



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA



ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DA INFLUÊNCIA
DE DESCONTINUIDADES GEOMÉTRICAS SOBRE O
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ROTORES
FLEXÍVEIS.

BRUNO DE FREITAS BRANT

BELO HORIZONTE, 29 de Junho de 2007.

Bruno de Freitas Brant

**ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DA INFLUÊNCIA
DE DESCONTINUIDADES GEOMÉTRICAS SOBRE O
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ROTORES
FLEXÍVEIS.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Marco Túlio Corrêa de Faria, Dr.

Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte

Escola de Engenharia da UFMG

2007



Universidade Federal de Minas Gerais
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. Antônio Carlos, 6627 – Pampulha – 31.270-901 – Belo Horizonte – MG
Tel.: +55 31 3499-5145 – Fax.: +55 31 3443-3783
www.demec.ufmg.br – E-mail: cpgmec@demec.ufmg.br



**ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DA INFLUÊNCIA
DE DESCONTINUIDADES GEOMÉTRICAS SOBRE O
COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ROTORES
FLEXÍVEIS.**

BRUNO DE FREITAS BRANT

Dissertação defendida e aprovada em 29 de Junho de 2007, pela Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "**Mestre em Engenharia Mecânica**", na área de concentração de "**Projeto Mecânico**".

**Prof. Marco Túlio Corrêa de Faria, Dr. – Universidade Federal de Minas Gerais –
Orientador**

**Prof. Lázaro Valentim Donadon, Dr. – Universidade Federal de Minas Gerais –
Examinador**

**Prof. Rogério José Marczak, Dr. – Universidade Federal do Rio Grande do Sul –
Examinador**

Aos meus pais, Geraldo e Cida

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Governo do Brasil pela Universidade Federal de qualidade.

Ao Professor Marco Túlio Corrêa de Faria pela sua orientação, dedicação e profissionalismo.

À banca examinadora, Professor Lázaro Valentim Donadon e Professor Rogério José Marczak.

Aos meus amigos e familiares pelo apoio e incentivo.

À minha esposa, Leopoldina, pela compreensão, paciência e apoio durante todos os dias desta jornada.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro para realização desse trabalho.

SUMÁRIO

NOMENCLATURA	iii
LISTA DE FIGURAS	v
LISTA DE TABELAS	vii
RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 Mecânica da fratura	5
2.1.1 Concentração de tensões e balanço energético	5
2.1.2 Fator de intensidade de tensão e integral J	9
2.2 Dinâmica de estruturas trincadas	12
2.3 Dinâmica de rotores	17
3 PROCEDIMENTO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ANÁLISE DAS VIBRAÇÕES LATERAIS EM ROTORES	20
3.1 Determinação da matriz de rigidez do elemento com descontinuidade	20
3.2 Modelo de elementos finitos para o sistema rotor-mancal	24
3.2.1 Elemento finito utilizado	24
3.2.2 Modelagem do rotor	26
3.2.3 Modelagem dos mancais	28
3.2.4 Problema de autovalor – Formulação por variáveis de estado	30
4 RESULTADOS	34
4.1 Validação do procedimento computacional	34
4.1.1 Validação do modelo de rotor sem trinca	34
4.1.2 Validação do modelo com descontinuidade geométrica	38
4.2 Influência de uma trinca no comportamento dinâmico de um rotor	44
4.3 Análise dos autovalores e estabilidade do sistema	48
5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	55
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	58
APÊNDICE A	62

NOMENCLATURA

Letras Latinas

U	Energia de deformação	Joule
E	Modulo de Elasticidade	MPa
K_I	Fator de intensidade de tensão do modo I	$MPa\sqrt{m}$
K_{II}	Fator de intensidade de tensão do modo II	$MPa\sqrt{m}$
K_{III}	Fator de intensidade de tensão do modo III	$MPa\sqrt{m}$
$[A]$	Flexibilidade Total	m/N
$[K]$	Matriz de Rigidez	N/m
$[M]$	Matriz de Inércia Translacional	kg
$[N]$	Matriz de Inércia Rotacional	$Kg.m^2$
$[G]$	Matriz dos efeitos Giroscópicos	$Kg.m^2$
$[K_m]$	Matriz de Rigidez do filme fluido	N/m
$[C_m]$	Matriz de Amortecimento do filme fluido	N.s/m
$[K_r]$	Matriz de Rigidez do rotor	N/m
R	Raio da seção transversal	m
a	Profundidade da trinca	m
a_{uc}	Flexibilidade local sem a trinca	m/N
a_c	Flexibilidade local com a trinca	m/N
U^0	Energia de deformação para eixo sem trinca	Joule
U^c	Energia de deformação para eixo com trinca	Joule
J	Energia de deformação devida à trinca	Joule
s	Posição axial ao longo do elemento finito	m
k	Fator de forma do cisalhamento transversal	
A_e	Área da seção transversal	m^2
G	Módulo de cisalhamento	MPa
L	Comprimento do elemento finito	m
EI	Rigidez a flexão	MPa
h	Espessura do filme fluido	m
P	Pressão hidrodinâmica	MPa
e_x, e_y	Excentricidade vertical e horizontal do munhão	m
P_0	Pressão de ordem zero	MPa
P_σ	Campo de pressão de primeira ordem	MPa/m

Letras Gregas

ρ	Raio de curvatura	m
γ	Tensão Superficial	MPa
μ	Modulo de cisalhamento	MPa
ω	Velocidade Angular	rad/s
ω_c	Velocidade Crítica	rad/s
ν	Coefficiente de Poisson	
Ω	Velocidade de rotação	rad/s
ε	Razão de excentricidade	
μ_v	Viscosidade	Pa·s

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Exemplificação do experimento executado por Inglis (1913).....	6
FIGURA 2.2 – Variação da energia em função do comprimento de trinca (OWEN e FAWKES, 1983).	7
FIGURA 2.3 – Movimentos de deformação entre as superfícies da trinca (OWEN e FAWKES, 1983).	9
FIGURA 2.4 – Processo de fratura em diferentes escalas (SAETHER E TA'ASAN, 2004).	10
FIGURA 2.5 – Detalhe da trinca (OWEN e FAWKES, 1983).	11
FIGURA 2.6 – Integral de contorno.	12
FIGURA 2.7 – Espectro de vibração em um rotor de turbina elétrica (DIMAROGONAS, 1996).	15
FIGURA 2.8 – Sistema Massa mola de um rotor.	17
FIGURA 2.9 – Abertura e fechamento da trinca durante um giro do eixo (SINOUE e LEES, 2005).	19
FIGURA 3.1 – Representação de um elemento finito de eixo com trinca.	21
FIGURA 3.2 – Seção transversal do eixo.	21
FIGURA 3.3 – Elemento finito de viga de Timoshenko (NELSON, 1980).	25
FIGURA 3.4 – Eixo flexível apoiado em mancais radiais hidrodinâmicos.	26
FIGURA 3.5 – Posição da trinca ao longo do eixo.	28
FIGURA 3.6 – Coeficientes de rigidez e amortecimento de um mancal radial hidrodinâmico.	30
FIGURA 3.7 – Fluxograma do programa de análise de rotores trincados.	33
FIGURA 4.1 – Freqüências naturais em função dos coeficientes de amortecimento dos mancais, para os 3 primeiros modos de vibração.	37
FIGURA 4.2 – Freqüências naturais em função dos coeficientes de amortecimento dos mancais, para os modos de vibração 4 e 5.	38
FIGURA 4.3 – Autovalor normalizado em função da profundidade relativa da trinca.	40
FIGURA 4.4 – Teste de malha de elementos finitos.	41

FIGURA 4.5 – Freqüência Natural Normalizada em função da posição da trinca (primeiro modo).....	42
FIGURA 4.6 – Freqüência Natural Normalizada em função da posição da trinca (segundo modo).....	43
FIGURA 4.7 – Freqüência Natural Normalizada em função da posição da trinca (terceiro modo).....	44
FIGURA 4.8 – Freqüências naturais em função da rotação do eixo.....	45
FIGURA 4.9 – Freqüências naturais em função da rotação do eixo.....	46
FIGURA 4.10 – Variação da primeira freqüência natural em função do amortecimento dos mancais para rotores com trinca e sem trinca.....	47
FIGURA 4.11 – Variação da segunda freqüência natural em função do amortecimento dos mancais para rotores com trinca e sem trinca.....	47
FIGURA 4.12 – Variação da terceira freqüência natural em função do amortecimento dos mancais para rotores com trinca e sem trinca.....	48
FIGURA 4.13 – Curvas de decaimento exponencial em função do coeficiente de amortecimento efetivo.....	51
FIGURA 4.14 – Curvas de decaimento exponencial para rotores com trinca e sem trinca.....	52
FIGURA 4.15 – Variação percentual do coeficiente de amortecimento efetivo em função da profundidade da trinca na região de transição de estabilidade.....	54
FIGURA A.1 – Representação de um elemento finito de eixo com trinca.....	62
FIGURA A.2 – Seção transversal do eixo.....	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 4-1 - Parâmetros físicos do rotor analisado por Lund (1974).	35
Tabela 4-2 - Análise da sensibilidade da malha de elementos finitos.	35
Tabela 4-3 – Desvio relativo das frequências naturais calculadas com diferentes números de elementos finitos.	36
Tabela 4-4 – Parâmetros físicos do problema discutido por Dong e Cheng (2004).	39
Tabela 4-5 – Sensibilidade da malha de elementos finitos na análise de um eixo trincado.	41
Tabela 4-6 – Variação percentual dos valores de frequência natural em função do tamanho da malha.	42
Tabela 4-7 - Parâmetros do sistema rotor-mancal hidrodinâmico.	49
Tabela 4-8 – Parte real (a) do autovalor principal do sistema.	50

RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise do comportamento dinâmico de rotores flexíveis suportados em mancais radiais hidrodinâmicos na presença de descontinuidades geométricas, utilizando o método de elementos finitos. Descontinuidades geométricas - tais como trincas, furos, rebaxos e outras - podem alterar de forma significativa a resposta vibracional do sistema rotativo devido às variações na rigidez local do rotor. O modelo de rotor está baseado na teoria de vigas de Timoshenko, no qual estão incluídas as contribuições da inércia translacional, da inércia rotacional, dos momentos giroscópicos e do cisalhamento. Os mancais hidrodinâmicos são modelados por meio de um procedimento de perturbação aplicado na equação clássica de Reynolds, que permite a obtenção dos coeficientes dinâmicos de força desses mancais. A descontinuidade geométrica é representada no modelo de rotor por meio da modificação localizada da matriz de rigidez do eixo rotativo. Os princípios da Mecânica da Fratura são empregados para definir a influência dos parâmetros geométricos da descontinuidade do eixo sobre a matriz de rigidez modificada do sistema rotativo. A equação de movimento do sistema rotor-mancal representa o problema de vibração lateral de eixos suportados em mancais radiais de filme fluido. Uma formulação de variáveis de estado é utilizada para a obtenção do problema de autovalor para sistemas giroscópicos amortecidos. Os autovalores associados a rotores trincados são estimados para vários parâmetros geométricos de trincas transversais. Os mapas de velocidades críticas são obtidos para rotores com e sem trincas, mostrando a influência de trincas transversais sobre o comportamento dinâmico de sistemas rotativos.

Palavras-chaves: Rotores trincados; Elementos finitos; Análise de vibração; Autovalores Complexos.

ABSTRACT

This work deals with a finite element analysis of the dynamic behavior of cracked flexible rotors supported by hydrodynamic journal bearing. Geometric discontinuities – such as cracks, holes, undercuts, etc. – can strongly affect the vibrational response of rotating systems due to the rotor local flexibility changes. The rotor model is based on the Timoshenko beam theory, in which the translational inertia, rotary inertia, gyroscopic effects and shear effects are accounted for. The hydrodynamic bearings are modeled by using a linearized perturbation procedure applied on the classical Reynolds equation, which permits to render the bearing dynamic force coefficients. The rotor crack is represented on the rotor model by the localized modification of the shaft element stiffness matrix. The fundamentals of the Fracture Mechanics are employed to obtain a relationship between the geometric discontinuity and the modified rotor stiffness matrix. The global equation of motion of the rotor-bearing system describes the bending vibration problem of rotating shafts supported by fluid-film bearings. A formulation of state variables is employed to generate an eigenvalue problem associated with damping gyroscopic systems. The cracked rotor eigenvalues are estimated for various transverse crack sizes. The critical speed maps are computed for continuous and cracked rotors, depicting the influence of transverse cracks on the dynamic behavior of rotating systems.

Keywords: Cracked rotors; Finite Element; Rotor dynamics; Vibration analysis; Complex eigenvalues.

1 INTRODUÇÃO

A maior parte das falhas de eixos rotativos se manifesta na forma de fraturas por fadiga, cuja origem usualmente se encontra em pontos de concentração de tensão, como cantos vivos, filetes, entalhes, rasgos de chaveta, defeitos de forjamento, etc. Mais raras são as fraturas frágeis e dúcteis, as primeiras associadas à seleção ou processamento incorreto do material e as segundas a sobrecargas acidentais. Dessa forma, a análise de trincas em sistemas rotativos se torna importante devido a seu papel significativo na falha de componentes de máquinas [AFFONSO, 2005].

Segundo Bastian (1978), sistemas mecânicos e sistemas estruturais normalmente apresentam descontinuidades ou outros defeitos introduzidos durante a fabricação. Estes defeitos produzem concentração de tensões capaz de levar o equipamento à fratura, mesmo quando submetido a tensões inferiores à tensão de projeto.

O fenômeno de falhas por propagação catastrófica de uma trinca em sistemas mecânicos e estruturais destaca-se como um problema, ao projeto e à análise, em diversos campos da engenharia. Um exemplo de uma área onde não deve haver falha é a indústria aeronáutica, cuja segurança é de fundamental importância, porém o uso de componentes leves e flexíveis é muito importante para redução de peso. Conseqüências de falhas catastróficas são também analisadas em usinas de geração de energia, particularmente em usinas nucleares. Para um projeto adequado são necessários procedimentos confiáveis que quantifiquem adequadamente os efeitos de descontinuidades geométricas sobre o comportamento e a integridade do sistema, para os quais são indispensáveis os fundamentos da Mecânica da Fratura.

A possibilidade de propagação de uma trinca em equipamentos que estão submetidos a carregamentos inferiores à capacidade de projeto, aliada à presença de descontinuidades introduzidas na fabricação, dificultam a predição da vida útil de equipamentos sujeitos a cargas cíclicas. Para se garantir margem aceitável de confiabilidade na operação de

máquinas e equipamentos, tanto técnicas criteriosas de inspeção quanto procedimentos eficientes de análise e projeto devem ser utilizados e aprimorados.

A presença de trincas em sistema mecânico ou estrutural introduz uma flexibilidade local que afeta a sua resposta vibracional (PAPADOPOULOS e DIMAROGONAS, 1987). Dessa forma, a medição dos níveis de vibração pode ser um meio não destrutivo, barato e rápido de predição e detecção de trincas e de outras descontinuidades geométricas do material (LEE e CHUNG, 2000).

A análise das vibrações em sistemas rotativos requer procedimentos computacionais precisos e confiáveis para a modelagem dinâmica do sistema. A inclusão no modelo de rotor dos efeitos inerciais e elásticos do eixo rotativo e da contribuição dos mancais de suporte é de fundamental importância para se garantir representatividade física aceitável do sistema rotativo (VANCE, 1988).

O método de elementos finitos vem sendo largamente utilizado para o desenvolvimento de modelos de eixos rotativos (GASCH, 1976; NELSON e MCVAUGH, 1976; ZORZI E NELSON, 1977; MIRANDA et al., 2005). Um modelo bastante eficiente para o estudo do comportamento elástico linear de eixos circulares contínuos foi proposto por Nelson (1980), o qual inclui as contribuições da inércia translacional, da inércia rotacional, dos efeitos giroscópicos e do cisalhamento do eixo. No modelo proposto por Nelson (1980), os mancais são representados, de forma bastante simplificada, como molas elásticas isotrópicas.

As análises por elementos finitos desenvolvidas para eixos rotativos com descontinuidades geométricas estão baseadas em modelos de viga de Timoshenko e Euler-Bernoulli (PAPADOPOULOS e DIMAROGONAS, 1987; OSTACHOWICZ e KRAWWCZUK, 1992; GUDMUNDSON, 1983).

A matriz completa 6x6 para representação da rigidez nodal utilizando a teoria de viga de Timoshenko foi introduzida por Papadopoulos e Dimarogonas (1987) e Ostachowicz e Krawwczuk (1992) para representar eixos de seções retangulares e circulares. Um modelo similar foi obtido por Gudmundson (1983), utilizando a teoria de viga de Euler-Bernoulli.

Entretanto, na maioria desses estudos os mancais são representados de forma simplificada, sendo que os coeficientes dinâmicos não são considerados.

Com o objetivo de trazer subsídios para um melhor entendimento sobre o comportamento dinâmico de rotores trincados, esse trabalho apresenta uma análise da influência de trincas transversais sobre o comportamento de rotores flexíveis suportados em mancais radiais hidrodinâmicos. O método de elementos finitos é utilizado para a obtenção da equação de movimento de sistemas rotor-mancais, que consiste em um sistema giroscópico amortecido. Uma formulação de variáveis de estado é utilizada para se obter o problema de autovalor, que permite prever os valores de frequências naturais de rotores com trincas transversais. A inclusão da trinca no modelo de elementos finitos do eixo rotativo é efetuada pela modificação localizada da matriz de rigidez. As matrizes de rigidez e de amortecimento dos mancais radiais hidrodinâmicos são também incluídas no modelo.

Elementos de viga, baseados na teoria de viga de Timoshenko, são empregados na modelagem do eixo. Elementos discretos de massa concentrada, que permitem representar discos montados sobre o eixo, também são incluídos no modelo de rotor. Os mancais radiais hidrodinâmicos são representados por oito coeficientes linearizados de força, que são obtidos por um procedimento de elementos finitos implementado para resolver as equações de lubrificação de primeira ordem, obtidas por meio da perturbação da equação clássica de Reynolds.

Esse trabalho está dividido em cinco capítulos, sendo que no capítulo 2 apresenta-se uma revisão bibliográfica que será subdividida entre conceitos relativos à Mecânica da Fratura, vibrações em estruturas trincadas e dinâmica de rotores.

No capítulo 3, a metodologia empregada na obtenção do modelo matemático para cálculo da matriz de rigidez bem como o procedimento de solução utilizado para resolução da equação do movimento são apresentados.

O capítulo 4 apresenta os testes de eficiência computacional para avaliação da sensibilidade da malha de elementos finitos e para a validação do procedimento implementado. As previsões de elementos finitos para os autovalores de sistemas rotativos são comparadas

com resultados disponíveis na literatura. Também são apresentados os resultados obtidos para rotores com trincas operando em mancais com filme fluido. Mapas de velocidade crítica são obtidos para diferentes condições de operação, mostrando a influência dos parâmetros geométricos da trinca no comportamento de rotores flexíveis.

Por fim, no capítulo 5, são apresentadas as principais conclusões do trabalho e as recomendações para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, são apresentados alguns conceitos de Mecânica da fratura, dinâmica de estruturas trincadas e dinâmica de rotores. Os conceitos da Mecânica da Fratura são utilizados para quantificar a influência da descontinuidade geométrica sobre a rigidez do eixo rotativo. Mostra-se, neste capítulo, que a rigidez do rotor é uma função periódica do tempo para eixos rotativos. Características de sistemas dinâmicos são apresentadas enfatizando a importância da representação dos mancais no sistema rotativo.

2.1 Mecânica da fratura

A Mecânica da fratura pode ser considerada o ramo da mecânica dos sólidos que estuda o comportamento de meios contínuos com descontinuidades geométricas, do tipo trincas. As relações entre a geometria da descontinuidade, a resistência do material e as tensões limites para evitar sua propagação são objetos de estudo da Mecânica da fratura. Estas descontinuidades ocorrem devido a inúmeras razões, incluindo as incertezas no carregamento, os defeitos nos materiais, a inadequação ao projeto e a manutenção falha. Em 1983, o *National Bureau of Standards* (atual *National Institute for Science and Technology*) e o *Battelle Memorial Institute* estimaram os custos para falhas devido à fratura nos EUA em 119 bilhões de dólares americanos por ano (ROYLANCE, 2001).

A Mecânica da fratura descreve a magnitude e a distribuição do campo de tensões na vizinhança de uma trinca, sendo a magnitude do campo de tensões quantificada pelo fator de intensidade de tensão.

2.1.1 Concentração de tensões e balanço energético

Inglis (1913) foi o primeiro a quantificar os efeitos da concentração de tensão ao analisar entalhes elípticos em placas planas sob um carregamento uniforme. Nessa análise, Inglis obteve uma expressão que determina a tensão na extremidade do maior eixo da elipse. A FIGURA 2.1 mostra uma placa plana com uma trinca elíptica no centro, submetida a um carregamento uniforme conforme experimento executado por Inglis. Inglis (1913)

considerou que as tensões no entalhe não eram influenciadas pelo contorno da placa, ou seja, a largura é muito maior que $2a$ e o comprimento muito maior que $2b$.

A EQUAÇÃO (2.1) mostra a tensão no ponto A da FIGURA 2.1.

$$\sigma_A = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (2.1)$$

onde $\rho = b^2 / a$ é o raio de curvatura da ponta da trinca.

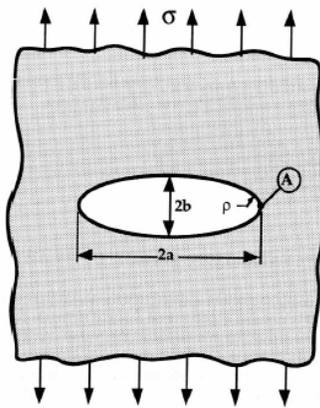


FIGURA 2.1 – Exemplificação do experimento executado por Inglis (1913).

Pode ser visto na EQUAÇÃO (2.1) que quanto menor o raio de curvatura do entalhe (entalhe mais agudo) maior será a tensão em sua ponta. Mas a concentração de tensão para um raio nulo no entalhe, neste caso chamado de uma trinca, tende ao infinito. Isto sugere que a ruptura ocorreria numa tensão nominal aplicada próxima de zero, o que evidentemente não acontece na realidade. Inglis apenas resolveu o problema de entalhe, mas não explicou porque as peças não falham da forma prevista teoricamente. Griffiths deu o passo seguinte para um melhor entendimento das trincas aplicando o principio de conservação da energia (OWEN e FAWKES, 1983).

Griffiths realizou experimentos com vidro, considerando que a fratura ocorre em um material frágil ideal, com uma trinca de comprimento $2a$ no interior de uma placa plana. Segundo Griffiths, uma trinca torna-se instável quando a energia de deformação durante a abertura da trinca for maior que a energia requerida para formar uma nova superfície de

trinca. A energia de deformação elástica, U_E , para uma trinca de comprimento a em um corpo homogêneo e infinito é dada pela EQUAÇÃO (2.2) e EQUAÇÃO (2.3) (OWEN e FAWKES, 1983):

$$U_E = \frac{\sigma^2}{2E} \pi a^2 \quad \text{Estado plano de tensões} \quad (2.2)$$

$$U_E = \frac{\sigma^2}{2E} \pi a^2 (1-\nu^2) \quad \text{Estado plano de deformações} \quad (2.3)$$

onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson.

