convencionou, sem perda de generalidade, que o sistema de coordenadas da cena é tal que a origem pertence ao plano  $\pi_b$ . Além disso, o eixo  $z$  é ortogonal a esse plano e é orientado de tal maneira que todos os elementos da cena encontram-se no semi-espaço  $\{z \geq 0\}$  (Figura 3.1). Esta convenção implica que o plano-base é representado por:

$$\pi_b \triangleq \{z = 0\}. \quad (3.1)$$

Os parâmetros de calibração da câmera, que são dados de entrada para o problema, são abordados a seguir:



**Figura 3.1.** Convenção do sistema global de coordenadas, onde se vê a origem pertencente a  $\pi_b$  e o eixo  $z$  ortogonal ao mesmo plano.



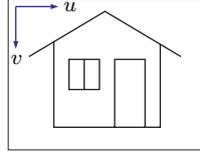
**Figura 3.2.** Vetores unitários que definem a orientação da câmera: vetor-alvo ( $\mathbf{t}$ ) e vetor superior ( $\mathbf{u}$ ). O terceiro vetor ortogonal aos dois ( $\mathbf{u} \times \mathbf{t}$ ) também é exibido, para fechar a tripla que define um sistema ortonormal.

- *Parâmetros extrínsecos:* Referem-se à pose (posição e orientação) da câmera em relação ao sistema de coordenadas global adotado. A posição é representada pelas coordenadas do centro de projeção,  $\mathbf{C}$ . Quanto à orientação, ou rotação, é comum que seja representada por um conjunto de ângulos. Entretanto, em certos casos é mais usual (e mais intuitivo) que a orientação seja especificada por alguns vetores que correspondem a alguns eixos locais da câmera. A Figura 3.2 apresenta a convenção utilizada neste trabalho: bastam dois vetores unitários e ortogonais para especificar a orientação da câmera — o vetor-alvo (*target vector*)  $\mathbf{t}$ , que coincide com o eixo óptico da câmera, e o vetor superior (*upside vector*)  $\mathbf{u}$ , que estabelece a direção superior da câmera, ou o “norte” da imagem.

Observa-se que a tripla de vetores  $\langle (\mathbf{u} \times \mathbf{t}), \mathbf{u}, \mathbf{t} \rangle$  convencionam um sistema ortonormal local de coordenadas onde os dois primeiros eixos coincidem com os eixos horizontal e vertical da imagem.

- *Parâmetros intrínsecos:* Podem ser resumidos à distância focal,  $f$ , às dimensões do elemento sensor,  $d_u$  e  $d_v$ , e às coordenadas, em pixels, do centro de imagem,  $o = (o_u, o_v)$ . O modelo adotado considera que o eixo óptico é perpendicular ao plano de imagem. Além disso, não são levadas em consideração as distorções causadas pelas lentes: este trabalho adota que todas as coordenadas bidimensionais de entrada passam previamente por tratamentos para a correção de tais distorções.

A convenção para as coordenadas do centro de imagem,  $(o_u, o_v)$ , assim como para as



**Figura 3.3.** Convenção do sistema de coordenadas na imagem.

demais coordenadas bidimensionais em pixels tratadas no âmbito da imagem, adotam a origem  $(0, 0)$  no canto superior esquerdo, o eixo  $u$  voltado para a direita e o eixo  $v$  voltado para baixo (Figura 3.3).

Os parâmetros extrínsecos e intrínsecos permitem modelar uma transformação capaz de converter coordenadas tridimensionais na cena em coordenadas bidimensionais na imagem, em pixels. Neste trabalho, todos os pontos bidimensionais e tridimensionais são representados em coordenadas euclidianas. Entretanto, as matrizes de transformação são construídas de modo que se aplicam a coordenadas *euclidianas*: dessa maneira, qualquer transformação projetiva pode ser representada através de uma única matriz que pré-multiplica as coordenadas-fonte. Portanto, em uma operação de transformação de coordenadas, essas são primeiro convertidas em sua representação homogênea, que é transformada e o resultado é convertido em sua representação euclidiana.

Dentro dessa filosofia, a matriz de transformação extrínseca é apresentada a seguir:

$$\mathbf{M}_{ext} \triangleq \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{t}) & \mathbf{u} & \mathbf{t} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & -\mathbf{C} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Através da matriz  $\mathbf{M}_{ext}$ , qualquer ponto da cena  $\mathbf{P} = [\mathbf{P}^{(x)}, \mathbf{P}^{(y)}, \mathbf{P}^{(z)}]^\top$  pode ser representado no sistema de coordenadas local da câmera:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}' \\ 1 \end{bmatrix} \propto \mathbf{M}_{ext} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

De maneira análoga, temos a matriz de transformação intrínseca apresentada a seguir:

$$\mathbf{M}_{int} \triangleq \begin{bmatrix} 1/d_u & 0 & o_u \\ 0 & 1/d_v & o_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

A combinação das duas matrizes de transformação fornece a *matriz de transformação projetiva*:

$$\mathbf{M}_P \triangleq \mathbf{M}_{int} \cdot \mathbf{M}_{ext}. \quad (3.5)$$

Dado um ponto da cena  $\mathbf{A} = [\mathbf{A}^{(x)}, \mathbf{A}^{(y)}, \mathbf{A}^{(z)}]^\top$ , a matriz  $\mathbf{M}_P$  estabelece uma transformação trivial para sua projeção  $\mathcal{A} = [\mathcal{A}^{(u)}, \mathcal{A}^{(v)}]^\top$ :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ 1 \end{bmatrix} \propto \mathbf{M}_P \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

A *matriz de transformação inversa*  $\mathbf{M}_I$  provê uma maneira de reverter, por assim dizer, a transformação projetiva. Porém, como esta representa uma transformação degenerada, em que uma das dimensões é perdida, a transformação inversa poderá, no máximo, recuperar o raio óptico correspondente ao pixel. Por convenção estabelecida neste trabalho, a transformação inversa recupera, a partir de um dado ponto de imagem  $\mathcal{A}$ , as coordenadas tridimensionais de um ponto  $\mathbf{A}'$  que corresponde à interseção do raio óptico com o plano de imagem. Mais formalmente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}' \\ 1 \end{bmatrix} \propto \mathbf{M}_I \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

onde

$$\mathbf{A}' = \overline{\mathbf{C}\mathbf{A}} \cap \pi_i \quad (3.8)$$

e  $\pi_i$  é o *plano de imagem*: o plano ortogonal ao vetor  $\mathbf{t}$  e que contém o ponto  $(\mathbf{C} + f \cdot \mathbf{t})$ .

A construção da matriz de transformação inversa é vista a seguir:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_I \triangleq & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{C} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{t} \times \mathbf{u})^\top & 0 \\ \mathbf{u}^\top & 0 \\ \mathbf{t}^\top & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \cdot \begin{bmatrix} d_u & 0 & 0 \\ 0 & d_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -o_u \\ 0 & 1 & -o_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

### 3.1.2 Pontos da cena e da imagem

Como parte dos dados de entrada para o problema, deve-se conhecer previamente as coordenadas, em pixels, das projeções dos pontos-chave (os extremos das barras). Neste trabalho, esses pontos serão indexados por  $n$ . Considerando todos os pontos identificados em todas as imagens, temos um conjunto de  $N$  pontos, onde  $1 \leq n \leq N$ . Suas coordenadas bidimensionais são identificadas pelo vetor  $\mathcal{P}_n = [\mathcal{P}_n^{(u)}, \mathcal{P}_n^{(v)}]^\top$  e suas coordenadas tridimensionais (desconhecidas) são identificadas por  $\mathbf{P}_n = [\mathbf{P}_n^{(x)}, \mathbf{P}_n^{(y)}, \mathbf{P}_n^{(z)}]^\top$ .

De maneira similar, os pontos de sombra correspondentes a cada extremo da barra são identificados pelas coordenadas bidimensionais  $\mathcal{S}_n = [\mathcal{S}_n^{(u)}, \mathcal{S}_n^{(v)}]^\top$  (conhecidas a

*priori*) e tridimensionais  $\mathbf{S}_n = [\mathbf{S}_n^{(x)}, \mathbf{S}_n^{(y)}, \mathbf{S}_n^{(z)}]^\top$ . Estas últimas podem ser trivialmente obtidas pela interseção de seus raios ópticos (obtidos pela aplicação da transformação inversa) com o plano-base:

$$\mathbf{S}_n = \overline{\mathbf{C}\mathbf{S}'_n} \cap \pi_b, \quad (3.10)$$

onde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}'_n \\ 1 \end{bmatrix} \propto \mathbf{M}_I \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{S}_n \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Segundo discutido na Subseção 1.4.2, a cada um dos pontos  $\mathbf{P}_n$  está associada uma incógnita escalar: a profundidade do ponto, ou a distância do centro de projeção  $\mathbf{C}$  ao ponto. Esta incógnita será identificada por  $\gamma_n$ , onde, por definição:

$$\gamma_n \triangleq \|\mathbf{P}_n - \mathbf{C}\|. \quad (3.12)$$

A definição de  $\gamma_n$  pode também ser compreendida de outra maneira: se parametrizarmos o raio óptico em função da origem,  $\mathbf{C}$ , e de um vetor unitário orientado no sentido da cena,  $\mathbf{p}_n$ , então  $\gamma_n$  é a posição ao longo dessa reta onde está o ponto  $\mathbf{P}_n$ . Formalmente, temos:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{C} + \gamma_n \mathbf{p}_n, \quad (3.13)$$

onde o vetor  $\mathbf{p}_n$  é definido por:

$$\mathbf{p}_n \triangleq \frac{\mathbf{P}'_n - \mathbf{C}}{\|\mathbf{P}'_n - \mathbf{C}\|} \quad (3.14)$$

e o ponto  $\mathbf{P}'_n$ , por analogia à Eq. (3.7):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}'_n \\ 1 \end{bmatrix} \propto \mathbf{M}_I \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{P}_n \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

O interessante da parametrização vista na Eq. (3.13) é estabelecer a relação direta entre o objetivo do problema (as coordenadas tridimensionais do ponto) com uma única incógnita (a profundidade  $\gamma_n$ ), já que os demais elementos da equação ou são dados de entrada ou podem ser calculados trivialmente através das Eqs.(3.9), (3.14) e (3.15).

Todo o raciocínio exposto para pontos da cena pode ser aplicado para a fonte de luz: as suas coordenadas  $\mathbf{L}$  serão escritas com base no centro de projeção,  $\mathbf{C}$ , no vetor unitário orientado no sentido da fonte de luz,  $\mathbf{l}$ , e na sua profundidade, representada pela incógnita  $\lambda$ . Temos então:

$$\mathbf{L} = \mathbf{C} + \lambda \mathbf{l}, \quad (3.16)$$

onde

$$\mathbf{l} \triangleq \frac{\mathbf{L}' - \mathbf{C}}{\|\mathbf{L}' - \mathbf{C}\|} \quad (3.17)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}' \\ 1 \end{bmatrix} \propto \mathbf{M}_I \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Entretanto, a Eq. (3.18) depende das coordenadas da projeção da fonte de luz,  $\mathcal{L}$ , que são desconhecidas. Determiná-las corresponde à primeira etapa do método deste trabalho, conforme apresentado na Seção 1.5.

### 3.1.3 Formação de sombras

A Restrição 2 estabelece a relação entre a fonte de luz, os pontos da cena e as sombras. Esta relação pode ser representada pela equação a seguir:

$$\mathbf{S}_n \in \overline{\mathbf{L}\mathbf{P}_n} \quad (3.19)$$

ou, de maneira mais precisa:

$$\overline{\mathbf{L}\mathbf{P}_n} \cap \pi_b = \mathbf{S}_n. \quad (3.20)$$

A colinearidade de fonte de luz, pontos e sombras também se aplica ao plano de imagem. Esta afirmação corresponde a aplicar a transformação de projeção sobre os elementos da Eq. (3.19) e reescrever:

$$\mathcal{S}_n \in \overline{\mathcal{L}\mathcal{P}_n}. \quad (3.21)$$

A Eq. (3.21) será explorada para montar o sistema de equações que resolve a etapa bidimensional do problema.

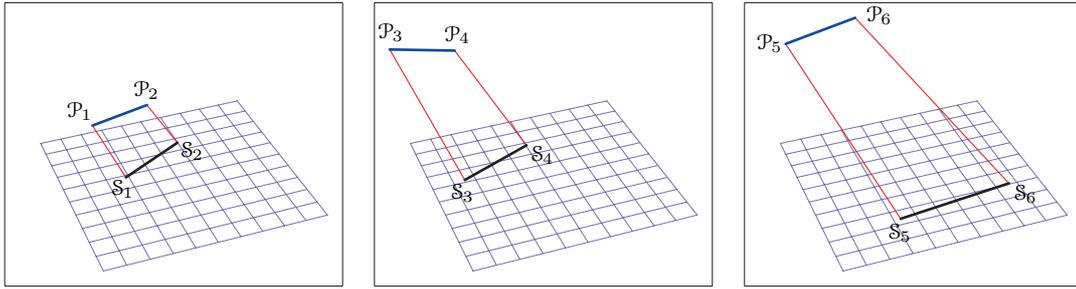
### 3.1.4 Barras e ocorrências

Retornando ao objetivo do problema, é necessário conhecer previamente os pares de pontos que formam as barras — em outras palavras, relacionar os pares cuja distância é a mesma na cena. Em princípio as barras estão associadas às arestas dos objetos, embora o seu conceito seja mais abrangente, como se verá a seguir.

Em geral, há um conjunto pequeno de  $B$  barras que são observadas várias vezes nas imagens. Cada barra será indexada por  $b$ , sendo  $1 \leq b \leq B$ , e possui um comprimento (desconhecido)  $c_b$ , que é a distância, na cena (não na imagem), entre as extremidades da barra.

Cada par de pontos que forma uma barra é chamada de *ocorrência* desta barra. Em uma instância do problema são identificadas no total  $K$  ocorrências, onde cada ocorrência, indexada por  $k$ , possui o par de pontos extremos  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{B}_k$ . O comprimento de uma ocorrência é identificado por  $d_k$ , onde

$$d_k \triangleq \|\mathbf{B}_k - \mathbf{A}_k\|. \quad (3.22)$$



**Figura 3.4.** Exemplo de um conjunto de imagens do objeto mais simples possível: uma barra reta de comprimento constante, observada em posições distintas. As projeções dos pontos-chave são identificadas por  $\mathcal{P}_n$  e suas sombras por  $\mathcal{S}_n$ .

Os pontos  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{B}_k$  são pontos-chave  $\mathbf{P}_n$  da cena. Tais pontos são mapeados, por meio da Eq. (3.13), a dados de entrada e incógnitas previamente estabelecidos.

A Restrição 3 corresponde a estabelecer relações entre ocorrências e barras: dizer que uma certa ocorrência  $k$  corresponde à barra  $b$  equivale a dizer que

$$d_k = c_b. \quad (3.23)$$

Como são utilizadas várias imagens, cada barra ocorre várias vezes e temos que para cada índice  $b$  há uma lista de índices  $k$  correspondentes. Portanto, ainda que o número de ocorrências seja bem superior ao de barras, a Eq. (3.22) não insere novas incógnitas no processo, já que todos os comprimentos  $d_k$  são mapeados para algum  $c_b$  por meio da Eq. (3.23).

Na montagem do sistema de equações, a Eq. (3.22) gera uma equação para cada ocorrência identificada nas imagens, num total de  $K$  equações.

A seguir são apresentados três exemplos que ilustram a relação entre barras e ocorrências. O primeiro demonstra o processo de descrição da instância mais simples possível do problema: uma barra reta observada em posições distintas. O segundo mostra que às vezes é possível reduzir o número de incógnitas quando se dispõe de informações prévias sobre os objetos da cena. O último exemplo, dividido em duas partes, demonstra que as barras não são limitadas a arestas dos objetos e que muitas vezes pode-se extrair uma descrição mais rica da cena, criando um modelo mais robusto que pode melhorar a qualidade dos resultados obtidos.

**Exemplo 1** Este exemplo, baseado na Figura 3.4, apresenta o objeto mais simples possível que pode ser contemplado pelo método deste trabalho: uma única barra reta, observada em várias posições.

Nesta instância temos uma única barra ( $B = 1$ ): portanto, um único comprimento desconhecido,  $c_1$ . Pode-se também identificar três ocorrências nas imagens ( $K = 3$ ), onde cada ocorrência corresponde ao par de pontos vistos em cada imagem.

No escopo deste exemplo, a Eq. (3.22) será usada como base para escrever as equações advindas da Restrição 3. Para a primeira ocorrência ( $k = 1$ ) — uma ocorrência da barra  $b = 1$  (única barra), ligando os pontos  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  —, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}_1 = \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{B}_1 = \mathbf{P}_2 \\ d_1 = c_1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = \|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\|. \quad (3.24a)$$

De maneira similar, a segunda ocorrência ( $k = 2$ ), também da barra  $b = 1$  e que liga os pontos  $\mathbf{P}_3$  e  $\mathbf{P}_4$ , deduzimos:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}_2 = \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{B}_2 = \mathbf{P}_4 \\ d_2 = c_1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = \|\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3\|. \quad (3.24b)$$

Finalmente, a última ocorrência ( $k = 3$ ) da mesma barra ( $b = 1$ ) liga os pontos  $\mathbf{P}_5$  e  $\mathbf{P}_6$ :

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}_3 = \mathbf{P}_5 \\ \mathbf{B}_3 = \mathbf{P}_6 \\ d_3 = c_1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = \|\mathbf{P}_6 - \mathbf{P}_5\|. \quad (3.24c)$$

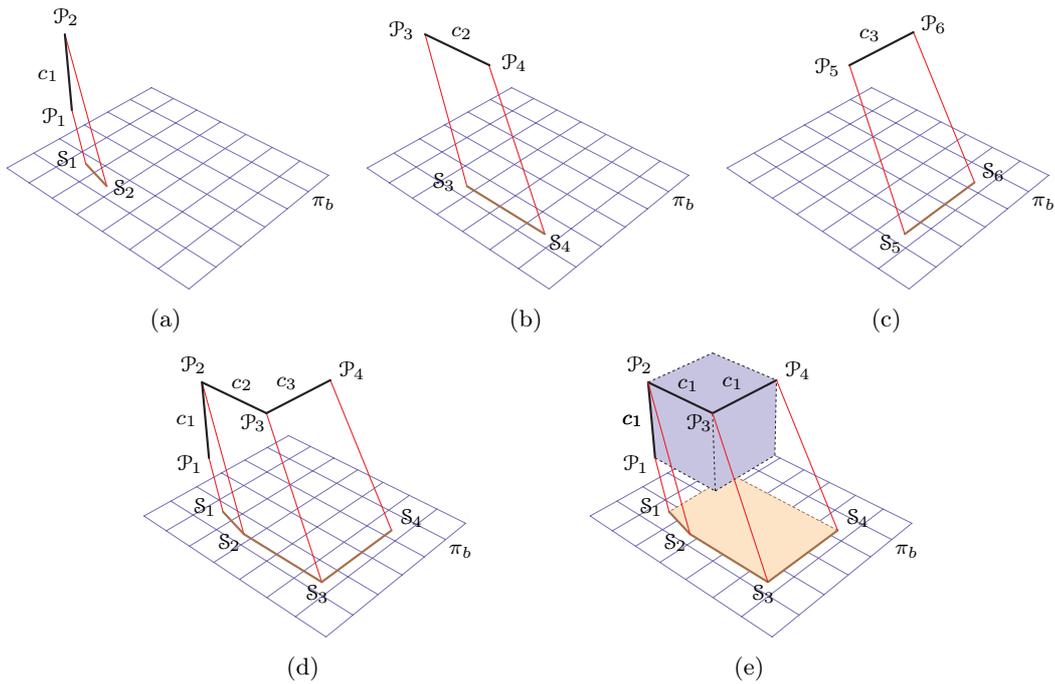
**Exemplo 2** O interesse deste exemplo é demonstrar que o conhecimento de informações sobre a cena e seus objetos pode diminuir o número de incógnitas do problema, o que tende a melhorar a qualidade dos resultados obtidos.

As Figuras 3.5(a)–(c) exibem três ocorrências localizadas em uma imagem. Os pontos-chave e suas sombras são identificados por  $\mathcal{P}_n$  e  $\mathcal{S}_n$ , respectivamente, e os comprimentos das ocorrências por  $c_b$ .

Sem qualquer informação adicional sobre os objetos observados, considera-se que os seis pontos são distintos e que as três ocorrências são de barras diferentes. Portanto, o número de incógnitas observado na imagem é:

Profundidade da fonte de luz ( $\lambda$ )		1
Profundidades dos pontos-chave ( $\gamma_n$ )	$N =$	6
Comprimentos das barras ( $c_b$ )	$B =$	3
		<hr style="width: 100px; margin: 0 auto;"/>
Número de incógnitas		10

Entretanto, se for sabido que as três ocorrências compartilham suas extremidades (por exemplo, são arestas adjacentes de um poliedro), então essa informação pode ser embutida na descrição do problema, pela repetição de pontos na descrição das ocorrências (Figura 3.5(d)). O número de pontos-chave diminui, reduzindo a quantidade de profundidades a serem calculadas:



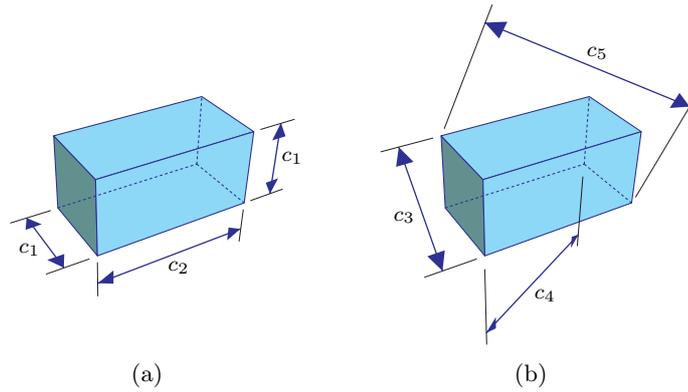
**Figura 3.5.** O conhecimento prévio de informações sobre a cena pode reduzir o número de incógnitas. (a)–(c) Sem informação específica, três pares de pontos ( $\mathcal{P}_1$ – $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{P}_3$ – $\mathcal{P}_4$ ,  $\mathcal{P}_5$ – $\mathcal{P}_6$ ) são descritos como ocorrências de três barras distintas. (d) O conhecimento de que algumas extremidades são comuns reduz o número de pontos-chave de 6 para 4. (e) O conhecimento de que as barras são arestas de um mesmo cubo reduz o número de barras de 3 para 1.

Profundidade da fonte de luz ( $\lambda$ )	1
Profundidades dos pontos-chave ( $\gamma_n$ )	$N = 4$
Comprimentos das barras ( $c_b$ )	$B = 3$
Número de incógnitas	<u>8</u>

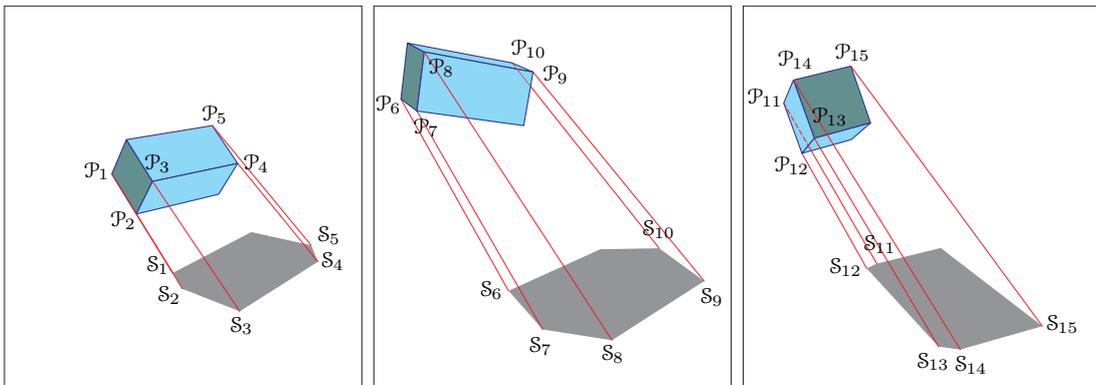
Para completar o exemplo, considere-se que a informação mais completa disponível sobre a cena é o fato de que as ocorrências observadas são algumas arestas de um cubo (Figura 3.5(e)): surge, portanto, a restrição de que trata-se de uma única barra (já que todas possuem um único comprimento,  $c_1$ ), reduzindo ainda mais a quantidade de incógnitas:

Profundidade da fonte de luz ( $\lambda$ )	1
Profundidades dos pontos-chave ( $\gamma_n$ )	$N = 4$
Comprimentos das barras ( $c_b$ )	$B = 1$
Número de incógnitas	<u>6</u>

É interessante observar que a riqueza de informações sobre a cena foi capaz de reduzir, neste exemplo, o número de incógnitas quase pela metade.



**Figura 3.6.** Medidas do paralelepípedo que serve de base para o exemplo de identificação de barras e ocorrências: (a) medidas principais (arestas); (b) medidas secundárias (diagonais).



**Figura 3.7.** Exemplo de um conjunto de imagens do paralelepípedo da Figura 3.6 em várias posições. Cada uma exibe os pontos de interesse ( $\mathcal{P}_n$ ) e as suas sombras correspondentes ( $\mathcal{S}_n$ ).

**Exemplo 3a** A Figura 3.6 apresenta um paralelepípedo do qual sabe-se, a princípio, que duas faces opostas são quadradas (estas são exibidas com uma tonalidade mais escura nas imagens): portanto, há apenas dois comprimentos distintos para as arestas, ou duas barras ( $B = 2$ ). Convencionemos chamar o menor comprimento de  $c_1$  (os lados das faces quadradas) e o maior de  $c_2$  (os lados maiores das faces retangulares). Estas medidas são vistas na Figura 3.6(a).

A Figura 3.7 apresenta três imagens adquiridas pela câmera, capturando este paralelepípedo em posições diferentes. Os pontos relevantes (aqueles em que tanto o ponto do objeto quanto a sua sombra são localizáveis na imagem) são identificados e indexados.

Com base na indexação dos pontos vista nas figuras, identificamos a primeira ocorrência, indexada por  $k = 1$ : o par de pontos  $\langle 1, 2 \rangle$ , extremos de uma aresta menor

(barra  $b = 1$ ). Fazendo as substituições sobre a Eq. (3.22):

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}_1 = \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{B}_1 = \mathbf{P}_2 \\ d_1 = c_1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = \|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\|. \quad (3.25a)$$

A mesma barra ( $b = 1$ ) pode ser identificada em uma nova ocorrência, correspondente ao par  $\langle 2, 3 \rangle$ . Esta ocorrência será identificada pelo índice  $k = 2$ , de onde temos:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}_2 = \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{B}_2 = \mathbf{P}_3 \\ d_2 = c_1 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = \|\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2\|. \quad (3.25b)$$

Nota-se que o ponto  $\mathbf{P}_2$  foi utilizado tanto na Eq. (3.25a) quanto na Eq. (3.25b). Desta maneira está sendo informado que os extremos das duas ocorrências compartilham as mesmas coordenadas espaciais: portanto, há apenas uma profundidade desconhecida ( $\gamma_2$ , neste caso) associada a este vértice. Este artifício de especificar um mesmo ponto como extremo de várias ocorrências deve ser usado sempre que possível.

A próxima ocorrência ( $k = 3$ ) liga os pontos  $\langle 3, 4 \rangle$  e corresponde à barra maior ( $b = 2$ ), de onde se obtém:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}_3 = \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{B}_3 = \mathbf{P}_4 \\ d_3 = c_2 \end{array} \right\} \Rightarrow c_2 = \|\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3\|. \quad (3.25c)$$

Por extensão do raciocínio, as demais ocorrências podem ser identificadas nas imagens e convertidas em novas relações, fornecendo o restante das equações:

$$\begin{array}{lll} c_1 = \|\mathbf{P}_5 - \mathbf{P}_4\| & c_1 = \|\mathbf{P}_7 - \mathbf{P}_6\| & c_1 = \|\mathbf{P}_8 - \mathbf{P}_7\| \\ c_2 = \|\mathbf{P}_9 - \mathbf{P}_8\| & c_1 = \|\mathbf{P}_{10} - \mathbf{P}_9\| & c_1 = \|\mathbf{P}_{12} - \mathbf{P}_{11}\| \\ c_2 = \|\mathbf{P}_{13} - \mathbf{P}_{12}\| & c_2 = \|\mathbf{P}_{14} - \mathbf{P}_{11}\| & c_1 = \|\mathbf{P}_{14} - \mathbf{P}_{13}\| \\ c_1 = \|\mathbf{P}_{15} - \mathbf{P}_{14}\|. & & \end{array} \quad (3.25d)$$

**Exemplo 3b** A descrição das ocorrências exibida nas Eqs. (3.25a)–(d) já constitui uma instância completa para o problema. Entretanto, este conjunto de dados, embora suficiente, não é o mais completo possível: se lembrarmos que a definição de “barra” se refere a *qualquer* par de pontos com distância fixa, a análise dos pontos vistos na Figura 3.7 permite especificar um conjunto bem maior de ocorrências, como se verá a seguir.

Dado que se conhece que todos os pontos são parte de um mesmo objeto rígido, então a distância de qualquer par de pontos é constante. Especificamente, além dos

comprimentos das arestas  $c_1$  e  $c_2$ , temos também: a diagonal da face quadrada,  $c_3$ ; a diagonal da face retangular,  $c_4$ ; e a diagonal do paralelepípedo,  $c_5$ . Os comprimentos citados correspondem a três novas barras e são exibidos na Figura 3.6(b).

Dessa maneira, podemos descrever uma série de novas restrições sobre o mesmo conjunto de pontos:

$$\begin{array}{lll}
 c_3 = \|\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_1\| & c_4 = \|\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_2\| & c_4 = \|\mathbf{P}_5 - \mathbf{P}_3\| \\
 c_4 = \|\mathbf{P}_5 - \mathbf{P}_1\| & c_5 = \|\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_1\| & c_5 = \|\mathbf{P}_5 - \mathbf{P}_2\| \\
 c_3 = \|\mathbf{P}_8 - \mathbf{P}_6\| & c_4 = \|\mathbf{P}_9 - \mathbf{P}_7\| & c_4 = \|\mathbf{P}_{10} - \mathbf{P}_6\| \\
 c_4 = \|\mathbf{P}_{10} - \mathbf{P}_8\| & c_5 = \|\mathbf{P}_9 - \mathbf{P}_6\| & c_5 = \|\mathbf{P}_{10} - \mathbf{P}_7\| \\
 c_3 = \|\mathbf{P}_{15} - \mathbf{P}_{13}\| & c_4 = \|\mathbf{P}_{15} - \mathbf{P}_{11}\| & c_4 = \|\mathbf{P}_{13} - \mathbf{P}_{11}\| \\
 c_4 = \|\mathbf{P}_{14} - \mathbf{P}_{12}\| & c_5 = \|\mathbf{P}_{15} - \mathbf{P}_{12}\|. & 
 \end{array}$$

Portanto, com a adição de apenas três incógnitas ( $c_3$ ,  $c_4$  e  $c_5$ ) foi possível descrever mais 17 restrições, tornando o sistema menos sensível à interferência de ruídos: no Exemplo 3a foram identificadas  $K = 13$  ocorrências, e com as novas barras foi possível chegar a  $K = 30$  ocorrências.

### 3.1.5 Ocorrência e propagação dos ruídos

No processo de aquisição de imagens por uma câmera, há várias fontes potenciais de ruídos. Para este trabalho, é de particular interesse a ocorrência dos ruídos que distorcem o processo projetivo e corrompem as coordenadas bidimensionais dos pontos no domínio da imagem.

As principais fontes de ruídos espaciais são: (i) as distorções causadas pelas lentes; (ii) as limitações da amostragem, causadas pelo caráter finito da resolução da câmera; e (iii) a inexatidão da localização de pontos, vértices, extremos, arestas, etc. na imagem, independentemente da localização ser manual ou por meio de algoritmos automatizados.

As distorções devidas às lentes fogem ao escopo deste trabalho. Conforme citado anteriormente, considera-se que os dados de entrada já foram tratados para a correção dessas distorções, caso sejam relevantes.

Os ruídos causados pela amostragem e pela localização de pontos podem ser entendidos como vetores bidimensionais que são adicionados às coordenadas reais. Os componentes desse vetor podem ser modelados como valores aleatórios que obedecem a uma distribuição gaussiana, de média zero e desvio-padrão proporcional ao nível de ruídos: quanto mais severos forem os erros de amostragem e localização de pontos, maior é o desvio-padrão.

Como consequência da ocorrência de ruídos, boa parte das equações e relações expostas anteriormente neste capítulo não podem mais ser consideradas exatas, mas sim

aproximadas: de maneira geral, espera-se que não exista nenhum conjunto de valores para as incógnitas capaz de satisfazer a *todas* as equações. A solução, então, é encontrar valores que as satisfaçam da melhor maneira possível, segundo uma métrica que quantifique os erros e penalize os desvios sobre as restrições impostas. Assim, o sistema é convertido em um problema de otimização, cujo objetivo é minimizar essa função de erro.

Como o modelo de ruídos adotado é baseado em desvios gaussianos no plano de imagem, a melhor maneira de quantificar os erros é através do quadrado das distâncias euclidianas, em pixels, entre os pontos observados na imagem e um certo conjunto de elementos geométricos (pontos e retas) que são as variáveis-objetivo.

Como o método proposto é dividido em duas partes — na primeira determina-se  $\mathcal{L}$  e na segunda faz-se a reconstrução tridimensional da cena —, temos dois problemas de otimização distintos. As subseções seguintes tratam de cada um deles.

### 3.1.5.1 Determinação da projeção da fonte de luz

Para o problema bidimensional — a determinação de  $\mathcal{L}$  —, a Eq. (3.21) estabelece uma relação direta entre dados do problema (as coordenadas de  $\mathcal{P}_n$  e  $\mathcal{S}_n$ ) e as incógnitas procuradas (as coordenadas de  $\mathcal{L}$ ). Esta equação pode ser reescrita para colocar a incógnita em função dos dados conhecidos:

$$\mathcal{L} \in \overline{\mathcal{P}_n \mathcal{S}_n}. \quad (3.26)$$

Em outras palavras: idealmente,  $\mathcal{L}$  é o encontro de todas as retas  $\overline{\mathcal{P}_n \mathcal{S}_n}$ , para  $1 \leq n \leq N$  (Figura 3.8(a)). Entretanto, por causa da ocorrência de ruídos, provavelmente não haverá um ponto de encontro comum entre todas as retas quando  $N > 2$  (Figura 3.8(b)): o melhor é definir  $\mathcal{L}$  como sendo a origem de um feixe de retas  $\{\mathbf{r}_n\}$  que minimiza a função de erro, baseada na distância entre cada reta  $\mathbf{r}_n$  e os pontos  $\mathcal{P}_n$  e  $\mathcal{S}_n$ . Formalmente:

$$\mathbf{r}_n \ni \mathcal{L} \quad (3.27a)$$

e

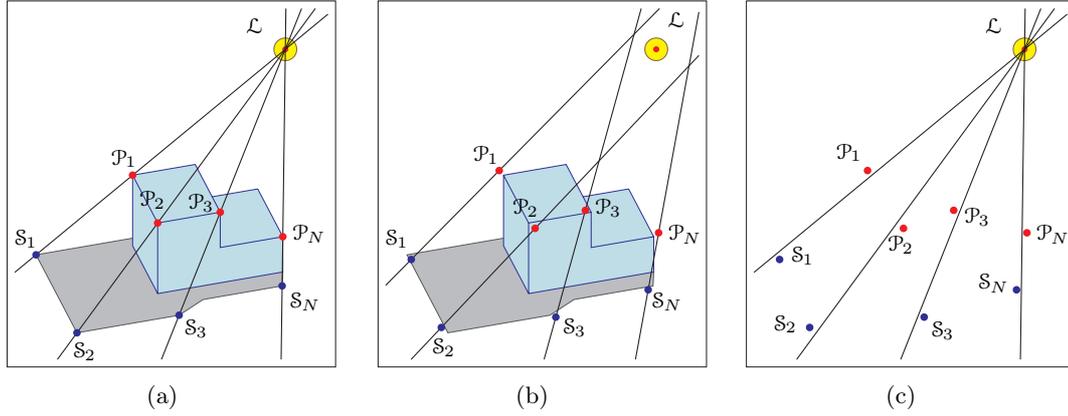
$$\mathbf{r}_n = \arg \min_{\mathbf{r}_n} [\text{dist}^2(\mathbf{r}_n, \mathcal{P}_n) + \text{dist}^2(\mathbf{r}_n, \mathcal{S}_n)]. \quad (3.27b)$$

Ora, qualquer reta que minimiza a distância quadrática a um par de pontos passa obrigatoriamente pelo ponto médio entre eles:

$$\mathcal{M}_n \in \mathbf{r}_n, \quad (3.28)$$

onde

$$\mathcal{M}_n \triangleq \frac{\mathcal{P}_n + \mathcal{S}_n}{2}, \quad (3.29)$$



**Figura 3.8.** Proposição do problema bidimensional: (a) Na ausência de ruídos, cada reta  $\overline{\mathcal{P}_n \mathcal{S}_n}$  contém a projeção da fonte de luz,  $\mathcal{L}$ ; (b) Na prática, as coordenadas de  $\mathcal{P}_n$  e  $\mathcal{S}_n$  estão corrompidas por ruídos, de modo que  $\mathcal{L}$  não se encontra na interseção das retas; (c) É necessário encontrar um feixe onde cada reta minimiza uma função de erro em relação a  $\mathcal{P}_n$  e  $\mathcal{S}_n$  (note que as retas não passam mais por esses pontos).

o que nos leva a uma definição mais concisa das retas  $\mathbf{r}_n$ :

$$\mathbf{r}_n = \overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n}. \quad (3.30)$$

A notação  $\overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n}$  passará a ser usada no lugar de  $\mathbf{r}_n$ , pois fica mais claro que as únicas incógnitas na determinação de uma reta  $\mathbf{r}_n$  são as coordenadas de  $\mathcal{L}$ . Assim, temos a Eq. (3.27b) reescrita da seguinte maneira:

$$\overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n} = \arg \min_{\mathcal{L}} [\text{dist}^2(\overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n}, \mathcal{P}_n) + \text{dist}^2(\overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n}, \mathcal{S}_n)]. \quad (3.31)$$

Como  $\overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n}$  passa pelo ponto médio entre  $\mathcal{P}_n$  e  $\mathcal{S}_n$ , a distância da reta aos dois pontos é a mesma e a condição apresentada na Eq. (3.31) pode ser simplificada para:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n} &= \arg \min_{\mathcal{L}} [2 \text{dist}^2(\overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n}, \mathcal{P}_n)] \\ &= \arg \min_{\mathcal{L}} [\text{dist}^2(\overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n}, \mathcal{P}_n)]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

O passo seguinte é desenvolver algebricamente a função de distância,  $\text{dist}(\overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n}, \mathcal{P}_n)$ . Isto pode ser conseguido com facilidade através do produto interno entre o vetor  $\mathcal{P}_n - \mathcal{M}_n$ , rotacionado  $90^\circ$  em um sentido fixo, e o vetor unitário que parte de  $\mathcal{M}_n$  em direção a  $\mathcal{L}$ :

$$\text{dist}(\overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n}, \mathcal{P}_n) = (\mathcal{P}_n - \mathcal{M}_n)^\top \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\mathcal{L} - \mathcal{M}_n}{\|\mathcal{L} - \mathcal{M}_n\|}. \quad (3.33)$$

Como o vetor  $\mathcal{L} - \mathcal{M}_n$  será citado várias vezes, ele será chamado simplesmente de  $\mathcal{D}_n$ :

$$\mathcal{D}_n \triangleq \mathcal{L} - \mathcal{M}_n, \quad (3.34)$$

de onde temos:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n}, \mathcal{P}_n) &= (\mathcal{P}_n - \mathcal{M}_n)^\top \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\mathcal{D}_n}{\sqrt{\mathcal{D}_n^\top \cdot \mathcal{D}_n}} \\ &= \begin{bmatrix} -(\mathcal{P}_n^{(v)} - \mathcal{M}_n^{(v)}) \\ \mathcal{P}_n^{(u)} - \mathcal{M}_n^{(u)} \end{bmatrix}^\top \cdot \frac{\mathcal{D}_n}{\sqrt{\mathcal{D}_n^\top \cdot \mathcal{D}_n}}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

que é a base da função cujo somatório dos quadrados deverá ser minimizado. Segundo a métrica apresentada na Eq. (3.32), resolver o problema bidimensional corresponde a encontrar o ponto de mínimo global para a seguinte função:

$$\begin{aligned} f(\mathcal{L}^{(u)}, \mathcal{L}^{(v)}) &= \sum_{n=1}^N \text{dist}^2(\overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n}, \mathcal{P}_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \left\{ \begin{bmatrix} -(\mathcal{P}_n^{(v)} - \mathcal{M}_n^{(v)}) \\ \mathcal{P}_n^{(u)} - \mathcal{M}_n^{(u)} \end{bmatrix}^\top \cdot \frac{\mathcal{D}_n}{\sqrt{\mathcal{D}_n^\top \cdot \mathcal{D}_n}} \right\}^2, \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{\mathcal{D}_n^\top \cdot \mathcal{D}_n} \left( \begin{bmatrix} -(\mathcal{P}_n^{(v)} - \mathcal{M}_n^{(v)}) \\ \mathcal{P}_n^{(u)} - \mathcal{M}_n^{(u)} \end{bmatrix}^\top \cdot \mathcal{D}_n \right)^2, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde o que se procura é o seguinte:

$$\langle \mathcal{L}^{(u)}, \mathcal{L}^{(v)} \rangle = \arg \min f(\mathcal{L}^{(u)}, \mathcal{L}^{(v)}). \quad (3.37)$$

O desenvolvimento da solução para essa equação será apresentado posteriormente na Subseção 3.2.1.

### 3.1.5.2 Reconstrução da cena e recuperação da fonte de luz

A segunda etapa do método — a recuperação das coordenadas tridimensionais dos pontos da cena e da fonte de luz — é feita com base na Restrição 2 e na Restrição 3, representadas, respectivamente, pelas Eqs. (3.20) e (3.22). Essas equações serão expandidas para levar em consideração as distorções causadas pelos ruídos.

A maior dificuldade nesta etapa está no fato de que as restrições em questão descrevem relações no universo tridimensional, enquanto os ruídos devem ser modelados no domínio da imagem. Assim, é necessário construir funções de erro que mensurem desvios em pixels. Como cada uma das duas restrições se refere a equações distintas,

serão desenvolvidas três funções de erro: serão chamadas de  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$  e  $\varepsilon'''$  e desenvolvidas a seguir.

**Função de erro sobre a Restrição 2 (Formação de sombras):** A Eq. (3.20) apresenta a relação ideal entre a fonte de luz, os pontos da cena e as suas sombras. Para levar em consideração a interferência dos ruídos, é melhor converter essa equação na definição de um ponto no plano-base,  $\mathbf{T}_n$ :

$$\mathbf{T}_n \triangleq \overline{\mathbf{L}\mathbf{P}_n} \cap \pi_b \quad (3.38)$$

e afirmar que idealmente  $\mathbf{S}_n = \mathbf{T}_n$ . Neste escopo, a distância entre os dois pontos,  $\text{dist}(\mathbf{S}_n, \mathbf{T}_n)$ , estabelece uma medida de erro. Porém, esta métrica é desinteressante pois, como já foi discutido, os erros devem ser mensurados no domínio da imagem.

A medida estatisticamente ótima, neste caso, é comparar as coordenadas de  $\mathcal{S}_n$  com a projeção de  $\mathbf{T}_n$  — definida por analogia à Eq. (3.6):

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_n \\ 1 \end{bmatrix} \propto \mathbf{M}_P \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_n \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Da diferença entre  $\mathcal{J}_n$  e  $\mathcal{S}_n$  define-se a métrica de erro, que será expressada a seguir por duas funções de erro — uma para cada componente (horizontal e vertical) da diferença:

$$\varepsilon'_n(\dots) = \mathcal{J}_n^{(u)} - \mathcal{S}_n^{(u)} \quad (3.40a)$$

$$\varepsilon''_n(\dots) = \mathcal{J}_n^{(v)} - \mathcal{S}_n^{(v)}. \quad (3.40b)$$

(A notação “ $(\dots)$ ” será usada temporariamente para indicar que os parâmetros da função são desconhecidos e serão determinados posteriormente.) Evidentemente, o quadrado da distância entre os pontos é a soma dos quadrados das duas funções:

$$\|\mathcal{J}_n - \mathcal{S}_n\|^2 = \varepsilon_n'^2(\dots) + \varepsilon_n''^2(\dots). \quad (3.41)$$

Estas funções serão expandidas a seguir para que sejam representadas em termos dos dados de entrada e das incógnitas.

A reta  $\overline{\mathbf{L}\mathbf{P}_n}$  apresentada na Eq. (3.38) pode ser parametrizada segundo uma variável  $\alpha_n$  da seguinte maneira:

$$\overline{\mathbf{L}\mathbf{P}_n} = \mathbf{L} + \alpha_n(\mathbf{P}_n - \mathbf{L}). \quad (3.42)$$

Pela aplicação das Eqs. (3.13) e (3.16), temos a representação em função das incógnitas:

$$\overline{\mathbf{L}\mathbf{P}_n} = \mathbf{C} + \lambda \mathbf{1} + \alpha_n(\gamma_n \mathbf{p}_n - \lambda \mathbf{1}). \quad (3.43)$$

O cruzamento da reta com o plano-base,  $\{z = 0\}$ , define o ponto  $\mathbf{T}_n$ :

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{C} + \lambda \mathbf{I} + \alpha_n (\gamma_n \mathbf{p}_n - \lambda \mathbf{I}), \quad (3.44)$$

onde  $\alpha_n$  é tal que  $\mathbf{T}_n^{(z)} = 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(z)} + \lambda \mathbf{I}^{(z)} + \alpha_n (\gamma_n \mathbf{p}_n^{(z)} - \lambda \mathbf{I}^{(z)}) = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_n = \frac{\mathbf{C}^{(z)} + \lambda \mathbf{I}^{(z)}}{\lambda \mathbf{I}^{(z)} - \gamma_n \mathbf{p}_n^{(z)}}. &\quad (3.45) \end{aligned}$$

Substituindo (3.45) em  $\mathbf{T}_n$ :

$$\mathbf{T}_n = \begin{bmatrix} \frac{\left(\chi_n^{(1)} \gamma_n + \chi_n^{(2)}\right) \lambda + \chi_n^{(3)} \gamma_n}{\mathbf{I}^{(z)} \lambda - \mathbf{p}_n^{(z)} \gamma_n} \\ \frac{\left(\chi_n^{(4)} \gamma_n + \chi_n^{(5)}\right) \lambda + \chi_n^{(6)} \gamma_n}{\mathbf{I}^{(z)} \lambda - \mathbf{p}_n^{(z)} \gamma_n} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

sendo as constantes  $\chi_n^{(*)}$  definidas abaixo:

$$\chi_n^{(1)} = \mathbf{p}_n^{(x)} \mathbf{I}^{(z)} - \mathbf{p}_n^{(z)} \mathbf{I}^{(x)} \quad (3.47a)$$

$$\chi_n^{(2)} = \mathbf{C}^{(x)} \mathbf{I}^{(z)} - \mathbf{C}^{(z)} \mathbf{I}^{(x)} \quad (3.47b)$$

$$\chi_n^{(3)} = \mathbf{p}_n^{(x)} \mathbf{C}^{(z)} - \mathbf{p}_n^{(z)} \mathbf{C}^{(x)} \quad (3.47c)$$

$$\chi_n^{(4)} = \mathbf{p}_n^{(y)} \mathbf{I}^{(z)} - \mathbf{p}_n^{(z)} \mathbf{I}^{(y)} \quad (3.47d)$$

$$\chi_n^{(5)} = \mathbf{C}^{(y)} \mathbf{I}^{(z)} - \mathbf{C}^{(z)} \mathbf{I}^{(y)} \quad (3.47e)$$

$$\chi_n^{(6)} = \mathbf{p}_n^{(y)} \mathbf{C}^{(z)} - \mathbf{p}_n^{(z)} \mathbf{C}^{(y)}. \quad (3.47f)$$

Da Eq. (3.39) temos:

$$\mathcal{J}_n^{(u)} = \frac{\mathbf{M}_{P1,1} \mathbf{T}_n^{(x)} + \mathbf{M}_{P1,2} \mathbf{T}_n^{(y)} + \mathbf{M}_{P1,4}}{\mathbf{M}_{P3,1} \mathbf{T}_n^{(x)} + \mathbf{M}_{P3,2} \mathbf{T}_n^{(y)} + \mathbf{M}_{P3,4}} \quad (3.48a)$$

$$\mathcal{J}_n^{(v)} = \frac{\mathbf{M}_{P2,1} \mathbf{T}_n^{(x)} + \mathbf{M}_{P2,2} \mathbf{T}_n^{(y)} + \mathbf{M}_{P2,4}}{\mathbf{M}_{P3,1} \mathbf{T}_n^{(x)} + \mathbf{M}_{P3,2} \mathbf{T}_n^{(y)} + \mathbf{M}_{P3,4}}. \quad (3.48b)$$

A expansão das Eqs. (3.40a) e (3.40b) nos fornece o seguinte (já substituindo “ $(\dots)$ ”

pelos parâmetros relevantes,  $\lambda$  e  $\gamma_n$ ):

$$\varepsilon'_n(\lambda, \gamma_n) = \frac{\left(\psi_n^{(1)} \gamma_n + \psi_n^{(2)}\right) \lambda + \psi_n^{(3)} \gamma_n}{\left(\psi_n^{(7)} \gamma_n + \psi_n^{(8)}\right) \lambda + \psi_n^{(9)} \gamma_n} \quad (3.49a)$$

$$\varepsilon''_n(\lambda, \gamma_n) = \frac{\left(\psi_n^{(4)} \gamma_n + \psi_n^{(5)}\right) \lambda + \psi_n^{(6)} \gamma_n}{\left(\psi_n^{(7)} \gamma_n + \psi_n^{(8)}\right) \lambda + \psi_n^{(9)} \gamma_n}, \quad (3.49b)$$

onde, para simplificação de representação e de cálculos, convencionou-se o seguinte conjunto de constantes  $\psi_n^{(*)}$ :

$$\begin{bmatrix} \psi_n^{(1)} & \psi_n^{(2)} & \psi_n^{(3)} \\ \psi_n^{(4)} & \psi_n^{(5)} & \psi_n^{(6)} \\ \psi_n^{(7)} & \psi_n^{(8)} & \psi_n^{(9)} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_P \begin{bmatrix} \chi_n^{(1)} & \chi_n^{(2)} & \chi_n^{(3)} \\ \chi_n^{(4)} & \chi_n^{(5)} & \chi_n^{(6)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}^{(z)} & -\mathbf{p}^{(z)} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

### Função de erro sobre a Restrição 3 (Constância do comprimento de barras):

O comprimento de uma determinada ocorrência, definido na Eq. (3.22), depende das coordenadas espaciais dos pontos extremos. Tais pontos são identificados por  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{B}_k$  e correspondem a um par da coleção de pontos  $\mathbf{P}_n$ .

No escopo de uma dada ocorrência  $k$ , convencionaremos indexar os pontos extremos por  $i$  e  $j$ , de modo que temos:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{A}_k \quad (3.51a)$$

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{B}_k. \quad (3.51b)$$

Da Eq. (3.13) representamos os pontos extremos através de constantes e incógnitas preestabelecidas:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{C} + \gamma_i \mathbf{p}_i \quad (3.52a)$$

$$\mathbf{B}_k = \mathbf{C} + \gamma_j \mathbf{p}_j. \quad (3.52b)$$

O comprimento da ocorrência  $d_k$  pode ser escrito pela substituição destes termos na Eq. (3.22):

$$\begin{aligned} d_k &= \|\mathbf{B}_k - \mathbf{A}_k\| \\ &= \sqrt{\left(\gamma_j \mathbf{p}_j^{(x)} - \gamma_i \mathbf{p}_i^{(x)}\right)^2 + \left(\gamma_j \mathbf{p}_j^{(y)} - \gamma_i \mathbf{p}_i^{(y)}\right)^2 + \left(\gamma_j \mathbf{p}_j^{(z)} - \gamma_i \mathbf{p}_i^{(z)}\right)^2} \\ &= \sqrt{\gamma_i^2 + \varphi_k \gamma_i \gamma_j + \gamma_j^2}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

sendo que a constante  $\varphi_k$  possui o valor calculado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\varphi_k &\triangleq -2 \left( \mathbf{p}_i^{(x)} \mathbf{p}_j^{(x)} + \mathbf{p}_i^{(y)} \mathbf{p}_j^{(y)} + \mathbf{p}_i^{(z)} \mathbf{p}_j^{(z)} \right) \\ &= -2 \mathbf{p}_i^\top \cdot \mathbf{p}_j.\end{aligned}\quad (3.54)$$

Na ausência de ruídos, a Eq. (3.23) estabelece a relação exata de igualdade entre  $d_k$  e o comprimento da barra correspondente à ocorrência,  $c_b$ . Na prática, esses comprimentos podem apresentar uma diferença, quantificada por  $\delta_k$ :

$$\delta_k \triangleq d_k - c_b. \quad (3.55)$$

O valor de  $\delta_k$  estabelece uma medida de erro no domínio tridimensional. No entanto, como o que interessa para o problema são as medidas no domínio da imagem, é necessário multiplicar esta medida por um fator que a coloque na mesma grandeza das medidas em pixels. Este fator é a razão entre o comprimento bidimensional, medido na imagem, e o comprimento tridimensional, expressado pela fração  $\rho_k$ :

$$\rho_k \triangleq \frac{l_k}{d_k}, \quad (3.56)$$

onde  $l_k$  é a distância, em pixels, entre as projeções de  $\mathbf{A}_k$  e  $\mathbf{B}_k$ :

$$\begin{aligned}l_k &\triangleq \|\mathcal{P}_j - \mathcal{P}_i\| \\ &= \sqrt{\left(\mathcal{P}_j^{(u)} - \mathcal{P}_i^{(u)}\right)^2 + \left(\mathcal{P}_j^{(v)} - \mathcal{P}_i^{(v)}\right)^2}.\end{aligned}\quad (3.57)$$

Da Eq. (3.53):

$$\rho_k = \frac{l_k}{\sqrt{\gamma_i^2 + \varphi_k \gamma_i \gamma_j + \gamma_j^2}}. \quad (3.58)$$

A função de erro  $\varepsilon_k'''(\gamma_i, \gamma_j, c_b)$  combina a Eq. (3.55) com o fator da Eq. (3.58):

$$\begin{aligned}\varepsilon_k'''(\gamma_i, \gamma_j, c_b) &= \rho_k \delta_k \\ &= \frac{l_k \left( \sqrt{\gamma_i^2 + \varphi_k \gamma_i \gamma_j + \gamma_j^2} - c_b \right)}{\sqrt{\gamma_i^2 + \varphi_k \gamma_i \gamma_j + \gamma_j^2}}.\end{aligned}\quad (3.59)$$

A Eq. (3.59) apresenta uma medida de erro para cada ocorrência: são, portanto,  $K$  medidas obtidas por esta etapa.

**Função geral de erros quadráticos para o problema tridimensional:** Para fechar o raciocínio, o objetivo procurado é totalizar os desvios quadráticos em uma

função global de erro:

$$\begin{aligned}
g(\lambda, \gamma_1, \dots, \gamma_N, c_1, \dots, c_B) &= \sum_{n=1}^N \|\mathcal{J}_n - \mathcal{S}_n\|^2 + \sum_{k=1}^K \rho_k \delta_k \\
&= \sum_{n=1}^N \left[ \varepsilon_n'^2(\lambda, \gamma_n) + \varepsilon_n''^2(\lambda, \gamma_n) \right] + \sum_{k=1}^K \varepsilon_k'''^2(\gamma_i, \gamma_j, c_b) \\
&= \sum_{n=1}^N \varepsilon_n'^2(\lambda, \gamma_n) + \sum_{n=1}^N \varepsilon_n''^2(\lambda, \gamma_n) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^K \varepsilon_k'''^2(\gamma_i, \gamma_j, c_b). \tag{3.60}
\end{aligned}$$

Desta maneira, o que se deseja é encontrar o conjunto de valores para as incógnitas que minimiza esse somatório geral de erros quadráticos:

$$\langle \lambda, \gamma_1, \dots, \gamma_N, c_1, \dots, c_B \rangle = \arg \min g(\lambda, \gamma_1, \dots, \gamma_N, c_1, \dots, c_B). \tag{3.61}$$

O algoritmo implementado neste trabalho para se chegar a esse ponto de mínimo é discutido na seção seguinte.

## 3.2 Questões algorítmicas

A seção anterior apresentou o desenvolvimento do problema de forma a reduzi-lo a duas funções de erro:  $f(\mathcal{L}^{(u)}, \mathcal{L}^{(v)})$  (Eq. (3.36)), que corresponde à etapa bidimensional do problema, e  $g(\lambda, \gamma_1, \dots, \gamma_N, c_1, \dots, c_B)$  (Eq. (3.60)), correspondente à etapa tridimensional.

Determinar o ponto de mínimo global de ambas as funções não é uma tarefa trivial, já que não há uma solução fechada para a estrutura de ambas. Em casos como estes, uma alternativa é lançar mão de processos iterativos, onde se procura convergir para o ponto de interesse através de alguma função auxiliar.

Neste trabalho, foi adotado o método iterativo de *Levenberg-Marquardt* [Levenberg, 1944; Marquardt, 1963], que se baseia na análise do gradiente em cada iteração para encontrar um ponto de mínimo (onde a derivada parcial da função em relação a todas as incógnitas é zero). Este método é bastante adequado para a solução de problemas de otimização em que a função-objetivo consiste na soma dos quadrados de várias funções componentes. Em termos gerais, dado que  $\mathbf{X}$  é o conjunto de incógnitas, o método de Levenberg-Marquardt encontra pontos de mínimo de uma dada função  $u(\mathbf{X})$  na seguinte forma:

$$u(\mathbf{X}) = a^2(\mathbf{X}) + b^2(\mathbf{X}) + c^2(\mathbf{X}) + \dots, \tag{3.62}$$

onde  $a(\mathbf{X})$ ,  $b(\mathbf{X})$ , etc. são as funções componentes. Note que tanto a função apresentada na Eq. (3.36) quanto a da Eq. (3.60) possuem a estrutura exigida.

Para o método de Levenberg-Marquardt, exige-se que:

1. as funções componentes em questão sejam deriváveis em relação a cada uma das incógnitas, pelo menos no domínio de interesse;
2. seja fornecida uma estimativa inicial para as incógnitas (de preferência uma estimativa não muito distante dos valores procurados — dessa maneira, espera-se que ocorra a convergência para o ponto de mínimo global).

A primeira exigência está relacionada à construção da *matriz jacobiana*, que nada mais é do que uma matriz onde cada linha representa uma função componente e as colunas contêm a derivada das funções em relação a cada incógnita.

O restante desta seção dedica-se a descrever as derivadas (as jacobianas) e a forma de obtenção de boas estimativas iniciais.

### 3.2.1 Algoritmo para o problema bidimensional

De volta à Eq. (3.36), para a construção da jacobiana relacionada à etapa bidimensional do problema são necessárias as derivadas parciais de cada uma das  $N$  funções de distância entre as retas  $\overline{\mathcal{L} \mathcal{M}_n}$  e os pontos  $\mathcal{P}_n$ . Estas derivadas são vistas a seguir:

$$\frac{\partial \text{dist}(\mathbf{r}_n, \mathcal{P}_n)}{\partial \mathcal{L}^{(u)}} = \begin{bmatrix} -(\mathcal{P}_n^{(v)} - \mathcal{M}_n^{(v)}) \\ \mathcal{P}_n^{(u)} - \mathcal{M}_n^{(u)} \end{bmatrix}^\top \cdot \frac{\mathcal{D}_n^{(v)}}{(\mathcal{D}_n^\top \cdot \mathcal{D}_n)^{3/2}} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{D}_n^{(v)} \\ -\mathcal{D}_n^{(u)} \end{bmatrix} \quad (3.63a)$$

$$\frac{\partial \text{dist}(\mathbf{r}_n, \mathcal{P}_n)}{\partial \mathcal{L}^{(v)}} = \begin{bmatrix} -(\mathcal{P}_n^{(v)} - \mathcal{M}_n^{(v)}) \\ \mathcal{P}_n^{(u)} - \mathcal{M}_n^{(u)} \end{bmatrix}^\top \cdot \frac{\mathcal{D}_n^{(u)}}{(\mathcal{D}_n^\top \cdot \mathcal{D}_n)^{3/2}} \cdot \begin{bmatrix} -\mathcal{D}_n^{(v)} \\ \mathcal{D}_n^{(u)} \end{bmatrix}. \quad (3.63b)$$

A jacobiana relacionada ao problema bidimensional será representada por  $\mathbf{J}_b$  e é construída da seguinte maneira:

$$\mathbf{J}_b(\mathcal{L}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \text{dist}(\mathbf{r}_1, \mathcal{P}_1)}{\partial \mathcal{L}^{(u)}} & \frac{\partial \text{dist}(\mathbf{r}_1, \mathcal{P}_1)}{\partial \mathcal{L}^{(v)}} \\ \frac{\partial \text{dist}(\mathbf{r}_2, \mathcal{P}_2)}{\partial \mathcal{L}^{(u)}} & \frac{\partial \text{dist}(\mathbf{r}_2, \mathcal{P}_2)}{\partial \mathcal{L}^{(v)}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \text{dist}(\mathbf{r}_N, \mathcal{P}_N)}{\partial \mathcal{L}^{(u)}} & \frac{\partial \text{dist}(\mathbf{r}_N, \mathcal{P}_N)}{\partial \mathcal{L}^{(v)}} \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

### 3.2.2 Estimativas iniciais para o problema bidimensional

Como segunda exigência para o método de Levenberg-Marquardt, é necessário fornecer uma estimativa inicial para as incógnitas do problema. No caso bidimensional, isto corresponde a estabelecer um par de coordenadas iniciais para a projeção da fonte de luz, que será identificado por  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

Em condições ideais — na ausência de ruídos —, é obedecida a relação de colinearidade entre as projeções de pontos, sombras e fonte de luz, expressada pela Eq. (3.26). Sob condições reais, tanto os pontos  $\mathcal{P}_n$  como  $\mathcal{S}_n$  sofrem desvios durante o processo de aquisição.

Não obstante, espera-se que o desvio dessas retas  $\overline{\mathcal{P}_n \mathcal{S}_n}$  não descaracterize o feixe original: os cruzamentos entre pares de retas devem ocorrer numa região mais ou menos limitada, dentro da qual provavelmente se encontra o ponto  $\mathcal{L}$  procurado.

Com base nisto, há mais de uma maneira de se estabelecer um ponto que melhor represente, por assim dizer, um ponto de encontro aproximado de todas as retas<sup>1</sup>: esta será a estimativa  $\tilde{\mathcal{L}}$ . Neste trabalho foi adotada uma métrica simples:  $\tilde{\mathcal{L}}$  é o ponto que minimiza o quadrado das distâncias euclidianas a todas as retas  $\overline{\mathcal{P}_n \mathcal{S}_n}$ . Formalmente:

$$\tilde{\mathcal{L}} \triangleq \arg \min_{\tilde{\mathcal{L}}} \sum_{n=1}^N \text{dist}^2(\tilde{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{P}_n \mathcal{S}_n}). \quad (3.65)$$

A distância entre o ponto  $\tilde{\mathcal{L}}$  e uma reta  $\overline{\mathcal{P}_n \mathcal{S}_n}$  pode ser facilmente calculada pelo produto interno entre o vetor  $(\tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{P}_n)$  e um vetor unitário perpendicular à reta. O sentido deste vetor unitário não importa, desde que seja consistente ao longo de todos os cálculos.

