

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

TESE DE DOUTORADO

desenvolvida em cotutela com a *Université de Cergy-Pontoise*, França

INFERÊNCIA DE ORIENTAÇÃO  
DE DADOS ESPARSOS PARA  
RECONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES

MARCELO BERNARDES VIEIRA

Tese apresentada ao Curso de Pós-graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção dos títulos de DOUTOR EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO, pela Universidade Federal de Minas Gerais, e DOCTEUR EN SCIENCES TRAITEMENT DE L'IMAGE, pela *Université de Cergy-Pontoise*.

Banca examinadora composta pelos professores:

Orientador	Arnaldo de Albuquerque Araújo	UFMG/DCC
Orientadora	Sylvie Philipp-Foliguet	UCP/ENSEA, França
Co-orientador	Paulo Pereira Martins Junior	CETEC e UFOP/DEGEO
	Luiz Carlos Pacheco Rodrigues Velho	IMPA
	João Marques de Carvalho	UFPB
	Mário Fernando Montenegro Campos	UFMG/DCC
	Matthieu Cord	UCP/ENSEA, França

Belo Horizonte, 12 de abril de 2002.

UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

THÈSE

effectuée en cotutelle avec l'*Universidade Federal de Minas Gerais*, Brésil

RECONSTRUCTION DE SURFACES  
À PARTIR DE DONNÉES  
TRIDIMENSIONNELLES ÉPARSES

MARCELO BERNARDES VIEIRA

Thèse présentée pour obtenir le titre de DOCTEUR en Sciences Traitement de l'Image, de l'Université de Cergy-Pontoise, et le titre de *DOCTOR em Ciência da Computação*, de l'*Universidade Federal de Minas Gerais*, Brésil.

Jury composé de:

Directrice	Sylvie Philipp-Foliguet	UCP/ENSEA
Directeur	Arnaldo de Albuquerque Araújo	UFMG/DCC, Brésil
Co-directeur	Paulo Pereira Martins Junior	CETEC e UFOP/DEGEO, Brésil
Rapporteur	Luiz Carlos Pacheco Rodrigues Velho	IMPA, Brésil
Rapporteur	João Marques de Carvalho	UFPB, Brésil
Examineur	Mário Fernando Montenegro Campos	UFMG/DCC, Brésil
Examineur	Matthieu Cord	UCP/ENSEA

Belo Horizonte, le 12 avril 2002.

# Agradecimentos

Agradeço o apoio de todos que estiveram envolvidos na elaboração desta tese. Em especial, agradeço a contribuição e a paciência de minha esposa, Fernanda Mineiro Fernandes, que com coragem enfrentou comigo o desafio de estudar no exterior. À minha mãe e ao meu irmão, agradeço o apoio e a confortante presença nas minhas decisões.

A experiência, os conselhos e as intervenções pertinentes de meus orientadores foram fundamentais para a realização deste trabalho. Assim, manifesto minha gratidão ao prof. Arnaldo de Albuquerque Araújo, orientador no Brasil e à profa. Sylvie Philipp-Foliguet, orientadora na França. Agradeço imensamente ao prof. Paulo Pereira Martins Jr., co-orientador desta tese, por ter me conduzido, estimulado e orientado nos momentos mais difíceis e decisivos.

O empenho dos orientadores tornou possível a realização deste trabalho como uma cooperação de cotutela entre a Universidade Federal de Minas Gerais, UFMG, e a *Université de Cergy-Pontoise*, UCP. Agradeço às instituições que me acolheram e apoiaram neste desafio: ao Departamento de Ciência da Computação da UFMG; à *Ecole Nationale Supérieure d'Electronique et de ses Applications*, ENSEA, pela oportunidade de desenvolver este trabalho nos laboratórios da *Equipe Traitement de l'Image et du Signal*, ETIS; à Fundação Centro Tecnológico de Minas Gerais, CETEC; à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pelo importante apoio financeiro.

Agradeço aos professores Luiz Carlos Pacheco Rodrigues Velho, João Marques de Carvalho, Mário Fernando Montenegro Campos e Matthieu Cord pelas suas importantes recomendações para o amadurecimento desta tese.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>8</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>12</b>
<b>Resumo</b>	<b>13</b>
<b>Notações</b>	<b>16</b>
<b>1 Introdução e proposição epistemológica fundamental</b>	<b>17</b>
1.1 Motivação . . . . .	17
1.2 Caracterização dos problemas e terminologia . . . . .	19
1.2.1 Composição dos dados esparsos . . . . .	20
1.2.1.1 Processos de amostragem . . . . .	21
1.2.2 O problema fundamental . . . . .	23
1.3 Visão geral dos trabalhos fundamentais . . . . .	24
1.4 Fundamentação epistemológica da tese . . . . .	26
1.4.1 Estrutura e organização . . . . .	27
1.4.2 Os princípios básicos . . . . .	28
1.4.3 Objetivos . . . . .	29
1.4.4 Contribuições . . . . .	30
1.5 Propedêutica . . . . .	31
<b>2 Trabalhos relacionados</b>	<b>32</b>
2.1 Métodos baseados em subdivisão espacial . . . . .	32
2.1.1 Subdivisão espacial baseada em volume . . . . .	32
2.1.2 Subdivisão espacial baseada em superfície . . . . .	34
2.2 Métodos baseados em superfície de nível . . . . .	35
2.3 Métodos baseados em deformação . . . . .	36
2.4 Métodos paramétricos . . . . .	37
2.5 Outras abordagens . . . . .	38
<b>3 Epistemologia da abordagem de Gideon Guy</b>	<b>39</b>
3.1 Fundamentação epistemológica . . . . .	39
3.1.1 Os princípios básicos . . . . .	40
3.1.2 O instrumento matemático . . . . .	41

3.1.3	Reconstrução de estruturas . . . . .	42
3.1.4	O epistemograma . . . . .	43
3.2	A metodologia de Gideon Guy . . . . .	44
3.2.1	Construção dos campos de influência . . . . .	45
3.2.1.1	Campo para ponto-normal . . . . .	45
3.2.1.2	Campo para ponto-tangente . . . . .	47
3.2.1.3	Campo para pontos . . . . .	48
3.2.2	A fase de acumulação . . . . .	49
3.2.2.1	O operador de convolução . . . . .	49
3.2.3	Decomposição das informações acumuladas . . . . .	50
3.2.3.1	Cálculo dos mapas de saliência . . . . .	51
3.2.3.2	Pré-processamento para inferência de normais . . . . .	52
3.3	Extração de estruturas . . . . .	52
3.3.1	Extração de superfícies . . . . .	53
3.3.1.1	Determinando superfícies localmente . . . . .	54
3.3.1.2	Extraindo superfícies . . . . .	55
3.3.2	Extração de curvas . . . . .	56
3.3.2.1	Determinando curvas localmente . . . . .	56
3.3.2.2	Extraindo curvas . . . . .	57
3.3.2.3	Extração de junções . . . . .	58
3.3.3	Alinhamento de vetores . . . . .	58
3.4	Síntese conclusiva . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Epistemologia da abordagem de Mi-Suen Lee</b>	<b>60</b>
4.1	Fundamentação epistemológica . . . . .	60
4.1.1	Continuidade metodológica . . . . .	60
4.1.2	O instrumento matemático . . . . .	61
4.1.3	O epistemograma . . . . .	62
4.2	A metodologia de Mi-Suen Lee . . . . .	62
4.2.1	O tensor de saliência . . . . .	63
4.2.1.1	Decomposição do tensor de saliência . . . . .	65
4.2.2	Construção dos campos tensoriais . . . . .	65
4.2.2.1	Construção do campo fundamental . . . . .	66
4.2.2.2	Derivação dos campos tensoriais a partir do campo funda- mental . . . . .	66
4.2.3	Acumulação de tensores . . . . .	68
4.2.4	Cálculo dos mapas de saliência . . . . .	69
4.3	Síntese conclusiva . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Epistemologia crítica</b>	<b>71</b>
5.1	Discussão sobre o trabalho de Guy . . . . .	71
5.1.1	Os problemas de agrupamento perceptivo . . . . .	71

5.1.1.1	Uma visada epistemológica . . . . .	72
5.1.2	Reconstrução de estruturas . . . . .	72
5.1.3	O método de reconstrução . . . . .	73
5.1.3.1	Interpretação das estruturas resultantes . . . . .	74
5.1.3.2	A transformada de Hough . . . . .	75
5.2	Discussão sobre o trabalho de Lee . . . . .	76
5.3	Fundamentação crítica . . . . .	76
5.3.1	O ponto de vista crítico . . . . .	77
5.3.2	Sobre o tensor de orientação de Westin . . . . .	77
5.3.2.1	Discussão sobre a interpretação do tensor de orientação . . . . .	78
5.3.2.2	Nota sobre autovalores de somas de matrizes reais e simétricas . . . . .	79
5.3.2.3	Discussão sobre o tensor de orientação . . . . .	80
5.3.3	Morfologia dos campos de influência . . . . .	81
5.3.3.1	Análise e projeto de campos de influência . . . . .	82
5.3.3.2	Derivando o campo de influência circular . . . . .	83
5.3.3.3	Sobre os campos de influência de Guy e Lee . . . . .	84
5.3.4	Discussão geral sobre os métodos de Guy e Lee . . . . .	85
5.4	Síntese conclusiva . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Desenvolvimento metodológico</b>	<b>87</b>
6.1	Um método dedicado a superfícies . . . . .	87
6.1.1	Visão geral do método em proposição . . . . .	88
6.1.2	Interpretação do tensor de orientação . . . . .	89
6.1.3	Construção dos campos de influência . . . . .	90
6.1.3.1	Campo para ponto-normal . . . . .	90
6.1.3.2	Campo para ponto-normal em 3D . . . . .	94
6.1.3.3	Campo para ponto-tangente . . . . .	96
6.1.3.4	Campo isotrópico . . . . .	96
6.1.4	Inferência inicial de orientação . . . . .	97
6.1.4.1	Inferência primária de orientação . . . . .	97
6.1.4.2	Refinamento da inferência primária . . . . .	98
6.1.5	Acumulação densa . . . . .	99
6.1.6	Cálculo dos mapas de saliência . . . . .	100
6.2	Síntese conclusiva . . . . .	100
<b>7</b>	<b>Aplicações experimentais</b>	<b>102</b>
7.1	Reconstrução de superfícies . . . . .	102
7.1.1	Resultados qualitativos . . . . .	102
7.1.1.1	Dados esparsos sem orientação associada . . . . .	103
7.1.1.2	Dados esparsos com normal associada . . . . .	106
7.1.1.3	Dados esparsos com tangente associada . . . . .	108

---

7.1.2	Resultados quantitativos . . . . .	110
7.1.2.1	O protocolo de avaliação . . . . .	111
7.1.2.2	Avaliação da reconstrução de esferas . . . . .	113
7.1.2.3	Avaliação da reconstrução de elipsóides . . . . .	115
7.1.2.4	Avaliação da reconstrução de superfícies abertas . . . . .	118
7.2	Filtragem de dados esparsos . . . . .	121
7.2.1	Aplicação do processo de filtragem . . . . .	123
7.2.2	Resultados quantitativos . . . . .	125
7.3	Síntese conclusiva . . . . .	128
<b>8</b>	<b>Conclusões e sínteses</b>	<b>130</b>
8.1	Síntese de conclusões analíticas . . . . .	130
8.2	Síntese de conclusões metodológicas . . . . .	132
8.3	Conclusões metodológicas de experimento . . . . .	134
8.4	Conclusões epistemológicas . . . . .	136
8.4.1	Contribuições da tese . . . . .	136
8.4.2	Possíveis extensões . . . . .	137
	<b>Bibliografia</b>	<b>138</b>