O ganho de energia com a criação da superfície de fratura de dimensão $2a$ é dado pela EQUAÇÃO (2.4), onde γ representa a energia necessária para a criação das superfícies de fratura.

$$U_S = 2a\gamma \quad (2.4)$$

A variação da energia de deformação elástica, da energia superficial e da energia total do sistema em função do comprimento da trinca é apresentada na FIGURA 2.2. A energia de deformação total é a soma das energias de deformação elástica e superficial.

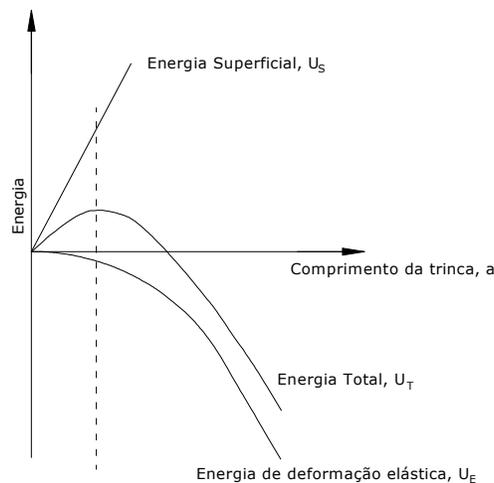


FIGURA 2.2 – Variação da energia em função do comprimento de trinca (OWEN e FAWKES, 1983).

Percebe-se pela FIGURA 2.2 que a partir de um determinado comprimento de trinca ocorre a inversão da energia total. Este comprimento de trinca é definido como comprimento crítico de propagação e pode ser determinado conforme EQUAÇÃO (2.5).

$$\frac{\partial}{\partial a}(U_S + U_E) = 0 \quad (2.5)$$

Para trincas de tamanho crítico existe a propagação instável da trinca, pois o módulo da taxa de energia elástica é maior que a energia superficial por unidade de comprimento. Deste modo, há energia disponível para a formação de novas superfícies, conforme a inequação seguinte.

$$\left| \frac{\partial U_E}{\partial a} \right| > \left| \frac{\partial U_S}{\partial a} \right| \quad (2.6)$$

Denomina-se taxa de liberação de energia elástica por unidade de espessura, G_E , ao valor positivo da taxa de energia potencial, conforme a EQUAÇÃO (2.7).

$$G_E = \left| \frac{\partial U_E}{\partial a} \right| \quad (2.7)$$

A taxa de energia absorvida pela trinca é dada pela EQUAÇÃO (2.8):

$$R = \frac{\partial U_S}{\partial a} \quad (2.8)$$

O crescimento da trinca se torna instável quando G_E for igual a R . Desta forma, a tensão atuante para um determinado comprimento de trinca é dada pela EQUAÇÃO (2.9):

$$\sigma = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a}} \quad (2.9)$$

2.1.2 Fator de intensidade de tensão e integral J

Uma trinca situada em um corpo pode estar carregada de diferentes maneiras. Irwin (1957) observou a existência de três movimentos independentes de deformação entre as superfícies da trinca. Estes movimentos foram categorizados como mostra a FIGURA 2.3.

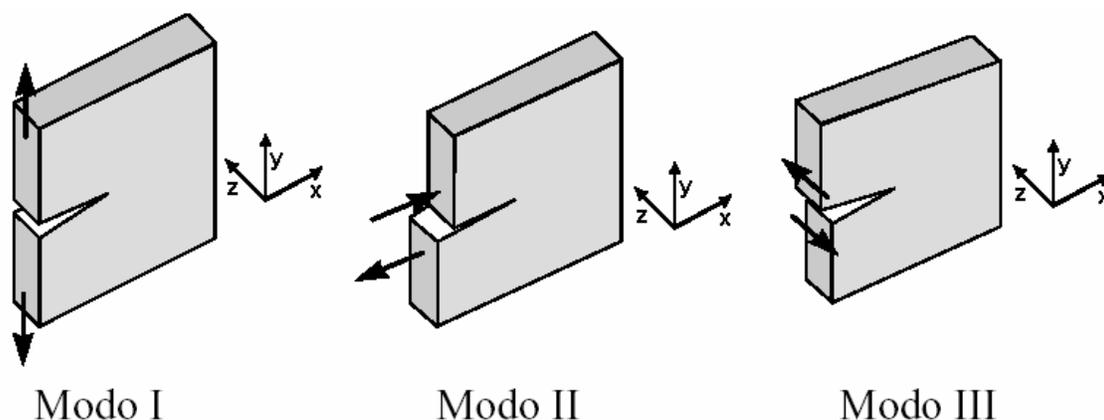


FIGURA 2.3 – Movimentos de deformação entre as superfícies da trinca (OWEN e FAWKES, 1983).

Conforme apresentado na FIGURA 2.3, no Modo I (abertura da trinca), as superfícies da trinca são deslocadas na direção y e permanecem simétricas nos planos $x-y$ e $x-z$. No Modo II (cisalhamento da trinca), as superfícies escorregam entre si na direção x , mas permanecem simétricas no plano $x-y$ e anti-simétricas no plano $x-z$. No Modo III (rasgamento da trinca), as superfícies escorregam entre si na direção z e a deformação é anti-simétrica em relação aos planos $x-y$ e $x-z$.

Em escala reduzida, o mecanismo de falha ocorre em uma zona em torno da ponta da trinca, gerando campos complexos de deformações locais o que impossibilita a descrição simplificada deste mecanismo (SAETHER e TA'ASAN, 2004). Ao categorizar os três modos de fratura em uma escala macroscópica são desprezadas as deformações microscópicas atuantes. Na FIGURA 2.4 pode ser visto o processo de fratura em diferentes escalas (SAETHER e TA'ASAN, 2004).

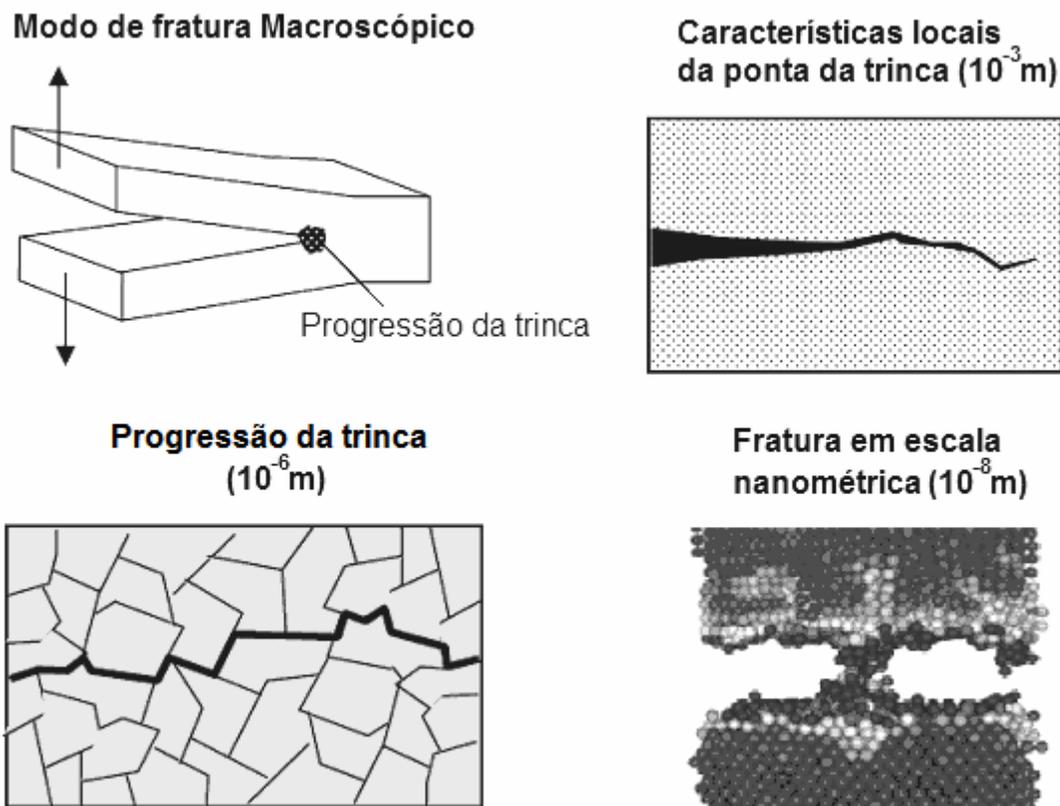


FIGURA 2.4 – Processo de fratura em diferentes escalas (SAETHER E TA'ASAN, 2004).

Usando as funções de tensão de Westergard, Irwin (1957) demonstrou que o campo de tensões elásticas na proximidade da ponta da trinca (comprimento $2a$), pode ser descrito, no modo I, por:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2.10)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2.11)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \quad (2.12)$$

onde o raio r e o ângulo θ são definidos na FIGURA 2.5 e K_I é o fator de intensidade de tensão do modo I de trincamento definido por Irwin (1957).

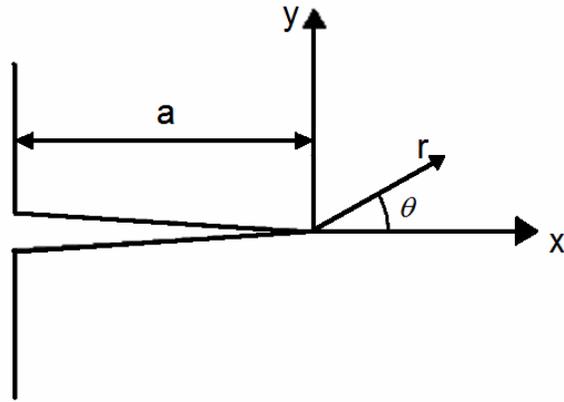


FIGURA 2.5 – Detalhe da trinca (OWEN e FAWKES, 1983).

Na FIGURA 2.5 é mostrado o sistema de coordenadas polares na região de propagação da trinca, objetivando facilitar a determinação das tensões atuantes na ponta da trinca. O fator de intensidade de tensão K é função da forma e tamanho da trinca, tipo de carregamento e configuração da geometria do componente estrutural. Das equações para a tensão na ponta da trinca, pode-se escrever K da seguinte forma simplificada (OWEN e FAWKES, 1983):

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.13)$$

onde σ é a tensão aplicada, a corresponde a meio comprimento de trinca e Y é uma função adimensional da geometria da trinca.

Os fatores de intensidade de tensão para os três modos de deformação, apresentados na FIGURA 2.3, podem ser relacionados com a razão da energia de deformação G conforme a EQUAÇÃO (2.14).

$$\begin{aligned} G_I &= \frac{(\kappa+1)}{8\mu} K_I^2 \\ G_{II} &= \frac{(\kappa+1)}{8\mu} K_{II}^2 \\ G_{III} &= \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde μ é o módulo de cisalhamento do material e $\kappa = 3 - 4\nu$, para estado plano de deformação, e $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$, para estado plano de tensões.

O fator de intensidade de tensões também pode ser representado por uma integral de contorno (OWEN e FAWKES, 1983), sendo que um contorno qualquer para esta integral é apresentado na FIGURA 2.6.

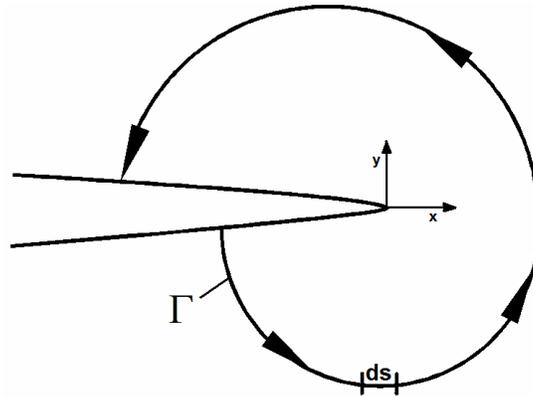


FIGURA 2.6 – Integral de contorno.

Pela FIGURA 2.6, uma integral de linha, denominada por integral J , é independente de um caminho fechado, podendo iniciar em qualquer ponto em uma das faces da trinca e terminar em qualquer ponto da outra face. A integral J é definida pela seguinte equação:

$$J = \int_{\Gamma} \left(U dy - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (2.15)$$

sendo U a taxa de energia de deformação, t_i o vetor de tração, u_i o vetor de deslocamento e ds um elemento de arco ao longo do contorno de integração.

2.2 Dinâmica de estruturas trincadas

A presença de trincas em um sistema mecânico ou estrutural introduz uma flexibilidade local que afeta a sua resposta vibracional. A análise da flexibilidade na região da trinca foi quantificada nos anos entre 1950 e 1960 por Irwin (1957), que relacionou a flexibilidade com o fator de intensidade de tensão. Baseado neste princípio foi desenvolvido um método

para estimar o fator de intensidade de tensões a partir da rigidez à flexão (inverso da flexibilidade). Liebowitz (1967) usou princípios da Mecânica da fratura para relacionar a energia de deformação, o fator de intensidade de tensões e o teorema de Castigliano para uma viga de seção retangular. A flexibilidade local para uma região trincada foi definida pela EQUAÇÃO (2.16):

$$a_c = M / \Delta\phi = (6\pi h / bEI) F_1(s) \quad (2.16)$$

onde: a_c é flexibilidade local na região trincada, h é a altura da seção transversal, b é a largura da seção retangular, EI a rigidez a flexão, $s = a/h$, a é a profundidade da trinca, e

$$F_1(s) = 1,86s^2 - 3,95s^3 + 16,37s^5 + 76,81s^6 + 126,9s^7 + 172,5s^8 - 144s^9 + 66,6s^{10}.$$

A flexibilidade local reduz a rigidez do sistema, diminuindo assim o valor de sua frequência natural. Dimarogonas (1970) verificou que, para uma trinca de pequena profundidade, a flexibilidade local Δa_c é proporcional a $(a/h)^2$. A flexibilidade total do eixo (A) é obtida pela soma da flexibilidade devida à trinca (Δa_c) com a flexibilidade da estrutura não trincada (a_{uc}), obtendo-se ($A = a_{uc} + \Delta a_c$). A rigidez do sistema é dada pela EQUAÇÃO (2.17).

$$K = 1/A = 1/(a_{uc} + \Delta a_c) = 1/(a_{uc} + \lambda(a/h)^2) \quad (2.17)$$

Onde $\lambda = 1,86(6\pi h / EI)$ é constante. Para pequenas trincas, $(\omega + \Delta\omega)^2 = (K/m)$

$$(\omega + \Delta\omega)^2 = \omega^2 + 2\omega\Delta\omega + \Delta\omega^2 = 1/a_{uc} m (1 + \lambda(a/h)^2 / a_{uc}) \approx 1/a_{uc} m - \lambda(a/h)^2 / a_{uc}$$

para $\lambda(a/h)^2 / a_{uc} \ll 1$. Desprezando $\Delta\omega^2$, a variação na frequência natural provocada por uma trinca é dada pela EQUAÇÃO (2.18).

$$\Delta\omega \approx -\lambda(a/h)^2 / 2\omega a_{uc} \quad (2.18)$$

Dimarogonas (1970) deparou-se com o problema da determinação da flexibilidade local de um eixo com uma trinca transversal. A aplicação direta de Mecânica da Fratura não pôde

ser feita porque a formulação para determinar o fator de intensidade de tensões para um eixo cilíndrico com uma trinca transversal não estava disponível. Desta forma, aproximou-se a seção transversal do eixo a várias tiras de elementos que variavam a altura numa direção perpendicular à ponta da trinca e paralela ao eixo de simetria do rotor cilíndrico. Cada elemento foi considerado como uma seção retangular de uma barra com uma trinca lateral, onde a EQUAÇÃO (2.16) é válida. A flexibilidade, rotação por unidade de momento no plano que contém o eixo de simetria do rotor que é normal à ponta da trinca, foi determinada pela integração da energia de deformação.

$$A_n(a) = (64 / E\pi R^3) F_2(a / D) \quad (2.19)$$

onde: A_n é a flexibilidade normal à trinca e F_2 é o rotacional da flexibilidade local durante a flexão, expresso por $F_2 = A_e E\pi R^3 / 64$. A_e é a área da seção transversal.

Similarmente para uma flexão no plano, que contém o eixo de simetria do rotor, e paralelo à ponta da trinca, tem-se:

$$A_t(a) = (R / 2E) G_2(a / D) \quad (2.20)$$

onde: A_t é a flexibilidade tangencial à trinca e G_2 é o rotacional da flexibilidade local durante a flexão, dado por: $G_2 = 2A_e E / R$.

No tempo $t = 0$, é considerado que um eixo horizontal possui uma trinca e o eixo vertical é perpendicular à ponta da trinca. No tempo t , o eixo girou um ângulo ωt , obtendo-se as flexibilidades apresentadas na EQUAÇÃO (2.21).

$$\begin{aligned} A_{yy} &= A_n \sin^2 \omega t + A_t \cos^2 \omega t \\ A_{xy} &= (A_n - A_t) \sin 2\omega t / 2 \\ A_{xx} &= A_t \sin^2 \omega t + A_n \cos^2 \omega t \\ A_{yx} &= (-A_n + A_t) \sin 2\omega t / 2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

Assim, as flexibilidades são funções periódicas do tempo, com frequência de 2ω (DIMAROGONAS, 1970). Esta é uma importante observação, pois a frequência de resposta do componente será duas vezes a frequência de excitação.

A FIGURA 2.7 apresenta um espectro de vibração obtido para um rotor de uma turbina da companhia pública de energia da Grécia (DIMAROGONAS, 1996). O fabricante do equipamento suspeitava de desalinhamento, realizando este serviço sem sucesso. Dimarogonas identificou uma trinca com base no pico oscilatório a duas vezes a frequência de operação. A máquina foi inspecionada e uma trinca de 120° foi encontrada.

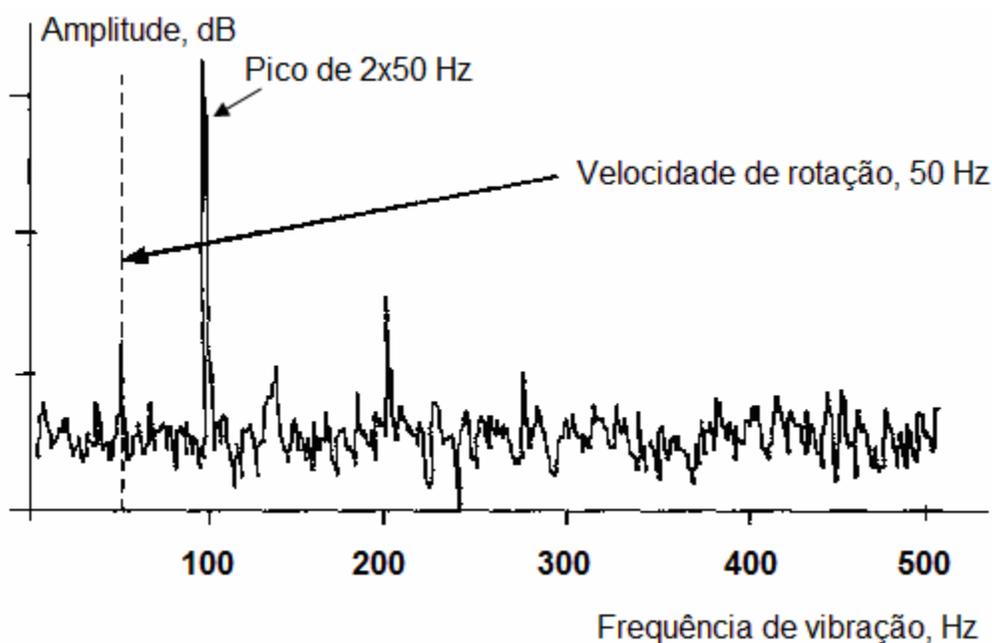


FIGURA 2.7 – Espectro de vibração em um rotor de turbina elétrica (DIMAROGONAS, 1996).

A modelagem de um rotor deve ser feita em um sistema de vários graus de liberdade, pois a rotação modifica a localização da superfície da trinca, alterando as propriedades elásticas do eixo. Pafelias (1974) considerou um rotor com $n-1$ elementos cilíndricos, delimitados por n nós, com comprimentos L_1, L_2, \dots, L_n . O eixo é suportado por dois mancais nos nós j_1 e j_2 . A secção trincada, de rigidez local igual a k_c , é posicionada no nó k . O coeficiente de influência da flexibilidade a_{cij} no elemento trincado (o deslocamento do nó

j devido a uma força unitária no nó i considerando somente a flexibilidade da trinca), $i, j = 1, 2, \dots, n$, é dado pela EQUAÇÃO (2.22).

$$\begin{aligned} a_{cij} &= (l_2 - l_k)(l_i - l_1)(l_k - l_1)(l_2 - l_i) / k_c (l_1 + l_2 - 2l_k)(l_2 - l_1) \text{ para } i > j \\ &= (l_k - l_2)(l_i - l_1)(l_k - l_1)(l_2 - l_i) / k_c (l_1 + l_2 - 2l_k)(l_2 - l_1) \text{ para } i < j \end{aligned} \quad (2.22)$$

Estes coeficientes de influência são alocados em uma matriz ΔA . A matriz de flexibilidade do sistema será $[A] + [\Delta A]$, onde A é a matriz de flexibilidade do rotor sem a trinca. A equação do movimento é dada nas EQUAÇÕES (2.23) e (2.24).

$$([A] + [\Delta A])[M]\{\ddot{x}\} + \{x\} = ([A] + [\Delta A])\{F\} \quad (2.23)$$

onde M é a matriz massa, $\{x\}$ é o deslocamento e $\{F\}$ é o vetor força. Multiplicando por $([A] + [\Delta A])^{-1}$.

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([K] + [\Delta K])\{x\} = \{F\} \quad (2.24)$$

onde $[\Delta K] = ([A] + [\Delta A])^{-1} - [K]$

Para um eixo rotativo, $[\Delta K]$ é uma função do tempo. A matriz de rigidez da trinca pode ser definida desprezando o acoplamento do movimento vertical e horizontal através da EQUAÇÃO (2.25).

$$[\Delta K] = [\Delta K]_n \sin^2 \omega t + [\Delta K]_p \cos^2 \omega t \quad (2.25)$$

Onde **Erro! Não é possível criar objetos a partir de códigos de campo de edição.** **Erro! Não é possível criar objetos a partir de códigos de campo de edição.** correspondem à direção perpendicular e paralela à ponta da trinca respectivamente. Usando identidade trigonométrica, a matriz de rigidez para a trinca é dada pela EQUAÇÃO (2.26).

$$[\Delta K] = ([\Delta K]_n + [\Delta K]_p) / 2 + ([\Delta K]_n - [\Delta K]_p) \cos 2\omega t / 2 \quad (2.26)$$

2.3 Dinâmica de rotores

Dentre as diversas etapas do projeto do eixo rotativo de uma máquina industrial destacam-se a seleção dos mancais, o cálculo das velocidades críticas e a análise de estabilidade do sistema.