Para expressar este produto interno, será definido primeiro um vetor unitário,  $\mathcal{V}_n$ , paralelo à reta  $\overline{\mathcal{P}_n \mathcal{S}_n}$ :

$$\mathcal{V}_n \triangleq \frac{\mathcal{S}_n - \mathcal{P}_n}{\|\mathcal{S}_n - \mathcal{P}_n\|}. \quad (3.66)$$

O produto interno em questão é apresentado a seguir, definindo a função de distância algébrica entre o ponto e a reta. Note que o vetor  $\mathcal{V}_n$  é pré-multiplicado por uma matriz de rotação de  $90^\circ$ , para torná-lo perpendicular à reta  $\overline{\mathcal{P}_n \mathcal{S}_n}$ :

$$\begin{aligned} \text{dist}(\tilde{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{P}_n \mathcal{S}_n}) &= \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathcal{V}_n \right)^\top \cdot (\tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{P}_n) \\ &= (\tilde{\mathcal{L}}^{(u)} - \mathcal{P}_n^{(u)}) \mathcal{V}_n^{(v)} - (\tilde{\mathcal{L}}^{(v)} - \mathcal{P}_n^{(v)}) \mathcal{V}_n^{(u)}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Retornando à Eq. (3.65), o que se deseja é minimizar a função do somatório das

---

<sup>1</sup>Note que esta sugestão é diferente do processo de estimação de  $\mathcal{L}$  apresentado na Subseção 3.1.5.1: lá, novas retas são estimadas para tentar recuperar o feixe original; aqui, o ponto é procurado com base nas retas originalmente informadas.

distâncias quadráticas, expressada abaixo:

$$\begin{aligned} e(\tilde{\mathcal{L}}) &= \sum_{n=1}^N \text{dist}^2(\tilde{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{P}_n \mathcal{S}_n}) \\ &= \sum_{n=1}^N \left[ \left( \mathcal{L}^{(u)} - \mathcal{P}_n^{(u)} \right) \mathcal{V}_n^{(v)} - \left( \mathcal{L}^{(v)} - \mathcal{P}_n^{(v)} \right) \mathcal{V}_n^{(u)} \right]^2. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Para calcular as coordenadas de  $\mathcal{L}$  que minimizam a função de erro  $e(\tilde{\mathcal{L}})$ , deve-se derivá-la em relação a  $\tilde{\mathcal{L}}^{(u)}$  e  $\tilde{\mathcal{L}}^{(v)}$  e igualar as derivadas a zero, para encontrar os pontos de mínimo. Este processo é apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{\delta e}{\delta \tilde{\mathcal{L}}^{(u)}} = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}^{(u)} \sum_{n=1}^N \mathcal{V}_n^{(v)^2} - \tilde{\mathcal{L}}^{(v)} \sum_{n=1}^N \mathcal{V}_n^{(u)} \mathcal{V}_n^{(v)} &= \sum_{n=1}^N \left( \mathcal{P}_n^{(u)} \mathcal{V}_n^{(v)^2} - \mathcal{P}_n^{(v)} \mathcal{V}_n^{(u)} \mathcal{V}_n^{(v)} \right) \end{aligned} \quad (3.69a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta e}{\delta \tilde{\mathcal{L}}^{(v)}} = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}^{(u)} \sum_{n=1}^N \mathcal{V}_n^{(u)} \mathcal{V}_n^{(v)} - \tilde{\mathcal{L}}^{(v)} \sum_{n=1}^N \mathcal{V}_n^{(u)^2} &= \sum_{n=1}^N \left( \mathcal{P}_n^{(u)} \mathcal{V}_n^{(u)} \mathcal{V}_n^{(v)} - \mathcal{P}_n^{(v)} \mathcal{V}_n^{(u)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.69b)$$

O sistema linear final que determina o par de coordenadas  $\mathcal{L}$  é a simples composição das Eqs. (3.69a) e (3.69b), mostrada na forma matricial a seguir:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \mathcal{V}_n^{(u)} \mathcal{V}_n^{(v)} & - \sum_{n=1}^N \mathcal{V}_n^{(u)^2} \\ \sum_{n=1}^N \mathcal{V}_n^{(v)^2} & - \sum_{n=1}^N \mathcal{V}_n^{(u)} \mathcal{V}_n^{(v)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{L}}^{(u)} \\ \tilde{\mathcal{L}}^{(v)} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \left( \mathcal{P}_n^{(u)} \mathcal{V}_n^{(v)^2} - \mathcal{P}_n^{(v)} \mathcal{V}_n^{(u)} \mathcal{V}_n^{(v)} \right) \\ \sum_{n=1}^N \left( \mathcal{P}_n^{(u)} \mathcal{V}_n^{(u)} \mathcal{V}_n^{(v)} - \mathcal{P}_n^{(v)} \mathcal{V}_n^{(u)^2} \right) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

A Eq. (3.70) fornece uma solução fechada e linear para o cálculo das coordenadas da estimativa da projeção da fonte de luz,  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

### 3.2.3 Algoritmo para o problema tridimensional

A função quadrática de erro do problema tridimensional, vista na Eq. (3.60), é composta por somatórios sobre os quadrados das três funções  $\varepsilon'_n$ ,  $\varepsilon''_n$  e  $\varepsilon'''_k$ , apresentadas nas Eqs. (3.49a), (3.49b) e (3.59), respectivamente. Para a construção da jacobiana da

etapa tridimensional, temos as seguintes derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon'_n(\lambda, \gamma_n)}{\partial \lambda} &= \frac{\psi_n^{(1)} \gamma_n + \psi_n^{(2)}}{\left(\psi_n^{(7)} \gamma_n + \psi_n^{(8)}\right) \lambda + \psi_n^{(9)} \gamma_n} - \\ &- \frac{\left(\psi_n^{(1)} \gamma_n + \psi_n^{(2)}\right) \lambda + \psi_n^{(3)} \gamma_n}{\left[\left(\psi_n^{(7)} \gamma_n + \psi_n^{(8)}\right) \lambda + \psi_n^{(9)} \gamma_n\right]^2} \left(\psi_n^{(7)} \gamma_n + \psi_n^{(8)}\right) \end{aligned} \quad (3.71a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon'_n(\lambda, \gamma_n)}{\partial \gamma_n} &= \frac{\psi_n^{(1)} \lambda + \psi_n^{(3)}}{\left(\psi_n^{(7)} \gamma_n + \psi_n^{(8)}\right) \lambda + \psi_n^{(9)} \gamma_n} - \\ &- \frac{\left(\psi_n^{(1)} \gamma_n + \psi_n^{(2)}\right) \lambda + \psi_n^{(3)} \gamma_n}{\left[\left(\psi_n^{(7)} \gamma_n + \psi_n^{(8)}\right) \lambda + \psi_n^{(9)} \gamma_n\right]^2} \left(\psi_n^{(7)} \lambda + \psi_n^{(9)}\right) \end{aligned} \quad (3.71b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon''_n(\lambda, \gamma_n)}{\partial \lambda} &= \frac{\psi_n^{(4)} \gamma_n + \psi_n^{(5)}}{\left(\psi_n^{(7)} \gamma_n + \psi_n^{(8)}\right) \lambda + \psi_n^{(9)} \gamma_n} - \\ &- \frac{\left(\psi_n^{(4)} \gamma_n + \psi_n^{(5)}\right) \lambda + \psi_n^{(6)} \gamma_n}{\left[\left(\psi_n^{(7)} \gamma_n + \psi_n^{(8)}\right) \lambda + \psi_n^{(9)} \gamma_n\right]^2} \left(\psi_n^{(7)} \gamma_n + \psi_n^{(8)}\right) \end{aligned} \quad (3.71c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon''_n(\lambda, \gamma_n)}{\partial \gamma_n} &= \frac{\psi_n^{(4)} \lambda + \psi_n^{(6)}}{\left(\psi_n^{(7)} \gamma_n + \psi_n^{(8)}\right) \lambda + \psi_n^{(9)} \gamma_n} - \\ &- \frac{\left(\psi_n^{(4)} \gamma_n + \psi_n^{(5)}\right) \lambda + \psi_n^{(6)} \gamma_n}{\left[\left(\psi_n^{(7)} \gamma_n + \psi_n^{(8)}\right) \lambda + \psi_n^{(9)} \gamma_n\right]^2} \left(\psi_n^{(7)} \lambda + \psi_n^{(9)}\right) \end{aligned} \quad (3.71d)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_k'''(\gamma_i, \gamma_j, c_b)}{\partial \gamma_i} = \frac{l_k c_b (2 \gamma_i + \varphi_f \gamma_j)}{(\gamma_i^2 + \varphi_k \gamma_i \gamma_j + \gamma_j^2)^{3/2}} \quad (3.71e)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_k'''(\gamma_i, \gamma_j, c_b)}{\partial \gamma_j} = \frac{l_k c_b (\varphi_f \gamma_i + 2 \gamma_j)}{(\gamma_i^2 + \varphi_k \gamma_i \gamma_j + \gamma_j^2)^{3/2}} \quad (3.71f)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_k'''(\gamma_i, \gamma_j, c_b)}{\partial c_b} = -\frac{l_k}{\sqrt{\gamma_i^2 + \varphi_k \gamma_i \gamma_j + \gamma_j^2}}. \quad (3.71g)$$

A jacobiana relacionada ao problema tridimensional será representada por  $\mathbf{J}_t$  e é

construída da seguinte maneira:

$$\mathbf{J}_t(\lambda, \gamma_1, \dots, \gamma_N, c_1, \dots, c_B) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon'_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varepsilon'_1}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon'_1}{\partial \gamma_N} & \frac{\partial \varepsilon'_1}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon'_1}{\partial c_B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon'_K}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varepsilon'_K}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon'_K}{\partial \gamma_N} & \frac{\partial \varepsilon'_K}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon'_K}{\partial c_B} \\ \frac{\partial \varepsilon''_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varepsilon''_1}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon''_1}{\partial \gamma_N} & \frac{\partial \varepsilon''_1}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon''_1}{\partial c_B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon''_N}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varepsilon''_N}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon''_N}{\partial \gamma_N} & \frac{\partial \varepsilon''_N}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon''_N}{\partial c_B} \\ \frac{\partial \varepsilon'''_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varepsilon'''_1}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon'''_1}{\partial \gamma_N} & \frac{\partial \varepsilon'''_1}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon'''_1}{\partial c_B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon'''_N}{\partial \lambda} & \frac{\partial \varepsilon'''_N}{\partial \gamma_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon'''_N}{\partial \gamma_N} & \frac{\partial \varepsilon'''_N}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial \varepsilon'''_N}{\partial c_B} \end{bmatrix}. \quad (3.72)$$

### 3.2.4 Estimativas iniciais para o problema tridimensional

Assim como a etapa bidimensional deste trabalho, esta etapa também será resolvida pelo método de Levenberg-Marquardt — requerendo, portanto, um conjunto de valores iniciais para as incógnitas. Estes valores serão identificados por  $\tilde{\lambda}, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_N, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_B$ .

O cálculo das estimativas iniciais baseia-se em uma heurística apoiada em uma suposição simples sobre a cena: a de que a distância entre a câmera e a fonte de luz está na mesma ordem de grandeza da distância entre a câmera e os pontos de sombra da cena.<sup>2</sup> Em geral, esta suposição permite calcular um bom ponto de partida para o método iterativo.

1. Sabe-se que as coordenadas tridimensionais dos pontos de sombra,  $\mathbf{S}_n$ , são constantes do problema e podem ser trivialmente calculadas através das Eqs. (3.10) e (3.11);
2. Com base na suposição apresentada, calcula-se a estimativa inicial de  $\tilde{\lambda}$  (a distância entre o centro de projeção e a fonte de luz) da seguinte maneira:

$$\tilde{\lambda} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{S}_n - \mathbf{C}\|. \quad (3.73)$$

Por analogia à Eq. (3.16), define-se a estimativa inicial da posição de luz,  $\tilde{\mathbf{L}}$ , que será utilizada somente no escopo desta subseção para concluir o raciocínio corrente:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{C} + \tilde{\lambda} \mathbf{1}. \quad (3.74)$$

---

<sup>2</sup>Afirmar que os valores “estão na mesma ordem de grandeza” não é o mesmo que afirmar que os valores “são aproximadamente iguais”: o primeiro caso refere-se apenas a uma idéia da grandeza dos números.

3. O passo seguinte é definir estimativas para as coordenadas tridimensionais dos pontos da cena,  $\tilde{\mathbf{P}}_n$ , com base no ponto de interseção entre as retas  $\overline{\mathbf{C}\mathbf{P}'_n}$  e  $\overline{\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{S}_n}$ . Entretanto, como essas duas retas dificilmente se cruzam na prática, é necessário projetá-las sobre um plano para garantir a existência de uma interseção. Os passos intermediários são vistos a seguir e se aplicam a cada índice  $1 \leq n \leq N$ :
- Define-se um plano  $\tau_n$  que contém os pontos  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{P}'_n$  e  $\mathbf{S}_n$ ;
  - Define-se o ponto  $\tilde{\mathbf{K}}_n$  como sendo a projeção de  $\tilde{\mathbf{L}}$  sobre o plano  $\tau_n$ ;
  - Define-se o ponto  $\tilde{\mathbf{P}}_n$  como sendo a interseção entre as retas  $\overline{\mathbf{C}\mathbf{P}'_n}$  e  $\overline{\tilde{\mathbf{K}}_n\mathbf{S}_n}$ :

$$\tilde{\mathbf{P}}_n \triangleq \overline{\mathbf{C}\mathbf{P}'_n} \cap \overline{\tilde{\mathbf{K}}_n\mathbf{S}_n}. \quad (3.75)$$

Com base nas coordenadas de  $\tilde{\mathbf{P}}_n$ , define-se as estimativas para as incógnitas  $\tilde{\gamma}_n$  com base na Eq. (3.12):

$$\tilde{\gamma}_n \triangleq \|\tilde{\mathbf{P}}_n - \mathbf{C}\|. \quad (3.76)$$

4. Já a estimativa inicial para o comprimento de uma determinada barra de índice  $b$  pode ser obtida pela média dos comprimentos de todas as ocorrências correspondentes a essa barra. Os extremos de uma ocorrência  $k$  são aqui representados por  $\tilde{\mathbf{A}}_k$  e  $\tilde{\mathbf{B}}_k$ , que correspondem a um par do conjunto de pontos  $\tilde{\mathbf{P}}_n$  (a relação foi estabelecida nas Eqs. (3.51a) e (3.51b)). Portanto, as estimativas  $\tilde{c}_b$  devem ser calculadas da seguinte maneira, para cada índice  $1 \leq b \leq B$ :

$$\tilde{c}_b \triangleq \frac{1}{\text{n}^\circ \text{ de ocorrências de } b} \sum_{k \in \{\text{ocorrências de } b\}} \|\tilde{\mathbf{B}}_k - \tilde{\mathbf{A}}_k\|. \quad (3.77)$$

### 3.3 Aplicação da metodologia

As seções anteriores apresentaram todos os conceitos e formulações matemáticas que compõem a metodologia do trabalho desenvolvido.

Para fechar as informações apresentadas neste capítulo, a seqüência para aplicação da metodologia é apresentada abaixo, na forma de um guia de referência rápida:

- Como dados de entrada, deve-se dispor das seguintes informações:
  - Parâmetros de calibração da câmera:* Consistem nas informações apresentadas na Subseção 3.1.1: centro de projeção,  $\mathbf{C}$ ; vetor-alvo,  $\mathbf{t}$ ; vetor superior,  $\mathbf{u}$ ; distância focal,  $f$ ; dimensões do elemento sensor,  $d_u$  e  $d_v$ ; e coordenadas do centro da imagem,  $(o_u, o_v)$ ;
  - Projeções dos pontos-chave e de suas sombras:* (Subseção 3.1.2) Consistem nas coordenadas bidimensionais, em pixels, dos pontos-chave da cena e de suas respectivas sombras, localizadas na imagem — manualmente ou com

o auxílio de ferramentas de processamento de imagens, como detectores de quinas e bordas;

c) *Descrição de barras e ocorrências*: (Subseção 3.1.4) Consiste nas relações entre pares de pontos, que formam ocorrências, e em grupos de ocorrências que correspondem à mesma barra (ou seja, que possuem o mesmo comprimento).

2. Calcular as estimativas iniciais para a projeção da fonte de luz,  $\tilde{\mathcal{L}}$ , com base na Eq. (3.70);
3. Calcular a projeção da fonte de luz,  $\mathcal{L}$ , utilizando o processo iterativo de Levenberg-Marquardt, partindo da estimativa inicial  $\tilde{\mathcal{L}}$  e utilizando a matriz jacobiana para o problema bidimensional,  $\mathbf{J}_b$ , apresentada na Eq. (3.64);
4. Calcular as estimativas iniciais para as seguintes variáveis: a profundidade da fonte de luz,  $\tilde{\lambda}$  (Eq. (3.73)), as profundidades dos pontos de cena,  $\tilde{\gamma}_n$  (Eq. (3.76)), e os comprimentos das barras,  $\tilde{c}_b$  (Eq. (3.77));
5. Calcular as variáveis do problema tridimensional: a profundidade da fonte de luz,  $\lambda$ , as profundidades dos pontos de cena,  $\gamma_n$ , e os comprimentos das barras,  $c_b$ , partindo das estimativas iniciais descritas no item anterior e utilizando a matriz jacobiana para o problema tridimensional,  $\mathbf{J}_t$ , apresentada na Eq. (3.72);
6. Calcular as coordenadas da fonte de luz,  $\mathbf{L}$ , com base na Eq. (3.16);
7. Calcular as coordenadas tridimensionais dos pontos-chave,  $\mathbf{P}_n$ , com base na Eq. (3.13).

## Capítulo 4

# Experimentos

Uma extensiva bateria de testes foi realizada para avaliar a robustez do método proposto. Os experimentos foram divididos em duas partes:

- Em primeiro lugar, foram feitas diversas simulações, onde um programa cria descrições geométricas de cenas virtuais aleatórias, projeta imagens dessas cenas, corrompe com ruídos as coordenadas dos pontos projetados e aplica o algoritmo de calibração proposto. Os resultados do processo de calibração são então comparados com a geometria da cena, permitindo-se assim realizar estudos sobre a influência de vários parâmetros — como a magnitude dos ruídos ou o número de barras e ocorrências — sobre a qualidade dos resultados;
- Em seguida, são apresentados resultados obtidos com cenas reais, com o propósito de demonstrar a validade prática do método.

Este capítulo tem por objetivo descrever tais testes, analisar os resultados obtidos de forma crítica e apresentar as conclusões obtidas a partir de tais análises. Cada seção descreverá, de maneira detalhada, toda a configuração adotada em cada caso de testes.

### 4.1 Experimentos simulados

As simulações foram feitas com o objetivo de observar a precisão dos resultados da calibração quando certos parâmetros do problema são modificados. Entre esses parâmetros, dois são de particular interesse: o número de ocorrências e a magnitude dos ruídos. Parece bastante razoável intuir que os resultados são mais precisos se o número de ocorrências for maior (quanto mais ocorrências, mais o sistema é sobredeterminado) e os ruídos forem menores. Os experimentos simulados visam não só comprovar essas hipóteses intuitivas como também quantificar experimentalmente o ganho de precisão.

Mais genericamente, as simulações foram feitas de modo a responder às seguintes questões:

1. Na ausência de ruídos, os resultados obtidos correspondem aos valores esperados?
2. Qual a influência da magnitude dos ruídos na precisão dos resultados?
3. Qual o ganho na qualidade dos resultados, se a cena for descrita com mais riqueza?
4. Em uma configuração típica do problema, qual é a precisão esperada para a calibração?

A primeira questão está relacionada à estabilidade do método: na ausência de ruídos, os resultados devem ser tão precisos quanto for possível<sup>1</sup>. A segunda questão analisa a robustez do algoritmo contra a influência dos ruídos: uma das medidas de qualidade de um método está em sua capacidade de produzir, na maioria dos casos, resultados aceitáveis para níveis comuns de ruídos.

A terceira questão trata do seguinte aspecto: uma instância do problema pode ser descrita com maior ou menor riqueza de detalhes, quando se sabe *a priori* que extremidades de algumas ocorrências são coincidentes ou que algumas barras possuem o mesmo comprimento e podem ser descritas como sendo uma única barra. Um exemplo prático dessa situação foi abordado na Subseção 3.1.4, Exemplo 2.

A quarta questão é mais empírica, já que o conceito de “configuração típica” é muito variável. No entanto, os experimentos realizados baseiam-se nos parâmetros de uma câmera real e em cenas compostas por objetos e iluminantes facilmente encontrados no dia-a-dia. A descrição detalhada da “configuração típica” adotada neste trabalho é apresentada nas seções seguintes.

#### 4.1.1 Parâmetros da câmera e da fonte

A configuração virtual que serve de base para as simulações é composta por uma câmera projetiva fixa, em relação ao sistema global de coordenadas (e, portanto, em relação ao plano-base), e por uma fonte de luz pontual igualmente fixa. A montagem adotada está ilustrada na Figura 4.1.

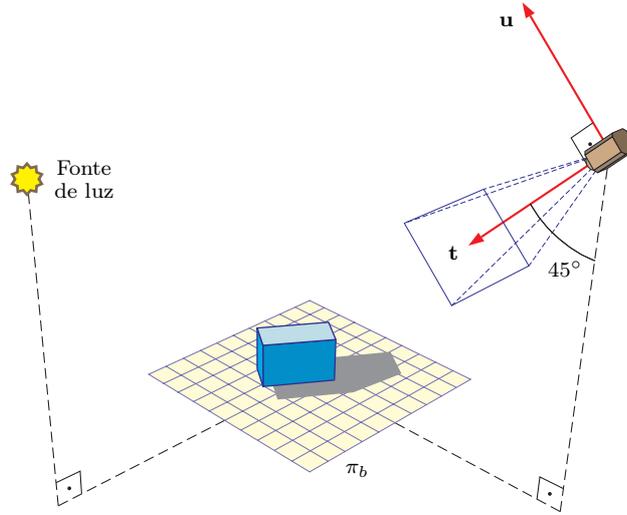
Os parâmetros de calibração da câmera, discutidos na Subseção 3.1.1, são apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2. Os parâmetros extrínsecos indicam que a câmera está inclinada para baixo em um ângulo de  $45^\circ$  em relação à horizontal (conforme o vetor-alvo,  $\mathbf{t}$ ) e sem ângulo de pendência em relação ao eixo principal (é a posição natural, onde retas verticais na cena são projetadas como retas verticais na imagem)<sup>2</sup>. Já os parâmetros intrínsecos configuram uma câmera com campo de visão (*field-of-view*) horizontal de  $33^\circ 31'$  e vertical de  $25^\circ 27'$ , aproximadamente.

A cena é iluminada por uma fonte pontual cujas coordenadas são apresentadas na Tabela 4.3. Por conveniência, são apresentadas também as coordenadas da projeção da

---

<sup>1</sup>Isto não significa que os resultados devem ser *exatos*, já que a resolução do sistema é limitada pela precisão numérica da máquina e dos métodos iterativos.

<sup>2</sup>O ângulo de pendência nulo é evidenciado pelo fato de que o vetor-alvo  $\mathbf{t}$  e o vetor superior  $\mathbf{u}$  formam um plano vertical — ou, o que é equivalente, o produto vetorial  $\mathbf{t} \times \mathbf{u}$  forma um vetor horizontal.



**Figura 4.1.** Montagem adotada nos experimentos simulados.

Coordenadas do centro de projeção	$\mathbf{C} = (0, -1000, 1100)$ mm
Vetor-alvo	$\mathbf{t} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \langle 0, 1, -1 \rangle$
Vetor superior	$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \langle 0, 1, 1 \rangle$

**Tabela 4.1.** Parâmetros extrínsecos de calibração da câmera para as simulações.

Distância focal	$f = 17$ mm
Dimensões do elemento sensor	$d_u \times d_v = 10 \mu\text{m} \times 10 \mu\text{m}$
Dimensões do sensor	1024 px $\times$ 768 px
Centro da imagem	$o = (o_u, o_v) = (512, 384)$ px

**Tabela 4.2.** Parâmetros intrínsecos de calibração da câmera para as simulações.

Posição no sistema global de coordenadas	$\mathbf{L}_{real} = (-1000, 0, 1000)$ mm
Distância da fonte ao centro de projeção	$\lambda_{real} = 1417.7$ mm
Posição da projeção sobre a imagem	$\mathcal{L}_{real} = (-1673.6, -1006.9)$ px
Distância da projeção ao centro de imagem	$\ \mathcal{L}_{real} - o\  = 2590.7$ px

**Tabela 4.3.** Parâmetros da fonte de luz.

fonte sobre a imagem<sup>3</sup>, em pixels, e a distância desta ao centro de imagem, que será a base para as medidas de erros relativos nos experimentos bidimensionais.

#### 4.1.2 Objetos da cena

Cada instância de um problema simulado consiste em gerar um certo conjunto de ocorrências, onde cada ocorrência corresponde a uma das barras colocada em uma posição

<sup>3</sup>A fonte está fora do campo de visão da câmera.

aleatória na cena. No entanto, o algoritmo para a geração de posições aleatórias da barra deve ser construído com cuidado, de modo a não gerar dados tendenciosos para o problema.

Todos os experimentos foram feitos com base em várias ocorrências de uma única barra, cujo comprimento será identificado por  $c$ . O processo de geração de pontos e ocorrências para as simulações é objeto das subseções seguintes.

#### 4.1.2.1 Gerador aleatório de pontos

Antes de mais nada, todos os pontos da cena — os extremos das ocorrências — devem ser *válidos*. Um ponto é considerado válido caso obedeça às seguintes restrições:

1. O ponto é visível pela câmera. Equivale a dizer que sua projeção sobre a imagem encontra-se nos limites físicos do sensor;
2. A sombra do ponto sobre o plano-base também é visível pela câmera;
3. A projeção do ponto sobre o eixo principal da câmera encontra-se a uma certa distância mínima do centro de projeção. Além disso, o ponto não se encontra atrás da câmera;
4. O ponto obedece a uma altura mínima, ou seja: encontra-se acima e a uma distância mínima do plano-base.

As restrições serão reexaminadas a seguir, para que sejam matematicamente bem estabelecidas:

1. Para que um ponto  $\mathbf{P}$  seja visível pela câmera, é necessário calcular as coordenadas de sua projeção na imagem,  $\mathcal{P}$ . Isto é feito trivialmente por analogia à Eq. (3.6):

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} \\ 1 \end{bmatrix} \propto \mathbf{M}_P \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Em seguida, checka-se se as coordenadas  $\mathcal{P}^{(u)}$  e  $\mathcal{P}^{(v)}$  estão dentro do intervalo físico do sensor.

2. Com base nas coordenadas da fonte de luz,  $\mathbf{L}$ , e de um ponto da cena,  $\mathbf{P}$ , as coordenadas tridimensionais de sua sombra  $\mathbf{S}$  podem ser calculadas através de uma transformação simples:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ 1 \end{bmatrix} \propto \mathbf{M}_S \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

Limite mínimo para $d_e$ , conforme a Eq. (4.5)	$d_{e\min} = 100$ mm
Altura mínima para os pontos da cena	$h_{\min} = 100$ mm

**Tabela 4.4.** Parâmetros adotados para definir a validade de pontos aleatórios.

onde a *matriz de projeção de sombras*  $\mathbf{M}_S$  é definida a seguir:

$$\mathbf{M}_S \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \top \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{L} \\ 0 & 0 & 1 & \perp \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mathbf{L}^{(z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \top \\ 0 & 1 & 0 & -\mathbf{L} \\ 0 & 0 & 1 & \perp \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

As coordenadas da projeção de  $\mathbf{S}$  na imagem são também feitas por analogia à Eq. (3.6):

$$\begin{bmatrix} \mathcal{S} \\ 1 \end{bmatrix} \propto \mathbf{M}_P \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

A verificação dos intervalos das coordenadas  $\mathcal{S}^{(u)}$  e  $\mathcal{S}^{(v)}$  segue a mesma regra para a checagem de  $\mathcal{P}^{(u)}$  e  $\mathcal{P}^{(v)}$ .

3. A distância algébrica entre o centro de projeção  $\mathbf{C}$  e a projeção do ponto  $\mathbf{P}$  sobre o eixo principal pode ser calculada de maneira bem simples:

$$d_e \triangleq (\mathbf{P} - \mathbf{C}) \cdot \mathbf{t}. \quad (4.5)$$

A terceira restrição de validade pode, portanto, ser escrita pela comparação de  $d_e$  com a distância mínima exigida:

$$d_e \geq d_{e\min}. \quad (4.6)$$

4. Finalmente, a altura mínima do ponto é estabelecida pela comparação direta da coordenada  $z$  do ponto com o limite estipulado:

$$\mathbf{P}^{(z)} \geq h_{\min}. \quad (4.7)$$

Os valores adotados para os limites  $d_{e\min}$  e  $h_{\min}$  são apresentados na Tabela 4.4. A verificação quanto às restrições de validade de um ponto é sumarizada no Algoritmo 4.1, `VERIFICA_SE_PONTO_É_VÁLIDO`.

- 
1. Dado um ponto tridimensional  $\mathbf{P} = [\mathbf{P}^{(x)}, \mathbf{P}^{(y)}, \mathbf{P}^{(z)}]^\top$ , calcule as coordenadas de sua sombra,  $\mathbf{S}$ , através da Eq. (4.2), e as projeções  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{S}$ , conforme as Eqs. (4.1) e (4.4);
  2. Se um dos pontos  $\mathcal{P}$  ou  $\mathcal{S}$  estiver fora dos limites da imagem, retorne **FALSO**;
  3. caso a distância algébrica entre o centro de projeção e a projeção do ponto sobre o eixo principal esteja abaixo do limite (ou seja, caso  $d_e < d_{e\min}$ , conforme a Eq. (4.6)), retorne **FALSO**;
  4. Caso a altura de  $\mathbf{P}$  esteja abaixo da altura mínima (ou seja, caso  $\mathbf{P}^{(z)} < h_{\min}$ , conforme a Eq. (4.7)), retorne **FALSO**;
  5. Retorne **VERDADEIRO**.
- 

**Algoritmo 4.1.** VERIFICA\_SE\_PONTO\_É\_VÁLIDO.

- 
1. Gere um ponto tridimensional  $\mathbf{P} = [\mathbf{P}^{(x)}, \mathbf{P}^{(y)}, \mathbf{P}^{(z)}]^\top$  cujas coordenadas são uniformemente aleatórias dentro do paralelepípedo mínimo;
  2. Se o resultado do algoritmo VERIFICA\_SE\_PONTO\_É\_VÁLIDO aplicado a  $\mathbf{P}$  for **FALSO**, retorne ao passo 1;
  3. Retorne o valor de  $\mathbf{P}$ .
- 

**Algoritmo 4.2.** GERA\_PONTO\_VÁLIDO.

Em última instância, todas as restrições apresentadas correspondem a definir um conjunto de planos no espaço, onde cada plano divide o universo tridimensional em dois semi-espacos — um contendo somente pontos inválidos, outro contendo pontos potencialmente válidos. A *região válida* — a região do espaço composta apenas por todos os pontos válidos — equivale à interseção de todos os semi-espacos de pontos potencialmente válidos e corresponde, portanto, a um poliedro convexo<sup>4</sup>. O fato de que a região válida é um poliedro bem definido facilita bastante o processo de obtenção de pontos válidos que sejam uniformemente aleatórios no espaço tridimensional:

Em primeiro lugar, define-se o menor paralelepípedo que contém a região válida e cujas arestas são todas paralelas a um dos eixos do sistema global de coordenadas. Este será chamado de *paralelepípedo mínimo*. A geração de pontos uniformemente aleatórios dentro do paralelepípedo mínimo é elementar: basta gerar triplas de coordenadas uniformemente aleatórias dentro do intervalo de cada coordenada.

Uma vez que um ponto é gerado aleatoriamente dentro do paralelepípedo, basta verificar se é válido, o que o restringe à região válida mas mantém o seu caráter de uniformidade aleatória espacial. O Algoritmo 4.2, GERA\_PONTO\_VÁLIDO, sumariza o processo de obtenção de pontos válidos aleatórios.

---

<sup>4</sup>Uma configuração inadequada da câmera e da fonte de luz pode criar uma situação em que não há pontos válidos no universo, ou seja, a região válida é nula. Tais configurações não se prestam como base para instâncias do problema.

- 
1. Gere um vetor tridimensional  $\mathbf{v} = \langle v_x, v_y, v_z \rangle$  cujos componentes sejam valores uniformemente aleatórios dentro do intervalo fechado  $[-1, 1]$ ;
  2. Repita o passo 1 enquanto  $\|\mathbf{v}\| = 0$  ou  $\|\mathbf{v}\| > 1$ ;
  3. Retorne o vetor  $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ .
- 

**Algoritmo 4.3.** GERA\_VETOR\_UNITÁRIO.

- 
1. Gere um ponto  $\mathbf{A}$  através do algoritmo GERA\_PONTO\_VÁLIDO e um vetor  $\mathbf{v}$  através do algoritmo GERA\_VETOR\_UNITÁRIO;
  2. Calcule o ponto  $\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{A} + c \cdot \mathbf{v}$ , onde  $c$  é o comprimento da barra;
  3. Se o resultado do algoritmo VERIFICA\_SE\_PONTO\_É\_VÁLIDO aplicado a  $\mathbf{B}$  for **FALSO**, retorne ao passo 2<sup>a</sup>;
  4. Retorne os pontos  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ .
- 

<sup>a</sup>É possível que o algoritmo fique preso na repetição entre os passos 2 e 3, pois corre-se o risco de que todos os pontos com distância  $c$  a partir de  $\mathbf{A}$  sejam inválidos. Para prevenir essa situação, após uma quantidade-limite de repetições o algoritmo retorna ao passo 1.

---

**Algoritmo 4.4.** GERA\_OCORRÊNCIA.

#### 4.1.2.2 Gerador aleatório de ocorrências

Uma vez que o processo de geração de pontos está bem definido, a geração de ocorrências é feita de maneira bem simples: gera-se um ponto que define um dos extremos da ocorrência e aplica-se um deslocamento correspondente ao comprimento da barra para uma direção aleatória, definindo-se assim a posição do outro extremo (desde que seja também um ponto válido). O único passo não-trivial é a escolha dessa direção, que não pode apresentar tendências a privilegiar certos valores.

Uma das maneiras de gerar direções randômicas não-tendenciosas está em desenvolver um algoritmo para gerar pontos uniformemente aleatórios na superfície de uma esfera de raio unitário: o vetor que parte do centro da esfera ao ponto escolhido indica a direção escolhida.

Para se chegar a esse gerador, pode-se também criar um algoritmo para escolher pontos uniformemente aleatórios no *volume* de uma esfera de raio unitário, excluindo o ponto central, e normalizar o vetor assim obtido. Finalmente, para obter pontos no volume de uma esfera, pode-se escrever, com muito mais facilidade, um algoritmo para obter pontos aleatórios no volume de um cubo que circunscreve a esfera e descartar os pontos externos à esfera (ou seja, os pontos que correspondem a vetores com módulo maior do que a unidade).

Este método para a geração de vetores aleatórios está sumarizado no Algoritmo 4.3, GERA\_VETOR\_UNITÁRIO. Com base neste método, o gerador aleatório de ocorrências é apresentado no Algoritmo 4.4, GERA\_OCORRÊNCIA.

- 
1. Através do algoritmo GERA\_OCORRÊNCIA, gere uma ocorrência representada pelos pontos extremos  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$ ;
  2. Calcule as coordenadas tridimensionais  $\mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{S}_2$  das sombras de  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$ , respectivamente, com base na Eq. (4.2);
  3. Calcule as coordenadas bidimensionais  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ , correspondentes aos pontos  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{S}_1$  e  $\mathbf{S}_2$ , conforme as Eqs. (4.1) e (4.4);
  4. Adicione a cada uma das coordenadas bidimensionais um ruído gaussiano de média 0 e desvio-padrão  $\sigma_N$ ;
  5. Retorne as coordenadas corrompidas de  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$ .
- 

**Algoritmo 4.5.** GERA\_DADOS\_DE\_OCORRÊNCIA.

### 4.1.3 Gerando instâncias do problema

Uma instância para o problema de calibração é composto pelo seguinte conjunto de dados:

- Dados de calibração da câmera;
- Coordenadas bidimensionais das projeções dos pontos da cena e de suas sombras, possivelmente corrompidas por ruídos;
- Relações entre pares de pontos projetados, definindo as ocorrências.

A calibração da câmera é constante para todas as instâncias e foi apresentada anteriormente (Subseção 4.1.1). A geração de coordenadas e ocorrências é apresentada a seguir.

Para modelar a interferência de ruídos que ocorrem nos casos reais, as simulações adotaram um ruído representado por um gerador de números aleatórios, gaussiano, aditivo de média zero e de desvio-padrão  $\sigma_N$ , que corresponde à magnitude do ruído simulado. O valor aleatório é adicionado às coordenadas em pixels, simulando os erros causados pela resolução de amostragem e pelos métodos de seleção de pixels em imagens.

As coordenadas bidimensionais dos pontos na imagem e as relações de ocorrências são obtidas pelo Algoritmo 4.5, GERA\_DADOS\_DE\_OCORRÊNCIA, que depende de  $\sigma_N$ .

O número de ocorrências que constitui uma instância do problema, identificado por  $K$ , é um dado também variável e importante para analisar o comportamento do método em diversas situações. Finalmente, a adoção de diferentes comprimentos para a barra,  $c$ , poderá trazer alteração na precisão dos resultados.

Uma instância depende, portanto, de valores para a magnitude dos ruídos,  $\sigma_N$ , para o número de ocorrências,  $K$ , e para o comprimento da barra,  $c$ . Uma vez fixados os três parâmetros, a construção de uma instância é feita por  $K$  chamadas a GERA\_DADOS\_DE\_OCORRÊNCIA.

#### 4.1.4 Organização dos experimentos

Como o método de calibração apresentado neste trabalho é dividido em duas etapas distintas — a obtenção das coordenadas bidimensionais da projeção da fonte na imagem,  $\mathcal{L}$  (Subseção 3.1.5.1), e a obtenção da profundidade da fonte,  $\lambda$  (Subseção 3.1.5.2) —, é bastante lógico dividir os experimentos também em duas grandes partes, que testam e analisam cada etapa separadamente.

Dessa maneira, serão apresentados:

- os *experimentos em duas dimensões*, que tratam especificamente do problema de recuperação das coordenadas de  $\mathcal{L}$ , em pixels, apresentados na Seção 4.2;
- os *experimentos em três dimensões*, que tratam da estimação de  $\lambda$ , em unidades da cena, apresentados na Seção 4.3.

## 4.2 Experimentos simulados em duas dimensões

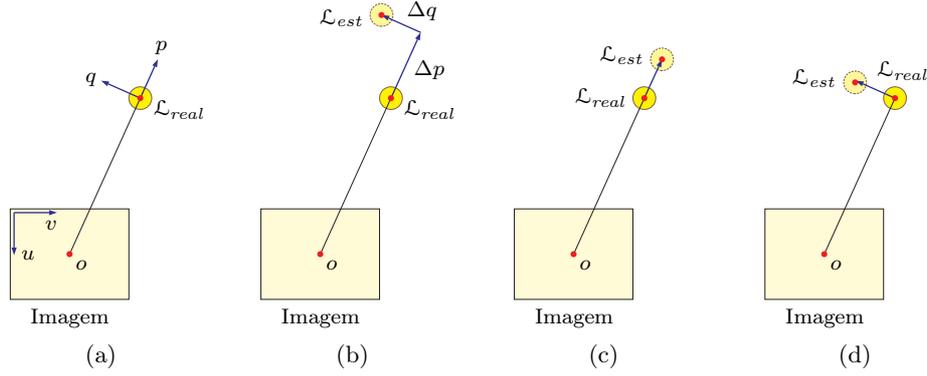
O objetivo dos experimentos em duas dimensões está na comparação das coordenadas reais da projeção da fonte de luz no universo da imagem com as coordenadas estimadas em cada instância do problema. Para que os valores sejam tratados com distinção, as coordenadas reais serão identificadas por  $\mathcal{L}_{real}$  e as estimadas por  $\mathcal{L}_{est}$ .

Em particular, o interesse destes experimentos está em estudar não os valores absolutos das coordenadas estimadas, mas sim os *desvios* em relação ao valor correto, representados pelo vetor  $\mathcal{L}_{est} - \mathcal{L}_{real}$ . Uma análise simples dos resultados seria a observação do módulo desse vetor,  $\|\mathcal{L}_{est} - \mathcal{L}_{real}\|$ , que permitiria analisar o desvio absoluto das estimações em pixels. Entretanto, essa análise é incompleta, pois não permite fazer qualquer observação sobre tendências de comportamento do algoritmo: por exemplo, uma tendência de produzir dados sistematicamente deslocados para uma dada direção.

Fica claro, portanto, que é necessário analisar o desvio como um vetor, não como um valor absoluto. Uma maneira de fazer isso é adotar um sistema de coordenadas específico para a análise dos desvios (não necessariamente alinhado com o sistema de coordenadas da imagem) e analisar as projeções do vetor-desvio sobre os eixos desse sistema.

Neste trabalho, foi adotado um sistema de coordenadas representado pelos eixos  $p$  e  $q$ , visto na Figura 4.2(a), onde o eixo  $p$  possui a mesma direção e sentido do vetor  $\|\mathcal{L}_{real} - o\|$  e o eixo  $q$  corresponde a  $p$  rotacionado  $90^\circ$  no sentido anti-horário. As projeções obtidas sobre os eixos  $p$  e  $q$  são chamadas de  $\Delta p$  (ou *desvio longitudinal*) e  $\Delta q$  (ou *desvio transversal*), respectivamente, e são ilustradas na Figura 4.2(b).

Essa convenção apresenta um aspecto interessante: as projeções longitudinais fornecem uma medida de desvio relacionada à distância a partir da imagem (projeções positivas indicam estimativas mais distantes do que o esperado, negativas indicam esti-



**Figura 4.2.** Medidas dos desvios das estimativas bidimensionais: (a) Convenção para os eixos  $p$  e  $q$ , ortogonais a  $\mathcal{L}_{real}-o$ ; (b) Decomposição do desvio observado em uma instância,  $\mathcal{L}_{est} - \mathcal{L}_{real}$ , em seus componentes  $\Delta p$  e  $\Delta q$ ; (c) Exemplo de desvio longitudinal ( $\Delta p \neq 0, \Delta q = 0$ ): fonte estimada mais distante do que a real, em relação ao centro de imagem; (d) Exemplo de desvio transversal ( $\Delta p = 0, \Delta q \neq 0$ ): fonte estimada com erro angular no sentido anti-horário, em relação ao centro de imagem.

Comprimento da barra	$c = 150 \text{ mm}$
Magnitude de erros	$\sigma_N \in \{0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0\} \text{ px}$
Número de ocorrências por instância	$K \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 30, 50\}$

**Tabela 4.5.** Parâmetros para os experimentos em 2D.

mativas mais próximas), conforme ilustrado na Figura 4.2(c), e as projeções transversais estão relacionadas a um desvio angular em relação ao centro da imagem, conforme ilustrado na Figura 4.2(d).

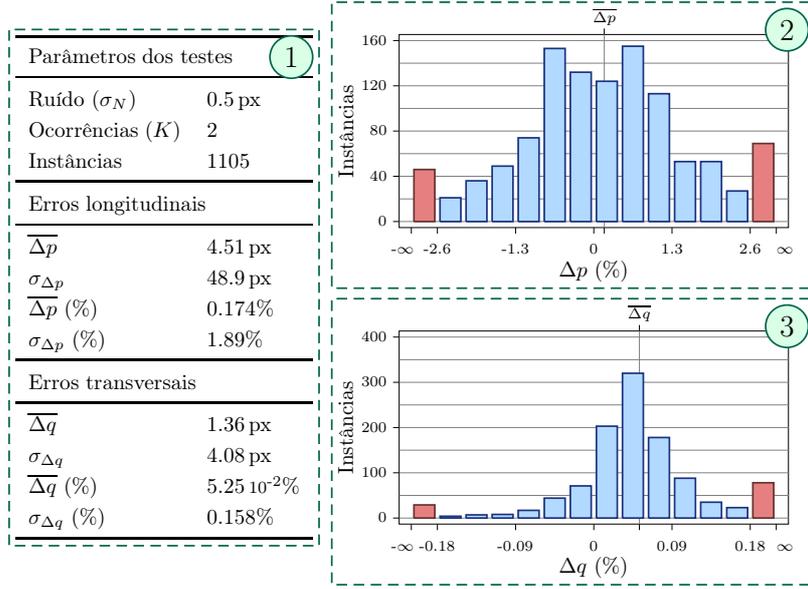
#### 4.2.1 Parâmetros das instâncias geradas

Em todos os experimentos simulados, o comprimento das barras é fixado em  $c = 150 \text{ mm}$ .

As simulações foram feitas com alguns valores específicos para  $\sigma_N$ . A lista de valores é apresentada na Tabela 4.5 e engloba uma gama variada de situações: desde a condição teórica de ausência de ruídos ( $\sigma_N = 0 \text{ pixels}$ ) até um caso pessimista ( $\sigma_N = 2 \text{ pixels}$ ), onde se espera que cerca de 5% das coordenadas informadas estejam com um erro absoluto maior do que 4 pixels. Os valores adotados para o número de ocorrências,  $K$ , também são exibidos na mesma tabela.

#### 4.2.2 Exibição dos resultados

Cada bateria de simulações produz como resultado um conjunto de desvios  $\Delta p$  e  $\Delta q$ . Esses desvios são consolidados em tabelas e gráficos que sumarizam o comportamento dos



**Figura 4.3.** Experimentos em 2D: exibição dos resultados de um grupo de testes com os mesmos parâmetros.

erros diante de uma determinada situação. Os resultados estão listados no Apêndice B da maneira apresentada a seguir.

A Figura 4.3 exemplifica um grupo de informações sobre uma bateria específica de testes: uma tabela e dois histogramas. O significado de cada elemento é apresentado a seguir:

- 1 *Tabela de dados:* Dividida em três partes, exibe os parâmetros de entrada para o grupo de simulações e os resultados numéricos obtidos. As partes são:
  - *Parâmetros dos testes:* Apresenta o ruído adotado ( $\sigma_N$ ), o número de ocorrências geradas ( $K$ ) e o número de instâncias testadas;
  - *Erros longitudinais:* Apresenta estatísticas sobre os erros mensurados no eixo  $p$ : média ( $\overline{\Delta p}$ ) e desvio padrão ( $\sigma_{\Delta p}$ ), tanto em pixels quanto em porcentagens relativas à distância do centro de imagem até a projeção real,  $\|\mathcal{L}_{real} - o\|$  (por conveniência, essa distância está anotada na Tabela 4.3);
  - *Erros transversais:* Apresenta as mesmas estatísticas dos erros longitudinais, porém mensuradas no eixo  $q$ .
- 2 *Histograma de erros longitudinais:* Apresenta um histograma dos desvios que ocorreram na respectiva bateria de testes. Os erros estão em valores percentuais relativos à distância  $\|\mathcal{L}_{real} - o\|$ .  
A escala horizontal inferior é sempre centrada em 0% e define a distribuição dos dados do histograma da segunda à penúltima colunas; a primeira e a última, apresentadas com uma cor diferente, concentram todas as ocorrências externas

aos limites da escala, que representam aproximadamente 10% do número total de ocorrências. (No exemplo da Figura 4.3, a primeira coluna reúne todas as instâncias com desvios inferiores a  $-2.6\%$  e a última, as instâncias com desvios superiores a  $2.6\%$ .)

A média percentual dos desvios é marcada com uma linha vertical e identificada sobre o gráfico com a marca “ $\overline{\Delta p}$ ”, e corresponde ao valor indicado na tabela;

- ③ *Histograma de erros transversais*: Apresenta o mesmo histograma, porém calculado sobre os desvios no eixo  $q$ .

### 4.2.3 Análise das simulações bidimensionais

Os experimentos simulados trazem várias conclusões interessantes, que serão discutidas a seguir. Para facilitar a análise dos resultados, algumas informações presentes no Apêndice B foram consolidadas em gráficos, que serão exibidos oportunamente.

A questão básica — que foi formulada como a primeira das perguntas que devem ser respondidas pelas simulações — trata da estabilidade e precisão do método no caso de ausência de ruídos, ou seja, para as instâncias onde  $\sigma_N = 0$ . Esta questão pode ser estudada pela análise da distribuição dos erros: médias e desvios-padrão.

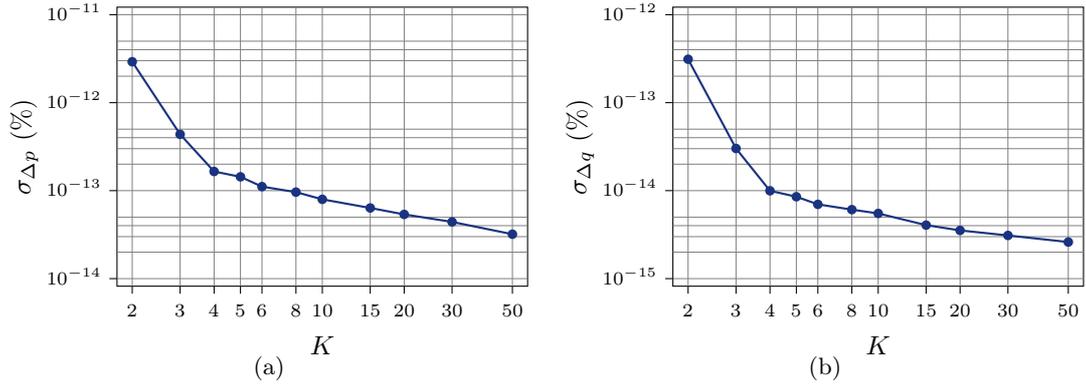
Os desvios-padrão observados nos experimentos sem ruídos são sintetizados na Figura 4.4. Embora possa-se observar claramente a redução dos desvios com o aumento de ocorrências ( $K$ ), essa observação perde importância diante da magnitude dos valores calculados: para o pior caso ( $K = 2$ ), os desvios em torno da média são de  $\sigma_{\Delta p} = 2.92 \cdot 10^{-12}\%$  ( $7.56 \cdot 10^{-11}$  px) e  $\sigma_{\Delta q} = 3.12 \cdot 10^{-13}\%$  ( $8.07 \cdot 10^{-12}$  px), respectivamente. Essas ordens de magnitude sugerem que os erros observados situam-se aproximadamente no limite de representação numérica da arquitetura utilizada, portanto podem ser considerados no limite da precisão possível.

Já as médias dos desvios possuem valores tão próximos de zero que não vale a pena consolidar os respectivos gráficos: o desvio mais significativo está bem abaixo de  $10^{-11}$  px.

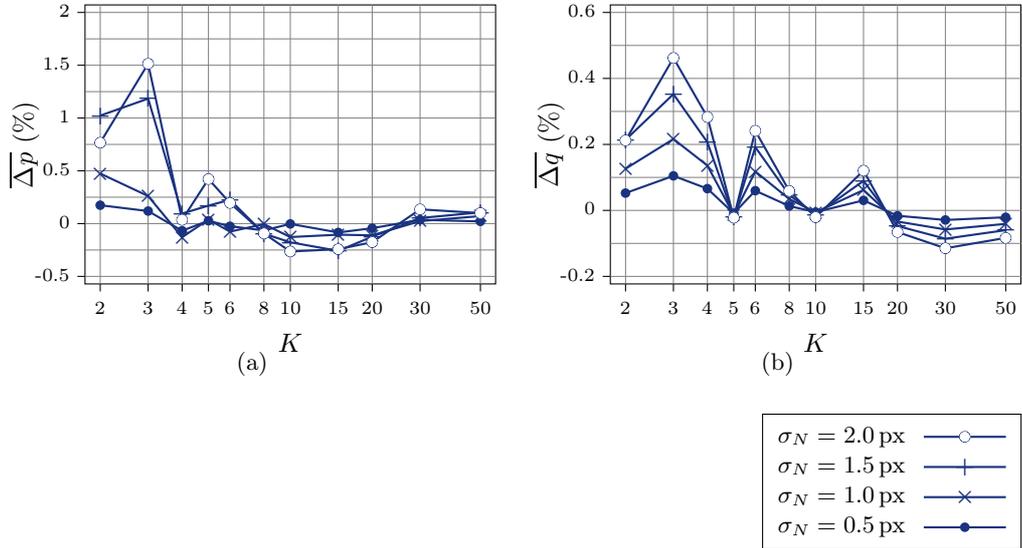
Portanto, pode-se concluir que, na situação teórica de ausência de ruídos, o método é capaz de obter os resultados corretos.

As simulações com ruídos trazem mais algumas informações importantes sobre o comportamento do método. Em termos práticos, é interessante observar que, embora o problema seja matematicamente tratável com apenas  $K = 2$  ocorrências, a influência de ruídos é drasticamente reduzida com a presença de poucas ocorrências a mais.

A Figura 4.5 consolida as médias dos desvios observados na presença de ruídos progressivamente maiores. A Figura 4.6 apresenta os mesmos dados, porém em escala logarítmica (e desprezando o sinal dos desvios). Ainda que os maiores erros encontrem-se na faixa de  $K \leq 3$ , o pior caso apresenta um desvio longitudinal de cerca de  $1.51\%$  (menos de 40 px) e transversal abaixo de  $0.5\%$  (cerca de 12 px). Para  $K \geq 4$ , os des-



**Figura 4.4.** Desvios-padrão dos erros percentuais observados para experimentos sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ), (a) projetados sobre o eixo  $p$  ( $\sigma_{\Delta p}$ ), (b) projetados sobre o eixo  $q$  ( $\sigma_{\Delta q}$ ).

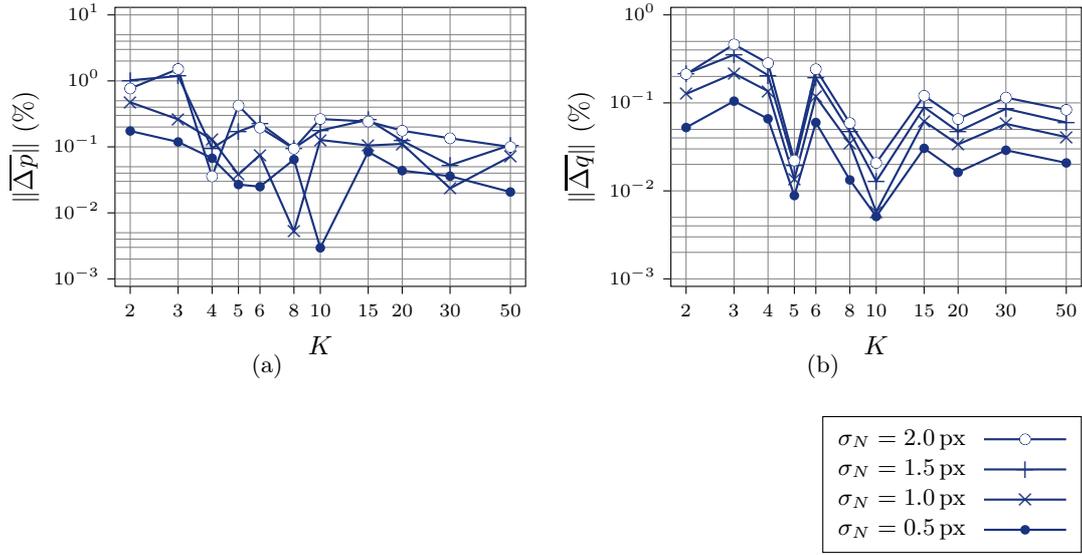


**Figura 4.5.** Médias dos erros percentuais observadas para experimentos com ruídos ( $\sigma_N > 0$ ), (a) projetados sobre o eixo  $p$  ( $\overline{\Delta p}$ ), (b) projetados sobre o eixo  $q$  ( $\overline{\Delta q}$ ).

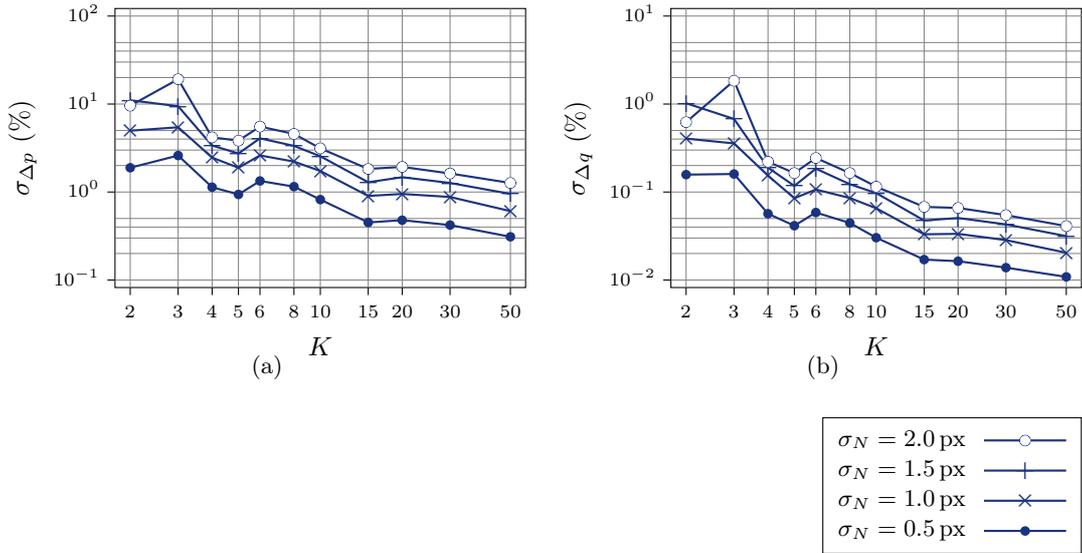
vios transversais estão sempre dentro da faixa de  $\pm 0.5\%$  e os longitudinais dificilmente ultrapassam  $\pm 0.1\%$ .

A análise dos desvios-padrão obtidos nas simulações (Figura 4.7) ajuda a estabelecer um critério prático para o número de ocorrências de um experimento — as instâncias devem preferencialmente ser montadas com pelo menos 4 ocorrências. Com  $K \leq 3$  foram observados desvios-padrão de quase 20% (cerca de 500 px) no sentido longitudinal: é um valor que indica uma certa instabilidade em tais condições.<sup>5</sup> Por outro lado, observa-se

<sup>5</sup>Vale lembrar que esse desvio-padrão alto foi observado para um nível de ruídos considerável ( $\sigma_N = 2$  px) e que não foram adotados procedimentos para detectar e remover *outliers*, ou seja, uma observação que não é típica dos dados [Montgomery e Runger, 2003].



**Figura 4.6.** Médias absolutas dos erros percentuais observados para experimentos com ruídos ( $\sigma_N > 0$ ), (a) projetados sobre o eixo  $p$  ( $\|\Delta p\|$ ), (b) projetados sobre o eixo  $q$  ( $\|\Delta q\|$ ).



**Figura 4.7.** Desvios-padrão dos erros percentuais observados para experimentos com ruídos ( $\sigma_N > 0$ ), (a) projetados sobre o eixo  $p$  ( $\sigma_{\Delta p}$ ), (b) projetados sobre o eixo  $q$  ( $\sigma_{\Delta q}$ ).

uma tendência gradativa de se obter resultados mais precisos à medida em que o número de ocorrências é aumentado: com  $K = 10$  ocorrências o desvio-padrão longitudinal é de  $\sigma_{\Delta p} = 3.13\%$ , e para  $K \geq 15$  não chega a  $2\%$ .

Os desvios-padrão dos erros no sentido transversal constituem um problema mais brando, já que os valores são significativamente menores do que no sentido longitudinal

(pelo menos uma ordem de grandeza inferior). Isto evidencia, segundo as noções práticas exibidas na Figura 4.2, que o algoritmo possui uma precisão bem maior na detecção da “direção” da fonte de luz do que de sua “distância”. Numericamente, o pior desvio-padrão ( $K = 3$ ,  $\sigma_N = 2.0$  px) é de 1.84% (menos de 50 px); para  $K = 10$  temos  $\sigma_{\Delta q} = 0.115\%$  (menos de 3 px); e para  $K \geq 15$  os desvios nunca são maiores do que 0.07% (não chegam a 2 px).

O tempo de cálculo da solução do problema bidimensional, nas simulações realizadas, em geral foi de poucos décimos de segundo. A plataforma utilizada nas simulações, comum à época da elaboração deste trabalho, foi um computador Pentium IV de 3.0 GHz com 1 GB de memória RAM.

### 4.3 Experimentos simulados em três dimensões

O principal objetivo dos experimentos em três dimensões é estudar a diferença entre os valores estimados para a profundidade da fonte de luz,  $\lambda_{est}$ , e os valores reais conhecidos para cada instância testada,  $\lambda_{real}$ . Este não é, porém, o único objetivo: outros aspectos, apresentados a seguir, também foram testados na bateria de experimentações tridimensionais:

- a comparação entre os valores estimados e os reais dos comprimentos das barras,  $C_{b\ est}$  vs.  $C_{b\ real}$ , e das profundidades dos pontos,  $\gamma_{n\ est}$  vs.  $\gamma_{n\ real}$ ;
- a verificação da variação na qualidade dos resultados com o uso de barras de diversos comprimentos;
- a melhoria dos resultados pelo aumento da *riqueza dos dados de entrada*. Isto corresponde à terceira questão proposta para os experimentos simulados (Seção 4.1). A forma utilizada para tratar dessa questão está em construir uma cena e resolvê-la de algumas maneiras diferentes, descrevendo-a com níveis diferentes de detalhes<sup>6</sup>.

Como os objetivos propostos acima tratam de aspectos bem diferentes do algoritmo de calibração, os experimentos em três dimensões serão divididos em três grandes grupos, apresentados e detalhados na subseção seguinte.

#### 4.3.1 Grupos de simulações e parâmetros das instâncias geradas

As simulações em três dimensões foram divididas em três grandes grupos com objetivos bem definidos:

**Simulações gerais:** Assim como nos experimentos bidimensionais, o principal objetivo deste grupo é verificar a qualidade dos resultados quando se altera o número de ocorrências,  $K$ , e o nível de ruídos inseridos nas coordenadas bidimensionais,

---

<sup>6</sup>Um exemplo da descrição da mesma cena com detalhes maiores ou menos é apresentado no Subseção 3.1.4, Exemplo 2.

Comprimento da barra	$c = 150$ mm
Magnitude de erros	$\sigma_N \in \{0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0\}$ px
Número de ocorrências por instância	$K \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 30, 50\}$

**Tabela 4.6.** Parâmetros para as simulações gerais em 3D.

Comprimento da barra	$c \in \{75, 75\sqrt{2}, 150, 150\sqrt{2}, 300\}$ mm
Magnitude de erros	$\sigma_N = 1.0$ px
Número de ocorrências por instância	$K \in \{2, 3, 5, 8, 10, 15, 20\}$

**Tabela 4.7.** Parâmetros para as simulações de variação de comprimento da barra em 3D.

$\sigma_N$ , mantendo fixo o comprimento da barra,  $c$ . O conjunto de parâmetros é exatamente o mesmo adotado para as simulações 2D: o comprimento da barra é fixado em  $c = 150$  mm e os valores adotados para os outros parâmetros são apresentados na Tabela 4.6.

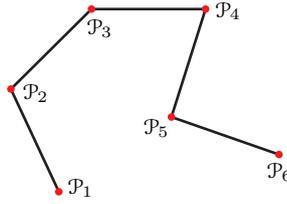
**Simulações sobre a variação do comprimento da barra:** Neste grupo, o foco é adotar um valor fixo para o nível de ruídos e observar os resultados pela variação do comprimento da barra, também adotando vários valores para o número de ocorrências. O ruído foi fixado em  $\sigma_N = 1.0$  px. Os comprimentos da barra correspondem a uma P.G. de razão  $\sqrt{2}$ , indo de 75 mm até 300 mm.<sup>7</sup> Os parâmetros são exibidos na Tabela 4.7.

**Simulações sobre a variação na riqueza da descrição do modelo:** Este grupo de simulações observa a qualidade dos resultados quando uma mesma cena é descrita de maneiras diferentes, gerando um número maior ou menor de incógnitas e restrições.

Para gerar as instâncias destas simulações, os algoritmos para a geração de ocorrências (Algoritmo 4.4, `GERA_OCORRÊNCIA`) e de seus dados (Algoritmo 4.5, `GERA_DADOS_DE_OCORRÊNCIA`) foram um pouco alterados, para criar cenas propícias às análises em questão. O que se deseja é criar instâncias do problema onde as ocorrências estão *em cadeia*, isto é, conectadas por suas extremidades: um extremo da primeira ocorrência corresponde a um extremo da segunda ocorrência; o outro extremo da segunda ocorrência corresponde a um extremo da terceira ocorrência; e assim por diante, até que a penúltima e última ocorrências compartilham um extremo. Um exemplo ilustrativo com 5 ocorrências (6 pontos) é apresentado na Figura 4.8

O Algoritmo 4.6, `GERA_OCORRÊNCIAS_EM_CADEIA`, e o Algoritmo 4.7, `GERA_DADOS_DE_OCORRÊNCIAS_EM_CADEIA`, são os responsáveis pela geração

<sup>7</sup>Uma P.G. de razão  $\sqrt{2}$  foi escolhida para que se possa analisar o comportamento dos resultados quando o comprimento das barras é dobrado.



**Figura 4.8.** Ocorrências em cadeia.

- 
1. Gere um ponto  $\mathbf{P}_1$  através do algoritmo `GERA_PONTO_VÁLIDO`;
  2. Para  $i$  de 1 até o número  $Q$  de ocorrências desejadas:
    - a) Gere um vetor  $\mathbf{v}_i$  através do algoritmo `GERA_VETOR_UNITÁRIO`;
    - b) Calcule o ponto  $\mathbf{P}_{i+1} \leftarrow \mathbf{P}_i + c \cdot \mathbf{v}_i$ , onde  $c$  é o comprimento desejado para as ocorrências;
    - c) Se o resultado do algoritmo `VERIFICA_SE_PONTO_É_VÁLIDO` aplicado a  $\mathbf{P}_{i+1}$  for `FALSO`, retorne ao passo (a)<sup>a</sup>.
  3. Retorne as ocorrências formadas pelos pares  $\mathbf{P}_1\text{--}\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_2\text{--}\mathbf{P}_3, \dots, \mathbf{P}_{Q-1}\text{--}\mathbf{P}_Q$ .

---

<sup>a</sup>Vale o mesmo esquema de proteção contra execução infinita apresentado no Algoritmo 4.4: após uma quantidade-limite de repetições, o algoritmo retorna ao passo 1.

---

**Algoritmo 4.6.** `GERA_OCORRÊNCIAS_EM_CADEIA`.

- 
1. Através do algoritmo `GERA_OCORRÊNCIAS_EM_CADEIA`, gere uma quantidade  $Q$  de ocorrências representadas pelos pontos extremos  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_Q$ ;
  2. Calcule as coordenadas tridimensionais  $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_Q$  das respectivas sombras de  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_Q$ , com base na Eq. (4.2);
  3. Calcule as coordenadas bidimensionais  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_Q$  e  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_Q$ , correspondentes aos pontos  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_Q$  e  $\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_Q$ , conforme as Eqs. (4.1) e (4.4);
  4. Adicione a cada uma das coordenadas bidimensionais um ruído gaussiano de média 0 e desvio padrão  $\sigma_N$ ;
  5. Retorne as coordenadas corrompidas de  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_Q$  e  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_Q$ .
- 

**Algoritmo 4.7.** `GERA_DADOS_DE_OCORRÊNCIAS_EM_CADEIA`.

de ocorrências em cadeia e de suas coordenadas projetadas em pixels. Uma instância do problema consiste em *pelo menos* duas cadeias de ocorrências, sendo que as coordenadas dos elos de cada cadeia estão totalmente dissociados entre si. Uma instância é, portanto, criada com base em dois parâmetros: o número de ocorrências por cadeia, identificado por  $Q$ , e o número de cadeias, identificado por  $F$ . Obviamente, uma única instância é montada com  $F$  chamadas a `GERA_OCORRÊNCIAS_EM_CADEIA`.

Esses dados serão utilizados para montar instâncias com três níveis diferentes de “riqueza” de descrição da cena. São os *modelos de ocorrências em cadeia*,

Comprimento da barra	$c = 150$ mm
Magnitude de erros	$\sigma_N = 1.0$ px
Número de ocorrências por cadeia	$Q \in \{2, 4, 8, 16\}$
Número de cadeias por instância	$F \in \{2, 5, 10, 20\}$

**Tabela 4.8.** Parâmetros para as simulações de ocorrências em cadeia em 3D.

apresentados a seguir:

- O nível mais pobre de informações possível está em desconhecer que as ocorrências possuem o mesmo comprimento (isto é, que trata-se da mesma barra) e que as extremidades são coincidentes: neste caso, cada ocorrência da cadeia é considerada uma barra independente e com extremidades em coordenadas distintas. (Veja o exemplo das Figuras 3.5(a)–(c).) Com esse nível de informações, o número de incógnitas é:  $1$  (o  $\lambda$ ) +  $2FQ$  (os  $\gamma_n$ ) +  $Q$  (os  $c_b$ ) =  $2FQ + Q + 1$ ;
- Um nível mais rico de informações é obtido ao se levar em consideração que as coordenadas de duas ocorrências adjacentes são coincidentes, reduzindo-se assim o número de pontos necessários para descrever a instância e, por conseqüência, o número de profundidades  $\gamma_n$  a serem calculadas. (Veja o exemplo da Figura 3.5(d).) Com esse novo nível de informações, a quantidade de incógnitas é:  $1$  (o  $\lambda$ ) +  $F(Q + 1)$  (os  $\gamma_n$ ) +  $Q$  (os  $c_b$ ) =  $FQ + F + Q + 1$ ;
- O nível mais rico possível de informações para tal situação está no conhecimento de que todas as ocorrências têm o mesmo comprimento, reduzindo o número de barras para 1. (Veja o exemplo da Figura 3.5(e).) Com isso, tem-se o seguinte número de incógnitas:  $1$  (o  $\lambda$ ) +  $F(Q + 1)$  (os  $\gamma_n$ ) +  $1$  (o  $c_1$ ) =  $FQ + F + 2$ .

É simples observar que, mesmo com as instâncias mais simples que foram testadas — onde  $F = 2$  e  $Q = 2$  —, o número de incógnitas cai de 11 (primeiro caso) para 9 (segundo caso) e 8 (terceiro caso). O caso mais complexo coberto pelas simulações adota  $F = 20$  e  $Q = 16$ , onde a quantidade de incógnitas é, respectivamente: 657 (primeiro caso), 357 (segundo caso) e 342 (terceiro caso). Os parâmetros para o grupo de simulações de riqueza estão expostos na Tabela 4.8.