# Lista de Figuras

1.1	Amostra da fronteira de um objeto em $\mathbb{R}^2$ . (a) Fronteira contínua. (b) Amostra de densidade $\tau$ . (c) Zona que contém a fronteira. . . . .	19
1.2	Tipos de dados esparsos que podem ser fornecidos para reconstrução. Todos os tipos podem compor uma entrada. . . . .	20
1.3	Tipos de ruído que os dados esparsos podem conter. (a) Erro gaussiano com desvio-padrão = 0,08. (b) Dados com pontos incorretos. (c) Modelo com erro gaussiano e pontos incorretos. (d) Normais com erro angular de desvio-padrão = $\pi/6$ . (e) Tangentes com erro angular de desvio-padrão = $\pi/6$ . . . . .	22
1.4	Contexto de relacionamento dos trabalhos principais. . . . .	25
1.5	Estrutura e organização da tese. O capítulo de epistemologia crítica divide as duas partes da tese: a de fundamentação e a de desenvolvimentos. . . . .	27
3.1	Imagens de interesse para o trabalho de Guy. (a) Uma imagem e suas bordas obtidas pelo detector ótimo Shen-Castan com $\beta = 1,0$ [SHE 92]. (b) O triângulo e o quadrado de Kanizsa que induzem contornos ilusórios. . . . .	40
3.2	Abordagem de Guy para inferência de curvas, superfícies e junções. . . . .	44
3.3	Continuação circular para conexão a pontos-normal. . . . .	45
3.4	Limite de conexão circular. Acima de $45^\circ$ , um ponto e um ponto-normal não podem ser conectados por uma trajetória circular. . . . .	46
3.5	A forma geral do campo para ponto-normal (a) Ilustração das múltiplas esferas que definem conexões de superfície. (b) Um corte em $y = 0$ que ilustra as direções do campo de vetores normais. . . . .	47
3.6	A forma geral do campo para ponto-tangente. (a) Ilustração dos planos que passam pelo ponto com tangente associada. (b) Um corte em $z = 0$ que ilustra as direções do campo de vetores normais. . . . .	48
3.7	O campo para pontos sem orientação associada. (a) Todas as normais no ponto $Q$ são igualmente prováveis. (b) Um corte em $z = 0$ que ilustra as direções do campo vetorial. . . . .	48
3.8	Exemplo de superposição dos campos de influência de dois pontos-tangente coplanares. Os vetores superpostos estão no plano desses dois pontos. (a) Pontos colineares. (b) Pontos não colineares. . . . .	50
3.9	Ilustração de máximo local para superfícies. (a) Uma superfície com normal $\mathbf{n}$ . (b) A saliência sobre a linha definida por $\mathbf{n}$ . (c) A derivada da saliência. Seu valor é 0 sobre a superfície. . . . .	53
3.10	Representação de um cubóide definido pelo agrupamento de oito elementos vizinhos. . . . .	54



3.11	Ilustração da passagem por zero da derivada da saliência na face de um cubóide. Os quatro pontos representam quatro elementos adjacentes com saliência $q_i$ cujos sinais estão indicados. A linha em negrito indica a passagem de uma superfície, i.e., um máximo local da saliência. . . . .	54
3.12	Algumas configurações de ciclos que definem superfícies em um cubóide e que são formados por máximos locais nas arestas. . . . .	55
3.13	Determinando o ponto de passagem de curva $I$ , que tem saliência localmente máxima, no plano definido pela tangente. . . . .	58
4.1	Abordagem de Lee para inferência de curvas, superfícies e junções. A cadeia de tratamento dos objetos está ilustrada à direita. . . . .	63
4.2	Representação geométrica de matrizes simétricas positivas semi-definitas. Note que os vetores dos eixos principais não têm sentido definido. (a) Elipsóide em 3D. (b) Elipse em 2D. Veja a representação da medida de saliência $\lambda_1 - \lambda_2$ . . . . .	64
4.3	A codificação dos elementos de entrada em tensores de saliência. . . . .	65
4.4	O campo tensorial fundamental. (a) O campo vetorial definido por $e_1$ . O tamanho dos segmentos indica sua saliência com $\sigma = 0,8$ e $c = 0,09$ . (b) Ilustração da distribuição de saliências $\lambda_1 - \lambda_2$ . . . . .	67
4.5	Construção do campo para bastão a partir do campo fundamental. . . . .	67
4.6	O campo tensorial para esfera. (a) O campo vetorial definido por $e_3$ no plano $z=0$ . O tamanho dos segmentos indica sua saliência. (b) Ilustração da distribuição de saliências $\lambda_2 - \lambda_3$ . . . . .	68
4.7	O campo tensorial para disco. O tamanho dos segmentos indica a saliência. (a) O campo vetorial para normais definido por $e_1$ no plano $z=0$ . (b) O campo vetorial para tangente definido por $e_3$ no plano $x=0$ . . . . .	68
4.8	Ilustração do processo de acumulação em 2D. . . . .	69
5.1	Trajetória ortogonal do campo circular. . . . .	84
6.1	Visão geral do método em proposição, dedicado a reconstrução de superfícies. . . .	88
6.2	Famílias de elipses de formas diferentes. . . . .	91
6.3	Campo vetorial elíptico. (a) Cálculo dos vetores (b) Vetores tangentes às elipses: $t$ . (c) Vetores normais às elipses: $v(P)$ . . . . .	92
6.4	Campo de força elíptico com $\sigma = 1$ . (a) Distribuição de força de 0 (branco) a 1 (preto). (b) Superfícies equipotenciais. (c) Campo gradiente. . . . .	93
6.5	Campo de influência elíptico. O tamanho dos vetores indica sua força. . . . .	94
6.6	As coordenadas esféricas de um ponto $Q$ no sistema de coordenadas de um ponto-normal $(P, \mathbf{k})$ . . . . .	95
6.7	O processo completo de inferência de orientação com as duas fases de refinamento. . . . .	98
7.1	Um oval de Cassini formado por 250 pontos. . . . .	104
7.2	Reconstrução do oval de Cassini em uma grade de dimensões $23 \times 23 \times 50$ . (a) $dmax = 0,20$ . 8487 triângulos. (b) $dmax = 0,20$ . 6600 triângulos. (c) $dmax = 0,21$ . 7289 triângulos. (d) $dmax = 0,21$ . 8501 triângulos. . . . .	104

7.3	Cortes na grade discreta do oval de Cassini ilustrando a medida de pertinência de normais. Pontos mais claros possuem maior pertinência. . . . .	105
7.4	O oval de Cassini com pontos incorretos. Formado por 1750 pontos entre os quais 1500 não fazem parte do oval. Os outros 250 são os mesmos ilustrados na Figura 7.1. . . . .	105
7.5	Reconstrução do oval de Cassini com pontos incorretos em uma grade de dimensões $50 \times 50 \times 50$ . (a) $dmax = 0, 22$ . 5956 triângulos. (b) $dmax = 0, 22$ . 5634 triângulos. (c) $dmax = 0, 21$ . 4299 triângulos. (d) $dmax = 0, 22$ . 4512 triângulos. . . . .	106
7.6	Cortes na grade discreta do oval de Cassini com pontos incorretos que ilustram a medida de pertinência de normais. Pontos mais claros possuem maior pertinência. . . . .	107
7.7	Um oval de Cassini e um plano formados por 2100 pontos esparsos com pontos incorretos. É o mesmo conjunto de dados utilizado por Lee em seu trabalho. . . . .	107
7.8	Reconstrução do oval de Cassini e do plano em uma grade de dimensões $60 \times 60 \times 60$ . (a) $dmax = 0, 18$ . 13009 triângulos. (b) $dmax = 0, 18$ . 13469 triângulos. (c) $dmax = 0, 18$ . 13238 triângulos. (d) $dmax = 0, 18$ . 11948 triângulos. . . . .	108
7.9	Duas semi-esferas concêntricas formadas por 463 pontos-normal. . . . .	108
7.10	Reconstrução das semi-esferas concêntricas em uma grade de dimensões $33 \times 60 \times 60$ . (a) $dmax = 0, 25$ . 21022 triângulos. (b) $dmax = 0, 25$ . 20941 triângulos. (c) $dmax = 0, 25$ . 21006 triângulos. (d) $dmax = 0, 26$ . 20938 triângulos. . . . .	109
7.11	Dois torus formados por 2048 pontos-tangente. . . . .	109
7.12	Reconstrução dos dois torus em uma grade de dimensões $75 \times 100 \times 75$ . (a) $dmax = 0, 10$ . 89943 triângulos. (b) $dmax = 0, 10$ . 50740 triângulos. (c) $dmax = 0, 11$ . 50811 triângulos. (d) $dmax = 0, 11$ . 50840 triângulos. . . . .	110
7.13	Cortes na grade discreta dos dois torus ilustrando a medida de pertinência de normais. Pontos mais claros possuem maior pertinência. . . . .	111
7.14	Variação de erro em função da distância máxima de ação $dmax$ . Para cada $dmax$ , utilizou-se $n = 157$ diferentes conjuntos de pontos esparsos. . . . .	113
7.15	Variação de erro em função da quantidade de pontos incorretos nos dados esparsos. Essa quantidade é dada em porcentagens do número de dados de entrada ( $k = 250$ ). Para cada nível de ruído, utilizou-se $n = 114$ diferentes conjuntos de pontos esparsos. . . . .	114
7.16	Reconstrução de uma esfera formada por 250 pontos (indicados nos resultados) com 625 pontos incorretos (250%). . . . .	114
7.17	Variação de erro em função do desvio-padrão do erro gaussiano nos dados de entrada. Para cada desvio-padrão, utilizou-se $n = 175$ diferentes conjuntos de pontos esparsos. . . . .	115
7.18	Reconstrução de uma esfera formada por 250 pontos com erro aditivo de distribuição $\mathcal{N}(0; 0, 05^2)$ . . . . .	116
7.19	Variação de erro em função da distância máxima de ação $dmax$ . Para cada $dmax$ , utilizou-se $n = 150$ diferentes conjuntos de pontos esparsos. . . . .	116
7.20	Variação de erro em função da quantidade de pontos incorretos nos dados esparsos. Essa quantidade é dada em porcentagens do número de dados de entrada ( $k = 250$ ). Para cada nível de ruído, utilizou-se $n = 122$ diferentes conjuntos de pontos esparsos. . . . .	117

7.21	Reconstrução de uma elipse formada por 250 pontos (indicados nos resultados) com 625 pontos incorretos (250%). . . . .	118
7.22	Variação de erro em função do desvio-padrão do erro gaussiano nos dados de entrada. Para cada desvio-padrão, utilizou-se $n = 236$ diferentes conjuntos de pontos esparsos. . . . .	118
7.23	Reconstrução de uma elipse formada por 250 pontos com erro aditivo de distribuição $\mathcal{N}(0; 0,07^2)$ . . . . .	119
7.24	Variação de erro em função da distância máxima de ação $dmax$ . Para cada $dmax$ , utilizou-se $n = 227$ diferentes conjuntos de pontos esparsos. . . . .	119
7.25	Variação de erro em função da quantidade de pontos incorretos nos dados esparsos. Essa quantidade é dada em porcentagens do número de dados de entrada ( $k = 250$ ). Para cada nível de ruído, utilizou-se $n = 140$ diferentes conjuntos de pontos esparsos. . . . .	120
7.26	Reconstrução de uma superfície ( $\sigma = 0,5$ ) formada por 250 pontos (indicados nos resultados) com 625 pontos incorretos (250%). . . . .	120
7.27	Variação de erro em função do desvio-padrão do erro gaussiano nos dados de entrada. Para cada desvio-padrão, utilizou-se $n = 368$ diferentes conjuntos de pontos esparsos. . . . .	121
7.28	Reconstrução de uma superfície ( $\sigma = 1$ ) formada por 250 pontos com erro aditivo de distribuição $\mathcal{N}(0; 0,05^2)$ . . . . .	122
7.29	Dados esparsos utilizados na aplicação de filtragem. Ambos os modelos são formados por 250 pontos com erro aditivo de distribuição $\mathcal{N}(0; 0,02^2)$ e com 1250 pontos incorretos (500%). (a) Elipsóide. (b) Superfície aberta. . . . .	123
7.30	Resultado da filtragem do elipsóide (Fig. 7.29a) com $l=0,30$ e $dmax=0,30$ . (a) Pontos classificados como organizados sobre superfície. (b) Pontos classificados como desorganizados. . . . .	124
7.31	Resultado da filtragem da superfície aberta (Fig. 7.29b) com $l=0,30$ e $dmax=0,30$ . (a) Pontos classificados como organizados sobre superfície. (b) Pontos classificados como desorganizados. . . . .	124
7.32	Histograma das medidas de pertinência obtidas na filtragem dos dados esparsos. (a) (c) Distribuição das pertinências dos 250 pontos que formam os objetos. (b) (d) Distribuição das pertinências dos 1250 pontos incorretos. . . . .	126
7.33	Gráficos de evolução do índice médio de pontos corretamente classificados na filtragem de elipsóides. Utilizou-se $dmax=0,30$ em todos o métodos. Os elipsóides são formados por 250 pontos com erro aditivo de distribuição $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$ e com $q$ pontos incorretos. (a) $\sigma = 0,02$ e $q = 1250$ (500%). (b) $\sigma = 0,08$ e $q = 2500$ (1000%). (c) $\sigma = 0,01$ . (d) $q = 250$ (100%). . . . .	127
7.34	Gráficos de evolução do índice médio de pontos corretamente classificados na filtragem de superfícies abertas. Utilizou-se $dmax=0,30$ em todos o métodos. As superfícies são formadas por 250 pontos com erro aditivo de distribuição $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$ e com $q$ pontos incorretos. (a) $\sigma = 0,02$ e $q = 1250$ (500%). (b) $\sigma = 0,08$ e $q = 2500$ (1000%). (c) $\sigma = 0,01$ . (d) $q = 250$ (100%). . . . .	128