Os mancais possuem a função de suportar as cargas estáticas e dinâmicas do sistema, introduzir rigidez e amortecimento ao sistema e controlar a posição do rotor. Mancais de filme fluido são amplamente utilizados em máquinas rotativas industriais por sua grande capacidade de carga, pelo amortecimento e pela vida útil bastante longa (STERNLICHT e LEWIS, 1968).

A determinação precisa das velocidades críticas de eixos rotativos suportados em mancais hidrodinâmicos é uma etapa preliminar de projeto extremamente importante para máquinas rotativas industriais. A velocidade crítica pode ser definida como a velocidade de rotação em que o rotor apresenta máxima amplitude de vibração orbital. A estimativa da faixa de operação adequada de um eixo rotativo depende da capacidade de predição das velocidades críticas.

Em sistemas discretos levemente amortecidos, os valores de velocidades críticas estão próximos dos valores das frequências naturais. Para exemplificar o cálculo das frequências naturais, considera-se o sistema massa-mola mostrado na FIGURA 2.8. Nessa figura, o rotor possui uma rigidez K_r e está apoiado em molas de rigidez K e amortecimento C . A frequência natural (f_n), para esse modelo simplificado, é determinada pela EQUAÇÃO (2.27).

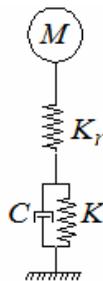


FIGURA 2.8 – Sistema Massa mola de um rotor.

$$f_n = \sqrt{\frac{K.Kr}{(K + Kr)M}} = \sqrt{\frac{Kr}{M}} \sqrt{\frac{K}{K + Kr}} \quad (2.27)$$

Nota-se na EQUAÇÃO (2.27) que a flexibilidade do apoio reduz a frequência natural do sistema. Vale ressaltar que a EQUAÇÃO (2.27) é bastante simplificada, pois nesta não está prevista a variação da frequência natural com a velocidade de rotação do eixo.

A variação das velocidades críticas pode estar associada a mudanças na rigidez do eixo, que, por sua vez, pode ser provocada por descontinuidades geométricas. A determinação prévia das características dinâmicas do sistema permite uma correlação com medições vibracionais, o que pode permitir a detecção de irregularidades no sistema.

A influência de uma trinca no comportamento dinâmico de eixos rotativos tem sido objeto de estudo de diversos trabalhos (SINOUE e LEES, 2005; DARPE et. al., 2004; ADEWUSI e AL-BEDDOOR, 2002; DIMAROGONAS, 1996; MUSZYNSKA, 1989; BENTLY, 1986; DIMAROGONAS, 1970; DIMAROGONAS e PAPADOPOULOS, 1983). A presença de uma trinca em uma máquina rotativa traz diversos perigos à operação da máquina, além do risco de falhas catastróficas de todo o sistema.

Geralmente dois métodos para identificar a presença de uma trinca em um eixo são utilizados. O primeiro visa reduzir a rigidez, devido à presença da trinca, obtendo frequências naturais reduzidas se comparadas às frequências do eixo sem trinca. A outra frente de pesquisa visa identificar a presença da trinca baseada na mudança da resposta dinâmica do eixo (SINOUE e LEES, 2005).

Durante a operação do eixo, o peso próprio produz uma flexão que faz a trinca abrir e fechar durante uma volta completa do eixo, variando sua rigidez através de uma função harmônica. Este mecanismo de abertura e fechamento da trinca é chamado de “*breathing crack*” e pode ser visto na FIGURA 2.9 (SINOUE e LEES, 2005).

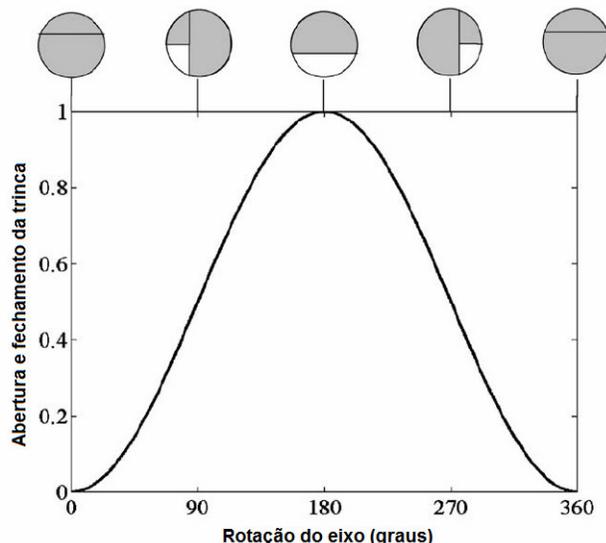


FIGURA 2.9 – Abertura e fechamento da trinca durante um giro do eixo (SINOUE e LEES, 2005).

O processo de abertura e fechamento da trinca gera picos de amplitudes em frequências iguais a duas vezes a velocidade de operação. Estes picos não indicam a presença de uma trinca, pois tal efeito também pode ser provocado pelo desalinhamento do eixo, pela assimetria do eixo, pela folga nos parafusos ou por outras não linearidades (ADEWUSI e AL-BEDDOOR, 2002; BENTLY, 1986). Conseqüentemente, esta característica sozinha é insuficiente para indicar a presença de uma trinca transversal em rotores. Desta maneira, a observação adicional das órbitas pode ser útil para revelar a presença de trincas (MUSZYNSKA, 1989).

A maior parte dos trabalhos desenvolvidos na análise de rotores trincados não considera os efeitos de variação de frequência dos coeficientes de força dos mancais na modelagem do rotor. O cálculo das velocidades críticas tem grande sensibilidade à variação dos coeficientes dinâmicos dos mancais. Outro aspecto importante não abordado na grande maioria das análises computacionais de rotores com descontinuidades geométricas é a avaliação da estabilidade do sistema em função dos parâmetros dos mancais. Para a realização de uma análise de estabilidade mais elaborada de sistemas rotativos, torna-se necessário resolver o problema de autovalor para o sistema giroscópico amortecido.

3 PROCEDIMENTO DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ANÁLISE DAS VIBRAÇÕES LATERAIS EM ROTORES

A análise do comportamento dinâmico de rotores trincados é realizada por meio de um procedimento de elementos finitos. O desenvolvimento das equações de elementos finitos e a determinação da matriz de rigidez de um elemento trincado são apresentados neste capítulo.

3.1 Determinação da matriz de rigidez do elemento com descontinuidade

Considera-se uma trinca de espessura desprezível e transversal ao eixo. Tais considerações acarretam no aumento da flexibilidade local sem a redução de massa do sistema. A representação da trinca no eixo é feita através da modificação da matriz de rigidez do elemento possuidor da descontinuidade. A matriz de rigidez modificada representa todos os fenômenos de acoplamento existentes em um rotor trincado, isto é, flexão-compressão, compressão-torção e flexão-torção (DARPE et al., 2004).

Os passos detalhados para a obtenção da matriz de rigidez modificada, que considera a variação local da flexibilidade do eixo causada por trincas, estão mostrados no Apêndice A.

Uma figura esquemática de um elemento finito de eixo que possui uma descontinuidade está dada na FIGURA 3.1. A posição da trinca é definida através da coordenada “ x ”. O elemento de eixo está sujeito a um carregamento com forças de cisalhamento P2, P3 e P8, P9, momentos fletores P5, P6 e P11, P12, forças axiais P1 e P7 e momentos torcionais P4 e P10.

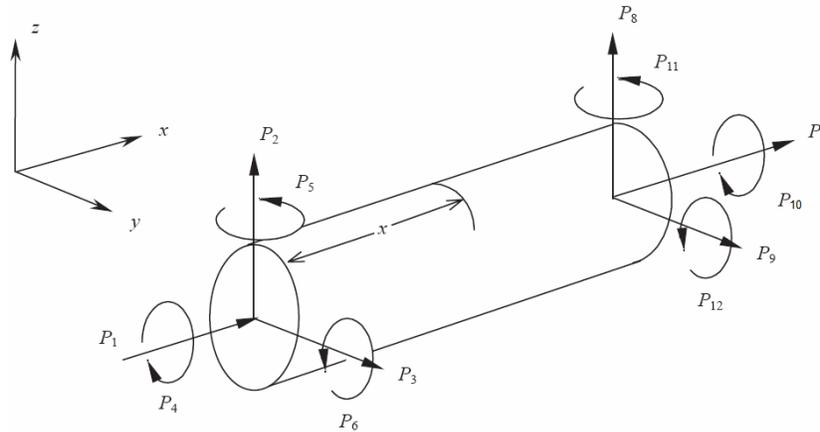


FIGURA 3.1 – Representação de um elemento finito de eixo com trinca.

O material do eixo é considerado homogêneo e isotrópico com módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν . A seção transversal do eixo pode ser vista na FIGURA 3.2. Observa-se que o raio da seção transversal é definido por “ R ” e a profundidade da trinca por “ a ”.

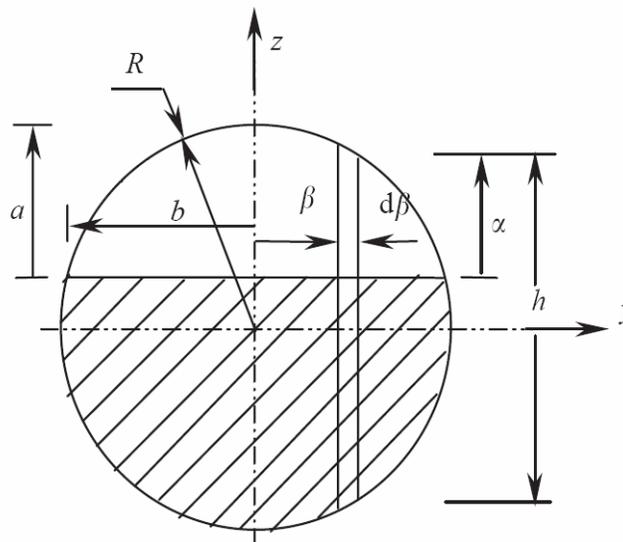


FIGURA 3.2 – Seção transversal do eixo.

Na determinação da matriz de rigidez modificada, os graus de liberdade de flexão, torção e tração-compressão são considerados nos nós do modelo de viga. A matriz de flexibilidade do elemento trincado é determinada a partir do teorema de Castigliano (DARPE et al., 2004).

$$u_i = \frac{\partial U_T}{\partial P_i} \quad (3.1)$$

onde u_i são os deslocamentos, P_i são as forças e U_T é a energia total de deformação, definida por:

$$U_T = U^0 + U^c \quad (3.2)$$

sendo, U^0 a energia de deformação do elemento sem a presença de descontinuidade e U^c é a energia de deformação devida à trinca. Deste modo o deslocamento é expresso por:

$$u_i = u_i^0 + u_i^c \quad (3.3)$$

onde

$$u_i^0 = \frac{\partial U^0}{\partial P_i}, \quad u_i^c = \frac{\partial U^c}{\partial P_i} \quad (3.4)$$

Através da energia de deformação, tanto o deslocamento u_i^0 como u_i^c podem ser derivados. Considerando a ação de forças axiais, torcionais, momentos fletores e cisalhamento na seção transversal da trinca, a energia de deformação pode ser escrita da seguinte forma.

$$U^0 = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\alpha_s V_1^2}{GA_e} + \frac{\alpha_s V_2^2}{GA} + \frac{M_1^2}{EI} + \frac{M_2^2}{EI} + \frac{T^2}{GI_0} + \frac{F^2}{A_e E} \right] dx \quad (3.5)$$

onde V_1, V_2 são forças cisalhantes, M_1, M_2 são momentos fletores, T é o momento torcional, F é a carga axial atuante na seção trincada, G é o módulo de elasticidade transversal, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia da seção transversal, I_0 é o momento polar de inércia da seção transversal, A_e é a área da seção transversal e α_s é o coeficiente de cisalhamento.

Usando os princípios de Mecânica da Fratura, a energia de deformação adicional devida à trinca é dada pela EQUAÇÃO (3.6) (DARPE et al., 2004).

$$U^c = \int_A J(A_e) dA_e, \quad (3.6)$$

onde $J(A_e)$ pode ser expressa pela EQUAÇÃO (3.7).

$$J(A_e) = \frac{1}{E'} \left[\left(\sum_{i=1}^6 K_{li} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^6 K_{lli} \right)^2 + m \left(\sum_{i=1}^6 K_{llli} \right)^2 \right]; \quad (3.7)$$

$i = 1,6$

sendo: $E' = E/(1-\nu)$ e $m = 1+\nu$.

$K_{li}, K_{lli}, K_{llli}$ são os fatores de intensificação de tensão correspondentes ao Modo I, Modo II e Modo III de deslocamento da trinca, respectivamente (ver FIGURA 2.3).

Substituindo-se as expressões de $J(A_e)$ na EQUAÇÃO (3.6), os deslocamentos associados à trinca podem ser obtidos. O deslocamento total u_i pode ser obtido através da adição de u_i^0 e u_i^c na EQUAÇÃO (3.3). O resultado desta equação pode ser escrito da seguinte forma:

$$u_i = A_{ij} P_j, \quad i = 1,6 \quad (3.8)$$

onde A é a matriz de flexibilidade.

A partir da matriz de flexibilidade local pode ser obtida a matriz de rigidez do elemento usando uma matriz de transformação, considerando o equilíbrio estático do elemento finito. A matriz de transformação $[T]$ converte a matriz flexibilidade $[6 \times 6]$ em uma matriz de rigidez $[12 \times 12]$ através da inversão da matriz de flexibilidade e realocação dos termos.

$$\{q_{1-12}\}^T = [T] \{q_{1-6}\}^T \quad (3.9)$$

Desta forma a matriz de rigidez para um elemento finito com trinca pode ser escrita como se segue:

$$[K]^c = [T][A][T]^T \quad (3.10)$$

3.2 Modelo de elementos finitos para o sistema rotor-mancal

Nesse item, são descritas as etapas de modelagem do eixo rotativo e dos mancais hidrodinâmicos. Primeiramente, são apresentadas as matrizes associadas ao eixo rotativo, que são: $[M]$ –Inércia translacional, $[N]$ –Inércia rotatória, $[G]$ –Efeito Giroscópico, $[K]$ –Rigidez (NELSON, 1980). Em seguida, apresenta-se o procedimento de derivação das matrizes de rigidez e de amortecimento associadas aos mancais, que são: $[K_m]$ –Rigidez do filme fluido, $[C_m]$ –Amortecimento do filme fluido. Os coeficientes cruzados de rigidez e de amortecimento das matrizes dos mancais são considerados na análise.

Por último, é montado o problema de autovalor através da formulação de variáveis de estado, a partir das equações geradas pelas matrizes de elementos finitos. Os autovalores complexos associados ao sistema permitem analisar a estabilidade do sistema rotor-mancal hidrodinâmico em função de diferentes parâmetros constitutivos e geométricos (MIRANDA et al., 2006).

Apenas o problema de vibração lateral de rotores flexíveis é estudado nesse trabalho. Os termos da matriz de flexibilidade da trinca associados à torção e à tração-compressão são desconsiderados na análise. São estudados neste trabalho apenas rotores horizontais apoiados em mancais radiais pelas suas extremidades, com isto a compressão no eixo devido ao peso próprio é desconsiderada. Para a análise linear de sistemas elásticos, o desacoplamento do problema de flexão não acarreta erros na análise.

3.2.1 Elemento finito utilizado

Neste trabalho é utilizada a teoria de viga de timoshenko para derivação das matrizes correlacionadas ao eixo rotativo. Para a determinação das funções de forma é utilizado o sistema de coordenadas ilustrado na FIGURA 3.3.

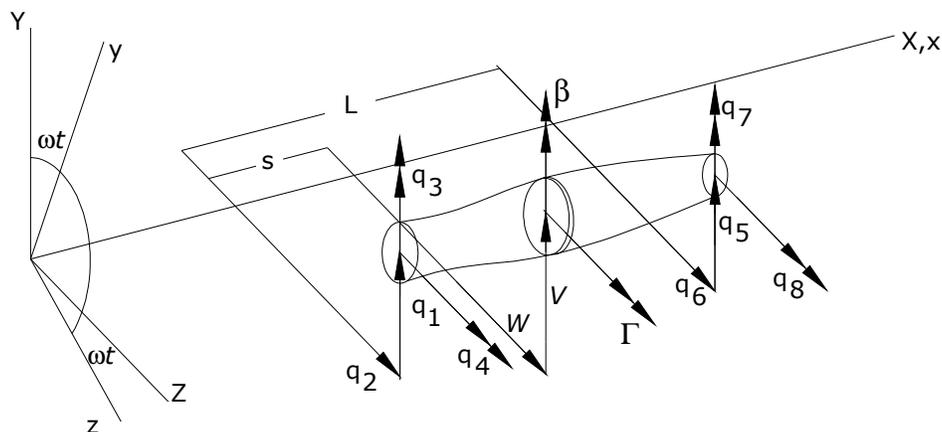


FIGURA 3.3 – Elemento finito de viga de Timoshenko (NELSON, 1980).

Em seu trabalho, Nelson (1980) considera um elemento típico do eixo localizado a uma distância s da extremidade da viga. A translação do centro da seção circular, desprezando o deslocamento axial, é dada por dois deslocamentos (V, W) provenientes da contribuição dos momentos (V_β, W_β) e da deformação cisalhante (V_e, W_e) . A rotação da seção circular é descrita pela rotação angular $(B = -\partial W_\beta / \partial s, \Gamma = -\partial V_\beta / \partial s)$ associada à deformação devida ao momento.

As translações de um ponto interno a um elemento típico do eixo são definidas aproximadamente pelas relações apresentadas na EQUAÇÃO (3.11).

$$\begin{Bmatrix} V_{(s,T)} \\ W_{(s,T)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 \\ 0 & \psi_1 & -\psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & \psi_4 & 0 \end{bmatrix} \{q(t)\} = [\Psi(s)] \{q(t)\} \quad (3.11)$$

As funções de forma individuais; $\psi_i(s) = \alpha_i(s) + \Phi \beta_i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$; representam os modos de deslocamentos estáticos associados ao deslocamento unitário de um ponto situado na extremidade do elemento. As funções $\alpha_i(s)$ são associadas com a deformação devida ao momento de flexão e $\beta_i(s)$ são funções associadas à deformação devida ao cisalhamento. Essas funções estão apresentadas no Apêndice B.

As rotações da seção de um elemento típico do eixo são definidas aproximadamente pelas relações apresentadas na EQUAÇÃO (3.12).

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{B}_{(s,T)} \\ \mathbf{\Gamma}_{(s,T)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 & -\phi_3 & \phi_4 & 0 \\ \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 \end{bmatrix} \{q(t)\} = [\Phi(s)]\{q(t)\} \quad (3.12)$$

As funções de forma individuais; $\phi_i(s) = \varepsilon_i(s) + \Phi \delta_i(s)$, $i = 1,2,3,4$; representam as funções de forma associadas com o deslocamento na extremidade de um elemento. As funções $\varepsilon_i(s)$ e $\delta_i(s)$ são relacionadas com os deslocamentos devidos ao momento e ao cisalhamento, respectivamente, para a viga de Timoshenko.

As funções de forma e as matrizes para o elemento de viga estão apresentadas no APÊNDICE B.

3.2.2 Modelagem do rotor

A teoria de vigas de Timoshenko permite incluir os efeitos da inércia translacional, da inércia rotatória, dos momentos giroscópicos e do cisalhamento no modelo de rotor. O sistema analisado está mostrado esquematicamente na FIGURA 3.4.

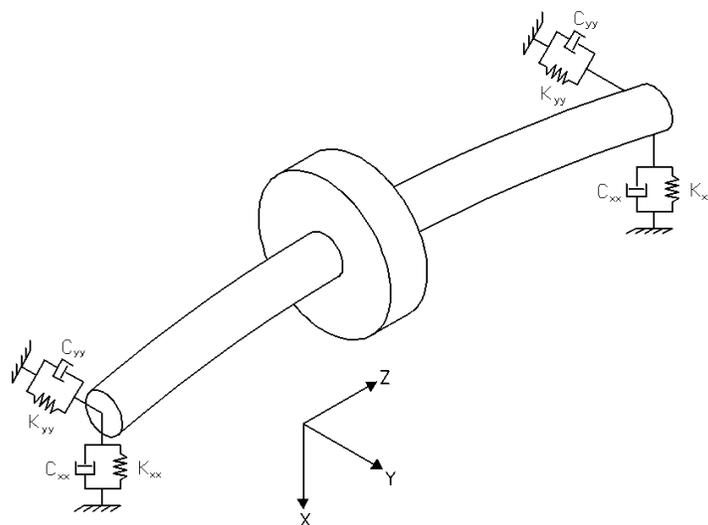


FIGURA 3.4 – Eixo flexível apoiado em mancais radiais hidrodinâmicos.

Para a modelagem da vibração lateral dos eixos flexíveis, são utilizados elementos de viga com dois nós e com quatro graus de liberdade por nó. A influência dos mancais nos coeficientes de rigidez e amortecimento do rotor também é considerada na modelagem. Os deslocamentos nodais são obtidos através equação global do movimento utilizando o

método de elementos finitos. A equação global do movimento é apresentada na EQUAÇÃO (3.13).

$$([M] + [N])\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\} \quad (3.13)$$

Onde: $\{R\}$ é a força aplicada no sistema, $[M]$ representa a matriz global de inércia translacional; $[N]$ é a matriz global de inércia rotatória; $[K]$ a matriz de rigidez do eixo; e $[C]$ a matriz de amortecimento equivalente do sistema rotor-mancal, que é expressa como $[C] = [C_m] - \Omega[G]$, onde $[G]$ é a matriz de efeito giroscópico do rotor e Ω é a velocidade de rotação do rotor.

Os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento são dados, respectivamente, por $\{\ddot{U}\}$, $\{\dot{U}\}$, $\{U\}$. Cada nó possui 4 graus de liberdade, onde o deslocamento do i -ésimo elemento é representado pelo vetor U_i composto pelas seguintes componentes (ver FIGURA 3.1):

$$U_i = \begin{Bmatrix} y_i \\ x_i \\ \varphi_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}, \text{ onde} \quad \begin{array}{l} y_i = \text{deslocamento horizontal} \\ x_i = \text{deslocamento vertical} \\ \varphi_i = \text{rotação em torno do eixo y} \\ \theta_i = \text{rotação em torno do eixo x} \end{array}$$

O vetor carregamento sobre rotor é representado pelo vetor R na EQUAÇÃO (3.13). Na análise do problema de autovalor este vetor é considerado nulo ($R=0$), analisando-se, portanto o problema de vibração livre. Um disco rotativo rígido é montado em uma posição axial pré-determinada do eixo, que permite simular sistemas rotativos de aplicação industrial, tais como compressores, bombas e turbinas. Este disco pode representar qualquer elemento de máquina que esteja acoplado ao eixo, tal como um motor, um impelidor de uma turbomáquina, etc.

Para a inserção da trinca na matriz de rigidez é utilizado o procedimento descrito no item 3.1. A matriz modificada é inserida na matriz de rigidez global através da substituição dos termos correspondentes ao elemento trincado. Tal elemento é determinado após a definição

da malha de elementos finitos utilizada. Uma ilustração de uma posição para a trinca ao longo de um eixo rotativo pode ser vista na FIGURA 3.5. A dimensão Z apresentada na FIGURA 3.5 corresponde à posição da trinca ao longo do eixo.