### 4.3.2 Geração dos resultados

A qualidade das estimações de  $\lambda$ ,  $\gamma_n$  e  $c_b$  foi estudada com base na diferença entre os valores estimados e os reais. Essas diferenças são identificadas por:

$$\Delta\lambda = \lambda_{est} - \lambda_{real} \quad (4.8a)$$

$$\Delta\gamma_n = \gamma_{n\ est} - \gamma_{n\ real} \quad (4.8b)$$

$$\Delta c_b = c_{b\ est} - c_{b\ real}. \quad (4.8c)$$

Um dos dados importantes para a medição da exatidão dos resultados está na *medida de erro quadrático*, definida como a soma dos quadrados dos erros obtidos por cada mensuração. Nestes experimentos, as medidas de erros quadráticos serão normalizadas (isto é, divididas pelo número de mensurações em cada caso) e analisadas de maneira independente. Temos, então, os seguintes valores definidos para medidas de erro sobre  $\lambda$ , os  $\gamma_n$  e os  $c_b$ :

$$\epsilon_\lambda^2 = \Delta\lambda^2 \quad (4.9a)$$

$$\epsilon_\gamma^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Delta\gamma_n^2 \quad (4.9b)$$

$$\epsilon_c^2 = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \Delta c_b^2, \quad (4.9c)$$

onde  $N$  é o número de pontos-chave (Subseção 3.1.2) e  $B$  o número de barras (Subseção 3.1.4).

Esses valores são obtidos em cada uma das instâncias simuladas do problema. Como o interesse é a análise não de casos individuais, mas do comportamento genérico do algoritmo de calibração para uma cena com certas características, várias instâncias foram testadas para consolidar os seguintes dados:

- A média do conjunto das diferenças  $\Delta\lambda$ , identificada por  $\overline{\Delta\lambda}$ , e o desvio-padrão desse conjunto, identificado por  $\sigma_{\Delta\lambda}$ ;
- Para as baterias de testes baseadas em cenas que possuem somente uma barra<sup>8</sup>, a média do conjunto das diferenças  $\Delta c_1$ , identificada por  $\overline{\Delta c}$ , e o desvio-padrão desse conjunto, identificado por  $\sigma_{\Delta c}$ ;
- Os erros médios quadráticos, ou *root-mean-square (RMS)*, calculados sobre as medidas de erros quadráticos apresentadas nas Eqs. (4.9a)-(4.9c), identificados

<sup>8</sup>Excluem-se, portanto, as simulações do terceiro grupo, que trata de ocorrências em cadeia.

por  $RMS_\lambda$ ,  $RMS_\gamma$  e  $RMS_c$ :

$$RMS_\lambda = \sqrt{\epsilon_\lambda^2} \quad (4.10a)$$

$$RMS_\gamma = \sqrt{\epsilon_\gamma^2} \quad (4.10b)$$

$$RMS_c = \sqrt{\epsilon_c^2}. \quad (4.10c)$$

Os erros médios quadráticos fornecem uma medida relacionada a quanto os valores estimados estão distantes dos reais: valores mais baixos para o RMS indicam que as estimativas foram mais próximas do esperado, sendo zero em condições ideais. É interessante analisar os valores de RMS, já que o desvio-padrão não fornece nenhuma informação sobre a proximidade entre estimativas e valores reais.

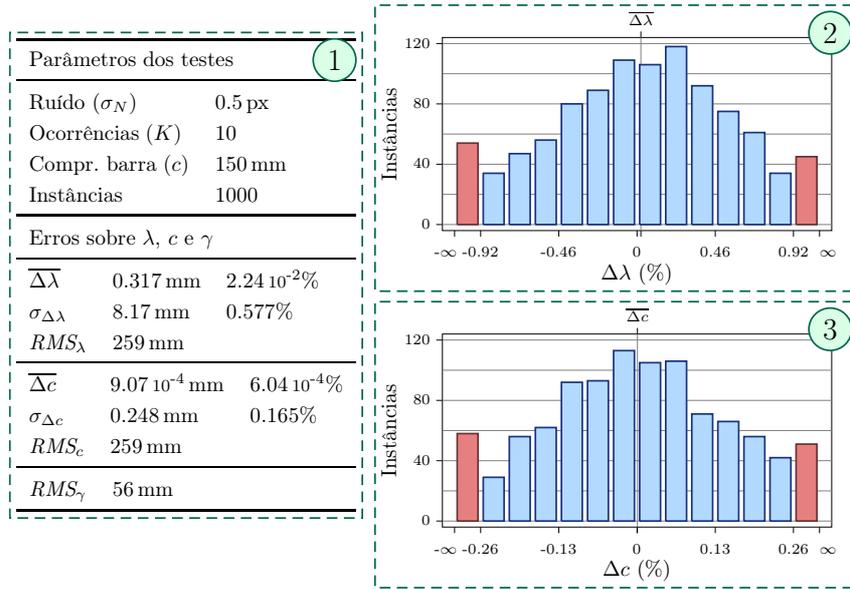
### 4.3.3 Exibição dos resultados

As diferenças observadas, em cada instância do problema, dos valores estimados —  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta\gamma_n$  e  $\Delta c$  — são a base para a construção de várias tabelas e gráficos que sumarizam o comportamento dos erros diante de parâmetros diferentes para o problema. Os resultados estão listados no Apêndice C e são divididos em três partes, correspondentes aos três grupos de simulações descritos na Subseção 4.3.1. Cada parte exibe os resultados de uma maneira um pouco diferente:

**Simulações gerais:** A Figura 4.9 exemplifica um grupo de informações sobre cada bateria: uma tabela e dois histogramas. O significado de cada elemento é apresentado a seguir:

- ① *Tabela de dados:* Dividida em duas partes, exibe os parâmetros de entrada para o grupo de simulações e os resultados numéricos obtidos. As partes são:
  - *Parâmetros dos testes:* Apresenta o ruído adotado ( $\sigma_N$ ), o número de ocorrências geradas ( $K$ ), o comprimento da barra ( $c$ ) e o número de instâncias testadas;
  - *Erros sobre  $\lambda$ ,  $c$  e  $\gamma$ :* Apresenta estatísticas sobre os erros de estimação da profundidade da fonte de luz: média ( $\overline{\Delta\lambda}$ ) e desvio padrão ( $\sigma_{\Delta\lambda}$ ), tanto em pixels quanto em porcentagens relativas à distância do centro de projeção até a fonte de luz real,  $\lambda_{real} = \|\mathbf{L}_{real} - \mathbf{C}\|$  (por conveniência, essa distância está anotada na Tabela 4.3). O erro médio quadrático ( $RMS_\lambda$ ) também é apresentado na tabela.

As mesmas estatísticas são apresentadas em relação a  $c$ . Quanto a  $\gamma$ , como não há apenas uma profundidade de ponto calculada em uma instância, o cálculo de uma única média e desvio-padrão para todos



**Figura 4.9.** Grupo de simulações gerais em 3D: exibição dos resultados de um conjunto de testes com os mesmos parâmetros.

os  $\gamma_n$  seria um valor sem representatividade. Dessa maneira, apenas o erro médio quadrático ( $RMS_\gamma$ ) é apresentado.

- ② *Histograma de erros sobre  $\lambda$* : Apresenta um histograma dos desvios que ocorreram na estimação da profundidade da fonte. Os erros estão em valores percentuais relativos à distância real,  $\lambda_{real}$ .

Os histogramas seguem exatamente a forma apresentada nos experimentos bidimensionais: a escala horizontal inferior é centrada em 0%; a primeira e a última colunas representam aproximadamente 10% do número total de ocorrências; e a média percentual dos desvios é marcada com uma linha vertical e identificada sobre o gráfico com a marca “ $\overline{\Delta\lambda}$ ”;

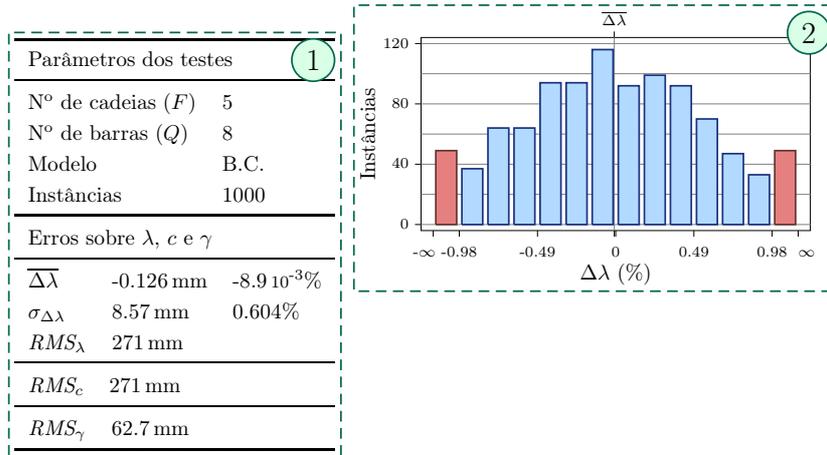
- ③ *Histograma de erros sobre  $c$* : Apresenta o mesmo histograma, porém calculado sobre os desvios do comprimento da barra  $c$ .

**Simulações sobre a variação do comprimento da barra:** A apresentação dos dados é idêntica ao grupo de simulações gerais;

**Simulações sobre a variação na riqueza da descrição do modelo:** A apresentação dos dados, vista na Figura 4.10, compartilha algumas informações dos grupos anteriores, mas apresenta algumas diferenças. É dividida em duas partes:

- ① *Tabela de dados*: Contém quase os mesmos dados da tabela vista na Figura 4.9, com as seguintes diferenças:

- Os parâmetros adicionais que definem um problema de ocorrências em cadeia — o número de cadeias,  $F$ , e o número de barras por cadeia,  $Q$



**Figura 4.10.** Grupo de simulações sobre a variação na riqueza da descrição de entrada em 3D: exibição dos resultados de um conjunto de testes com os mesmos parâmetros.

- são apresentados na parte superior da tabela;
- O *modelo de ocorrências em cadeia* é exibido. Pode ser uma de três abreviações — “B.D”, “B.C.” ou “O.C.” — e correspondem aos três níveis de “riqueza” de descrição da cena, sendo:
  - *B.D.* (“*barras desconexas*”): É o nível mais pobre de descrição dos objetos, onde cada segmento da cadeia possui um comprimento independente (corresponde cada um a uma barra diferente) e não se considera que seus pontos extremos estão conectados;
  - *B.C.* (“*barras conexas*”): Cada segmento ainda possui um comprimento independente, mas considera-se que os extremos estão conectados em uma cadeia;
  - *O.C.* (“*ocorrências conexas*”): Aqui é incluída a restrição de que os segmentos possuem o mesmo comprimento — ou seja, são todas as ocorrências da mesma barra. Além disso, seus extremos estão conectados em cadeia.
- Não são apresentados o ruído ( $\sigma_N$ ) e o comprimento da barra ( $c$ ), por serem o mesmo em todos os experimentos ( $\sigma_N = 1.0$  px e  $c = 150$  mm);
- O número de ocorrências ( $K$ ) não é exibido, pois podem corresponder a uma única ou a várias barras. O número total de ocorrências pode ser obtido pelo produto de  $F$  por  $Q$ ;
- Como o número de barras pode ser maior do que 1 (dependendo do experimento), as estatísticas sobre o comprimento da barra foram quase totalmente eliminadas. É apresentado somente o erro médio quadrático,  $RMS_c$ .

② *Histograma de erros sobre  $\lambda$* : É apresentado de maneira idêntica ao histo-

grama das simulações gerais.

O histograma sobre os comprimentos das barras, assim como seus dados na tabela (e pelo mesmo motivo), não são apresentados.

#### 4.3.4 Análise das simulações tridimensionais

Os resultados das simulações tridimensionais estão registrados no Apêndice C. Algumas informações foram consolidadas em gráficos, que serão exibidos oportunamente.

Como foram feitos três grupos de experimentos (Subseção 4.3.1) — as simulações gerais, as simulações sobre a variação do comprimento da barra e as simulações sobre a variação na riqueza da descrição do modelo —, cada um com um objetivo diferente, a análise dos resultados também será dividida em três partes, que buscam conclusões relacionadas ao objetivo de cada grupo de testes. As subseções seguintes tratam respectivamente de cada grupo.

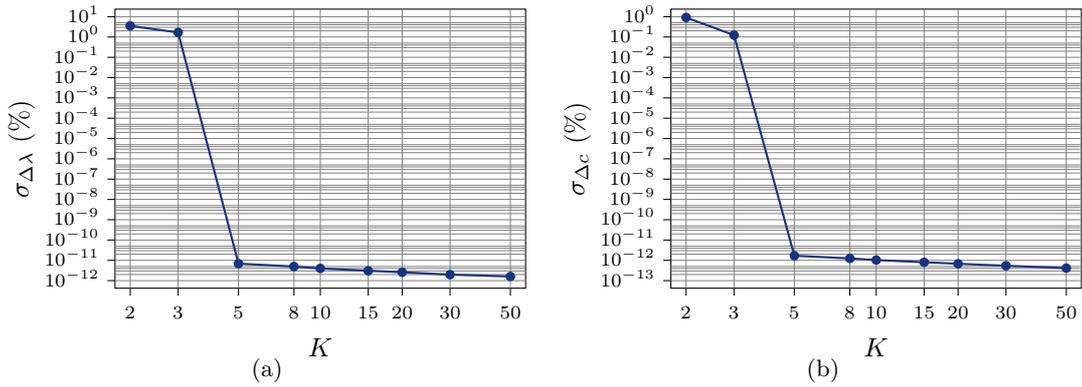
##### 4.3.4.1 Simulações gerais

Assim como nas simulações bidimensionais, a primeira questão a ser respondida trata da precisão dos resultados obtidos no caso de ausência de ruídos (ou seja, quando  $\sigma_N = 0$  px). A base para esta análise será feita com gráficos que consolidam os resultados sobre as estimações da profundidade da fonte,  $\lambda$ , e do comprimento da barra,  $c$ : os desvios-padrão (Figura 4.11), as médias (Figura 4.12) e os erros médios quadráticos (Figura 4.13). Os dados que servem de referência para estes gráficos consolidados estão na Seção C.1.

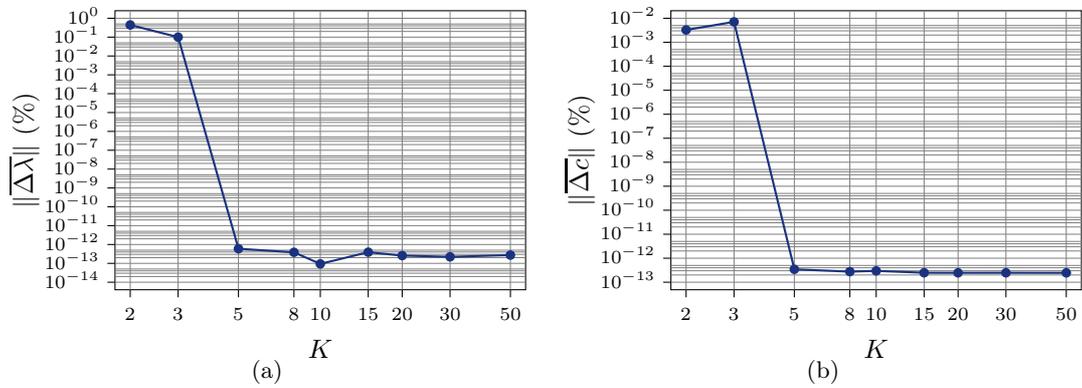
Todos os gráficos apresentam um comportamento curioso: para os experimentos realizados com  $K \leq 3$  instâncias, a ordem de magnitude de todos os dados estatísticos — desvios-padrão, médias e RMS — é muito maior do que os experimentos realizados com  $K > 3$  instâncias. A explicação para essas discrepâncias é simples: o método iterativo de Levenberg-Marquardt, utilizado na solução dos problemas de minimização expostos neste trabalho, procura pontos de mínimo para as funções de erro. Porém, assim como os demais métodos iterativos, não garante a convergência para o ponto de mínimo *global*. O que ocorreu em algumas instâncias foi a convergência para um mínimo *local*.

A Tabela 4.9 apresenta a quantidade de instâncias que convergiram para mínimos locais (resultados falsos) e para mínimos globais (resultados corretos). Nota-se que, à medida em que se aumenta o número de ocorrências usadas, a chance de convergência diminui drasticamente: com  $K \geq 5$  ocorrências, todas as 7000 instâncias testadas convergiram para os resultados corretos.

As Figuras 4.11–4.13 não permitem uma boa análise qualitativa dos resultados obtidos, já que o salto na magnitude dos dados plotados gera uma escala inadequada.



**Figura 4.11.** Desvios-padrão dos erros percentuais observados para as simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ), (a) da estimação de  $\lambda$  ( $\sigma_{\Delta\lambda}$ ), (b) da estimação de  $c$  ( $\sigma_{\Delta c}$ ).

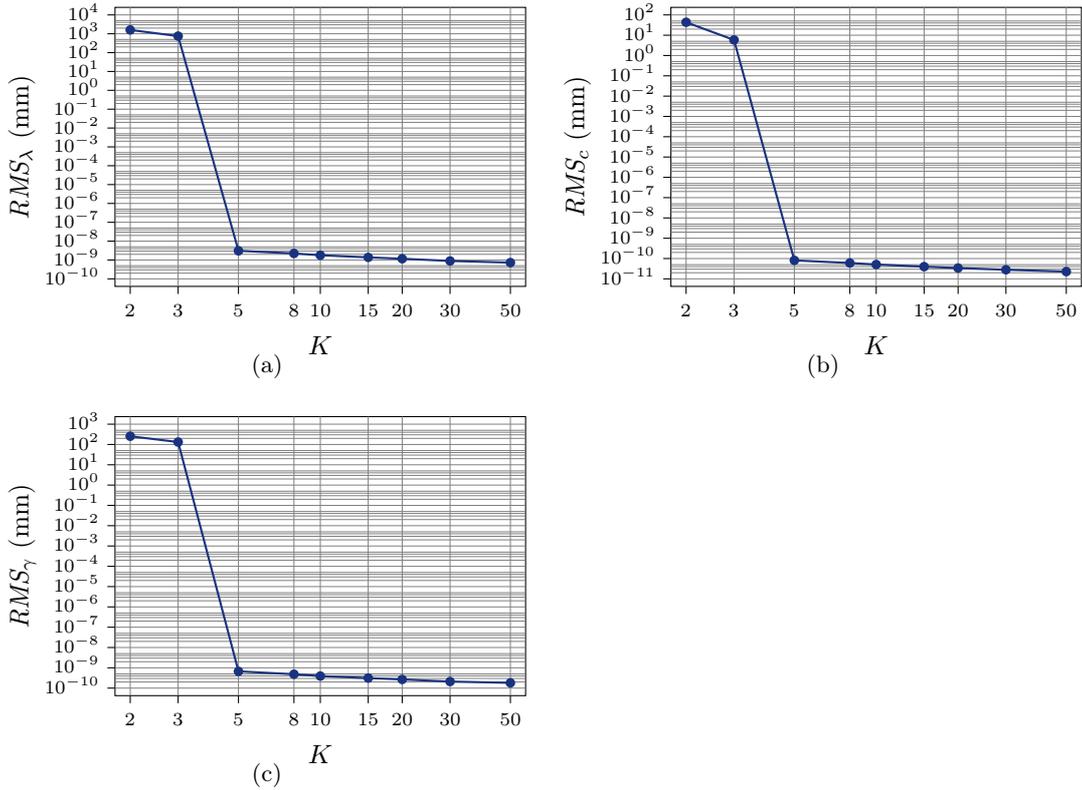


**Figura 4.12.** Médias absolutas dos erros percentuais observadas para as simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ), (a) da estimação de  $\lambda$  ( $\overline{\Delta\lambda}$ ), (b) da estimação de  $c$  ( $\overline{\Delta c}$ ).

Mais interessante é analisar gráficos que tratam apenas das instâncias que convergiram para resultados corretos. Esses são vistos nas Figuras 4.14–4.16, cujos comentários são registrados a seguir.

A Figura 4.14 apresenta a evolução do desvio-padrão dos erros com o aumento de ocorrências. Interessante é notar os dois aspectos que foram observados também nos experimentos bidimensionais: a qualidade dos resultados melhora com um maior número de ocorrências e a ordem de grandeza dos erros é insignificante: o pior erro obtido foi de cerca de  $10^{-7}$  mm, ou  $7.4 \cdot 10^{-11}\%$ .

A Figura 4.15 demonstra que a média dos erros das estimações está muito próxima de zero, de onde se conclui que não há uma tendência sistemática de desvio para mais ou para menos, na ausência de ruídos. A Figura 4.17, que apresenta os valores RMS, também demonstra claramente que o aumento do número de ocorrências traz melhorias para a qualidade das estimações, ainda que o pior caso ( $K = 2$ ) apresente resultados excelentes ( $RMS_\lambda = 1.1 \cdot 10^{-7}$ ,  $RMS_c = 2.3 \cdot 10^{-9}$  e  $RMS_\gamma = 2.3 \cdot 10^{-8}$ ). A compa-



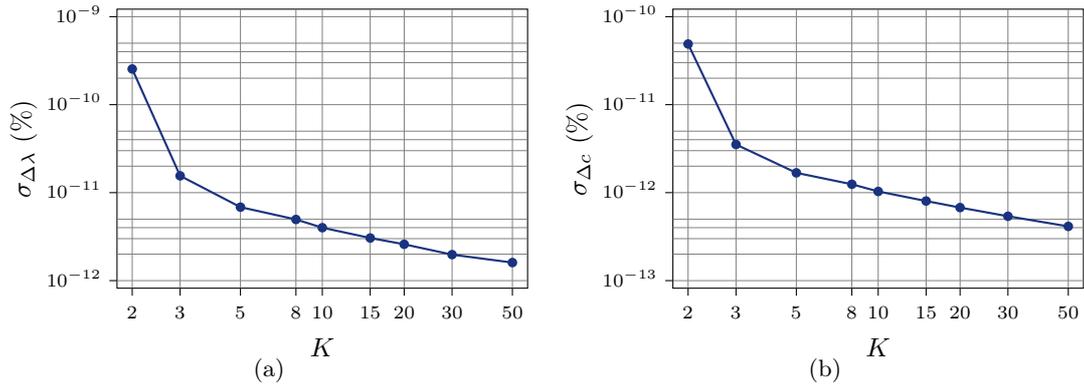
**Figura 4.13.** Erros médios quadráticos (RMS) observados para as simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ), (a) da estimação de  $\lambda$  ( $RMS_\lambda$ ), (b) da estimação de  $c$  ( $RMS_c$ ), (c) da estimação de  $\gamma_n$  ( $RMS_\gamma$ ).

Instâncias			
$K$	Total	Convergência para mínimo local	Convergência para resultado correto
2	1 000	27 (2.7%)	973 (97.3%)
3	1 000	4 (0.4%)	996 (99.6%)
$\geq 5$	1 000	0 (0.0%)	1 000 (100.0%)

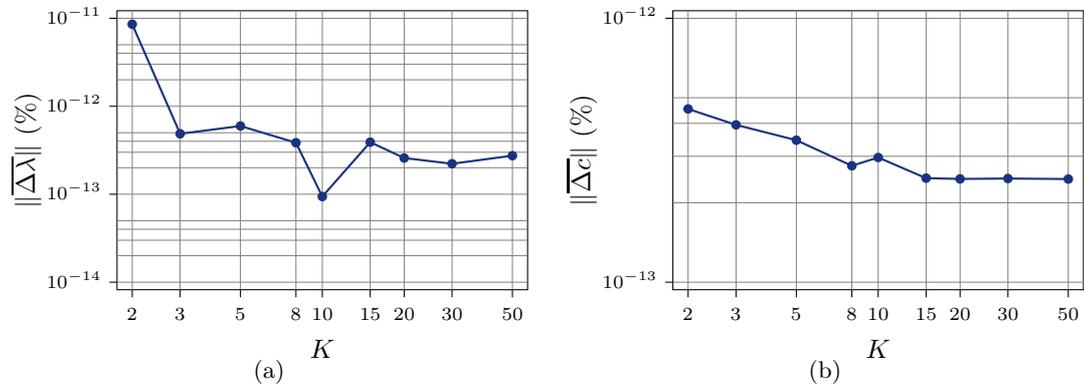
**Tabela 4.9.** Convergência das simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ) para resultados falsos (mínimos locais) e corretos.

ração dos três gráficos com os valores RMS aponta para o fato de que a estimação do comprimento das barras tende a ser mais precisa do que a estimação das profundidades dos pontos-chave, que por sua vez é mais precisa do que a estimação da profundidade da fonte de luz.

A análise das instâncias corrompidas por ruídos traz conclusões interessantes. Os gráficos que consolidam os experimentos são: os desvios-padrão (Figura 4.17) e erros médios quadráticos (Figura 4.18).



**Figura 4.14.** Desvios-padrão dos erros percentuais observados para as simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ), desconsiderando as instâncias que convergiram para mínimos locais, (a) da estimação de  $\lambda$  ( $\sigma_{\Delta\lambda}$ ), (b) da estimação de  $c$  ( $\sigma_{\Delta c}$ ).



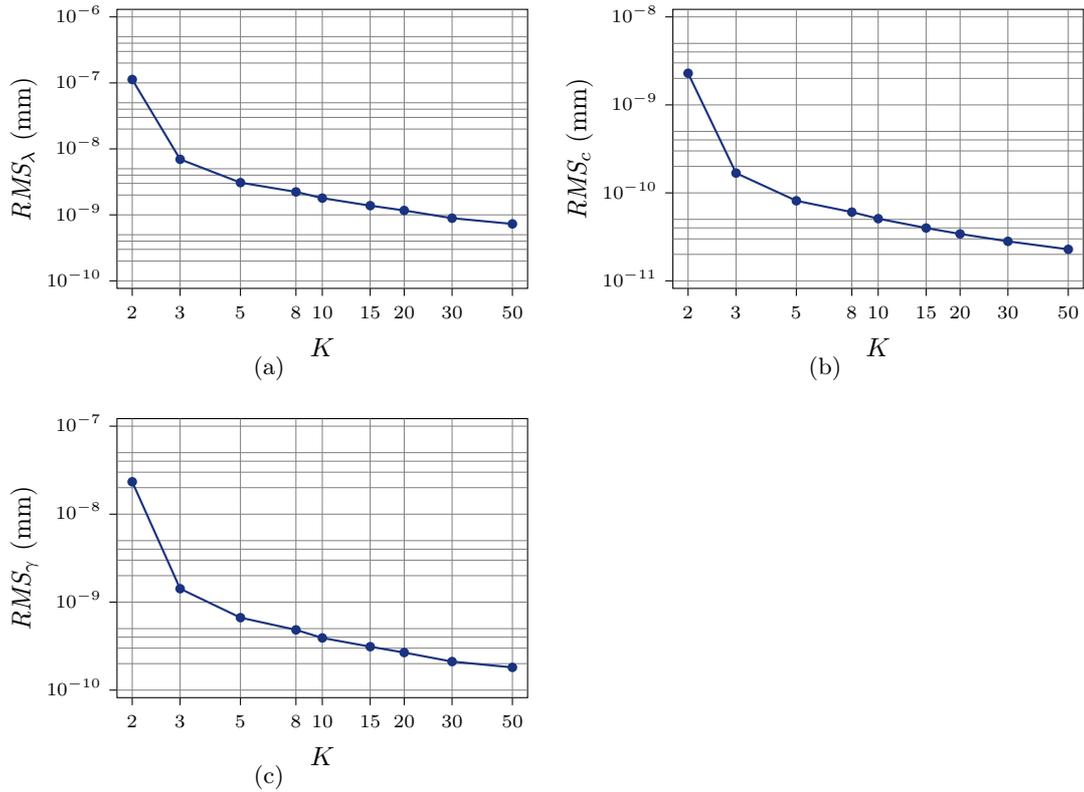
**Figura 4.15.** Médias absolutas dos erros percentuais observadas para as simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ), (a) da estimação de  $\lambda$  ( $\overline{\Delta\lambda}$ ), (b) da estimação de  $c$  ( $\overline{\Delta c}$ ).

Pela observação dos gráficos, as primeiras conclusões, embora simples, são importantes:

- O aumento no nível de ruídos piora os resultados;
- O aumento no número de ocorrências melhora os resultados.

A primeira conclusão parece bastante óbvia: quanto mais os dados são corrompidos por ruídos, pior espera-se que sejam os resultados obtidos. Tanto a evolução dos desvios-padrão (Figura 4.17) quanto a dos erros médios quadráticos (Figura 4.18) confirmam este fato. Por outro lado, é interessante analisar a sua influência de maneira mais minuciosa, para buscar uma resposta à segunda questão proposta no início da seção: “Qual a influência da magnitude dos ruídos na precisão dos resultados?”. Para isto, os desvios-padrão das estimações de  $\lambda$  e  $c$  foram tabelados e são exibidos na Tabela 4.10.

Um comportamento interessante dos desvios-padrão é que eles possuem uma relação de proporcionalidade direta com a magnitude dos ruídos (essa relação é melhor obser-



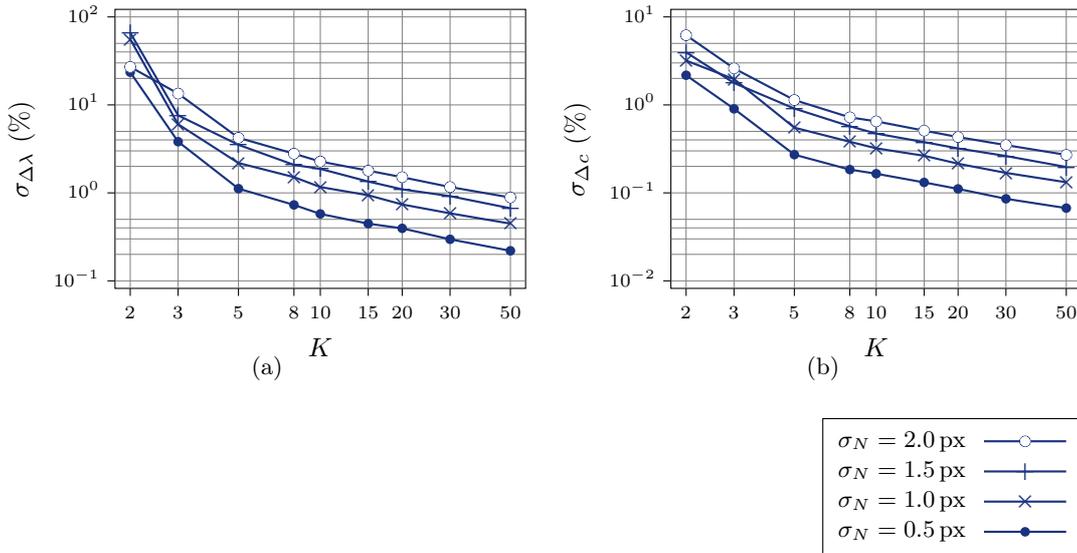
**Figura 4.16.** Erros médios quadráticos (RMS) observados para as simulações gerais sem ruídos ( $\sigma_N = 0$ ), (a) da estimação de  $\lambda$  ( $RMS_\lambda$ ), (b) da estimação de  $c$  ( $RMS_c$ ), (c) da estimação de  $\gamma_n$  ( $RMS_\gamma$ ).

vada para os casos com  $K \geq 5$  ocorrências): com dados de entrada corrompidos por ruídos progressivamente maiores, espera-se que os resultados sejam proporcionalmente piores<sup>9</sup>.

Já o estudo da influência do número de ocorrências na qualidade dos resultados traz algumas informações de cunho prático. Um número baixo de ocorrências gera resultados apenas razoáveis: com  $K = 2$  ocorrências, os experimentos indicam que os desvios-padrão relativos para a estimação da profundidade da fonte variam de  $\sigma_{\Delta\lambda} = 23.5\%$  (para  $\sigma_N = 0.5$  px) a  $\sigma_{\Delta\lambda} = 66.2\%$  (para  $\sigma_N = 1.5$  px). Valores tão altos indicam que várias instâncias foram calculadas com erros inaceitáveis: há instâncias cujo erro de cálculo chega próximo a 1000%.

Dois fatores contribuem para a ocorrência de resultados tão discrepantes: o primeiro, observado já nos experimentos sem ruídos, é que um número baixo de ocorrências pode levar o processo iterativo a convergir para mínimos locais, possivelmente muito distantes dos valores procurados. O segundo motivo é que o gerador de valores aleatórios que

<sup>9</sup>Esta conclusão baseia-se somente na observação dos valores tabelados. Uma abordagem probabilística minuciosa poderá ou não corroborar esta hipótese.



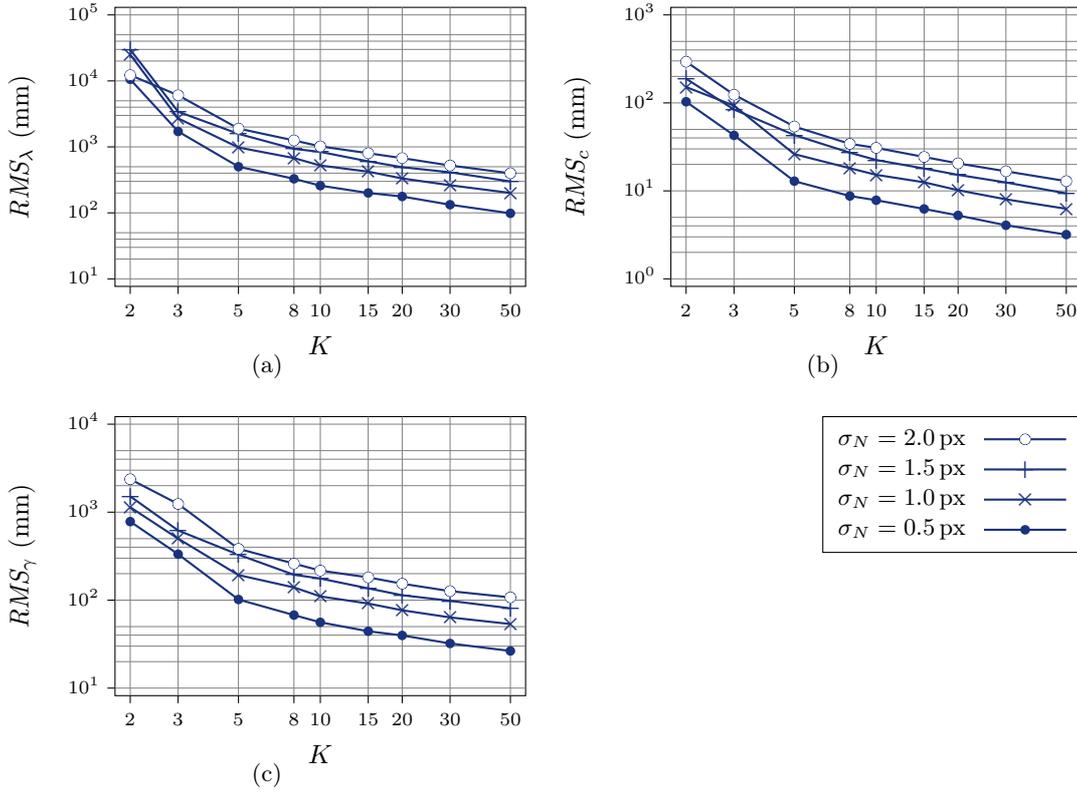
**Figura 4.17.** Desvios-padrão dos erros percentuais observados para as simulações gerais com ruídos ( $\sigma_N > 0$ ), (a) da estimação de  $\lambda$  ( $\sigma_{\Delta\lambda}$ ), (b) da estimação de  $c$  ( $\sigma_{\Delta c}$ ).

representam o ruído pode eventualmente fornecer um valor alto, o que corresponderia a um erro de vários pixels na localização de um determinado ponto na imagem. A interferência causada por tal ruído grosseiro é potencialmente desastrosa em instâncias com poucas (duas ou três) ocorrências.

O fato de que o desvio-padrão obtido com o pior nível de ruídos,  $\sigma_N = 2.0$  px, foram melhores do que os obtidos com níveis menores de ruídos não tem significado estatístico: apenas indica que os *outliers* por acaso foram menos severos ou menos numerosos para  $\sigma_N = 2.0$  px, na bateria de testes realizada.

Com apenas  $K = 3$  instâncias, nota-se que a qualidade dos resultados melhora drasticamente (a redução no desvio-padrão foi de 50% a 90%). Com  $K = 5$ , o desvio-padrão correspondente ao pior nível de ruídos é de 4.23%, e com  $K = 15$  este valor é reduzido pra menos da metade. Traduzindo para valores práticos: com  $K = 5$ , mais de 98% dos resultados estão na faixa de  $\pm 10\%$  do valor médio, e mais de 76% são estimados com no máximo 5% de erro em torno da média; com  $K = 10$ , 97.2% dos valores respeitam a faixa de 5% de erro; e com  $K = 50$ , 97.6% dos experimentos tiveram um erro máximo de 2%.

A estimação do comprimento das barras apresenta uma precisão sistematicamente superior às estimações da profundidade da fonte, mesmo quando se compara os valores relativos (percentuais). Isso ocorre porque as funções de erro adotadas na formulação matemática do problema são muito sensíveis a erros na estimação do comprimento da barra: como as incógnitas  $c_b$  aparecem em várias equações do sistema, um desvio no cálculo de um comprimento gera valores de erros (quadráticos) significativos. Além



**Figura 4.18.** Erros médios quadráticos (RMS) observados para as simulações gerais com ruídos ( $\sigma_N > 0$ ), (a) da estimação de  $\lambda$  ( $RMS_\lambda$ ), (b) da estimação de  $c$  ( $RMS_c$ ), (c) da estimação de  $\gamma_n$  ( $RMS_\gamma$ ).

disso, os erros na estimação da profundidade da fonte de luz podem ser mensurados apenas indiretamente, através dos desvios observados nas sombras projetadas sobre o plano-base (Eqs. (3.40a)–(b)), enquanto os erros na estimação do comprimento da barra são mensurados diretamente (Eq. (3.59)).

Analisando o resultado das simulações, a pior combinação de fatores — baixo número de ocorrências ( $K = 2$ ) e ruído alto ( $\sigma_N = 2.0$  px) — gera um desvio-padrão de 6.19% na estimação do comprimento das barras, ou cerca de 9.3 mm. Com  $K = 3$ , o desvio-padrão cai pra menos da metade e é menor do que 1% para  $K \geq 8$ . O pior erro na estimação do comprimento da barra, nas 20 000 estimações com pelo menos 10 ocorrências, foi de 3.5 mm. Esta análise indica que o método é suficientemente preciso para várias aplicações em Visão Computacional.

(a)					(b)				
$\sigma_N$ (px)					$\sigma_N$ (px)				
$K$	0.5	1.0	1.5	2.0	$K$	0.5	1.0	1.5	2.0
2	23.5%	55.6%	66.2%	27.0%	2	2.17%	3.19%	3.96%	6.19%
3	3.82%	6.02%	7.60%	13.5%	3	0.902%	1.96%	1.77%	2.60%
5	1.12%	2.18%	3.52%	4.23%	5	0.272%	0.551%	0.908%	1.14%
8	0.730%	1.51%	2.08%	2.79%	8	0.184%	0.381%	0.572%	0.722%
10	0.577%	1.16%	1.87%	2.27%	10	0.165%	0.321%	0.472%	0.650%
15	0.447%	0.939%	1.35%	1.79%	15	0.131%	0.264%	0.377%	0.510%
20	0.395%	0.738%	1.10%	1.51%	20	0.111%	0.215%	0.320%	0.431%
30	0.297%	0.585%	0.917%	1.17%	30	0.0857%	0.169%	0.262%	0.349%
50	0.220%	0.447%	0.668%	0.886%	50	0.0671%	0.132%	0.197%	0.270%

**Tabela 4.10.** Valores observados para o desvio-padrão percentual das simulações gerais com ruídos ( $\sigma_N > 0$ ), (a) na estimação de  $\lambda$  ( $\sigma_{\Delta\lambda}$ ), (b) na estimação de  $c$  ( $\sigma_{\Delta c}$ ).

#### 4.3.4.2 Simulações sobre a variação no comprimento da barra

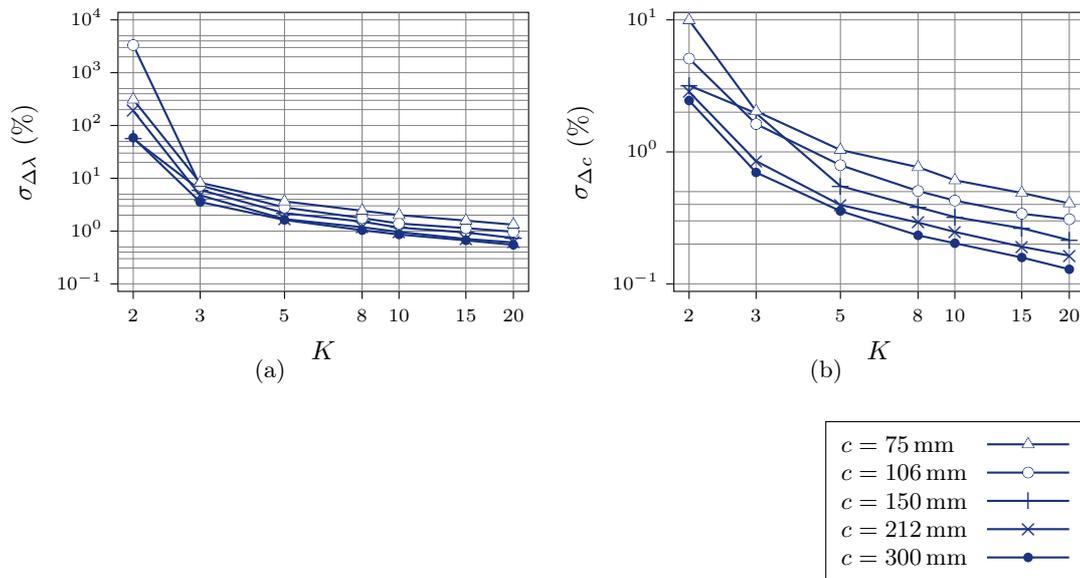
O segundo grupo de experimentos visa estudar a influência do comprimento da barra na precisão dos resultados. Os gráficos que servem de base para este estudo, e que consolidam as informações exibidas na Seção C.2 são: desvios-padrão (Figura 4.19), médias (Figura 4.20) e erros médios quadráticos (Figura 4.21).

Como os experimentos tratam do comprimento da barra, parece lógico observar principalmente os dados estatísticos sobre a sua estimação, embora os gráficos demonstrem que a melhor estimação sobre as barras gera resultados mais precisos também na estimação da profundidade da fonte.

Um estudo superficial em relação à estimação de  $c$ , baseado nos valores apresentados na Figura 4.19(b), permite concluir que os desvios-padrão dos erros são reduzidos em geral entre 35% e 50% quando se dobra o comprimento da barra. A mesma observação sobre as estimações de  $\lambda$  (Figura 4.19(b)) permite tirar valores mais modestos — uma melhoria entre 25% e 45% ao se multiplicar o comprimento da barra por 2 —, mas ainda assim significativos.

No entanto, vale lembrar que os valores medidos para o desvio-padrão são *percentuais* em relação ao comprimento da barra. Na realidade, o estudo da qualidade da estimação do comprimento absoluto, com base nos gráficos do erro RMS (Figura 4.21(b)) revela que barras menores têm seu comprimento estimado com mais precisão, embora essa melhoria seja bem pequena. A estimação das outras incógnitas (profundidades da fonte de luz e dos pontos-chave), com base nas Figuras 4.21(a) e 4.21(c), segue a regra inversa: quanto maior for o comprimento da barra, melhores são as estimações.

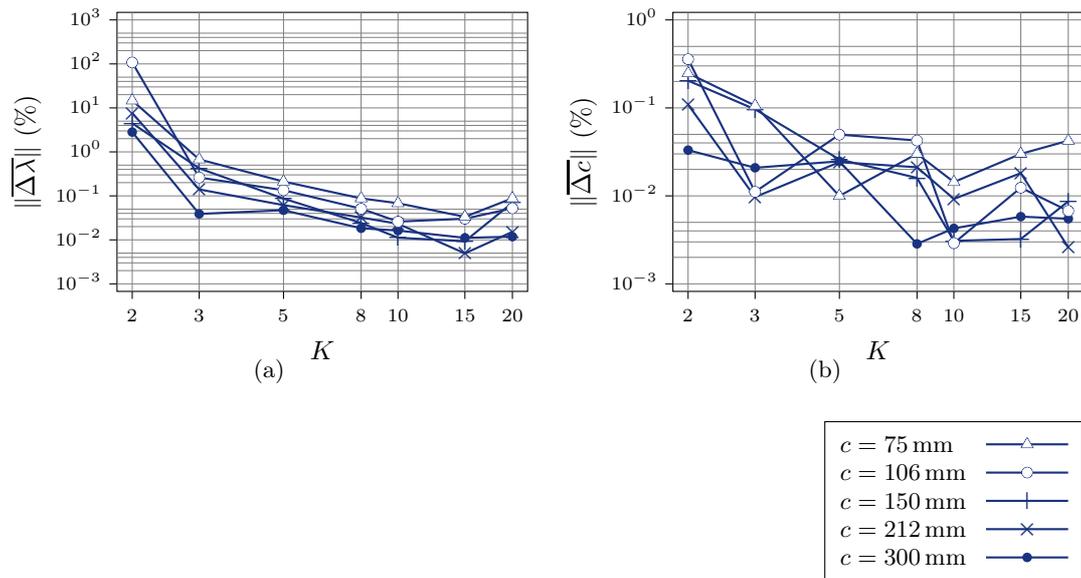
A análise das médias das estimações, vistas nas Figuras 4.20(a)–(b), mostra que não há tendência de estimação para mais ou para menos: todas as médias das estimações ficam muito próximas do valor ideal (zero). Curiosamente, embora o gráfico sobre a



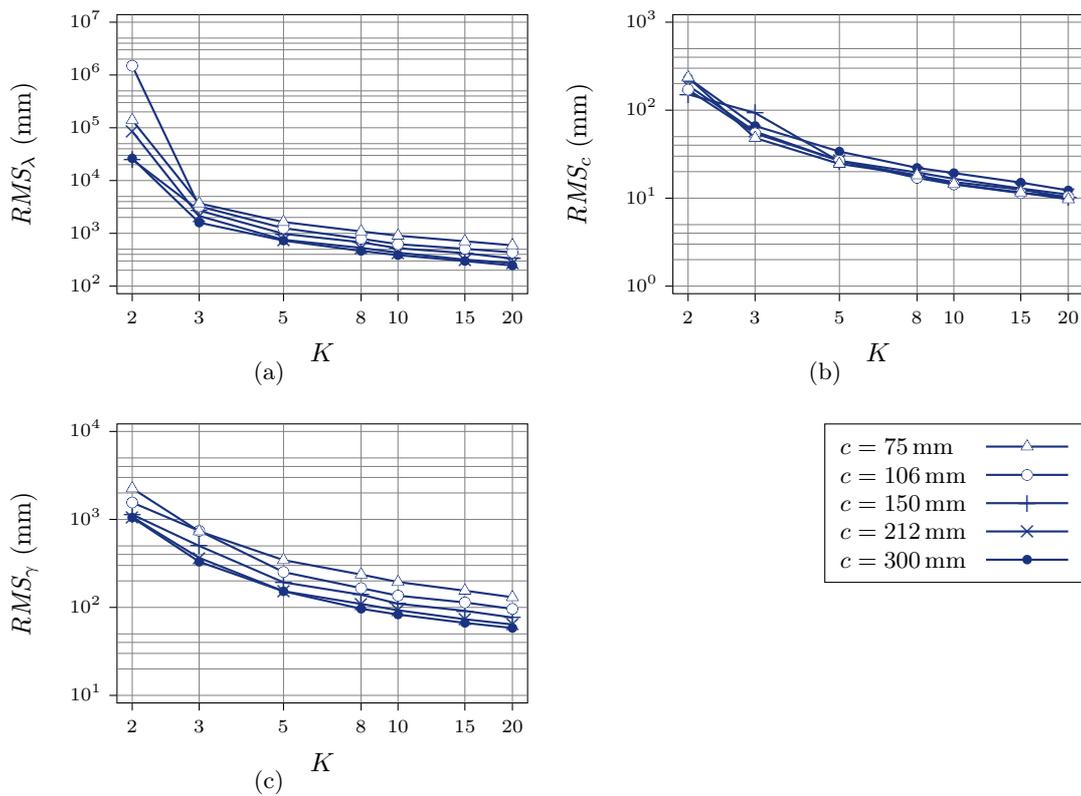
**Figura 4.19.** Desvios-padrão dos erros percentuais observados para as simulações de variação do comprimento da barra, (a) da estimação de  $\lambda$  ( $\sigma_{\Delta\lambda}$ ), (b) da estimação de  $c$  ( $\sigma_{\Delta c}$ ).

estimação da profundidade da fonte de luz mostre claramente uma melhoria com o uso de mais instâncias e de barras menores, o gráfico sobre a estimação do comprimento da barra não apresenta nenhuma relação clara entre esses parâmetros e a qualidade do resultado.

A conclusão sobre os experimentos é clara: barras mais longas geram resultados mais precisos para as profundidades e, em valores relativos, também para os comprimentos das barras. É um comportamento previsível, considerando-se que as imagens das barras mais compridas tendem a ter suas extremidades mais afastadas: assim o ruído é proporcionalmente menor, causando menos influência nos resultados.



**Figura 4.20.** Médias dos erros percentuais observadas para as simulações de variação do comprimento da barra, (a) da estimação de  $\lambda$  ( $\sigma_{\Delta\lambda}$ ), (b) da estimação de  $c$  ( $\sigma_{\Delta c}$ ).



**Figura 4.21.** Erros médios quadráticos (RMS) observados para as simulações de variação do comprimento da barra, (a) da estimação de  $\lambda$  ( $RMS_\lambda$ ), (b) da estimação de  $c$  ( $RMS_c$ ), (c) da estimação de  $\gamma_n$  ( $RMS_\gamma$ ).

#### 4.3.4.3 Simulações sobre a variação na riqueza da descrição do modelo

O terceiro grupo de testes trata da variação na riqueza da descrição do modelo da cena e de sua influência na qualidade dos resultados. Para rever os três níveis de riqueza estudados (e as abreviações que os representam), o texto explicativo da Subseção 4.3.3 é transcrito abaixo:

- *B.D.* (“*barras desconexas*”): É o nível mais pobre de descrição dos objetos, onde cada segmento da cadeia possui um comprimento independente (corresponde cada um a uma barra diferente) e não se considera que seus pontos extremos estão conectados;
- *B.C.* (“*barras conexas*”): Cada segmento ainda possui um comprimento independente, mas considera-se que os extremos estão conectados em uma cadeia;
- *O.C.* (“*ocorrências conexas*”): Aqui é incluída a restrição de que os segmentos possuem o mesmo comprimento — ou seja, são todos ocorrências da mesma barra. Além disso, seus extremos estão conectados em cadeia.

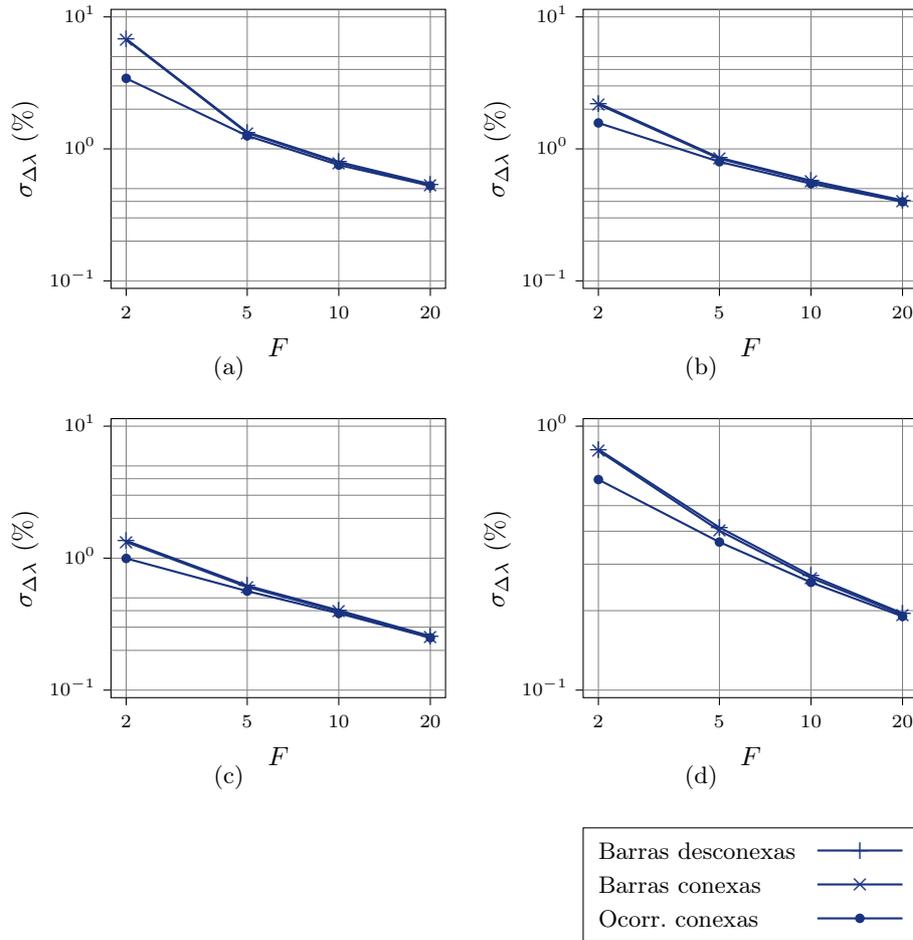
O objetivo deste grupo de testes é responder à terceira pergunta formulada no início da seção: “Qual o ganho na qualidade dos resultados, se a cena for descrita com mais riqueza?”. A base para os estudos desta subseção está nas informações apresentadas na Seção C.3. As informações sobre os desvios-padrão são consolidados em alguns gráficos, vistos na Figura 4.22, e as medidas dos erros médios quadráticos são vistos na Figura 4.23. As análises feitas a seguir não consideram a comparação entre as médias de estimação e os valores reais, já que, no pior caso, essa diferença é de menos de 0.45% para a profundidade da fonte. Além disso, como muitas instâncias do problema possuem mais de uma barra, o estudo dos erros de estimação do comprimento “da barra” perde o seu sentido.

Curiosamente, a riqueza da descrição da cena gera pouca melhoria nos resultados. O fato de se considerar que os extremos dos segmentos são ou não conexos não faz diferença para os resultados, mesmo considerando-se que, no caso desconexo, o sistema calcula profundidades diferentes para cada vértice: os desvios-padrão dos erros são reduzidos em apenas 1% ou 2%.

Quanto a considerar que todos os segmentos possuem o mesmo comprimento, as diferenças são perceptíveis apenas com um pequeno número de cadeias ( $F = 2$ ): apenas nesses casos observa-se uma melhoria no desvio-padrão de cerca de 25% a 50%.

O mesmo comportamento é observado nos gráficos que plotam os erros RMS: as curvas das instâncias com barras desconexas ou conexas se sobrepõem. Essas, por sua vez, também estão próximas das curvas das instâncias com ocorrências conexas, a não ser com  $F = 2$  cadeias.

Não obstante, as conclusões feitas anteriormente nesse capítulo, com base nos demais experimentos, já levam a crer que instâncias do problema com poucas ocorrências (5 ou

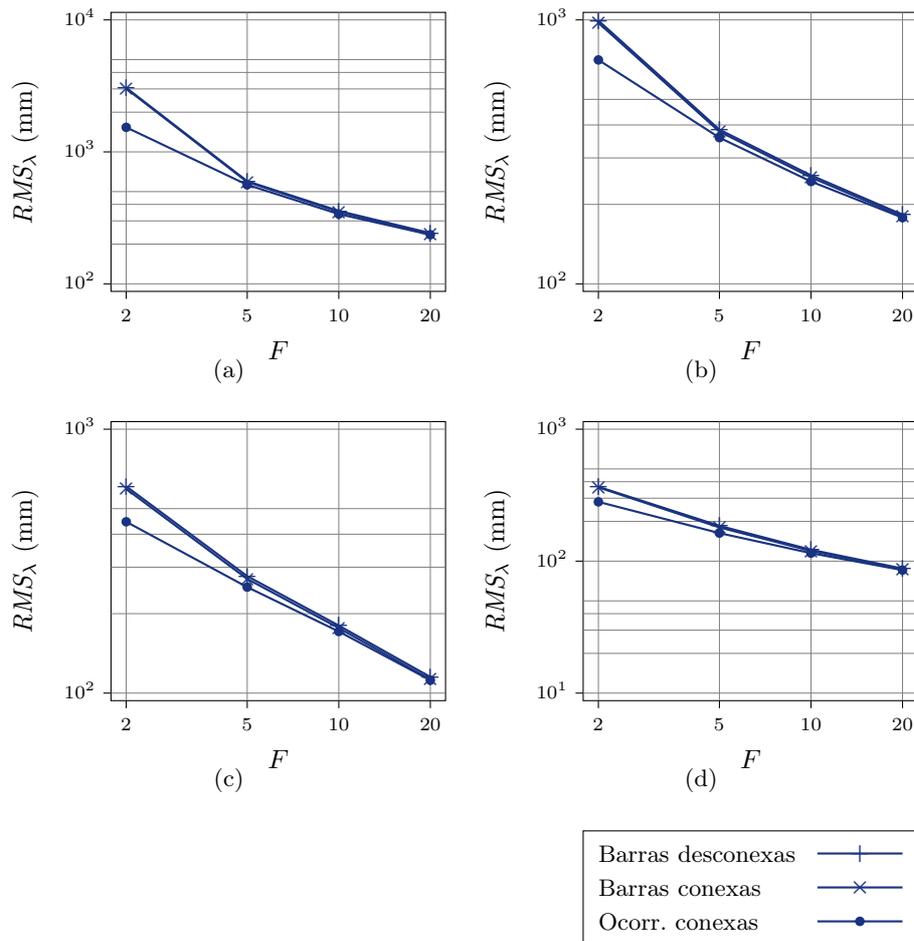


**Figura 4.22.** Desvios-padrão dos erros percentuais da estimação de  $\lambda$ , observados para as simulações de variação na riqueza da descrição do modelo, (a) para 2 ocorrências ( $Q = 2$ ), (b) para 4 ocorrências ( $Q = 4$ ), (c) para 8 ocorrências ( $Q = 8$ ), (d) para 16 ocorrências ( $Q = 16$ ).

menos) são razoavelmente sensíveis a ruídos, e a melhoria descrita no parágrafo anterior refere-se a instâncias desse tipo.

Conclui-se, portanto, que a melhoria trazida pela riqueza na descrição dos resultados é pequena, pelo menos nas condições de ruídos adotados neste trabalho. De certa forma esse fato é esperado, já que uma das conclusões tiradas nas análises das simulações gerais (Subseção 4.3.4.1) é o fato de que os comprimentos são calculados com precisão muito boa mesmo quando as ocorrências são totalmente desconexas, o que é o cenário das simulações gerais. Por outro lado, é interessante estudar futuramente se essa melhoria não seria significativa em condições mais severas de ruídos.

O tempo de cálculo da solução do problema tridimensional, nas simulações realizadas, foi de alguns décimos de segundo. As instâncias com um número grande de equações e incógnitas — em particular as geradas pelas simulações sobre a variação na riqueza da descrição do modelo, que podem chegar a mais de 1000 incógnitas —



**Figura 4.23.** Erros médios quadráticos (RMS) da estimação de  $\lambda$ , observados para as simulações de variação na riqueza da descrição do modelo, (a) para 2 ocorrências ( $Q = 2$ ), (b) para 4 ocorrências ( $Q = 4$ ), (c) para 8 ocorrências ( $Q = 8$ ), (d) para 16 ocorrências ( $Q = 16$ ).

levaram um tempo maior de cálculo, chegando a demorar alguns segundos.

## 4.4 Experimentos reais

Nesta seção são apresentados alguns testes reais de calibração de fonte de luz. Cada caso de teste será descrito em detalhes e os resultados obtidos serão discutidos.

Os casos de testes são baseados em dois conjuntos de imagens de cubos repousando sobre o plano-base, sendo que cada conjunto corresponde a uma cena iluminada por uma fonte de luz distinta. Em ambos os casos, a fonte é uma luminária halógena comum, encontrada facilmente à venda, da qual foi retirado o anteparo espelhado que possui a função de difundir a iluminação em uma direção desejada. A retirada dessa peça tem por objetivo fazer com que todos os raios luminosos partam diretamente da lâmpada, criando um modelo bem mais próximo de uma fonte pontual.

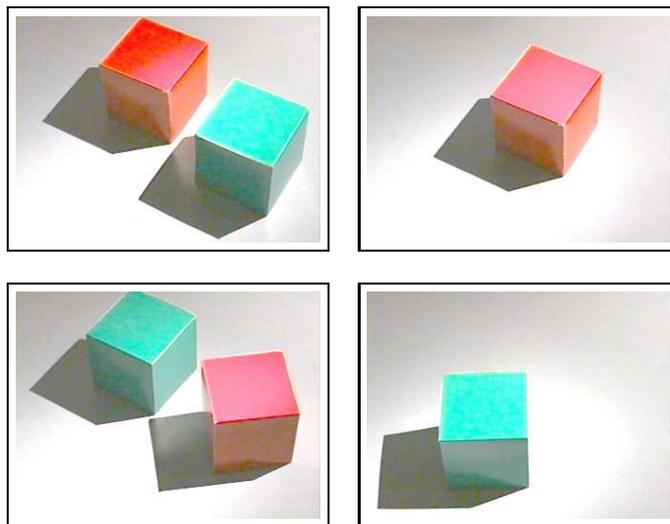
Antes de executar os testes, as posições das fontes de luz foram adquiridas manualmente (isto é, sem o auxílio de métodos computacionais), para que se tenha um valor de base com o qual os resultados do método podem ser comparados. A aquisição das coordenadas foi feita com o uso de réguas e esquadros milimetrados. As coordenadas obtidas, identificadas por  $\mathbf{L}_{real}$ , serão utilizadas como base de comparação com os valores estimados.

Para objetos da cena foram utilizados cubos de mesmo tamanho. Dessa forma, todas as arestas correspondem a uma única barra. Os cubos foram construídos em cartolina e seus lados possuem 50 mm de comprimento. A Figura 4.24 ilustra algumas imagens capturadas pela câmera. Nota-se a formação de sombras com contornos bem definidos, características da iluminação por uma fonte aproximadamente pontual.

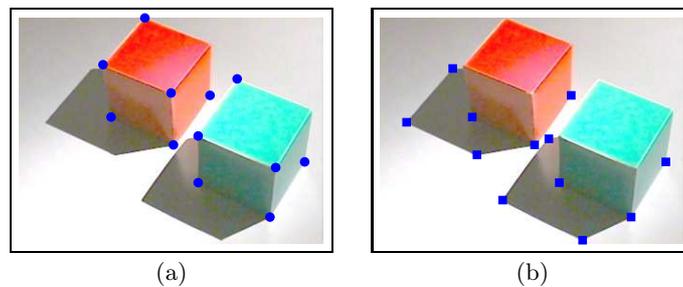
Todas as coordenadas bidimensionais foram obtidas sem o auxílio de ferramentas de processamento de imagens, como detectores de bordas ou de quinas: por meio de um aplicativo simples de visualização de imagens (*IrfanView*, <http://www.irfanview.com>), os pontos de interesse eram clicados com o *mouse* e as coordenadas eram retornadas como um par de valores inteiros. A Figura 4.25 exibe uma imagem sobre a qual foram sobrepostas as projeções dos pontos-chave,  $\mathcal{P}_n$ , e das sombras correspondentes,  $\mathcal{S}_n$ .

Quanto à localização de ocorrências nas imagens, deve-se ter em mente o exposto na Subseção 3.1.4 sobre a possibilidade de considerar como barra qualquer par de pontos cuja distância seja constante. Em um modelo mais simples de descrição dos objetos, somente as arestas são descritas como ocorrências e há somente um comprimento a ser estimado ( $B = 1$ ): a dimensão da aresta (Figura 4.26(a)), que será identificada por  $c_1$ .

Pode-se adotar uma descrição mais rigorosa, onde se leva em consideração a barra correspondente às diagonais das faces (Figura 4.26(b)), identificada por  $c_2$ . Nesse caso há duas barras a serem estimadas ( $B = 2$ ). Na descrição mais completa possível, leva-se também em consideração a barra correspondente às diagonais do cubo (Figura 4.26(c)), identificada por  $c_3$ , totalizando três barras ( $B = 3$ ). Pelo Teorema de Pitágoras sabe-se, de antemão, que  $c_2 = c_1\sqrt{2}$  e  $c_3 = c_1\sqrt{3}$ .



**Figura 4.24.** Exemplos de imagens reais capturadas.



**Figura 4.25.** Localização de pontos de interesse em uma imagem: (a) pontos-chave ( $\mathcal{P}_n$ ), (b) sombras correspondentes ( $\mathcal{S}_n$ ).

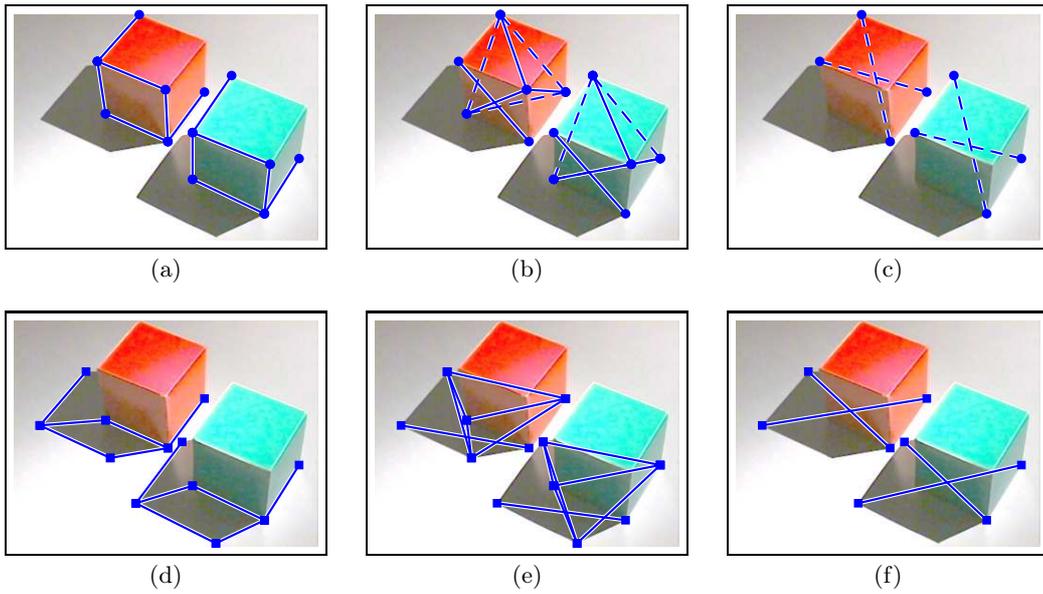
Cada caso de teste adota um nível diferente de completude descritiva. Na descrição dos detalhes de cada caso consta exatamente quais são as barras consideradas.

A câmera foi fixada em uma única posição para a tomada dos dois conjuntos de imagens, de modo que a diferença das configurações está somente na posição da fonte. Os dados extrínsecos e intrínsecos de calibração da câmera, obtidos pelo método de Tsai [1987], são apresentados nas Tabelas 4.11 e 4.12. Os fatores de distorção radial,  $\kappa_n$ , embora não utilizados pelo algoritmo, também são apresentados, pois a lente utilizada gera distorções radiais perceptíveis (extrapolam 13 px em um dos cantos da imagem) e as coordenadas em pixels tiveram que ser corrigidas.

As subseções seguintes tratam das particularidades e dos resultados obtidos em cada caso.