# Lista de Tabelas

1	Notações para expressões matemáticas . . . . .	16
1.1	Epistemograma simplificado desta tese [MAR 98]. . . . .	28
3.1	Epistemograma simplificado da tese de Gideon Guy [GUY 96]. . . . .	43
4.1	Epistemograma simplificado do trabalho de Mi-Suen Lee [LEE 99]. . . . .	62
5.1	Relações de autovalores na soma de matrizes reais e simétricas de ordem 3. . . . .	80
7.1	Resultados da filtragem dos dados esparsos com $l=0,30$ e $dmax=0,30$ . . . . .	125

# Resumo

Aborda-se neste trabalho o problema de inferência da organização espacial de dados esparsos para reconstrução de superfícies. Propõe-se uma variante do método de acumulação desenvolvido por Gideon Guy e aperfeiçoado por Mi-Suen Lee. Campos espaciais de influência e tensores para representar orientações são os principais instrumentos matemáticos. Esses métodos têm sido associados principalmente a problemas de agrupamento perceptivo. Entretanto, observou-se que as acumulações desses métodos inferem a organização espacial dos dados esparsos. Deste ponto de vista, propõe-se uma nova estratégia para estimar orientações de superfícies. O principal argumento é que um método dedicado pode melhorar essa inferência, ao contrário das idéias originais. Assim, os instrumentos matemáticos são ajustados para estimar principalmente vetores normais: o tensor de orientação é usado para representar exclusivamente superfícies e os campos de influência codificam trajetórias elípticas. Propõe-se também um novo processo para a inferência inicial de orientações que efetivamente avalia a organização dos dados esparsos. A apresentação e crítica dos trabalhos de Guy e de Lee bem como o desenvolvimento metodológico desta tese foram realizados a partir de estudos epistemológicos. Objetos de diferentes formas são usados na avaliação qualitativa dos métodos. Comparações quantitativas foram preparadas com estimativas de erro de diversas reconstruções. Os resultados mostram que o método proposto é menos sensível a ruído e a variação da densidade dos dados. Propõe-se também um método para segmentar pontos fortemente estruturados sobre superfícies. Avaliações comparativas demonstram um melhor desempenho do método proposto nessa aplicação.

# Résumé

## Reconstruction de surfaces à partir de données tridimensionnelles éparses

Ce travail traite du problème de l'organisation spatiale de données éparses pour la reconstruction de surfaces. Nous proposons une variante de la méthode d'accumulation développée par Gideon Guy et améliorée par Mi-Suen Lee. Les principaux outils mathématiques de ces méthodes sont : champs spatiaux d'influence et tenseurs pour représenter des orientations. En général, ces méthodes sont associées à des problèmes de groupement perceptuel. Cependant, nous avons remarqué que ces méthodes permettent d'estimer l'organisation spatiale de données éparses. Nous proposons donc une nouvelle stratégie pour estimer des orientations de surfaces. Nous pensons, en effet, qu'une méthode dédiée peut améliorer cette inférence, contrairement aux méthodes originales. C'est pourquoi nous avons utilisé le tenseur d'orientation pour représenter exclusivement des surfaces et les champs d'influence pour coder des trajectoires elliptiques. Un nouveau traitement pour l'inférence initiale des orientations qui évalue l'organisation des données éparses est proposé. La présentation et la critique des travaux de Guy et de Lee ainsi que le développement méthodologique de cette thèse ont été faits à partir d'une étude épistémologique. Une évaluation qualitative des méthodes a été réalisée sur des objets de forme différente. Des comparaisons quantitatives ont également été menées afin d'estimer les erreurs de reconstruction. Les résultats montrent que la méthode proposée est moins sensible au bruit et à la variabilité de la densité des données. Nous proposons aussi une méthode pour segmenter des points structurés sur des surfaces. Une évaluation comparative permet d'apprécier l'intérêt de la méthode proposée.

# Abstract

## **Orientation inference of sparse data for surface reconstruction**

This work approaches the problem of sparse data spatial organization inference for surface reconstruction. We propose a variant of the voting method developed by Gideon Guy and extended by Mi-Suen Lee. Tensors to represent orientations and spatial influence fields are the main mathematical instruments. These methods have been associated to perceptual grouping problems. However, we observe that their accumulation processes infer sparse data organization. From this point of view, we propose a new strategy for orientation inference focused on surfaces. In contrast with original ideas, we argue that a dedicated method may enhance this inference. The mathematical instruments are adapted to estimate normal vectors: the orientation tensor represents surfaces and influence fields code elliptical trajectories. We also propose a new process for the initial orientation inference which effectively evaluates the sparse data organization. The presentation and critique of Guy's and Lee's works and methodological development of this thesis are conducted by epistemological studies. Objects of different shapes are used in a qualitative evaluation of the method. Quantitative comparisons were prepared with error estimation from several reconstructions. Results show that the proposed method is more robust to noise and variable data density. A method to segment points structured on surfaces is also proposed. Comparative evaluations show a better performance of the proposed method in this application.

# Notações

**Tabela 1:** Notações para expressões matemáticas

Notação adotada	Descrição	Outras notações	Outras descrições
$a$	escalar		
$\boldsymbol{v}$	vetor	$v, \vec{v}$	
$\mathbf{M}$	matriz		
$\boldsymbol{T}$	tensor de segunda ordem	$T, t, \mathbf{t}, \vec{T}, \vec{\mathfrak{T}}, \vec{\mathbf{T}}$	tensor de posto 2, transformação linear
$P$	ponto		
$\mathbb{R}^d$	espaço euclidiano de dimensão $d$	$R^d$	
$\nabla s$	gradiente de $s$	$\vec{\text{grad}} s$	
$ \boldsymbol{v} $	norma	$\ \boldsymbol{v}\ $	magnitude
$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}$	produto escalar	$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{t}), \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{t} \rangle$	produto interno
$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{t}$	produto vetorial	$\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{t}$	produto externo
$\mathbf{M}^T$	matriz transposta		



# Capítulo 1

## Introdução e proposição epistemológica fundamental

O tema central deste trabalho é a inferência da organização espacial de **dados esparsos** para reconstrução de superfícies. Tais dados podem ser obtidos por diversas fontes: digitalizadores 3-dimensões, sensores de profundidade à laser, estereoscopia, radares, sonares, superfícies implícitas, entre outras.

As proposições desta tese estão fundamentadas no método de reconstrução originalmente proposto por Gideon Guy [GUY 96]. A principal característica desse trabalho é a avaliação da organização dos pontos esparsos pela inferência de suas normais e tangentes em relação à superfície original. É essa avaliação que permite a reconstrução implícita de superfícies. Através da análise e crítica do trabalho de Guy, bem como dos trabalhos dele derivados, tem-se dois objetivos fundamentais nesta tese: um **epistemológico** e um de **desenvolvimento**.

O objetivo epistemológico é prover um estudo crítico dos trabalhos fundamentais no sentido de se evidenciar, no contexto científico, suas relações, contribuições e deficiências. A partir dessa compreensão geral, o objetivo de desenvolvimento é aumentar a eficácia da inferência de orientação de dados esparsos e, conseqüentemente, de sua aplicação em problemas de reconstrução de superfícies.

### 1.1 Motivação

Inicialmente, este trabalho se inseriu no tema de reconstrução de superfícies a partir de pares estereoscópicos aero-fotográficos. Em zonas urbanas, o objetivo é reconstruir edifícios com superfícies contínuas com qualidade suficiente para simulação de vôo virtual. Outra aplicação é a detecção e reconstrução de edifícios e ruas [MAY 99, BAI 99, HEN 98] e extração de dados cartográficos [HSI 92]. Nesse contexto, trabalhou-se em um método baseado em simulação de inundação para o problema de separação de elementos de solo e sobre-solo. Esse método foi originalmente aplicado no problema de segmentação de imagens coloridas [PF 01a, PF 01b] e de indexação de imagens [PF 02a, PF 02b].

A informação altimétrica de zonas urbanas obtida por estereoscopia possui características que tornam complexa a sua reconstrução:

- densidade variável de pontos: o número de pontos válidos por unidade de área, em

geral, não é uniforme;

- erro estruturado: superfícies inteiras podem obter falsas altitudes devido ao movimento de objetos no solo como carros, ônibus, trens, navegação fluvial, etc;
- ruído: erros de correspondência geram altitudes com grande desvio em relação à superfície original ou pontos completamente isolados;
- zonas de oclusão: a ausência de correspondência gera regiões nas quais não se pode determinar a altitude. Erros podem ser introduzidos nessas regiões por falsas correspondências;
- descontinuidade: presença de fortes transições altimétricas como a diferença de nível entre um grande edifício e uma avenida ou vazios gerados por zonas de oclusão.

Algoritmos para correspondência dedicados a zonas urbanas são propostos para reduzir estes problemas [COR 98, JOR 95]. Paparoditis *et al.* [PAP 98] define uma máscara adaptativa, baseada nos contornos das imagens, para calcular o nível de correlação. O objetivo é de calcular esse nível somente entre pontos que não estejam separados por bordas. Isso aumenta a precisão da correlação já que as bordas geralmente estão localizadas nos limites dos objetos principais (edifícios, veículos, ruas, etc). A partir de dados altimétricos, uma das estratégias de reconstrução é detectar e eliminar o ruído para então modelar as superfícies. Sinha & Schunck [SIN 92] propõem um método robusto de aproximação local para filtragem e reconstrução inicial dos pontos de entrada e, em seguida, *splines* bicúbicas ponderadas são usadas para modelar a superfície. Maître & Luo [MAÎ 92] buscam densificar os dados altimétricos ao parametrizar suas regiões em superfícies planares e quadráticas.

Outra abordagem é realizar a correspondência e a reconstrução de forma integrada. Isso foi primeiramente proposto por Eastman & Waxman [EAS 87] e Hoff & Ahuja [HOF 89]. A idéia é utilizar a informação altimétrica no processo de correlação para validar ou definir as correspondências. Dessa forma, a reconstrução e a correlação são realizadas no mesmo processo. Seguindo esse princípio, trabalhou-se com a hipótese de que uma correlação cooperativa global [ZIT 00, MAR 76], utilizando informações fotométricas e topográficas, poderia prover resultados satisfatórios.

Nesse contexto, o método de reconstrução desenvolvido por Gideon Guy [GUY 96] e aperfeiçoado recentemente por Mi-Suen Lee [MED 00, LEE 99, LEE 98b] se mostrou interessante por prover uma medida da organização de pontos em 3D. Isto é, pode-se determinar o vetor normal de um ponto em relação aos seus vizinhos e um valor de pertinência dessa estimativa. Além disso, o método possui baixa sensibilidade a ruído e não impõe restrições topológicas à superfície. A idéia seria utilizar suas estimativas no processo de correlação, de modo a favorecer a correspondência de pontos cujas normais tenham forte pertinência.

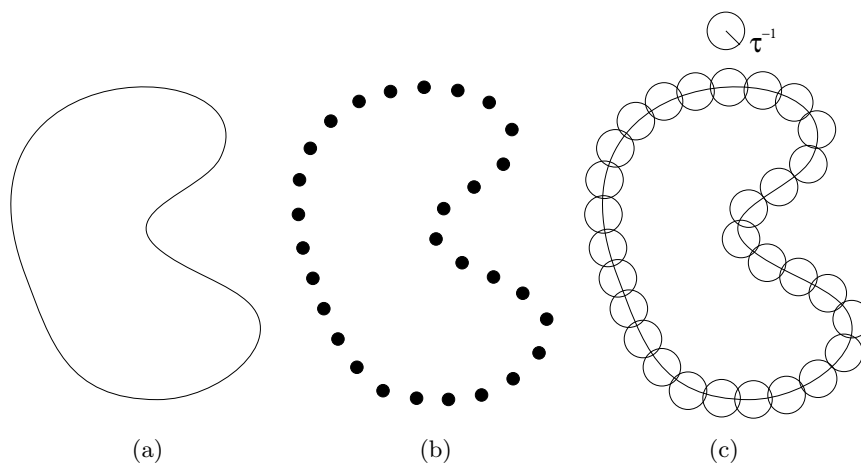
*O fato de os métodos de Guy e Lee possuírem várias questões abertas quanto à avaliação da organização de dados esparsos e à sua aplicação em reconstrução de superfícies motivou este trabalho que efetivamente os tem como principais objetos de estudo. O problema de reconstrução de pares estereoscópicos aero-fotográficos é uma das possíveis aplicações.* ■

## 1.2 Caracterização dos problemas e terminologia

**Reconstrução de superfícies** é o termo utilizado para o problema de se recuperar formas em 3D que, em geral, representam um objeto físico. Obter modelos tridimensionais precisos de objetos reais tem aplicações em engenharia reversa, análise de formas, visão computacional, entre outros campos. Uma **superfície** é subentendida como um objeto bidimensional polimorfo, orientável, compacto e conectado, possivelmente com fronteiras (*boundaries*), embutido em  $\mathbb{R}^3$  [O’N 66].