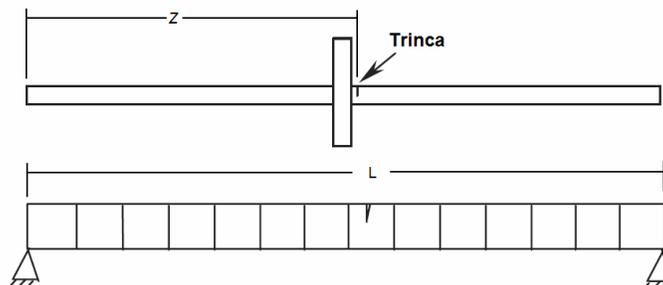


FIGURA 3.5 – Posição da trinca ao longo do eixo.

3.2.3 Modelagem dos mancais

O modelo de elementos finitos do mancal hidrodinâmico é desenvolvido a partir da equação clássica de Reynolds para mancais radiais lubrificadas a óleo (Childs, 1993). Em coordenadas cilíndricas (θ, Z) , essa equação é dada por:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu_v} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{h^3}{12\mu_v} \frac{\partial P}{\partial Z} \right) = -\frac{\Omega}{2} \frac{dh}{d\theta} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.14)$$

A coordenada Z está ao longo do eixo e as coordenadas X, Y na direção ortogonal, conforme indicado na FIGURA 3.4. A velocidade rotacional do eixo é denotada por Ω , o tempo por t e θ é a coordenada polar. As excentricidades do mancal nas direções vertical e horizontal são expressas por e_X e e_Y , respectivamente. A razão de excentricidade é definida como $\varepsilon = e/c$, onde $e^2 = (e_X)^2 + (e_Y)^2$. A viscosidade do fluido lubrificante é dada por μ_v , P representa a pressão hidrodinâmica e h é a espessura do filme fluido. Um procedimento de perturbação linear é utilizado em conjunto com a EQUAÇÃO (3.14) para representar as equações de lubrificação de ordem zero e primeira ordem (FARIA, 2001). Estas equações permitem o cálculo das forças de reação do mancal e de oito coeficientes dinâmicos de força. As equações de lubrificação de ordem zero e primeira ordem para mancais radiais cilíndricos são descritas nas EQUAÇÕES (3.15) e (3.16).

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu_v} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{h^3}{12\mu_v} \frac{\partial P}{\partial Z} \right) = -\frac{\Omega}{2} \frac{dh_0}{d\theta} - \Omega \{e_{x0} \sin(\theta + \Omega.t) - e_{y0} \cos(\theta + \Omega.t)\} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\mu_v} \frac{\partial P_\sigma}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{h^3}{12\mu_v} \frac{\partial P_\sigma}{\partial Z} \right) = & -\frac{\Omega}{2} \frac{dh_\sigma}{d\theta} + i\omega h_\sigma + \Omega \frac{dh_\sigma}{d\theta} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{3h_0^2 h_\sigma}{12\mu_v} \frac{\partial P_0}{\partial \theta} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{3h_0^2 h_\sigma}{12\mu_v} \frac{\partial P_0}{\partial Z} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nas EQUAÇÕES (3.15) e (3.16), h_0 representa a espessura do filme de ordem zero e h_σ representa a espessura proveniente da perturbação de primeira ordem. A perturbação é aplicada na frequência de excitação ω em uma posição de equilíbrio (e_{x0} , e_{y0}). P_0 representa a pressão de ordem zero e P_σ , representa o campo de pressão bidimensional no plano (X, Y) causada pelas perturbações dinâmicas dos deslocamentos e velocidades do rotor. Os coeficientes dinâmicos de força dos mancais são estimados a partir dos campos de pressão de ordem zero e primeira ordem (FARIA, 2001). Os coeficientes dinâmicos do mancal associados à rigidez $\{K_{\sigma\beta}\}_{\beta,\sigma=X,Y}$ e ao amortecimento $\{C_{\sigma\beta}\}_{\beta,\sigma=X,Y}$ são calculados a partir das impedâncias complexas pelas EQUAÇÕES (3.17) e (3.18).

$$Z_{\sigma\beta} = K_{\sigma\beta} + i\omega C_{\sigma\beta} = -\int_0^L \int_0^{2\pi} p_\beta h_\sigma R.d\theta.dz ; \quad \beta,\sigma = X, Y \quad (3.17)$$

ou

$$\begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} = -\int_0^L \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} p_X h_X & p_Y h_X \\ p_X h_Y & p_Y h_Y \end{bmatrix} R.d\theta.dz \quad (3.18)$$

As matrizes de rigidez $[K_m]$ e o amortecimento $[C_m]$ representam a resistência do filme fluido às variações do deslocamento e da velocidade do rotor, respectivamente. Essas matrizes são obtidas a partir da integração da EQUAÇÃO(3.18) onde $[K_m]$ é o coeficiente da parte real e $[C_m]$ o coeficiente da parte imaginária, definidas como:

$$[K_m] = \begin{bmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{bmatrix}; \quad [C_m] = \begin{bmatrix} C_{XX} & C_{XY} \\ C_{YX} & C_{YY} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

A FIGURA 3.6 mostra a seção transversal de um sistema rotor-mancal de deslizamento, na qual há oito coeficientes lineares de rigidez e amortecimento representando as características dinâmicas do filme de óleo.

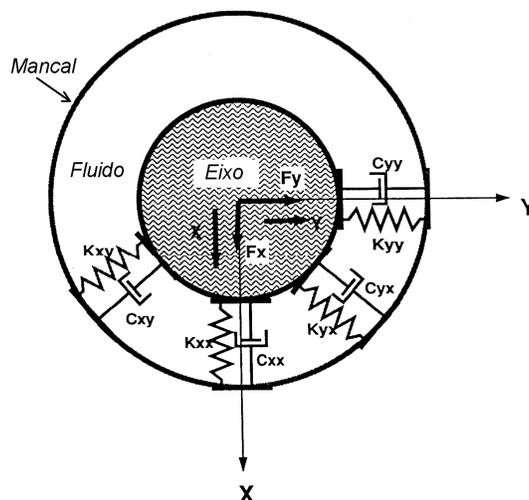


FIGURA 3.6 – Coeficientes de rigidez e amortecimento de um mancal radial hidrodinâmico.

3.2.4 Problema de autovalor – Formulação por variáveis de estado

A análise de vibrações de sistemas rotativos consiste em assunto de grande relevância para o desenvolvimento de turbomáquinas seguras e eficientes. A etapa inicial na análise dinâmica de máquinas rotativas consiste na obtenção dos valores de suas frequências naturais em diversas condições de operação. O problema de vibração livre de sistemas discretos leva naturalmente ao problema de autovalor, quando o sistema é representado através de um sistema linear de equações diferenciais ordinárias (JAMES et al., 1994). Desta forma, após a implementação das matrizes que representam o modelo discreto do sistema rotor-mancal, segue-se com a formulação do problema de autovalor para a análise de estabilidade. Os autovalores complexos fornecem informações sobre as frequências naturais e sobre a estabilidade do sistema.

Como o sistema linear é de segunda ordem, EQUAÇÃO (3.13), o problema de autovalor pode ser formulado através de variáveis de estado (Meirovitch, 1974; Meirovitch, 1980). Reescreve-se a EQUAÇÃO (3.13) no formato da EQUAÇÃO (3.20), considerando o problema de vibração livre, onde $\{R\}=0$. O problema de autovalor associado à EQUAÇÃO (3.20) pode ser reduzido a um problema equivalente, representado por um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, que possui o dobro de variáveis do problema original de segunda ordem.

$$([M] + [N])\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = \{R\} \quad (3.20)$$

Introduz-se o vetor $\{X\}$, definido por:

$$\{X\} = \left[\{\dot{U}\}^T \mid \{U\}^T \right]^T \quad (3.21)$$

Fazendo-se a substituição de variáveis, substituindo-se a EQUAÇÃO (3.21) na EQUAÇÃO (3.20), obtém-se um novo sistema, dado por:

$$[M^*]\{\dot{X}\} + [C^*]\{X\} = \{0\} \quad (3.22)$$

onde

$$[M^*] = \begin{bmatrix} [M] + [N] & 0 \\ 0 & [I] \end{bmatrix}; \quad [C^*] = \begin{bmatrix} [C] & [K] \\ -[I] & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

sendo que $[I]$ é a matriz identidade, que tem a mesma dimensão das matrizes $[M]$, $[N]$, $[C]$ e $[K]$. A solução da EQUAÇÃO (3.22) é da forma:

$$\{X\}(t) = \{X_o\}e^{st} \quad (3.24)$$

que leva ao problema de autovalor

$$s[M^*]\{X_o\} + [C^*]\{X_o\} = \{0\} \quad (3.25)$$

que pode ser reescrito na forma

$$[A^*]\{X_o\} = s\{X_o\} \quad (3.26)$$

Considerando-se que $[M^*]$ é uma matriz não singular, tem-se:

$$[A^*] = -[M^*]^{-1}[C^*] = \begin{bmatrix} -([M] + [N])^{-1}[C] & -([M] + [N])^{-1}[K] \\ [I] & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Vale ressaltar que a matriz $[C] = [C_m] - \Omega.[G]$, onde $[G]$ é a matriz de efeito giroscópico do eixo e a matriz $[C_m]$ representa o amortecimento do mancal.

A variável s fornece os autovalores complexos do sistema da EQUAÇÃO (3.25). Estes autovalores são formados por uma parte real a e uma imaginária b , dadas pela EQUAÇÃO (3.28).

$$s = a \pm ib \quad (3.28)$$

A partir da parte imaginária b , obtêm-se as frequências naturais do sistema em pares. A parte real a permite analisar a estabilidade do sistema.

O problema de autovalor derivado da equação de movimento através das variáveis de estado é resolvido utilizando-se o método QR (PRESS *et al.*, 1986).

O procedimento de elementos finitos desenvolvido para a determinação das frequências naturais em rotores trincados é implementado utilizando-se o software *Matlab*[®] 6.5. O fluxograma do algoritmo é apresentado na FIGURA 3.7. Nesse procedimento a profundidade da trinca, a localização da trinca, a rotação do eixo e o amortecimento dos mancais devem variar isoladamente dependendo da resposta requerida.

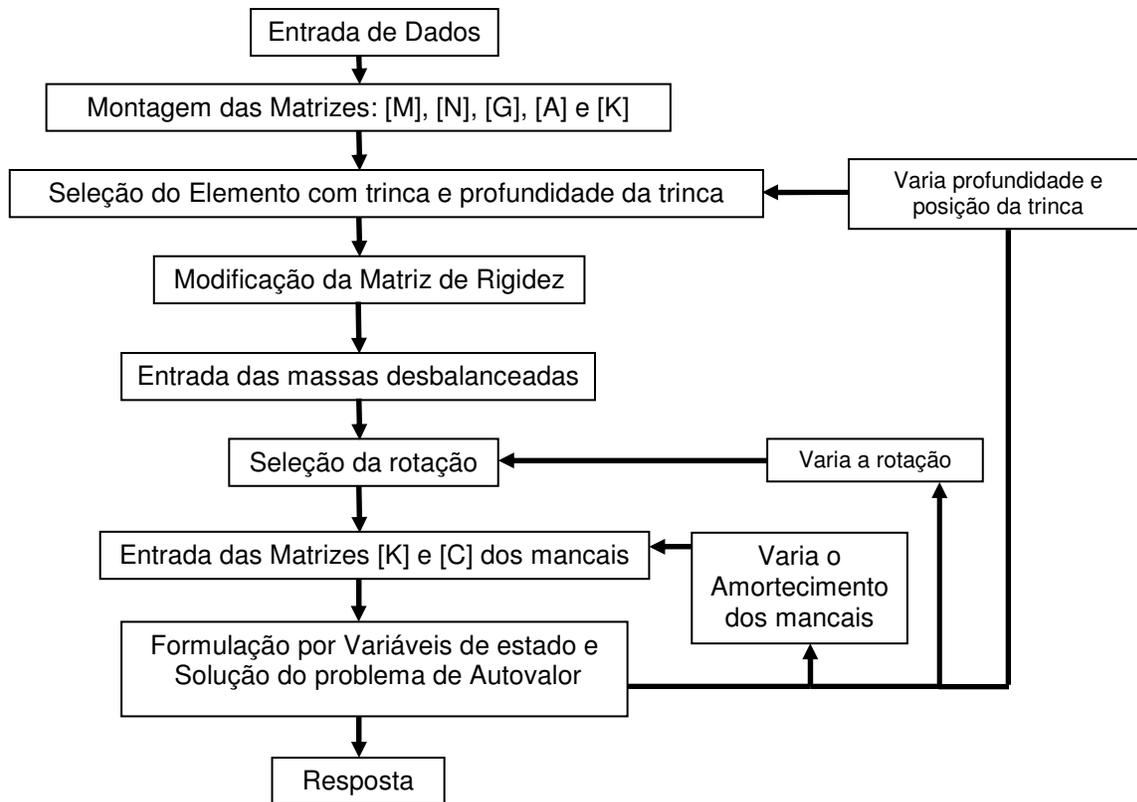


FIGURA 3.7 – Fluxograma do programa de análise de rotores trincados.

4 RESULTADOS

Os resultados obtidos para a resposta dinâmica de eixos rotativos em diversas condições de operação são apresentados nesse capítulo. Inicialmente, efetua-se a validação do procedimento de elementos finitos desenvolvido nesse trabalho utilizando-se exemplos de eixos trincados dados na literatura técnica.

4.1 Validação do procedimento computacional

A validação do procedimento computacional é realizada em duas etapas. Na primeira etapa, a eficiência do procedimento de elementos finitos é avaliada para um caso de rotor flexível sem trinca suportado em mancais de filme fluido. Na segunda, predições de elementos finitos para as frequências naturais e modos de vibração de um eixo com trinca são comparadas com resultados disponíveis na literatura.

4.1.1 Validação do modelo de rotor sem trinca

A validação é feita através da comparação dos resultados obtidos com os resultados obtidos por Lund (1974). Em seu trabalho, Lund (1974) considerou um rotor flexível apoiado nas extremidades por dois mancais hidrodinâmicos cujos coeficientes de rigidez direta valem $10,507 \times 10^6$ N/m e seus coeficientes de amortecimento direto são variáveis. Lund (1974) considerou o eixo como uma viga uniforme e não considerou os efeitos de cisalhamento, inércia rotatória e efeito giroscópico na modelagem do rotor.

Os parâmetros físicos do eixo analisado por Lund (1974) são apresentados na Tabela 4-1.

Tabela 4-1 - Parâmetros físicos do rotor analisado por Lund (1974).

Constante	Descrição	Valor	Unidade
L	comprimento do eixo	1,270	m
d	diâmetro do eixo	0,1016	m
E	módulo de Young do eixo	207×10^9	Pa
ρ	massa específica do eixo	7833	kg/m ³
k_{mancal}	coeficiente de rigidez direta dos mancais	$10,51 \times 10^6$	N/m
c_{mancal}	coeficiente de amortecimento direto dos mancais	(variável)	N.s/m

Uma malha de 120 elementos finitos de eixo é utilizada no estudo de validação do procedimento implementado, que se mostra bastante adequada para se obter até a quinta frequência natural com um desvio relativo próximo de 2%, quando comparado com os valores obtidos por Lund (1974).

A análise da sensibilidade da malha de elementos finitos está apresentada na Tabela 4-2, onde n indica o número de elementos finitos utilizado na malha e $F.N.$ significa frequência natural. São calculadas as frequências naturais do sistema com diferentes números de elementos finitos e comparadas aos valores de referência (Lund, 1974), adotando-se o valor de 17.512 N.s/m para os coeficientes de amortecimento direto e de $10,51 \times 10^6$ N/m para os coeficientes de rigidez direta. A variação entre os valores encontrados e os valores de referência é apresentada na Tabela 4-3.

Tabela 4-2 - Análise da sensibilidade da malha de elementos finitos.

	Lund (1974)	n=5	n=10	n=20	n=40	n=60	n=80	n=100	n=120
F.N.1(rpm)	4.260	4.239	4.396	4.373	4.342	4.329	4.323	4.319	4.316
F.N.2(rpm)	6.000	6.296	6.052	5.983	5.985	5.994	6.000	6.004	6.007
F.N.3(rpm)	16.500	16.463	16.934	16.938	16.864	16.829	16.809	16.796	16.788
F.N.4(rpm)	45.000	46.557	46.580	46.444	46.202	46.091	46.031	45.992	45.966
F.N.5(rpm)	90.000	92.700	91.943	91.848	91.631	91.518	91.454	91.413	91.385

Tabela 4-3 – Desvio relativo das freqüências naturais calculadas com diferentes números de elementos finitos.

	n=5	n=10	n=20	n=40	n=60	n=80	n=100	n=120
F.N.1	-0,5%	3,2%	2,6%	1,9%	1,6%	1,5%	1,4%	1,3%
F.N.2	4,9%	0,9%	-0,3%	-0,2%	-0,1%	0,0%	0,1%	0,1%
F.N.3	-0,2%	2,6%	2,7%	2,2%	2,0%	1,9%	1,8%	1,7%
F.N.4	3,5%	3,5%	3,2%	2,7%	2,4%	2,3%	2,2%	2,1%
F.N.5	3,0%	2,2%	2,1%	1,8%	1,7%	1,6%	1,6%	1,5%

Os autovalores obtidos através da formulação proposta permitem estudar a variação das freqüências naturais em função dos valores do coeficiente de amortecimento dos mancais. Efetua-se uma comparação entre os valores estimados pelo procedimento implementado nesse trabalho e os valores dados na literatura. Para esta comparação são utilizados os dados da Tabela 4-1, porém com coeficientes de rigidez direta dos mancais de $3,5024 \times 10^6 \text{ N/m}$.

Salienta-se que o problema de autovalor resolvido por variáveis de estado gera vários autovalores, e a análise de estabilidade deve levar em consideração a parte real de cada um deles. Já na análise das freqüências naturais, é possível identificar que apenas alguns destes autovalores correspondem às freqüências procuradas. No caso da malha de 80 elementos finitos, são gerados 162 autovalores com a parte real distinta, isto é, desconsiderando-se os autovalores repetidos (com sinal invertido) e os complexos conjugados. A FIGURA 4.1 apresenta as curvas de freqüências naturais em função do coeficiente de amortecimento direto, para os 3 primeiros modos de vibração do sistema rotor-mancal hidrodinâmico. A FIGURA 4.2 apresenta as curvas para o quarto e quinto modo. As curvas representadas pelas linhas contínuas e descontínuas, na FIGURA 4.1 e FIGURA 4.2, são reproduzidas a partir do trabalho de Lund (1974) e estão indicadas nas legendas como Modo 1, Modo 2, Modo 3, Modo 4 e Modo 5. As predições de elementos finitos para as freqüências naturais são representadas pelos símbolos mostrados nessas figuras. Os acrônimos AV162, AV161, AV160, etc., indicam o número do autovalor calculado pelo procedimento de elementos

finitos. Os resultados indicam uma boa concordância entre os valores calculados pelo procedimento de elementos finitos e os valores apresentados por Lund (1974).

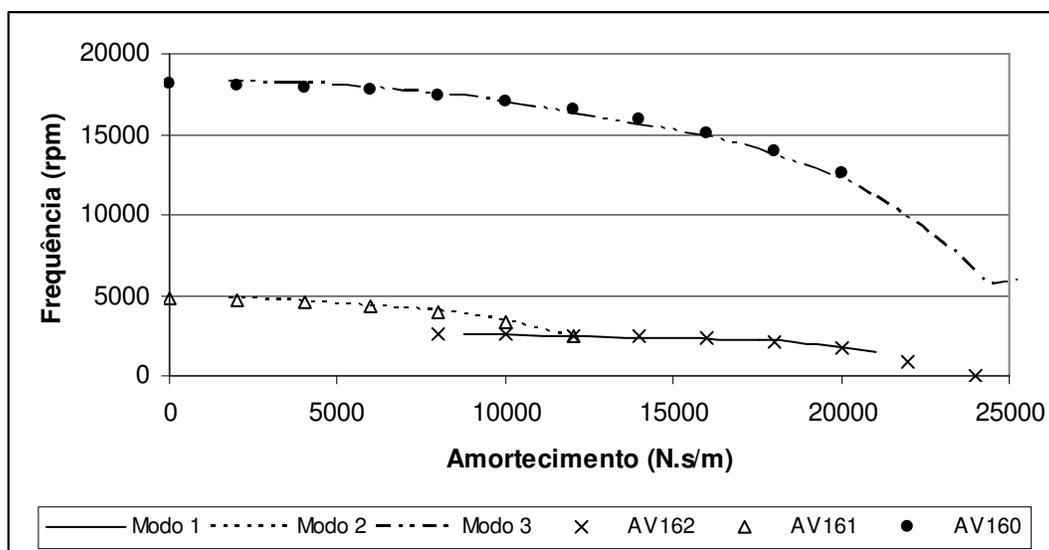


FIGURA 4.1 – Frequências naturais em função dos coeficientes de amortecimento dos mancais, para os 3 primeiros modos de vibração.

A ordem dos autovalores se altera com a variação dos valores do coeficiente de amortecimento. Por exemplo, na FIGURA 4.2, o autovalor 159 (AV159), tem sua parte imaginária b equivalente à frequência natural do quarto modo de vibração (Modo 4) somente até um certo ponto (coeficiente de amortecimento de 38.000N.s/m). A partir daí, o autovalor 160 (AV160) é que passa a acompanhar a curva do Modo 4. O autovalor 159 passa a representar o Modo 5, e não mais o Modo 4 quando o coeficiente de amortecimento atinge o valor de 56.000N.s/m. Essa mudança ocorre pois os parâmetros do sistema foram modificados acarretando a mudança de ordem dos autovalores, cada autovalor é associado a um modo de vibração através da análise do seu autovetor correspondente.

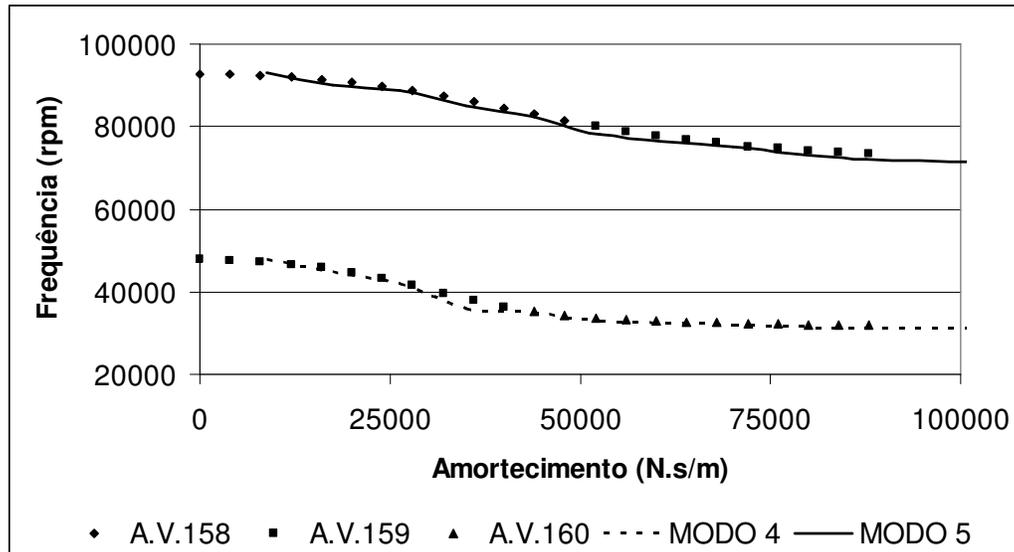


FIGURA 4.2 – Frequências naturais em função dos coeficientes de amortecimento dos mancais, para os modos de vibração 4 e 5.