#### 4.4.1 Caso Real 1

**Descrição** O primeiro caso real apresentado baseia-se em 13 imagens obtidas da cena. Ao todo, os cubos aparecem 20 vezes (como se pode ver pela Figura 4.24, em algumas



**Figura 4.26.** Localização de ocorrências em uma imagem: (a) ocorrências de comprimento  $c_1$ , (b) ocorrências de comprimento  $c_2$ , (c) ocorrências de comprimento  $c_3$ , (d)–(f) sombras correspondentes.

---

Coordenadas do centro de projeção	$\mathbf{C} = (103.24, -282.89, 415.06)$ mm
Vetor-alvo	$\mathbf{t} = \langle -0.073514, 0.64895, -0.75727 \rangle$
Vetor superior	$\mathbf{u} = \langle 0.0042984, 0.75952, 0.65046 \rangle$

---

**Tabela 4.11.** Parâmetros extrínsecos de calibração da câmera para os casos reais.

---

Distância focal	$f = 17.109$ mm
Dimensões do elemento sensor	$d_x \times d_y = 10.080 \mu\text{m} \times 10.086 \mu\text{m}$
Dimensões do sensor	$640 \text{ px} \times 480 \text{ px}$
Centro da imagem	$o = (o_x, o_y) = (257.32, 188.66)$ px
Fatores de distorção radial	$\kappa_1 = 0.0011138$
	$\kappa_2 = -1.0326 \cdot 10^{-5}$
	$\kappa_3 = 5.2417 \cdot 10^{-7}$

---

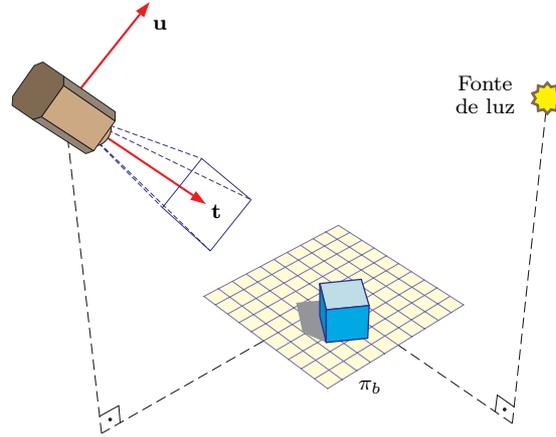
**Tabela 4.12.** Parâmetros intrínsecos de calibração da câmera para os casos reais.

imagens dois cubos aparecem ao mesmo tempo). As características reais da fonte de luz são apresentadas na Tabela 4.13. A montagem do Caso Real 1 é ilustrada na Figura 4.27.

A análise feita neste caso considera apenas as ocorrências de comprimento  $c_1$ , isto é, somente as arestas dos cubos são identificados como ocorrências. A Tabela 4.14 sumariza os dados da cena.

Posição no sistema global de coordenadas	$\mathbf{L}_{real} = (352.5, 91, 418)$ mm
Distância da fonte ao centro de projeção	$\lambda_{real} = 449.37$ mm
Posição da projeção sobre a imagem	$\mathcal{L}_{real} = (2283.2, -2003.2)$ px
Distância da projeção ao centro de imagem	$\ \mathcal{L}_{real} - o\  = 2984.7$ px

**Tabela 4.13.** Parâmetros da fonte de luz para os Casos Reais 1, 2 e 3.



**Figura 4.27.** Montagem adotada nos Casos Reais 1, 2 e 3.

Quantidade de pontos	$N = 94$
Quantidade de barras	$B = 1$
Quantidade de ocorrências	$K = 91$
Tamanho real das barras	$c_1 = 50$ mm

**Tabela 4.14.** Dados da cena para o Caso Real 1.

Estimação da projeção da fonte	$\mathcal{L}_{est} = (2221.2, -1965.2)$ px
Erro absoluto	$\mathcal{L}_{est} - \mathcal{L}_{real} = \langle -62.0, 38.0 \rangle$ px
Módulo do erro absoluto	$\ \mathcal{L}_{est} - \mathcal{L}_{real}\  = 72.7$ px
Desvio longitudinal	$\Delta u = -70.0$ px
Desvio transversal	$\Delta v = 19.7$ px
Desvio longitudinal relativo	$\Delta u / \ \mathcal{L}_{real} - o\  = -2.34\%$
Desvio transversal relativo	$\Delta v / \ \mathcal{L}_{real} - o\  = 0.66\%$

**Tabela 4.15.** Resultados do problema bidimensional para os Casos Reais 1, 2 e 3.

**Resultados** Os resultados obtidos pelo algoritmo de calibração da fonte de luz estão exibidos em duas partes, correspondentes aos passos da calibração: a Tabela 4.15 exhibe os resultados para a estimação das coordenadas bidimensionais da projeção da fonte e a Tabela 4.16 trata da estimação dos dados tridimensionais.

Na observação dos resultados bidimensionais, é interessante observar que eles representam uma característica do comportamento observado durante as simulações: o erro

Estimação da fonte	$\mathbf{L}_{est} = (355.1, 103.4, 415.2)$ mm
Erro absoluto	$\mathbf{L}_{est} - \mathbf{L}_{real} = \langle 2.6, 12.4, -2.8 \rangle$ mm
Módulo do erro absoluto	$\ \mathbf{L}_{est} - \mathbf{L}_{real}\  = 12.9$ mm
Erro relativo	$\ \mathbf{L}_{est} - \mathbf{L}_{real}\ /\lambda_{real} = 2.88\%$
Estimação da prof. da fonte	$\lambda_{est} = 461.1$ mm
Erro	$\lambda_{est} - \lambda_{real} = 11.8$ mm
Erro relativo	$(\lambda_{est} - \lambda_{real})/\lambda_{real} = 2.62\%$
Estim. do compr. da barra	$c_{1\ est} = 49.9$ mm
Erro	$c_{1\ est} - c_{1\ real} = -0.058$ mm
Erro relativo	$(c_{1\ est} - c_{1\ real})/c_{1\ real} = -0.12\%$

**Tabela 4.16.** Resultados do problema tridimensional para o Caso Real 1.

Quantidade de pontos	$N = 94$
Quantidade de barras	$B = 2$
Quantidade de ocorrências	$K = 184$
Tamanho real das barras	$c_b = \{50, 50\sqrt{2}\}$ mm

**Tabela 4.17.** Dados da cena para o Caso Real 2.

transversal ( $\Delta v$ ) é significativamente menor do que o longitudinal ( $\Delta u$ ), sugerindo que o algoritmo possui uma precisão maior na determinação da direção da fonte de luz do que de sua distância a partir do centro de imagem.

Os resultados tridimensionais demonstram que o algoritmo de calibração é bastante preciso: a fonte foi estimada com um desvio de menos de 13 mm da posição adotada como valor de base. O erro da profundidade da fonte acompanha essa ordem de grandeza, tendo sido de menos de 12 mm mais distante do que o real.

A estimação do comprimento da barra, como já foi evidenciado nas simulações, não é problema: o erro de menos de 60 microns é esperado até mesmo com a mensuração com um paquímetro convencional.

#### 4.4.2 Caso Real 2

**Descrição** O segundo caso de teste corresponde a um refinamento do caso anterior. O conjunto de imagens de entrada é o mesmo; porém, as diagonais das faces (Figura 4.26(b)) são descritas como ocorrências, trazendo uma incógnita a mais para o sistema: o comprimento  $c_2$ . Por outro lado, o número de restrições aumenta consideravelmente, já que a quantidade de ocorrências ( $K$ ) mais do que dobra: salta de 91 para 184.

Os dados da cena são exibidos na Tabela 4.17. Os parâmetros da fonte são iguais aos do Caso Real 1 (Tabela 4.13).

Estimação da fonte	$\mathbf{L}_{est} = (355.0, 103.1, 415.2)$ mm
Erro absoluto	$\mathbf{L}_{est} - \mathbf{L}_{real} = \langle 2.5, 12.1, -2.8 \rangle$ mm
Módulo do erro absoluto	$\ \mathbf{L}_{est} - \mathbf{L}_{real}\  = 12.7$ mm
Erro relativo	$\ \mathbf{L}_{est} - \mathbf{L}_{real}\ /\lambda_{real} = 2.82\%$
Estimação da prof. da fonte	$\lambda_{est} = 460.9$ mm
Erro	$\lambda_{est} - \lambda_{real} = 11.5$ mm
Erro relativo	$(\lambda_{est} - \lambda_{real})/\lambda_{real} = 2.56\%$
Estim. do compr. das barras	$c_{b\ est} = \{50.0, 70.8\}$ mm
Erro	$c_{b\ est} - c_{b\ real} = \{-0.034, 0.063\}$ mm
Erro relativo	$(c_{b\ est} - c_{b\ real})/c_{b\ real} = \{-0.069, 0.089\}\%$

**Tabela 4.18.** Resultados do problema tridimensional para o Caso Real 2.

**Resultados** Como o conjunto de pontos é o mesmo do Caso Real 1, os resultados para a estimação da projeção da fonte são exatamente os mesmos (Tabela 4.15). O interesse deste caso de teste é a observação do comportamento dos resultados da etapa tridimensional do algoritmo.

As estimativas obtidas são apresentadas na Tabela 4.18. Foram obtidas melhores estimativas tanto a profundidade da fonte de luz (o erro absoluto caiu de 11.8 mm para 11.5 mm) quanto para a própria posição (o desvio caiu de 12.9 mm para 12.7 mm). Não obstante, a melhoria nos resultados foi muito pequena, na faixa de 0.06 pontos percentuais em ambos os casos: pode-se considerar, portanto, que os resultados são equivalentes. É um fato que corrobora a informação obtida nos experimentos simulados: para um número alto de ocorrências, o ganho de qualidade com o aumento na riqueza da descrição da cena é irrisório.

A estimação do comprimento de ambas as barras novamente foi feita com excelente precisão, com erros na ordem de grandeza de algumas dezenas de microns. O erro na estimação do comprimento das arestas caiu quase pela metade (de  $-58 \mu\text{m}$  para  $-34 \mu\text{m}$ ).

#### 4.4.3 Caso Real 3

**Descrição** Finalizando a sequência de casos que analisam o ganho obtido pela riqueza na descrição dos dados de entrada, este caso baseia-se nos dois anteriores, acrescentando uma nova barra: a diagonal do cubo (Figura 4.26(c)), cujo comprimento é identificado por  $c_3$ . Essa alteração faz com que o número de ocorrências aumente um pouco, chegando a  $K = 212$  (Tabela 4.19).

Os parâmetros da fonte permanecem os mesmos dos dois casos anteriores e estão registrados na Tabela 4.13.

Quantidade de pontos	$N = 94$
Quantidade de barras	$B = 3$
Quantidade de ocorrências	$K = 212$
Tamanho real das barras	$c_b = \{50, 50\sqrt{2}, 50\sqrt{3}\}$ mm

**Tabela 4.19.** Dados da cena para o Caso Real 3.

Estimação da fonte	$\mathbf{L}_{est} = (355.4, 103.7, 415.2)$ mm
Erro absoluto	$\mathbf{L}_{est} - \mathbf{L}_{real} = \langle 2.9, 12.7, -2.8 \rangle$ mm
Módulo do erro absoluto	$\ \mathbf{L}_{est} - \mathbf{L}_{real}\  = 13.3$ mm
Erro relativo	$\ \mathbf{L}_{est} - \mathbf{L}_{real}\ /\lambda_{real} = 2.96\%$
Estimação da prof. da fonte	$\lambda_{est} = 461.6$ mm
Erro	$\lambda_{est} - \lambda_{real} = 12.2$ mm
Erro relativo	$(\lambda_{est} - \lambda_{real})/\lambda_{real} = 2.71\%$
Estim. do compr. das barras	$c_{b\ est} = \{49.9, 70.7, 86.5\}$ mm
Erro	$c_{b\ est} - c_{b\ real} = \{-0.055, 0.036, -0.130\}$ mm
Erro relativo	$(c_{b\ est} - c_{b\ real})/c_{b\ real} = \{-0.111, 0.052, -0.150\}\%$

**Tabela 4.20.** Resultados do problema tridimensional para o Caso Real 3.

**Resultados** Os resultados da etapa bidimensional do problema permanecem idênticos aos casos anteriores (Tabela 4.15), já que as coordenadas dos pontos utilizadas como dados de entrada são os mesmos.

As diferenças surgem apenas na etapa tridimensional, cujos resultados constam na Tabela 4.20.

Em comparação com os Casos Reais 1 e 2, este apresentou em geral uma pequena piora na qualidade dos resultados: a estimação da posição da fonte ficou com um desvio de 13.3 mm, em comparação com 11.5 mm e 12.2 mm obtidos anteriormente. O comprimento da barra  $c_1$  teve um erro médio ( $-55 \mu\text{m}$ , em comparação com  $-58 \mu\text{m}$  e  $-34 \mu\text{m}$ ) e o da barra  $c_2$  teve uma estimação melhor ( $36 \mu\text{m}$  contra  $63 \mu\text{m}$  de erro do Caso 2).

Todas essas diferenças são desprezíveis: estão na ordem de décimos de milímetros e representam uma flutuação próxima do limite de precisão que se pode obter com o equipamento e configuração utilizados. Mais uma vez, vale citar que na prática não há ganho na qualidade dos resultados com o uso de uma descrição mais rica da cena.

#### 4.4.4 Caso Real 4

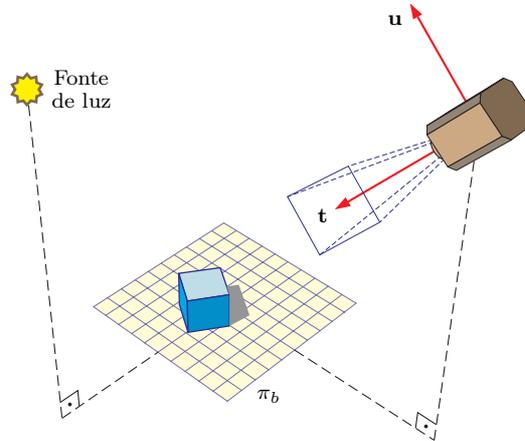
**Descrição** Este caso de teste foi feito sobre um conjunto de imagens diferente do usado nos três casos anteriores. A fonte que ilumina a cena também é outra, colocada em uma posição completamente diferente, e cujos parâmetros são registrados na Tabela 4.21. A montagem utilizada neste experimento é ilustrada na Figura 4.28.

Posição no sistema global de coordenadas	$\mathbf{L}_{real} = (-186, 0, 428)$ mm
Distância da fonte ao centro de projeção	$\lambda_{real} = 404.79$ mm
Posição da projeção sobre a imagem	$\mathcal{L}_{real} = (-2149.8, -1742.4)$ px
Distância da projeção ao centro de imagem	$\ \mathcal{L}_{real} - o\  = 3086.0$ px

**Tabela 4.21.** Parâmetros da fonte de luz para o Caso Real 4.

Quantidade de pontos	$N = 50$
Quantidade de barras	$B = 1$
Quantidade de ocorrências	$K = 30$
Tamanho real das barras	$c_1 = 50$ mm

**Tabela 4.22.** Dados da cena para o Caso Real 4.



**Figura 4.28.** Montagem adotada no Caso Real 4.

O objetivo deste caso é testar a robustez do método com o uso de um número bem menor de ocorrências. Embora este conjunto de imagens tenha características coincidentes com o anterior — são 13 imagens da cena, onde os cubos aparecem 20 vezes ao todo —, foram coletados muito menos pontos do que os testes anteriores. Especificamente, somente os pontos dos vértices da face superior do cubo foram relevados: todos os pontos da base do objeto, os que tocam o plano-base, são descartados para qualquer análise.

Essa restrição na escolha dos pontos — somada ao fato de que somente as arestas serão descritas como ocorrências, fazendo com que somente um comprimento de barra,  $c_1$ , tenha que ser estimado — restringe sensivelmente a quantidade de dados de entrada. A Tabela 4.22 apresenta os dados para a instância analisada: comparados com os vistos na Tabela 4.14, por exemplo, nota-se que os cálculos serão baseados em cerca de metade do número de pontos e um terço do número de ocorrências.

Estimação da projeção da fonte	$\mathcal{L}_{est} = (-2135.4, -1856.2)$ px
Erro absoluto	$\mathcal{L}_{est} - \mathcal{L}_{real} = \langle 14.3, -113.8 \rangle$ px
Módulo do erro absoluto	$\ \mathcal{L}_{est} - \mathcal{L}_{real}\  = 114.7$ px
Desvio longitudinal	$\Delta u = 60.0$ px
Desvio transversal	$\Delta v = -97.7$ px
Desvio longitudinal relativo	$\Delta u / \ \mathcal{L}_{real} - o\  = 1.95\%$
Desvio transversal relativo	$\Delta v / \ \mathcal{L}_{real} - o\  = -3.17\%$

**Tabela 4.23.** Resultados do problema bidimensional para o Caso Real 4.

Estimação da fonte	$\mathbf{L}_{est} = (-187.1, 12.9, 436.6)$ mm
Erro absoluto	$\mathbf{L}_{est} - \mathbf{L}_{real} = \langle -1.1, 12.9, 8.6 \rangle$ mm
Módulo do erro absoluto	$\ \mathbf{L}_{est} - \mathbf{L}_{real}\  = 15.5$ mm
Erro relativo	$\ \mathbf{L}_{est} - \mathbf{L}_{real}\  / \lambda_{real} = 3.84\%$
Estimação da prof. da fonte	$\lambda_{est} = 415.0$ mm
Erro	$\lambda_{est} - \lambda_{real} = 10.2$ mm
Erro relativo	$(\lambda_{est} - \lambda_{real}) / \lambda_{real} = 2.53\%$
Estim. do compr. da barra	$c_{1\ est} = 50.1$ mm
Erro	$c_{1\ est} - c_{1\ real} = 0.131$ mm
Erro relativo	$(c_{b\ est} - c_{b\ real}) / c_{b\ real} = 0.262\%$

**Tabela 4.24.** Resultados do problema tridimensional para o Caso Real 4.

**Resultados** Apesar da quantidade bem menor de dados de entrada, os resultados da etapa bidimensional (Tabela 4.23) mostram erros que, embora estejam na mesma ordem de grandeza dos observados nos Casos Reais 1, 2 e 3 (Tabela 4.15), são mais severos, conforme o esperado. O erro absoluto, de 114.7 px, em comparação com 72.7 px dos casos anteriores, evidencia que a redução significativa nos dados de entrada tende a piorar a qualidade dos resultados obtidos.

Ainda assim, o resultado final da calibração da fonte obteve um excelente resultado: com um desvio de apenas 15.5 mm, está bastante próximo do erro absoluto apresentado pelo Caso Real 3, de 13.3 mm (cerca de 16.5% pior). A estimação da profundidade, com um erro relativo de 2.53%, chega a ser melhor do que todos os casos anteriores. Deve-se, é claro, fazer a ressalva de que essas diferenças giram na casa dos centésimos de pontos percentuais, portanto sua importância é desprezível.

## 4.5 Observações finais

Na introdução da Seção 4.1, foram propostas algumas questões que deveriam ser respondidas com base na observação dos resultados das simulações. Essas questões são transcritas a seguir, acompanhadas das conclusões obtidas tanto com os experimentos simulados quanto com os reais.

1. *Na ausência de ruídos, os resultados obtidos correspondem aos valores esperados?*

Sim, embora em algumas instâncias com poucas ocorrências ( $K \leq 3$ ) tenham sido calculados valores errados na etapa tridimensional da resolução. Nesses casos, foi observada convergência para mínimos locais da função de erro. O problema não foi observado com um número maior de ocorrências ( $K \geq 5$ ), o que sugere que o uso de pelo menos 5 instâncias reduz para praticamente zero a chance do algoritmo convergir para um mínimo local e fornecer resultados irreais.

2. *Qual a influência da magnitude dos ruídos na precisão dos resultados?*

Uma análise do desvio-padrão dos ruídos *versus* o desvio-padrão dos erros (Tabela 4.10) indica que aparentemente há uma relação de proporcionalidade direta no intervalo de grandeza dos valores analisados. Essa conclusão, porém, não é matematicamente rigorosa: para uma mais profunda dessa relação, testes mais específicos podem ser realizados, em especial com níveis de ruídos mais severos.

3. *Qual o ganho na qualidade dos resultados, se a cena for descrita com mais riqueza?*

É perceptível apenas para instâncias com uma pequena quantidade de ocorrências. Nas simulações, não há diferença significativa entre considerar as barras desconexas e conexas. No modelo de ocorrências conexas, o ganho também é desprezível para  $K \geq 10$ , pelo menos para os níveis testados de ruídos.

Quanto aos experimentos reais, a única diferença entre os Casos Reais 1, 2 e 3 está na riqueza da descrição dos objetos. As flutuações observadas nos resultados é tão baixa que pode-se considerar que as três instâncias chegaram aos mesmos resultados.

4. *Em uma configuração típica do problema, qual é a precisão esperada para a calibração?*

Depende de vários fatores, é claro. Com base na montagem usada para as simulações — uma câmera com resolução de  $1024 \times 768$  pixels com campo de visão de  $33^\circ$  (horizontal) e  $25^\circ$  (vertical) e montada em relação à fonte de luz de acordo com a descrição apresentada na Subseção 4.1.1 —, espera-se que instâncias corrompidas por um ruído gaussiano de  $\sigma_N = 2.0$  pixels e com  $K = 15$  ocorrências gerem resultados que em 75% dos casos possuem um erro de estimação de menos de 2%, tanto na projeção da fonte quanto em sua profundidade, ou de menos de 3% em 90% dos casos. Em uma configuração mais otimista — por exemplo, com um ruído de  $\sigma_N = 1.0$  pixels e  $K = 30$  ocorrências —, espera-se que 98% dos casos tenham uma precisão de estimação da projeção da fonte com até 3% de erro e da profundidade com até 2% de erro.

A estimação do comprimento das barras é sempre muito mais precisa. Embora um desvio-padrão de cerca de 5% tenha sido observado com um ruído alto ( $\sigma_N = 2.0$  px) e com o menor número de ocorrências possível ( $K = 2$ ), qualquer instância

com pelo menos 4 ocorrências estima os comprimentos com um desvio-padrão inferior a 1%. Com um ruído mais modesto, de  $\sigma_N = 1.0$  px, bastam 20 ocorrências para se chegar a um desvio-padrão de erros de 0.2%.

Os experimentos reais geraram erros compatíveis com esses valores. Os desvios na estimação da projeção e da profundidade da fonte variaram entre 2% e 3%, tendo chegado em um caso a 3.84% (no experimento com o menor número de ocorrências descritas). A estimação do comprimento das barras esteve sempre com um erro muito pequeno, sempre inferior a 0.3%.

## Capítulo 5

# Conclusões e Trabalhos Futuros

### 5.1 Conclusões

Este trabalho apresentou um novo método para calibração de fontes de luz baseado no conhecimento da calibração da câmera e na localização, em um conjunto de imagens adquiridas da cena, de pares de pontos que possuem a mesma distância entre si e de suas sombras correspondentes.

Em comparação com os diversos trabalhos publicados sobre a calibração de fontes pontuais, que consideram um modelo simplificado de iluminação onde a fonte localiza-se infinitamente distante da cena, a principal vantagem deste método está em considerar que as fontes são próximas da cena, ou seja, que os raios luminosos não chegam aos objetos em feixes paralelos.

Em relação aos trabalhos de calibração de fontes próximas publicados por Bouguet e Perona [1997, 1998, 1999], o método proposto apresenta vários benefícios: não requer o conhecimento das dimensões dos objetos observados, trata a propagação de ruídos segundo um modelo realístico e permite uma flexibilidade muito maior no posicionamento dos objetos na cena.

O fato de que as coordenadas tridimensionais dos pontos-chave também são recuperadas permite que o método seja utilizado como base para várias aplicações, como reconstrução tridimensional da cena, renderização inversa, inserção de objetos fictícios em cenas reais (*augmented reality*) e outras.

Os experimentos realizados — tanto os teóricos, feitos por simulações em computador, quanto os práticos, com base em cenas reais — comprovam que o método é robusto e capaz de chegar a resultados suficientemente precisos para serem usados como dados de entrada para outros problemas na área de Visão Computacional que requeiram a calibração da fonte como dado de entrada.

A implementação do método, embora não tenha sido otimizada para minimizar o tempo de cálculo, foi capaz de resolver a maioria dos experimentos em uma questão de décimos de segundo, com base em uma plataforma comum na época em que foram

realizados (um computador Pentium IV de 3.0 GHz com 1 GB de memória RAM). Isto sugere que o método é suficientemente veloz para o uso em aplicações em tempo real — por exemplo, em navegação autônoma de robôs, onde os dados devem ser processados de maneira rápida.

Conclui-se, portanto, que o método de calibração de fontes de luz apresentado nesta dissertação atingiu os objetivos propostos inicialmente: provê uma maneira precisa de calibrar fontes de luz pontuais próximas, tolerante a ruídos, com base em um conjunto pequeno de informações sobre a cena e sem o conhecimento das dimensões dos objetos que servem de base para o problema.

A principal desvantagem deste método em relação a muitos outros, em especial aos baseados em objetos de geometria e reflectância conhecidas, está no fato de que este tende a ser bem menos passível de automatização: embora possa-se usar métodos de análise de imagens para a localização dos pontos de interesse na imagem, como detectores de quinas ou bordas, o método ainda requer a participação do usuário para a descrição de barras e ocorrências.

Outra desvantagem está no fato de que os objetos da cena devem ter pontos-chave facilmente localizáveis. Objetos poliédricos ou com extremidades pontudas podem ser usados, mas objetos com superfícies curvas tendem a ser inúteis para o método. Além disso, a necessidade de observar as sombras correspondentes dos pontos-chave impede que os objetos sejam observados em qualquer posição: o usuário terá que procurar posições em que seja possível identificar, na imagem, tanto os pontos-chave quanto suas sombras.

É importante notar que o método baseia-se na projeção de sombras “sobre uma superfície plana”, portanto qualquer cena que não tenha um plano para a projeção de sombras está automaticamente descartado para este método. Outras configurações da cena podem dificultar ou impossibilitar o uso do método:

- fontes muito próximas da câmera (*flashes*, por exemplo) ou colocadas atrás da câmera podem impedir que as sombras sejam observadas, já que os objetos tendem a encobri-las;
- fontes muito rentes ao plano-base fazem com que as sombras sejam geradas a uma distância muito grande dos objetos. Nesse caso, pontos-chave e sombras podem ser observados apenas com o uso de câmeras com lentes grande-angulares (cuja distorção radial dificilmente poderá ser corrigida) ou posicionadas a grande distância dos objetos (o que torna difícil localizar as ocorrências).

Em geral, a principal restrição geométrica para o uso do método está em enquadrar e registrar tanto os pontos-chave quanto suas sombras.

Finalmente, o trabalho apresentado limita-se à recuperação somente da posição da fonte: não permite a calibração de intensidade, cor ou outras características que são

recuperadas por alguns métodos.

## 5.2 Trabalhos futuros

O método de calibração apresentado neste documento poderá servir de base para outras pesquisas, que poderiam ter como objetivo a calibração da fonte com maior precisão ou o uso de modelos de fontes não pontuais.

Algumas sugestões para trabalhos futuros são citadas abaixo:

- Talvez o trabalho mais simples a ser feito com base nesta dissertação esteja em verificar a robustez do método para a *reconstrução da cena*, isto é, conduzir testes para avaliar a robustez do método na recuperação das coordenadas tridimensionais da cena. Parte dos experimentos simulados apresentados no Capítulo 4 calcularam e apresentaram os erros na estimação da profundidade dos pontos-chave, mas é mais interessante estabelecer uma métrica de erro baseada na distância euclidiana entre as coordenadas tridimensionais conhecidas e estimadas dos pontos-chave: assim, seria possível aferir o quanto o modelo estimado do objeto como um todo se afasta de sua geometria real.

Uma dificuldade nesse trabalho estaria em estudar uma maneira prática de se fazer os experimentos práticos, pois seria necessário conhecer as coordenadas tridimensionais dos pontos de interesse na cena como valor de base;

- Algumas alterações no método podem ser feitas para que se possa descrever relações mais precisas entre as barras dos objetos, de modo a poder especificar, por exemplo, que “a barra  $m$  possui o dobro do comprimento da barra  $n$ ” ou “as barras  $x$  e  $y$  são perpendiculares entre si”. O primeiro caso é bastante simples e corresponde a alterar a maneira com que o sistema de equações é montado; o segundo caso é um pouco mais complexo, pois exige que se definam métricas de erro angulares e sua relação com os erros das coordenadas bidimensionais das projeções na imagem.

Uma possível aplicação desse tipo de descrição precisa estaria na aplicação do método de calibração baseada em objetos de geometria bem específica — por exemplo, sabe-se que os objetos-alvo são cubos, portanto todas as relações angulares e proporções de comprimento das barras são conhecidas *a priori*. Estudos devem ser feitos para decidir se essa forma de descrição melhora os resultados de calibração; com base nos experimentos feitos no Capítulo 4, em especial em relação ao ganho de qualidade com a variação na riqueza da descrição do modelo (Subseção 4.3.4.3), é possível que os ganhos sejam percebidos apenas na presença de ruídos significativos ou com o uso de poucas imagens dos objetos;

- Embora o método apresentado nesta dissertação seja totalmente baseado na projeção das sombras sobre um plano-base, nada impede que sejam analisadas as

sombras sobre superfícies de formato arbitrário e previamente conhecido. Os princípios matemáticos que modelam o problema são praticamente idênticos. Entretanto, já que a superfície-base não é mais um plano (o que invalida a definição da Eq. 3.1), todas as equações que se baseiam nesse fato têm que ser reescritas;

- Uma das sugestões mais interessantes para um trabalho futuro está em refazer toda a abordagem matemática do problema tridimensional, passando a considerar que as *coordenadas tridimensionais* da fonte e dos pontos (não mais suas profundidades) sejam as incógnitas. É possível que essa abordagem seja menos sensível a ruídos, já que os resultados do problema bidimensional deixam de constituir os dados de entrada do problema tridimensional: passam a ser apenas uma base para as estimativas iniciais.

Essa abordagem é fortemente voltada para a reconstrução da cena, já que a maior preocupação passa a ser a recuperação precisa das coordenadas tridimensionais dos pontos-chave. A calibração da fonte continuaria sendo um resultado deste método — e provavelmente seria beneficiada pela nova abordagem —, mas o objetivo maior passaria a ser especificamente a recuperação da geometria e da pose do objeto;

- O método atual baseia-se na relação entre pontos dos objetos e suas sombras correspondentes. Embora toda a metodologia tenha sido exposta para o uso de vértices e extremidades — pelo fato de que são de fácil localização —, um método mais completo poderia ser desenvolvido para utilizar um conjunto bem maior de pontos, já que todos os pontos da silhueta da sombra correspondem a pontos do objeto. A maior dificuldade nesse método generalizado está em estabelecer essa relação biunívoca, que deverá ser feita de maneira automática (já que seria impraticável ao usuário especificar uma lista de centenas ou milhares de pares de pontos).

Um possível ponto de partida para esse trabalho está no estudo das fronteiras críticas, cujos trabalhos (aplicados para fontes pontuais direcionais) estão listados na Subseção 2.1.1.6;

- Um tema de muito interesse para a Visão Computacional está na *calibração simultânea* da câmera e da fonte de luz, recuperando ao mesmo tempo a geometria dos objetos da cena: o desenvolvimento de um método capaz de recuperar os parâmetros de calibração da câmera, as coordenadas tridimensionais dos pontos observados e a posição da fonte de luz. A primeira dificuldade deste tema é determinar se ele é matematicamente tratável, ou seja, se é possível determinar um conjunto de restrições capazes de combater todas as ambigüidades. É bem possível que o problema já seja bastante complexo mesmo que se considere que os parâmetros intrínsecos sejam previamente conhecidos;
- Outra sugestão para um possível trabalho futuro está na incorporação de modelos

de *fontes não-pontuais* como objetivos de calibração. Tal abordagem possivelmente seria baseada na observação de áreas de penumbra, tanto as observáveis no plano de sombras quanto no próprio objeto.

# Apêndice A

## Glossário de símbolos e convenções

Este apêndice consolida todas as convenções utilizadas neste trabalho: a tipografia (estilo de caracteres), a simbologia (baseada em caracteres romanos e gregos) e os operadores relacionais não comuns.

### A.1 Convenções tipográficas

<i>Convenção</i>	<i>Exemplos</i>	<i>Descrição</i>
Negrito	$\mathbf{C}, \mathbf{L}, \mathbf{P}_n, \mathbf{t}$	Vetores ou coordenadas tridimensionais. Referem-se ao sistema global de coordenadas $x, y, z$ (Figura 3.1) e suas componentes são identificadas pelos sobrescritos $(x)$ , $(y)$ e $(z)$ : $\mathbf{A} = [\mathbf{A}^{(x)}, \mathbf{A}^{(y)}, \mathbf{A}^{(z)}]^\top$ .
	$\mathbf{M}_P, \mathbf{J}_b$	Matrizes. As dimensões de cada matriz são identificadas em cada caso, durante sua definição.
Caligráfico	$\mathcal{L}, \mathcal{P}_n, \mathcal{S}_n$	Vetores ou coordenadas bidimensionais. Referem-se ao sistema de coordenadas da imagem $u, v$ (Figura 3.3) e suas componentes são identificadas pelos sobrescritos $(u)$ e $(v)$ : $\mathcal{A} = [\mathcal{A}^{(u)}, \mathcal{B}^{(v)}]^\top$ .

### A.2 Símbolos do alfabeto romano

$B$	(Subseção 3.1.4) Número de barras de uma instância do problema.
$C$	(Subseção 3.1.1) Coordenadas tridimensionais do centro de projeção da câmara.
$c_b$	(Subseção 3.1.4) Comprimento da barra de índice $b$ .
$\tilde{c}_b$	(Eq. (3.77)) Estimativa inicial para o comprimento da barra de índice $b$ .
$\mathcal{D}_n$	(Eq. (3.34)) Diferença entre as coordenadas dos pontos $\mathcal{L}$ (projeção da fonte de luz) e $\mathcal{M}_n$ (ponto médio entre $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{S}_n$ ).

---

$d_k$	(Eq. (3.22)) Comprimento da ocorrência de índice $k$ .
$d_u, d_v$	(Subseção 3.1.1) Dimensões do elemento sensor da câmera.
$e(\dots)$	(Eq. (3.68)) Função de erros quadráticos para a estimação inicial dos valores calculados no problema bidimensional.
$F$	(Subseção 4.3.1) Nas simulações sobre a variação na riqueza da descrição do modelo, o número de cadeias.
$f$	(Subseção 3.1.1) Distância focal (distância entre o centro de projeção $\mathbf{C}$ e o plano de imagem $\pi_i$ ).
$f(\dots)$	(Eq. (3.36)) Função de erros quadráticos para o problema bidimensional.
$g(\dots)$	(Eq. (3.60)) Função de erros quadráticos para o problema tridimensional.
$\mathbf{J}_b(\dots)$	(Eq. (3.64)) Matriz jacobiana para a resolução do problema bidimensional.
$\mathbf{J}_t(\dots)$	(Eq. (3.72)) Matriz jacobiana para a resolução do problema tridimensional.
$K$	(Subseção 3.1.4) Número de ocorrências de uma instância do problema.
$\mathbf{L}$	(Eq. (3.16)) Coordenadas tridimensionais da fonte de luz.
$\mathbf{L}'$	(Eq. (3.18)) Projeção da fonte de luz sobre o plano de imagem $\pi_i$ .
$\mathbf{l}$	(Eq. (3.17)) Vetor unitário que determina a direção da fonte de luz $\mathbf{L}$ a partir do centro de projeção $\mathbf{C}$ .
$l_k$	(Eq. (3.57)) Distância na imagem (em pixels) entre os extremos da ocorrência de índice $k$ .
$\mathcal{L}$	(Eq. (3.18)) Coordenadas bidimensionais (em pixels) da imagem da fonte de luz.
$\mathbf{M}_{ext}$	(Eq. (3.2)) Matriz de transformação extrínseca.
$\mathbf{M}_I$	(Eq. (3.9)) Matriz de transformação inversa. Mapeia pontos da imagem (bidimensionais, em pixels) para pontos tridimensionais no plano de imagem $\pi_i$ , conforme a Eq. (3.7).
$\mathbf{M}_{int}$	(Eq. (3.4)) Matriz de transformação intrínseca.
$\mathbf{M}_P$	(Eq. (3.5)) Matriz de transformação projetiva. Mapeia pontos da cena (tridimensionais) para a correspondente projeção na imagem, conforme a Eq. (3.6).
$\mathcal{M}_n$	(Eq. (3.28)) Ponto médio entre $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{S}_n$ .
$N$	(Subseção 3.1.2) Número de pontos-chave de uma instância do problema.
$o_u, o_v$	(Subseção 3.1.1) Coordenadas bidimensionais do centro de imagem, em pixels.
$\mathbf{P}_n$	(Eq. (3.13)) Coordenadas tridimensionais de um ponto-chave de índice $n$ .
$\mathbf{P}'_n$	(Eq. (3.15)) Projeção do ponto-chave $\mathbf{P}_n$ sobre o plano de imagem $\pi_i$ .
$\mathbf{p}_n$	(Eq. (3.14)) Vetor unitário que determina a direção do ponto-chave $\mathbf{P}_n$ a partir do centro de projeção $\mathbf{C}$ .
$p, q$	(Figura 4.2(a)) Nas simulações, sistema de coordenadas para a mensuração dos erros de estimação do algoritmo bidimensional.

$\mathcal{P}_n$	(Subseção 3.1.2) Coordenadas bidimensionais (em pixels) da imagem do ponto-chave $\mathbf{P}_n$ .
$Q$	(Subseção 4.3.1) Nas simulações sobre a variação na riqueza da descrição do modelo, o número de ocorrências por cadeia.
$\mathbf{r}_n$	(Eqs. (3.27a)–(b)) Reta na imagem que idealmente contém os pontos $\mathcal{L}$ , $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{S}_n$ .
$\mathbf{S}_n$	(Eq. (3.10)) Coordenadas tridimensionais do ponto de sombra de índice $n$ . Corresponde à sombra do ponto-chave $\mathbf{P}_n$ .
$\mathbf{S}'_n$	(Eq. (3.11)) Projeção do ponto de sombra $\mathbf{S}_n$ sobre o plano de imagem $\pi_i$ .
$\mathcal{S}_n$	(Subseção 3.1.2) Coordenadas bidimensionais (em pixels) da imagem do ponto de sombra $\mathbf{S}_n$ .
$\mathbf{T}_n$	(Eq. (3.38)) Ponto de sombra estimado com base em valores para $\mathbf{L}$ e $\mathbf{P}_n$ .
$\mathcal{T}_n$	(Eq. (3.39)) Coordenadas bidimensionais (em pixels) da imagem do ponto de sombra estimado $\mathbf{T}_n$ .
$\mathbf{t}$	(Figura 3.2) Vetor-alvo ( <i>target vector</i> ) da câmera: vetor unitário alinhado com o eixo óptico da câmera.
$\mathbf{u}$	(Figura 3.2) Vetor superior ( <i>upside vector</i> ) da câmera: vetor que estabelece o “norte” da imagem.
$u, v$	(Figura 3.3) Sistema de coordenadas na imagem.
$\mathcal{V}_n$	(Eq. (3.66)) Vetor unitário paralelo à reta $\overline{\mathcal{P}_n \mathcal{S}_n}$ .
$x, y, z$	(Figura 3.1) Sistema global de coordenadas.

### A.3 Símbolos do alfabeto grego

$\alpha_n$	(Eq. (3.45)) Parâmetro que identifica o ponto em que a reta $\overline{\mathbf{L} \mathbf{P}_n}$ (Eq. (3.42)) intersecta o plano $\pi_b$ .
$\gamma_n$	(Eq. (3.12)) Profundidade do ponto-chave $\mathbf{P}_n$ .
$\tilde{\gamma}_n$	(Eq. (3.76)) Estimativa inicial para a profundidade do ponto-chave $\mathbf{P}_n$ .
$\Delta c_b$	(Eq. (4.8c)) Nos experimentos simulados, a diferença entre o valor estimado e o real do comprimento da barra de índice $b$ , $c_b$ .
$\Delta p$	(Figura 4.2(b)) Nos experimentos simulados bidimensionais, o erro longitudinal da estimação da projeção da fonte de luz.
$\Delta q$	(Figura 4.2(b)) Nos experimentos simulados bidimensionais, o erro transversal da estimação da projeção da fonte de luz.
$\Delta \gamma_n$	(Eq. (4.8b)) Nos experimentos simulados, a diferença entre o valor estimado e o real da profundidade do ponto-chave de índice $n$ , $\mathbf{P}_n$ .
$\Delta \lambda$	(Eq. (4.8a)) Nos experimentos simulados, a diferença entre o valor estimado e o real da profundidade da fonte de luz $\mathbf{L}$ .

$\delta_k$	(Eq. (3.55)) Diferença entre o comprimento da ocorrência de índice $k$ e da barra correspondente.
$\epsilon_c^2$	(Eq. (4.9c)) Nos experimentos simulados, a somatória dos erros quadráticos das estimações dos comprimentos das barras $c_1, \dots, c_B$ .
$\epsilon_\gamma^2$	(Eq. (4.9b)) Nos experimentos simulados, a somatória dos erros quadráticos das estimações das profundidades dos pontos-chave, $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ .
$\epsilon_\lambda^2$	(Eq. (4.9a)) Nos experimentos simulados, o erro quadrático da estimação da profundidade da fonte de luz $\mathbf{L}$ .
$\epsilon'_n(\dots)$	(Eq. (3.40a)) Primeira função de erro para o problema tridimensional: desvio horizontal entre a imagem de um ponto de sombra estimado e informado.
$\epsilon''_n(\dots)$	(Eq. (3.40b)) Segunda função de erro para o problema tridimensional: desvio vertical entre a imagem de um ponto de sombra estimado e informado.
$\epsilon'''_n(\dots)$	(Eq. (3.59)) Terceira função de erro para o problema tridimensional: diferença entre o comprimento de uma ocorrência e o comprimento da barra correspondente.
$\lambda$	(Eq. (3.16)) Profundidade da fonte de luz $\mathbf{L}$ .
$\tilde{\lambda}$	(Eq. (3.73)) Estimativa inicial para a profundidade da fonte de luz $\mathbf{L}$ .
$\pi_b$	(Eq. (3.1)) Plano-base ou plano de sombras.
$\pi_i$	(Subseção 3.1.1) Plano de imagem: plano ortogonal ao vetor $\mathbf{t}$ e que contém o ponto $(\mathbf{C} + f \cdot \mathbf{t})$ .
$\rho_k$	(Eq. (3.56)) Fator para converter a medida de erro tridimensional $\delta_k$ em uma medida em pixels, no escopo da imagem.
$\sigma_N$	(Subseção 4.1.3) Nos experimentos simulados, desvio-padrão dos ruídos aleatórios gaussianos que corrompem as coordenadas bidimensionais de entrada.
$\sigma_{\Delta c}$	(Subseção 4.3.2) Nos experimentos simulados tridimensionais, desvio-padrão dos erros de estimacão do comprimento da barra.
$\sigma_{\Delta \lambda}$	(Subseção 4.3.2) Nos experimentos simulados tridimensionais, desvio-padrão dos erros de estimacão da profundidade da fonte de luz.
$\varphi_k$	(Eq. (3.54)) Constante auxiliar para o cálculo de $d_k$ .
$\chi_n^{(1)}, \dots, \chi_n^{(6)}$	(Eqs. (3.47a)–(f)) Constantes auxiliares para o cálculo das coordenadas de $\mathbf{T}_n$ .
$\psi_n^{(1)}, \dots, \psi_n^{(9)}$	(Eq. (3.50)) Valores auxiliares para o cálculo das funções $\epsilon'_n(\dots)$ e $\epsilon''_n(\dots)$ .

## A.4 Operadores relacionais

$\triangleq$  Definição. Dizer que

$$\textit{símbolo} \triangleq \textit{expressão}$$

significa dizer que *símbolo*, por definição, é igual a *expressão*.

$\propto$  Relação de proporcionalidade entre matrizes. Dadas duas matrizes  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  de mesmas dimensões, dizer que

$$\mathbf{X} \propto \mathbf{Y}$$

significa dizer que

$$\mathbf{X} = k\mathbf{Y},$$

para algum fator de escala não nulo  $k$ .

## Apêndice B

# Resultados dos experimentos bidimensionais

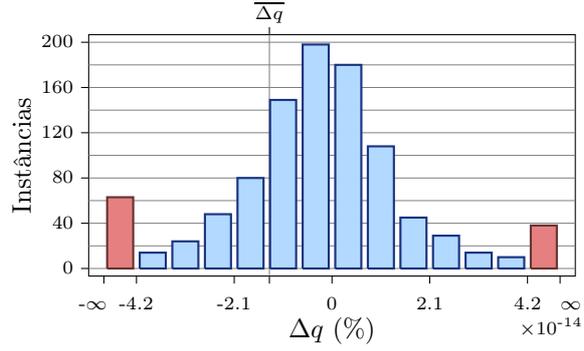
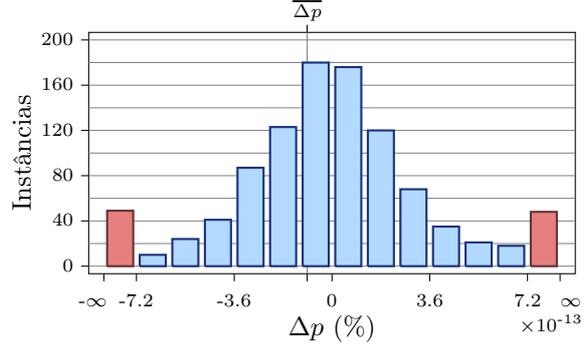
Os dados apresentados neste Apêndice são os resultados obtidos através dos experimentos bidimensionais, cujo objetivo é verificar a capacidade do algoritmo estimar as coordenadas bidimensionais da projeção da fonte de luz na imagem.

As simulações são descritas em detalhes na Seção 4.2. Os valores para os parâmetros variáveis usados nesta bateria de testes são apresentados na Tabela 4.5.

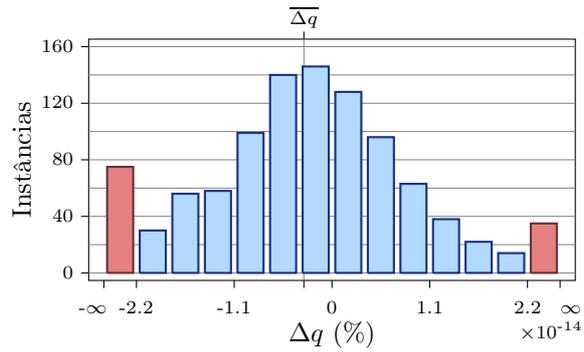
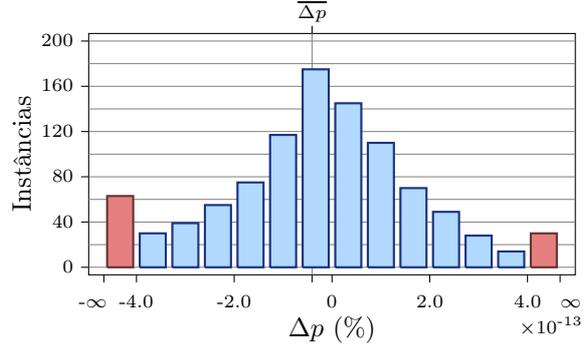
Os resultados apresentados nas páginas seguintes são agrupados por nível de ruído ( $\sigma_N$ ) e pelo número de ocorrências ( $K$ ). Para facilitar a consulta aos resultados, o índice abaixo indica o intervalo de páginas correspondente a cada nível de ruído:

$\sigma_N = 0.0$ px .....	págs. 116–121
$\sigma_N = 0.5$ px .....	págs. 121–126
$\sigma_N = 1.0$ px .....	págs. 127–132
$\sigma_N = 1.5$ px .....	págs. 132–137
$\sigma_N = 2.0$ px .....	págs. 138–143

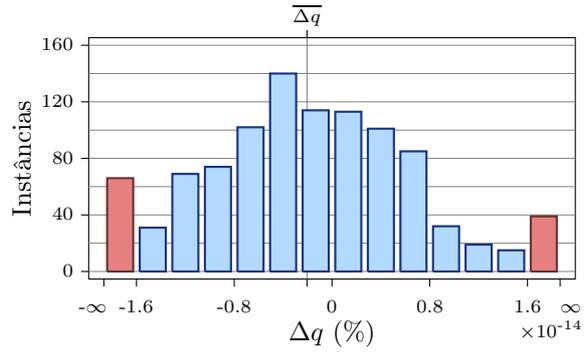
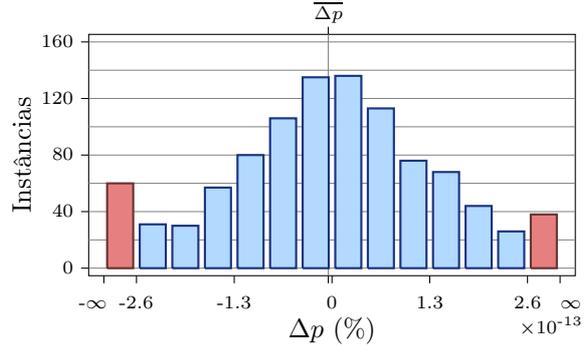
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px
Ocorrências ( $K$ )	2
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	$-2.37 \cdot 10^{-12}$ px
$\sigma_{\Delta p}$	$7.56 \cdot 10^{-11}$ px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-9.16 \cdot 10^{-14}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	$2.92 \cdot 10^{-12}\%$
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	$-3.48 \cdot 10^{-13}$ px
$\sigma_{\Delta q}$	$8.07 \cdot 10^{-12}$ px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-1.34 \cdot 10^{-14}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$3.12 \cdot 10^{-13}\%$



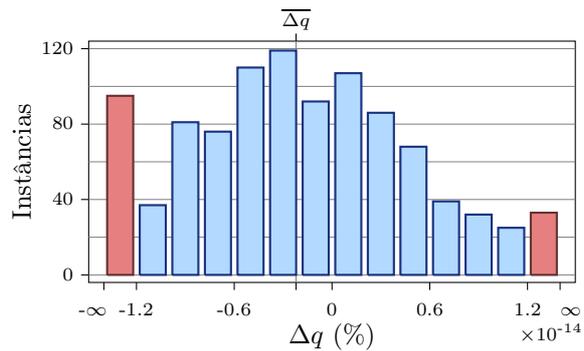
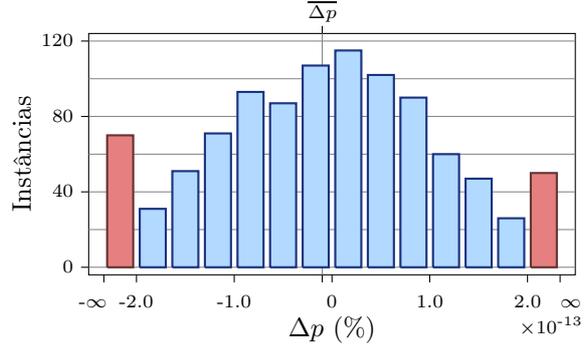
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px
Ocorrências ( $K$ )	3
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	$-1.06 \cdot 10^{-12}$ px
$\sigma_{\Delta p}$	$1.13 \cdot 10^{-11}$ px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-4.09 \cdot 10^{-14}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	$4.36 \cdot 10^{-13}\%$
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	$-8.2 \cdot 10^{-14}$ px
$\sigma_{\Delta q}$	$7.81 \cdot 10^{-13}$ px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-3.16 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$3.01 \cdot 10^{-14}\%$



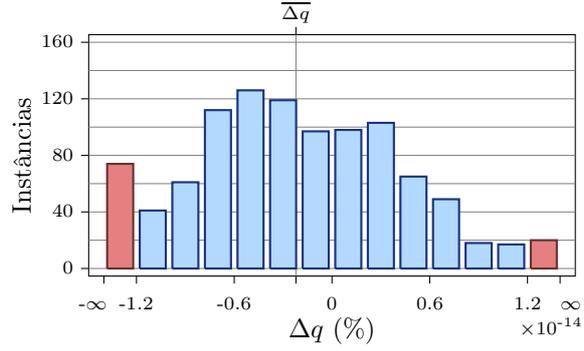
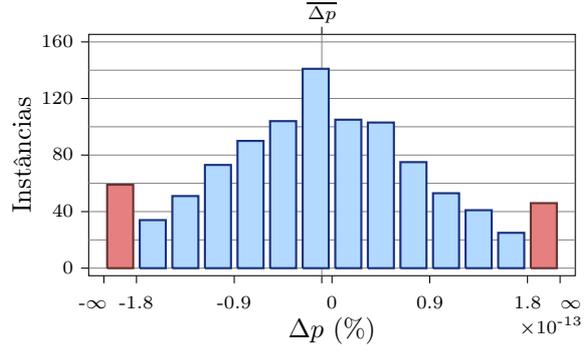
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px
Ocorrências ( $K$ )	4
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	$-1.28 \cdot 10^{-13}$ px
$\sigma_{\Delta p}$	$4.28 \cdot 10^{-12}$ px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-4.94 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	$1.65 \cdot 10^{-13}\%$
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	$-5.3 \cdot 10^{-14}$ px
$\sigma_{\Delta q}$	$2.58 \cdot 10^{-13}$ px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-2.05 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$9.96 \cdot 10^{-15}\%$



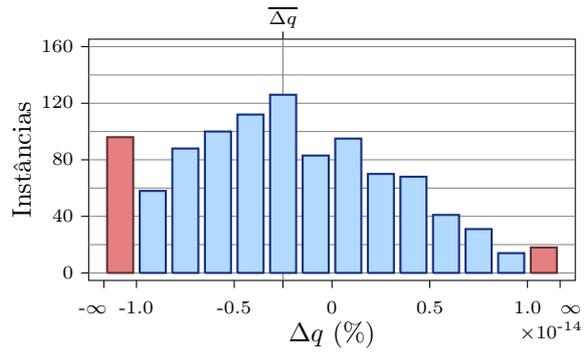
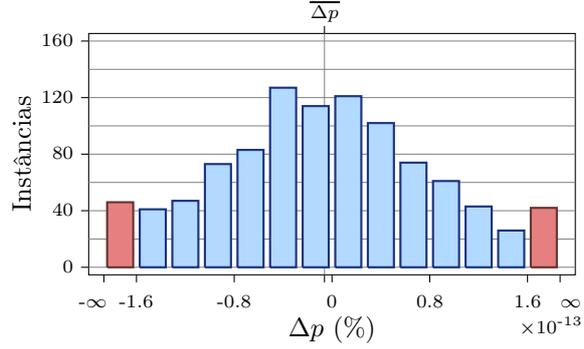
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px
Ocorrências ( $K$ )	5
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	$-2.59 \cdot 10^{-13}$ px
$\sigma_{\Delta p}$	$3.72 \cdot 10^{-12}$ px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-10 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	$1.44 \cdot 10^{-13}\%$
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	$-5.72 \cdot 10^{-14}$ px
$\sigma_{\Delta q}$	$2.21 \cdot 10^{-13}$ px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-2.21 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$8.53 \cdot 10^{-15}\%$



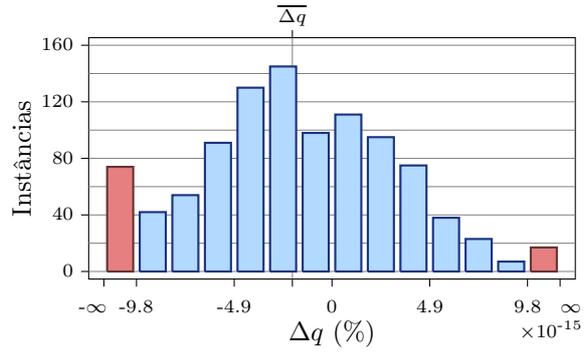
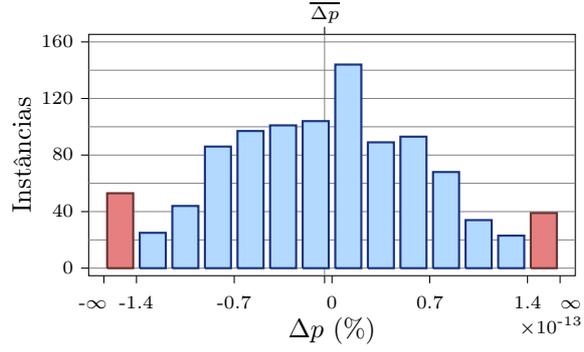
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px
Ocorrências ( $K$ )	6
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	$-2.44 \cdot 10^{-13}$ px
$\sigma_{\Delta p}$	$2.88 \cdot 10^{-12}$ px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-9.41 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	$1.11 \cdot 10^{-13}\%$
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	$-5.73 \cdot 10^{-14}$ px
$\sigma_{\Delta q}$	$1.81 \cdot 10^{-13}$ px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-2.21 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$6.99 \cdot 10^{-15}\%$



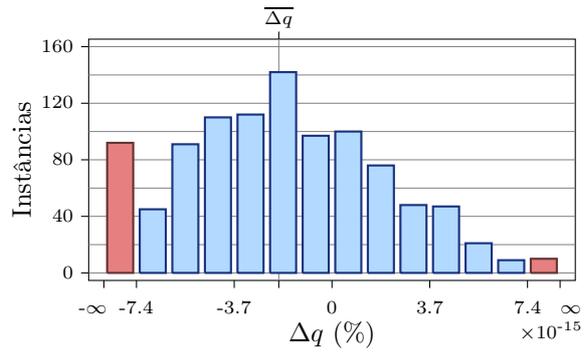
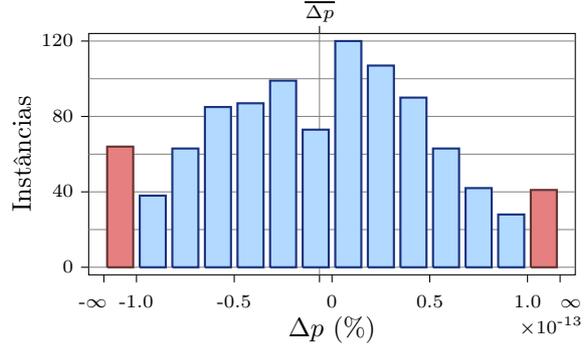
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px
Ocorrências ( $K$ )	8
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	$-1.59 \cdot 10^{-13}$ px
$\sigma_{\Delta p}$	$2.49 \cdot 10^{-12}$ px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-6.15 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	$9.62 \cdot 10^{-14}\%$
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	$-6.5 \cdot 10^{-14}$ px
$\sigma_{\Delta q}$	$1.58 \cdot 10^{-13}$ px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-2.51 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$6.08 \cdot 10^{-15}\%$



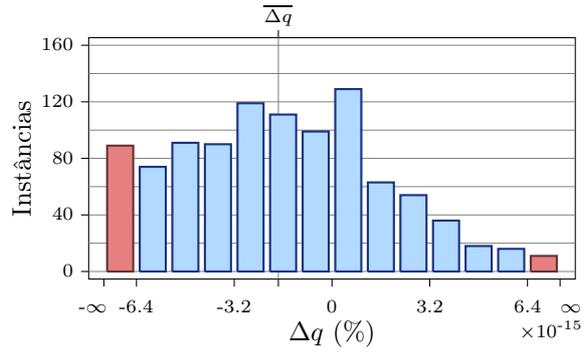
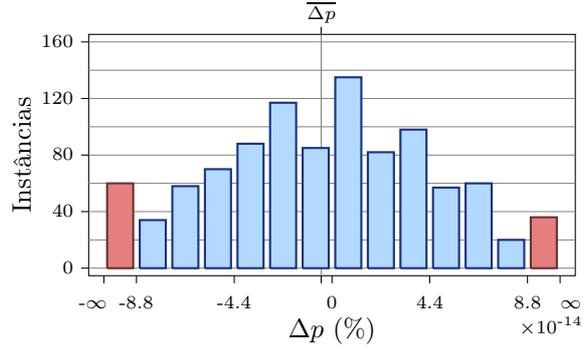
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px
Ocorrências ( $K$ )	10
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	$-1.38 \cdot 10^{-13}$ px
$\sigma_{\Delta p}$	$2.06 \cdot 10^{-12}$ px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-5.31 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	$7.97 \cdot 10^{-14}\%$
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	$-5.14 \cdot 10^{-14}$ px
$\sigma_{\Delta q}$	$1.43 \cdot 10^{-13}$ px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-1.99 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$5.51 \cdot 10^{-15}\%$



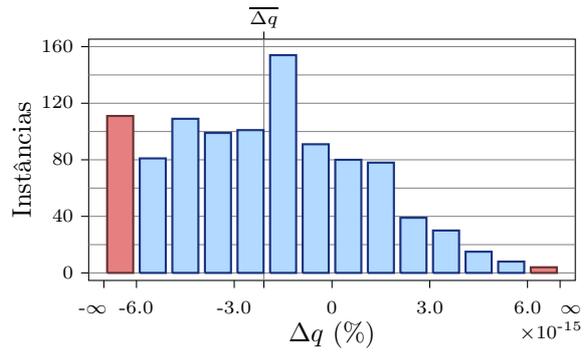
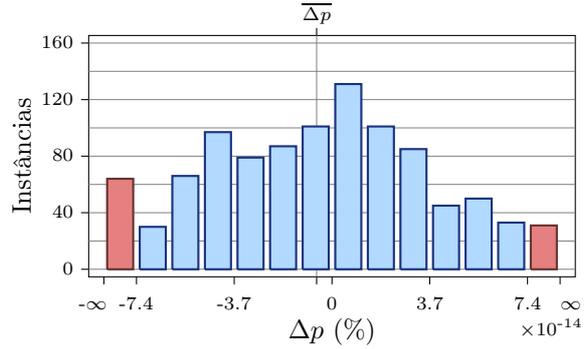
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px
Ocorrências ( $K$ )	15
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	$-1.65 \cdot 10^{-13}$ px
$\sigma_{\Delta p}$	$1.65 \cdot 10^{-12}$ px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-6.39 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	$6.36 \cdot 10^{-14}\%$
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	$-5.22 \cdot 10^{-14}$ px
$\sigma_{\Delta q}$	$1.05 \cdot 10^{-13}$ px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-2.01 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$4.05 \cdot 10^{-15}\%$



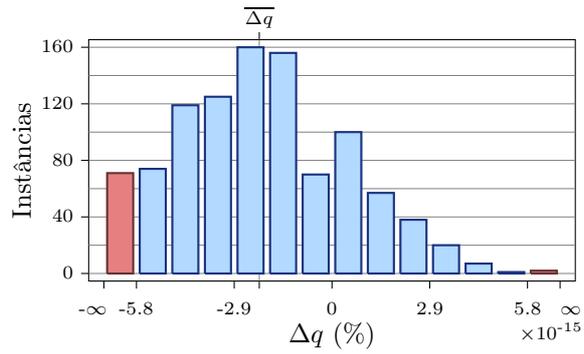
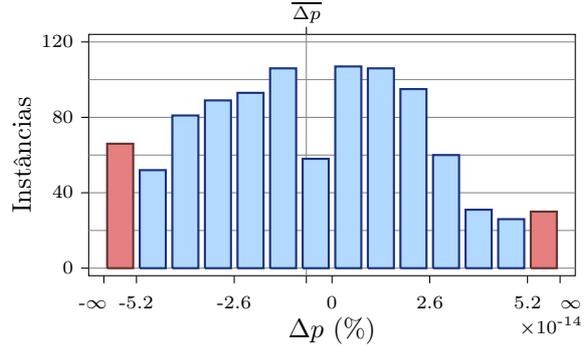
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px
Ocorrências ( $K$ )	20
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	$-1.26 \cdot 10^{-13}$ px
$\sigma_{\Delta p}$	$1.39 \cdot 10^{-12}$ px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-4.88 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	$5.37 \cdot 10^{-14}\%$
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	$-4.55 \cdot 10^{-14}$ px
$\sigma_{\Delta q}$	$9.15 \cdot 10^{-14}$ px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-1.76 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$3.53 \cdot 10^{-15}\%$



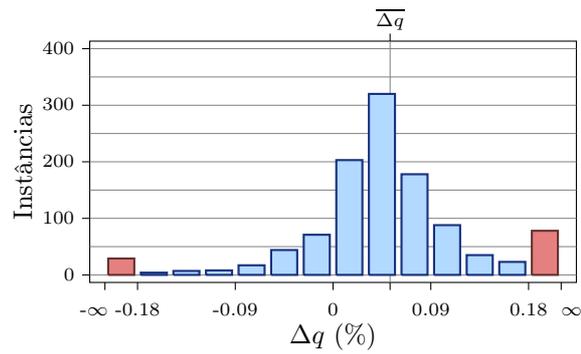
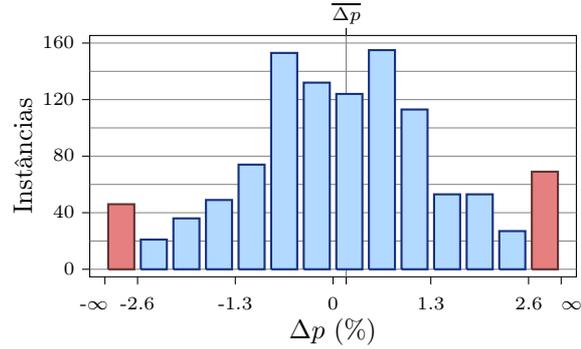
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px
Ocorrências ( $K$ )	30
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	$-1.51 \cdot 10^{-13}$ px
$\sigma_{\Delta p}$	$1.14 \cdot 10^{-12}$ px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-5.82 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	$4.41 \cdot 10^{-14}\%$
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	$-5.41 \cdot 10^{-14}$ px
$\sigma_{\Delta q}$	$8.02 \cdot 10^{-14}$ px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-2.09 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$3.1 \cdot 10^{-15}\%$



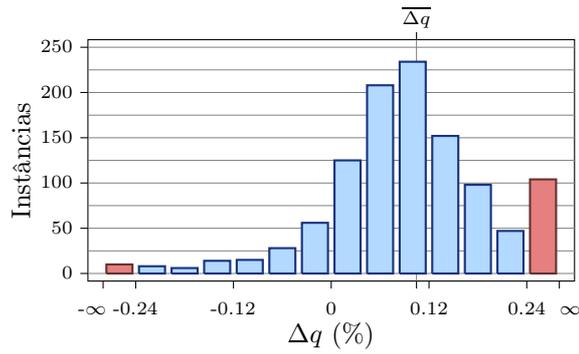
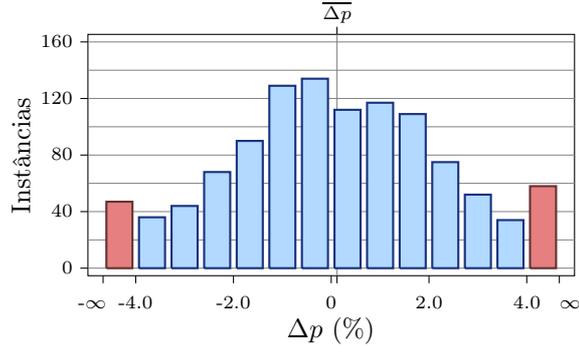
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px
Ocorrências ( $K$ )	50
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	$-1.77 \cdot 10^{-13}$ px
$\sigma_{\Delta p}$	$8.28 \cdot 10^{-13}$ px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-6.81 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	$3.2 \cdot 10^{-14}\%$
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	$-5.59 \cdot 10^{-14}$ px
$\sigma_{\Delta q}$	$6.75 \cdot 10^{-14}$ px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-2.16 \cdot 10^{-15}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$2.6 \cdot 10^{-15}\%$