O problema de reconstrução de superfícies pode ser definido como: dado um conjunto de pontos  $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ , os quais se assume estarem próximos ou sobre uma superfície desconhecida  $U$ , criar um modelo de superfície  $S$  que aproxima  $U$ . Em geral, a superfície  $U$  representa a fronteira externa de um **objeto** contínuo  $O \subset \mathbb{R}^3$ . Portanto, busca-se obter uma representação de  $O$  através da reconstrução.

Composto por pontos espalhados sobre  $U$ , o conjunto  $P$  é uma **amostra** da fronteira do objeto. Assume-se que cada um de seus pontos tenha a forma  $P_i = R_i + e_i$ , onde  $R_i \in U$  é um ponto sobre a superfície desconhecida e  $e_i \in \mathbb{R}^3$  é um vetor de erro. O **indicador de erro** da amostra é  $\delta$  se, para todo  $P_i \in P$ ,  $|e_i| \leq \delta$ . Essa representação é suficiente para codificar o **erro aditivo** da maioria dos processos de amostragem que, em geral, podem ter o indicador de erro estimado. O conjunto  $P$  também pode conter **pontos incorretos** que absolutamente não fazem parte da superfície.



**Figura 1.1:** Amostra da fronteira de um objeto em  $\mathbb{R}^2$ . (a) Fronteira contínua. (b) Amostra de densidade  $\tau$ . (c) Zona que contém a fronteira.

A amostra de uma superfície é caracterizada pela sua **densidade de amostragem**. Um conjunto  $P$  é uma amostra de  $O$  com densidade  $\tau$  se

$$\forall Q \in U, \quad \exists P_i \in P \quad | \quad d(R_i, Q) < \frac{1}{\tau},$$

com  $P_i = R_i + e_i$  e  $\{R_1, \dots, R_n\} \subset U$ . Ou seja,  $P$  tem densidade de amostragem  $\tau$  se todo ponto de  $U$  está a uma distância euclidiana inferior a  $\tau^{-1}$  de um dos pontos de  $P$  sem erro aditivo. A Figura 1.1 ilustra uma amostra e a representação de sua densidade.

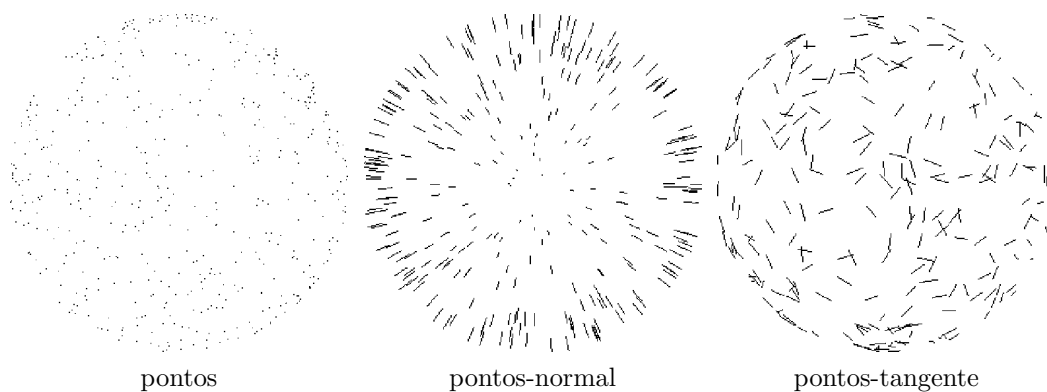
Considere que a fronteira externa de  $O$  seja composta por  $m$  superfícies  $U = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_m$ , com  $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_m = \emptyset$ . É possível que a amostra  $P_i$  de cada região

$U_i$  tenha uma densidade distinta  $\tau_i$  na formação da amostra total  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m$  cuja densidade é  $\min(\tau_i)$ . Pode-se, por exemplo, amostrar as regiões menos complexas do objeto com baixa resolução de amostragem (planos, regiões de baixa curvatura, etc.) e as mais definidas com resoluções maiores (cantos, dobras, fronteiras, etc.). A amostra total  $P$  possui **densidade constante** se as  $m$  amostras  $P_i$  que a compõem têm a mesma densidade  $\tau$ .

Obviamente, um método de reconstrução de superfícies não pode garantir a recuperação exata de  $U$ , já que somente um conjunto finito de pontos é dado. Em geral, é impossível recuperar detalhes de tamanho bastante inferior ao da densidade de amostragem. Por exemplo, buracos na superfície não podem ser distinguidos de buracos na amostra se a densidade for insuficiente. Todavia, espera-se que a superfície reconstruída  $S$  seja próxima de  $O$  e que tenha a sua topologia. Em diversas abordagens de reconstrução, a densidade de amostragem de  $P$  e informações adicionais sobre a topologia de  $U$  podem ser utilizadas.

### 1.2.1 Composição dos dados esparsos

Um conjunto de pontos sobre a fronteira externa de um objeto é uma informação bastante limitada. É possível, em alguns processos de amostragem, determinar os vetores normais e/ou tangentes à superfície  $U$  sobre os pontos amostrados. Por exemplo, digitalizadores 3D por toque podem prover tangentes no modo de deslizamento da ponta de amostragem. A orientação determinada é uma informação a mais sobre a localização da superfície original.



**Figura 1.2:** Tipos de dados esparsos que podem ser fornecidos para reconstrução. Todos os tipos podem compor uma entrada.

Nas abordagens de Guy e Lee, assim como nesta tese, pontos com orientação associada podem ser fornecidos para a inferência de orientação e reconstrução de superfícies. Na maioria dos trabalhos, esses elementos orientados são referenciados como “elementos de curva ou de superfície” (*curvels* e *surfels*) ou simplesmente “curvas” e “unidades de superfície” (*curves* e *patches*). Adota-se neste trabalho, uma nomenclatura que explicita as duas informações fornecidas da superfície  $U$ : uma coordenada e uma orientação. Com isso, pode-se prover as seguintes informações sobre uma superfície  $U$ :

- um **ponto**  $P \in \mathbb{R}^3$ ;

- um **ponto-tangente**  $(T, \mathbf{t}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ : é uma tupla na qual  $\mathbf{t}$  é o vetor tangente à superfície  $U$  no ponto  $T$ . Define uma reta ortogonal à normal no ponto  $T$ ;
- um **ponto-normal**  $(N, \mathbf{n}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ : é uma tupla na qual  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à superfície  $U$  no ponto  $N$ . Define um plano tangente à superfície em  $N$ .

Uma combinação desses elementos espacialmente dispersos sobre  $U$  forma o que se denomina **dados esparsos** de entrada (Fig. 1.2). Assim, um conjunto de entrada  $D = P \cup N \cup T$  é composto pelos  $n = i + j + k$  elementos, com  $n > 0$ , das seguintes amostras:

- pontos:  $P = \{P_1, \dots, P_i\} \cup \{\emptyset\}$ ;
- pontos-normal:  $N = \{(N_1, \mathbf{n}_1), \dots, (N_j, \mathbf{n}_j)\} \cup \{\emptyset\}$ ;
- pontos-tangente:  $T = \{(T_1, \mathbf{t}_1), \dots, (T_k, \mathbf{t}_k)\} \cup \{\emptyset\}$ .

A amostra  $D$  da superfície  $U$  é formada pelo conjunto total de pontos  $P \cup \{N_1, \dots, N_j\} \cup \{T_1, \dots, T_k\}$  com densidade  $\tau$ . Esse conjunto pode conter pontos com erro aditivo ou incorretos. A Figura 1.3a mostra um conjunto de pontos sobre uma esfera unitária cuja norma dos erros  $|e_i|$  tem distribuição normal  $\mathcal{N}(0; 0,08^2)$ . A Figura 1.3b ilustra dados esparsos com pontos incorretos. Com outro tipo de ruído, as normais e tangentes fornecidas podem estar desviadas das orientações reais. As Figuras 1.3d,e ilustram normais e tangentes cujos ângulos em relação às orientações reais têm distribuição normal  $\mathcal{N}(0; (\pi/6)^2)$ .

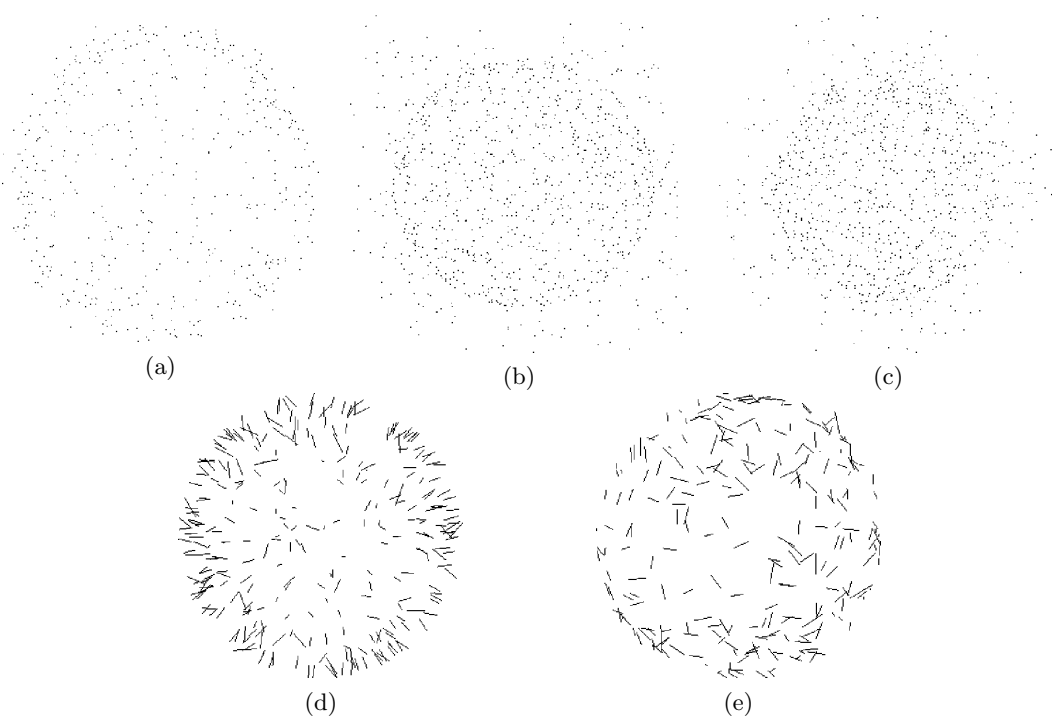
Neste trabalho,  $U$  pode conter interseções de superfícies, ao contrário da maioria dos métodos, e ter topologia arbitrária. Pode conter fronteiras (*boundaries*) e cantos bem definidos. Somente os dados esparsos  $D$  são utilizados e nenhuma outra informação é dada ou assumida sobre  $U$ .

### 1.2.1.1 Processos de amostragem

Em geral, digitalizadores 3D são baseados em sensores ópticos, a laser, acústicos e magnéticos. Digitalizadores ópticos e a laser iluminam um ponto ou faixa do objeto, enquanto um ou mais sensores de vídeo capturam essa região em vários pontos de vista. A posição de cada ponto é calculada pela triangulação dessas informações. Resoluções desse tipo de digitalizador variam entre  $100\mu m$  e  $500\mu m$ . A diferença entre a emissão do feixe e sua reflexão pelo objeto também pode ser utilizada para calcular posições.

Geralmente, os objetos são fixados em uma plataforma cuja posição pode ser controlada com precisão. Em plataformas de translação em linha, obtém-se uma imagem de alcance, i.e., uma grade regular de coordenadas em profundidade. Outra plataforma típica permite uma digitalização cilíndrica do objeto. Uma única varredura com digitalizadores a laser é suficiente para capturar imagens de alcance de objetos de geometria simples. Objetos mais complexos, com buracos e cavidades por exemplo, requerem mais de uma varredura para que o sensor possa obter toda a superfície. Essas diferentes varreduras devem ser inter-relacionadas em uma única malha de triângulos. Vários métodos são específicos para a reconstrução de múltiplas imagens de alcance (Cap. 2).

A liberdade de varredura de digitalizadores a laser com sensor fixo é limitada pelo movimento da plataforma. Modelos mais recentes superam essa limitação utilizando sensores a laser sobre pantógrafos precisos. Isso possibilita a varredura de objetos de maior



**Figura 1.3:** Tipos de ruído que os dados esparsos podem conter. (a) Erro gaussiano com desvio-padrão = 0,08. (b) Dados com pontos incorretos. (c) Modelo com erro gaussiano e pontos incorretos. (d) Normais com erro angular de desvio-padrão =  $\pi/6$ . (e) Tangentes com erro angular de desvio-padrão =  $\pi/6$ .

escala e de geometria complexa com maior liberdade de movimentos. Informações adicionais sobre o objeto podem ser obtidas. Por exemplo, poder-se-ia armazenar a posição do sensor em cada ponto amostrado para calcular as normais da superfície do objeto. Esse processo forneceria pontos-normal como resultado.