4.1.2 Validação do modelo com descontinuidade geométrica

A validação é feita através da comparação dos resultados obtidos com o procedimento proposto e os resultados obtidos por Dong e Chen (2004). Em seu trabalho, Dong e Chen (2004) considera a teoria de viga de Euler-Bernoulli para representar um modelo de eixo contínuo. A região trincada é modelada através da modificação da flexibilidade local e a análise vibracional do eixo é realizada considerando uma trinca aberta em um eixo estacionário (não rotativo).

Os parâmetros físicos do problema analisado por Dong e Cheng (2004) são apresentados na Tabela 4-4. Nesta tabela é inserido o parâmetro z/L correspondente à posição relativa da trinca ao longo do eixo.

Tabela 4-4 – Parâmetros físicos do problema discutido por Dong e Cheng (2004).

Constante	Descrição	Valor	Unidade
L	comprimento do eixo	3,0	m
d	diâmetro do eixo	0,375	m
E	módulo de Young do eixo	207×10^9	Pa
ρ	massa específica do eixo	7700	kg/m ³
ν	Poisson	0,3	
z/L	Posição relativa da trinca	0,45	

A partir dos parâmetros do rotor descrito na Tabela 4-4 é efetuado um estudo da influência da variação da profundidade da trinca na resposta vibracional do rotor. A FIGURA 4.3 apresenta a variação dos três primeiros autovalores normalizados $\omega_{ci} / \omega_{ni}$ ($i=1,2,3$) com a profundidade relativa da trinca (profundidade/raio). Os autovalores ω_{c1} , ω_{c2} , ω_{c3} são os três primeiros autovalores para o rotor trincado e ω_{n1} , ω_{n2} , ω_{n3} são os três primeiros autovalores para o rotor contínuo.

As curvas representadas pelas linhas contínuas e descontínuas, na FIGURA 4.3, representam as predições de elementos finitos proposta neste trabalho e são nomeadas como MODO1 Calc., MODO2 Calc., e MODO3 Calc., para os autovalores correspondentes aos três primeiros modos de vibração, respectivamente. Já os símbolos indicam os resultados obtidos por Dong e Cheng (2004), e as legendas MODO1, MODO2 e MODO3 correspondem aos autovalores correspondentes aos três primeiros modos de vibração, respectivamente.

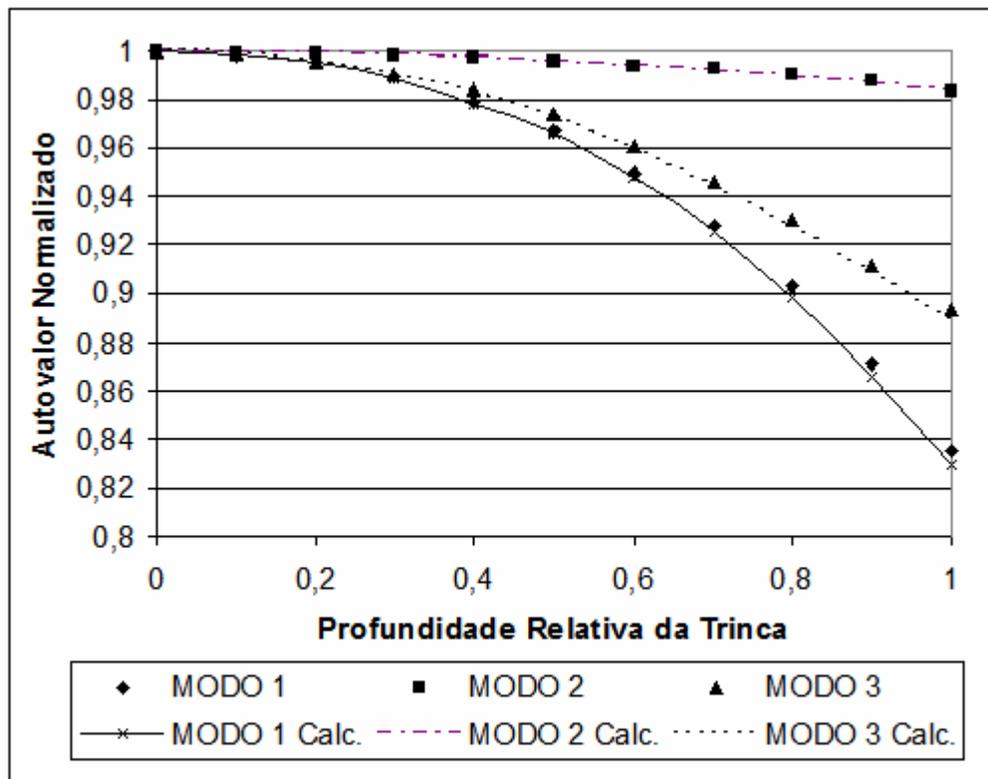


FIGURA 4.3 – Autovalor normalizado em função da profundidade relativa da trinca.

Pode ser visto na FIGURA 4.3 a boa concordância entre os resultados obtidos pelo procedimento proposto e os resultados obtidos por Dong e Cheng (2004). Para eixos com baixo índice de esbeltez o efeito do cisalhamento no eixo passa a ser mais significativo se comparado com um eixo de elevada esbeltez, isto explica a variação dos resultados apresentados na FIGURA 4.3, já que em uma das análises foi utilizada a teoria de viga de Euler-Bernoulli e na outra a teoria de viga de Timoshenko.

Para este exemplo é efetuada uma análise de sensibilidade de malha de elementos finitos para avaliar a variação da resposta com o tamanho da malha. Na Tabela 4-5 é apresentada a análise da sensibilidade da malha de elementos finitos, onde n indica o número de elementos finitos utilizado na malha e $F.N.$ corresponde à frequência natural.

Tabela 4-5 – Sensibilidade da malha de elementos finitos na análise de um eixo trincado.

	n=5	n=10	n=40	n=80	n=90
F.N. (rpm) (z/L=0,00)	550.18	548.29	546.76	545.84	545.67
F.N. (rpm) (z/L=0,08)	547.57	545.36	543.51	542.36	542.14
F.N. (rpm) (z/L=0,17)	541.42	538.21	535.38	533.52	533.17
F.N. (rpm) (z/L=0,25)	534.03	528.96	524.28	521.1	520.48
F.N. (rpm) (z/L=0,33)	528.26	520.51	513.06	507.87	506.85
F.N. (rpm) (z/L=0,42)	526.34	515.5	504.66	496.91	495.36
F.N. (rpm) (z/L=0,50)	529	515.5	501.25	490.73	488.59

Os resultados da Tabela 4-5 são apresentados graficamente na FIGURA 4.4. Pode ser visto na FIGURA 4.4 que malhas com mais de 100 (cem) elementos finitos geram resultados praticamente insensíveis à redução do tamanho do elemento, para o caso de um eixo estacionário apresentado por Dong e Cheng (2004).

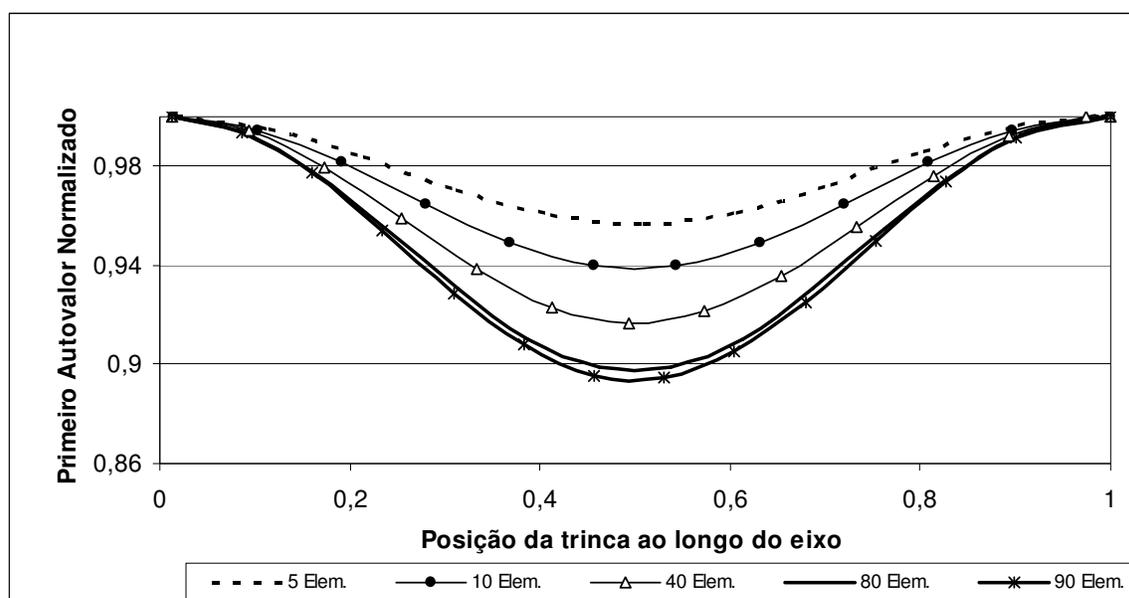


FIGURA 4.4 – Teste de malha de elementos finitos.

Os desvios relativos dos valores de frequências naturais obtidos para diferentes malhas de elementos finitos estão mostrados na Tabela 4-6. Uma malha com 150 elementos é utilizada como referência para o cálculo desses desvios. Pode-se constatar que a variação de frequência natural torna-se bastante pequena para malhas com mais de 80 elementos finitos.

Tabela 4-6 – Variação percentual dos valores de frequência natural em função do tamanho da malha.

	n=5	n=10	n=40	n=80	n=90	n=150
F.N.(z/L=0,00)	-2.14%	-1.79%	-1.50%	-1.33%	-1.30%	0.00%
F.N.(z/L=0,08)	-1.94%	-1.53%	-1.19%	-0.97%	-0.93%	0.00%
F.N.(z/L=0,17)	-2.90%	-2.29%	-1.75%	-1.40%	-1.33%	0.00%
F.N.(z/L=0,25)	-3.80%	-2.81%	-1.90%	-1.29%	-1.17%	0.00%
F.N.(z/L=0,33)	-5.68%	-4.13%	-2.64%	-1.60%	-1.40%	0.00%
F.N.(z/L=0,42)	-7.78%	-5.56%	-3.34%	-1.75%	-1.43%	0.00%
F.N.(z/L=0,50)	-9.84%	-7.04%	-4.08%	-1.90%	-1.45%	0.00%

A exemplo de Dong e Cheng (2004), efetua-se um estudo da variação dos três primeiros autovalores normalizados com a variação da posição relativa da trinca ao longo do eixo (z/L). As FIGURAS 4.5, 4.6 e 4.7 correspondem, respectivamente, ao primeiro, segundo e terceiro autovalor normalizado em relação ao valor calculado para um eixo contínuo. Nestas figuras, a influência da profundidade da trinca também é considerada.

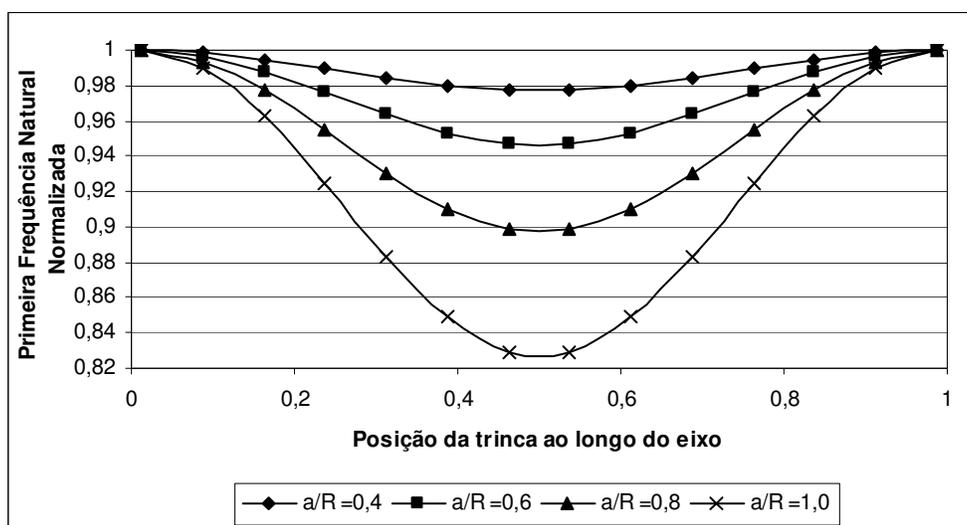


FIGURA 4.5 – Frequência Natural Normalizada em função da posição da trinca (primeiro modo).

Para avaliar a sensibilidade da localização da trinca ao longo do eixo e, ao mesmo tempo, estimar a variação da frequência natural em função da profundidade da trinca, os três primeiros autovalores do eixo, cujos dados encontram-se na Tabela 4-4, são calculados para diferentes posições e tamanhos de trinca. A FIGURA 4.5 mostra o comportamento da

primeira frequência natural, calculado para quatro trincas de diferentes profundidades, em função da posição axial da trinca, para o eixo estacionário analisado por Dong e Chen (2004). Pelas curvas apresentadas, constata-se que o primeiro modo de vibração do eixo é muito mais sensível a variações para trincas localizadas no meio do vão, que é a posição de máxima amplitude de vibração nesse modo. Pela FIGURA 4.5, também pode-se observar que à medida que se aumenta a profundidade da trinca, ocorre uma redução acentuada no valor da primeira frequência natural do eixo. Essa redução é muito mais expressiva na região do meio do vão para o primeiro autovalor.

É fácil verificar que a posição da trinca influencia os modos de vibração diferentemente. A exemplo da FIGURA 4.3, para uma posição de $0,45(z/L)$ o primeiro e terceiro modos de vibração são mais afetados pela trinca. A razão para tanto está na posição de $0,45(z/L)$ que fica próxima ao centro do eixo – posição de anti-simetria para o segundo modo. Já no primeiro e terceiro modos, o deslocamento nesta região é maior e conseqüentemente ocorre uma maior variação na resposta do sistema.

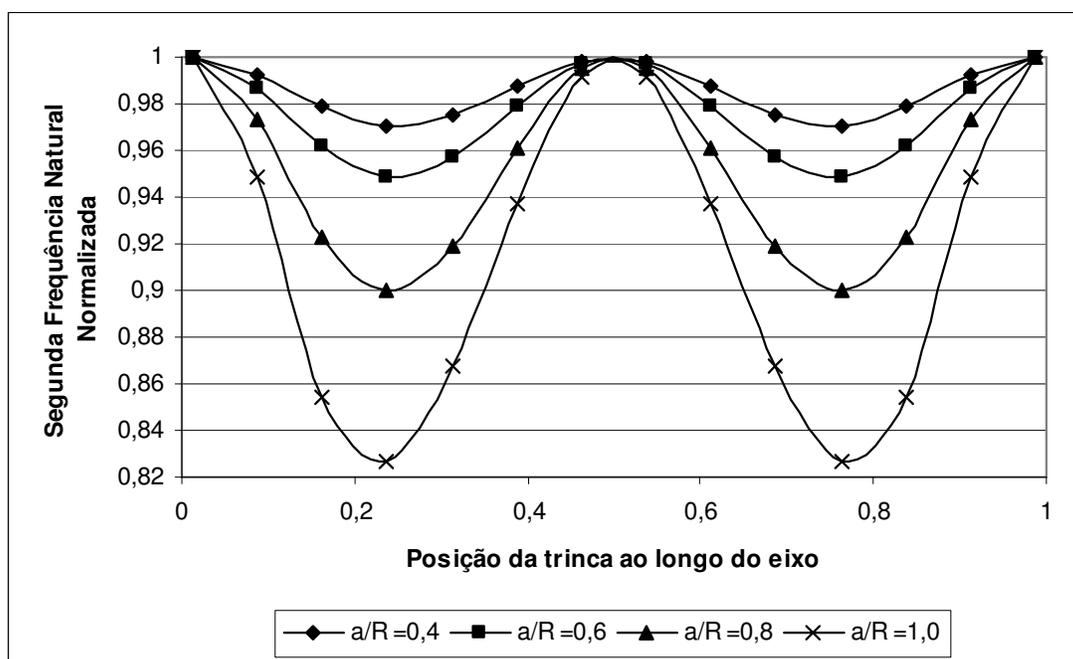


FIGURA 4.6 – Frequência Natural Normalizada em função da posição da trinca (segundo modo).

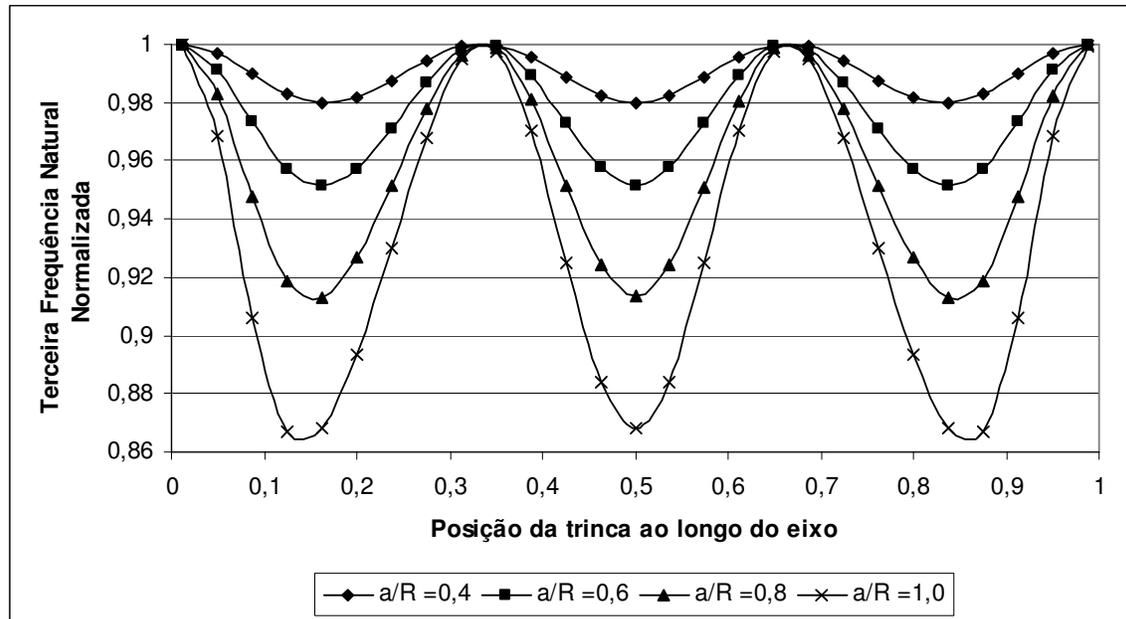


FIGURA 4.7 – Frequência Natural Normalizada em função da posição da trinca (terceiro modo).

Percebe-se pelas FIGURAS 4.6 e 4.7 que existem pontos ao longo do eixo em que uma trinca não afeta a resposta vibracional do sistema, isso ocorre quando a trinca ocupa pontos de momento nulo, ou seja, pontos de inflexão dos modos de vibração.

4.2 Influência de uma trinca no comportamento dinâmico de um rotor

O estudo realizado por Lund (1974) é retomado para a análise da influência de uma trinca no comportamento dinâmico de rotores. Nesta análise, são utilizados os mesmos parâmetros da Tabela 4-1, aliado com uma variação na rotação do eixo e a variação do amortecimento dos mancais.

A variação na rotação afeta diretamente a matriz $[C]$ da EQUAÇÃO (3.20), pois $[C] = [C_m] - \Omega \cdot [G]$, onde $[G]$ é a matriz de efeito giroscópico do eixo e Ω é a rotação. Para mostrar a influência dos momentos giroscópicos do rotor sobre os autovalores do sistema rotativo, é traçado o mapa de velocidades críticas na FIGURA 4.8. Nesta análise, os coeficientes de amortecimento dos mancais são considerados nulos.

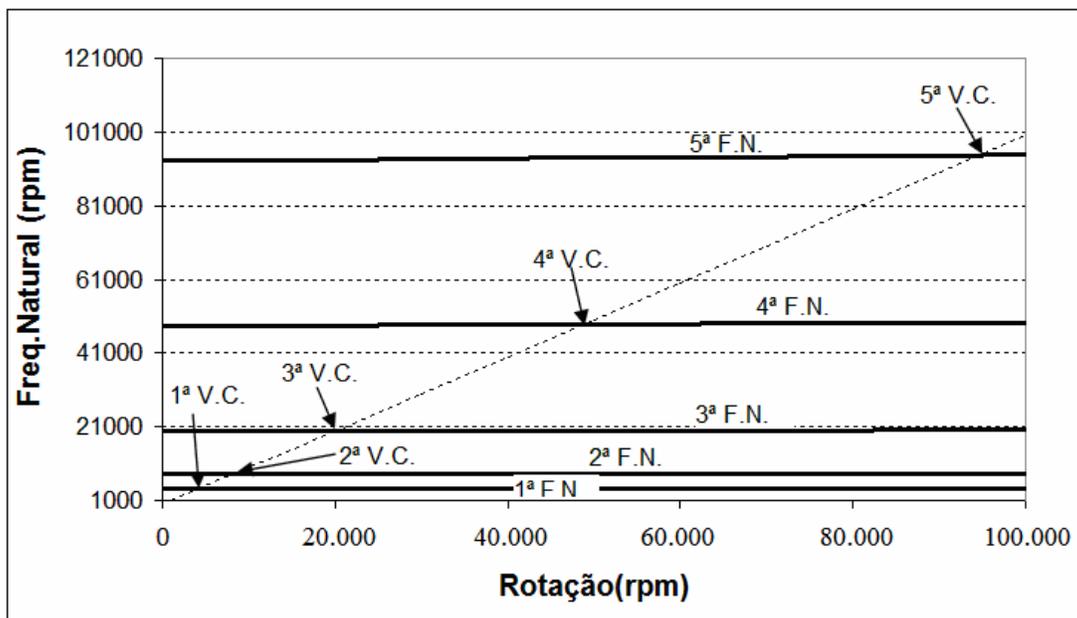


FIGURA 4.8 – Freqüências naturais em função da rotação do eixo.