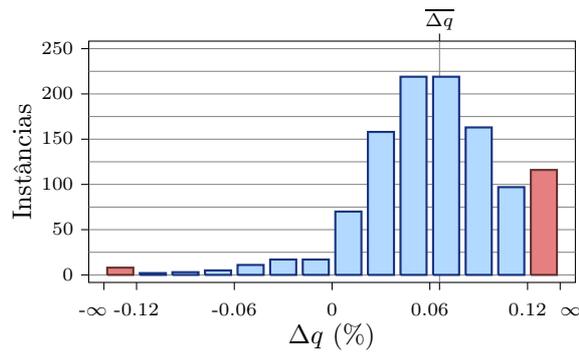
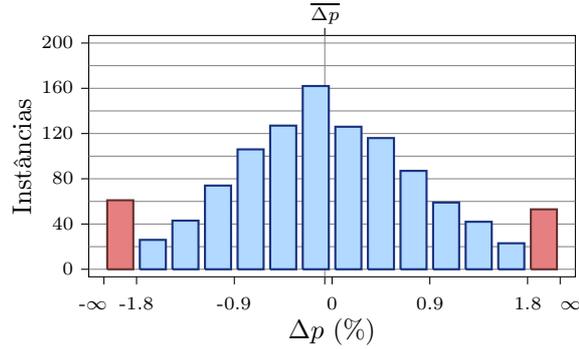
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px
Ocorrências ( $K$ )	2
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	4.51 px
$\sigma_{\Delta p}$	48.9 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	0.174%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.89%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	1.36 px
$\sigma_{\Delta q}$	4.08 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$5.25 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.158%



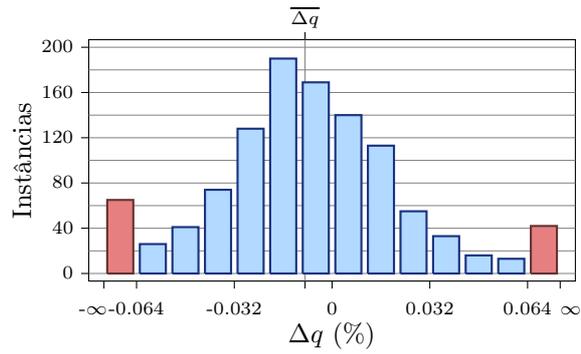
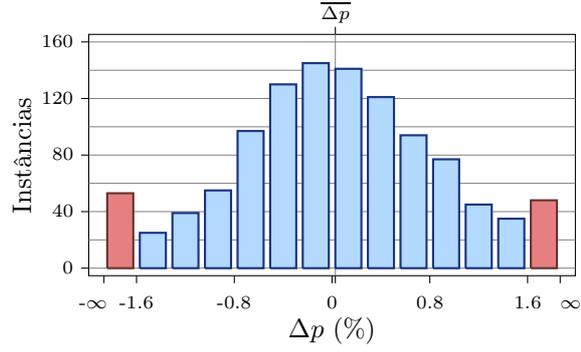
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px
Ocorrências ( $K$ )	3
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	3.08 px
$\sigma_{\Delta p}$	67.3 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	0.119%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	2.6%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	2.71 px
$\sigma_{\Delta q}$	4.15 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.105%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.16%



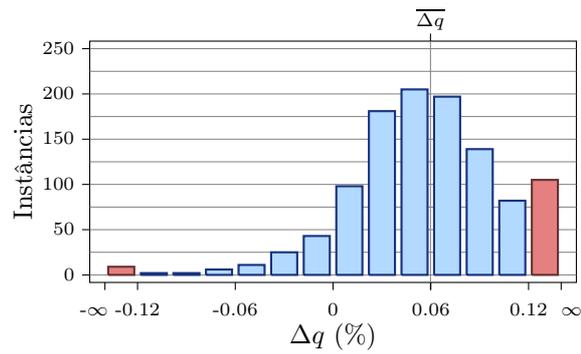
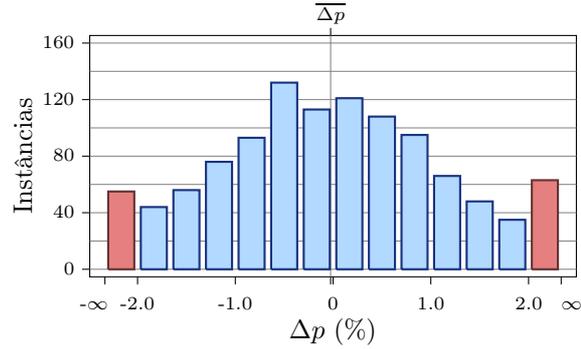
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px
Ocorrências ( $K$ )	4
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-1.74 px
$\sigma_{\Delta p}$	29.4 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-6.73 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.13%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	1.71 px
$\sigma_{\Delta q}$	1.47 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$6.59 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$5.67 \cdot 10^{-2}\%$



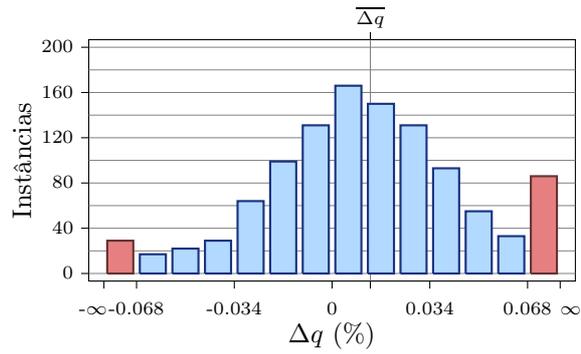
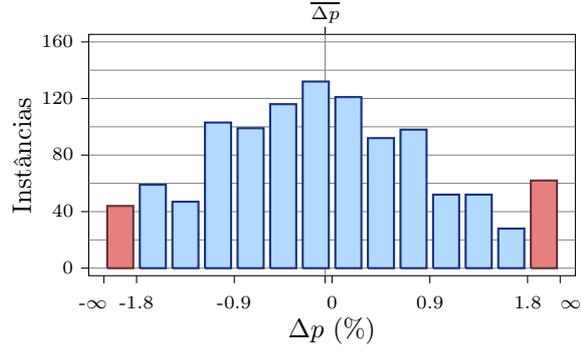
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px
Ocorrências ( $K$ )	5
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	0.695 px
$\sigma_{\Delta p}$	24.3 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$2.68 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	0.938%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-0.229 px
$\sigma_{\Delta q}$	1.07 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-8.85 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$4.14 \cdot 10^{-2}\%$



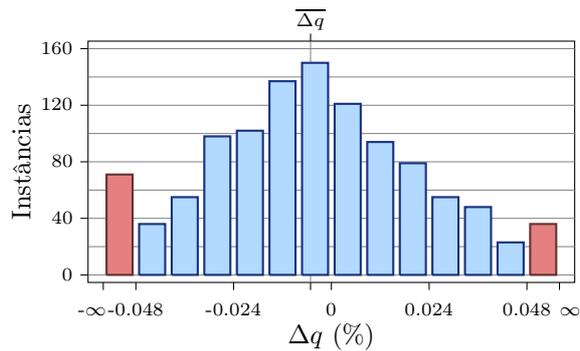
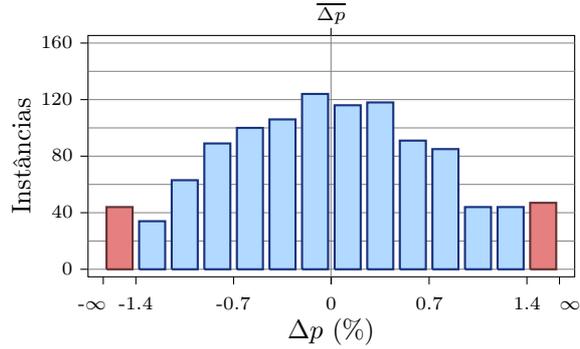
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px
Ocorrências ( $K$ )	6
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-0.647 px
$\sigma_{\Delta p}$	34.6 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-2.5 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.34%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	1.55 px
$\sigma_{\Delta q}$	1.51 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$5.98 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$5.85 \cdot 10^{-2}\%$



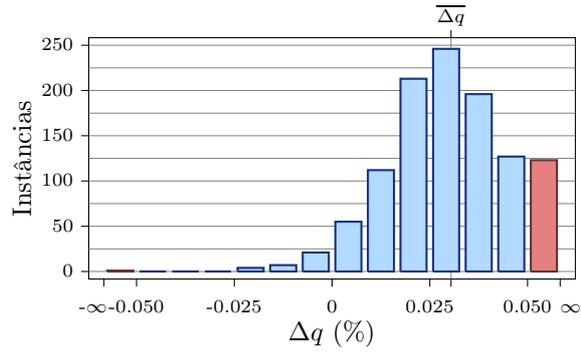
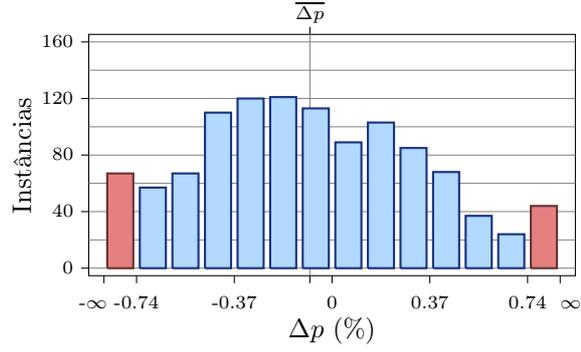
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px
Ocorrências ( $K$ )	8
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-1.67 px
$\sigma_{\Delta p}$	29.8 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-6.43 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.15%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	0.345 px
$\sigma_{\Delta q}$	1.15 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$1.33 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$4.44 \cdot 10^{-2}\%$



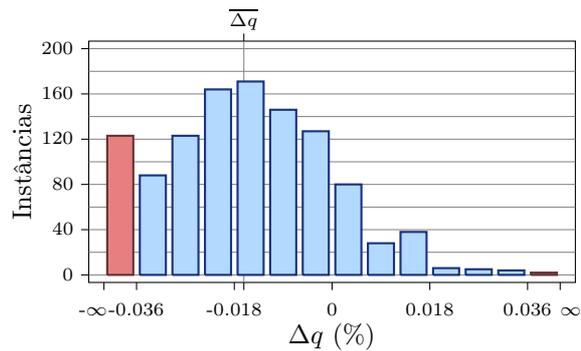
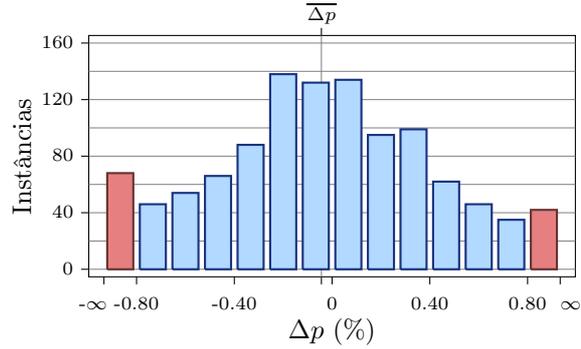
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px
Ocorrências ( $K$ )	10
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	$-7.65 \cdot 10^{-2}$ px
$\sigma_{\Delta p}$	21.2 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-2.95 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	0.82%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-0.132 px
$\sigma_{\Delta q}$	0.784 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-5.11 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$3.03 \cdot 10^{-2}\%$



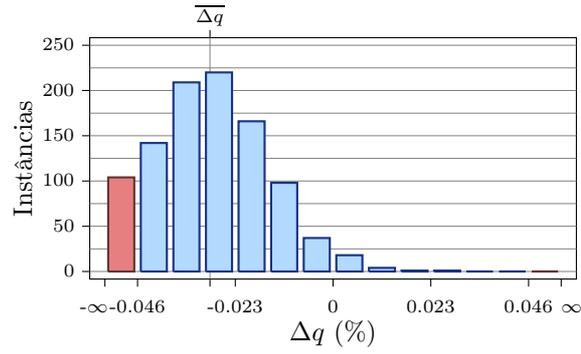
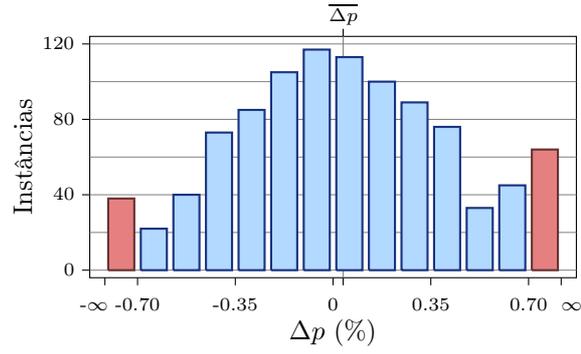
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px
Ocorrências ( $K$ )	15
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-2.17 px
$\sigma_{\Delta p}$	11.7 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-8.39 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	0.451%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	0.788 px
$\sigma_{\Delta q}$	0.442 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$3.04 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$1.71 \cdot 10^{-2}\%$



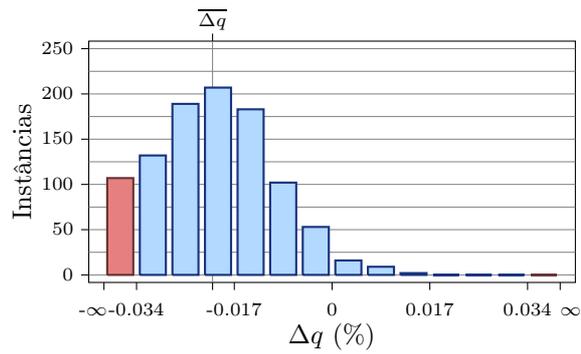
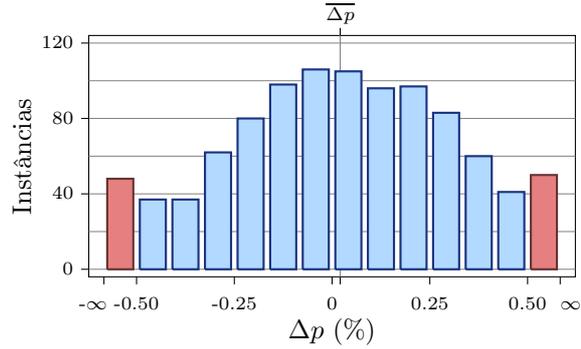
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px
Ocorrências ( $K$ )	20
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-1.13 px
$\sigma_{\Delta p}$	12.4 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-4.36 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	0.479%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-0.421 px
$\sigma_{\Delta q}$	0.424 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-1.62 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$1.64 \cdot 10^{-2}\%$



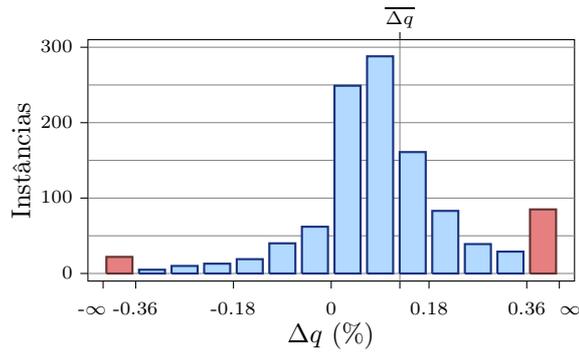
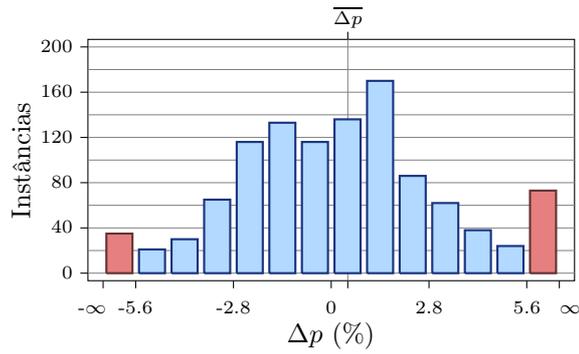
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px
Ocorrências ( $K$ )	30
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	0.932 px
$\sigma_{\Delta p}$	10.9 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$3.6 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	0.421%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-0.75 px
$\sigma_{\Delta q}$	0.358 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-2.9 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$1.38 \cdot 10^{-2}\%$



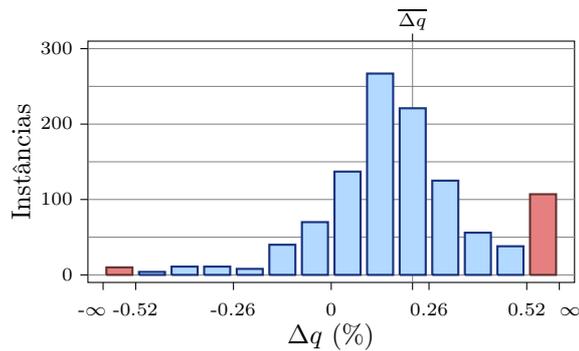
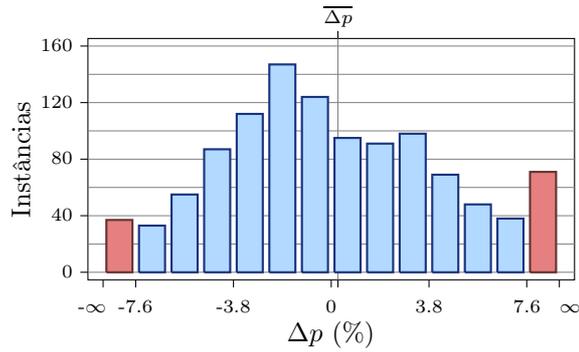
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px
Ocorrências ( $K$ )	50
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	0.537 px
$\sigma_{\Delta p}$	8.02 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$2.07 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	0.31%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-0.538 px
$\sigma_{\Delta q}$	0.281 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-2.08 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$1.09 \cdot 10^{-2}\%$



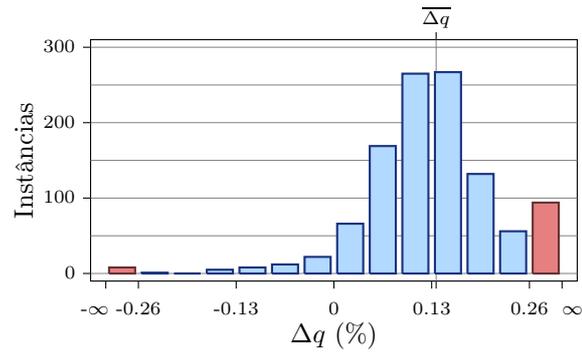
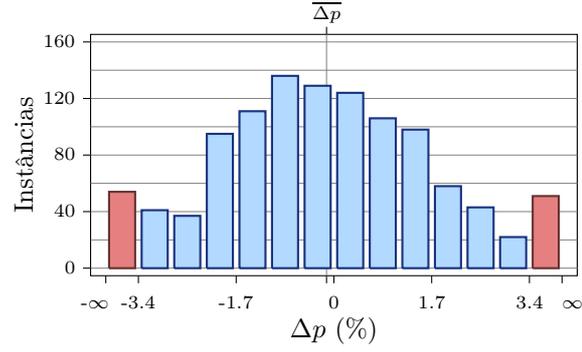
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	2
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	12.3 px
$\sigma_{\Delta p}$	129 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	0.474%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	4.98%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	3.27 px
$\sigma_{\Delta q}$	10.5 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.126%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.404%



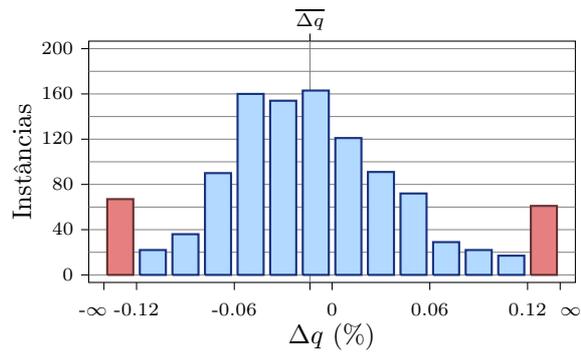
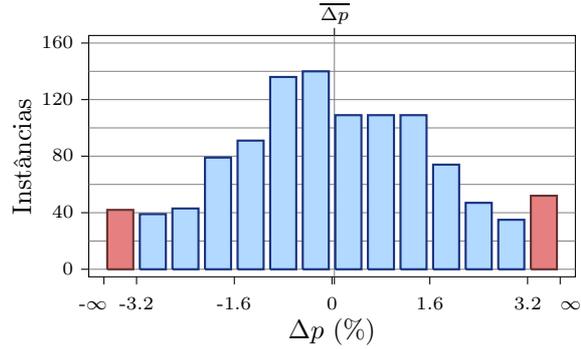
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	3
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	6.76 px
$\sigma_{\Delta p}$	141 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	0.261%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	5.44%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	5.6 px
$\sigma_{\Delta q}$	9.24 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.216%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.357%



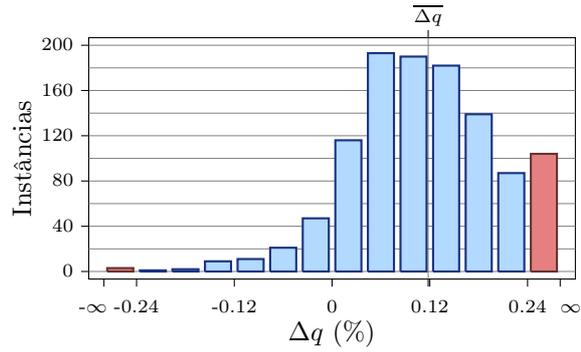
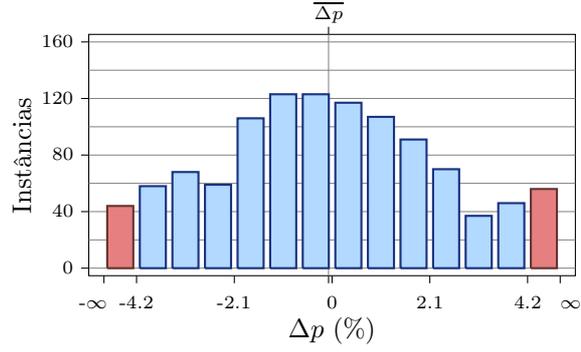
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	4
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-3.33 px
$\sigma_{\Delta p}$	63.7 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	-0.128%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	2.46%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	3.52 px
$\sigma_{\Delta q}$	3.98 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.136%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.154%



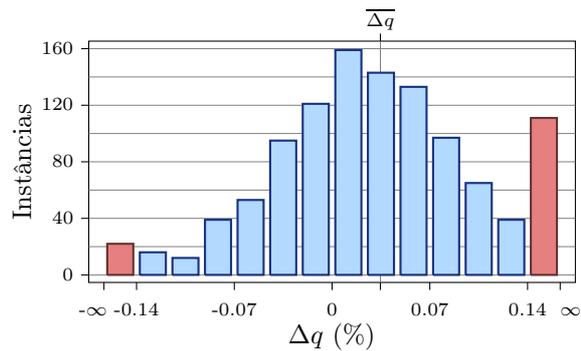
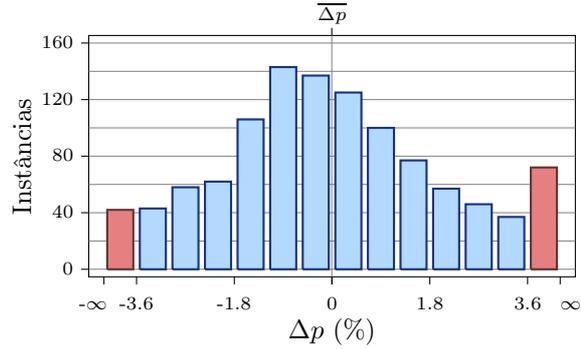
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	5
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	0.987 px
$\sigma_{\Delta p}$	48.9 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$3.81 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.89%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-0.351 px
$\sigma_{\Delta q}$	2.2 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-1.36 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$8.5 \cdot 10^{-2}\%$



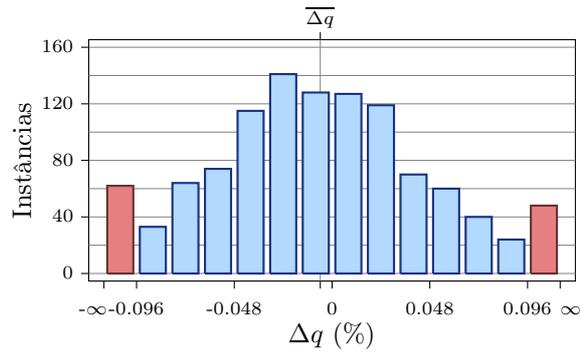
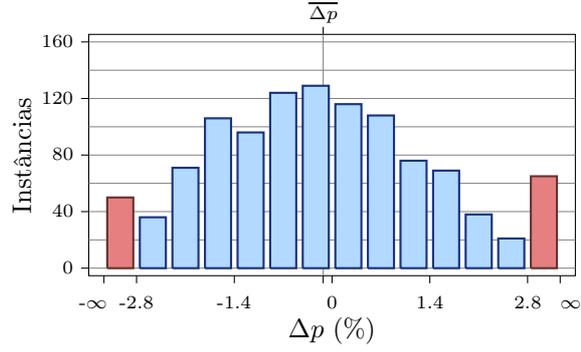
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	6
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-1.96 px
$\sigma_{\Delta p}$	67.5 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-7.57 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	2.61%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	3.06 px
$\sigma_{\Delta q}$	2.76 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.118%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.107%



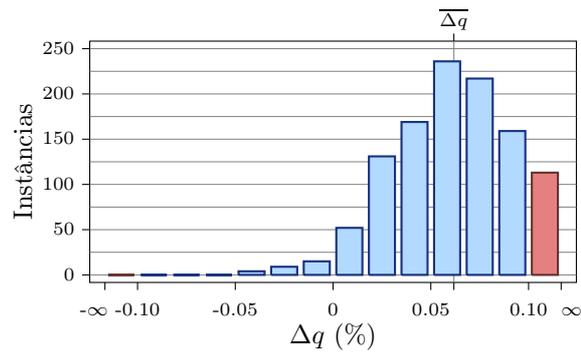
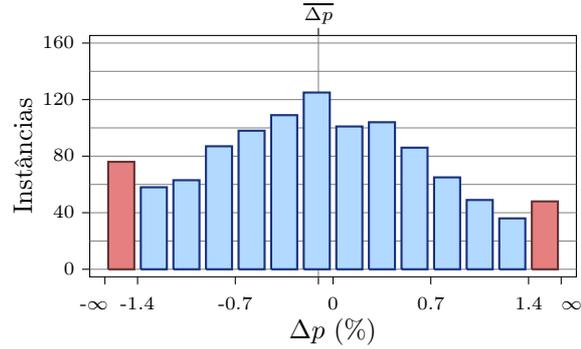
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	8
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-0.137 px
$\sigma_{\Delta p}$	57.5 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-5.27 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	2.22%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	0.896 px
$\sigma_{\Delta q}$	2.21 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$3.46 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$8.55 \cdot 10^{-2}\%$



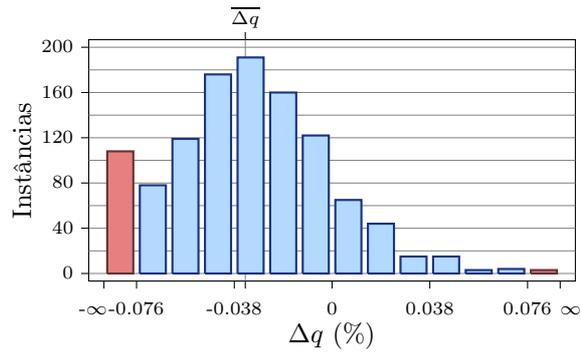
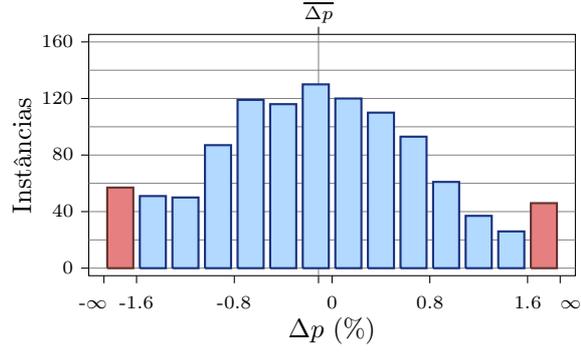
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	10
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-3.3 px
$\sigma_{\Delta p}$	44.9 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	-0.127%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.73%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-0.15 px
$\sigma_{\Delta q}$	1.69 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-5.79 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$6.54 \cdot 10^{-2}\%$



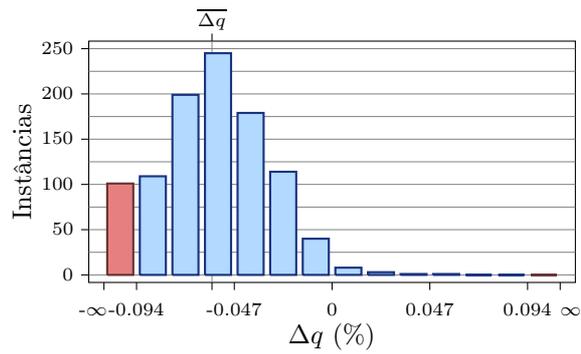
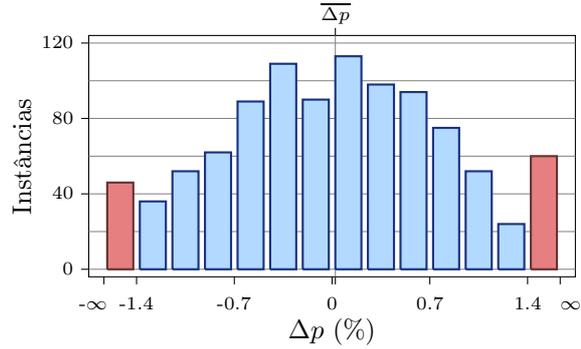
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	15
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-2.72 px
$\sigma_{\Delta p}$	23.4 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	-0.105%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	0.902%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	1.6 px
$\sigma_{\Delta q}$	0.857 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$6.18 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$3.31 \cdot 10^{-2}\%$



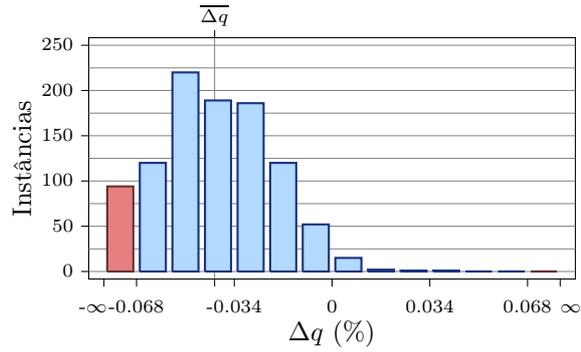
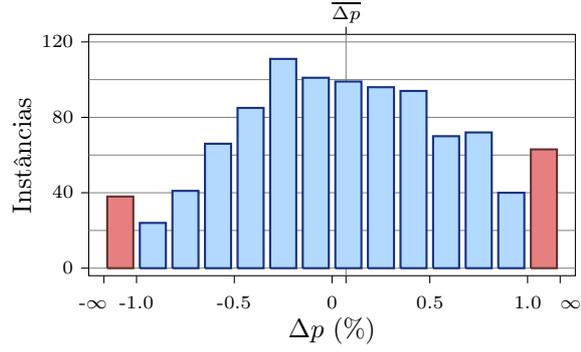
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	20
Instâncias	1103
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-2.88 px
$\sigma_{\Delta p}$	24.6 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	-0.111%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	0.951%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-0.874 px
$\sigma_{\Delta q}$	0.867 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-3.37 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$3.35 \cdot 10^{-2}\%$



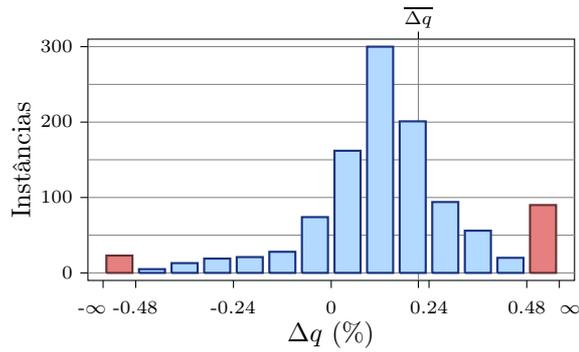
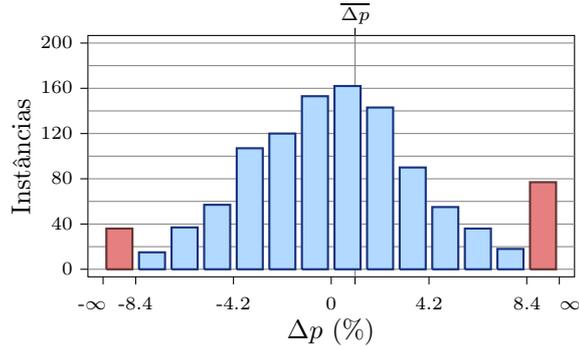
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	30
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	0.608 px
$\sigma_{\Delta p}$	22.7 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$2.35 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	0.878%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-1.5 px
$\sigma_{\Delta q}$	0.736 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-5.77 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$2.84 \cdot 10^{-2}\%$



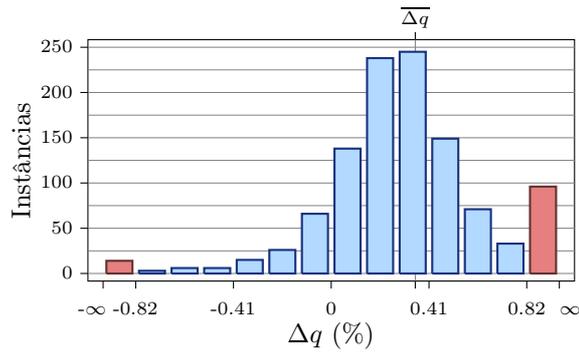
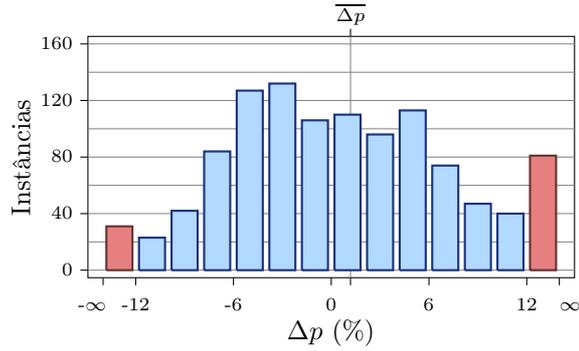
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	50
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	1.84 px
$\sigma_{\Delta p}$	15.7 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$7.12 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	0.607%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-1.06 px
$\sigma_{\Delta q}$	0.529 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-4.09 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$2.04 \cdot 10^{-2}\%$



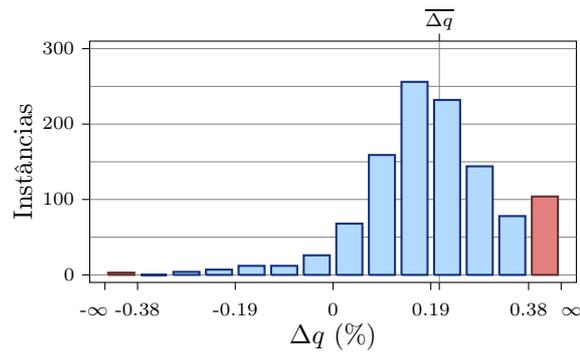
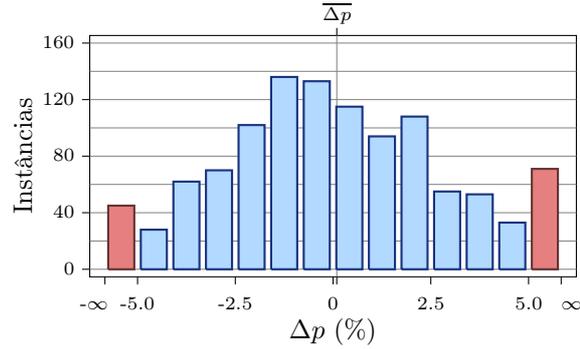
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px
Ocorrências ( $K$ )	2
Instâncias	1106
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	26.5 px
$\sigma_{\Delta p}$	286 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	1.02%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	11.1%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	5.54 px
$\sigma_{\Delta q}$	26.5 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.214%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	1.02%



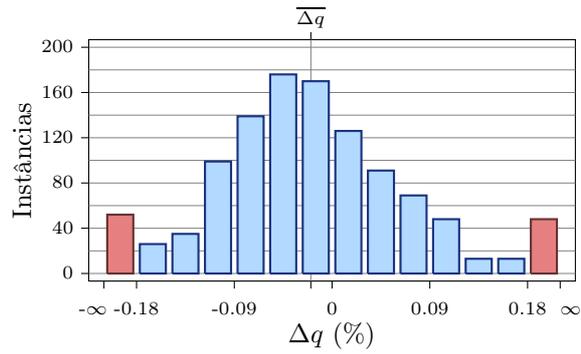
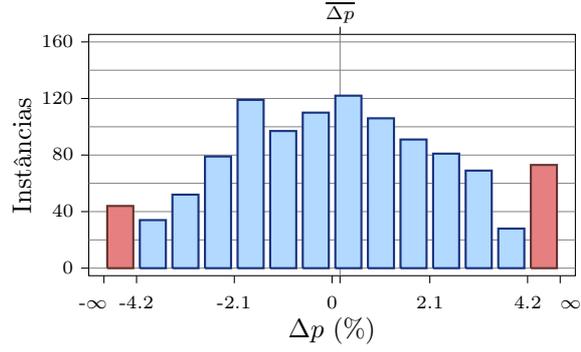
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px
Ocorrências ( $K$ )	3
Instâncias	1106
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	30.7 px
$\sigma_{\Delta p}$	245 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	1.18%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	9.44%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	9.13 px
$\sigma_{\Delta q}$	17.5 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.352%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.677%



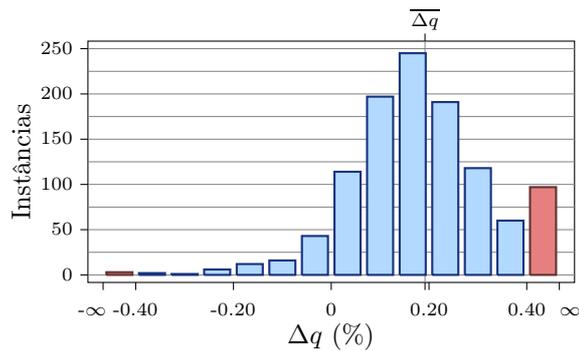
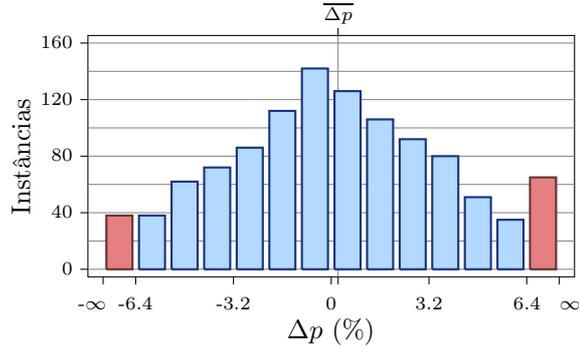
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px
Ocorrências ( $K$ )	4
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	2.47 px
$\sigma_{\Delta p}$	87.5 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$9.53 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	3.38%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	5.35 px
$\sigma_{\Delta q}$	4.9 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.206%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.189%



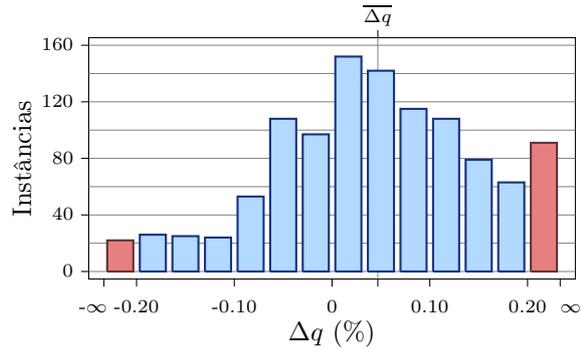
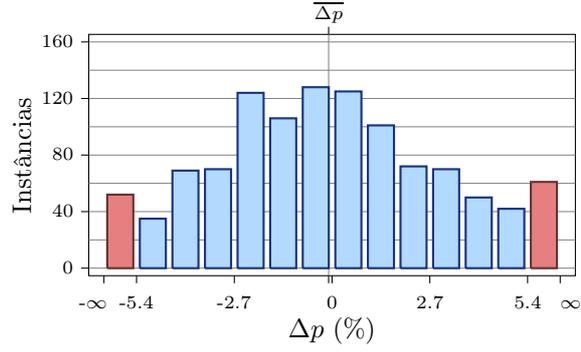
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px
Ocorrências ( $K$ )	5
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	4.41 px
$\sigma_{\Delta p}$	71 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	0.17%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	2.74%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-0.506 px
$\sigma_{\Delta q}$	3.04 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	-1.95 $10^{-2}$ %
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.117%



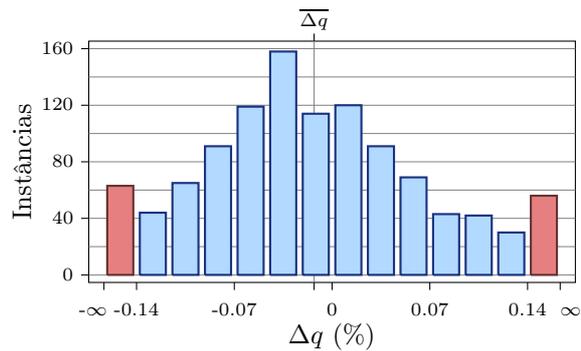
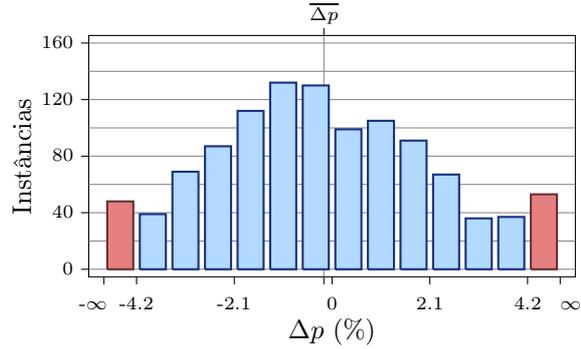
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px
Ocorrências ( $K$ )	6
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	5.85 px
$\sigma_{\Delta p}$	106 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	0.226%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	4.08%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	4.97 px
$\sigma_{\Delta q}$	4.77 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.192%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.184%



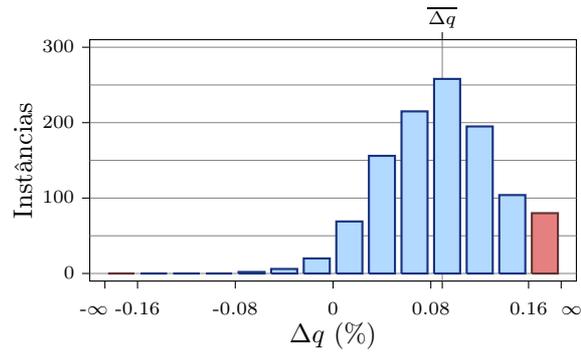
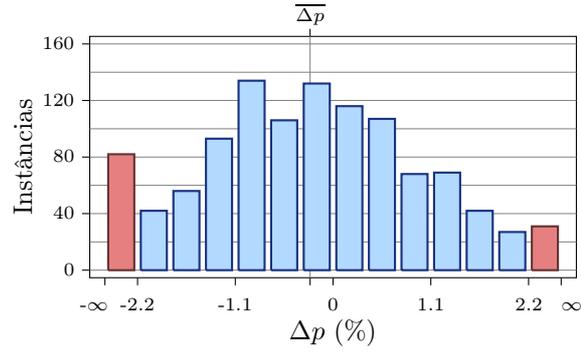
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px
Ocorrências ( $K$ )	8
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-2.47 px
$\sigma_{\Delta p}$	86.6 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-9.52 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	3.34%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	1.21 px
$\sigma_{\Delta q}$	3.17 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$4.68 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.123%



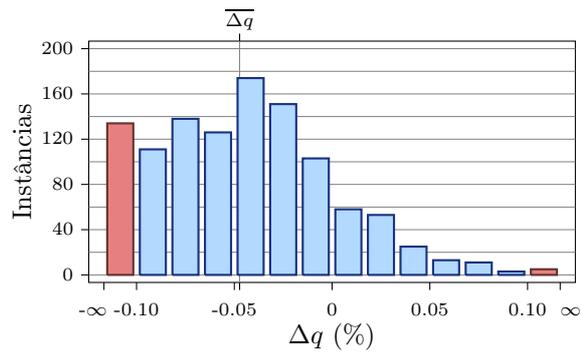
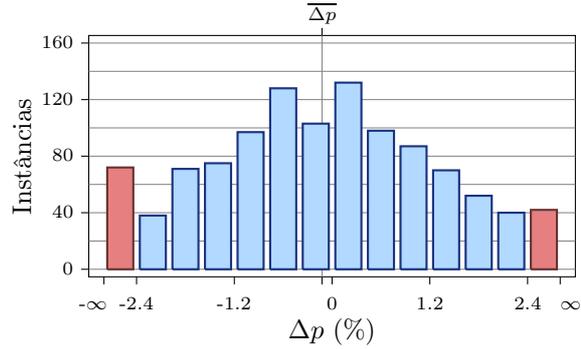
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px
Ocorrências ( $K$ )	10
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-4.59 px
$\sigma_{\Delta p}$	66 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	-0.177%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	2.55%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-0.334 px
$\sigma_{\Delta q}$	2.52 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-1.29 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$9.73 \cdot 10^{-2}\%$



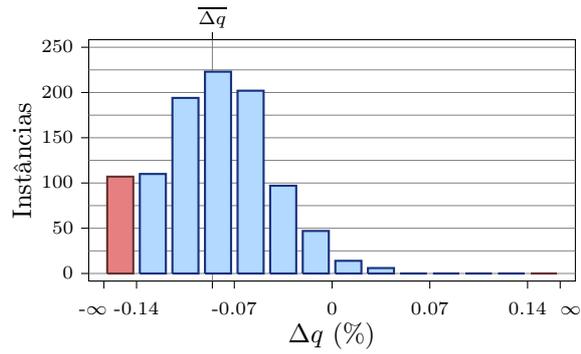
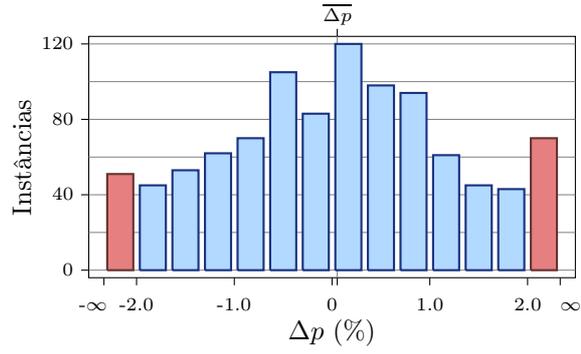
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px
Ocorrências ( $K$ )	15
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-6.69 px
$\sigma_{\Delta p}$	33.5 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	-0.258%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.29%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	2.32 px
$\sigma_{\Delta q}$	1.23 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$8.94 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$4.74 \cdot 10^{-2}\%$



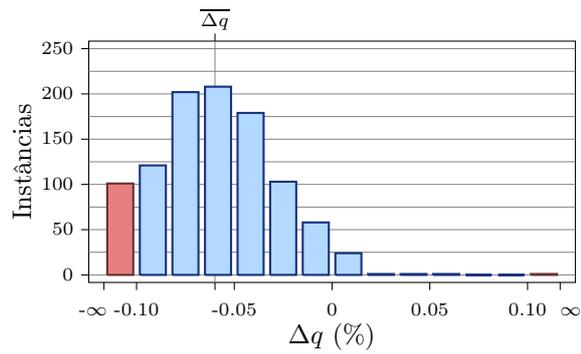
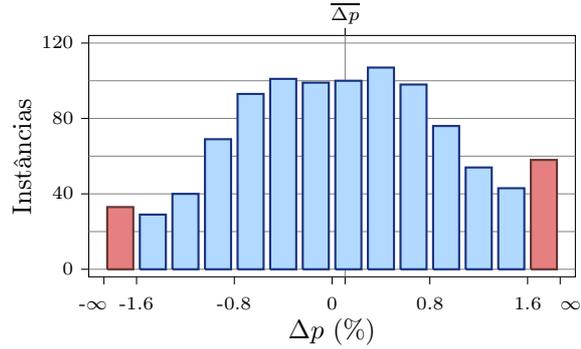
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px
Ocorrências ( $K$ )	20
Instâncias	1105
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-3.21 px
$\sigma_{\Delta p}$	38.2 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	-0.124%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.47%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-1.22 px
$\sigma_{\Delta q}$	1.31 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-4.73 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$5.07 \cdot 10^{-2}\%$



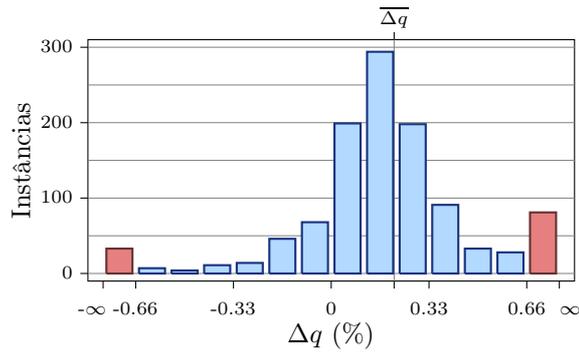
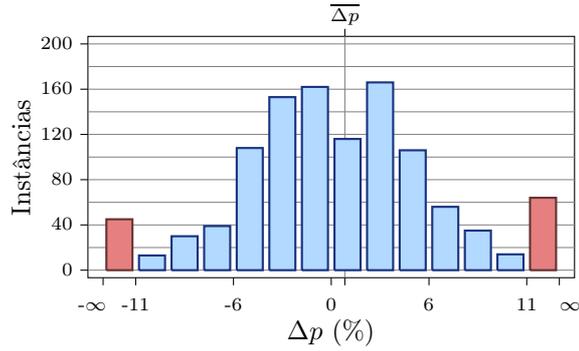
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px
Ocorrências ( $K$ )	30
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	1.37 px
$\sigma_{\Delta p}$	32.8 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$5.28 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.27%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-2.22 px
$\sigma_{\Delta q}$	1.11 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-8.57 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$4.28 \cdot 10^{-2}\%$



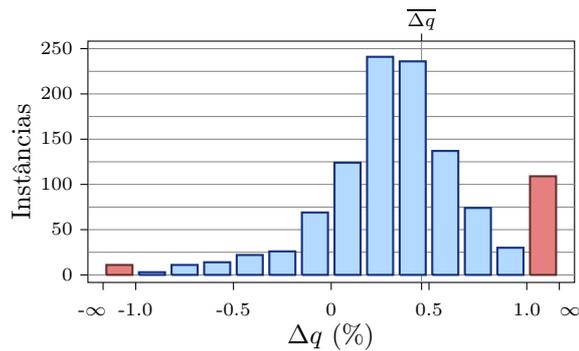
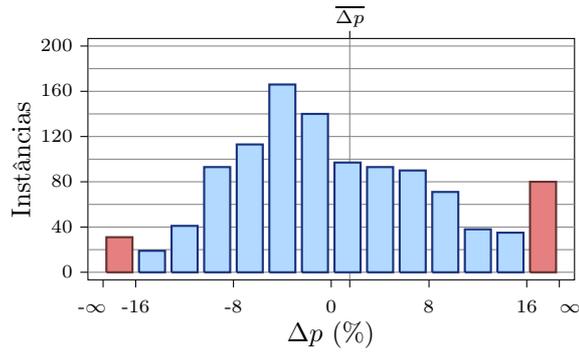
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px
Ocorrências ( $K$ )	50
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	2.76 px
$\sigma_{\Delta p}$	24.7 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	0.106%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	0.952%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-1.55 px
$\sigma_{\Delta q}$	0.816 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-5.99 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$3.15 \cdot 10^{-2}\%$



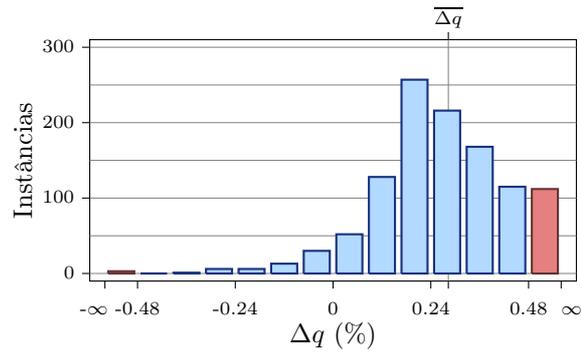
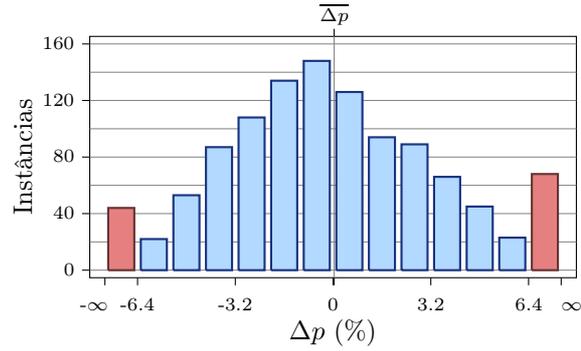
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	2
Instâncias	1107
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	19.9 px
$\sigma_{\Delta p}$	248 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	0.766%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	9.57%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	5.5 px
$\sigma_{\Delta q}$	16.1 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.212%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.622%



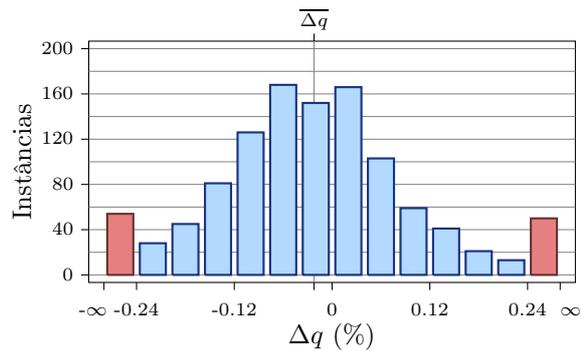
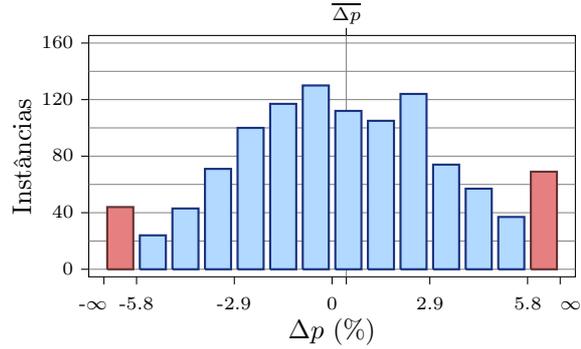
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	3
Instâncias	1107
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	39.2 px
$\sigma_{\Delta p}$	496 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	1.51%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	19.2%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	12 px
$\sigma_{\Delta q}$	47.7 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.462%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	1.84%



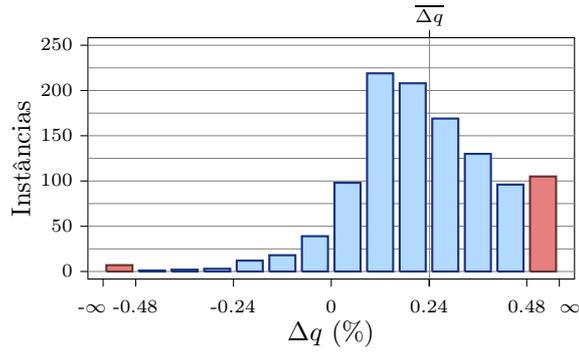
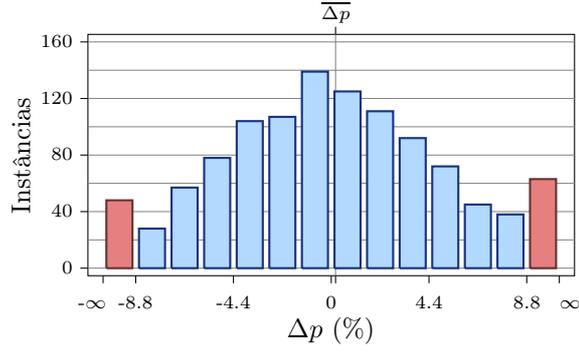
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	4
Instâncias	1107
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	0.925 px
$\sigma_{\Delta p}$	108 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$3.57 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	4.18%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	7.33 px
$\sigma_{\Delta q}$	5.73 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.283%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.221%



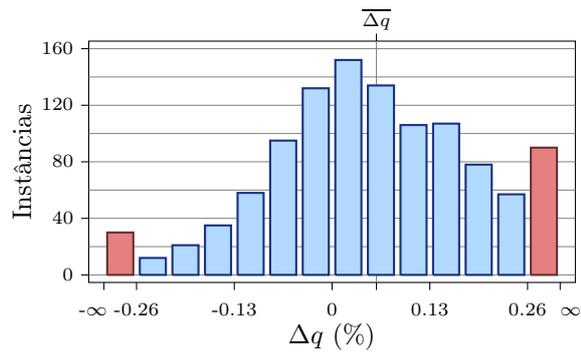
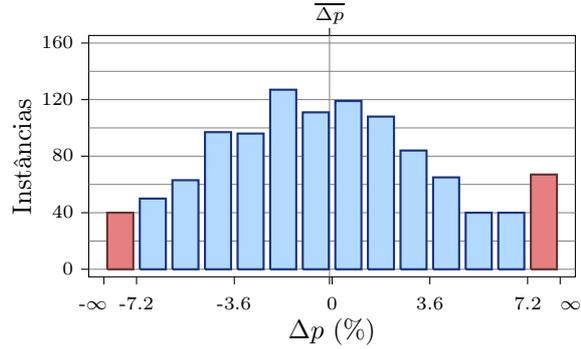
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	5
Instâncias	1107
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	10.9 px
$\sigma_{\Delta p}$	99.4 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	0.422%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	3.84%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-0.574 px
$\sigma_{\Delta q}$	4.25 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-2.22 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.164%



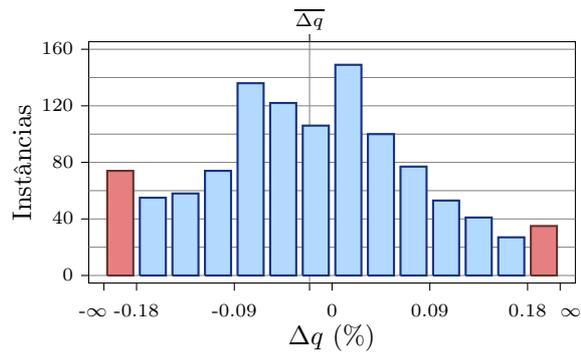
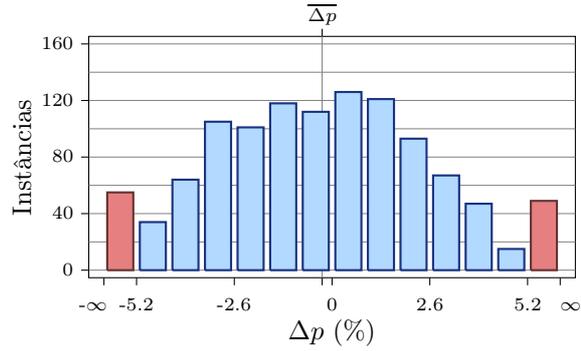
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	6
Instâncias	1107
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	5.06 px
$\sigma_{\Delta p}$	144 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	0.195%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	5.54%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	6.25 px
$\sigma_{\Delta q}$	6.31 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.241%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.243%



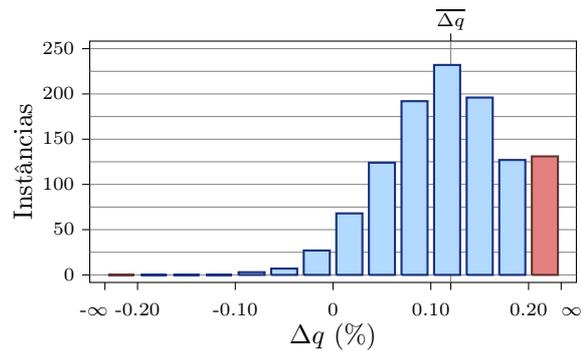
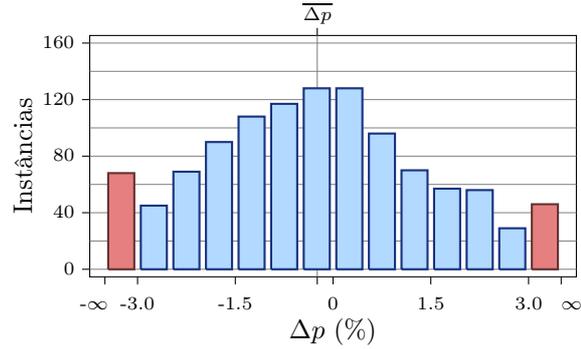
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	8
Instâncias	1107
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-2.43 px
$\sigma_{\Delta p}$	118 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$-9.38 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	4.57%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	1.53 px
$\sigma_{\Delta q}$	4.25 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$5.9 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.164%



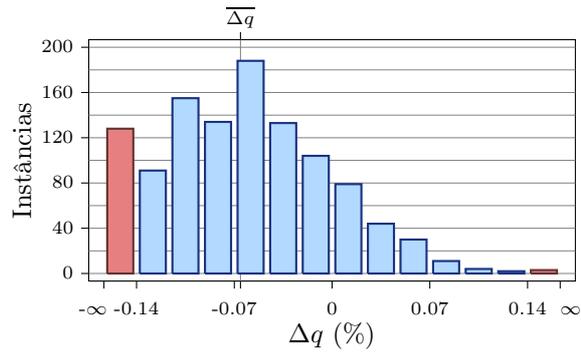
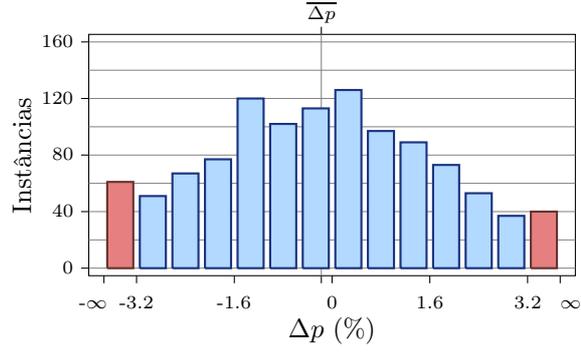
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	10
Instâncias	1107
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-6.85 px
$\sigma_{\Delta p}$	81.2 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	-0.264%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	3.13%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-0.537 px
$\sigma_{\Delta q}$	2.98 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-2.07 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	0.115%



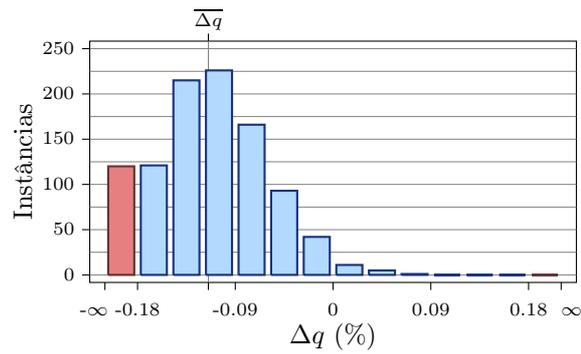
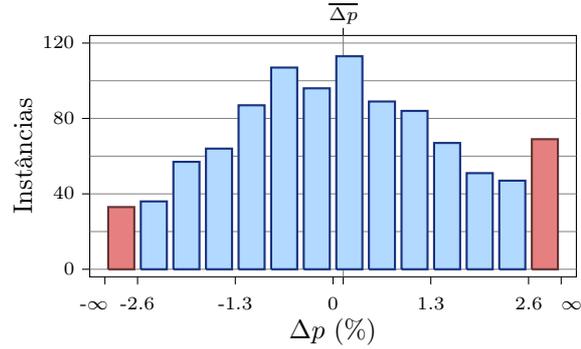
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	15
Instâncias	1107
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-6.28 px
$\sigma_{\Delta p}$	47.4 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	-0.242%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.83%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	3.12 px
$\sigma_{\Delta q}$	1.75 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	0.12%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$6.77 \cdot 10^{-2}\%$



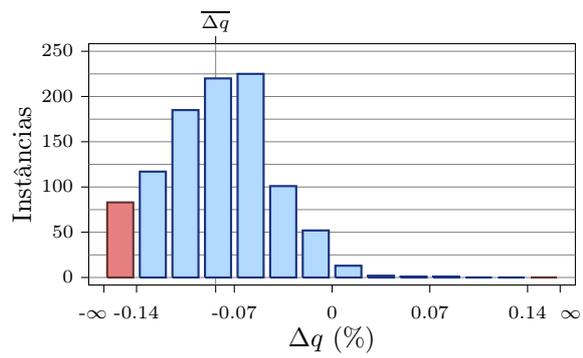
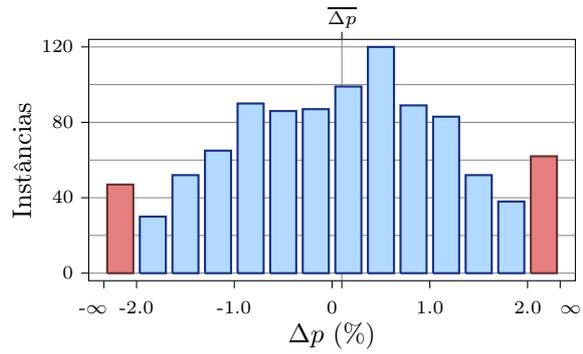
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	20
Instâncias	1106
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	-4.56 px
$\sigma_{\Delta p}$	50 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	-0.176%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.93%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-1.7 px
$\sigma_{\Delta q}$	1.71 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-6.56 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$6.59 \cdot 10^{-2}\%$



Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	30
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	3.49 px
$\sigma_{\Delta p}$	42.1 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	0.135%
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.62%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-2.97 px
$\sigma_{\Delta q}$	1.41 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	-0.115%
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$5.46 \cdot 10^{-2}\%$



Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	50
Instâncias	1000
Erros longitudinais	
$\overline{\Delta p}$	2.59 px
$\sigma_{\Delta p}$	32.8 px
$\overline{\Delta p}$ (%)	$9.98 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta p}$ (%)	1.27%
Erros transversais	
$\overline{\Delta q}$	-2.16 px
$\sigma_{\Delta q}$	1.06 px
$\overline{\Delta q}$ (%)	$-8.34 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta q}$ (%)	$4.1 \cdot 10^{-2}\%$



## Apêndice C

# Resultados dos experimentos tridimensionais

### C.1 Simulações gerais

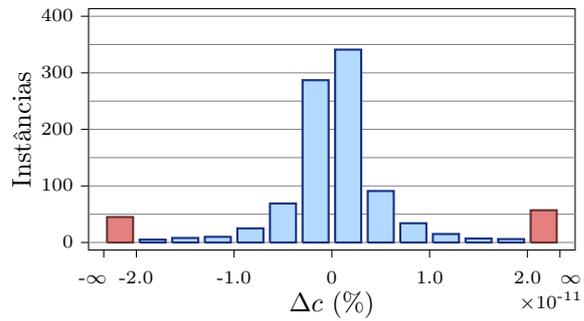
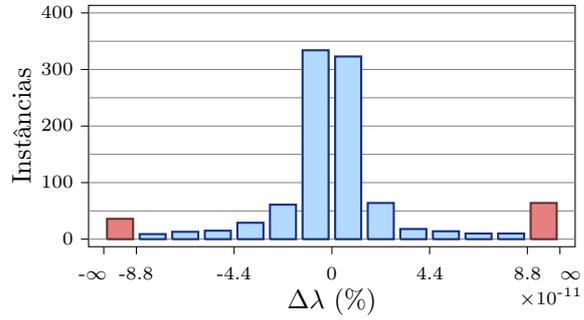
Estes experimentos correspondem ao primeiro grupo de simulações tridimensionais, cujo objetivo é verificar a qualidade dos resultados com cenas formadas por ocorrências independentes, com comprimento de barra fixo, variando-se a magnitude dos ruídos em pixels e o número de ocorrências.