Sensores por ultra-som são utilizados em aplicações médicas. Nesse caso, um mapa de profundidade pode ser calculado pela diferença de tempo entre a emissão do ultra-som e sua reflexão no tecido interno. Visualizações 3D dessas estruturas podem facilitar diagnósticos ou eventuais intervenções. Em aplicações geológicas, sonares e radares são utilizados para se obter perfis de subsolo e para mapear superfícies submersas. Múltiplos perfis podem ser combinados e reconstruídos para se ter um modelo tridimensional da região.

Outro tipo de digitalizador se baseia em toques sobre o objeto a ser capturado. Pontas de amostragem são montadas em pantógrafos 3D e operadas manualmente. Os ângulos de junção são medidos por sensores eletrônicos ou ópticos. As coordenadas do ponto amostrado são calculadas pela transformação desses ângulos. Esse tipo de digitalizador é freqüentemente utilizado para se obter medidas precisas de um pequeno número de pontos em importantes regiões do objeto. Esse conjunto de pontos é então conectado para formar uma malha de triângulos representando o objeto. Pode-se obter vetores tangentes à superfície através de um deslizamento da ponta de amostragem. Nesse modo, pontos imediatamente consecutivos são conectados para formar pontos-tangente. Um tipo automático desse digitalizador é utilizado para controle de qualidade na fabricação de peças mecânicas. Nesse caso, a ponta de amostragem é conectada a um robô que a move

automaticamente sobre a superfície do objeto.

Pares de imagens estereoscópicas são amplamente utilizados na obtenção de modelos tridimensionais. Nesse campo, a aero-fotogrametria é uma das principais aplicações. Muito trabalho tem sido feito para o problema de reconstrução estereoscópica de múltiplas imagens. Os dados altimétricos obtidos nesse caso tendem a ser mais precisos e densos. Em zonas urbanas, os métodos de reconstrução podem ser utilizados para se obter modelos de edifícios e outros tipos de construções.

### 1.2.2 O problema fundamental

Os principais trabalhos sobre reconstrução freqüentemente classificam os dados esparsos de entrada como **conjunto desorganizado de pontos**. O objetivo, entretanto, é obter as superfícies formadas por tal conjunto. Ora, pode-se afirmar que os pontos estão organizados ao se pressupor que, no mínimo, eles são estruturados sobre um objeto. É justamente a organização dos pontos, espacial nesse caso, que permite a extração do que os estruturam. Em geral, é a **informação** sobre a organização que é limitada ou insuficiente para a reconstrução. A meta é avaliar essa organização mesmo sob forte presença de ruído.

Para Gopi & Krishnan [GOP 00], um conjunto de **pontos organizados** é aquele que contém informações adicionais sobre a superfície original. Neste trabalho, pontos organizados são aqueles que, juntamente com parte de sua vizinhança, estão estruturados como uma superfície. No paradigma de Guy, é a avaliação dessa organização que viabiliza a reconstrução de superfícies.

O método proposto por Guy realiza reconstrução **implícita** de superfícies. Isso é, a superfície reconstruída é definida por uma função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Guy utiliza matrizes de covariância para capturar o vetor normal  $\mathbf{n}$  em  $(x, y, z)$  e sua medida de pertinência  $s$  em função de todos os dados de entrada. Isso é feito através da acumulação de campos vetoriais que definem conexões preferenciais no espaço. A superfície reconstruída é implicitamente definida pelos pontos nos quais  $f(\mathbf{n}, s) = \mathbf{n} \cdot \nabla s = 0$ , i.e., pontos que são máximos locais de  $s$  na direção de  $\mathbf{n}$ . O trabalho de Lee [LEE 99] consiste em melhorar a estimativa de  $\mathbf{n}$  e de sua pertinência  $s$ . Essa inferência de orientação é, portanto, fundamental nessa abordagem de reconstrução.

*O problema fundamental desta tese é inferir o nível primário da organização de dados esparsos como superfícies. Assumindo que o conjunto de pontos está organizado segundo tal estrutura, procura-se estimar, para pontos arbitrários no espaço, orientações que a indiquem. Além disso, associa-se a cada orientação uma medida de pertinência que permita avaliar o grau de relevância da estimativa. Pontos sobre as superfícies devem ter pertinência localmente máxima.* ■

Portanto, a organização espacial primária dos dados esparsos é avaliada através de uma inferência de orientações com medidas de confiabilidade. O problema geral é definir as funções  $\mathbf{n}(D, Q) \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $s(D, Q) \rightarrow \mathbb{R}^+$ , dado um conjunto de elementos esparsos  $D$  e um ponto arbitrário  $Q \in \mathbb{R}^3$ , de tal forma que

- $\mathbf{n}(D, Q)$  é uma estimativa da normal em  $Q$  sobre uma superfície que presumidamente estrutura  $Q$  juntamente com alguns de seus vizinhos em  $D$ ;

- $s(D, Q)$  é a pertinência, ou grau de relevância da estimativa da normal em  $Q$  e da superfície indicada por essa normal, em relação à superfície que melhor estrutura os elementos de  $D$  que são vizinhos a  $Q$ ;
- essas estimativas dependem da organização espacial dos dados esparsos  $D$  e do posicionamento de  $Q$  em relação a eles. A normal estimada indica uma possível superfície local. A medida de pertinência pode ser nula, se  $Q$  não forma nenhuma superfície com  $D$ , ou localmente máxima, se está sobre o que se estima ser uma superfície que estrutura parte de  $D$ .

O objetivo é determinar como e quanto um ponto  $Q$  está estruturado sobre uma das superfícies formadas pelos elementos de  $D$ . Para isso, as funções  $\mathbf{n}(D, Q)$  e  $s(D, Q)$  devem codificar hipóteses de estruturação dos elementos de  $D$  como superfícies. Segundo tais hipóteses, quanto maior a medida de pertinência da normal inferida, melhor é a posição de  $Q$  em relação à superfície que melhor estrutura seus vizinhos em  $D$ . O desafio desse problema é prover funções que sejam eficazes e robustas para esse fim. O mesmo é válido se curvas formam a estrutura principal.

Pela inferência da orientação dos pontos que compõem  $D$ , pode-se determinar quais deles estão organizados como superfície. Em uma aplicação de filtragem, pontos com baixa pertinência em relação ao conjunto, i.e., menos organizados, poderiam ser descartados. Da mesma forma, as normais estimadas podem ser utilizadas por outros métodos de reconstrução que dependem dessa informação. Suas medidas de pertinência seriam úteis como indicador de importância.

Note que o problema fundamental desta tese está diretamente relacionado à reconstrução de superfícies. Nesta tese, considera-se o problema de reconstrução como secundário por ser uma aplicação do processo de inferência de orientação.

### 1.3 Visão geral dos trabalhos fundamentais

Muito trabalho tem sido feito sobre o problema de se modelar superfícies a partir de dados esparsos. Em alguns métodos, a presença de ruído pode interferir severamente na reconstrução da superfície. Aqueles que requerem que a superfície resultante passe por todos os pontos de entrada obviamente falham quando ruído está presente. Vários deles possuem restrições quanto a topologia dos dados de entrada. Os métodos baseados em deformação de formas, por exemplo, geralmente podem reconstruir objetos de topologia restrita. A abordagem proposta por Guy é uma das poucas não iterativas que é capaz de inferir curvas em 2D e superfícies em 3D a partir de pontos, normais e tangentes. Ela oferece a possibilidade de se inferir objetos complexos, além de ser robusta quanto a presença de ruído.

O primeiro trabalho de Guy [GUY 93] concerne o problema de extração de contornos em imagens a partir de dados vetoriais como pontos ou tangentes. A idéia principal é acumular a informação local de cada elemento de entrada, utilizando um campo vetorial pré-definido que codifica direções preferenciais de conexão. Posicionado com uma coordenada e direcionado por uma tangente, esse campo define a influência de um ponto sobre sua vizinhança. Nesta tese, define-se esses campos como sendo **campos de influência**.

Acumulando-se a contribuição de todos os elementos de entrada, obtém-se um campo

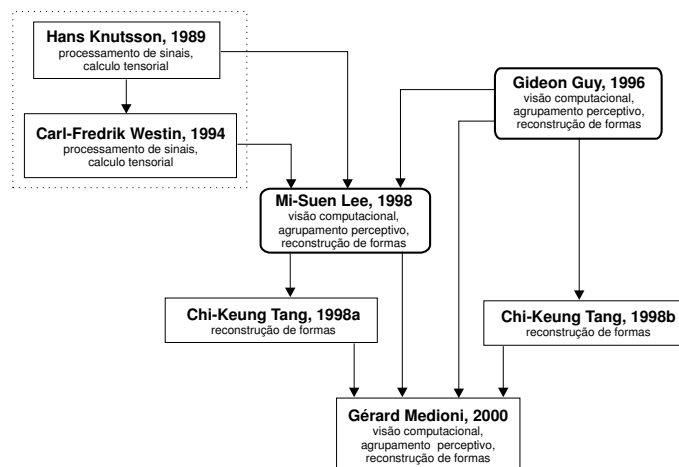


vetorial e um campo escalar em uma grade bidimensional que engloba a entrada. Esses campos são denominados **mapas de saliência**. Os vetores resultantes indicam a tangente estimada de possíveis curvas. Os escalares a eles associados indicam o quanto tais direções são pertinentes. Ou seja, a medida de pertinência de cada tangente estimada. Curvas são extraídas utilizando-se as informações contidas nesses dois mapas.

*Um ponto chave do processo é a representação das direções locais como matrizes de covariância no momento da acumulação. De fato, a representação de direções por vetores não é suficiente para captar variações complexas de orientação (direção e sentido) [KNU 89].* ■

O termo **estruturas salientes** é utilizado em organização perceptiva para descrever objetos que atraem imediatamente a atenção quando se observa uma imagem [SHA 88]. Em epistemologia, diz-se que um objeto e/ou sujeito é uma **forma saliente**, onde saliência é o atributo correspondente, se este tem uma posição de destaque contra uma situação de fundo [MAR 99]. O objetivo do primeiro trabalho de Guy é a inferência de curvas e a detecção de objetos **salientes** em imagens. Portanto, esse trabalho se insere na área de agrupamento perceptivo.

Nos trabalhos subseqüentes de Guy [GUY 95, GUY 96, GUY 97], o princípio básico de reconstrução de estruturas curvilíneas em 2D foi estendido para inferir superfícies em 3D. As mesmas hipóteses usadas na construção dos campos de influência em 2D são aplicadas nos campos de influência tridimensionais. O processo de acumulação é similar ao de 2D e da mesma forma gera campos vetoriais e escalares, também denominados mapas de saliência, em uma grade tridimensional que engloba os dados de entrada. A extração de curvas, superfícies e suas interseções é realizada utilizando-se seus respectivos mapas de saliência.



**Figura 1.4:** Contexto de relacionamento dos trabalhos principais.

Lee & Medioni [LEE 98b, LEE 99] definiram uma nova abordagem para reconstrução de superfícies e curvas baseada no trabalho de Guy, na representação de estruturas locais proposta por Knutsson [KNU 89] e no formalismo tensorial para estimar orientações proposto por Westin [WES 94]. Lee denomina seu método como *tensor voting*. Ao contrário

dos argumentos apresentados por Lee & Medioni em [LEE 99], a sua representação de orientação é exatamente a mesma proposta por Guy. De fato, a matriz de covariância utilizada por Guy é um tensor de segunda ordem. Entretanto, Lee utiliza diferentemente a informação tensorial na fase de acumulação de informações locais. Ele propõe também uma extensão do método para inferência de curvas direcionadas e regiões.

Várias aplicações desses métodos de inferência foram propostas principalmente em problemas de visão computacional e de reconstrução de superfícies. Lee propõe uma variação de seu método para reconstruir superfícies a partir de pares estereoscópicos [LEE 98a]. Uma reconstrução integrada de superfícies, curvas e suas interseções foi proposta por Tang & Medioni [TAN 98b]. Nesse trabalho, os diversos mapas de saliência resultantes da fase de acumulação são integrados para refinar a reconstrução. Em outro trabalho [TAN 98a], esses mesmos autores propõem a aplicação do método de Lee para extração de superfícies a partir de modelos dentários, modelos de terreno, e para extração de características em campos vetoriais e escalares como ondas de choque e vórtices.

Recentemente, Medioni *et al.* publicaram um livro [MED 00] que contém toda a cadeia de processamento proposta pelos trabalhos de Guy e Lee, bem como as aplicações propostas pelos diversos autores acima. Esse livro está principalmente inserido na área de visão computacional. O método de Lee é aplicado na resolução de diversos problemas dessa área. O principal argumento é de que o esquema  $2\frac{1}{2}$ -D proposto por Marr [MAR 82] é inadequado para representar os elementos principais dos diversos problemas de visão. Desta forma, as soluções propostas sempre passam pela representação dos problemas diretamente em 3D.