A FIGURA 4.8 mostra que as cinco primeiras freqüências naturais variam muito pouco para rotações abaixo de 50.000 rpm. Pode-se observar um leve aumento da freqüência natural com a elevação da velocidade de rotação. Essa pequena variação da freqüência natural com a velocidade de rotação já era esperada, pois, no exemplo analisado, os momentos giroscópicos são de pequena magnitude por causa do pequeno diâmetro do eixo. São exibidas também, na FIGURA 4.8, as 5 primeiras velocidades críticas do sistema, que são indicadas por 1ª VC, 2ª VC, 3ª VC, 4ª VC, 5ª VC. Seus valores são aproximadamente iguais a 4.780 rpm, 8.190 rpm, 19.900 rpm, 48.900 rpm, e 94.900 rpm, respectivamente.

Para a análise da influência da trinca na mudança da velocidade crítica de um rotor, o primeiro modo de vibração é estudado em detalhes. Na FIGURA 4.9 pode ser visto como a freqüência natural do rotor varia com a rotação para um rotor contínuo e um rotor com uma descontinuidade do tipo trinca. Neste exemplo, foi inserida no eixo uma trinca de profundidade relativa de 0,8 (a/R) a uma localização relativa de 0,45 (z/L). A primeira velocidade crítica determinada para o rotor contínuo se dá por volta de 4780 rpm, enquanto com a presença da trinca esta velocidade cai cerca de 10%, assumindo valores próximos de 4325rpm.

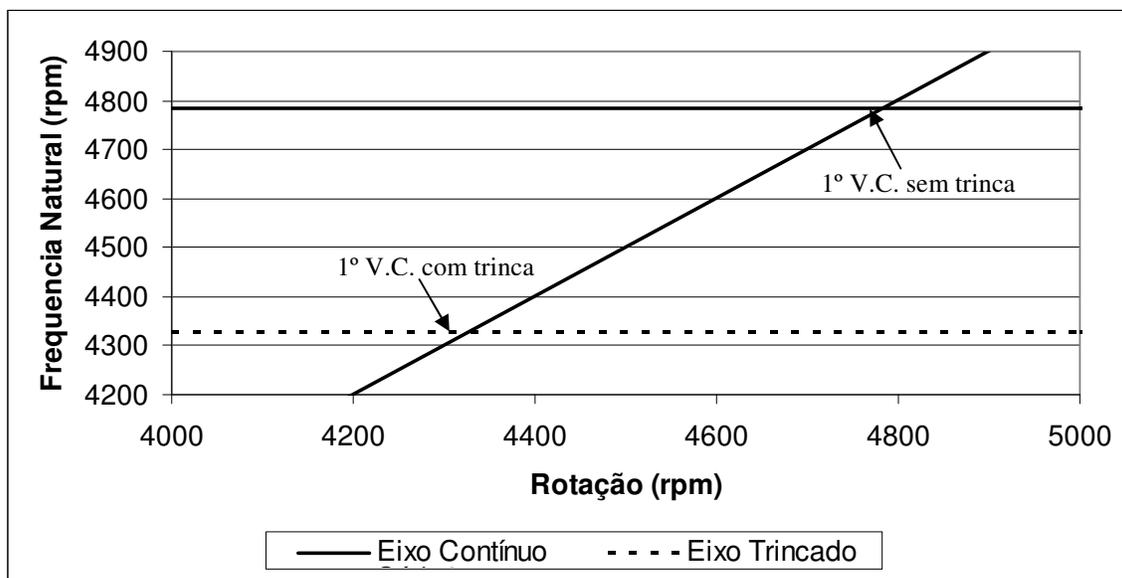


FIGURA 4.9 – Frequências naturais em função da rotação do eixo.

No item 4.1.1, foi analisado um exemplo de rotor sem trincas apoiado em mancais hidrodinâmicos. As curvas de frequência natural do rotor em função do coeficiente de amortecimento dos mancais obtidas, naquele item, mostram a importância da seleção adequada do mancal na análise de máquinas rotativas. Para o rotor descrito na Tabela 4-1, estuda-se agora a influência de trincas transversais na resposta dinâmica de eixos rotativos apoiados em mancais hidrodinâmicos. A influência de uma trinca de profundidade relativa de 0,8 (a/R) localizada a uma posição relativa de 0,45 (z/L) é mostrada nas FIGURAS 4.10, 4.11 e 4.12.

As FIGURAS 4.10, 4.11 e 4.12 apresentam a variação da frequência natural em função do coeficiente de amortecimento dos mancais, para um rotor com trinca e sem trinca. Nessas figuras fica clara a importância da correta seleção dos mancais para evitar que o rotor opere com uma velocidade de rotação próxima a uma frequência natural do sistema.

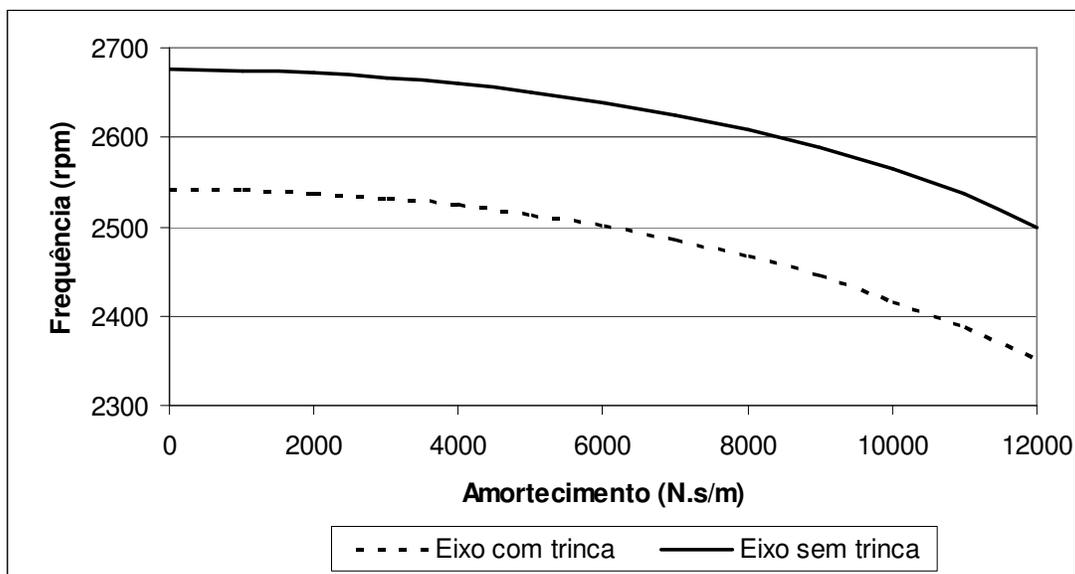


FIGURA 4.10 – Variação da primeira frequência natural em função do amortecimento dos mancais para rotores com trinca e sem trinca.

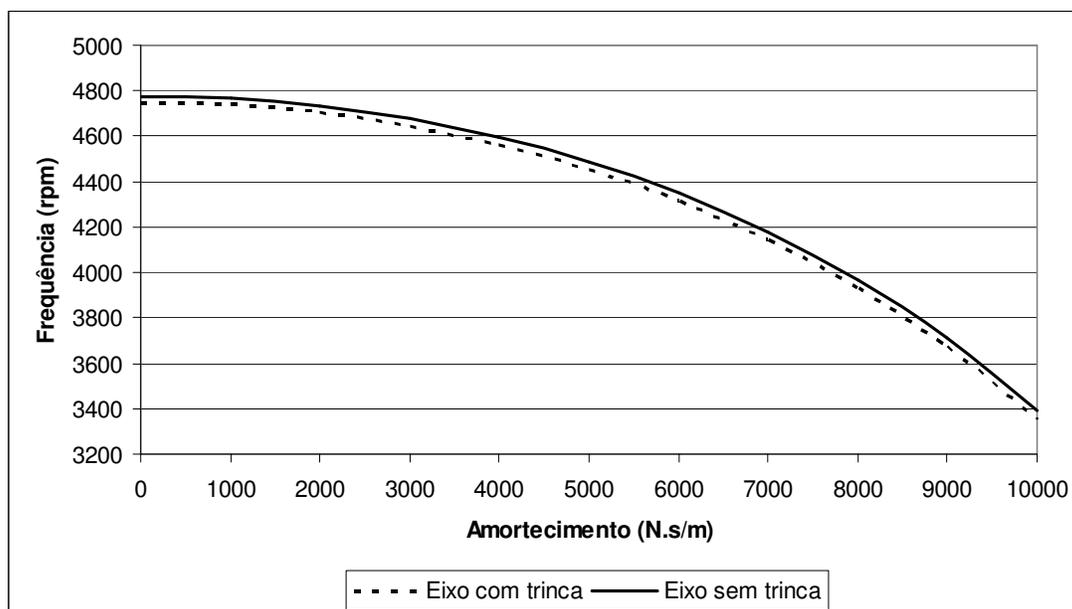


FIGURA 4.11 – Variação da segunda frequência natural em função do amortecimento dos mancais para rotores com trinca e sem trinca.

Nota-se na FIGURA 4.10 e FIGURA 4.11 que a variação da frequência natural, após a introdução da trinca no sistema, permanece constante ao variar o coeficiente de amortecimento dos mancais. O desvio relativo entre a frequência natural do eixo sem trinca e do eixo trincado é aproximadamente 5,35% e 0,77% para primeira e segunda frequência

natural, respectivamente. Já para a terceira frequência natural (FIGURA 4.12) existe uma região em que ocorre uma inversão nas curvas, ou seja, a frequência natural para o sistema no qual foi inserida uma trinca torna-se superior à frequência do sistema sem a trinca.

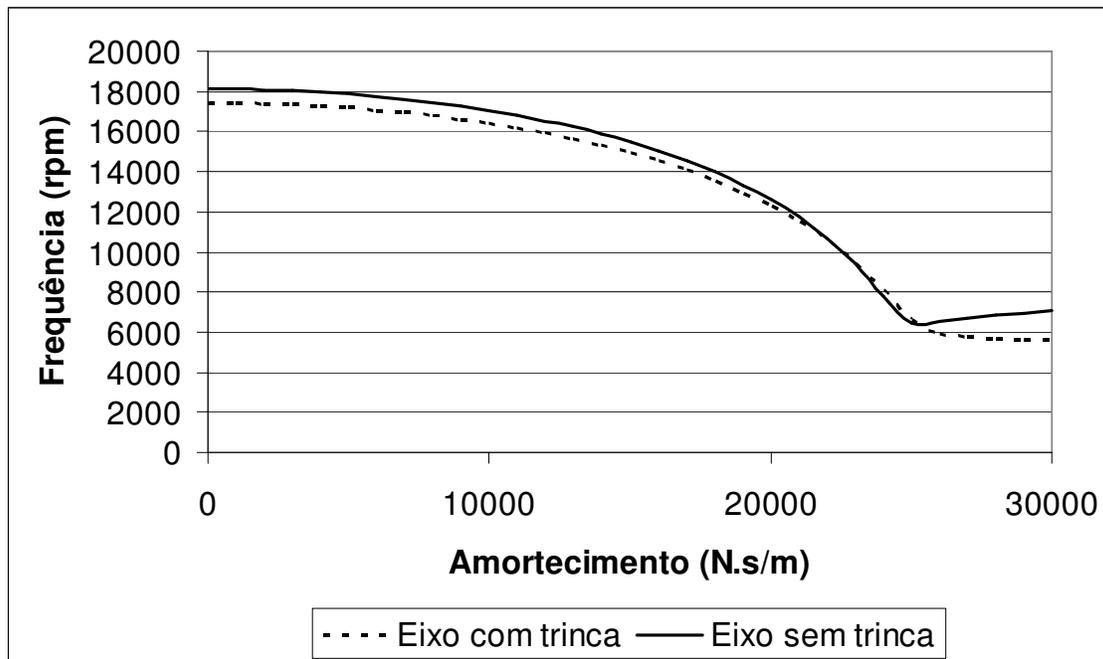


FIGURA 4.12 – Variação da terceira frequência natural em função do amortecimento dos mancais para rotores com trinca e sem trinca.

A inversão das curvas apresentadas na FIGURA 4.12 não era esperada uma vez que um trinca aumenta a flexibilidade local reduzindo a frequência natural do sistema. Para confirmar esta tendência estes resultados devem ser comparados com valores obtidos através de testes experimentais, eliminando assim a possibilidade de um erro numérico.

4.3 Análise dos autovalores e estabilidade do sistema

A análise de estabilidade de um rotor apoiado em mancais hidrodinâmicos é efetuada para um exemplo de rotor, que encontra-se instalado na bancada de ensaios de rotores do grupo de dinâmica de rotores da UFMG (Universidade Federal de Minas Gerais). Os parâmetros do sistema são apresentados na Tabela 4-7.

Tabela 4-7 - Parâmetros do sistema rotor-mancal hidrodinâmico.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
L	comprimento do eixo	0,30	m
d	diâmetro do eixo	0,015	m
l	comprimento dos mancais	0,012	m
c_l	Folga radial do mancal	$34,5 \times 10^{-6}$	m
μ	viscosidade do lubrificante	25×10^{-3}	Pa·s
ρ	massa específica do lubrificante	892	kg/m ³
E	módulo de Young do eixo	200×10^9	Pa
ν	coeficiente de Poisson do eixo	0,3	-
ρ	massa específica do eixo	7870	kg/m ³

A influência dos coeficientes dinâmicos dos mancais sobre o comportamento de rotores flexíveis é bastante evidente. Os coeficientes de rigidez direta atuam no sentido de impedir o movimento lateral do eixo, enquanto os coeficientes de rigidez cruzada atuam na direção tangente à órbita do eixo. Já os coeficientes de amortecimento direto tentam impedir a variação da velocidade radial do eixo rotativo. Uma forma de quantificar o papel dos coeficientes de força dos mancais sobre a estabilidade de rotores flexíveis tem sido o coeficiente de amortecimento efetivo, $2\omega C_{xx} / K_{yy}$, que é um parâmetro adimensional do mancal que sintetiza a influência do mancal sobre as forças tangenciais atuando sobre o eixo (VANICE, 1988).

Um primeiro exemplo de análise de estabilidade consiste na determinação da parte real dos autovalores complexos, a , para o rotor descrito na Tabela 4-7, em diversas velocidades de operação. A Tabela 4-8 apresenta os valores obtidos nessa análise para algumas configurações de mancais hidrodinâmicos. Por simplicidade, os coeficientes de amortecimento cruzado são desprezados nessa análise. Os valores do coeficiente de amortecimento efetivo do mancal também estão mostrados nessa tabela. Pode-se perceber a influência do coeficiente de amortecimento efetivo sobre a estabilidade do rotor.

Na Tabela 4-8, os valores dos coeficientes de amortecimento são alterados de forma a gerar coeficientes de amortecimento efetivo maiores e menores do que a unidade. Naturalmente que os coeficientes diretos de amortecimento são alterados de forma arbitrária para permitir a análise de estabilidade desenvolvida nesse trabalho.

Tabela 4-8 – Parte real (a) do autovalor principal do sistema.

Rotação (rpm)	K_mancal (N/m)	C_mancal (N.s/m)	$2\omega C_{xx}/K_{xy}$	Estabilidade	a
750	$10^4 \times \begin{bmatrix} 4,4150 & 4,4137 \\ -4,4137 & 4,4150 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 29,81 & 0 \\ 0 & 29,81 \end{bmatrix}$	0,1	INSTÁVEL	156
750	$10^4 \times \begin{bmatrix} 4,4150 & 4,4137 \\ -4,4137 & 4,4150 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 596,2 & 0 \\ 0 & 596,2 \end{bmatrix}$	2,1	Estável	-260
3200	$10^6 \times \begin{bmatrix} 0,8111 & 1,3896 \\ -1,3896 & 0,8111 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 208,4 & 0 \\ 0 & 208,4 \end{bmatrix}$	0,1	INSTÁVEL	298
3200	$10^6 \times \begin{bmatrix} 0,8111 & 1,3896 \\ -1,3896 & 0,8111 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4168 & 0 \\ 0 & 4168 \end{bmatrix}$	2,0	Estável	-193
5600	$10^6 \times \begin{bmatrix} 0,4092 & 2,3518 \\ -2,3518 & 0,4092 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 200,2 & 0 \\ 0 & 200,2 \end{bmatrix}$	0,1	INSTÁVEL	1767
5600	$10^6 \times \begin{bmatrix} 0,4092 & 2,3518 \\ -2,3518 & 0,4092 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4004 & 0 \\ 0 & 4004 \end{bmatrix}$	2,0	Estável	-130

Percebe-se, pela Tabela 4-8, que em todos os exemplos instáveis, $a > 0$, e em todos estáveis, $a < 0$. A explicação é que a parte real do autovalor corresponde ao expoente da EQUAÇÃO (3.24). Uma função exponencial de base maior que zero é crescente quando seu expoente é positivo e decrescente quando seu expoente é negativo. Quando $a < 0$ fica caracterizada a estabilidade do sistema.

A análise de estabilidade, feita a partir do sinal da parte real a do autovalor representativo do sistema, permite estimar quando o sistema pode passar do regime instável para o regime estável. A transição forçada do regime instável para o regime estável de sistemas rotativos suportados em mancais hidrodinâmicos pode ser efetuada pela seleção de um valor do coeficiente de amortecimento direto dos mancais de forma a se obter um valor de coeficiente de amortecimento efetivo, $2\omega C_{xx}/K_{xy}$, igual ou maior a 1. Deste modo, apresentam-se, na FIGURA 4.13, curvas do decaimento exponencial a do sistema rotativo em função do coeficiente de amortecimento efetivo, $2\omega C_{xx}/K_{xy}$. Emprega-se uma malha de 120 elementos finitos e analisa-se o autovalor 242 (AV242), para a velocidade de rotação do eixo de 11.200rpm. Os coeficientes de rigidez dos mancais, utilizados na curvas

da FIGURA 4.13 são $K_{xy} = -K_{yx} = 1 \times 10^5$ N/m, ($K_{xy} = -K_{yx} = 4 \times 10^5$ (*), 8×10^5 (▲), 10×10^5 (■) e 100×10^5 (◆) N/m– mostrados nas curvas) e os coeficientes de amortecimento dos mancais são $C_{xy} = C_{yx} = 0$ N.s/m ($C_{xy} = C_{yx} =$ variáveis). Os demais parâmetros físicos do sistema são os mesmos apresentados na Tabela 4-7.

Na FIGURA 4.13 são apresentadas quatro curvas para diferentes valores dos coeficientes de rigidez cruzada. Os coeficientes de rigidez cruzada são considerados iguais ($K_{xy} = K_{yx}$) nessa análise, indicando uma situação de operação centrada.

Constata-se, pela FIGURA 4.13, que o decaimento exponencial a representado pela parte real do autovalor 242 mantém-se positivo para valores de $2\omega C_{xx} / K_{xy} < 1$ e se torna negativo quando de $2\omega C_{xx} / K_{xy} > 1$.

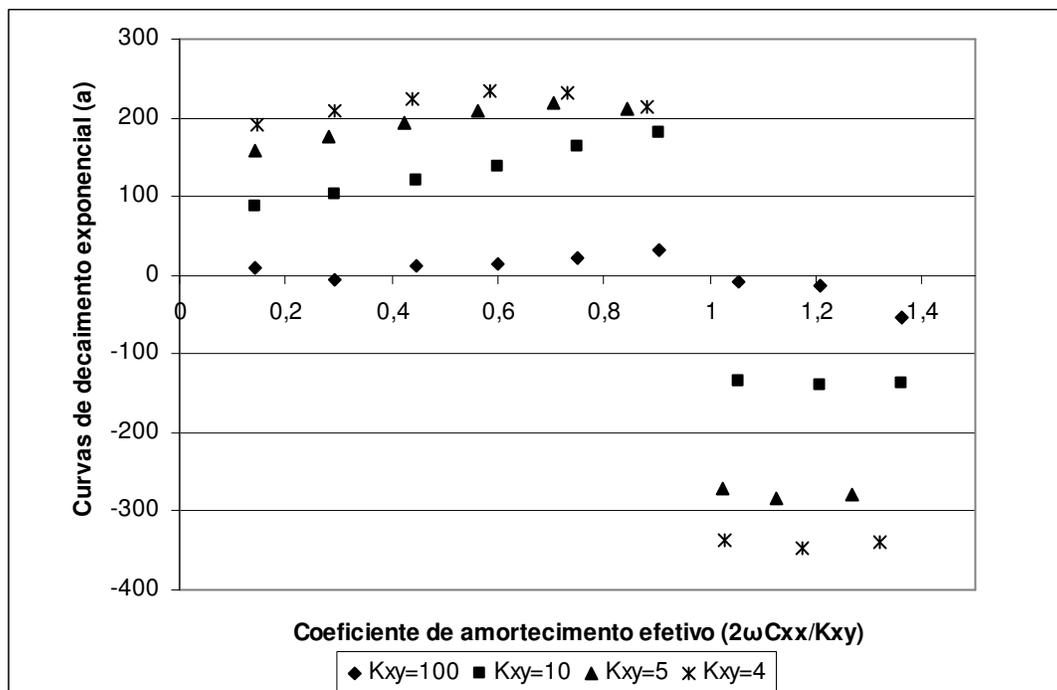


FIGURA 4.13 – Curvas de decaimento exponencial em função do coeficiente de amortecimento efetivo.

A análise de estabilidade do sistema através da análise da parte real do autovalor e do coeficiente de amortecimento efetivo $2\omega C_{xx} / K_{xy}$ é realizada para o mesmo rotor com a

presença de uma trinca de profundidade relativa de $0,8(a/R)$ e uma posição relativa de $0,45(z/L)$. Na FIGURA 4.14 é representada a comparação do decaimento exponencial entre um rotor contínuo e um rotor trincado para velocidade de rotação do eixo de 11200 rpm. Os coeficientes de rigidez dos mancais são de $K_{xy} = -K_{yx} = 1 \times 10^5$ N/m e $K_{xy} = -K_{yx} = 4 \times 10^5$ N/m e o amortecimento dos mancais é variado. O rotor sem trinca e o rotor com trinca são apresentados na FIGURA 4.14 pelos símbolos (*) e (■), respectivamente.

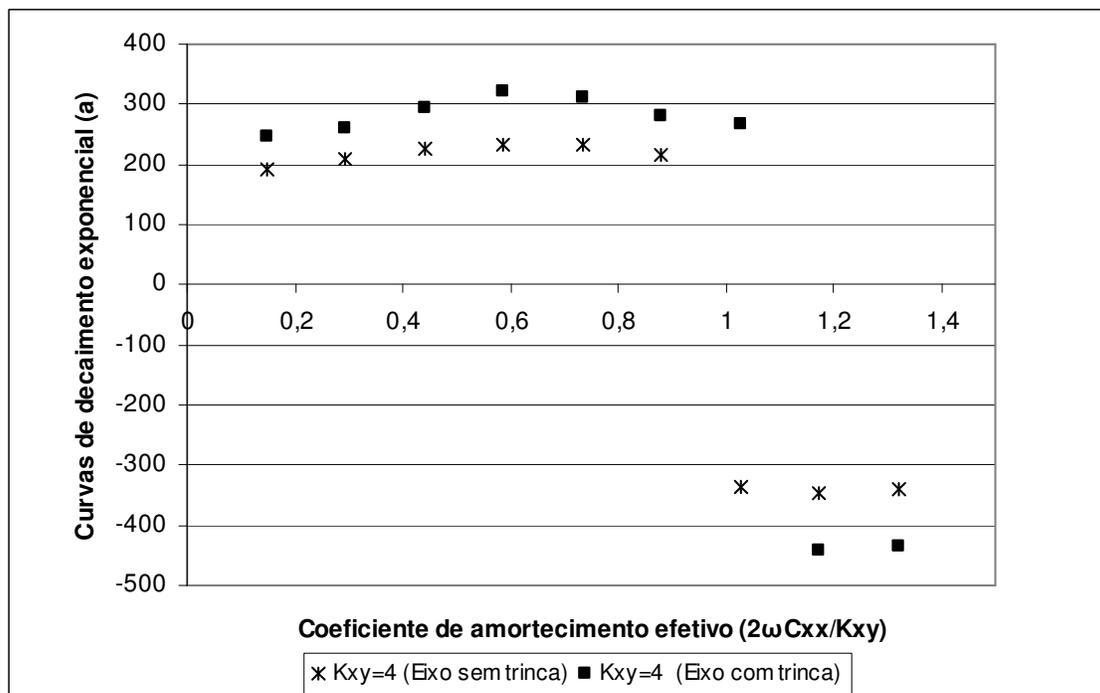


FIGURA 4.14 – Curvas de decaimento exponencial para rotores com trinca e sem trinca.