Este grupo de simulações é apresentado na Subseção 4.3.1. Os parâmetros das simulações estão expostos na Tabela 4.6.

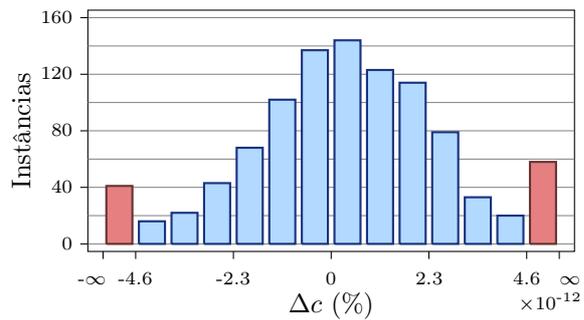
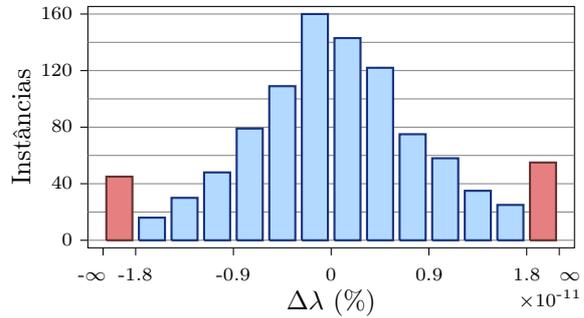
Os resultados apresentados nas páginas seguintes são agrupados por nível de ruído ( $\sigma_N$ ) e pelo número de ocorrências ( $K$ ). Para facilitar a consulta aos resultados, o índice abaixo indica o intervalo de páginas correspondente a cada nível de ruído:

$\sigma_N = 0.0$ px .....	págs. 145–149
$\sigma_N = 0.5$ px .....	págs. 149–153
$\sigma_N = 1.0$ px .....	págs. 154–158
$\sigma_N = 1.5$ px .....	págs. 158–162
$\sigma_N = 2.0$ px .....	págs. 163–167

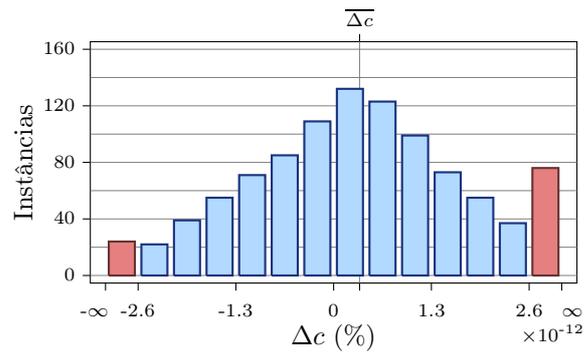
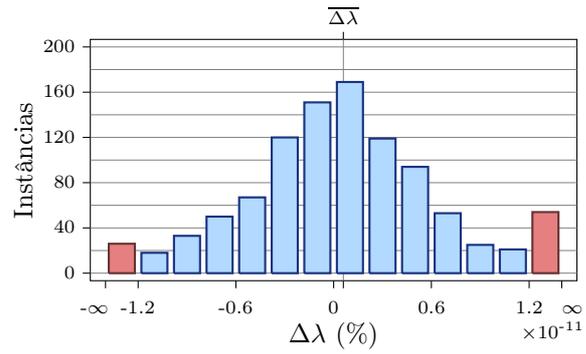
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px	
Ocorrências ( $K$ )	2	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	6.24 mm	0.44%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	50.1 mm	3.53%
$RMS_\lambda$	1.6 $10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$-4.89 \cdot 10^{-3}$ mm	$-3.26 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	1.37 mm	0.914%
$RMS_c$	1.6 $10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	255 mm	



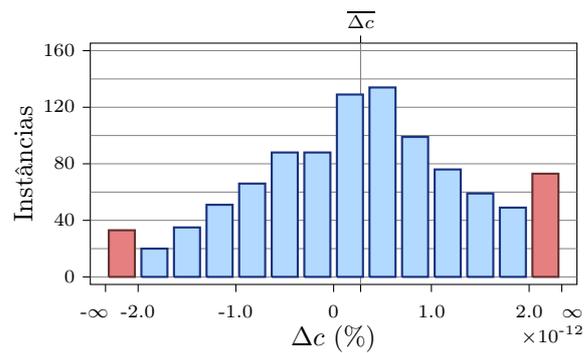
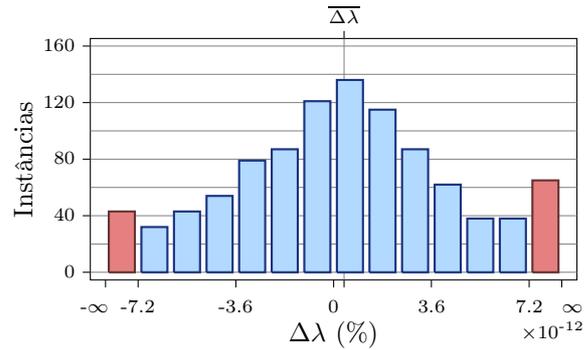
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px	
Ocorrências ( $K$ )	3	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	1.41 mm	$9.97 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	23.7 mm	1.67%
$RMS_\lambda$	750 mm	
$\overline{\Delta c}$	$1.06 \cdot 10^{-2}$ mm	$7.09 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.185 mm	0.123%
$RMS_c$	750 mm	
$RMS_\gamma$	132 mm	



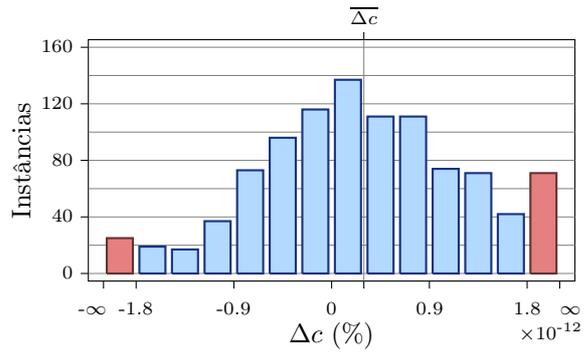
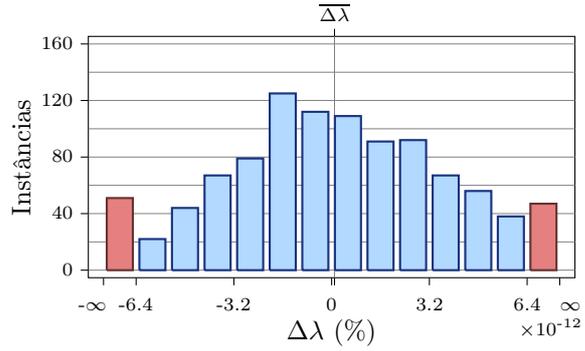
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px	
Ocorrências ( $K$ )	5	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$8.45 \cdot 10^{-12}$ mm	$5.96 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	$9.7 \cdot 10^{-11}$ mm	$6.84 \cdot 10^{-12}\%$
$RMS_\lambda$	$3.08 \cdot 10^{-9}$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$5.18 \cdot 10^{-13}$ mm	$3.45 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	$2.52 \cdot 10^{-12}$ mm	$1.68 \cdot 10^{-12}\%$
$RMS_c$	$3.08 \cdot 10^{-9}$ mm	
$RMS_\gamma$	$6.66 \cdot 10^{-10}$ mm	



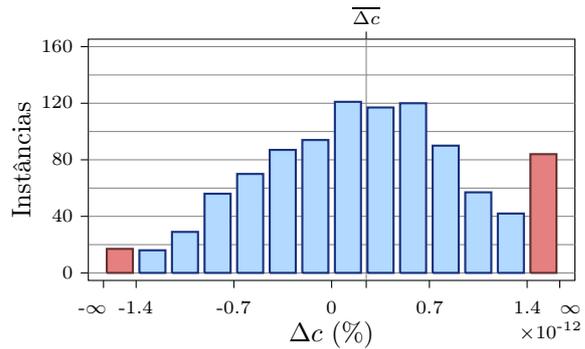
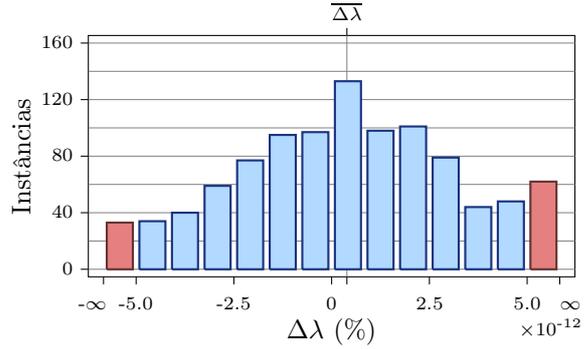
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px	
Ocorrências ( $K$ )	8	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$5.46 \cdot 10^{-12}$ mm	$3.85 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	$7.03 \cdot 10^{-11}$ mm	$4.96 \cdot 10^{-12}\%$
$RMS_\lambda$	$2.23 \cdot 10^{-9}$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.14 \cdot 10^{-13}$ mm	$2.76 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	$1.87 \cdot 10^{-12}$ mm	$1.25 \cdot 10^{-12}\%$
$RMS_c$	$2.23 \cdot 10^{-9}$ mm	
$RMS_\gamma$	$4.84 \cdot 10^{-10}$ mm	



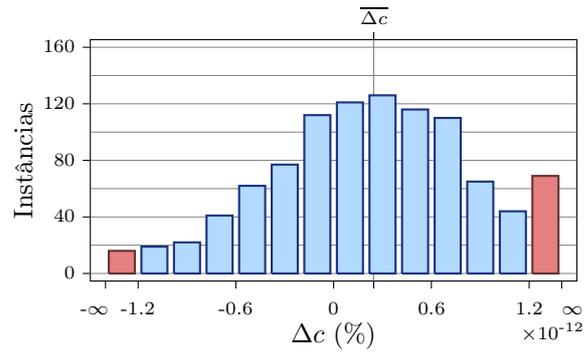
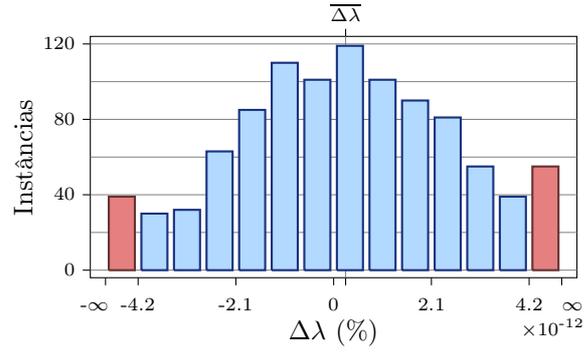
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px	
Ocorrências ( $K$ )	10	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$1.33 \cdot 10^{-12}$ mm	$9.41 \cdot 10^{-14}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	$5.67 \cdot 10^{-11}$ mm	$4 \cdot 10^{-12}\%$
$RMS_\lambda$	$1.79 \cdot 10^{-9}$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.45 \cdot 10^{-13}$ mm	$2.97 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	$1.55 \cdot 10^{-12}$ mm	$1.03 \cdot 10^{-12}\%$
$RMS_c$	$1.79 \cdot 10^{-9}$ mm	
$RMS_\gamma$	$3.92 \cdot 10^{-10}$ mm	



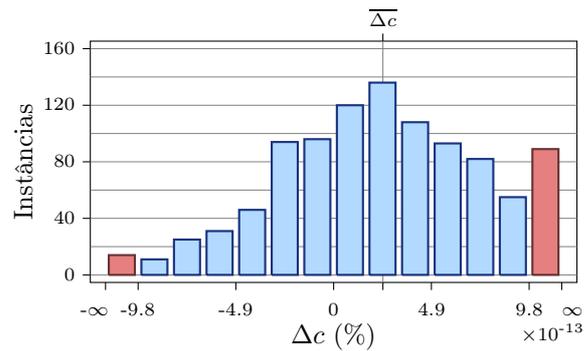
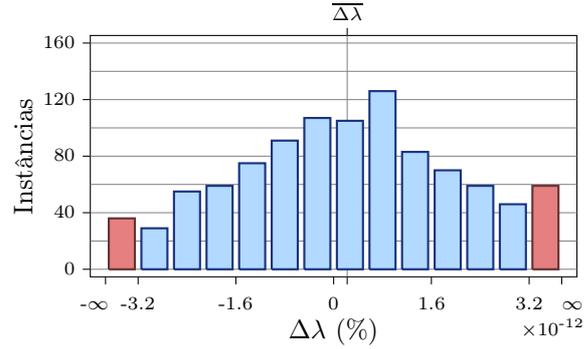
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px	
Ocorrências ( $K$ )	15	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$5.53 \cdot 10^{-12}$ mm	$3.9 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	$4.33 \cdot 10^{-11}$ mm	$3.05 \cdot 10^{-12}\%$
$RMS_\lambda$	$1.38 \cdot 10^{-9}$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$3.72 \cdot 10^{-13}$ mm	$2.48 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$ mm	$8.03 \cdot 10^{-13}\%$
$RMS_c$	$1.38 \cdot 10^{-9}$ mm	
$RMS_\gamma$	$3.11 \cdot 10^{-10}$ mm	



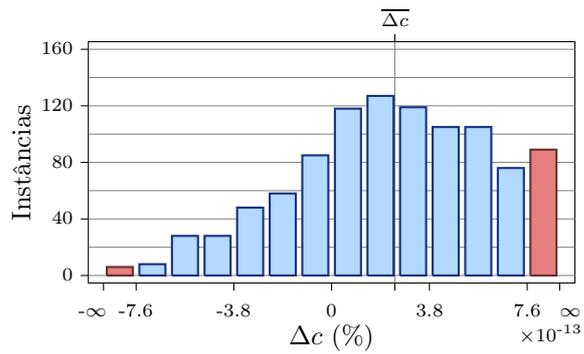
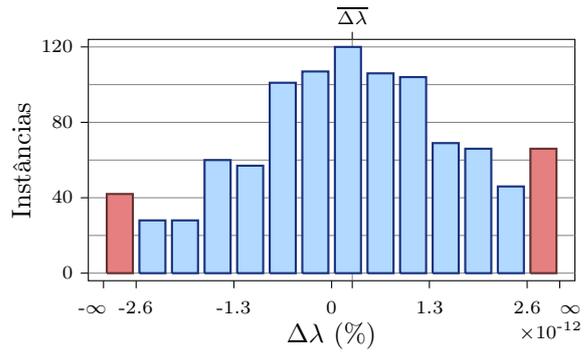
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px	
Ocorrências ( $K$ )	20	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$3.66 \cdot 10^{-12}$ mm	$2.58 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	$3.67 \cdot 10^{-11}$ mm	$2.59 \cdot 10^{-12}\%$
$RMS_\lambda$	$1.17 \cdot 10^{-9}$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$3.69 \cdot 10^{-13}$ mm	$2.46 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	$1.02 \cdot 10^{-12}$ mm	$6.77 \cdot 10^{-13}\%$
$RMS_c$	$1.17 \cdot 10^{-9}$ mm	
$RMS_\gamma$	$2.67 \cdot 10^{-10}$ mm	



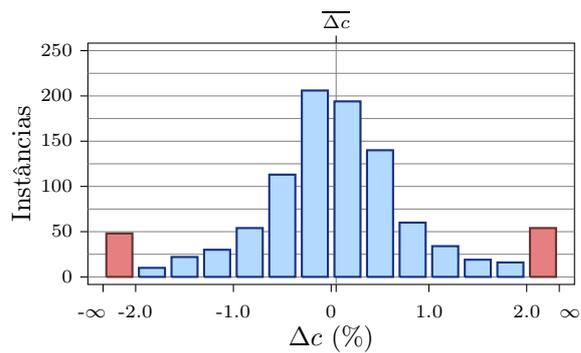
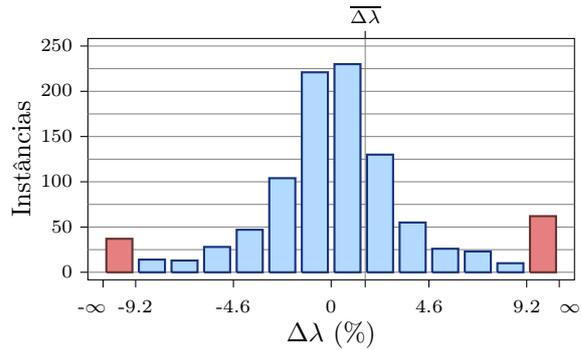
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px	
Ocorrências ( $K$ )	30	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$3.15 \cdot 10^{-12}$ mm	$2.22 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	$2.8 \cdot 10^{-11}$ mm	$1.98 \cdot 10^{-12}\%$
$RMS_\lambda$	$8.91 \cdot 10^{-10}$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$3.71 \cdot 10^{-13}$ mm	$2.47 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	$8.09 \cdot 10^{-13}$ mm	$5.39 \cdot 10^{-13}\%$
$RMS_c$	$8.91 \cdot 10^{-10}$ mm	
$RMS_\gamma$	$2.11 \cdot 10^{-10}$ mm	



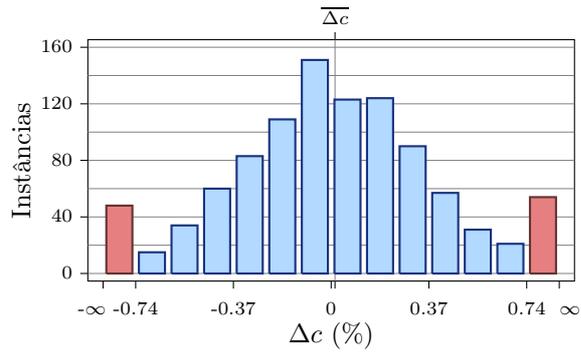
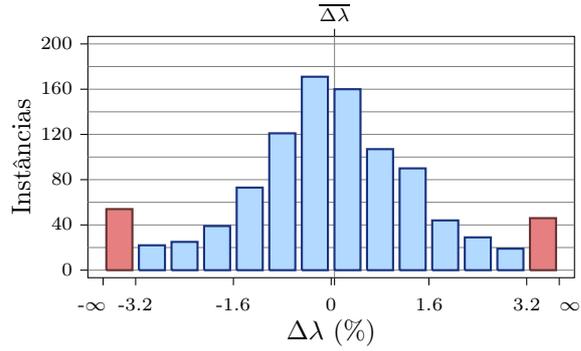
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0 px	
Ocorrências ( $K$ )	50	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$3.89 \cdot 10^{-12}$ mm	$2.74 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	$2.27 \cdot 10^{-11}$ mm	$1.6 \cdot 10^{-12}\%$
$RMS_\lambda$	$7.29 \cdot 10^{-10}$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$3.69 \cdot 10^{-13}$ mm	$2.46 \cdot 10^{-13}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	$6.2 \cdot 10^{-13}$ mm	$4.13 \cdot 10^{-13}\%$
$RMS_c$	$7.29 \cdot 10^{-10}$ mm	
$RMS_\gamma$	$1.81 \cdot 10^{-10}$ mm	



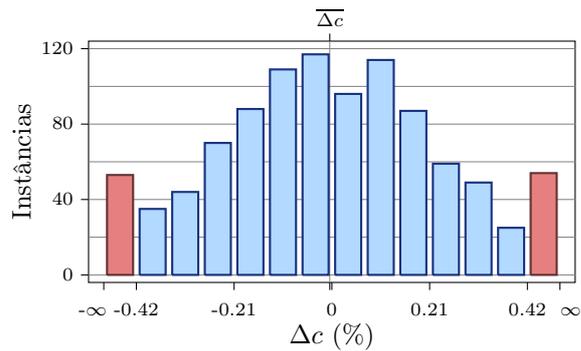
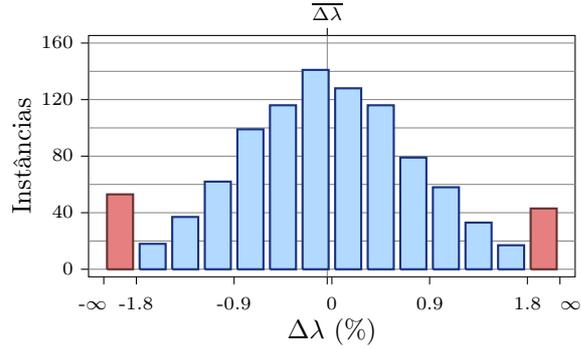
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	2	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	22.7 mm	1.6%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	334 mm	23.5%
$RMS_\lambda$	$1.06 \cdot 10^4$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$7.58 \cdot 10^{-2}$ mm	$5.06 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	3.26 mm	2.17%
$RMS_c$	$1.06 \cdot 10^4$ mm	
$RMS_\gamma$	781 mm	



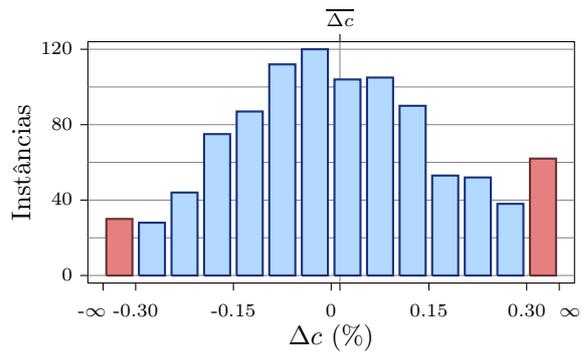
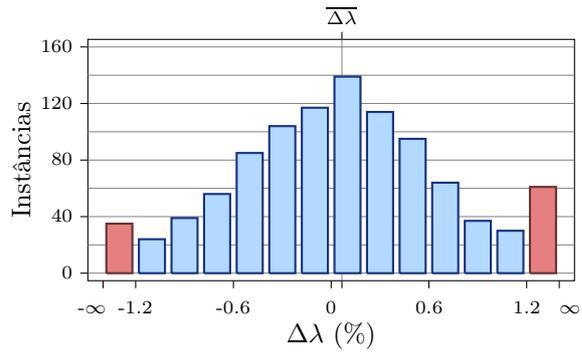
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	3	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.78 mm	$5.5 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	54.1 mm	3.82%
$RMS_\lambda$	$1.71 \cdot 10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$2.17 \cdot 10^{-2}$ mm	$1.45 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	1.35 mm	0.902%
$RMS_c$	$1.71 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	333 mm	



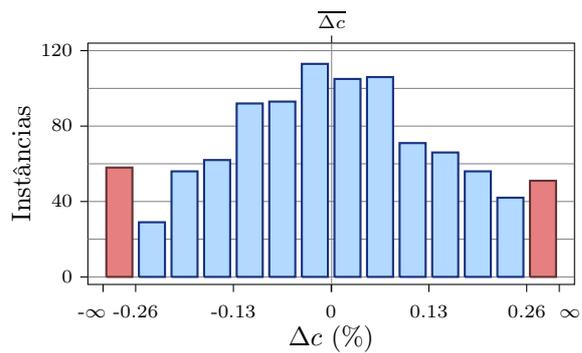
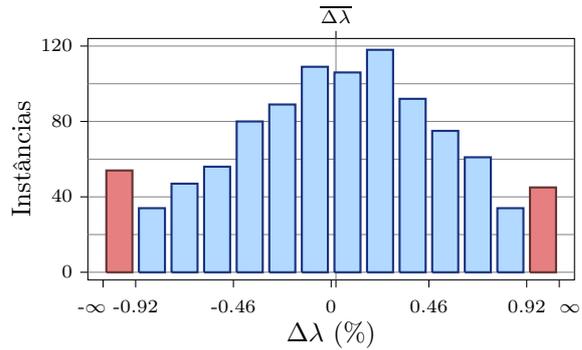
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	5	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.606 mm	$-4.27 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	15.8 mm	1.12%
$RMS_\lambda$	501 mm	
$\overline{\Delta c}$	$-6.82 \cdot 10^{-3}$ mm	$-4.55 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.408 mm	0.272%
$RMS_c$	501 mm	
$RMS_\gamma$	102 mm	



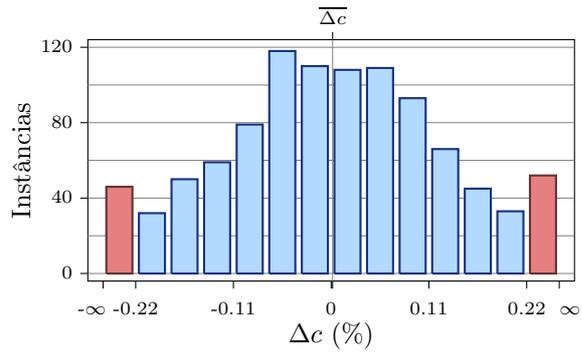
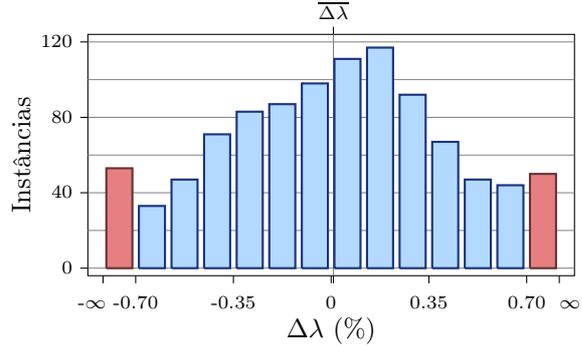
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	8	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.935 mm	$6.59 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	10.3 mm	0.73%
$RMS_\lambda$	328 mm	
$\overline{\Delta c}$	$2.01 \cdot 10^{-2}$ mm	$1.34 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.276 mm	0.184%
$RMS_c$	328 mm	
$RMS_\gamma$	67.6 mm	



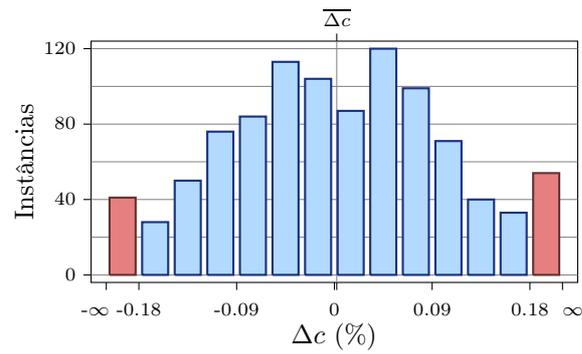
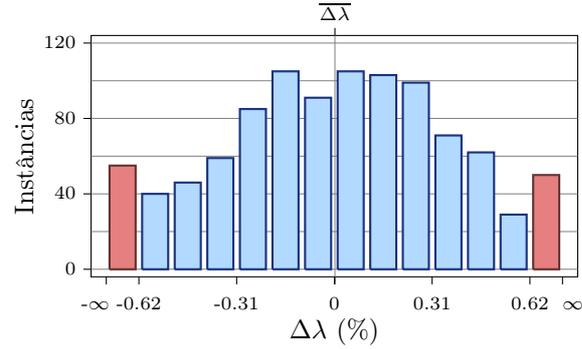
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	10	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.317 mm	$2.24 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	8.17 mm	0.577%
$RMS_\lambda$	259 mm	
$\overline{\Delta c}$	$9.07 \cdot 10^{-4}$ mm	$6.04 \cdot 10^{-4}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.248 mm	0.165%
$RMS_c$	259 mm	
$RMS_\gamma$	56 mm	



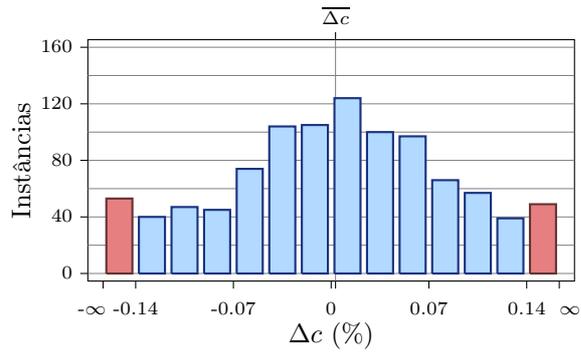
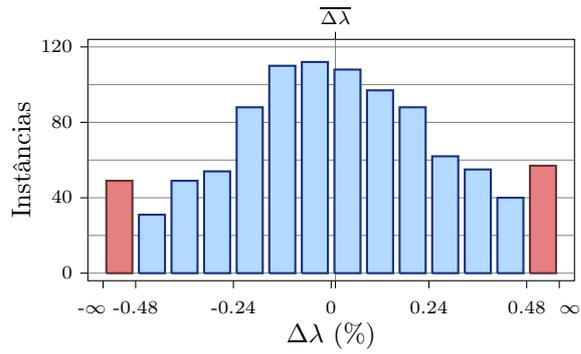
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	15	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.113 mm	$7.94 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	6.34 mm	0.447%
$RMS_\lambda$	200 mm	
$\overline{\Delta c}$	$2.45 \cdot 10^{-3}$ mm	$1.63 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.197 mm	0.131%
$RMS_c$	200 mm	
$RMS_\gamma$	44.3 mm	



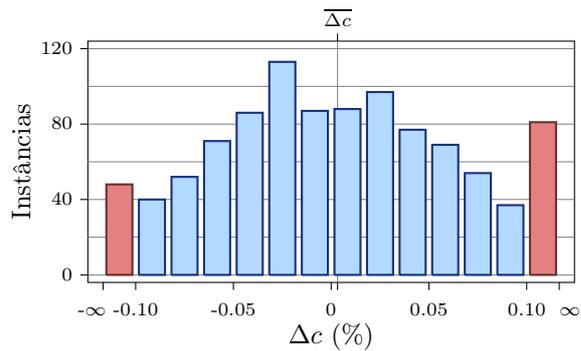
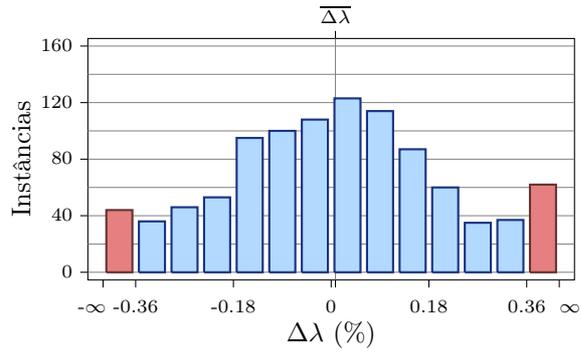
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	20	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$2.35 \cdot 10^{-2}$ mm	$1.66 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	5.6 mm	0.395%
$RMS_\lambda$	177 mm	
$\overline{\Delta c}$	$3.26 \cdot 10^{-3}$ mm	$2.17 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.166 mm	0.111%
$RMS_c$	177 mm	
$RMS_\gamma$	39.7 mm	



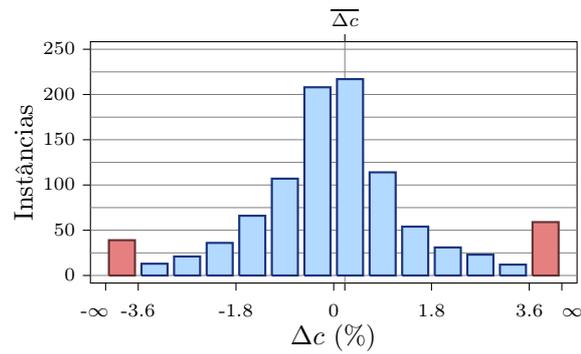
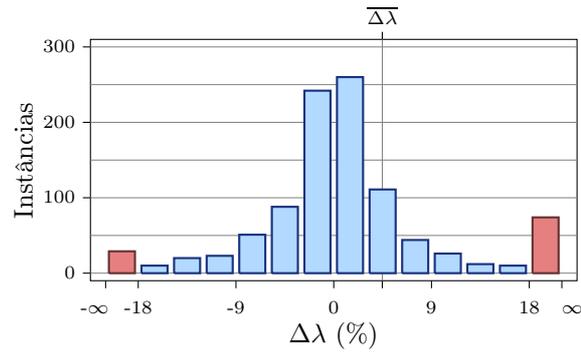
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	30	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.149 mm	$1.05 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	4.2 mm	0.297%
$RMS_\lambda$	133 mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.68 \cdot 10^{-3}$ mm	$3.12 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.128 mm	$8.57 \cdot 10^{-2}\%$
$RMS_c$	133 mm	
$RMS_\gamma$	32.2 mm	



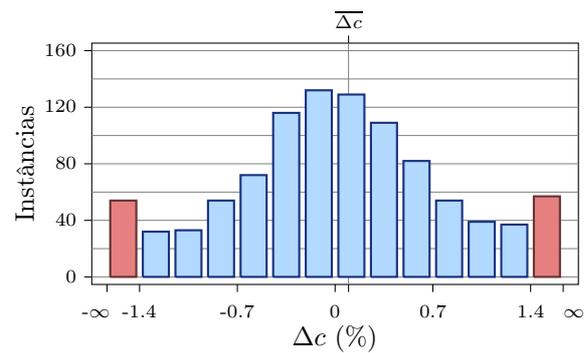
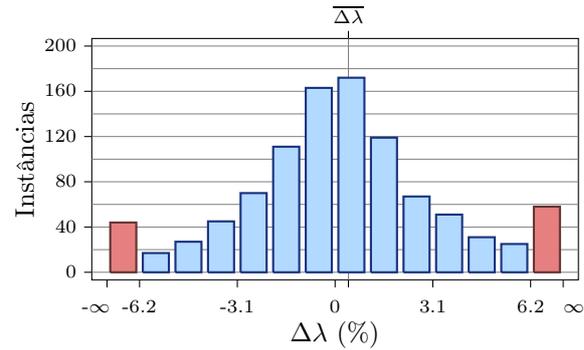
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	0.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	50	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.111 mm	$7.85 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	3.11 mm	0.22%
$RMS_\lambda$	98.5 mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.89 \cdot 10^{-3}$ mm	$3.26 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.101 mm	$6.71 \cdot 10^{-2}\%$
$RMS_c$	98.5 mm	
$RMS_\gamma$	26.5 mm	



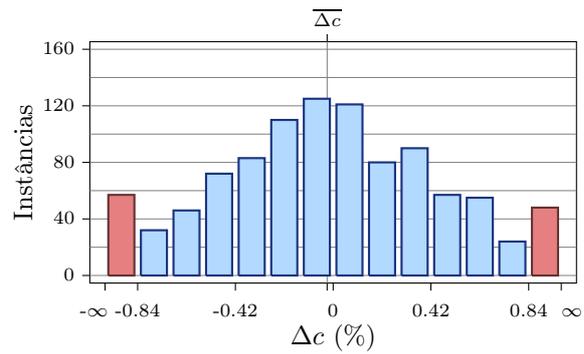
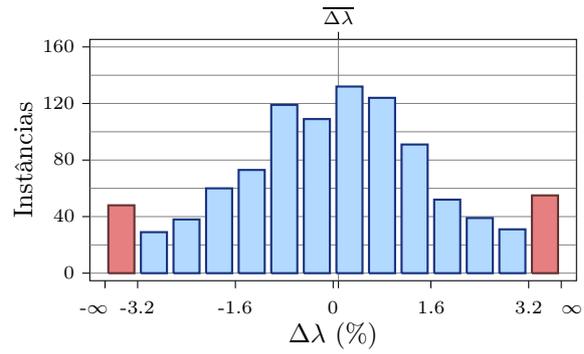
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	2	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	63.4 mm	4.47%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	789 mm	55.6%
$RMS_\lambda$	$2.5 \cdot 10^4$ mm	
$\overline{\Delta c}$	0.306 mm	0.204%
$\sigma_{\Delta c}$	4.78 mm	3.19%
$RMS_c$	$2.5 \cdot 10^4$ mm	
$RMS_\gamma$	$1.14 \cdot 10^3$ mm	



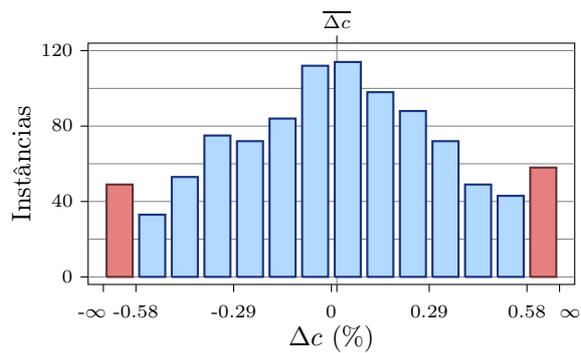
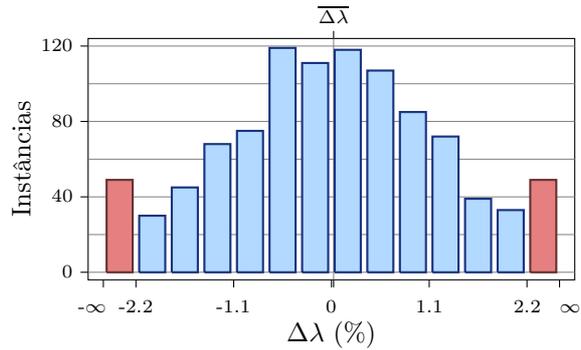
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	3	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	5.99 mm	0.422%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	85.4 mm	6.02%
$RMS_\lambda$	$2.71 \cdot 10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	0.145 mm	$9.64 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	2.94 mm	1.96%
$RMS_c$	$2.71 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	500 mm	



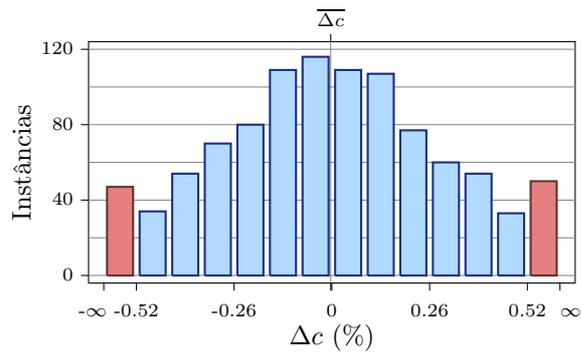
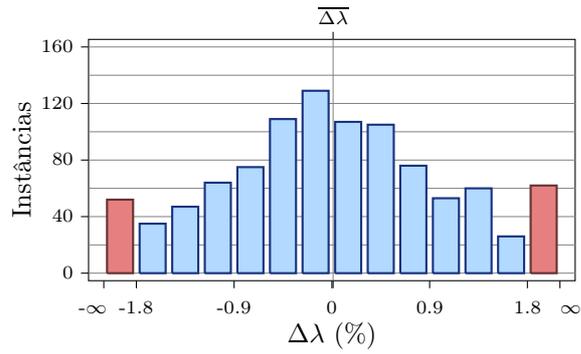
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	5	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	1.23 mm	$8.67 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	31 mm	2.18%
$RMS_\lambda$	979 mm	
$\overline{\Delta c}$	$-3.9 \cdot 10^{-2}$ mm	$-2.6 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.827 mm	0.551%
$RMS_c$	979 mm	
$RMS_\gamma$	193 mm	



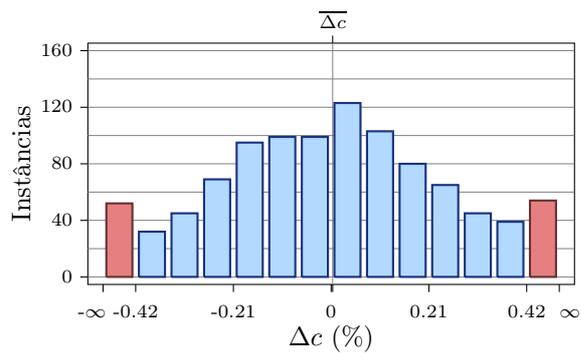
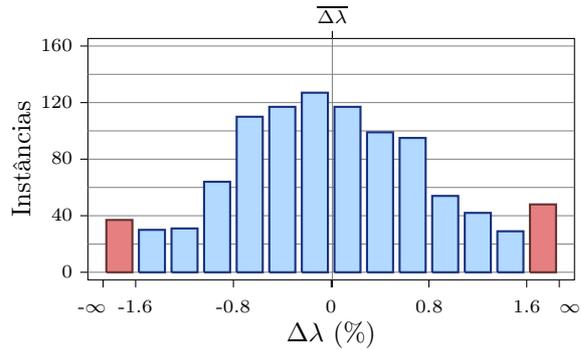
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	8	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.343 mm	$2.42 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	21.4 mm	1.51%
$RMS_\lambda$	677 mm	
$\overline{\Delta c}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$ mm	$1.6 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.572 mm	0.381%
$RMS_c$	677 mm	
$RMS_\gamma$	139 mm	



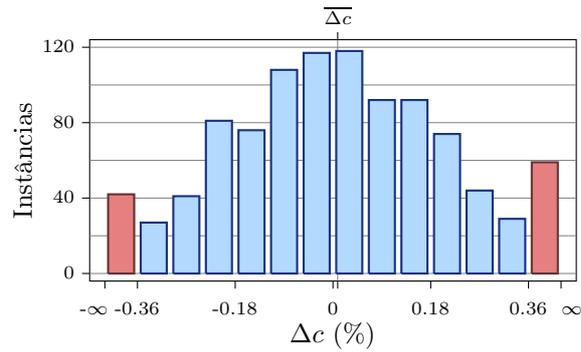
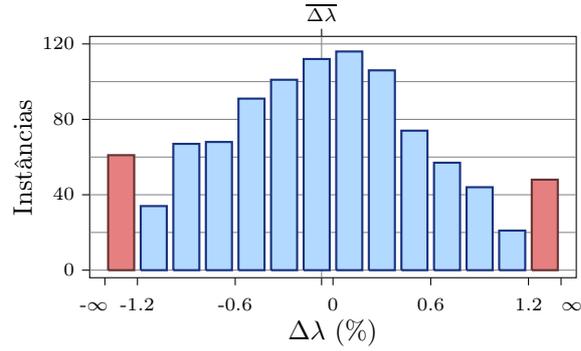
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	10	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.159 mm	$1.12 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	16.5 mm	1.16%
$RMS_\lambda$	522 mm	
$\overline{\Delta c}$	$-4.63 \cdot 10^{-3}$ mm	$-3.08 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.481 mm	0.321%
$RMS_c$	522 mm	
$RMS_\gamma$	110 mm	



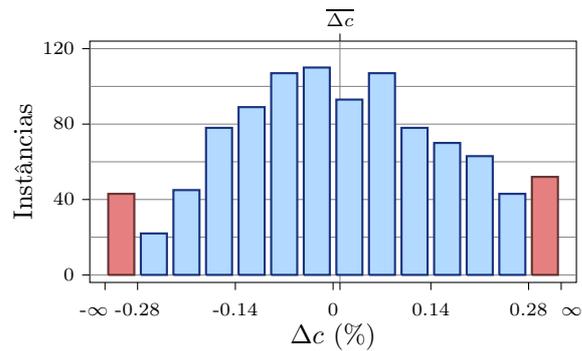
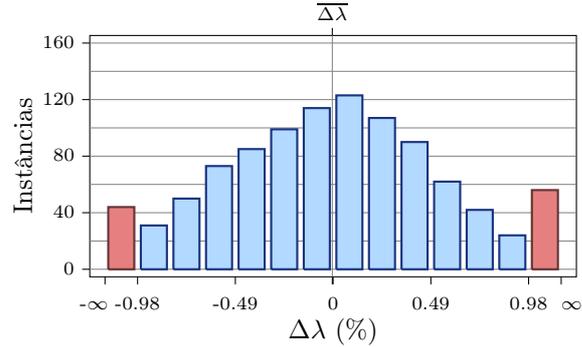
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	15	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.132 mm	$9.28 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	13.3 mm	0.939%
$RMS_\lambda$	421 mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.85 \cdot 10^{-3}$ mm	$3.23 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.396 mm	0.264%
$RMS_c$	421 mm	
$RMS_\gamma$	91.4 mm	



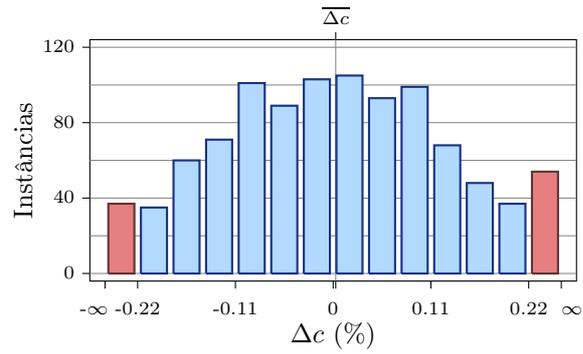
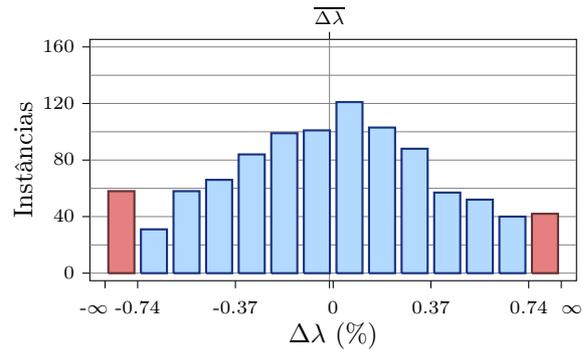
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	20	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.99 mm	$-6.99 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	10.5 mm	0.738%
$RMS_\lambda$	332 mm	
$\overline{\Delta c}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$ mm	$8.67 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.322 mm	0.215%
$RMS_c$	332 mm	
$RMS_\gamma$	76.7 mm	



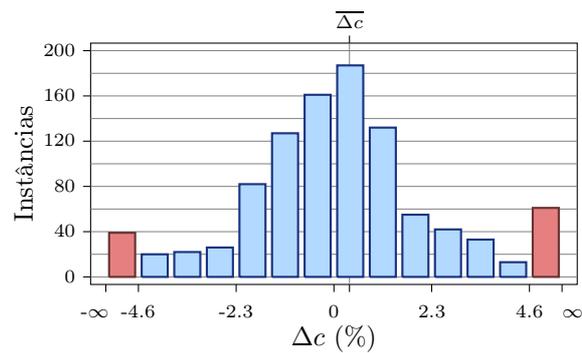
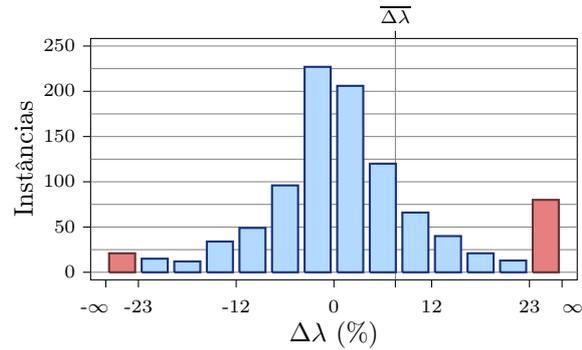
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	30	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$-5.56 \cdot 10^{-2}$ mm	$-3.92 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	8.3 mm	0.585%
$RMS_\lambda$	262 mm	
$\overline{\Delta c}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$ mm	$9.84 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.253 mm	0.169%
$RMS_c$	262 mm	
$RMS_\gamma$	63.6 mm	



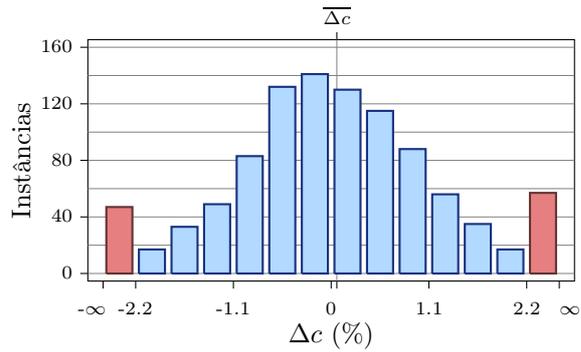
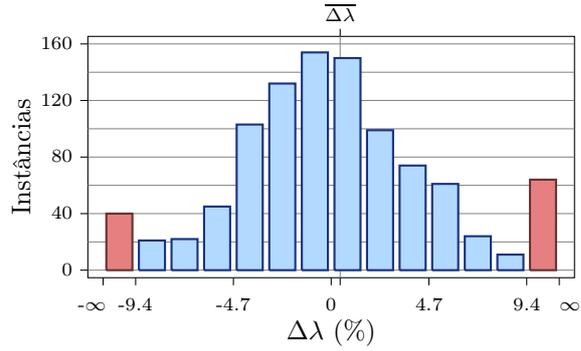
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	50	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.198 mm	$-1.39 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	6.34 mm	0.447%
$RMS_\lambda$	200 mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.29 \cdot 10^{-3}$ mm	$2.86 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.198 mm	0.132%
$RMS_c$	200 mm	
$RMS_\gamma$	53.5 mm	



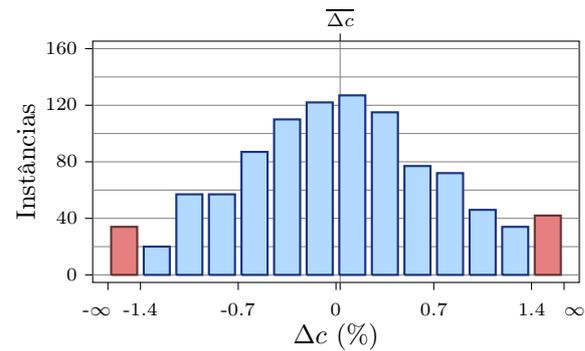
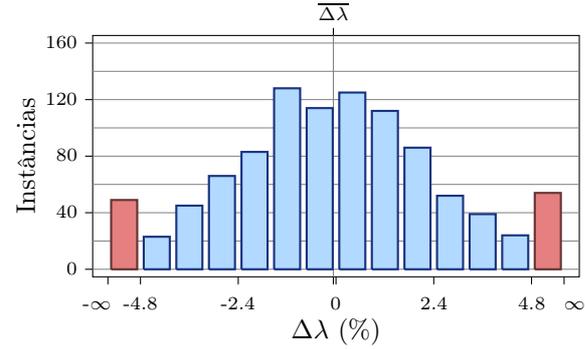
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	2	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	102 mm	7.23%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	938 mm	66.2%
$RMS_\lambda$	$2.98 \cdot 10^4$ mm	
$\overline{\Delta c}$	0.549 mm	0.366%
$\sigma_{\Delta c}$	5.94 mm	3.96%
$RMS_c$	$2.98 \cdot 10^4$ mm	
$RMS_\gamma$	$1.51 \cdot 10^3$ mm	



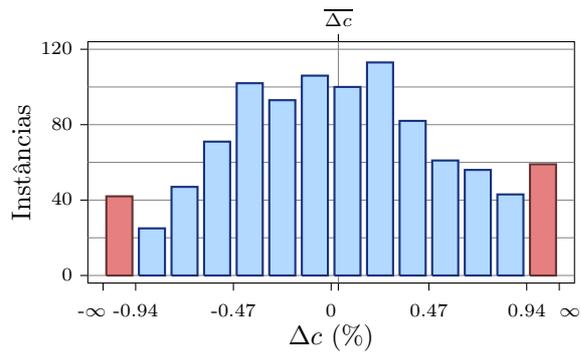
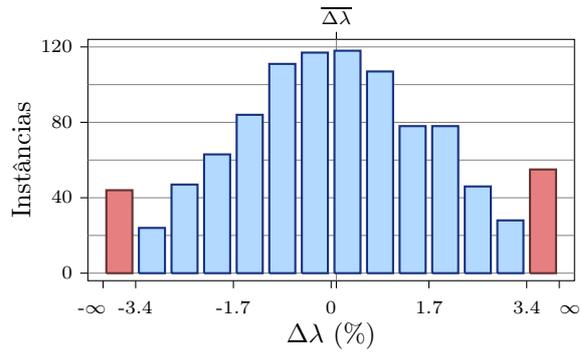
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	3	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	6.11 mm	0.431%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	108 mm	7.6%
$RMS_\lambda$	$3.41 \cdot 10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$9.54 \cdot 10^{-2}$ mm	$6.36 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	2.66 mm	1.77%
$RMS_c$	$3.41 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	619 mm	



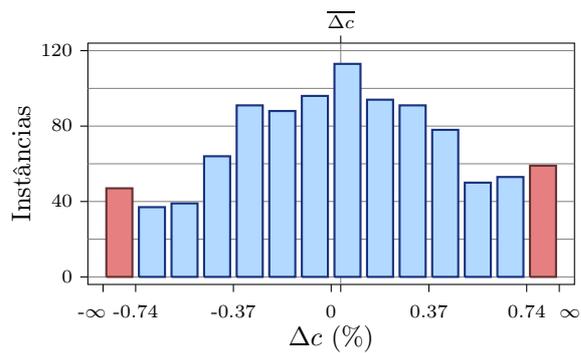
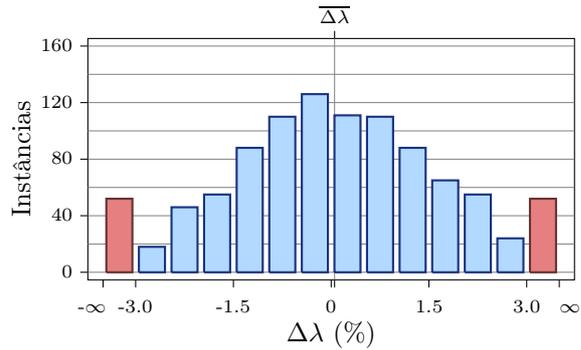
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	5	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.924 mm	$-6.52 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	49.9 mm	3.52%
$RMS_\lambda$	$1.58 \cdot 10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.43 \cdot 10^{-2}$ mm	$2.95 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	1.36 mm	0.908%
$RMS_c$	$1.58 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	329 mm	



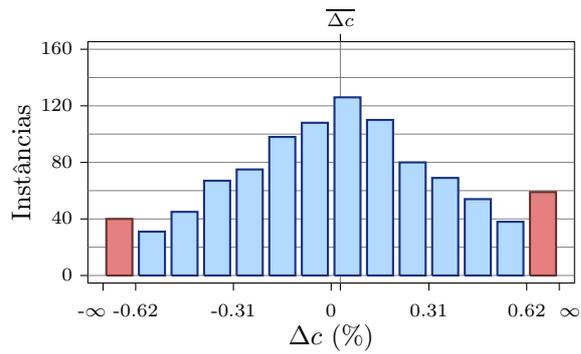
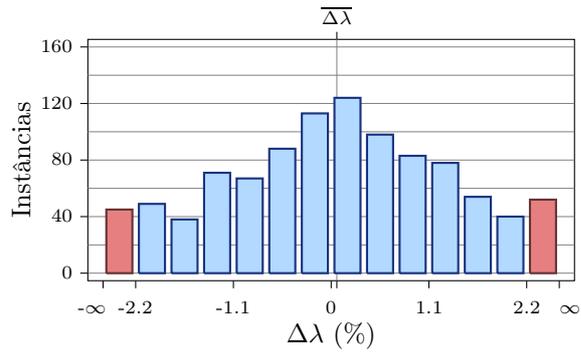
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	8	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	1.27 mm	$8.98 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	29.5 mm	2.08%
$RMS_\lambda$	933 mm	
$\overline{\Delta c}$	$5.17 \cdot 10^{-2}$ mm	$3.45 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.858 mm	0.572%
$RMS_c$	933 mm	
$RMS_\gamma$	194 mm	



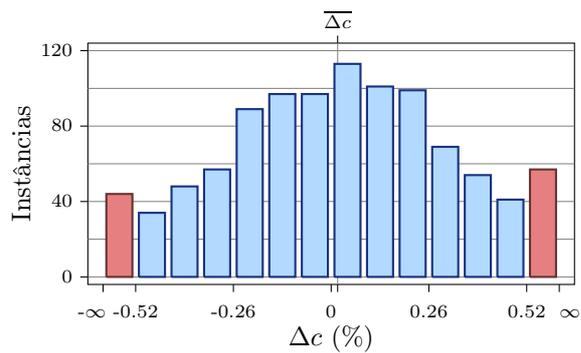
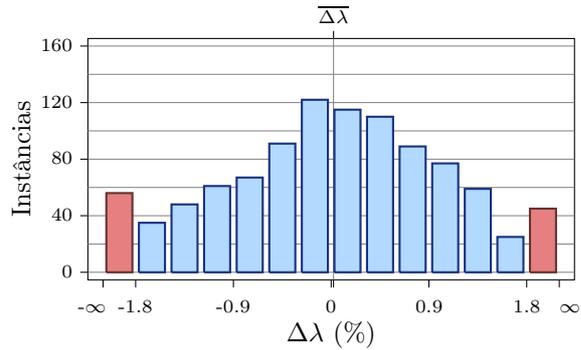
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	10	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.745 mm	$5.25 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	26.6 mm	1.87%
$RMS_\lambda$	840 mm	
$\overline{\Delta c}$	$5.42 \cdot 10^{-2}$ mm	$3.62 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.708 mm	0.472%
$RMS_c$	840 mm	
$RMS_\gamma$	176 mm	



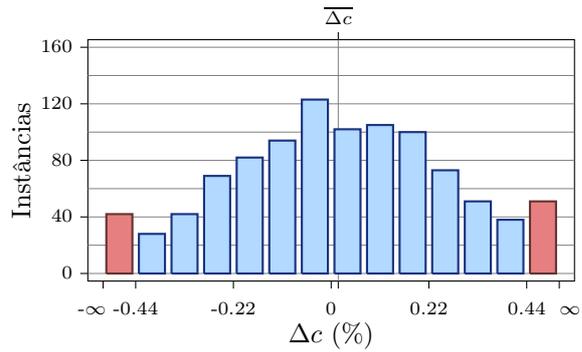
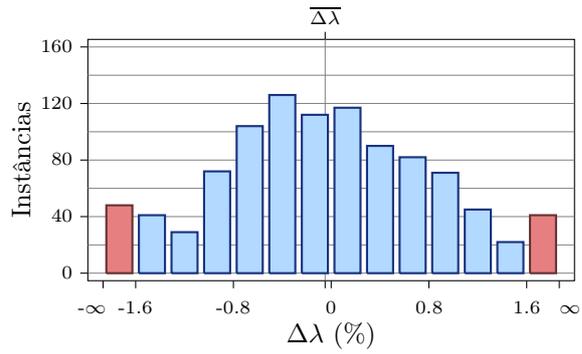
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	15	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.902 mm	$6.36 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	19.1 mm	1.35%
$RMS_\lambda$	604 mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.38 \cdot 10^{-2}$ mm	$2.92 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.566 mm	0.377%
$RMS_c$	604 mm	
$RMS_\gamma$	136 mm	



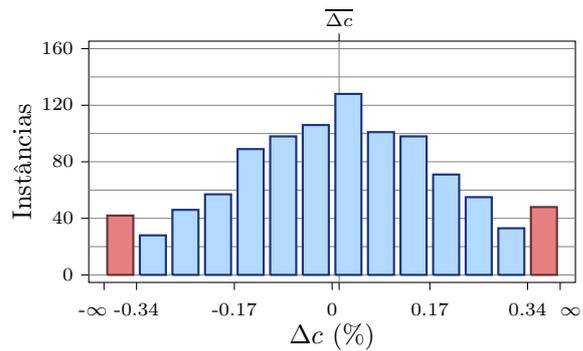
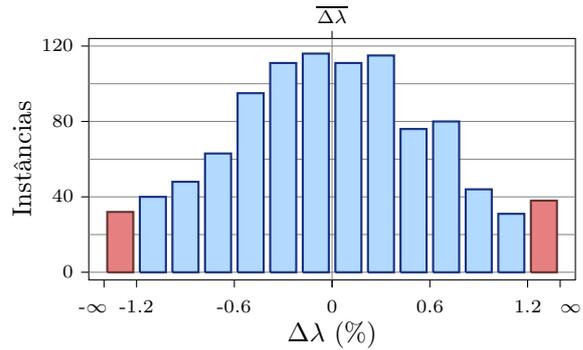
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	20	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.308 mm	$2.17 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	15.6 mm	1.1%
$RMS_\lambda$	492 mm	
$\overline{\Delta c}$	$2.58 \cdot 10^{-2}$ mm	$1.72 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.48 mm	0.32%
$RMS_c$	492 mm	
$RMS_\gamma$	114 mm	



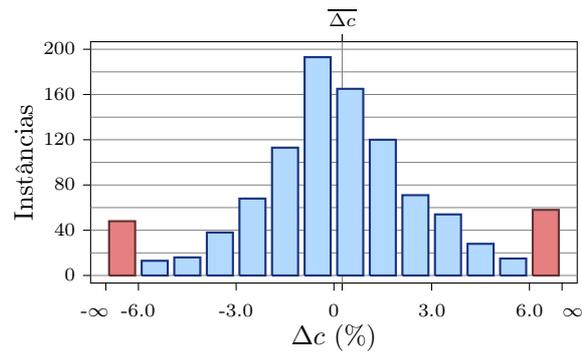
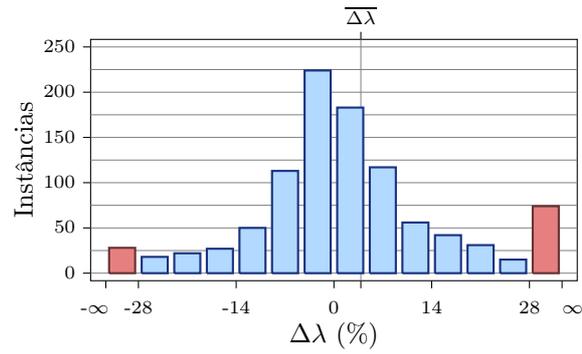
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	30	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.701 mm	$-4.95 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	13 mm	0.917%
$RMS_\lambda$	412 mm	
$\overline{\Delta c}$	$2.39 \cdot 10^{-2}$ mm	$1.59 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.394 mm	0.262%
$RMS_c$	412 mm	
$RMS_\gamma$	98.3 mm	



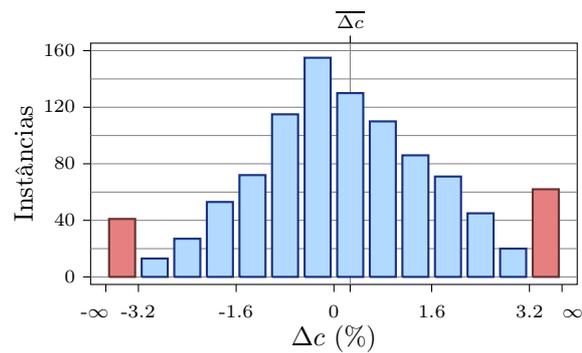
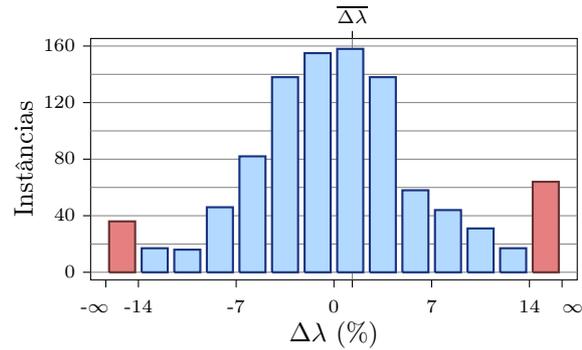
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1.5 px	
Ocorrências ( $K$ )	50	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$-4.23 \cdot 10^{-3}$ mm	$-2.98 \cdot 10^{-4}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	9.47 mm	0.668%
$RMS_\lambda$	299 mm	
$\overline{\Delta c}$	$1.83 \cdot 10^{-2}$ mm	$1.22 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.295 mm	0.197%
$RMS_c$	299 mm	
$RMS_\gamma$	80.7 mm	



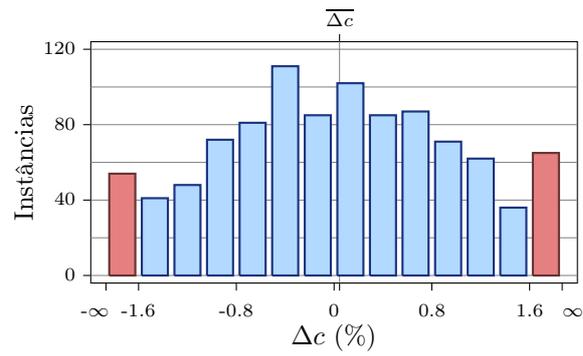
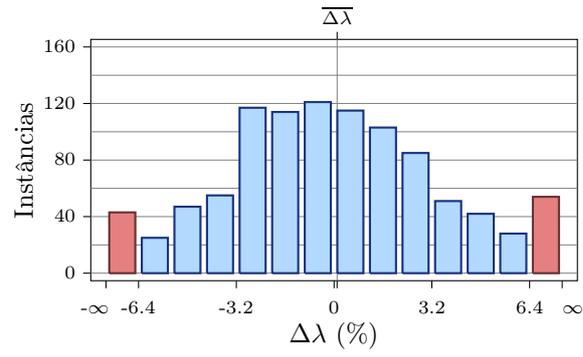
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px	
Ocorrências ( $K$ )	2	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	54.6 mm	3.85%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	383 mm	27%
$RMS_\lambda$	$1.22 \cdot 10^4$ mm	
$\overline{\Delta c}$	0.378 mm	0.252%
$\sigma_{\Delta c}$	9.29 mm	6.19%
$RMS_c$	$1.22 \cdot 10^4$ mm	
$RMS_\gamma$	$2.37 \cdot 10^3$ mm	



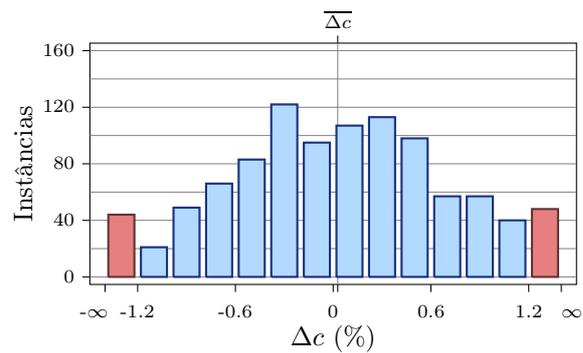
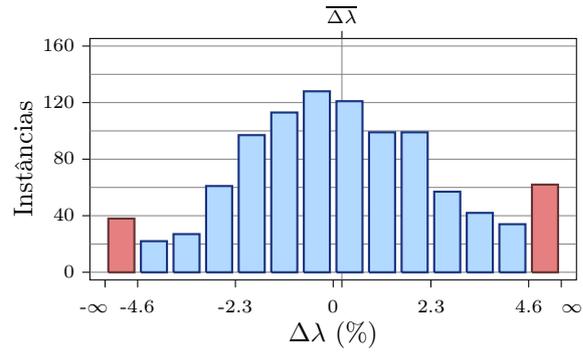
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px	
Ocorrências ( $K$ )	3	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	18.6 mm	1.31%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	191 mm	13.5%
$RMS_\lambda$	$6.06 \cdot 10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	0.399 mm	0.266%
$\sigma_{\Delta c}$	3.9 mm	2.6%
$RMS_c$	$6.06 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	$1.24 \cdot 10^3$ mm	