O contexto de relacionamento desses trabalhos e seus principais domínios de pesquisa estão ilustrados na Figura 1.4. As setas indicam as bases teóricas dos diversos trabalhos. Note que a tese de Guy é o ponto de partida para os outros. Obviamente, o contexto é mostrado a partir do ponto de vista científico geral deste trabalho. A forte influência sobre Guy [GUY 96] de trabalhos na área de agrupamento perceptivo, por exemplo, não estão indicados.

## 1.4 Fundamentação epistemológica da tese

Epistemologia é o campo da teoria do conhecimento que tem a ciência como objeto [MAR 99]. Por definição, todo trabalho científico desenvolve epistemologia ao, no mínimo, enunciar um problema. O diferencial desta tese está em tornar explícitas suas questões epistemológicas e com isso utilizá-las como **instrumento** de pesquisa e desenvolvimento.

A idéia original deste trabalho é utilizar os métodos de Guy e Lee na solução do problema de reconstrução estereoscópica de pares aero-fotográficos. O desenvolvimento dessa idéia produziu diversos questionamentos sobre o paradigma de reconstrução de Guy e os encaminhamentos dados pelos autores. No centro dessas questões está o tema de inferência da organização espacial de dados esparsos que foi então escolhido como foco desta tese.

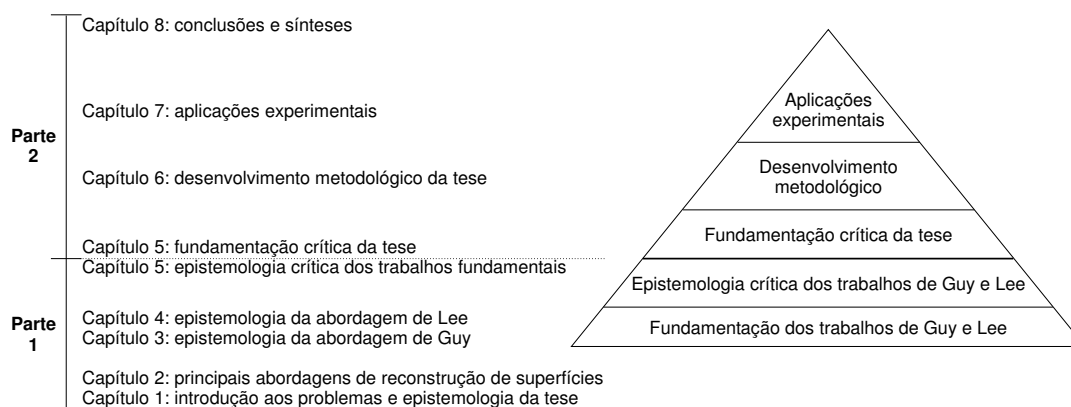
A complexidade desse tema criou a necessidade de uma análise epistemológica profunda para abrir o paradigma, i.e., tornar seus fundamentos visíveis. Ao entrar na estrutura cognitiva dos trabalhos de Guy e Lee, essa análise desvendou várias possibilidades de desenvolvimento, entre as quais estão as proposições desta tese.

### 1.4.1 Estrutura e organização

Dooyeweerd [DOO 58] introduz o conceito de **crítica transcendental**: na crítica de um trabalho, deve-se reconhecer as premissas explícitas e ocultas de seu sistema cognitivo para um **justo julgamento**. Isso porque as premissas e proposições que são perfeitamente coerentes em uma visão de mundo podem parecer ilógicas, e mesmo falsas, em outras [MAR 99].

No processo crítico, deve-se entrar no campo cognitivo da obra e evidenciar seus fundamentos, para só então voltar ao campo que sustenta a discussão. Dessa forma, pode-se construir uma crítica, mesmo a partir de outra visão de mundo, que respeite a unidade cognitiva do trabalho. Nesse caso, o sistema cognitivo da crítica é transcendente, i.e., não é intrínseco ao sistema cognitivo da obra em questão.

Os trabalhos de Guy e Lee se situam no campo de visão computacional e no campo matemático. Mais precisamente, seus princípios básicos são inerentes ao campo de agrupamento perceptivo. Todavia, esta tese situa-se no campo de reconstrução de formas e no campo matemático. Uma crítica transcendente dos trabalhos de Guy e Lee se mostrou necessária. Isso é feito na primeira parte desta tese como ilustrado na Figura 1.5.



**Figura 1.5:** Estrutura e organização da tese. O capítulo de epistemologia crítica divide as duas partes da tese: a de fundamentação e a de desenvolvimentos.

Nos capítulos 3 e 4, as abordagens de Guy e Lee são apresentadas a partir do ponto de vista dos autores e com sua própria visão de mundo. Esses estudos epistemológicos dão o devido mérito às obras ao se posicionar em seus campos cognitivos.

O Capítulo 5 apresenta uma crítica epistemológica aos trabalhos fundamentais a partir do campo cognitivo desta tese. Focalizando o problema de reconstrução de superfícies, discute-se os fundamentos, as proposições, os instrumentos matemáticos, os processos de acumulação e os encaminhamentos dos trabalhos de Guy e Lee. Os **instrumentos matemáticos** são: matrizes de covariância e tensores para representar orientações e campos espaciais de influência.

A fundamentação crítica apresentada no Capítulo 5 é uma transição entre os trabalhos fundamentais e esta tese. Discute-se com detalhes os instrumentos metodológicos das abordagens de Guy e Lee, questionando sua capacidade de avaliar a organização espacial de dados esparsos.

O desenvolvimento metodológico apresentado no Capítulo 6 baseia-se nas discussões

da fundamentação crítica. As proposições realizadas buscam uma melhoria da avaliação da organização espacial de dados esparsos. Elas estão fundamentadas nas hipóteses de que: um método dedicado a superfícies é mais pertinente, a inferência inicial de orientação é crucial para o processo e a morfologia dos campos vetoriais e de força deve ser coerente com os objetivos de reconstrução.

O Capítulo 7 apresenta diversos experimentos com os métodos fundamentais e o método proposto. Busca-se evidenciar empiricamente a validade das discussões realizadas na fundamentação crítica e no desenvolvimento metodológico. Os métodos são avaliados nas aplicações de reconstrução de superfícies e filtragem de dados esparsos.

**Tabela 1.1:** Epistemograma simplificado desta tese [MAR 98].

Objetivo	Ciências	Objeto real	Objeto parcial	Produto
Realizar estudos epistemológicos dos trabalhos de Guy e Lee.	- epistemologia; - visão computacional; - reconstrução de formas; - matemática aplicada.	Trabalhos de Guy e Lee e trabalhos relacionados.		Fundamentação dos trabalhos de Guy e Lee.
Desenvolver crítica epistemológica aos trabalhos de Guy e Lee.	- epistemologia; - visão computacional; - reconstrução de formas; - matemática aplicada.	Trabalhos de Guy e Lee e trabalhos relacionados.	Fundamentação dos trabalhos de Guy e Lee.	Crítica dos trabalhos de Guy e Lee.
Fundamentar proposições teóricas de solução ao problema.	- reconstrução de formas; - matemática aplicada.	Problema de avaliação de organização de dados esparsos.	Crítica aos trabalhos fundamentais.	Fundamentações teóricas para a solução do problema de avaliação de organização de dados esparsos.
Desenvolver um método para avaliar a organização espacial de dados esparsos.	- reconstrução de formas; - matemática aplicada.	Objetos reais.	Conjunto de pontos, tangentes e normais que representam parcialmente a forma de um objeto real.	Método para avaliar a organização espacial de dados esparsos.
Avaliar empiricamente a validade das proposições teóricas e metodológicas.	- reconstrução de formas; - matemática aplicada.	Métodos fundamentais e o método proposto.		Resultados qualitativos e quantitativos de comparação.

### 1.4.2 Os princípios básicos

Este é um trabalho de continuidade do paradigma de Guy que focaliza o problema de avaliação da organização de dados esparsos, identificado como o principal processo da abordagem. Ao contrário do trabalho de Lee, não se atua somente no instrumental matemático dos métodos.

Questiona-se os fundamentos das abordagens e o uso dos instrumentos na solução do problema. Os argumentos calcados no campo de agrupamento perceptivo são os mais questionados. Acredita-se que alguns desses argumentos limitam a interpretação e o uso dos instrumentos matemáticos.

A questão central deste trabalho é: quais são as melhores interpretações, construções e aplicações dos instrumentos matemáticos e dos processos de acumulação para avaliar a

organização de dados esparsos? Dessa forma, esta tese se caracteriza como uma evolução do paradigma de Guy.

Com um ponto de vista no campo matemático, os princípios básicos ou procedências desta tese são as proposições de Guy e as extensões de Lee. Os instrumentos utilizados são os mesmos do trabalho de Lee: o tensor de orientação de Westin e os campos espaciais de influência de Guy.

Portanto, o método de trato do problema nesta tese é **dedutivo**. Na busca da solução, não se parte de dados existentes nem de resultados experimentais. Parte-se do sistema teórico estabelecido pelos trabalhos fundamentais e suas bases (Fig. 1.4). De fato, realiza-se inferências críticas sobre partes das instâncias teóricas desse sistema. Algumas outras são assumidas como premissas.

Isso significa que a fundamentação crítica (Cap. 5) e o desenvolvimento metodológico (Cap. 6) foram deduzidos dos trabalhos fundamentais por meio do campo matemático e de reconstrução de formas. Em um segundo momento, os experimentos do Capítulo 7 foram realizados para confirmar na prática o produto das deduções.

Diante das considerações acima, conclui-se que esta tese tem dois sistemas de acesso à verdade. Na primeira parte (Fig. 1.5), a epistemologia é utilizada para caracterizar o problema. A segunda parte, com um trato dedutivo ao problema, apresenta uma solução conduzida pelo sistema de inquirição leibniziano. Nesse sistema, a verdade é analítica, ou seja, situa-se no campo da lógica ou no campo do pensamento formal [MAR 99].

### 1.4.3 Objetivos

Como indicado no epistemograma (Tab. 1.1), esta tese tem objetivos epistemológicos e de desenvolvimento:

- objetivos epistemológicos: o objeto de estudo são os trabalhos fundamentais, nos quais busca-se através de estudo analítico e crítico:
  - evidenciar seu contexto científico e suas inter-relações;
  - valorizar suas contribuições e apontar suas deficiências tanto científicas quanto metodológicas;
  - discutir suas bases científicas;
  - discutir seus resultados em relação aos seus objetivos;
  - discutir as conclusões dos autores;
  - identificar limites e possíveis extensões;
- objetivos de desenvolvimento: estão voltados para o problema fundamental e suas aplicações:
  - propor novo método para estimar normais, com maior precisão e menor sensibilidade a ruído e associar-lhes valores de pertinência que melhor definam as superfícies;
  - aplicar esse método no problema de reconstrução de superfícies e de filtragem de dados esparsos, provendo avaliações qualitativas e quantitativas.

Os aspectos epistemológico e de desenvolvimento têm produtos distintos, mas estão diretamente relacionados. A identificação do problema fundamental, por exemplo, é resultado da análise crítica dos trabalhos de Guy e Lee. Portanto, o estudo epistemológico

esclarece as questões envolvidas na problemática e guia o desenvolvimento proposto. Assim, os objetivos epistemológicos, ou de natureza epistemológica, dizem respeito a:

- fundamentação epistemológica: evidenciar os fundamentos das abordagens de Guy e Lee;
- metodologia, i.e., o estudo do método: evidenciar os métodos dos trabalhos fundamentais;
- crítica epistemológica: avaliar e discutir os métodos de Guy e Lee;
- fundamentação crítica: fundamentar as proposições desta tese;

Os objetivos de desenvolvimento dizem respeito ao aperfeiçoamento dos métodos fundamentais a partir dos estudos epistemológicos. Portanto, esse aperfeiçoamento é produto de um entendimento mais profundo das questões ligadas às abordagens de Guy e Lee e ao problema fundamental.

#### 1.4.4 Contribuições

O método de Guy e o aperfeiçoamento de Lee são relativamente recentes e várias questões restam abertas. No livro recentemente publicado por Medioni *et al.* [MED 00], esses métodos são apresentados de forma completa, mas uma discussão aprofundada sobre o tema não é realizada. Portanto, uma das contribuições desta tese é o estudo complementar que analisa e critica vários aspectos dessas obras:

- definição dos campos de influência;
- limites da representação de orientação por tensores ou matrizes de covariância;
- interpretação de dados obtidos por acumulação de tensores;
- a contribuição das extensões de Lee;
- a comparação quantitativa entre os dois métodos;
- as proposições baseadas em conceitos de agrupamento perceptivo;
- limites do método de reconstrução;
- a viabilidade das aplicações propostas.