A FIGURA 4.14 mostra que o decaimento exponencial correspondente ao autovalor analisado é maior quando a trinca é introduzida ao sistema. Quanto maior, em módulo, o valor do decaimento exponencial, mais rapidamente a função cresce ou decresce. Ou seja, a introdução da trinca tem efeito positivo na estabilidade do sistema quando este está operando em região de estabilidade e efeito negativo quando este opera em uma região de instabilidade.

Cabe ressaltar que no exemplo analisado os mancais são os únicos responsáveis pelo amortecimento do sistema sendo, portanto responsáveis pela estabilidade do mesmo, desta

forma a afirmação que uma trinca pode auxiliar na estabilidade do sistema não pode ser descartada, pois uma trinca pode funcionar como uma rótula não transmitindo o momento ao longo do eixo e conseqüentemente modificando os esforços nos mancais.

A partir da análise da FIGURA 4.14, pode-se verificar que o valor do coeficiente de amortecimento efetivo que permite estabilizar a resposta do rotor é alterado na presença da trinca. Para eixos rotativos sem trinca, a transição entre regime estável e instável ocorre para $2\omega C_{xx} / K_{xy} = 1$. Entretanto, para o eixo com uma trinca transversal analisado anteriormente, essa transição ocorre para valores de coeficiente de amortecimento efetivo quatro por cento maiores, ou seja, para $2\omega C_{xx} / K_{xy} = 1,04$.

Esse resultado mostra que a existência de trincas em rotores flexíveis operando próximos a regiões de instabilidade pode retardar o comportamento de vibrações de grande amplitude, podendo alterar o ponto de observação da máxima amplitude de vibração.

Para o exemplo apresentado na FIGURA 4.14, os coeficientes de rigidez utilizados são de $K_{xx} = K_{yy} = 1 \times 10^5$ N/m e $K_{xy} = -K_{yx} = 4 \times 10^5$ N/m e os coeficientes de amortecimento dos mancais são $C_{xy} = C_{yx} = 0$ N.s/m e $C_{xx} = C_{yy} = 170$ N.s/m. O rotor sem trinca apresenta velocidade de instabilidade de 11200 rpm. Já para o rotor, que possui uma trinca de profundidade relativa de $0,8(a/R)$ com posição relativa de $0,45(z/L)$, a velocidade de instabilidade passa para 11760 rpm. Então o rotor com trincas transversais poderá operar em regime estável acima da velocidade crítica de instabilidade do rotor sem trincas. Esse retardamento do aparecimento de vibrações instáveis no rotor pode provocar problemas de monitoramento no sistema rotativo, pois qualquer fonte de excitação externa repentina poderá induzir movimentos de grande amplitude, que poderão provocar o comprometimento da integridade mecânica do rotor e de sua fundação.

A fim de quantificar a influência da profundidade da trinca na resposta dinâmica do sistema, avalia-se o valor do limite de estabilidade, medido pelo coeficiente de amortecimento efetivo, para diversas profundidades de trinca. Na FIGURA 4.15 é apresentado o aumento percentual do coeficiente de amortecimento efetivo em função da

profundidade relativa da trinca no eixo. Esta figura foi gerada utilizando-se os parâmetros apresentados na Tabela 4-7 e uma posição relativa de $0,45(z/L)$.

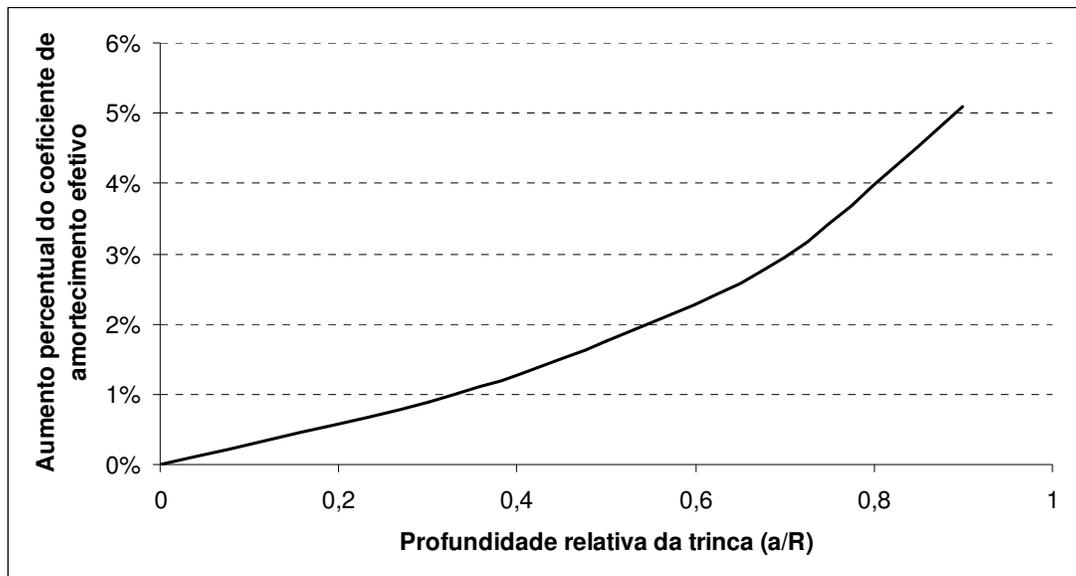


FIGURA 4.15 – Variação percentual do coeficiente de amortecimento efetivo em função da profundidade da trinca na região de transição de estabilidade.

Uma trinca com profundidade 0,8 (a/R) representa uma descontinuidade geométrica expressiva. Isso significa que, a predição da influência de trincas transversais na resposta dinâmica de rotores flexíveis pode ser efetuada de forma eficiente para trincas de grande magnitude. Para trincas muito pequenas, o comportamento macro dos parâmetros elásticos do eixo rotativo não apresenta grande alteração em relação ao comportamento de eixos sem trincas.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O presente trabalho apresenta uma análise por elementos finitos da influência de descontinuidades geométricas sobre o comportamento dinâmico de rotores flexíveis. O comportamento dinâmico de eixos com e sem a presença de uma descontinuidade é analisado comparativamente.

A representação da descontinuidade geométrica do tipo trinca no modelo de elementos finitos do eixo é realizada através da substituição da matriz de rigidez do elemento trincado na matriz de rigidez global do sistema. Tal representação leva em consideração que a trinca presente no eixo afeta somente sua rigidez, sendo que a variação na inércia é considerada desprezível.

A presença de uma descontinuidade no eixo afeta a resposta dinâmica do sistema. A profundidade e localização da trinca afetam a resposta do sistema diferentemente para cada modo de vibração do eixo. Esta variação ocorre, pois a trinca possui uma maior influência quando está situada em uma posição de maiores deslocamentos.

As velocidades críticas de um sistema são alteradas após a introdução de uma trinca no rotor. A trinca aumenta a flexibilidade local do sistema e conseqüentemente reduz sua frequência natural. A alteração nas velocidades críticas de um sistema pode acarretar altas amplitudes de vibração, uma vez que o rotor poderá operar com uma velocidade de rotação próxima a uma velocidade crítica do sistema.

O coeficiente de amortecimento efetivo, $2\omega C_{xx} / K_{xy}$, sintetiza a influência do mancal sobre as forças tangenciais atuantes sobre o eixo. Este coeficiente é utilizado para predizer a transição das regiões de instabilidade e estabilidade do sistema. A presença da trinca no eixo modifica o valor limite do coeficiente de amortecimento efetivo.

Neste trabalho, a análise de estabilidade de rotores flexíveis encontra-se restrita a sistemas suportados em mancais radiais cilíndricos. Outras configurações de mancais, tais como

mancais não cilíndricos e de sapatas móveis, poderiam ser incluídas na análise de estabilidade em trabalhos futuros.

Em suma, as predições de elementos finitos obtidas para o comportamento dinâmico de rotores trincados apoiados em mancais hidrodinâmicos cilíndricos indicam que trincas transversais podem alterar significativamente os modos de vibração e os valores das velocidades iniciais de instabilidade de sistemas rotativos operando em altas velocidades.

A estabilidade do sistema após a introdução da trinca é avaliada através do módulo e do sinal do decaimento exponencial e do coeficiente de amortecimento efetivo. É verificado que a introdução da trinca no sistema aumenta em módulo o decaimento exponencial. Pela análise dinâmica efetuada em rotores trincados observa-se que a trinca eleva a velocidade inicial de instabilidade associada à opção hidrodinâmica dos mancais de filme fluido.

Nesse trabalho foi comprovada a influência da trinca no comportamento dinâmico do sistema rotor-mancal. Foi demonstrada essa influência para diversas posições e profundidades de trinca para modos de vibração distintos. As influências dos mancais e de uma trinca na estabilidade do sistema foram quantificadas.

Adicionalmente a este trabalho diversos estudos podem ser realizados a fim de aprimorar, confirmar e desenvolver o estudo da influência de descontinuidades geométricas sobre o comportamento dinâmico de rotores flexíveis. Tais estudos podem contemplar os seguintes itens:

- Reproduzir experimentalmente os resultados encontrados neste trabalho;
- Estudar o comportamento dinâmico para rotores com trincas de diferentes geometrias;
- Estudar eixos de diferentes diâmetros e comprimentos;
- Incluir na análise todos os graus de liberdade do eixo;
- Utilizar um modelo não linear para o eixo, acoplando os problemas de flexão-torção-tração;

- Desenvolver uma metodologia pela qual possa determinar o local e comprimento da trinca através de medições de vibração.
- Efetuar a análise de estabilidade de rotores trincados suportados em diferentes mancais radiais hidrodinâmicos.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Adewusi, S.A. e Al-Bedoor, B.O., Experimental Study on the Vibration of an Overhung rotor with a Propagating Transverse Crack, *Shock and Vibration*, Vol. 9, p. 91–104, 2002.
2. Affonso, L. O. A., *Análise de Falhas e Solução de Problemas*, Qualitymark, Rio de Janeiro, 2005. 336p.
3. Bastian, L. F., *Mecânica da Fratura*, Rio de Janeiro, UFRJ, COPPE, 1978.
4. Bently, D.E, *Vibration Analysis Techniques for Detecting and Diagnosing shaft Cracks*, Orbit, Bently Nevada Corporation, USA, January, p.18–23, 1986.
5. Childs, D.W., *Turbomachinery Rotordynamics*, McGraw-Hill, USA, 1993. 476p.
6. Darpe, A.K., Gupta, K. e Chawla, A., Coupled Bending, Longitudinal and Torsional Vibrations of a Cracked Rotor, *Journal of Sound and Vibration*, 269, p.33–60, 2004.
7. Dimarogonas, A. D. e Papadopoulos, C.A., Vibration of Cracked Shafts in Bending, *Journal of Sound and Vibration*, 91, pp.583-593, 1983.
8. Dimarogonas, A.D., Dynamic Response of Cracked Rotors, General Electric Co., *Internal Report*, Schenectady, NY, E.U.A., 1970.
9. Dimarogonas, A.D., Vibration of Cracked Structures: A State of the Art Review, *Engineering Fracture Mechanics*, v. 55, n. 5, pp.831-857, 1996.
10. Dong, G.M. e Chen, J.Z., Parameter Identification of a rotor with an open crack, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 23, pp.325-333, 2004.
11. Faria, M.T.C., Some Performance Characteristics of High Speed Gas Lubricated Herringbone Groove Journal Bearings, *JSME International Journal*, série C, v. 44, n.3, pp.775-781, 2001.

12. Gash, R., Vibration of Large Turbo-Rotors in Fluid-Film Bearings on an Elastic Foundation, *Journal of Sound and Vibration*, v. 47, n. 1, pp.53-73, 1976.
13. Gudmundson, P., The Dynamic Behavior of Slender Structures with Cross-Sectional Cracks, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 31, p.329-345, 1983.
14. Inglis, C.E., *Stresses in a Plate Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners*, Proc. Inst. Naval Architects, 60, 1913.
15. Irwin, G. R., Analysis of Stress and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate, *J. Appl. Mech*, v. 24, pp.361-364, 1957.
16. James, M.L, Smith, G.M., Wolford, J.C. e Whaley, P.W., *Vibration of Mechanical and Structural Systems*, 2. ed, Harper Collins, USA, 1994. 660p.
17. Lee, Y-S e Chung, M-J, A Study on Crack Detection Using Eigenfrequency Test Data, *Computers and Structures*, 77, pp. 327-342, 2000.
18. Liebowitz, H., Vanderveldt, H. e Harris, D. W., Carrying Capacity of Notched Column, *Int. J. Solids Structures*, 3, pp.489-500, 1967.
19. Lund, J.W., Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid Film Bearings, *ASME Journal of Engineering for Industry*, pp. 509-517, 1974.
20. Meirovitch, L., A New Method of Solution of the Eigenvalue Problem for Gyroscopic Systems, *AIAA Journal*, v. 12, n.10, pp.1337-1342, 1974.
21. Meirovitch, L., *Computational Methods in Structural Dynamics*. Sijthoff e Noordhoff International Publishers, The Netherlands, 1980.
22. Miranda, W.M, Brant, B.F. e Faria, M.T.C, Aplicação do Método de Elementos Finitos na Determinação de Autovalores e Análise da Estabilidade de Sistemas Amortecidos, Anais do 27th Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE, Belém, PA, Brasil, 15p., 2006.

23. Miranda, W.M., Machado, L.H.J. e Faria, M.T.C., 2005, Some Insights Into the Dynamic Response of Flexible Rotors Supported on Fluid Film Bearings, *anais do 18th International Congress of Mechanical Engineering*, COBEM, Ouro Preto, MG, Brasil, 2005. 8p.
24. Muszynska, A., *Misalignment and Shaft Crack-Related Phase Relationships for 1_ and 2_ Vibration Components of Rotor Responses*, Orbit 10 (2), Bently Nevada Corporation, USA, September, 1989.
25. Nelson H. D., A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory, *ASME Journal of Mechanical Design*, v.102, pp. 793-803, 1980.
26. Nelson, H.D. e Mcvaugh, J. M., The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements, *ASME Journal of Engineering for Industry*, pp. 593-600, 1976.
27. Ostachowicz, W. M. e Krawwczuk, M., Coupled Torsional and Bending Vibrations of a Rotor with an Open Crack, *Archive of Applied Mechanics*, pp. 191-201, 1992.
28. Owen, D. R. J. e Fawkes, A. J., *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*, Pineridge Press Ltd., 1983. 305p.
29. Pafelias, T., Dynamic Behaviour of a Cracked Rotor, General Electric Co., *Technical Information Series*, 1974.
30. Papadopoulos, C.A. e Dimarogonas, A. D., Coupled Longitudinal and Bending Vibration of a Rotating Shaft with an Open Crack, *Journal of Sound and Vibration*, 117, pp. 81-93, 1987.
31. Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. e Vetterling, W.T., *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, USA, 1986, 818p.
32. Roylance, D., *Introduction to Fracture Mechanics*, Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Junho, 2001.

33. Saether, E. e Ta'asan, S., *A Hierarchical Approach to Fracture Mechanics*, National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center Hampton, Virginia, 2004.
34. Sinou, J.-J. e Lees, A.W., The Influence of Cracks in Rotating Shafts, *Journal of Sound and Vibration* 285, pp.1015–1037, 2005.
35. Sternlicht, B. e Lewis, P., Vibration Problems with High-Speed Turbomachinery, *ASME Journal of Engineering for Industry*, pp.174-186, 1968.
36. Vance, J., *Rotordynamics of Turbomachinery*, John Wiley, New York, USA. 1988. 388p.
37. Zorzi, E.S. e Nelson, H.D., Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems with Internal Damping, *ASME Journal of Engineering for Power*, pp. 71-76, 1977.

APÊNDICE A

Determinação da matriz de rigidez para um elemento com trinca.

A representação da trinca no eixo é feita através da modificação da matriz de rigidez do elemento possuidor da descontinuidade. A matriz de rigidez modificada representa todos os fenômenos de acoplamento existentes em um rotor trincado, isto é, flexão-compressão, compressão-torção e flexão-torção (DARPE et. al., 2004).

Uma figura esquemática de um elemento finito de eixo que possui uma descontinuidade está dada na FIGURA A.1. A posição da trinca é definida através da coordenada “ x ”. O elemento de eixo está sujeito a um carregamento com forças de cisalhamento P_2 , P_3 e P_8 , P_9 , momentos fletores P_5 , P_6 e P_{11} , P_{12} , forças axiais P_1 e P_7 e momentos torcionais P_4 e P_{10} .

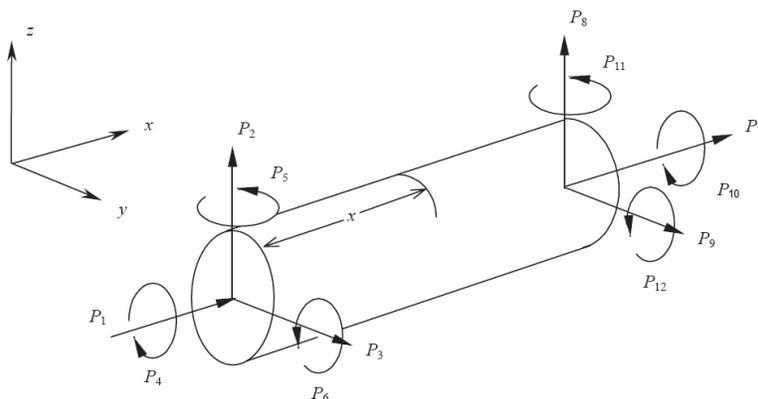


FIGURA A.1 – Representação de um elemento finito de eixo com trinca.

O material do eixo é considerado homogêneo e isotrópico com módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν . A seção transversal do eixo pode ser vista na FIGURA A.2. Observa-se que o raio da seção transversal é definido por “ R ” e a profundidade da trinca por “ a ”.

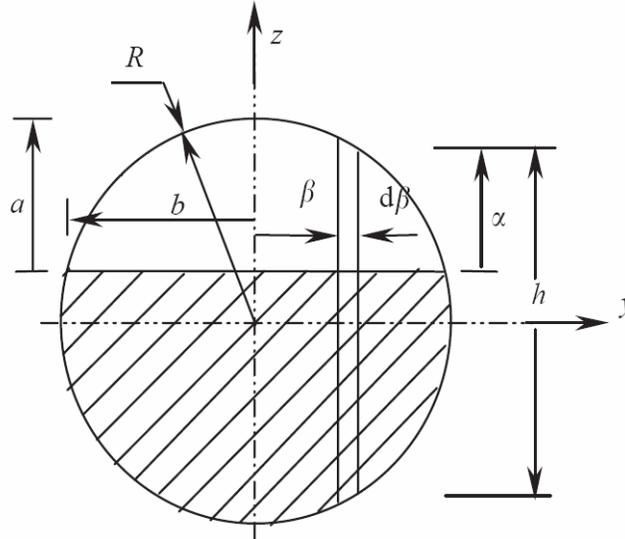


FIGURA A.2 – Seção transversal do eixo.

Todos os seis graus de liberdade por nó são considerados para a determinação da matriz de rigidez.

A partir da FIGURA A.2, as dimensões “ b ” e “ $h(y)$ ” podem ser determinadas através do teorema de Pitágoras em função do raio do eixo, profundidade da trinca e da dimensão “ y ”. Obtêm-se: $b = \sqrt{R^2 - (R - a)^2}$ e $h(y) = 2\sqrt{R^2 - y^2}$.

A matriz de flexibilidade do elemento trincado é determinada a partir do teorema de Castigliano (DARPE et. al., 2004).

$$u_i = \frac{\partial U_T}{\partial P_i} \quad (\text{A.1})$$

Onde u_i são os deslocamentos, P_i são as forças e U_T é a energia total de deformação, definida por:

$$U_T = U^0 + U^c \quad (\text{A.2})$$

Onde, U^0 é a energia de deformação do elemento sem a presença de descontinuidade e U^c é a energia de deformação devida à trinca.

$$u_i = \frac{\partial U^0}{\partial P_i} + \frac{\partial U^c}{\partial P_i} \quad (\text{A.3})$$

Deste modo o deslocamento será:

$$u_i = u_i^0 + u_i^c \quad (\text{A.4})$$

onde

$$u_i^0 = \frac{\partial U^0}{\partial P_i}, \quad u_i^c = \frac{\partial U^c}{\partial P_i} \quad (\text{A.5})$$

Através da energia de deformação, tanto o deslocamento u_i^0 como u_i^c podem ser derivados. Considerando a ação de forças axiais, torcionais, momentos fletores e cisalhamento na seção transversal da trinca, a energia de deformação pode ser escrita da seguinte forma.

$$U^0 = \frac{1}{2} \int \left[\frac{\alpha_s V_1^2}{GA_e} + \frac{\alpha_s V_2^2}{GA} + \frac{M_1^2}{EI} + \frac{M_2^2}{EI} + \frac{T^2}{GI_0} + \frac{F^2}{A_e E} \right] dx \quad (\text{A.6})$$

onde V_1, V_2 são forças cisalhantes, M_1, M_2 são momentos fletores, T é o momento torcional, F é a carga axial atuante na seção trincada, G é o módulo de elasticidade transversal, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia da seção transversal, I_0 é o momento polar de inércia da seção transversal, A_e é a área da seção transversal e α_s é o coeficiente de cisalhamento.