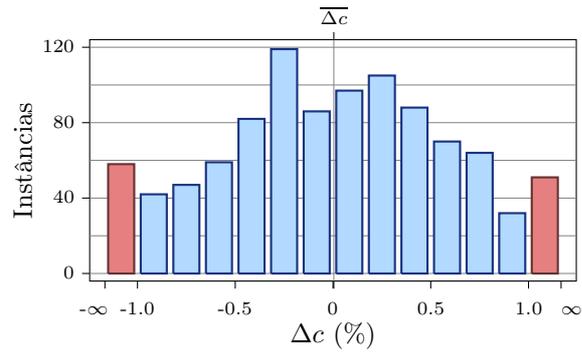
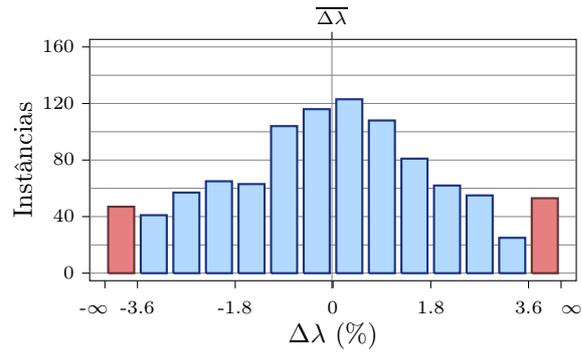
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px	
Ocorrências ( $K$ )	5	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	1.4 mm	$9.9 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	59.9 mm	4.23%
$RMS_\lambda$	$1.89 \cdot 10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$6.7 \cdot 10^{-2}$ mm	$4.46 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	1.7 mm	1.14%
$RMS_c$	$1.89 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	383 mm	



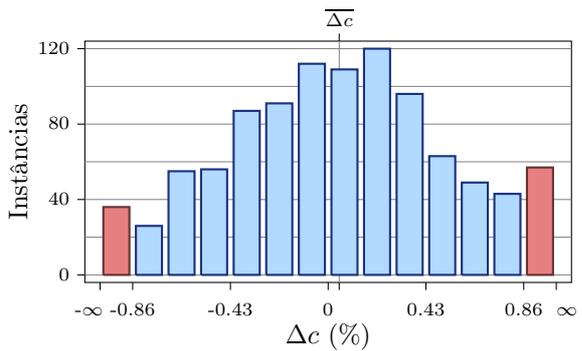
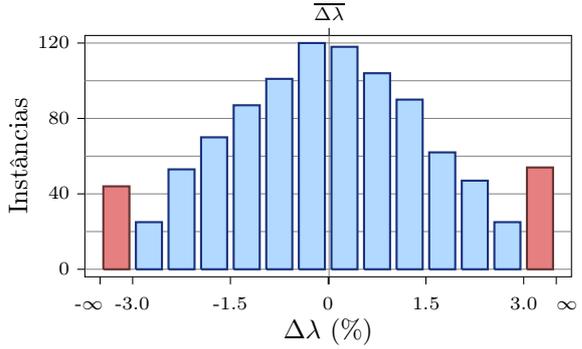
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px	
Ocorrências ( $K$ )	8	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	2.91 mm	0.205%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	39.5 mm	2.79%
$RMS_\lambda$	$1.25 \cdot 10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.19 \cdot 10^{-2}$ mm	$2.79 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	1.08 mm	0.722%
$RMS_c$	$1.25 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	260 mm	



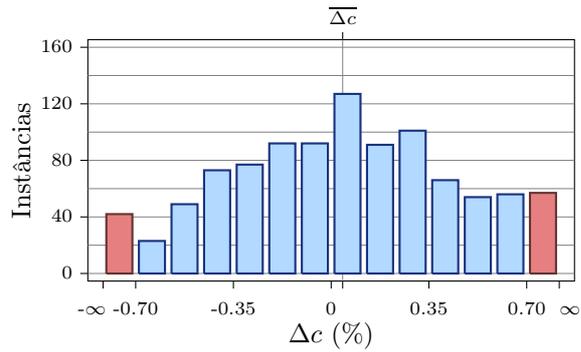
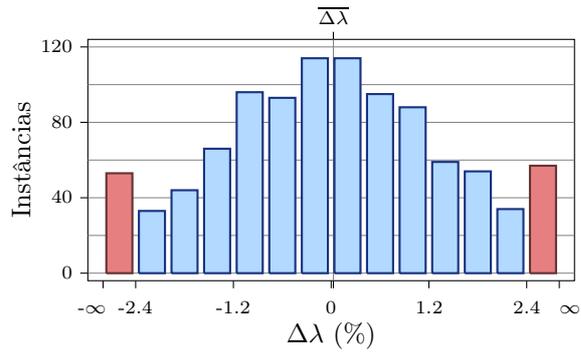
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px	
Ocorrências ( $K$ )	10	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.285 mm	$-2.01 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	32.2 mm	2.27%
$RMS_\lambda$	$1.02 \cdot 10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$6.25 \cdot 10^{-3}$ mm	$4.16 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.975 mm	0.65%
$RMS_c$	$1.02 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	217 mm	



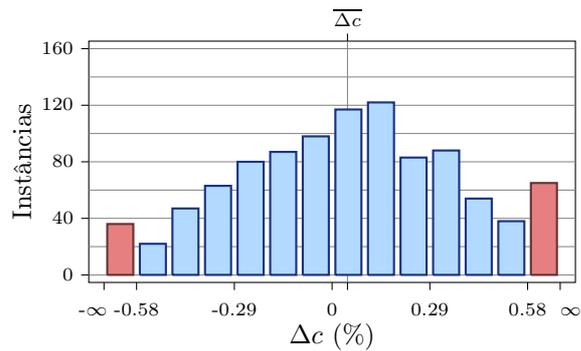
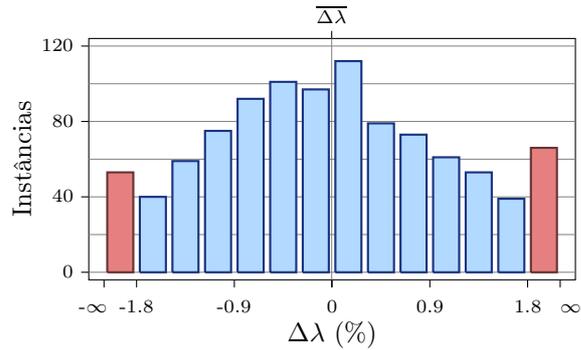
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px	
Ocorrências ( $K$ )	15	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.19 mm	$1.34 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	25.4 mm	1.79%
$RMS_\lambda$	802 mm	
$\overline{\Delta c}$	$7.28 \cdot 10^{-2}$ mm	$4.86 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.765 mm	0.51%
$RMS_c$	802 mm	
$RMS_\gamma$	181 mm	



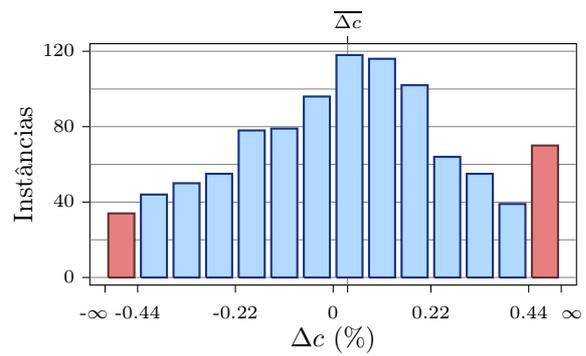
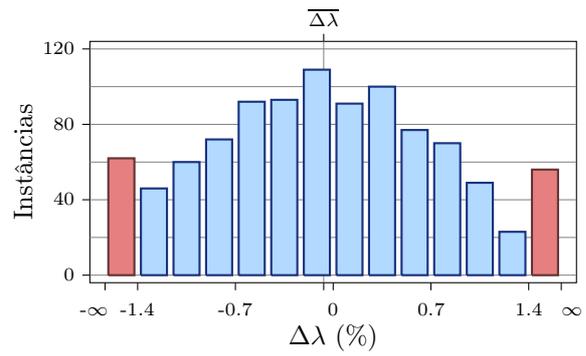
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	20
Compr. barra ( $c$ )	150 mm
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	0.378 mm $2.67 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	21.4 mm    1.51%
$RMS_\lambda$	675 mm
$\overline{\Delta c}$	$6.18 \cdot 10^{-2}$ mm $4.12 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.646 mm    0.431%
$RMS_c$	675 mm
$RMS_\gamma$	154 mm



Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px
Ocorrências ( $K$ )	30
Compr. barra ( $c$ )	150 mm
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	$-5.31 \cdot 10^{-2}$ mm $-3.74 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	16.5 mm    1.17%
$RMS_\lambda$	522 mm
$\overline{\Delta c}$	$6.84 \cdot 10^{-2}$ mm $4.56 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.524 mm    0.349%
$RMS_c$	522 mm
$RMS_\gamma$	127 mm



Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	2 px	
Ocorrências ( $K$ )	50	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.964 mm	$-6.8 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	12.6 mm	0.886%
$RMS_\lambda$	398 mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.87 \cdot 10^{-2}$ mm	$3.25 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.405 mm	0.27%
$RMS_c$	398 mm	
$RMS_\gamma$	108 mm	



## C.2 Simulações sobre a variação do comprimento da barra

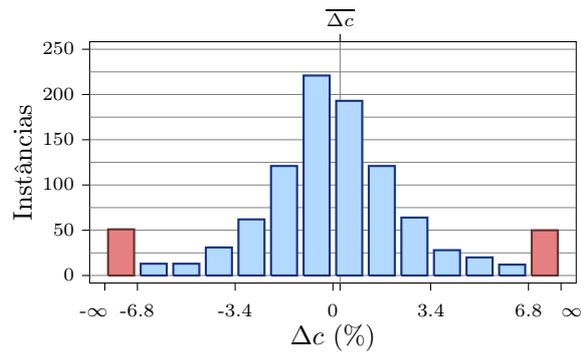
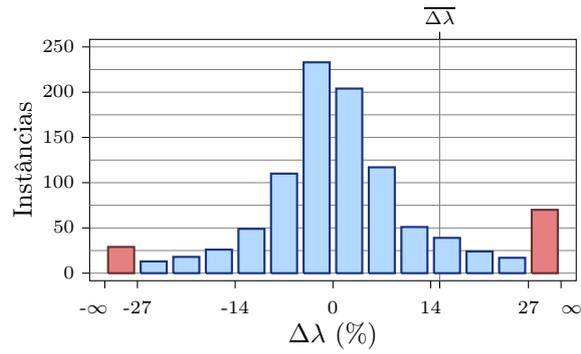
Estes experimentos correspondem ao segundo grupo de simulações tridimensionais, cujo objetivo é verificar a qualidade dos resultados com cenas formadas por ocorrências independentes, de ruído fixo, variando-se o comprimento da barra e o número de ocorrências.

Este grupo de simulações é apresentado na Subseção 4.3.1. Os parâmetros das simulações estão expostos na Tabela 4.7.

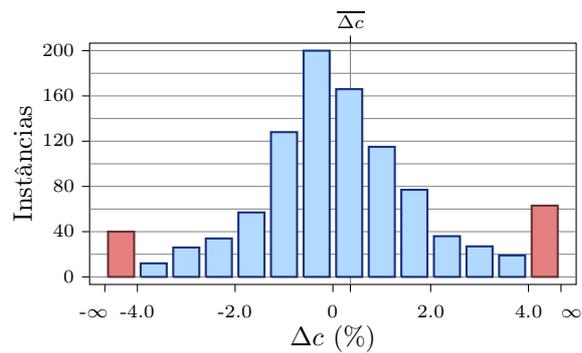
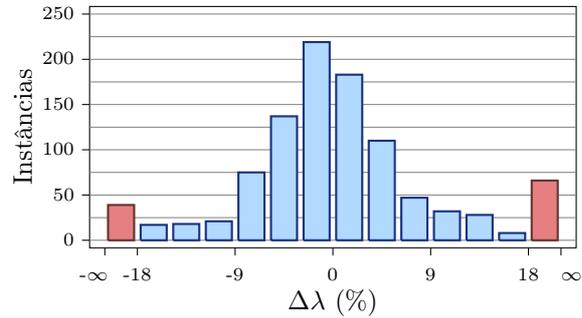
Os resultados apresentados nas páginas seguintes são agrupados pelo número de ocorrências ( $K$ ) e pelo comprimento da barra ( $c$ ). Para facilitar a consulta aos resultados, o índice abaixo indica o intervalo de páginas correspondente a cada número de ocorrências:

$K = 2$ .....	págs. 169–171
$K = 3$ .....	págs. 171–173
$K = 5$ .....	págs. 174–176
$K = 8$ .....	págs. 176–178
$K = 10$ .....	págs. 179–181
$K = 15$ .....	págs. 181–183
$K = 20$ .....	págs. 184–186

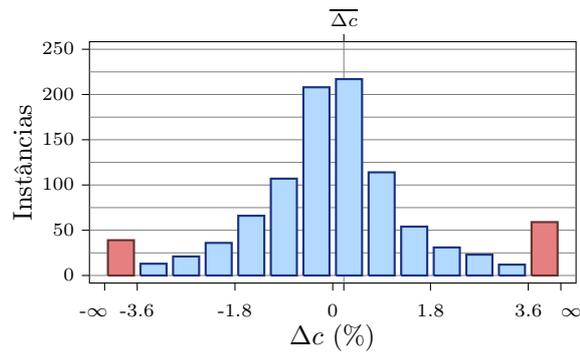
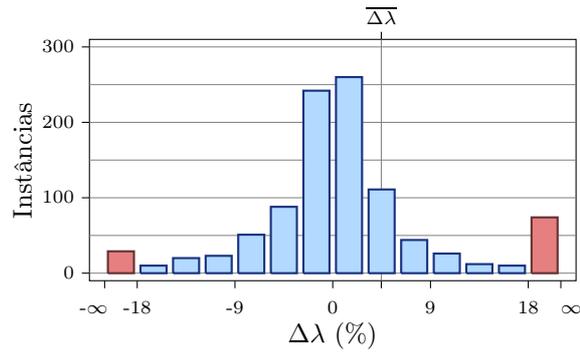
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	2	
Compr. barra ( $c$ )	75 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	209 mm	14.8%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	$4.4 \cdot 10^3$ mm	311%
$RMS_\lambda$	$1.39 \cdot 10^5$ mm	
$\overline{\Delta c}$	0.186 mm	0.248%
$\sigma_{\Delta c}$	7.46 mm	9.94%
$RMS_c$	$1.39 \cdot 10^5$ mm	
$RMS_\gamma$	$2.25 \cdot 10^3$ mm	



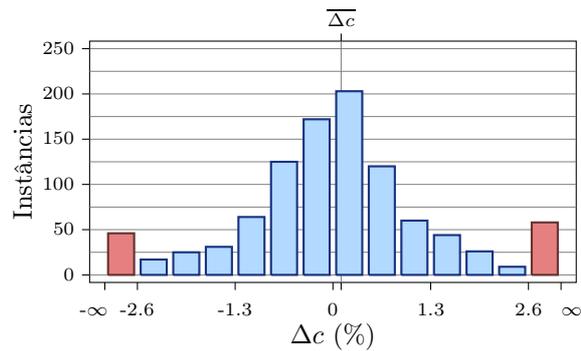
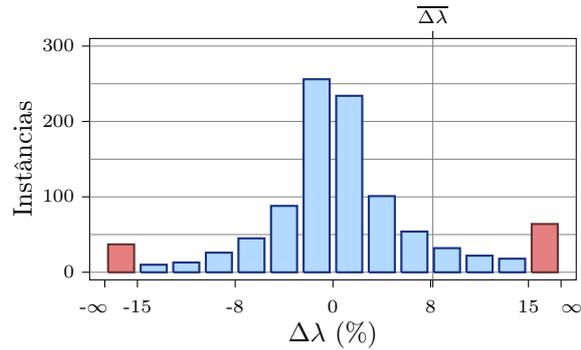
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	2	
Compr. barra ( $c$ )	106 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$1.53 \cdot 10^3$ mm	108%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	$4.73 \cdot 10^4$ mm	$3.33 \cdot 10^3\%$
$RMS_\lambda$	$1.49 \cdot 10^6$ mm	
$\overline{\Delta c}$	0.379 mm	0.358%
$\sigma_{\Delta c}$	5.4 mm	5.09%
$RMS_c$	$1.49 \cdot 10^6$ mm	
$RMS_\gamma$	$1.56 \cdot 10^3$ mm	



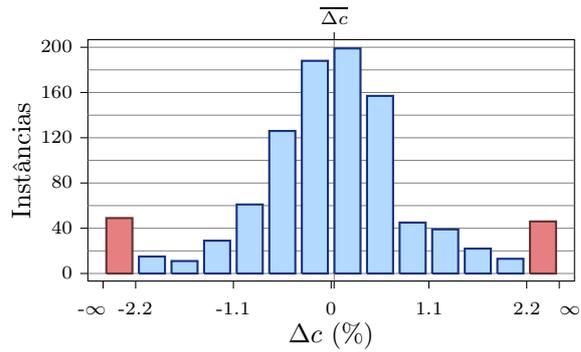
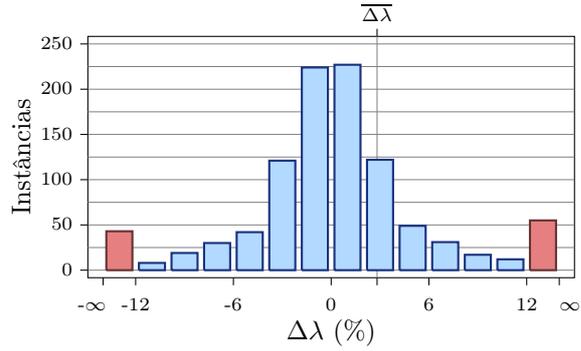
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	2	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	63.4 mm	4.47%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	789 mm	55.6%
$RMS_\lambda$	$2.5 \cdot 10^4$ mm	
$\overline{\Delta c}$	0.306 mm	0.204%
$\sigma_{\Delta c}$	4.78 mm	3.19%
$RMS_c$	$2.5 \cdot 10^4$ mm	
$RMS_\gamma$	$1.14 \cdot 10^3$ mm	



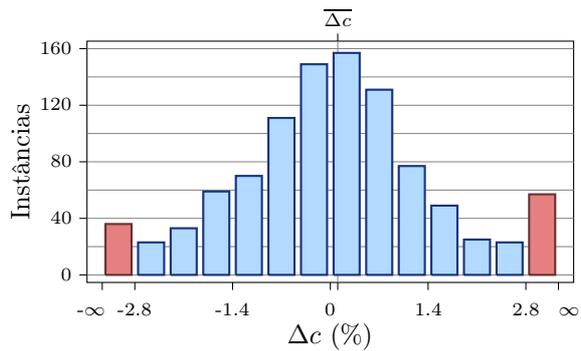
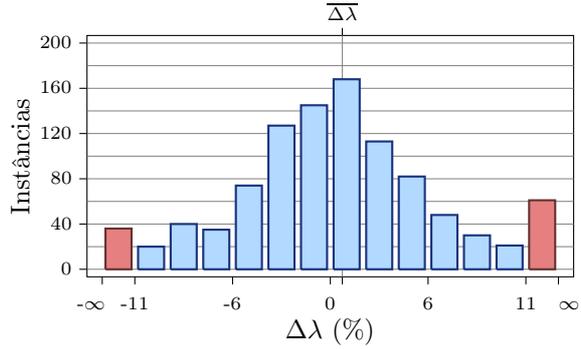
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	2	
Compr. barra ( $c$ )	212 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	109 mm	7.67%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	$2.69 \cdot 10^3$ mm	190%
$RMS_\lambda$	$8.52 \cdot 10^4$ mm	
$\overline{\Delta c}$	0.231 mm	0.109%
$\sigma_{\Delta c}$	6.04 mm	2.85%
$RMS_c$	$8.52 \cdot 10^4$ mm	
$RMS_\gamma$	$1.07 \cdot 10^3$ mm	



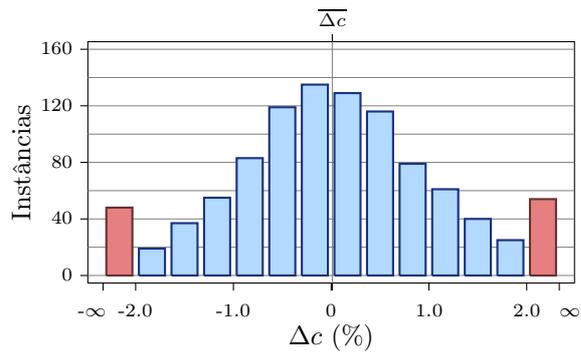
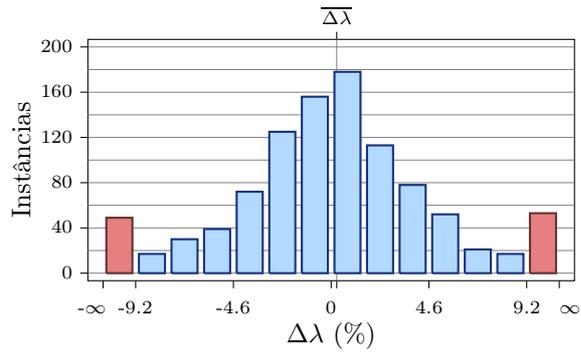
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	2	
Compr. barra ( $c$ )	300 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	39.9 mm	2.82%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	831 mm	58.6%
$RMS_\lambda$	$2.63 \cdot 10^4$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$9.93 \cdot 10^{-2}$ mm	$3.31 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	7.35 mm	2.45%
$RMS_c$	$2.63 \cdot 10^4$ mm	
$RMS_\gamma$	$1.05 \cdot 10^3$ mm	



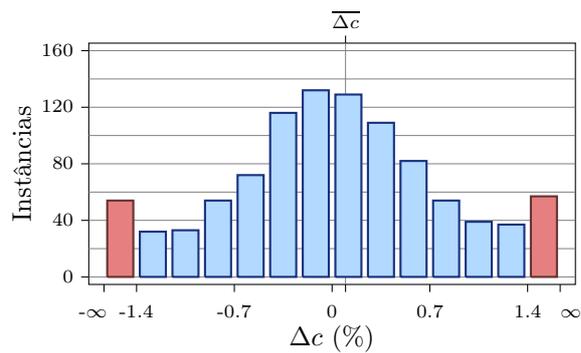
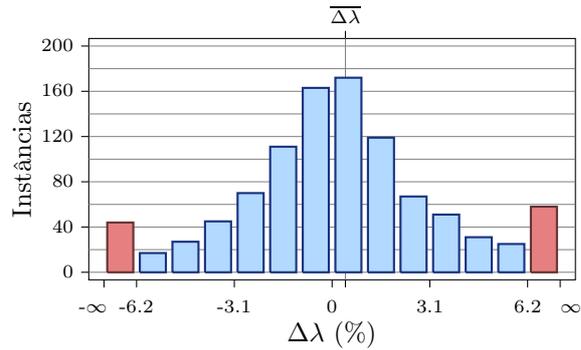
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	3	
Compr. barra ( $c$ )	75 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	9.56 mm	0.674%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	116 mm	8.2%
$RMS_\lambda$	$3.69 \cdot 10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$7.95 \cdot 10^{-2}$ mm	0.106%
$\sigma_{\Delta c}$	1.53 mm	2.03%
$RMS_c$	$3.69 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	732 mm	



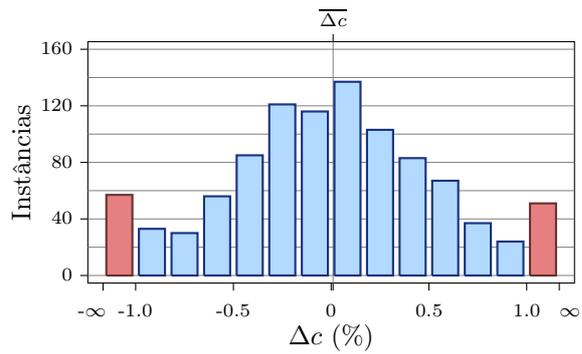
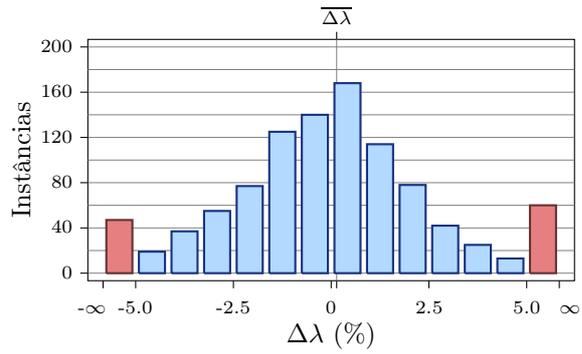
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	3	
Compr. barra ( $c$ )	106 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	3.7 mm	0.261%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	103 mm	7.25%
$RMS_\lambda$	$3.25 \cdot 10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$1.18 \cdot 10^{-2}$ mm	$1.11 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	1.72 mm	1.63%
$RMS_c$	$3.25 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	741 mm	



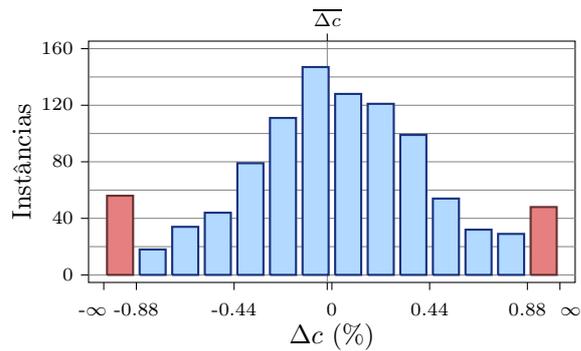
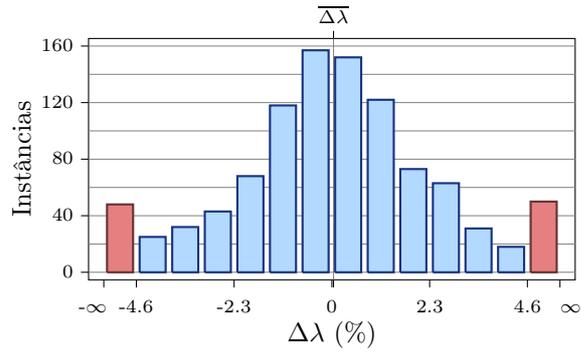
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	3	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	5.99 mm	0.422%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	85.4 mm	6.02%
$RMS_\lambda$	$2.71 \cdot 10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	0.145 mm	$9.64 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	2.94 mm	1.96%
$RMS_c$	$2.71 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	500 mm	



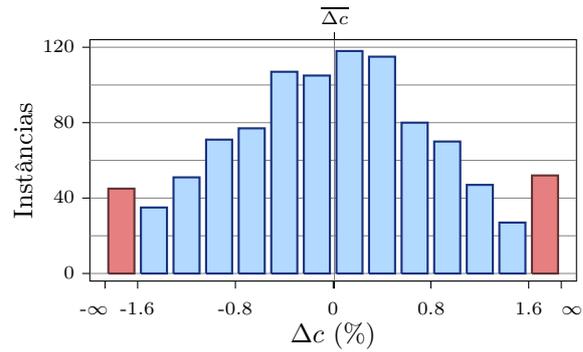
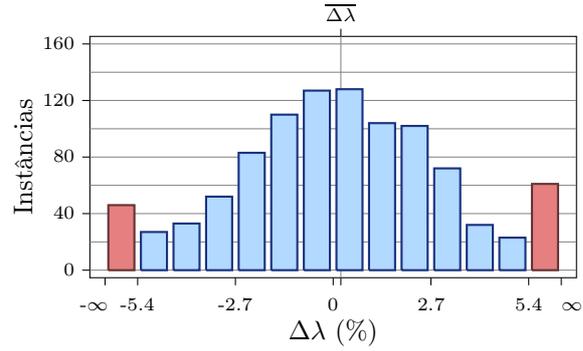
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	3	
Compr. barra ( $c$ )	212 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	1.99 mm	0.14%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	67.5 mm	4.76%
$RMS_\lambda$	2.13 $10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	2.06 $10^{-2}$ mm	9.69 $10^{-3}$ %
$\sigma_{\Delta c}$	1.81 mm	0.852%
$RMS_c$	2.13 $10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	366 mm	



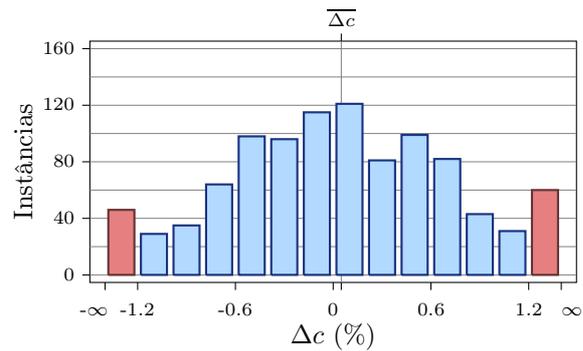
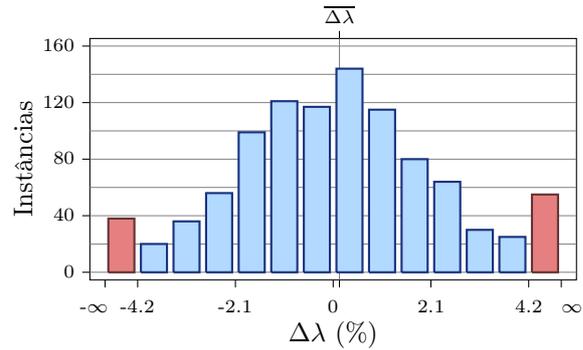
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	3	
Compr. barra ( $c$ )	300 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.551 mm	3.89 $10^{-2}$ %
$\sigma_{\Delta\lambda}$	50.4 mm	3.56%
$RMS_\lambda$	1.59 $10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	-6.26 $10^{-2}$ mm	-2.09 $10^{-2}$ %
$\sigma_{\Delta c}$	2.1 mm	0.699%
$RMS_c$	1.59 $10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	330 mm	



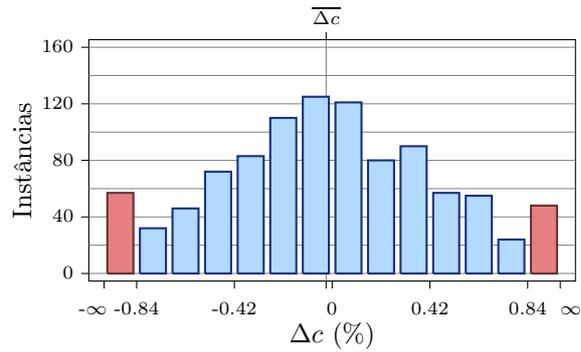
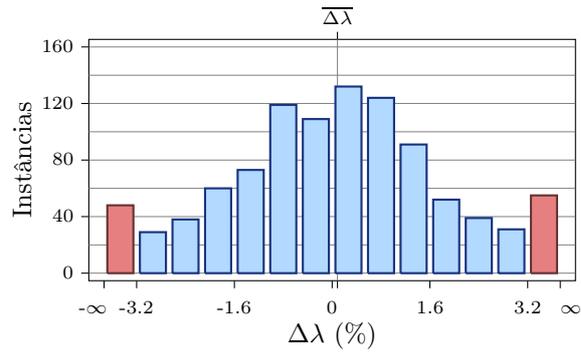
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	5	
Compr. barra ( $c$ )	75 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	3 mm	0.212%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	51.7 mm	3.65%
$RMS_\lambda$	1.64 $10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	7.48 $10^{-3}$ mm	9.98 $10^{-3}$ %
$\sigma_{\Delta c}$	0.776 mm	1.03%
$RMS_c$	1.64 $10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	345 mm	



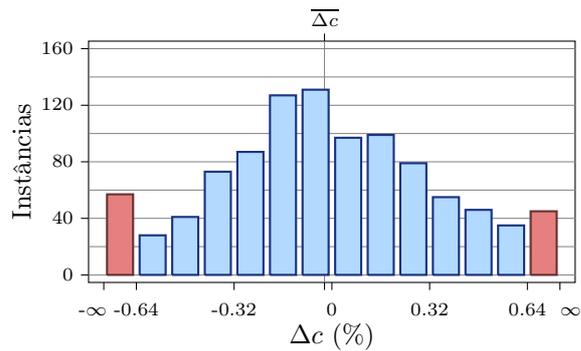
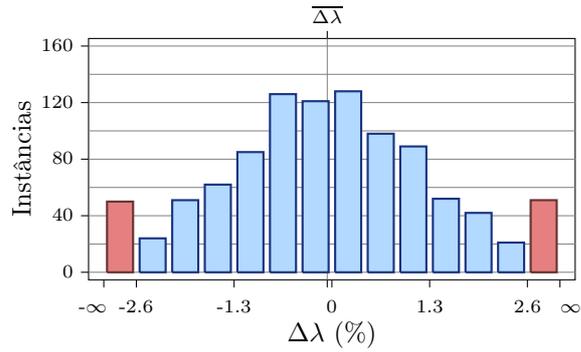
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	5	
Compr. barra ( $c$ )	106 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	1.91 mm	0.135%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	39.7 mm	2.8%
$RMS_\lambda$	1.26 $10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	5.27 $10^{-2}$ mm	4.97 $10^{-2}$ %
$\sigma_{\Delta c}$	0.841 mm	0.793%
$RMS_c$	1.26 $10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	252 mm	



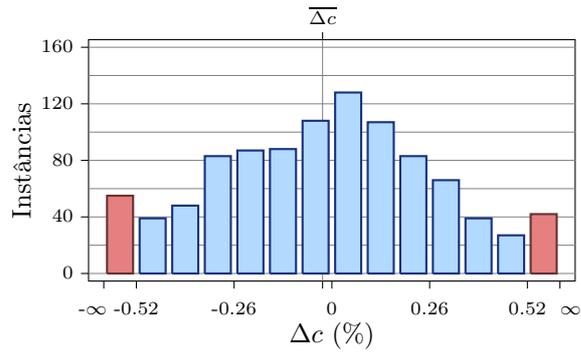
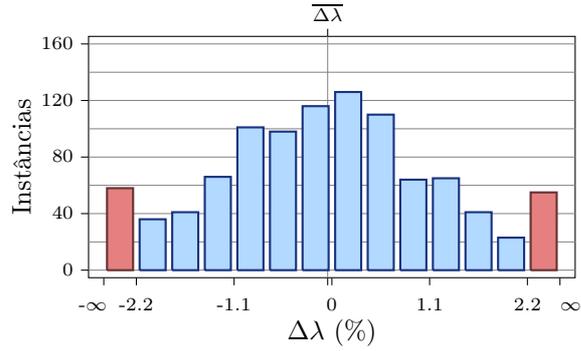
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	5	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	1.23 mm	$8.67 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	31 mm	2.18%
$RMS_\lambda$	979 mm	
$\overline{\Delta c}$	$-3.9 \cdot 10^{-2}$ mm	$-2.6 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.827 mm	0.551%
$RMS_c$	979 mm	
$RMS_\gamma$	193 mm	



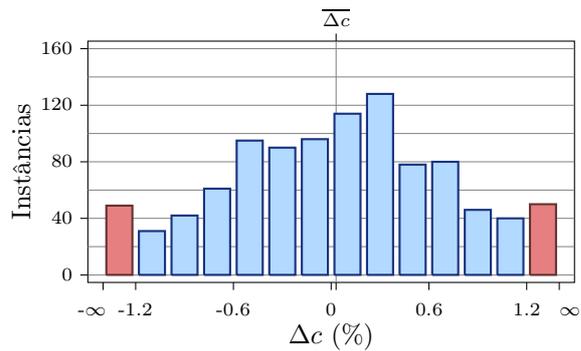
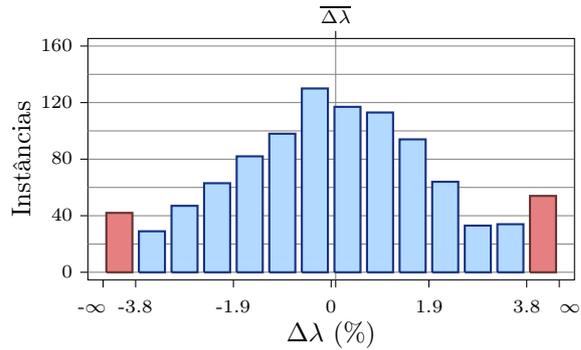
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	5	
Compr. barra ( $c$ )	212 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.873 mm	$-6.16 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	23.9 mm	1.68%
$RMS_\lambda$	755 mm	
$\overline{\Delta c}$	$-5.13 \cdot 10^{-2}$ mm	$-2.42 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.84 mm	0.396%
$RMS_c$	755 mm	
$RMS_\gamma$	153 mm	



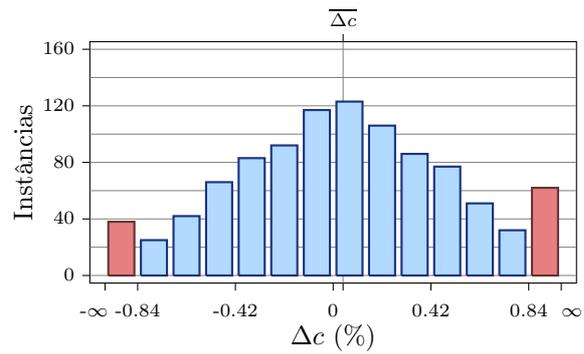
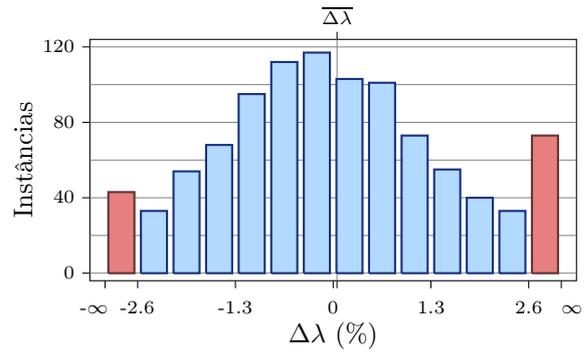
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	5	
Compr. barra ( $c$ )	300 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.669 mm	$-4.72 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	23 mm	1.62%
$RMS_\lambda$	728 mm	
$\overline{\Delta c}$	$-7.41 \cdot 10^{-2}$ mm	$-2.47 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	1.07 mm	0.356%
$RMS_c$	728 mm	
$RMS_\gamma$	152 mm	



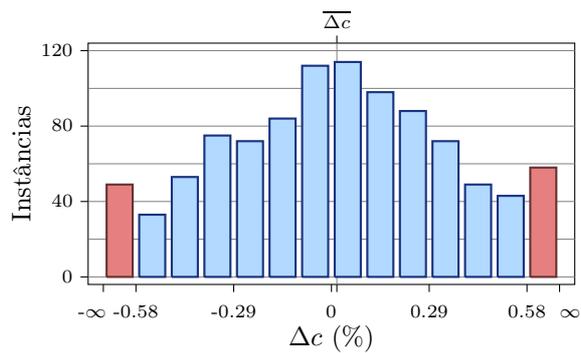
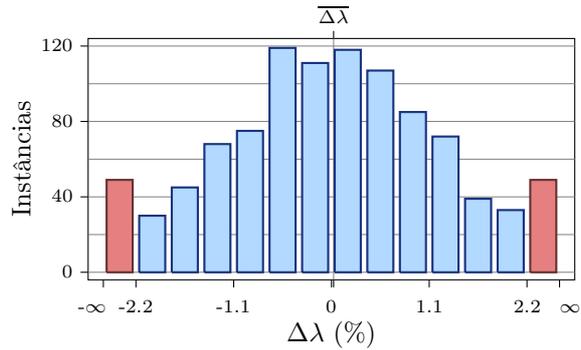
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	8	
Compr. barra ( $c$ )	75 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	1.24 mm	$8.77 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	34.4 mm	2.43%
$RMS_\lambda$	$1.09 \cdot 10^3$ mm	
$\overline{\Delta c}$	$2.26 \cdot 10^{-2}$ mm	$3.01 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.575 mm	0.766%
$RMS_c$	$1.09 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_\gamma$	236 mm	



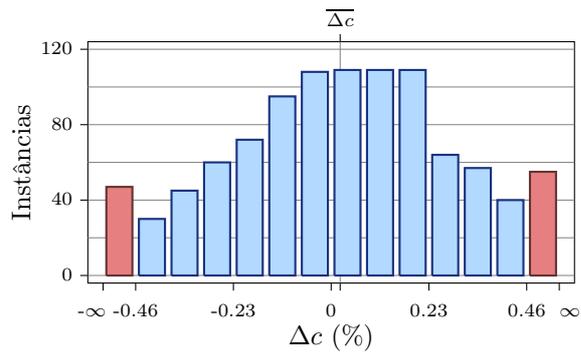
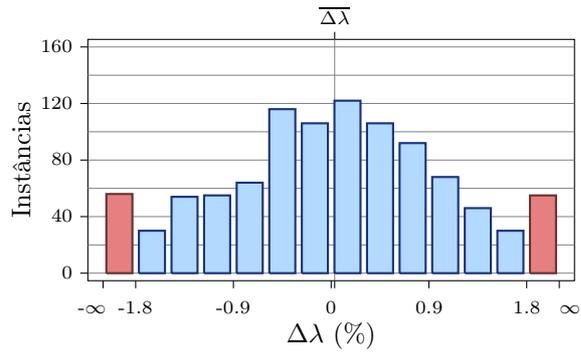
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	8	
Compr. barra ( $c$ )	106 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.724 mm	$5.11 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	24.9 mm	1.76%
$RMS_\lambda$	789 mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.52 \cdot 10^{-2}$ mm	$4.26 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.536 mm	0.505%
$RMS_c$	789 mm	
$RMS_\gamma$	166 mm	



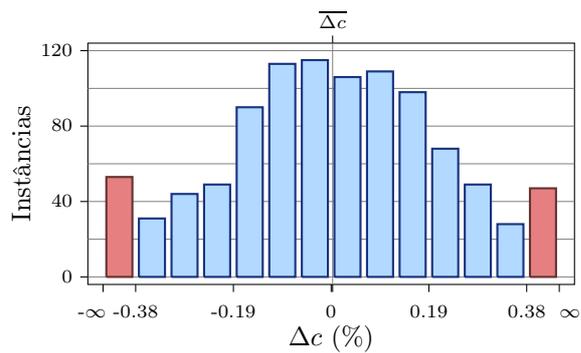
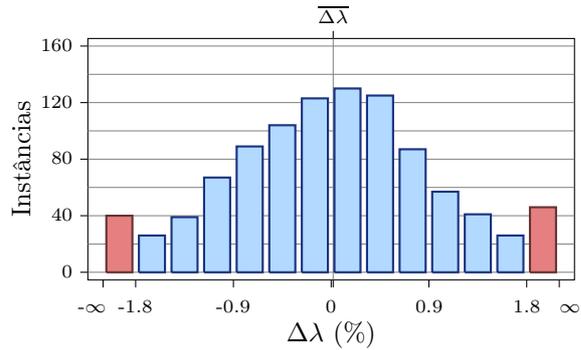
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	8	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.343 mm	$2.42 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	21.4 mm	1.51%
$RMS_\lambda$	677 mm	
$\overline{\Delta c}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$ mm	$1.6 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.572 mm	0.381%
$RMS_c$	677 mm	
$RMS_\gamma$	139 mm	



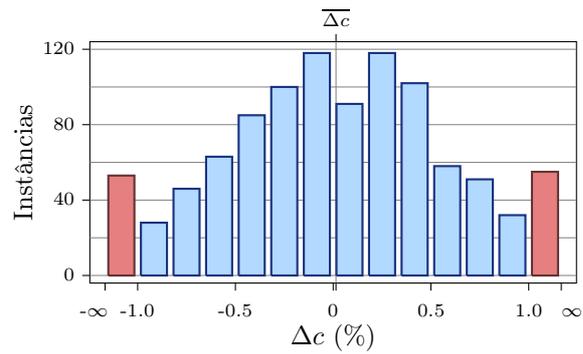
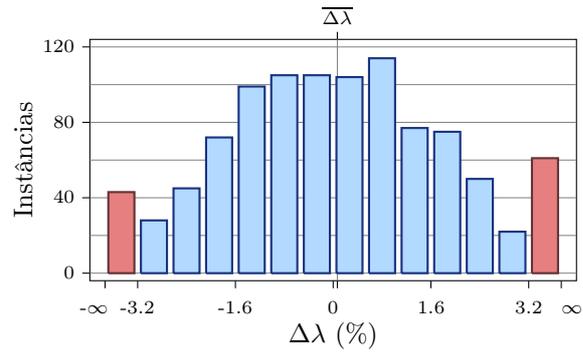
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	8	
Compr. barra ( $c$ )	212 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.456 mm	$3.22 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	16.8 mm	1.18%
$RMS_\lambda$	530 mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.48 \cdot 10^{-2}$ mm	$2.11 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.618 mm	0.291%
$RMS_c$	530 mm	
$RMS_\gamma$	110 mm	



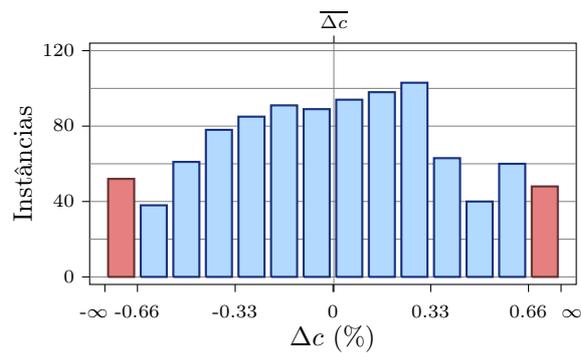
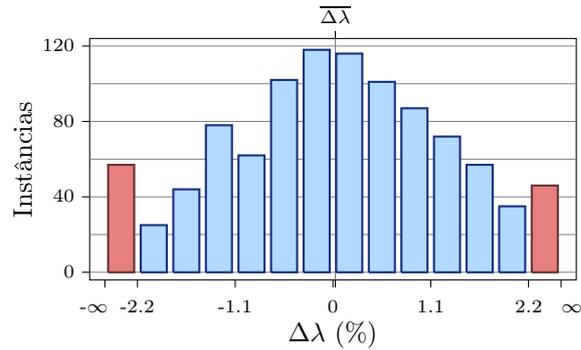
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	8	
Compr. barra ( $c$ )	300 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.26 mm	$1.84 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	14.7 mm	1.04%
$RMS_\lambda$	465 mm	
$\overline{\Delta c}$	$8.54 \cdot 10^{-3}$ mm	$2.85 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.7 mm	0.233%
$RMS_c$	465 mm	
$RMS_\gamma$	96.4 mm	



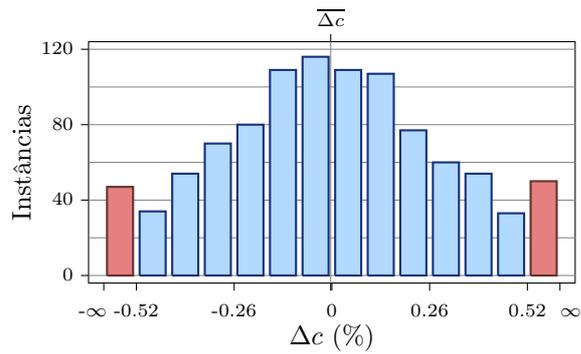
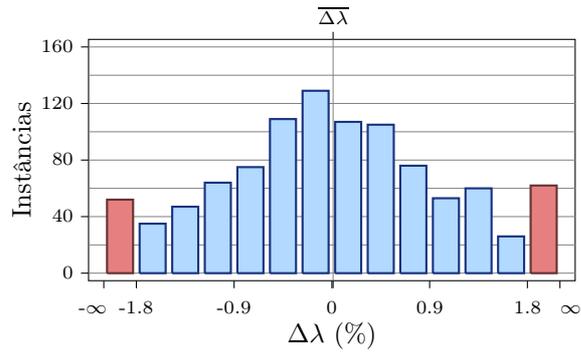
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	10
Compr. barra ( $c$ )	75 mm
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	0.965 mm $6.8 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	28.5 mm 2.01%
$RMS_\lambda$	901 mm
$\overline{\Delta c}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$ mm $1.44 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.457 mm 0.61%
$RMS_c$	901 mm
$RMS_\gamma$	194 mm



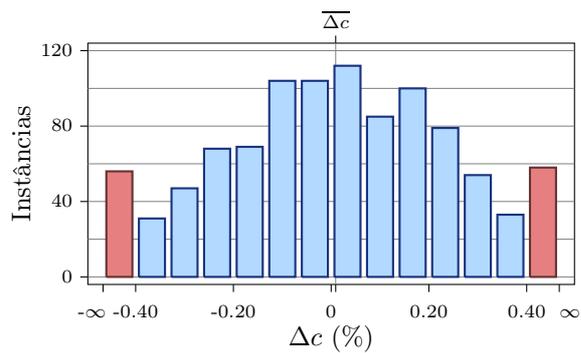
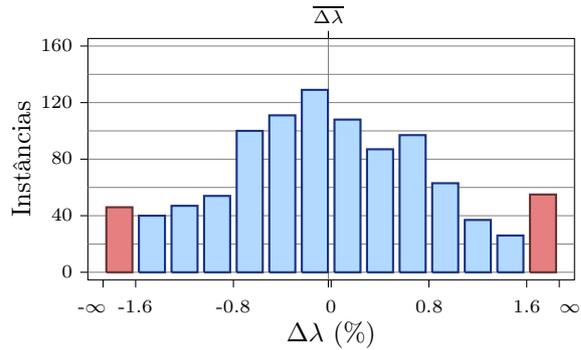
Parâmetros dos testes	
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px
Ocorrências ( $K$ )	10
Compr. barra ( $c$ )	106 mm
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	0.368 mm $2.6 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	19.7 mm 1.39%
$RMS_\lambda$	623 mm
$\overline{\Delta c}$	$3.08 \cdot 10^{-3}$ mm $2.9 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.453 mm 0.428%
$RMS_c$	623 mm
$RMS_\gamma$	136 mm



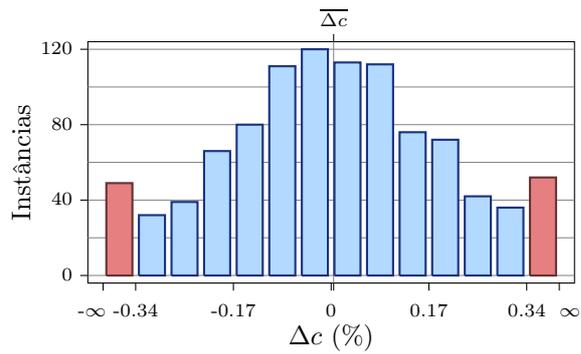
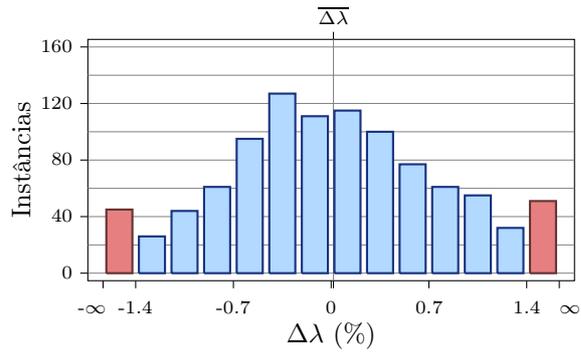
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	10	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.159 mm	$1.12 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	16.5 mm	1.16%
$RMS_\lambda$	522 mm	
$\overline{\Delta c}$	$-4.63 \cdot 10^{-3}$ mm	$-3.08 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.481 mm	0.321%
$RMS_c$	522 mm	
$RMS_\gamma$	110 mm	



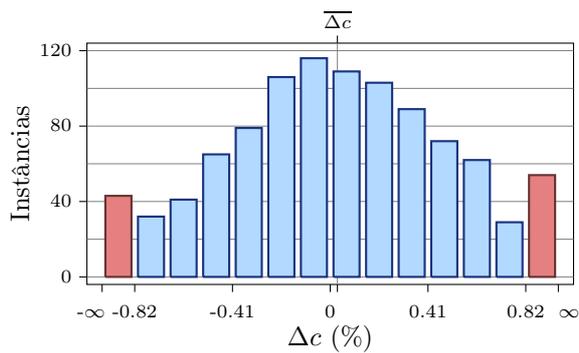
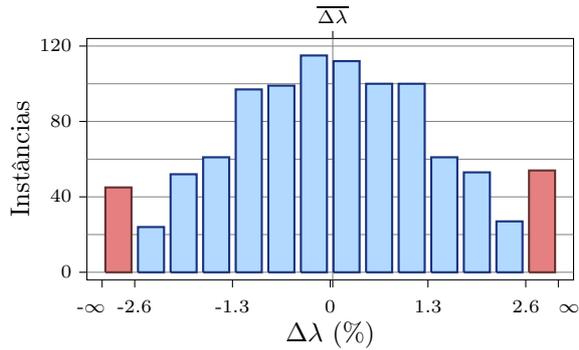
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	10	
Compr. barra ( $c$ )	212 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.329 mm	$-2.32 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	13.6 mm	0.96%
$RMS_\lambda$	430 mm	
$\overline{\Delta c}$	$1.96 \cdot 10^{-2}$ mm	$9.24 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.525 mm	0.247%
$RMS_c$	430 mm	
$RMS_\gamma$	92.8 mm	



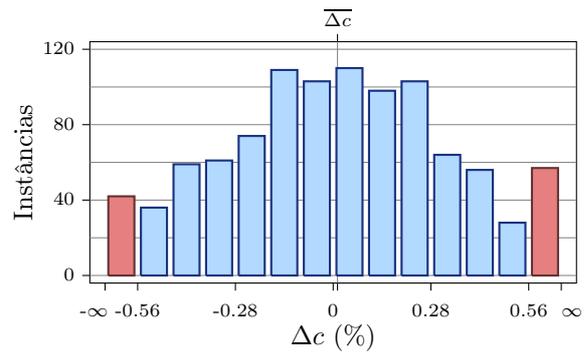
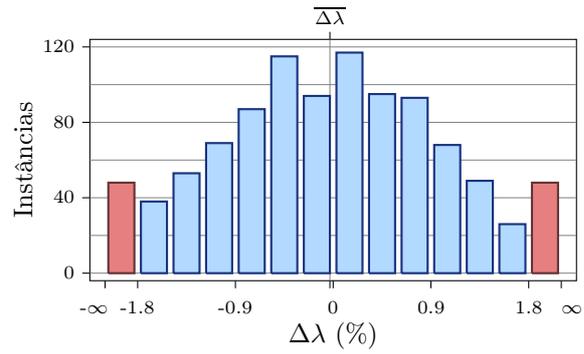
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	10	
Compr. barra ( $c$ )	300 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.231 mm	$1.63 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	12.2 mm	0.861%
$RMS_\lambda$	386 mm	
$\overline{\Delta c}$	$1.28 \cdot 10^{-2}$ mm	$4.27 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.61 mm	0.203%
$RMS_c$	386 mm	
$RMS_\gamma$	83 mm	



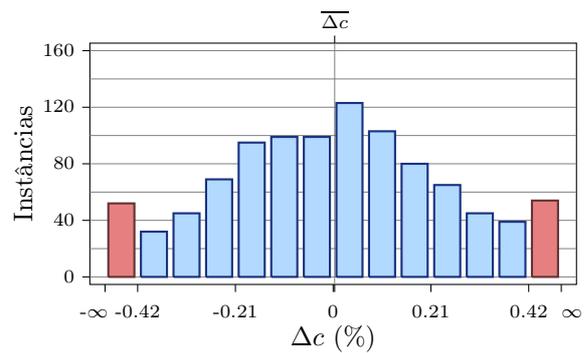
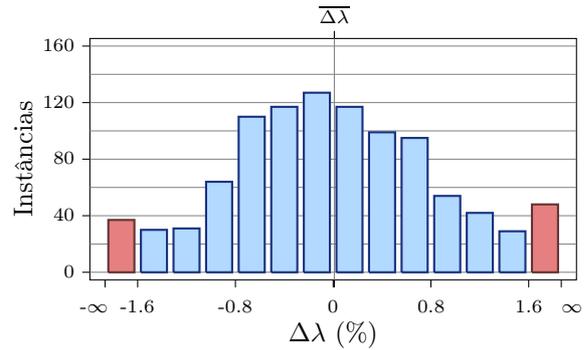
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	15	
Compr. barra ( $c$ )	75 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.473 mm	$3.34 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	22.4 mm	1.58%
$RMS_\lambda$	707 mm	
$\overline{\Delta c}$	$2.25 \cdot 10^{-2}$ mm	$3 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.366 mm	0.488%
$RMS_c$	707 mm	
$RMS_\gamma$	155 mm	



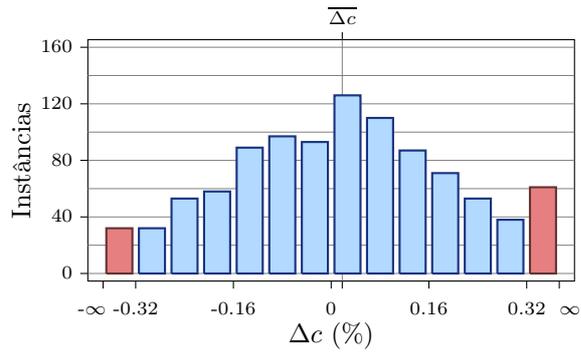
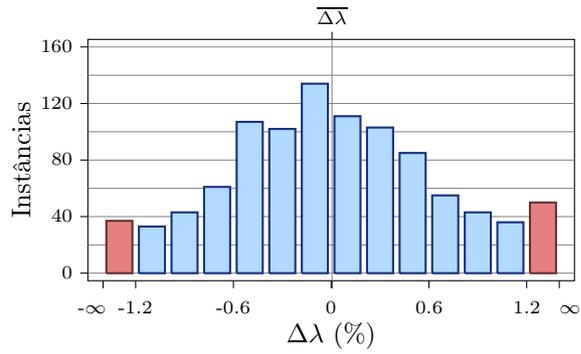
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	15	
Compr. barra ( $c$ )	106 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.428 mm	$-3.02 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	16.1 mm	1.14%
$RMS_\lambda$	509 mm	
$\overline{\Delta c}$	$1.31 \cdot 10^{-2}$ mm	$1.24 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.36 mm	0.34%
$RMS_c$	509 mm	
$RMS_\gamma$	114 mm	



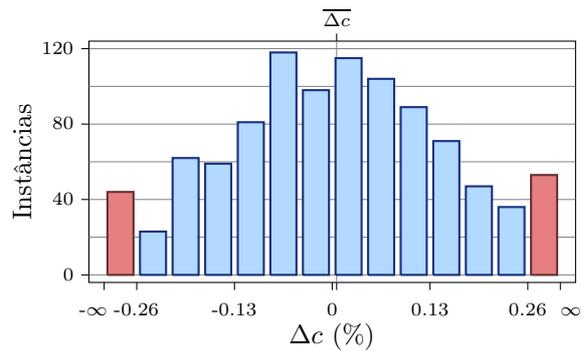
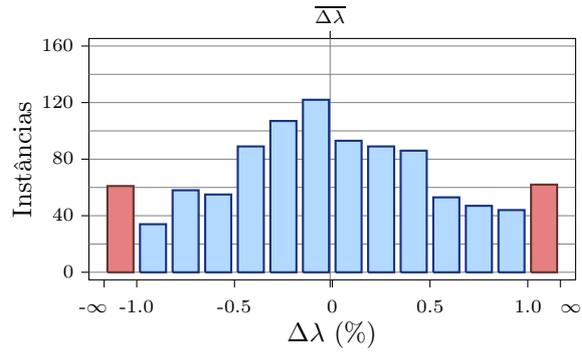
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	15	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.132 mm	$9.28 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	13.3 mm	0.939%
$RMS_\lambda$	421 mm	
$\overline{\Delta c}$	$4.85 \cdot 10^{-3}$ mm	$3.23 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.396 mm	0.264%
$RMS_c$	421 mm	
$RMS_\gamma$	91.4 mm	



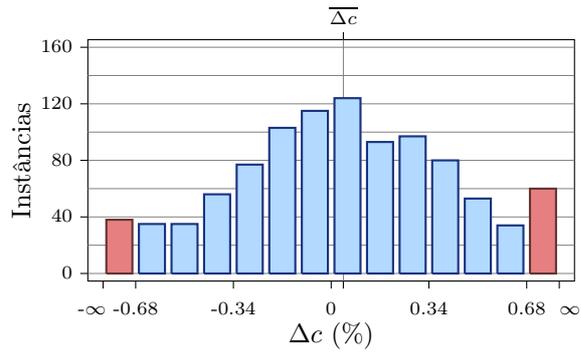
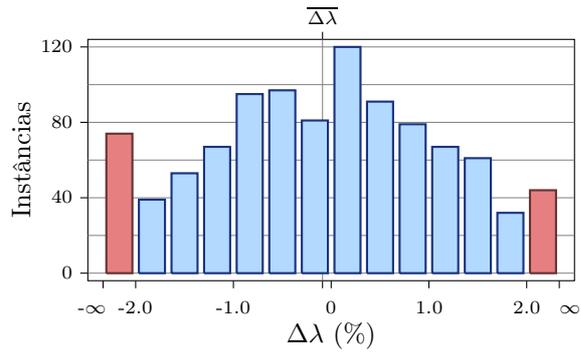
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	15	
Compr. barra ( $c$ )	212 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$7 \cdot 10^{-2}$ mm	$4.93 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	10.1 mm	0.709%
$RMS_\lambda$	318 mm	
$\overline{\Delta c}$	$3.85 \cdot 10^{-2}$ mm	$1.81 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.406 mm	0.191%
$RMS_c$	318 mm	
$RMS_\gamma$	73.3 mm	



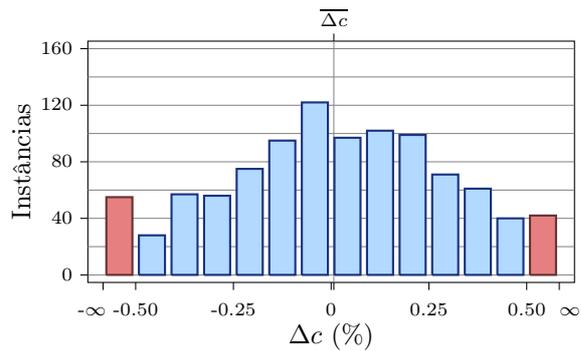
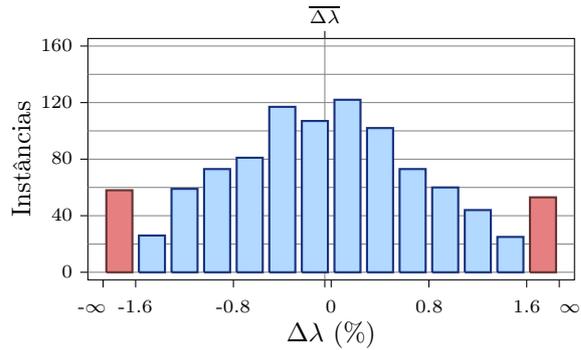
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	15	
Compr. barra ( $c$ )	300 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.158 mm	$-1.11 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	9.46 mm	0.667%
$RMS_\lambda$	299 mm	
$\overline{\Delta c}$	$1.74 \cdot 10^{-2}$ mm	$5.8 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.475 mm	0.158%
$RMS_c$	299 mm	
$RMS_\gamma$	66.7 mm	



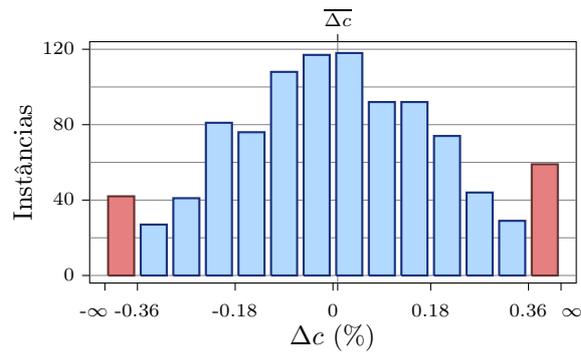
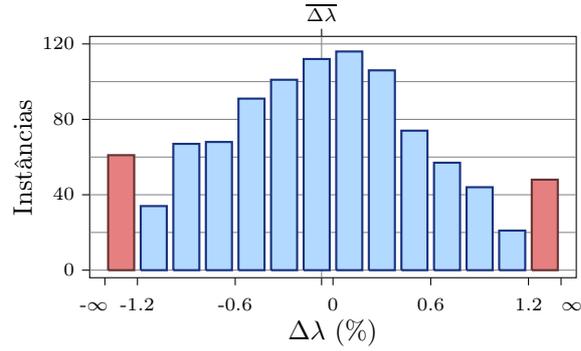
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	20	
Compr. barra ( $c$ )	75 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-1.25 mm	$-8.83 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	18.7 mm	1.32%
$RMS_\lambda$	593 mm	
$\overline{\Delta c}$	$3.18 \cdot 10^{-2}$ mm	$4.24 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.305 mm	0.407%
$RMS_c$	593 mm	
$RMS_\gamma$	131 mm	



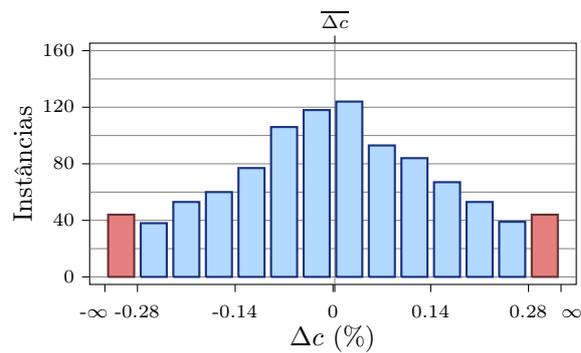
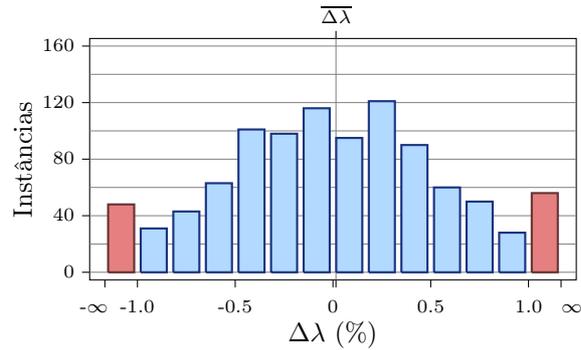
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	20	
Compr. barra ( $c$ )	106 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.74 mm	$-5.22 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	13.8 mm	0.97%
$RMS_\lambda$	435 mm	
$\overline{\Delta c}$	$7.15 \cdot 10^{-3}$ mm	$6.74 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.327 mm	0.309%
$RMS_c$	435 mm	
$RMS_\gamma$	96.1 mm	



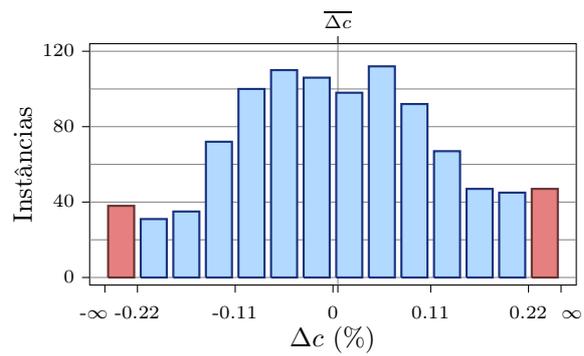
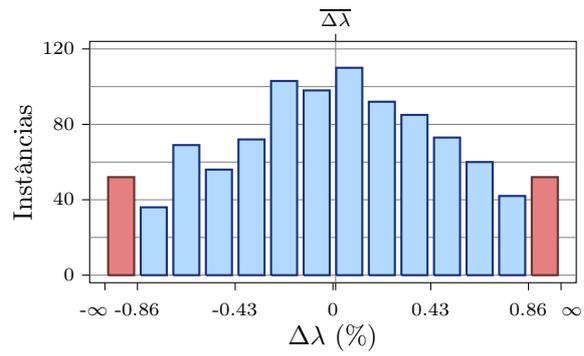
Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	20	
Compr. barra ( $c$ )	150 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.99 mm	$-6.99 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	10.5 mm	0.738%
$RMS_\lambda$	332 mm	
$\overline{\Delta c}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$ mm	$8.67 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.322 mm	0.215%
$RMS_c$	332 mm	
$RMS_\gamma$	76.7 mm	



Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	20	
Compr. barra ( $c$ )	212 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.216 mm	$1.52 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	8.62 mm	0.608%
$RMS_\lambda$	272 mm	
$\overline{\Delta c}$	$5.51 \cdot 10^{-3}$ mm	$2.6 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.347 mm	0.164%
$RMS_c$	272 mm	
$RMS_\gamma$	64 mm	



Parâmetros dos testes		
Ruído ( $\sigma_N$ )	1 px	
Ocorrências ( $K$ )	20	
Compr. barra ( $c$ )	300 mm	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.167 mm	$1.18 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	7.77 mm	0.548%
$RMS_\lambda$	246 mm	
$\overline{\Delta c}$	$1.65 \cdot 10^{-2}$ mm	$5.5 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta c}$	0.387 mm	0.129%
$RMS_c$	246 mm	
$RMS_\gamma$	58.3 mm	



### C.3 Simulações sobre a variação na riqueza da descrição de entrada

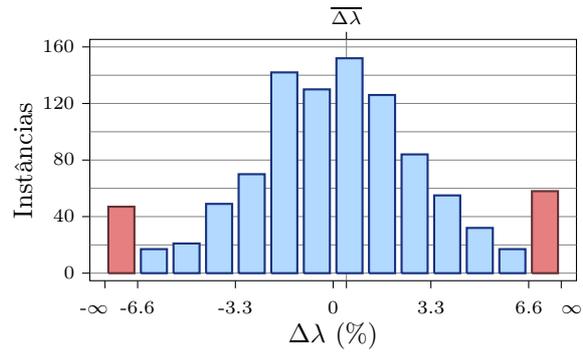
Estes experimentos correspondem ao terceiro grupo de simulações tridimensionais, cujo objetivo é verificar a variação na qualidade dos resultados pelo uso de níveis mais ou menos ricos de descrição da cena.