Os autores chamam a atenção para o fato de se poder reconstruir curvas e superfícies pelo mesmo processo não iterativo. Eles também enfatizam sua baixa sensibilidade à ruído e sua capacidade de reconstruir superfícies topologicamente complexas (notadamente as que se interceptam). Essas características chamam a atenção pela sua generalidade de aplicação. Nessas condições, a contribuição epistemológica é legitimada pelos questionamentos a essas conclusões e pelas novas proposições teóricas para a avaliação da organização de dados esparsos.

A contribuição metodológica da tese é um novo método dedicado à avaliação da organização de dados esparsos sobre superfícies. Os resultados experimentais produzidos demonstram a maior precisão e a menor sensibilidade a ruído desse método. A relevância dessa contribuição pode ser avaliada por suas possíveis aplicações:

- filtragem de dados esparsos: a medida de pertinência pode ser usada para eliminar pontos que não formam superfícies (Seção 7.2);

- filtragem de normais e tangentes: pode-se verificar a validade de normais e tangentes dadas como informação;
- estimar normais para outras aplicações: alguns métodos de reconstrução, por exemplo, dependem de vetores normais nos pontos esparsos [BOI 00];
- segmentação pelo nível de organização: em dados altimétricos, por exemplo, espera-se que o nível de organização em termos de superfície em zonas de vegetação seja menor. Essa aplicação do método é proposta por Cord *et al* [COR 02].

## 1.5 Propedêutica

Propedêutica é uma entidade do campo da epistemologia concebida para organizar roteiros de estudo. Sua função é estabelecer caminhos de leitura com bases lógico-cognitivas. Nesta seção apresenta-se alguns roteiros que podem facilitar a leitura da tese em assuntos específicos:

- abordagens de reconstrução:
  - introdução: seções 1.2 e 1.3;
  - trabalhos relacionados: capítulo 2.
- contexto científico da tese:
  - fundamentação das abordagens de Guy e Lee: seções 3.1 e 4.1;
  - fundamentação epistemológica desta tese: seção 1.4.
- contexto metodológico da tese:
  - metodologia de Guy e Lee: seções 3.2 e 4.2;
  - desenvolvimento metodológico da tese: capítulo 6;
  - aplicações experimentais: capítulo 7.
- críticas aos trabalhos fundamentais:
  - fundamentação das abordagens de Guy e Lee: seções 3.1 e 4.1;
  - crítica aos trabalhos de Guy e Lee: seções 5.1 e 5.2;
  - síntese de conclusões analíticas e metodológicas: seções 8.1 e 8.2.
- encaminhamento da solução:
  - fundamentação crítica: seção 5.3;
  - desenvolvimento metodológico: capítulo 6;
  - conclusões epistemológicas e metodológicas de experimento: seções 8.3 e 8.4.

Acredita-se que a leitura das seções e capítulos indicados seja suficiente para um entendimento geral do tópico. Contudo, recomenda-se a leitura mínima da introdução, da fundamentação dos trabalhos de Guy e Lee, da epistemologia crítica e conclusões.

## Capítulo 2

# Trabalhos relacionados

O objetivo deste capítulo é apresentar diferentes abordagens ao problema de reconstrução de superfícies e alguns de seus principais trabalhos. No esquema de classificação de Hoppe [HOP 94], os trabalhos são apresentados de acordo com a informação explorada sobre os dados esparsos como sua topologia, estruturação, orientações ou presença de ruído. Neste capítulo, os trabalhos são classificados pela **estratégia** em que se baseiam para determinar a superfície [MEN 98, GOP 00]. De uma forma geral, as principais abordagens utilizam algoritmos baseados em subdivisão espacial, superfície de nível, métodos de deformação e métodos paramétricos.

### 2.1 Métodos baseados em subdivisão espacial

Em geral, técnicas baseadas em subdivisão espacial partem de um volume que engloba os dados de entrada e que é composto de elementos disjuntos. A meta desses algoritmos é encontrar os elementos que compõem a estrutura formada pelos pontos de entrada. A forma de se processar os dados de entrada pode ser baseada em **superfície** ou em **volume**.

#### 2.1.1 Subdivisão espacial baseada em volume

Neste esquema, o espaço é decomposto em elementos que englobam todo o modelo a ser reconstruído. Os elementos que não fazem parte do volume definido pelo modelo são eliminados. Os elementos restantes definem a superfície que, em geral, passa por todos os pontos de entrada. Isso torna esses métodos não apropriados se houver ruído.

A maioria dos algoritmos dessa categoria se baseiam na **triangulação de Delaunay** que é única para um conjunto de pontos  $P$ . No algoritmo para sua construção definido por Edelsbrunner & Shah [EDE 92], os pontos são inseridos um a um na triangulação que é, inicialmente, um tetraedro. A cada ponto inserido, a triangulação é modificada para manter a propriedade Delaunay: a esfera que circunscreve cada tetraedro da triangulação não pode conter nenhum dos pontos de entrada. Para manter essa propriedade, aqueles tetraedros que falham no teste local são reestruturados. Isso porque um conjunto de cinco pontos em posições convexas podem ter somente duas triangulações possíveis e uma delas possui a propriedade Delaunay.

A triangulação Delaunay corresponde à triangulação do **envelope convexo** dos



dados de entrada, preenchendo o seu interior com tetraedros [BOI 95]. É portanto uma representação **volumétrica** da entrada. A partir dessa triangulação, a estratégia básica é eliminar triângulos para se obter uma representação aproximada da superfície. Algoritmos dessa categoria são também denominados **métodos de constrição**.

Um dos primeiros trabalhos dessa abordagem é o algoritmo denominado Escultor-Delaunay de Boissonnat [BOI 84]. Se todos os pontos de  $P$  fazem parte das fronteiras da triangulação Delaunay, então seu envelope convexo é uma aproximação poliédrica da superfície que se quer reconstruir. Nesse caso, a triangulação Delaunay também é uma representação volumétrica do objeto. Se nem todos os pontos fazem parte dos limites, então tetraedros são eliminados até que todos os pontos de  $P$  assim o façam. Essa escultura do envelope convexo é feita seqüencialmente, eliminando-se um tetraedro após outro de tal forma que a estrutura resultante seja sempre um poliedro. Para isso, associa-se um valor a cada tetraedro que tenha uma face no limite do poliedro. A cada etapa, o tetraedro com maior valor é eliminado. Boissonnat propõe que tal valor seja a distância máxima entre as faces do tetraedro e suas partes associadas na esfera que o circunscreve.

O questão central é a decisão de qual estrutura será eliminada. Boissonnat argumenta que os valores atribuídos para eliminação dos tetraedros dependem da aplicação. Veltkamp [VEL 95] utiliza um parâmetro denominado indicador- $\gamma$  para determinar a seqüência de tetraedros a serem removidos. Uma vantagem desse algoritmo é que o indicador- $\gamma$  se adapta a regiões com densidade variável. Entretanto, esses algoritmos não podem reconstruir objetos que contenham buracos ou bordas na superfície.

Edelsbrunner & Mücke [EDE 94] introduzem a noção de **formas-alfa**. A forma-alfa de um conjunto de pontos é o conjunto de triângulos e tetraedros, retirados da triangulação Delaunay, que satisfazem uma restrição adicional chamada **teste- $\alpha$** , diretamente relacionada com a propriedade Delaunay. O parâmetro  $\alpha$  é um número real não negativo. Dado um triângulo  $T$  não pertencente ao envelope convexo e os pontos dos dois tetraedros adjacentes, verifica-se se esses pontos estão circunscritos pela esfera definida por  $T$ . Se não estão circunscritos e o raio da esfera é menor que  $\alpha$ , então  $T$  é mantido. Se estão, encontra-se a menor esfera que circunscreve  $T$  e um dos tetraedros. Se o raio dessa esfera é menor que  $\alpha$  então  $T$  é mantido.

Todos os triângulos rejeitados não estão na forma-alfa e os restantes são um subconjunto da triangulação Delaunay que, após um ajuste de  $\alpha$ , se aproximam da topologia da superfície a ser reconstruída. Para valores muito altos de  $\alpha$  a forma-alfa é o envelope convexo. Se  $\alpha = 0$ , a forma-alfa é exatamente os pontos de entrada. A qualidade da reconstrução depende do ajuste do parâmetro  $\alpha$ .

Certos detalhes e configurações da superfície não são propriamente determinadas na forma-alfa e não existe nenhum valor de  $\alpha$  que inclua todos os triângulos pertinentes e rejeite todos que não o são [TEI 98]. Bernardini & Bajaj [BER 97] apresentam condições suficientes de amostragem para viabilizar a reconstrução confiável de objetos por formas-alfa. Em geral, essas condições não são satisfeitas. Bernardini *et al.* [BER 96] propõem uma versão “regularizada” de formas-alfa para reconstruir sólidos que automaticamente determina o parâmetro  $\alpha$  e realiza refinamento em áreas de densidade insuficiente.

Teichmann & Capps [TEI 98] propõem formas-alfa anisotrópicas para a reconstrução. A idéia básica é deformar a esfera usada no teste- $\alpha$  em função de propriedades locais. A anisotropia é definida por um tensor métrico cuja forma é um elipsóide. A

sua forma é controlada por um parâmetro extra  $\tau$  que define a deformação da esfera na direção da normal do triângulo. Esse parâmetro também deve ser ajustado experimentalmente. Essa técnica estende o conceito de formas-alfa e permite reconstruir superfícies mais complexas.

Outra estrutura utilizada em reconstrução é o **diagrama de Voronoi**. Dado um conjunto discreto de pontos em  $\mathbb{R}^d$ , uma célula Voronoi de um ponto é a região de  $\mathbb{R}^d$  mais próxima dele do que de qualquer outro ponto do conjunto. O diagrama de Voronoi é o particionamento de  $\mathbb{R}^d$  definida pelas células Voronoi. O dual geométrico desse diagrama é a triangulação de Delaunay. Attali [ATT 95] apresenta diversos resultados teóricos sobre sua aplicação.

Amenta *et al.* [AME 98, AME 99] propõem um algoritmo que utiliza a triangulação Delaunay e o diagrama de Voronoi para produzir um conjunto de triângulos que formam a “crosta” dos pontos de entrada. O cálculo da crosta é baseado em um processo denominado **filtragem Voronoi**. Em 2D, a primeira etapa é calcular a triangulação de Delaunay da união dos pontos de entrada com os vértices do diagrama de Voronoi. A crosta é formada pelas arestas entre os pontos de entrada dessa triangulação. Em 3D, somente dois pontos do diagrama de Voronoi, denominados **polos**, são usados para cada ponto de entrada. Uma vantagem é que nenhum parâmetro deve ser fornecido nesse processo. Esse trabalho foi o primeiro a fornecer garantias comprovadas de reconstrução de acordo com um critério de amostragem dos pontos [AME 99]. Todavia, tal critério é raramente obtido em aplicações reais e, nesse caso, a superfície reconstruída pode ter buracos adicionais, se interceptar ou não passar por todos os pontos de entrada. Amenta *et al.* [AME 98] também propõem um método para estimar normais a partir do diagrama de Voronoi.

### 2.1.2 Subdivisão espacial baseada em superfície

Os algoritmos baseados neste esquema decompõem o espaço em elementos, selecionam os que são atravessados pela superfície, e a extraem desses elementos.

Em vários trabalhos [MEN 98, GOP 00], os algoritmos baseados em superfície de nível são também classificados nessa categoria. Isso porque possuem uma fase de extração da superfície de nível a partir da função que a define. Várias abordagens [HOP 92, GUY 96, LEE 99] utilizam algoritmos *marching cubes* [WYV 86, LOR 87] para, a partir de uma grade de voxels, selecionar os elementos pelos quais a superfície passa e triangulá-la a partir deles. Em outras abordagens [BAJ 95, BOI 00], a superfície de nível é identificada na triangulação de Delaunay. Recentemente, Galin & Akkouche [GAL 00a] propuseram um método incremental de poligonalização de superfícies implícitas. Eles utilizam decomposição *octree* para reconstruir recursivamente a superfície, até que um dado nível de precisão seja obtido. Livnat *et al.* [LIV 96] propõem um eficiente algoritmo para extração de superfícies de nível em uma grade discreta de escalares.

No algoritmo baseado em superfície de Boissonnat [BOI 84], planos de projeção são usados para triangular localmente os pontos de entrada. A partir da  $k$ -vizinhança de um ponto  $P$ , sua proposta é fazer uso da projeção dos pontos de entrada no plano tangente à superfície nesse ponto. Em superfícies com geometria específica, a triangulação das projeções no plano local provê uma triangulação da própria superfície. No esquema proposto, os pontos de entrada são inseridos um a um na triangulação, através de um critério

local sobre suas projeções. Essa abordagem não garante que uma mesma triangulação sempre será obtida e impõe limitações à topologia da superfície.