A partir da FIGURA A.1 tem-se:

$$V_1 = P_2, \quad V_2 = P_3, \quad T = P_4, \quad F = P_1, \quad M_1 = P_2 x - P_6 \quad e \quad M_2 = P_3 x + P_5 \quad (\text{A.7})$$

A partir da EQUAÇÃO (A.6) tem-se,

$$U^0 = \frac{1}{2} \left[\frac{P_1^2 l}{A_e E} + \frac{\alpha_s P_2^2 l}{GA_e} + \frac{P_2^2 l^3}{3EI} + \frac{\alpha_s P_3^2 l}{GA_e} + \frac{P_3^2 l^3}{3EI} + \frac{P_4^2 l}{GI_0} + \frac{P_5^2 l}{EI} + \frac{P_6^2 l}{EI} - \frac{P_2 P_6 l^2}{EI} + \frac{P_3 P_5 l^2}{EI} \right] \quad (\text{A.8})$$

Os deslocamentos u_i^0 podem ser determinados por

$$u_1^0 = \frac{\partial U^0}{\partial P_1} = \frac{d}{dP_1} \left[\frac{1}{2} \frac{P_1^2 l}{A_e E} \right], \quad (\text{A.9})$$

$$u_1^0 = \frac{P_1 l}{A_e E}$$

Similarmente,

$$u_2^0 = \frac{\partial U^0}{\partial P_2} = \frac{d}{dP_1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_s P_2^2 l}{GA_e} + \frac{P_2^2 l^3}{3EI} \right) - \frac{1}{2} \frac{P_2 P_6 l^2}{EI} \right], \quad (\text{A.10})$$

$$u_2^0 = \left(\frac{\alpha_s l}{GA} + \frac{l^3}{3EI} \right) P_2 - \frac{P_6 l^2}{2EI}$$

A partir de procedimentos similares tem-se:

$$u_3^0 = \left(\frac{\alpha_s l}{GA_e} + \frac{l^3}{3EI} \right) P_3 - \frac{P_5 l^2}{2EI}, \quad (\text{A.11})$$

$$u_4^0 = \frac{l}{GI_0} P_4, \quad (\text{A.12})$$

$$u_5^0 = \frac{l}{EI} P_5 - \frac{l^2}{2EI} P_3, \quad (\text{A.13})$$

$$u_6^0 = \frac{l}{EI} P_6 - \frac{l^2}{2EI} P_2, \quad (\text{A.14})$$

Os deslocamentos u_i^0 usando a energia de deformação elástica para um eixo sem trinca estão dados nas equações anteriores. Adicionalmente, devem-se obter os deslocamentos u_i^c para uma trinca através da energia de deformação da trinca.

$$u_i^c = \frac{\partial U^c}{\partial P_i} \quad (\text{A.15})$$

Usando conceitos de Mecânica da fratura, a energia de deformação adicional devida à trinca é dada pela EQUAÇÃO (A.16).

$$U^c = \int_A J(A_e) dA_e, \quad (\text{A.16})$$

onde $J(A_e)$ pode ser expressa pela EQUAÇÃO (3.7).

$$J(A_e) = \frac{1}{E'} \left[\left(\sum_{i=1}^6 k_{Ii} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^6 k_{IIi} \right)^2 + m \left(\sum_{i=1}^6 k_{IIIi} \right)^2 \right] \quad (\text{A.17})$$

onde: $E' = E/(1-\nu)$ e $m = 1 + \nu$

$K_{Ii}, K_{IIi}, K_{IIIi}$ são os fatores de intensificação de tensão correspondentes ao Modo I, Modo II e Modo III de deslocamento da trinca, respectivamente. Onde i varia de 1 à 6.

Os fatores de intensificação de tensão são dados pelas expressões dadas nas EQUAÇÃO (A.18) à EQUAÇÃO (A.33).

Para o Modo I:

$$K_{I1} = \sigma_1 \sqrt{\pi \alpha} F_1(\alpha / h), \quad (\text{A.18})$$

$$\text{onde: } \sigma_1 = \frac{P_1}{\pi R^2}$$

Portanto,

$$K_{I1} = \frac{P_1}{\pi R^2} \sqrt{\pi \alpha} F_1(\alpha / h), \quad (\text{A.19})$$

$$K_{I5} = \sigma_5 \sqrt{\pi \alpha} F_1(\alpha / h), \quad (\text{A.20})$$

$$\text{onde: } \sigma_5 = \frac{M_2 \beta}{\pi / 64 D^4}$$

O momento $M_2 = (P_5 + P_3 x)$.

Portanto,

$$K_{I5} = \frac{4(P_5 + P_3 x) \beta}{\pi R^4} \sqrt{\pi \alpha} F_1(\alpha / h), \quad (\text{A.21})$$

$$K_{I6} = \sigma_6 \sqrt{\pi \alpha} F_2(\alpha / h), \quad (\text{A.22})$$

$$\text{onde: } \sigma_6 = \frac{M_1 \sqrt{R^2 - \beta^2}}{\pi / 64 D^4},$$

O momento $M_1 = (P_2 x - P_6)$

$$K_{I6} = \frac{2(P_2 x - P_6) h}{\pi R^4} \sqrt{\pi \alpha} F_2(\alpha / h), \quad (\text{A.23})$$

$$K_{I2} = K_{I3} = K_{I4} = 0 \quad (\text{A.24})$$

Para o Modo II:

$$K_{II2} = \sigma_2 \sqrt{\pi \alpha} F_{II}(\alpha / h), \quad (\text{A.25})$$

$$\text{onde: } \sigma_2 = \frac{k P_2}{\pi R^2}$$

Portanto,

$$K_{II2} = \frac{k P_2}{\pi R^2} \sqrt{\pi \alpha} F_{II}(\alpha / h), \quad (\text{A.26})$$

$$K_{II4} = \sigma_{4II} \sqrt{\pi \alpha} F_{II}(\alpha / h),$$

$$\text{onde: } \sigma_{4II} = \frac{P_4 \beta}{\pi / 32 D^4}$$

Portanto,

$$K_{II4} = \frac{4P_4 \beta}{\pi R^4} \sqrt{\pi \alpha} F_{II}(\alpha / h), \quad (\text{A.27})$$

$$K_{II1} = K_{II3} = K_{II5} = K_{II6} = 0 \quad (\text{A.28})$$

Para o Modo III:

$$K_{III3} = \sigma_3 \sqrt{\pi \alpha} F_{III}(\alpha / h), \quad (\text{A.29})$$

$$\text{onde: } \sigma_3 = \frac{kP_3}{\pi R^2}$$

Portanto,

$$K_{III3} = \frac{kP_3}{\pi R^2} \sqrt{\pi \alpha} F_{III}(\alpha / h), \quad (\text{A.30})$$

$$K_{III4} = \sigma_{4III} \sqrt{\pi \alpha} F_{III}(\alpha / h), \quad (\text{A.31})$$

$$\sigma_{4III} = \frac{P_4 \sqrt{R^2 - \beta^2}}{\pi / 32 D^4}$$

Portanto,

$$K_{III4} = \frac{P_4 h}{\pi R^4} \sqrt{\pi \alpha} F_{III}(\alpha / h), \quad (\text{A.32})$$

$$K_{III1} = K_{III2} = K_{III5} = K_{III6} = 0 \quad (\text{A.33})$$

onde:

$$F1(y, z) = \left[\sqrt{\frac{2 \times h(y)}{\pi \times z}} \times \tan \left[\frac{\pi \times z}{2 \times h(y)} \right] \right] \times \frac{\left[0,752 + 2,02 \times \left(\frac{z}{h(y)} \right) + 0,37 \times \left(1 - \operatorname{sen} \left(\frac{\pi \times z}{2 \times h(y)} \right) \right)^3 \right]}{\cos \left(\frac{\pi \times z}{2 \times h(y)} \right)}$$

$$F2(y, z) = \left[\sqrt{\frac{2 \times h(y)}{\pi \times z}} \times \tan \left[\frac{\pi \times z}{2 \times h(y)} \right] \right] \times \frac{\left[0,923 + 0,199 \times \left(1 - \operatorname{sen} \left(\frac{\pi \times z}{2 \times h(y)} \right) \right)^4 \right]}{\cos \left(\frac{\pi \times z}{2 \times h(y)} \right)}$$

$$FII(y, z) = \frac{\left[1,122 - 0,561 \times \left(\frac{z}{h(y)} \right) + 0,085 \times \left(\frac{z}{h(y)} \right)^2 + 0,18 \times \left(\frac{z}{h(y)} \right)^3 \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{h(y)} \right)}}$$

$$FIII(y, z) = \sqrt{\frac{2 \times h(y)}{\pi \times z}} \times \tan \left[\frac{\pi \times z}{2 \times h(y)} \right]$$

Usando as expressões dos fatores de intensificação de tensões na EQUAÇÃO (A.17) e usando $J(A_e)$ na EQUAÇÃO (A.16), obtém-se:

$$u_1^c = [P_1 I_{g1} + (xP_2 - P_6) I_{g2} + (xP_3 + P_5) I_{g3}],$$

$$u_2^c = [xI_{g2} P_1 + I_{g4} P_2 + (xP_2 - P_6) xI_{g5} + (xP_3 + P_5) xI_{g6} + I_{g7} P_4],$$

$$u_3^c = [xI_{g3} P_1 + I_{g10} P_4 + (xP_2 - P_6) xI_{g6} + (xP_3 + P_5) xI_{g8} + I_{g9} P_3],$$

$$u_4^c = [RI_{g7} P_2 + I_{g10} P_3 + (I_{g11} + I_{g12}) P_4],$$

$$u_5^c = [I_{g3} P_1 + (xP_2 - P_6) I_{g6} + (xP_3 + P_5) I_{g8}],$$

$$u_6^c = [-I_{g2} P_1 - (xP_2 - P_6) I_{g5} - (xP_3 + P_5) I_{g6}],$$
(A.34)

Onde:

$$I_{g1} = \int_{-\sqrt{R^2-(R-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-a)^2}} \int_0^{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{2}-(R-a)} \frac{2 \times z \times (F1(y, z))^2}{\pi \times E \times R^4} dz dy$$

$$I_{g2} = \int_{-\sqrt{R^2-(R-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-a)^2}} \int_0^{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{2}-(R-a)} \frac{4 \times h(y) \times z \times F1(y, z) \times F2(y, z)}{\pi \times E \times R^6} dz dy$$

$$I_{g3} = \int_{-\sqrt{R^2-(R-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-a)^2}} \int_0^{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{2}-(R-a)} \frac{8 \times y \times z \times (F1(y, z))^2}{\pi \times E \times R^6} dz dy$$

$$I_{g4} = \int_{-\sqrt{R^2-(R-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-a)^2}} \int_0^{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{2}-(R-a)} \frac{2 \times k^2 \times z \times (FII(y, z))^2}{\pi \times E \times R^4} dz dy$$

$$I_{g5} = \int_{-\sqrt{R^2-(R-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-a)^2}} \int_0^{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{2}-(R-a)} \frac{8 \times h(y)^2 \times z \times (F2(y, z))^2}{\pi \times E \times R^8} dz dy$$

$$I_{g6} = \int_{-\sqrt{R^2-(R-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-a)^2}} \int_0^{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{2}-(R-a)} \frac{16 \times h(y) \times y \times z \times F1(y, z) \times F2(y, z)}{\pi \times E \times R^8} dz dy$$

$$I_{g7} = \int_{-\sqrt{R^2-(R-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-a)^2}} \int_0^{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{2}-(R-a)} \frac{4 \times k \times y \times z \times FII(y, z)^2}{\pi \times E \times R^8} dz dy$$

$$I_{g8} = \int_{-\sqrt{R^2-(R-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-a)^2}} \int_0^{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{2}-(R-a)} \frac{32 \times y^2 \times z \times F1(y, z)^2}{\pi \times E \times R^8} dz dy$$

$$I_{g9} = \int_{-\sqrt{R^2-(R-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-a)^2}} \int_0^{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{2}-(R-a)} \frac{2 \times m \times k^2 \times z \times FIII(y, z)^2}{\pi \times E \times R^4} dz dy$$

$$I_{g10} = \int_{-\sqrt{R^2-(R-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-a)^2}} \int_0^{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{2}-(R-a)} \frac{2 \times m \times k \times z \times h(y) \times FIII(y, z)^2}{\pi \times E \times R^6} dz dy$$

$$I_{g11} = \int_{-\sqrt{R^2-(R-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-a)^2}} \int_0^{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{2}-(R-a)} \frac{2 \times y^2 \times z \times FII(y, z)^2}{\pi \times E \times R^8} dz dy$$

$$I_{g12} = \int_{-\sqrt{R^2-(R-a)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-a)^2}} \int_0^{\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{2}-(R-a)} \frac{2 \times m \times h(y)^2 \times z \times FIII(y, z)^2}{\pi \times E \times R^8} dz dy$$

O deslocamento total u_i pode ser obtido através da adição de u_i^0 e u_i^c EQUAÇÃO (A.3) usando a EQUAÇÃO (A.9) à EQUAÇÃO (A.14) e EQUAÇÃO (A.34). O resultado desta equação pode ser escrito da seguinte forma matricial:

$$u_i = A_{ij} P_j; \quad (i, j = 1, 6) \quad (A.35)$$

Onde A é a matriz de flexibilidade dada por:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \quad (A.36)$$

Onde:

$$A_{11} = \frac{l}{A_e E} + I_{g1}, \quad A_{22} = \left(\frac{\alpha_s l}{GA_e} + \frac{l^3}{3EI} \right) + (I_{g4} + x^2 I_{g5}),$$

$$A_{33} = \left(\frac{\alpha_s l}{GA_e} + \frac{l^3}{3EI} \right) + (I_{g9} + x^2 I_{g8}),$$

$$A_{44} = \frac{l}{GI_0} + I_{g11} + I_{g12}, \quad A_{55} = \frac{l}{EI} + I_{g8}, \quad A_{66} = \frac{l}{EI} + I_{g5}, \quad A_{12} = A_{21} = x I_{g2},$$

$$A_{13} = A_{31} = x I_{g3}, \quad A_{15} = A_{51} = I_{g3}, \quad A_{16} = A_{61} = -I_{g2}, \quad A_{23} = A_{32} = x^2 I_{g6},$$

$$A_{24} = A_{42} = R^2 I_{g7}, \quad A_{34} = A_{43} = I_{g10}, \quad A_{25} = A_{52} = x I_{g6}, \quad A_{35} = A_{53} = \frac{l^2}{2EI} + x I_{g8},$$

$$A_{26} = A_{62} = -\frac{l^2}{2EI} - xI_{g5}, \quad A_{36} = A_{63} = -xI_{g6}, \quad A_{56} = A_{65} = -I_{g6},$$

A partir da matriz de flexibilidade pode ser obtida a matriz de rigidez usando a matriz de transformação, considerando o equilíbrio estático do elemento finito (DARPE et. al., 2004).

$$\{q_{1-12}\}^T = [T]\{q_{1-6}\}^T \quad (\text{A.37})$$

Onde a matriz de transformação é dada por:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & L \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

Desta forma a matriz de rigidez para um elemento finito com trinca pode ser escrita como se segue:

$$[K]^c = [T][A][T]^T \quad (\text{A.39})$$

APÊNDICE B

Neste apêndice são apresentadas as funções de forma e as matrizes para um elemento finito obtidos por Nelson (1980), através da utilização da teoria de viga de Timoshenko.

Funções de forma:

As translações e rotações de um ponto interno a um elemento típico do eixo são definidas aproximadamente pelas relações apresentadas abaixo:

$$\begin{Bmatrix} V_{(s,T)} \\ W_{(s,T)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 \\ 0 & \psi_1 & -\psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & \psi_4 & 0 \end{bmatrix} \{q(t)\} = [\Psi(s)]\{q(t)\}$$

$$\begin{Bmatrix} B_{(s,T)} \\ \Gamma_{(s,T)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_1 & \phi_2 & 0 & 0 & -\phi_3 & \phi_4 & 0 \\ \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 \end{bmatrix} \{q(t)\} = [\Phi(s)]\{q(t)\}$$

onde: (B, Γ) = pequenos ângulos de rotação em torno dos eixos (Y, Z) ; (V, W) = energia cinética e o trabalho, respectivamente.

O efeito de cisalhamento transversal é dado por:

$$\Phi = 12EI / kA_e GL^2$$

onde, k é o fator de forma do cisalhamento transversal, A_e é a área da seção transversal, G é o módulo de cisalhamento, L é o comprimento do elemento, EI é a rigidez a flexão.

As funções de forma para os deslocamentos translacional e rotacional são dadas a seguir.

$$\psi_1(s) = \frac{1}{1+\Phi} \left[(1-3\nu^2+2\nu^3)(s) + \Phi(1-\nu)(s) \right]$$

$$\psi_2(s) = \frac{1}{1+\Phi} \left[(L(\nu-2\nu^2+\nu^3))(s) + \Phi \left(\frac{L}{2}(\nu-\nu^2) \right) (s) \right]$$

$$\psi_3(s) = \frac{1}{1+\Phi} \left[(3\nu^2-2\nu^3)(s) + \Phi\nu(s) \right]$$

$$\psi_4(s) = \frac{1}{1+\Phi} \left[\left(\frac{L}{2}(-\nu+\nu^2) \right) (s) + \Phi \left(\frac{L}{2}(-\nu+\nu^2) \right) (s) \right]$$

$$\nu = \frac{s}{L}$$

$$\phi_1(s) = \frac{1}{1+\Phi} \left[\left(\frac{1}{L} (6\nu^2 - 6\nu) \right) (s) \right]$$

$$\phi_2(s) = \frac{1}{1+\Phi} \left[(1 - 4\nu + 3\nu^2)(s) + \Phi(1 - \nu)(s) \right]$$

$$\phi_3(s) = \frac{1}{1+\Phi} \left[\left(\frac{1}{L} (-6\nu^2 + 6\nu) \right) (s) \right]$$

$$\phi_4(s) = \frac{1}{1+\Phi} \left[(3\nu^2 - 2\nu)(s) + \Phi(\nu)(s) \right]$$

onde, s é a posição axial ao longo do elemento,

Matrizes do Elemento Finito

(i) **Matriz de Rigidez** $[K] = [K]_0 + \Phi[K]_1$

$$[K]_0 = \frac{EI}{L^3(1+\Phi)} \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & & \\ 0 & 12 & & & & & & & \\ 0 & -6L & 4L^2 & & & & & & \\ 6L & 0 & 0 & 4L^2 & & & & & \\ -12 & 0 & 0 & -6L & 12 & & & & \\ 0 & -12 & 6L & 0 & 0 & 12 & & & \\ 0 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 6L & 4L^2 & & \\ 6L & 0 & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 0 & 4L^2 & \end{bmatrix}$$

$$[K]_1 = \frac{EI}{L^3(1+\Phi)} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & L^2 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & L^2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -L^2 & 0 & 0 & 0 & L^2 & & \\ 0 & 0 & 0 & -L^2 & 0 & 0 & 0 & L^2 & \end{bmatrix}$$

(ii) **Matriz de Inércia Translacional**

$$[M] = [M]_0 + \Phi[M]_1 + \Phi^2[M]_2$$

$$[M]_0 = \frac{mL}{420(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} 156 & & & & & & & & \\ 0 & 156 & & & & & & & \\ 0 & -22L & 4L^2 & & & & & & \\ 22L & 0 & 0 & 4L^2 & & & & & \\ 54 & 0 & 0 & 13L & 156 & & & & \\ 0 & 54 & -13L & 0 & 0 & 156 & & & \\ 0 & 13L & -3L^2 & 0 & 0 & 22L & 4L^2 & & \\ -13L & 0 & 0 & -3L^2 & -22L & 0 & 0 & 4L^2 & \end{bmatrix} \quad \text{simétrica}$$

onde, m é a massa por unidade de comprimento.

$$[M]_1 = \frac{mL}{420(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} 294 & & & & & & & & \\ 0 & 294 & & & & & & & \\ 0 & -38,5L & 7L^2 & & & & & & \\ 38,5L & 0 & 0 & 7L^2 & & & & & \\ 126 & 0 & 0 & 31,5L & 294 & & & & \\ 0 & 126 & -31,5L & 0 & 0 & 294 & & & \\ 0 & 31,5L & -7L^2 & 0 & 0 & 38,5L & 7L^2 & & \\ -31,5L & 0 & 0 & -7L^2 & -38,5L & 0 & 0 & 7L^2 & \end{bmatrix} \quad \text{simétrica}$$

$$[M]_2 = \frac{mL}{420(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} 140 & & & & & & & & \\ 0 & 140 & & & & & & & \\ 0 & -17,5L & 3,5L^2 & & & & & & \\ 17,5L & 0 & 0 & 3,5L^2 & & & & & \\ 70 & 0 & 0 & 17,5L & 140 & & & & \\ 0 & 70 & -17,5L & 0 & 0 & 140 & & & \\ 0 & 17,5L & -3,5L^2 & 0 & 0 & 17,5L & 3,5L^2 & & \\ -17,5L & 0 & 0 & -3,5L^2 & -17,5L & 0 & 0 & 3,5L^2 & \end{bmatrix} \quad \text{simétrica}$$

(iii) **Matriz de Inércia Rotacional**

$$[N] = [N]_0 + \Phi[N]_1 + \Phi^2[N]_2$$

$$[N]_0 = \frac{mR^2}{120L(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} 36 & & & & & & & & \\ 0 & 36 & & & & & & & \\ 0 & -3L & 4L^2 & & & & & & \\ 3L & 0 & 0 & 4L^2 & & & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & & & & \\ 0 & -36 & 3L & 0 & 0 & 36 & & & \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & & \\ 3L & 0 & 0 & -L^2 & -3L & 0 & 0 & 4L^2 & \end{bmatrix} \quad \text{simétrica}$$

onde, R é o raio da seção circular do eixo.

$$[N]_1 = \frac{mR^2}{120L(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 15L & 5L^2 & & & & & & \\ -15L & 0 & 0 & 5L^2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 15L & 0 & & & & \\ 0 & 0 & -15L & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 15L & -5L^2 & 0 & 5 & -15L & 5L^2 & & \\ -15L & 0 & 0 & -5L^2 & 15L & 0 & 0 & 5L^2 & \end{bmatrix} \quad \text{simétrica}$$

$$[N]_2 = \frac{mR^2}{120L(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 10L^2 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 10L^2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 5L^2 & 0 & 0 & 0 & 10L^2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 5L^2 & 0 & 0 & 0 & 10L^2 & \end{bmatrix} \quad \text{simétrica}$$

(iv) **Matriz dos efeitos Giroscópicos**

$$[G] = [H] - [H]^T = [G]_0 + [G]_1 + \Phi^2 [G]_2$$

$$[G]_0 = \frac{2mR^2}{120L} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 36 & 0 & & & & & & & \\ -3L & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & -3L & 4L^2 & 0 & & & & & \\ 0 & 36 & -3L & 0 & 0 & & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3L & 36 & 0 & & & \\ -3L & 0 & 0 & L^2 & 3L & 0 & 0 & & \\ 0 & -3L & -L^2 & 0 & 0 & 3L & 4L^2 & 0 & \end{bmatrix} \quad \text{anti - simétrica}$$

$$[G]_1 = \frac{2mR^2}{120L} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 15L & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 15L & 5L^2 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 15L & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 15L & 0 & 0 & & & \\ 15L & 0 & 0 & 5L^2 & -15L & 0 & 0 & & \\ 0 & 15L & -5L^2 & 0 & 0 & -15L & 5L^2 & 0 & \end{bmatrix} \quad \text{anti - simétrica}$$

$$[G]_2 = \frac{2mR^2}{120L} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 10L^2 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 5L^2 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 5L^2 & 0 & 0 & 0 & 10L^2 & 0 & \end{bmatrix} \quad \text{anti - simétrica}$$