Este grupo de simulações é apresentado na Subseção 4.3.1. Os parâmetros das simulações estão expostos na Tabela 4.8.

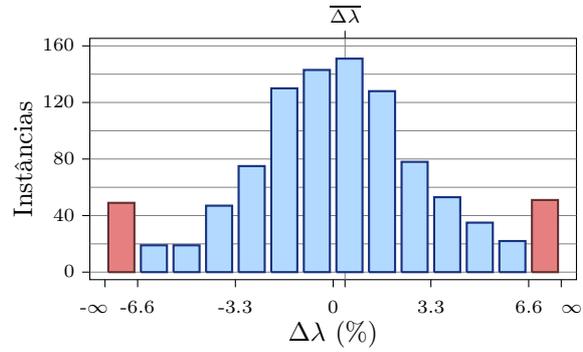
Os resultados apresentados nas páginas seguintes são agrupados pelo número de ocorrências por cadeia ( $Q$ ), pelo número de cadeias ( $F$ ) e pelo modelo de ocorrências em cadeia, conforme a descrição na Subseção 4.3.3, que pode ser “B.D”, “B.C.” ou “O.C.”. Para facilitar a consulta aos resultados, o índice abaixo indica o intervalo de páginas correspondente a cada combinação dos valores de  $Q$  e  $F$ :

$Q = 2, F = 2$ .....	págs. 188–189
$Q = 2, F = 5$ .....	págs. 189–190
$Q = 2, F = 10$ .....	págs. 191–192
$Q = 2, F = 20$ .....	págs. 192–193
$Q = 4, F = 2$ .....	págs. 194–195
$Q = 4, F = 5$ .....	págs. 195–196
$Q = 4, F = 10$ .....	págs. 197–198
$Q = 4, F = 20$ .....	págs. 198–199
$Q = 8, F = 2$ .....	págs. 200–201
$Q = 8, F = 5$ .....	págs. 201–202
$Q = 8, F = 10$ .....	págs. 203–204
$Q = 8, F = 20$ .....	págs. 204–205
$Q = 16, F = 2$ .....	págs. 206–207
$Q = 16, F = 5$ .....	págs. 207–208
$Q = 16, F = 10$ .....	págs. 209–210
$Q = 16, F = 20$ .....	págs. 210–211

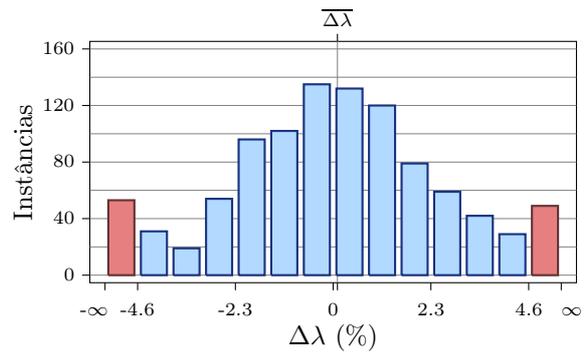
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	2	
Nº de barras ( $Q$ )	2	
Modelo	B.D.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	6.35 mm	0.448%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	96.6 mm	6.81%
$RMS_{\lambda}$	$3.06 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_c$	$3.06 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_{\gamma}$	551 mm	



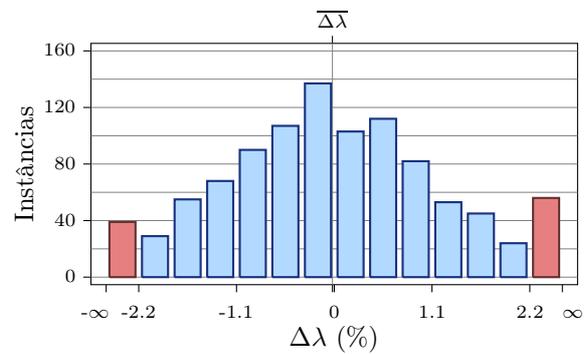
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	2	
Nº de barras ( $Q$ )	2	
Modelo	B.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	5.66 mm	0.399%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	95.4 mm	6.73%
$RMS_{\lambda}$	$3.02 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_c$	$3.02 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_{\gamma}$	546 mm	



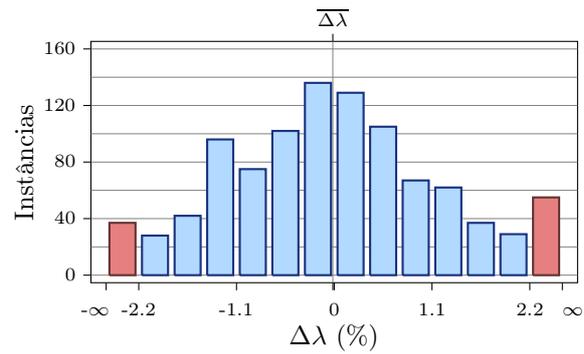
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	2	
Nº de barras ( $Q$ )	2	
Modelo	O.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	1.43 mm	0.101%
$\sigma_{\Delta\lambda}$	48.5 mm	3.42%
$RMS_{\lambda}$	$1.53 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_c$	$1.53 \cdot 10^3$ mm	
$RMS_{\gamma}$	293 mm	



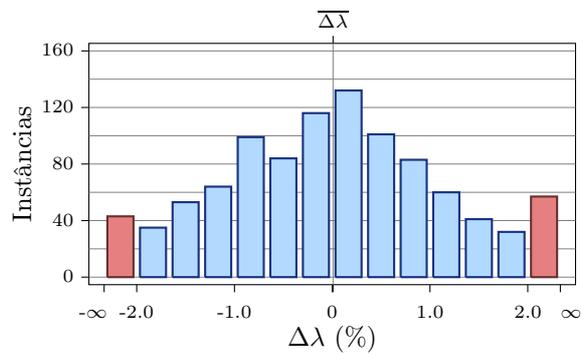
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	5	
Nº de barras ( $Q$ )	2	
Modelo	B.D.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.292 mm	$-2.06 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	19 mm	1.34%
$RMS_{\lambda}$	600 mm	
$RMS_c$	600 mm	
$RMS_{\gamma}$	123 mm	



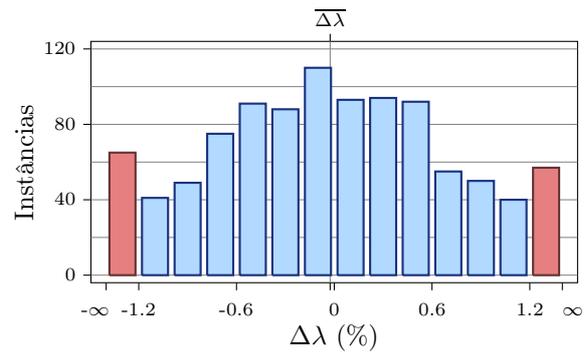
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	5	
Nº de barras ( $Q$ )	2	
Modelo	B.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.232 mm	$-1.64 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	18.7 mm	1.32%
$RMS_{\lambda}$	591 mm	
$RMS_c$	591 mm	
$RMS_{\gamma}$	122 mm	



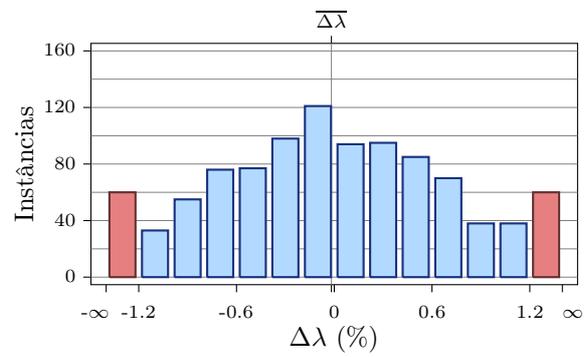
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	5	
Nº de barras ( $Q$ )	2	
Modelo	O.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.114 mm	$8.02 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	17.8 mm	1.26%
$RMS_{\lambda}$	563 mm	
$RMS_c$	563 mm	
$RMS_{\gamma}$	115 mm	



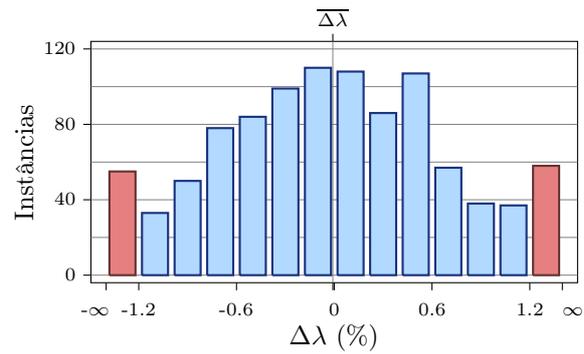
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	10
Nº de barras ( $Q$ )	2
Modelo	B.D.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.359 mm $-2.53 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	11.3 mm    0.796%
$RMS_{\lambda}$	357 mm
$RMS_c$	357 mm
$RMS_{\gamma}$	79.1 mm



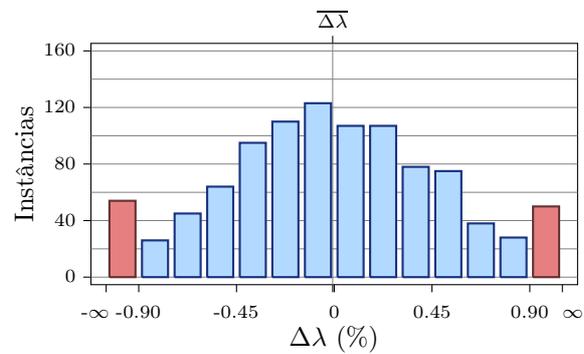
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	10
Nº de barras ( $Q$ )	2
Modelo	B.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.248 mm $-1.75 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	11.1 mm    0.784%
$RMS_{\lambda}$	351 mm
$RMS_c$	351 mm
$RMS_{\gamma}$	77.8 mm



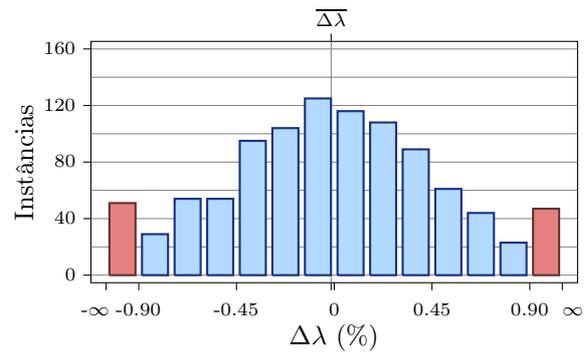
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	10
Nº de barras ( $Q$ )	2
Modelo	O.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.127 mm -8.98 $10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	10.7 mm 0.754%
$RMS_{\lambda}$	338 mm
$RMS_c$	338 mm
$RMS_{\gamma}$	75.1 mm



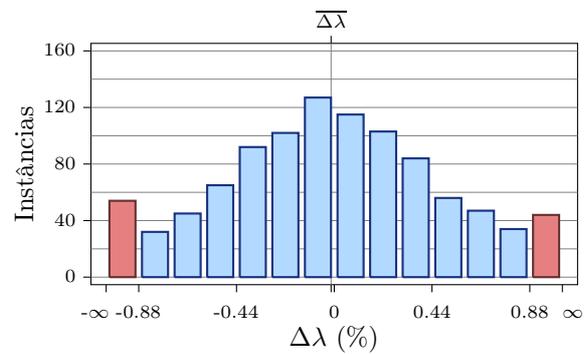
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	20
Nº de barras ( $Q$ )	2
Modelo	B.D.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.104 mm -7.32 $10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	7.67 mm 0.541%
$RMS_{\lambda}$	242 mm
$RMS_c$	242 mm
$RMS_{\gamma}$	59.8 mm



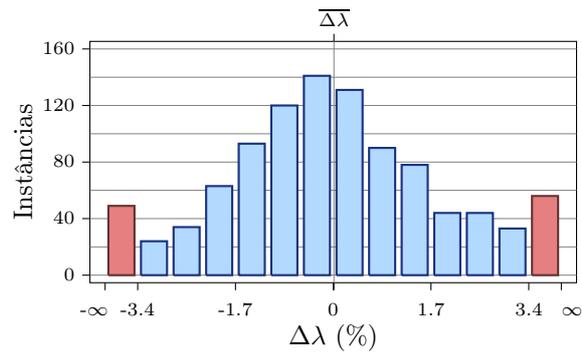
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	20	
Nº de barras ( $Q$ )	2	
Modelo	B.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.205 mm	$-1.44 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	7.5 mm	0.529%
$RMS_{\lambda}$	237 mm	
$RMS_c$	237 mm	
$RMS_{\gamma}$	58.7 mm	



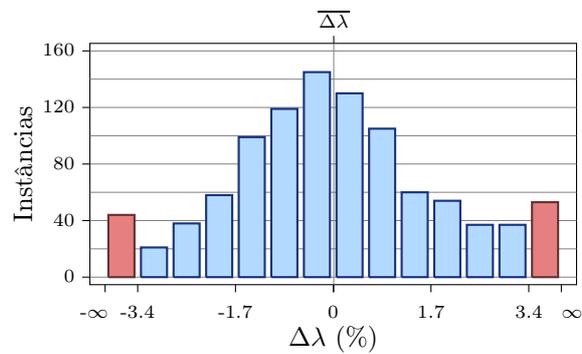
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	20	
Nº de barras ( $Q$ )	2	
Modelo	O.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.204 mm	$-1.44 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	7.45 mm	0.525%
$RMS_{\lambda}$	236 mm	
$RMS_c$	236 mm	
$RMS_{\gamma}$	58.2 mm	



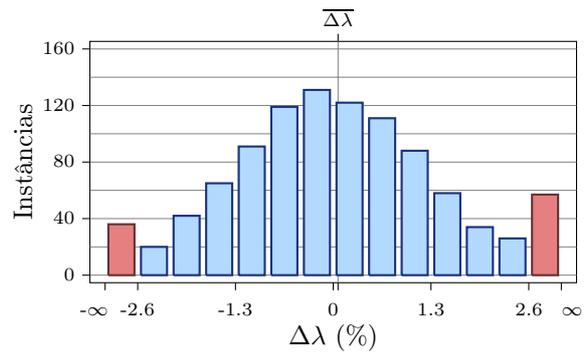
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	2
Nº de barras ( $Q$ )	4
Modelo	B.D.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	0.164 mm $1.16 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	31.5 mm    2.22%
$RMS_{\lambda}$	994 mm
$RMS_c$	994 mm
$RMS_{\gamma}$	198 mm



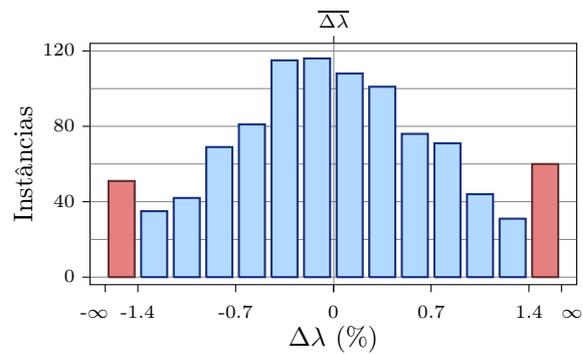
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	2
Nº de barras ( $Q$ )	4
Modelo	B.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	0.126 mm $8.89 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	30.8 mm    2.18%
$RMS_{\lambda}$	975 mm
$RMS_c$	975 mm
$RMS_{\gamma}$	195 mm



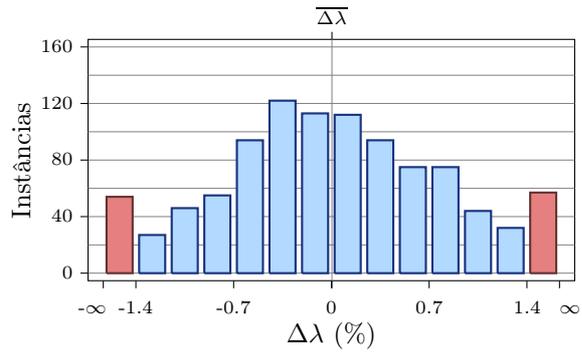
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	2
Nº de barras ( $Q$ )	4
Modelo	O.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	0.903 mm $6.37 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	22.3 mm    1.57%
$RMS_{\lambda}$	705 mm
$RMS_c$	705 mm
$RMS_{\gamma}$	129 mm



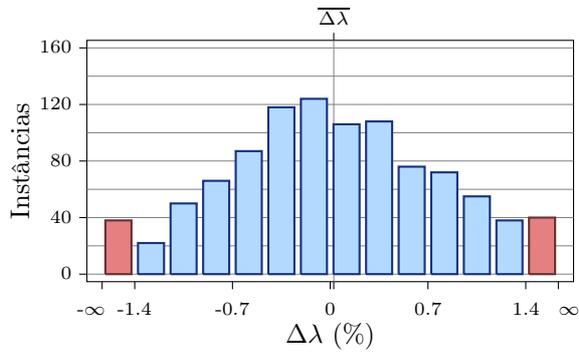
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	5
Nº de barras ( $Q$ )	4
Modelo	B.D.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	$3.96 \cdot 10^{-2}$ mm $2.79 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	12.2 mm    0.857%
$RMS_{\lambda}$	384 mm
$RMS_c$	384 mm
$RMS_{\gamma}$	83.1 mm



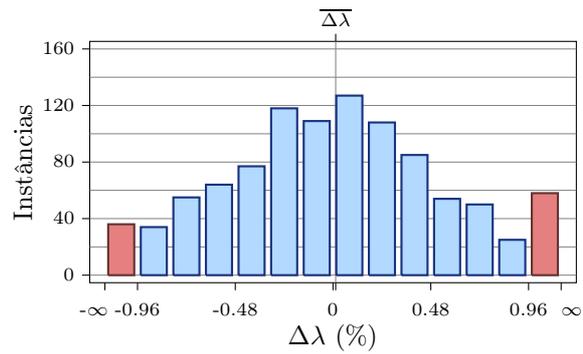
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	5	
Nº de barras ( $Q$ )	4	
Modelo	B.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	$5.43 \cdot 10^{-2}$ mm	$3.83 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	11.9 mm	0.842%
$RMS_{\lambda}$	377 mm	
$RMS_c$	377 mm	
$RMS_{\gamma}$	81.5 mm	



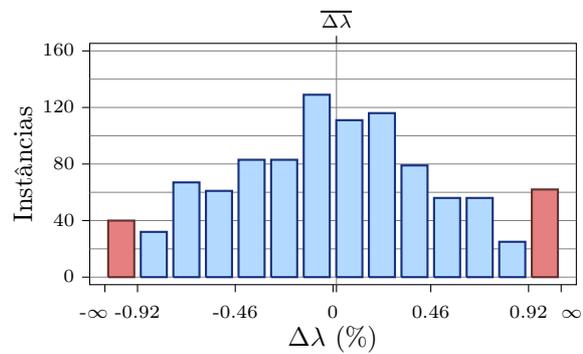
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	5	
Nº de barras ( $Q$ )	4	
Modelo	O.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.357 mm	$2.52 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	11.3 mm	0.798%
$RMS_{\lambda}$	358 mm	
$RMS_c$	358 mm	
$RMS_{\gamma}$	76.5 mm	



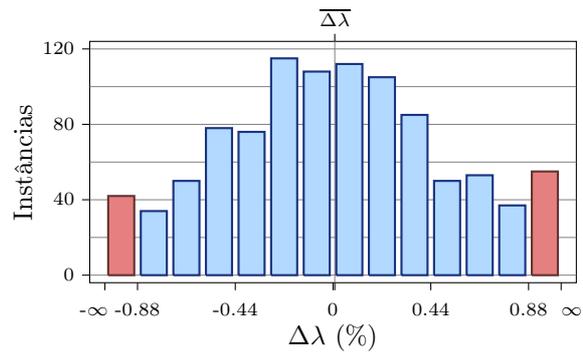
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	10	
Nº de barras ( $Q$ )	4	
Modelo	B.D.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.184 mm	$1.3 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	8.15 mm	0.575%
$RMS_{\lambda}$	258 mm	
$RMS_c$	258 mm	
$RMS_{\gamma}$	61.5 mm	



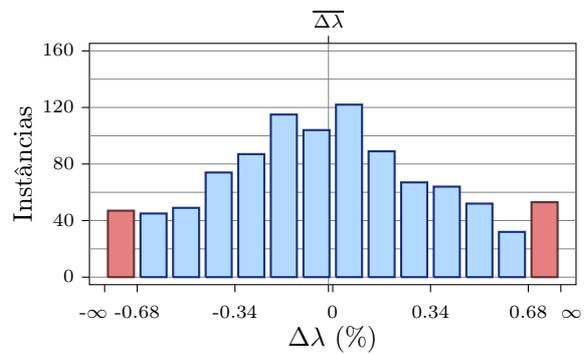
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	10	
Nº de barras ( $Q$ )	4	
Modelo	B.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.23 mm	$1.62 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	8 mm	0.565%
$RMS_{\lambda}$	253 mm	
$RMS_c$	253 mm	
$RMS_{\gamma}$	60 mm	



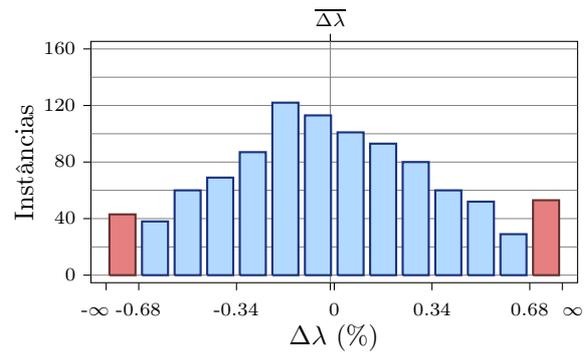
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	10	
Nº de barras ( $Q$ )	4	
Modelo	O.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.11 mm	$7.76 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	7.72 mm	0.545%
$RMS_{\lambda}$	244 mm	
$RMS_c$	244 mm	
$RMS_{\gamma}$	58.1 mm	



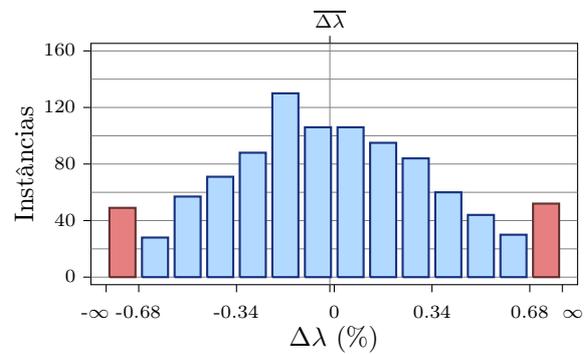
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	20	
Nº de barras ( $Q$ )	4	
Modelo	B.D.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.21 mm	$-1.48 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	5.78 mm	0.408%
$RMS_{\lambda}$	183 mm	
$RMS_c$	183 mm	
$RMS_{\gamma}$	50.5 mm	



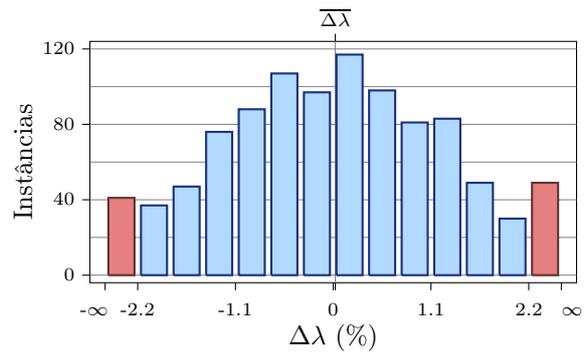
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	20	
Nº de barras ( $Q$ )	4	
Modelo	B.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.194 mm	$-1.37 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	5.7 mm	0.402%
$RMS_{\lambda}$	180 mm	
$RMS_c$	180 mm	
$RMS_{\gamma}$	48.8 mm	



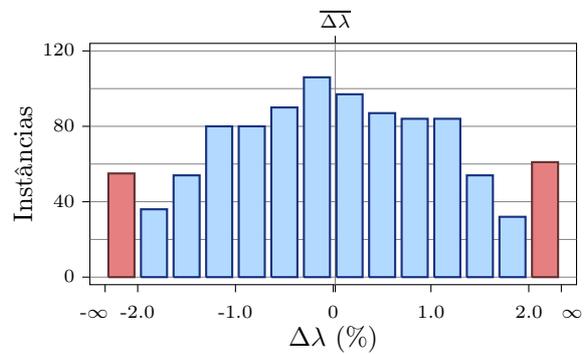
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	20	
Nº de barras ( $Q$ )	4	
Modelo	O.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.218 mm	$-1.54 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	5.63 mm	0.397%
$RMS_{\lambda}$	178 mm	
$RMS_c$	178 mm	
$RMS_{\gamma}$	48.3 mm	



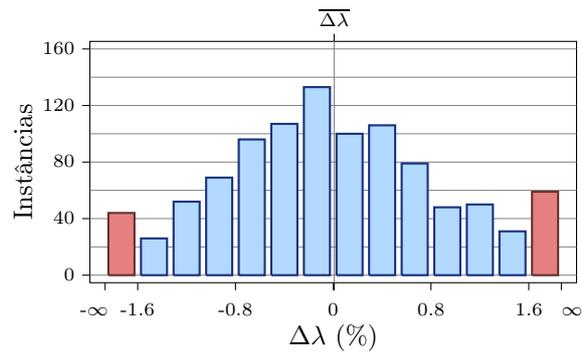
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	2
Nº de barras ( $Q$ )	8
Modelo	B.D.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	0.324 mm $2.29 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	19.2 mm    1.35%
$RMS_{\lambda}$	607 mm
$RMS_c$	607 mm
$RMS_{\gamma}$	126 mm



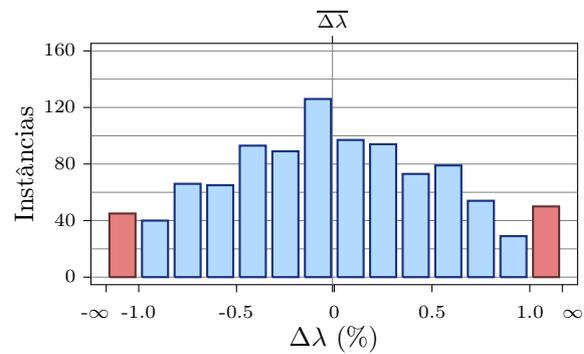
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	2
Nº de barras ( $Q$ )	8
Modelo	B.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	0.299 mm $2.11 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	18.8 mm    1.32%
$RMS_{\lambda}$	594 mm
$RMS_c$	594 mm
$RMS_{\gamma}$	123 mm



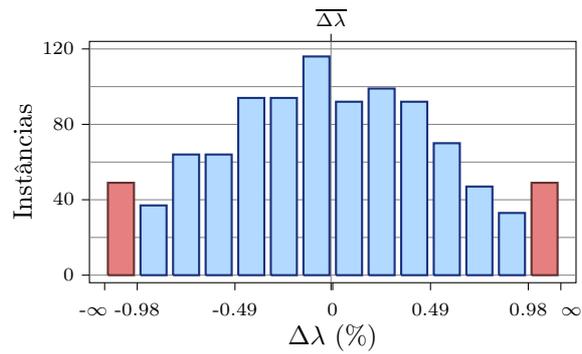
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	2
Nº de barras ( $Q$ )	8
Modelo	O.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	0.101 mm $7.14 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	14.1 mm    0.995%
$RMS_{\lambda}$	446 mm
$RMS_c$	446 mm
$RMS_{\gamma}$	86.9 mm



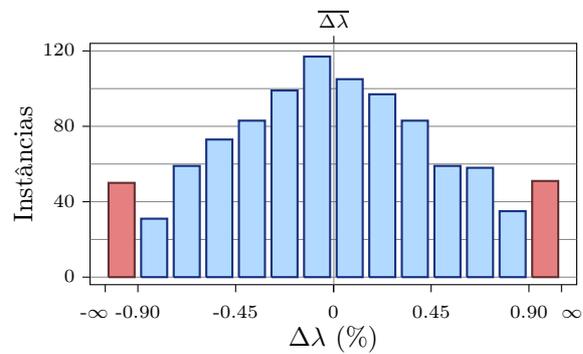
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	5
Nº de barras ( $Q$ )	8
Modelo	B.D.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.131 mm $-9.22 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	8.78 mm    0.619%
$RMS_{\lambda}$	277 mm
$RMS_c$	277 mm
$RMS_{\gamma}$	64.7 mm



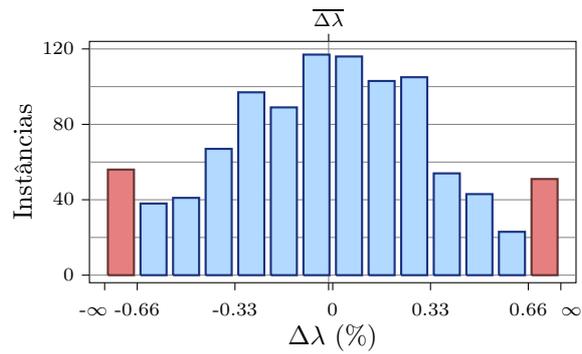
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	5
Nº de barras ( $Q$ )	8
Modelo	B.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.126 mm $-8.9 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	8.57 mm    0.604%
$RMS_{\lambda}$	271 mm
$RMS_c$	271 mm
$RMS_{\gamma}$	62.7 mm



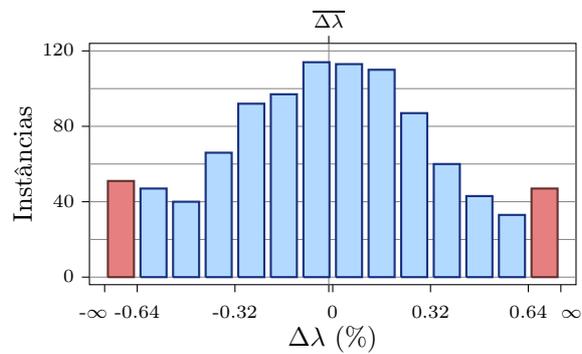
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	5
Nº de barras ( $Q$ )	8
Modelo	O.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	$2.64 \cdot 10^{-2}$ mm $1.86 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	7.98 mm    0.563%
$RMS_{\lambda}$	252 mm
$RMS_c$	252 mm
$RMS_{\gamma}$	58.3 mm



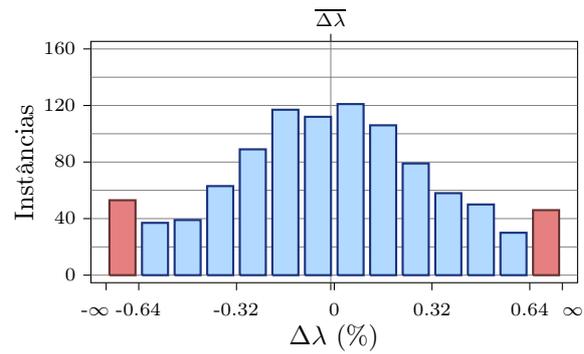
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	10
Nº de barras ( $Q$ )	8
Modelo	B.D.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.198 mm $-1.4 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	5.7 mm    0.402%
$RMS_{\lambda}$	180 mm
$RMS_c$	180 mm
$RMS_{\gamma}$	49 mm



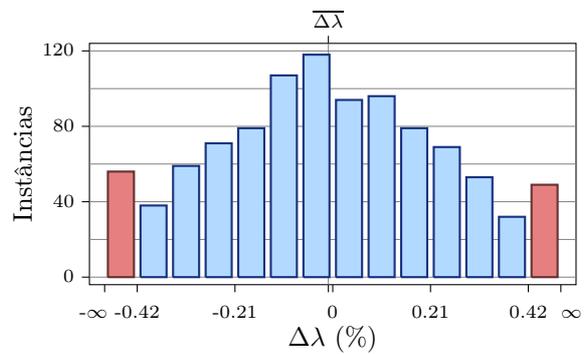
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	10
Nº de barras ( $Q$ )	8
Modelo	B.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.185 mm $-1.3 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	5.58 mm    0.393%
$RMS_{\lambda}$	176 mm
$RMS_c$	176 mm
$RMS_{\gamma}$	47 mm



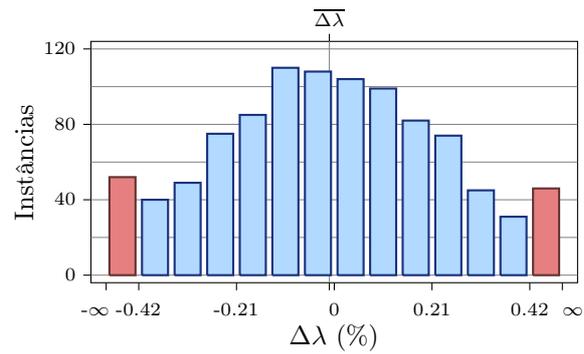
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	10
Nº de barras ( $Q$ )	8
Modelo	O.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.163 mm $-1.15 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	5.41 mm    0.382%
$RMS_{\lambda}$	171 mm
$RMS_c$	171 mm
$RMS_{\gamma}$	45.7 mm



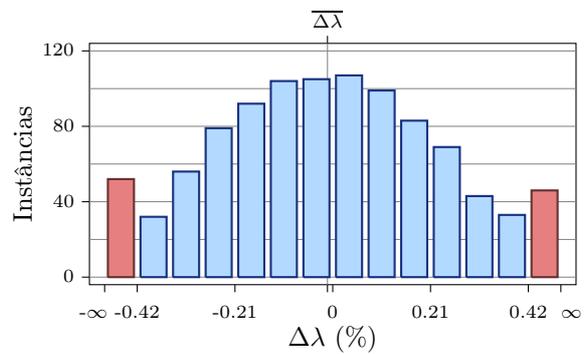
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	20
Nº de barras ( $Q$ )	8
Modelo	B.D.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.133 mm $-9.4 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	3.64 mm    0.257%
$RMS_{\lambda}$	115 mm
$RMS_c$	115 mm
$RMS_{\gamma}$	41.8 mm



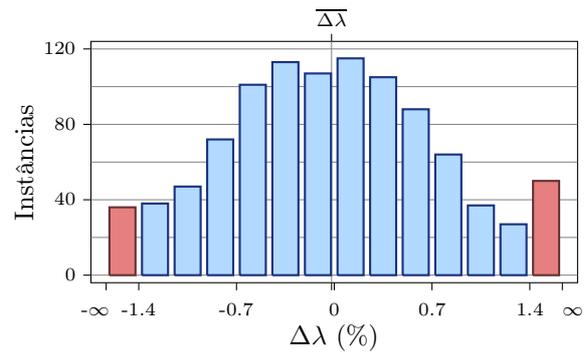
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	20
Nº de barras ( $Q$ )	8
Modelo	B.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.149 mm $-1.05 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	3.56 mm    0.251%
$RMS_{\lambda}$	113 mm
$RMS_c$	113 mm
$RMS_{\gamma}$	39.6 mm



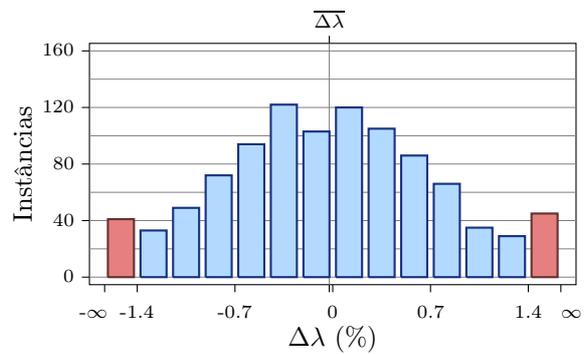
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	20
Nº de barras ( $Q$ )	8
Modelo	O.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.16 mm $-1.13 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	3.54 mm    0.25%
$RMS_{\lambda}$	112 mm
$RMS_c$	112 mm
$RMS_{\gamma}$	39.2 mm



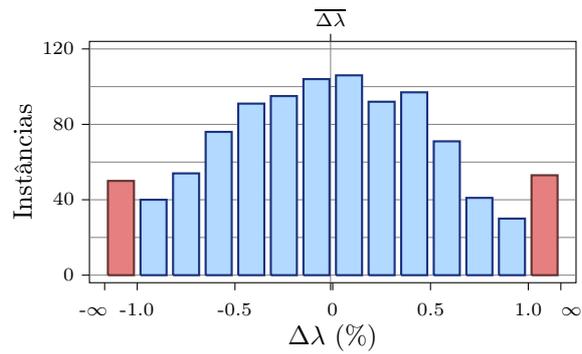
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	2
Nº de barras ( $Q$ )	16
Modelo	B.D.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.273 mm $-1.93 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	11.6 mm    0.817%
$RMS_{\lambda}$	366 mm
$RMS_c$	366 mm
$RMS_{\gamma}$	82.4 mm



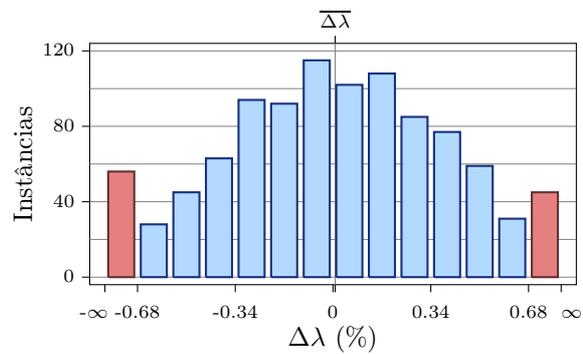
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	2
Nº de barras ( $Q$ )	16
Modelo	B.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.355 mm $-2.5 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	11.5 mm    0.808%
$RMS_{\lambda}$	362 mm
$RMS_c$	362 mm
$RMS_{\gamma}$	80.8 mm



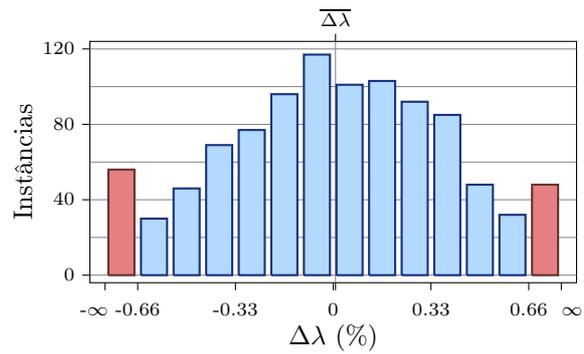
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	2	
Nº de barras ( $Q$ )	16	
Modelo	O.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.156 mm	$-1.1 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	8.9 mm	0.628%
$RMS_{\lambda}$	281 mm	
$RMS_c$	281 mm	
$RMS_{\gamma}$	61.4 mm	



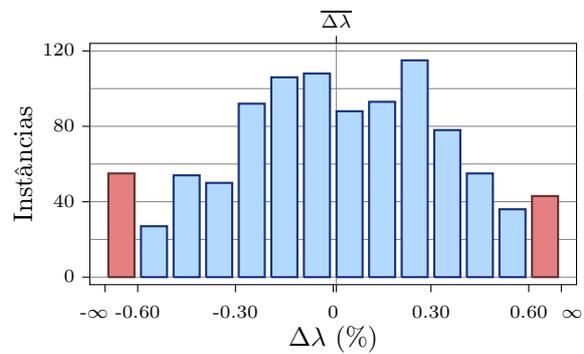
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	5	
Nº de barras ( $Q$ )	16	
Modelo	B.D.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.104 mm	$7.3 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	5.86 mm	0.413%
$RMS_{\lambda}$	185 mm	
$RMS_c$	185 mm	
$RMS_{\gamma}$	50.1 mm	



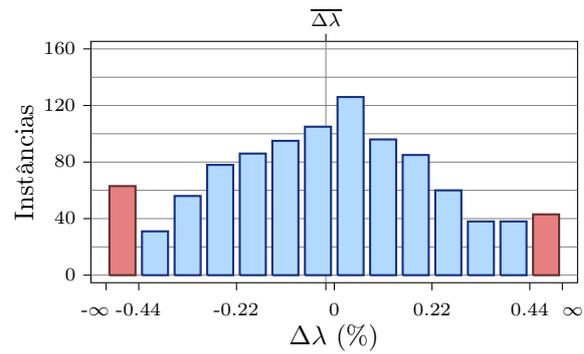
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	5	
Nº de barras ( $Q$ )	16	
Modelo	B.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.109 mm	$7.66 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	5.7 mm	0.402%
$RMS_{\lambda}$	180 mm	
$RMS_c$	180 mm	
$RMS_{\gamma}$	47.9 mm	



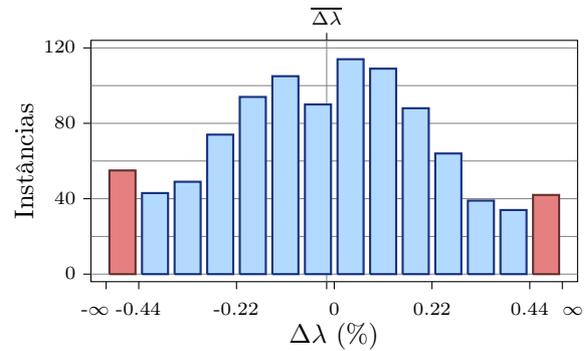
Parâmetros dos testes		
Nº de cadeias ( $F$ )	5	
Nº de barras ( $Q$ )	16	
Modelo	O.C.	
Instâncias	1000	
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$		
$\overline{\Delta\lambda}$	0.137 mm	$9.64 \cdot 10^{-3}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	5.16 mm	0.364%
$RMS_{\lambda}$	163 mm	
$RMS_c$	163 mm	
$RMS_{\gamma}$	44.2 mm	



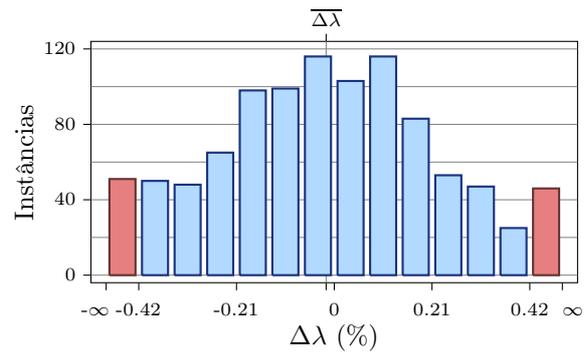
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	10
Nº de barras ( $Q$ )	16
Modelo	B.D.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.268 mm $-1.89 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	3.85 mm $0.272\%$
$RMS_{\lambda}$	122 mm
$RMS_c$	122 mm
$RMS_{\gamma}$	41.7 mm



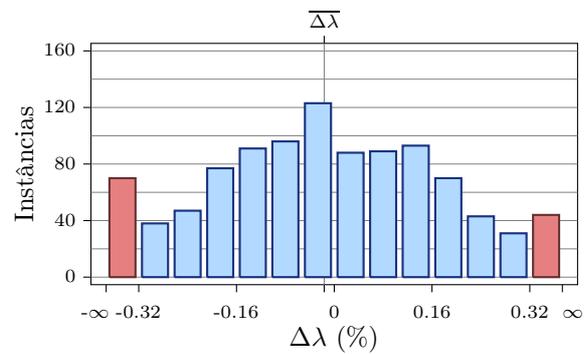
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	10
Nº de barras ( $Q$ )	16
Modelo	B.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.242 mm $-1.71 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	3.77 mm $0.266\%$
$RMS_{\lambda}$	119 mm
$RMS_c$	119 mm
$RMS_{\gamma}$	39.5 mm



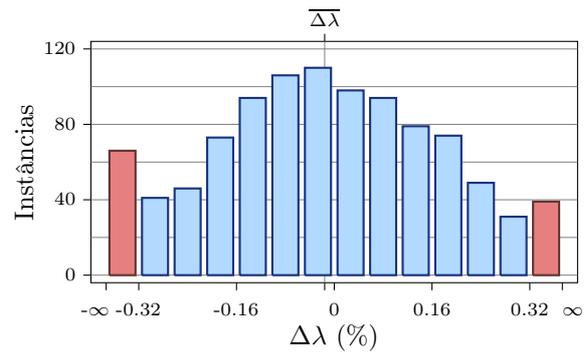
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	10
Nº de barras ( $Q$ )	16
Modelo	O.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.248 mm $-1.75 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	3.63 mm 0.256%
$RMS_{\lambda}$	115 mm
$RMS_c$	115 mm
$RMS_{\gamma}$	38.5 mm



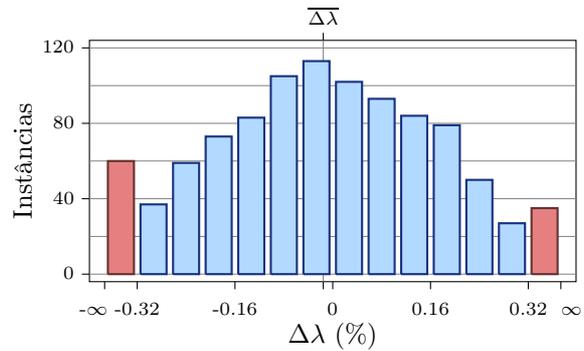
Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	20
Nº de barras ( $Q$ )	16
Modelo	B.D.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.234 mm $-1.65 \cdot 10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	2.77 mm 0.195%
$RMS_{\lambda}$	87.9 mm
$RMS_c$	87.9 mm
$RMS_{\gamma}$	38.2 mm



Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	20
Nº de barras ( $Q$ )	16
Modelo	B.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.223 mm -1.57 $10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	2.74 mm 0.193%
$RMS_{\lambda}$	86.9 mm
$RMS_c$	86.9 mm
$RMS_{\gamma}$	35.9 mm



Parâmetros dos testes	
Nº de cadeias ( $F$ )	20
Nº de barras ( $Q$ )	16
Modelo	O.C.
Instâncias	1000
Erros sobre $\lambda$ , $c$ e $\gamma$	
$\overline{\Delta\lambda}$	-0.22 mm -1.55 $10^{-2}\%$
$\sigma_{\Delta\lambda}$	2.7 mm 0.19%
$RMS_{\lambda}$	85.5 mm
$RMS_c$	85.5 mm
$RMS_{\gamma}$	35.7 mm



# Referências Bibliográficas

- AGIN, G. J. & BINFORD, T. O. (1976). Computer description of curved objects. In *IEEE Transactions on Computers*, volume 25, pp. 439–449.
- ASADA, M.; ICHIKAWA, H. & TSUJI, S. (1988). Determining surface orientation by projecting a stripe pattern. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 10(5):749–754.
- ATKESON, C.; MOORE, A. & SCHAAL, S. (1997). Locally weighted learning. *Artificial Intelligence Review*, 11(1–5):11–73.
- BALLARD, D. H. & BROWN, C. M. (1982). *Computer Vision*. Prentice Hall.
- BARNES, N. & LIU, Z.-Q. (1999). Knowledge-based shape from shading. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 13(1):1–24.
- BERTOZZI, M.; BROGGI, A.; CELLARIO, M.; FASCIOLI, A.; LOMBARDI, P. & PORTA, M. (2002). Artificial vision in road vehicles. *Proceedings of the IEEE — Special issue on Technology and Tools for Visual Perception*, 90(7):1258–1271.
- BOUGANIS, C.-S. & BROOKES, M. (2003). Class-based multiple light detection: An application to faces. In *Proceedings of the British Machine Vision Conference (BMVC)*, pp. 20.1–20.10.
- (2004). Multiple light source detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 26(4):509–514.
- BOUGUET, J.-Y. (2005). Camera calibration toolbox for Matlab. Available at [http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib\\_doc/index.html](http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/index.html) in February, 2005.
- BOUGUET, J.-Y. & PERONA, P. (1997). 3D photography on your desk. Technical report, California Institute of Technology, Pasadena, CA. Available at <http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/ICCV98/.index.html> in February, 2005.
- (1998). 3D photography on your desk. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*.

- (1999). 3D photography using shadows in dual-space geometry. *International Journal of Computer Vision (IJCV)*, 35(2):129–149.
- BROGGI, A.; BERTOZZI, M.; FASCIOLI, A.; LOBIANCO, C. & PIAZZI, A. (2000). Visual perception of obstacles and vehicles for platooning. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 1(3):164–176.
- BROOKS, M. J. & HORN, B. K. P. (1985). Shape and source from shading. Artificial Intelligence Memo No. 820, Massachusetts Institute of Technology, Artificial Intelligence Laboratory.
- BRUNELLI, R. (1997). Estimation of pose and illuminant direction for face processing. *Image and Vision Computing (IVC)*, 15(10):741–748.
- CHANTLER, M. J. (1995). Why illuminant direction is fundamental to texture analysis. In *Proceedings of the IEE Vision, Image and Signal Processing (VISIP)*, volume 142, pp. 199–206.
- CHANTLER, M. J.; MCGUNNIGLE, G.; PENIRSCHKE, A. & PETROU, M. (2002). Estimating lighting direction and classifying textures. In *Proceedings of the British Machine Vision Conference (BMVC)*.
- CHANTLER, M. J.; PETROU, M.; PENIRSCHKE, A.; SCHMIDT, M. & MCGUNNIGLE, G. (2005). Classifying surface texture while simultaneously estimating illumination direction. *International Journal of Computer Vision (IJCV)*, 62(1/2):83–96.
- CHOJNACKI, W. & BROOKS, M. J. (1997). Can the sun’s direction be estimated from an image prior to the computation of object shape? *Journal of Mathematical Imaging and Vision (JMIV)*, 7(2):139–147.
- CHOJNACKI, W.; BROOKS, M. J. & GIBBINS, D. (1994). Revisiting Pentland’s estimator of light source direction. *Journal of the Optical Society of America A (JOSA A)*, 11(1):118–124.
- COSTA, A. C.; SOUSA, A. A. & FERREIRA, F. N. (1999). Lighting design: A goal based approach using optimisation. In *Proceedings of the 10th Eurographics Workshop on Rendering*, pp. 317–328, New York, NY.
- DEBEVEC, P. E. (1998). Rendering synthetic objects into real scenes: Bridging traditional and image-based graphics with global illumination and high dynamic range photography. In *Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (ACM SIGGRAPH)*. ACM Press.

- DEBEVEC, P. E. & MALIK, J. (1997). Recovering high dynamic range radiance maps from photographs. In *Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (ACM SIGGRAPH)*, pp. 369–378. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.
- DESHPANDE, S. G. & CHAUDHURI, S. (1998). Recursive estimation of illuminant motion from flow field and simultaneous recovery of shape. *Computer Vision and Image Understanding (CVIU)*, 72(1):10–20.
- DREW, M. S. (1996). Direct solution of orientation-from-color problem using a modification of Pentland's light source direction estimator. *Computer Vision and Image Understanding (CVIU)*, 64(2):286–299.
- GIBBINS, D. (1994). *Estimating Illumination Conditions for Shape from Shading*. PhD thesis, School of Information Science and Technology, Faculty of Science and Engineering, The Flinders University of South Australia.
- GIBBINS, D.; BROOKS, M. J. & CHOJNACKI, W. (1991). Light source direction from a single image: a performance analysis. *Australian Computer Journal*, 23(4):165–174.
- GUISSER, L.; PAYRISSAT, R. & CASTAN, S. (1992). A new 3-D surface measurement system using a structured light. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. 784–786.
- HAVERINEN, J. & RÖNING, J. (2000). A 3-D scanner capturing range and color: Design and calibration. In *Proceedings of the Vision Interface*, Montreal, Quebec, Canada.
- HAYATI, S. (1996). Microrover research for exploration of Mars. In *AIAA Forum on Advanced Developments in Space Robotics*, Madison, Wisconsin.
- HORN, B. K. P. (1986). *Robot Vision*. McGraw-Hill Book Company, Cambridge, Massachusetts. MIT Electrical Engineering and Computer Science Series.
- HORN, B. K. P. & BROOKS, M. J. (1989). *Shape from Shading*. Massachusetts Institute of Technology (MIT) Press.
- HORN, E. & KIRYATI, N. (1999). Toward optimal structured light patterns. *Image and Vision Computing (IVC)*, 17(2):87–97.
- HOUGEN, D. R. & AHUJA, N. (1993). Estimation of the light source distribution and its use in integrated shape recovery from stereo and shading. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pp. 148–155.
- IKEDA, O. (2004). Use of four surface normal approximations and optimization of light direction for robust shape reconstruction from single images. In *Proceedings of the 1st Canadian Conference on Computer and Robot Vision (CRV)*, pp. 84–91.

- IKEUCHI, K. & SATO, K. (1990). Determining reflectance parameters using range and brightness images. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pp. 12–20.
- KANBARA, M. & YOKOYA, N. (2002). Geometric and photometric registration for real-time augmented reality. In *Proceedings of the International Symposium on Mixed and Augmented Reality (ISMAR)*, p. 279. IEEE Computer Society.
- (2004). Real-time estimation of light source environment for photorealistic augmented reality. In *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, volume 2.
- KAWAI, J. K.; PAINTER, J. S. & COHEN, M. F. (1993). Radioptimization – goal based rendering. In *Proceedings of the 20th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (ACM SIGGRAPH)*, pp. 147–154. ACM Press.
- KELLY, A. & STENTZ, A. (1998a). Rough terrain autonomous mobility — part 1: A theoretical analysis of requirements. *International Journal of Autonomous Robots*, 5:129–161.
- (1998b). Rough terrain autonomous mobility — part 2: An active vision, predictive control. *International Journal of Autonomous Robots*, 5:163–198.
- LANGER, M. S. & ZUCKER, S. W. (1997a). Casting light on illumination: A computational model and dimensional analysis of sources. *Computer Vision and Image Understanding (CVIU)*, 65(2):322–335.
- (1997b). What is a light source? In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. 172–178, San Juan, Puerto Rico.
- LEE, C.-H. & ROSENFELD, A. (1985). Improved methods of estimating shape from shading using the light source coordinates system. *Artificial Intelligence*, 26(2):125–143.
- (1989). Improved methods of estimating shape from shading using the light source coordinates system. In Horn & Brooks, editores, *Shape from Shading*, pp. 323–569.
- LEVENBERG, K. (1944). A method for the solution of certain problems in least squares. *Quarterly Applied Mathematics*, 2:164–168.

- LEVOY, M.; PULLI, K.; CURLESS, B.; RUSINKIEWICZ, S.; KOLLER, D.; PEREIRA, L.; GINZTON, M.; ANDERSON, S.; DAVIS, J.; GINSBERG, J.; SHADE, J. & FULK, D. (2000). The digital Michelangelo project: 3D scanning of large statues. In *Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (ACM SIGGRAPH)*, pp. 131–144.
- LI, Y.; LIN, S.; LU, H. & SHUM, H.-Y. (2003). Multiple-cue illumination estimation in textured scenes. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, volume 2, pp. 1366–1373.
- LUONG, Q.-T.; FUA, P. & LECRERC, Y. G. (2002). The radiometry of multiple images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 24(1):19–33.
- MANCINI, T. A. & WOLFF, L. B. (1992). 3D shape and light source location from depth and reflectance. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. 707–709.
- MARQUARDT, D. W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 11:431–441.
- MARSCHNER, S. R. (1998). *Inverse Rendering for Computer Graphics*. PhD thesis, Program of Computer Graphics, Cornell University, Ithaca, NY.
- MARSCHNER, S. R. & GREENBERG, D. P. (1997). Inverse lighting for photography. In *Proceedings of the Fifth Color Imaging Conference, Society for Imaging Science and Technology*, pp. 262–265.
- MATIJEVIC, J. (1996). Mars Pathfinder Microrover — implementing a low cost planetary mission experiment. In *Proceedings of the 2nd IAA International Conference on Low-Cost Planetary Missions*.
- MCDONALD, J.; MARKHAM, C. & MCLOUGHLIN, S. (2001). Selected problems in automated vehicle guidance. Technical report, Signals & Systems Group, Department of Computer Science, National University of Ireland, Maynooth, Ireland.
- MILLER, G. S. & HOFFMAN, C. R. (1984). Illumination and reflection maps: Simulated objects in simulated and real environments. In *SIGGRAPH 84 Advanced Computer Graphics Animation seminar notes*.
- MONTGOMERY, D. C. & RUNGER, G. C. (2003). *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora, 2 edição.
- MUKAWA, N. (1990). Estimation of shape, reflection coefficients and illuminant direction from image sequences. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*.

- NILLIUS, P. & EKLUNDH, J.-O. (2001). Automatic estimation of the projected light source direction. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. I:1076–1083.
- NISHINO, K.; ZHANG, Z. & IKEUCHI, K. (2001). Determining reflectance parameters and illumination distribution from a sparse set of images for view-dependent image synthesis. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, volume 1, pp. 599–606, Vancouver, BC, Canada.
- OKABE, T.; SATO, I. & SATO, Y. (2004). Spherical harmonics vs. Haar wavelets: Basis for recovering illumination from cast shadows. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, volume 1, Washington, D.C., USA.
- PANG, W.-M.; WONG, T.-T. & HENG, P.-A. (2004). Estimating light vectors in real time. In *IEEE Computer Graphics and Applications*, pp. 36–43.
- PENTLAND, A. P. (1982). Finding the illuminant direction. *Journal of the Optical Society of America*, 72(4):448–455.
- (1990). Linear shape from shading. *International Journal of Computer Vision (IJCV)*, 4(2):153–162.
- POULIN, P. & FOURNIER, A. (1992). Lights from highlights and shadows. *Computer Graphics*, 25(2):31–38.
- POULIN, P.; RATIB, K. & JACQUES, M. (1997). Sketching shadows and highlights to position lights. In *Proceedings of Computer Graphics International 97*, pp. 56–63. IEEE Computer Society.
- POWELL, M. W.; SARKAR, S. & GOLDFOF, D. (2000). Calibration of light sources. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, volume 2.
- (2001). A simple strategy for calibrating the geometry of light sources. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 23(9):1022–1027.
- RIKLIN-RAVIV, T. & SHASHUA, A. (2001). The quotient image: Class-based re-rendering and recognition with varying illuminations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 23(2):129–139.
- SALVADOR, E.; CAVALLARO, A. & EBRAHIMI, T. (2004). Cast shadow segmentation using invariant color features. *Computer Vision and Image Understanding (CVIU)*, 95(2):238–259.

- SAMARAS, D. & METAXAS, D. (1999). Coupled lighting direction and shape estimation from single images. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pp. 868–874.
- (2003). Incorporating illumination constraints in deformable models for shape from shading and light direction estimation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 25(2):247–264.
- SATO, I.; SATO, Y. & IKEUCHI, K. (1998). Estimation of illumination distribution by using soft shadows. In *Center for Spatial Information Science (CSIS) Discussion Papers*, number 3, pp. 1–14. University of Tokyo.
- (1999a). Acquiring a radiance distribution to superimpose virtual objects onto a real scene. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (VCG)*, 5(1):1–12.
- (1999b). Illumination distribution from brightness in shadows: Adaptive estimation of illumination distribution with unknown reflectance properties in shadow regions. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pp. 875–882.
- (1999c). Illumination distribution from shadows. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. 306–312.
- (2001). Stability issues in recovering illumination distribution from brightness in shadows. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. 400–407.
- (2003). Illumination from shadows. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 25(3):290–300.
- SCHOENEMAN, C.; DORSEY, J.; SMITS, B.; ARVO, J. & GREENBURG, D. (1993). Painting with light. In *Proceedings of the 20th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (ACM SIGGRAPH)*. ACM Press.
- SHACKED, R. (2001). *Automatic Lighting Design using a Perceptual Quality Metric*. PhD thesis, School of Computer Science and Engineering, The Hebrew University of Jerusalem, Jerusalem, Israel.
- SHACKED, R. & LISCHINSKI, D. (2001). Automatic lighting design using a perceptual quality metric. *Computer Graphics Forum*, 20(3):215–226.
- SIM, T. & KANADE, T. (2001). Illuminating the face. Technical Report CMU-RI-TR-01-31, Robotics Institute, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA.

- SIMMONS, R.; KROTKOV, E.; CHRISMAN, L.; COZMAN, F.; GOODWIN, R.; HEBERT, M.; HEREDIA, G.; KOENIG, S.; MUIR, P.; SHINODA, Y. & WHITTAKER, W. (1995). Mixed-mode control of navigation for a lunar rover. In *Proceedings of the SSI/Princeton Space Manufacturing Conference*, Princeton, New Jersey.
- SINGH, M. K. & AHUJA, N. (1998). Estimating light sources. In *Indian Conference on Computer Vision, Graphics and Image Processing*.
- SINHA, P. & ADELSON, E. (1993). Recovering reflectance and illumination in a world of painted polyhedra. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, pp. 156–163.
- STAUDER, J. (1993). An illumination estimation method for 3D-object-based analysis-synthesis coding. In *European Workshop on New Techniques for Coding of Video Signals at Very Low Bitrates*, pp. 4.5.1–4.5.6.
- (1994). Joint estimation of object motion and point light illumination for 3D-object-based analysis-synthesis coding. In *International Workshop on Coding Techniques for Very Low Bit-rate Video (VLBV)*, pp. 4.1.1–4.1.4, Colchester, United Kingdom.
- TAKAI, T.; NIINUMA, K. & MATSUYAMA, A. M. T. (2004). Difference sphere: An approach to near light source estimation. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. 98–105.
- TEUTSCH, C.; ISENBERG, T.; TROSTMANN, E. & WEBER, M. (2004). Evaluation and optimization of laser scan data. In *Proceedings of the Simulation und Visualisierung 2004 Conference (SimVis '04)*, pp. 311–322, Magdeburg, Germany.
- TSAI, R. Y. (1987). A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV cameras and lenses. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 3(4):323–344.
- TURK, G. & LEVOY, M. (1994). Zippered polygon meshes from range images. In *SIGGRAPH '94: Proceedings of the 21st annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 311–318, New York, NY, USA. ACM Press.
- ULLMAN, S. (1975). On visual detection of light sources. Artificial Intelligence Memo No. 333, Massachusetts Institute of Technology, Artificial Intelligence Laboratory.
- UNGER, J.; WENGER, A.; HAWKINS, T.; GARDNER, A. & DEBEVEC, P. (2003). Capturing and rendering with incident light fields. In *Eurographics Symposium on Rendering*, pp. 1–10.

- VEGA, O. E. & YANG, Y.-H. (1994). Default shape theory: With application to the computation of the direction of the light source. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing (CVGIP): Image Understanding*, 60(3):285–299.
- VUYLSTEKE, P. & OOSTERLINCK, A. (1990). Range image acquisition with a single binary-encoded light pattern. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 12(2):148–164.
- WANG, Y. & SAMARAS, D. (2002a). Estimation of multiple directional light sources for synthesis of mixed reality images. In *Proceedings of the Pacific Graphics Conference*, pp. 38–47.
- (2002b). Estimation of multiple illuminants from a single image of arbitrary known geometry. In *Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV)*, volume III, pp. 272–288. Springer-Verlag.
- (2003a). Estimation of multiple directional light sources for synthesis of augmented reality images. *Graphical Models*, 65(4):185–205.
- (2003b). Multiple directional illuminant estimation from a single image. In *IEEE Workshop on Color and Photometric Methods in Computer Vision (CPMCV) (in conjunction with ICCV 2003)*.
- WASHINGTON, R.; GOLDEN, K.; BRESINA, J.; SMITH, D.; ANDERSON, C. & SMITH, T. (1999). Autonomous rovers for Mars exploration. In *Proceedings of the IEEE Aerospace Conference*.
- WEBER, M. & CIPOLLA, R. (2001). A practical method for estimation of point light-sources. In *Proceedings of the British Machine Vision Conference (BMVC)*.
- WEI, J. (2003). Robust recovery of multiple light source based on local light source constant constraint. *Pattern Recognition Letters*, 24(1–3):159–172.
- WEINSHALL, D. (1990). The shape and the direction of illumination from shading on occluding contours. Artificial Intelligence Memo No. 1264, Massachusetts Institute of Technology, Artificial Intelligence Laboratory.
- WORTHINGTON, P. L. & HANCOCK, E. R. (1997). Shape-from-shading using robust statistics. In *Proceedings of the 13th IEEE International Conference on Digital Signal Processing*, pp. 1083–1088.
- YANG, Y. & YUILLE, A. (1991). Sources from shading. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*.
- YANG, Y. H. (1998). An experimental study of light source determination for computer graphics. In *Vision Interface '98*, pp. 271–278, Vancouver, B. C.

- ZHANG, R.; TSAI, P.-S.; CRYER, J. E. & SHAH, M. (1999). Shape from shading: A survey. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 21(8):690–706.
- ZHANG, Y. & YANG, Y.-H. (2000). Illuminant direction determination for multiple light sources. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, volume 1, pp. 269–276, Hilton Head Island, SC, USA.
- (2001). Multiple illuminant direction detection with application to image synthesis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 23(8):915–920.
- ZHANG, Z. (2000). A flexible new technique for camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 22(11):1330–1334.
- ZHENG, Q. & CHELLAPA, R. (1991a). Estimation of illuminant direction, albedo, and shape from shading. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. 540–545.
- (1991b). Estimation of illuminant direction, albedo, and shape from shading. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 13(7):680–702.
- ZHOU, W. & KAMBHAMETTU, C. (2002). Estimation of illuminant direction and intensity of multiple light sources. In *Proceedings of the European Conference on Computer Vision (ECCV)*, volume IV, pp. 206–220, Copenhagen, Denmark.
- (2004a). Estimation of the size and location of multiple area light sources. In *International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*.
- (2004b). A unified framework for scene illuminant estimation. In *Proceedings of the British Machine Vision Conference (BMVC)*, London, United Kingdom.