Oblonšek & Guid [OBL 98] apresentam um método eficiente de reconstrução no qual triângulos são inseridos, um a um, de forma a aproximar os planos tangentes à superfície. Como no trabalho de Boissonat [BOI 84], os  $k$ -vizinhos são usados para calcular o plano tangente e os pontos são inseridos um após o outro. A inclusão de triângulos é feita em função de testes locais entre os  $k$ -vizinhos dos pontos já incluídos. Em sua última fase, o algoritmo refina a malha obtida, inserindo triângulos em regiões planas. É bastante eficiente, mas o resultado depende de alguns critérios de amostragem.

## 2.2 Métodos baseados em superfície de nível

Nesta abordagem, a superfície corresponde às localidades nas quais uma função  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é igual a uma constante  $c$ . A função define implicitamente a superfície original através de uma aproximação ao invés de interpolação. Geralmente, a superfície é dada por  $f(x, y, z) = 0$ , sendo  $f$  uma distância à fronteira do objeto. Há uma tendência a suavizar cantos e, em geral, ruído pode estar presente.

*Nas abordagens de Guy [GUY 96] e Lee [LEE 99], que fundamentam esta tese, a superfície é definida implicitamente, em uma grade de voxels, pelas orientações estimadas e suas medidas de pertinência. Um algoritmo marching cubes modificado extrai a superfície de nível usando essas informações. ■*

Um algoritmo clássico desta categoria é o de Hoppe [HOP 92, HOP 94], um dos mais citados da área. A primeira etapa é o cálculo do plano tangente em cada ponto de entrada e a normal associada em função de  $k$  pontos vizinhos. O problema é associar orientações consistentes a essas normais. Para isso, um grafo *Riemanniano* sobre os pontos de entrada  $P$  é construído: dois pontos  $P_i$  e  $P_j$  são conectados por uma aresta se, e somente se, um deles está na  $k$ -vizinhança do outro. A cada aresta  $(i, j)$  é atribuído o peso  $1 - |\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j|$  e uma árvore transversa mínima é construída. O ponto com maior coordenada  $z$  é orientado na direção de  $z$  positivo e isso é propagado aos outros pontos percorrendo a árvore. Pontos conectados nessa árvore possuem normais localmente mais paralelas. Esse processo tem bons resultados, embora orientações coerentes não sejam garantidas. A função  $f$  é a distância ao plano tangente mais próximo e seu sinal depende do lado do plano em que o ponto está. A distância com sinal é calculada em uma grade de voxels que engloba os pontos de entrada. Um algoritmo *marching cubes* [WYV 86] é então usado para extrair a superfície  $f(x, y, z) = 0$ . A triangulação obtida é em seguida otimizada em mais duas etapas. Os objetos podem conter bordas e não há restrições à sua topologia. Entretanto, a fase de cálculo de normais é crítica e eventuais erros podem comprometer o resultado.

Bajaj *et al.* [BAJ 95] utilizam formas-alfa para determinar se um tetraedro da triangulação de Delaunay é interno ou externo ao objeto. No cálculo da distância, um ponto  $Q$  é localizado na triangulação Delaunay para determinar seu sinal  $s = \pm 1$ , e no diagrama de Voronoi, para determinar o ponto de entrada  $P$  mais próximo. A distância com sinal aproximada é dada por  $s \cdot |PQ|$ . Pela análise de arestas que contêm pontos com distância zero, polinômios Bernstein-Bézier que aproximam o nível 0 da função de distância são calculados em cada tetraedro interceptado pela superfície. Entretanto, a

superfície total formada por todos os polinômios calculados não possui continuidade  $C^1$ . A continuidade  $C^1$  é obtida através de um ajuste global desses polinômios. Uma dificuldade desse processo é a escolha interativa e experimental da forma-alfa.

Boissonnat & Cazals [BOI 00] definem a **interpolação por vizinhos naturais** de funções de distância com sinal. A partir dos pontos de entrada  $P$ , os vizinhos naturais de um ponto  $Q$  são os vizinhos de  $Q$  na triangulação Delaunay de  $P \cup \{Q\}$ . A interpolação  $h(Q)$  é feita ponderando uma função de distância entre  $Q$  e  $P_i$  com a razão entre o volume da célula de Voronoi de  $P_i$ , tomada por  $Q$ , e o volume total da célula de  $Q$  após sua inserção. Note que somente vizinhos naturais têm um peso não nulo nesse cálculo. A função de distância utilizada é  $f(Q) = (Q - P_i) \cdot \mathbf{n}_i$ , onde  $\mathbf{n}_i$  é o vetor normal à superfície no ponto  $P_i$ , que calcula a projeção de  $P_i Q$  no plano tangente definido pela normal [HOP 92]. Uma aproximação da superfície de nível  $h^{-1}(0)$  é obtida a partir da triangulação de Delaunay e refinada através da inserção de outros de seus pontos. Garantias teóricas em condições específicas de amostragem são apresentadas. Os autores assumem que as normais nos pontos de entrada são conhecidas e que a superfície não possui bordas.

Note que nos trabalhos de Bajaj *et al.* [BAJ 95] e Boissonnat [BOI 00], a superfície de nível 0 é extraída da triangulação Delaunay ao invés de uma grade discreta de voxel. Uma vantagem é que essa estrutura de dados está localmente adaptada à geometria do objeto.

Curless & Levoy [CUR 96] propõem um método apropriado para múltiplas imagens de alcance a laser obtidas de um mesmo objeto. A cada imagem de alcance é atribuída uma função de distância com sinal  $d(x, y, z)$  e uma função de peso  $w(x, y, z)$ . Essas funções são usadas para calcular, em uma grade de voxels, a distância ponderada  $D(x, y, z)$  em relação ao objeto e seu peso acumulado  $W(x, y, z)$ . As funções de peso são necessárias para representar variações de incerteza das imagens de alcance e devem ser específicas para cada tecnologia de digitalização a laser. A superfície é representada pela superfície de nível  $D(x, y, z) = 0$  e extraída pelo algoritmo *marching cubes* de Lorensen [LOR 87] modificado.

Diferentemente de Curless & Levoy [CUR 96], Hilton *et al.* [HIL 98] abordam o problema de reconstrução a partir de múltiplas imagens de alcance utilizando um método de fusão baseado em superfície. Uma malha de triangulação é calculada para cada imagem de alcance separadamente. Em seguida, essas malhas são combinadas através de uma fusão geométrica para gerar um campo escalar que define implicitamente a superfície do objeto em uma grade de voxels. Um método também baseado em superfície é utilizado para extraí-la.

### 2.3 Métodos baseados em deformação

Os algoritmos desta classe deformam uma superfície inicial para obter uma aproximação dos pontos de entrada. Esse método é particularmente indicado se uma aproximação do modelo desejado é conhecida inicialmente.

Terzopoulos *et al.* [TER 88b] definem um modelo físico que controla uma superfície elástica cuja energia de deformação varia sua forma em todas as suas localidades. Esse modelo físico, implantado no interior dos dados de entrada, é deformado em sua direção através da ação de forças. Os pontos de entrada restringem essa deformação, definindo

fronteiras que a superfície não pode transpor. Forças nessas fronteiras impedem a expansão do modelo que, após estar em equilíbrio, representa a superfície reconstruída. Terzopoulos [TER 88a] aplica um modelo físico de deformação em modelos de elevação. Uma abordagem semelhante é apresentada por Vemuri & Lai [VEM 93].

Szeliski *et al.* [SZE 93] usam simulação da dinâmica de moléculas na qual **partículas orientadas** interagem com forças de atração de longo alcance e de repulsão de curto alcance. Essas partículas possuem posição e orientação, e se organizam como superfícies pela influência de funções potenciais: um potencial que as influencia a se manter no plano de outras partículas, um que tenta alinhar suas normais e outro que favorece superfícies de curvatura contante. A interação é realizada através de equações de movimento. A versão para reconstrução de superfícies é composta de duas regras para adição de partículas. A primeira testa se duas partículas vizinhas estão longe o suficiente para inserir uma partícula entre elas. A segunda autoriza a adição de partículas em todas as direções no plano local de uma partícula. Com essas duas heurísticas, interpola-se uma superfície a partir de um conjunto de pontos 3D. No final do processo, as partículas resultantes são trianguladas.

Zhao *et al.* [ZHA 00] utilizam um método de conjunto de nível (*level set method* [OSH 00]) e equações diferenciais parciais para reconstruir por deformações sucessivas. O algoritmo começa com uma superfície que engloba os dados de entrada e a deforma continuamente seguindo o fluxo de gradiente até convergir ao objeto. Para isso, uma nova formulação de equações diferenciais parciais é utilizada para encontrar a função de distância ao objeto. O método de conjunto de nível é utilizado para manipular mudanças topológicas durante as deformações e para obter as superfícies implícitas. Esse método pode manipular pontos, tangentes e normais como entrada, com densidade variável e presença de ruído, que representam objetos de topologia complexa. Entretanto, a convergência correta ao objeto depende da superfície inicial.

Adán *et al.* [ADÁ 00] definem uma malha espacialmente regular como estrutura topológica para modelagem. Essa malha é construída sobre uma esfera unitária que é deformada para aproximar objetos em 3D. O resultado é utilizado para representar o objeto a partir de diferentes pontos de vista, tendo aplicações em reconhecimento de formas e reconstrução de múltiplas imagens de alcance.

## 2.4 Métodos paramétricos

Métodos paramétricos de reconstrução representam a superfície como um modelo  $f(\Lambda) \subset \mathbb{R}^3$  de um domínio paramétrico bidimensional  $\Lambda$ . Vários trabalhos se concentram em formas topologicamente simples como o plano e a esfera. Danuser & Stricker [DAN 98], por exemplo, demonstram o desempenho de seu algoritmo de fusão de modelos paramétricos reconstruindo objetos através de vários planos.

Bardinet *et al.* [BAR 98] utilizam superquádricas para modelar dados esparsos. Através dos mínimos quadrados, a primeira parametrização é realizada para obter o superelipsóide que melhor se encaixa nos dados de entrada. O resultado é envolvido por uma grade regular contendo  $np$  pontos de controle, que é deformada de tal forma que o superelipsóide, sofrendo a mesma deformação, aproxime a superfície original. O modelo final é totalmente definido pelos onze parâmetros do superelipsóide e pelos  $np$  pontos de controle que descrevem a deformação volumétrica aplicada ao modelo inicial. Os autores

apresentam a aplicação de superelipsóides na reconstrução do ventrículo esquerdo em imagens médicas. Entretanto, um conhecimento da forma global do objeto é necessário para determinar o tipo de superquádrica a ser utilizada. A parametrização inicial também é crucial para a validade do resultado.

A representação compacta do resultado é um importante aspecto dos métodos paramétricos e tem aplicações na codificação das superfícies. Gallo *et al.* [GAL 00b], por exemplo, propõem *B-splines fuzzy* para representar e codificar superfícies a partir de dados geográficos. Esse método se baseia na redução dos dados esparsos em intervalos de uma grade e na definição da superfície que os aproxima como uma combinação de *B-splines*.

## 2.5 Outras abordagens

**Métodos de reconstrução implícita** procuram aproximar superfícies algébricas, como o conjunto zero de funções polinomiais, aos dados esparsos. Em vários casos, o polinômio resultante gera múltiplas superfícies que passam próximas aos dados mas se conectam em locais arbitrários. Esse problema topológico pode ser resolvido pela divisão do espaço e pelo cálculo de funções algébricas de menor grau em cada sub-divisão. Blane *et al.* [BLA 00] apresentam um método para aproximar superfícies implícitas polinomiais de grau arbitrário à dados 2D e 3D. Esse método consiste em aproximar três conjuntos de níveis polinomiais aos dados de entrada, evitando o problema de múltiplas superfícies. Os resultados obtidos são bastante superiores aos de outras técnicas de aproximação.

Outro tipo de aplicação envolve a reconstrução de superfícies a partir de contornos. O objeto é representado por pilhas de contornos bidimensionais paralelos. Dados dessa natureza podem ser obtidos e utilizados em aplicações médicas e de engenharia reversa. Klein *et al.* [KLE 00] utilizam a distância entre os elementos de uma grade retangular e os contornos fornecidos para extrair os eixos mediais entre eles. Esses eixos são o conjunto zero das distâncias calculadas. A superfície é triangulada ao se percorrer os eixos mediais para conectar seus pontos aos dois contornos vizinhos. O resultado obtido é então simplificado.

## Capítulo 3

# Epistemologia da abordagem de Gideon Guy

Em sua tese, Guy abre um novo campo de pesquisa ao definir seu método de inferência de estruturas em 2D e 3D. De um ponto de vista epistemológico, este capítulo apresenta seu contexto científico e discute alguns de seus aspectos. O objetivo é fundamentar o trabalho de Guy, apresentar a metodologia de inferência de orientações e os algoritmos de extração de estruturas em 3D. Este estudo é realizado de acordo com a abordagem epistemológica proposta por Martins Jr. [MAR 99].

### 3.1 Fundamentação epistemológica

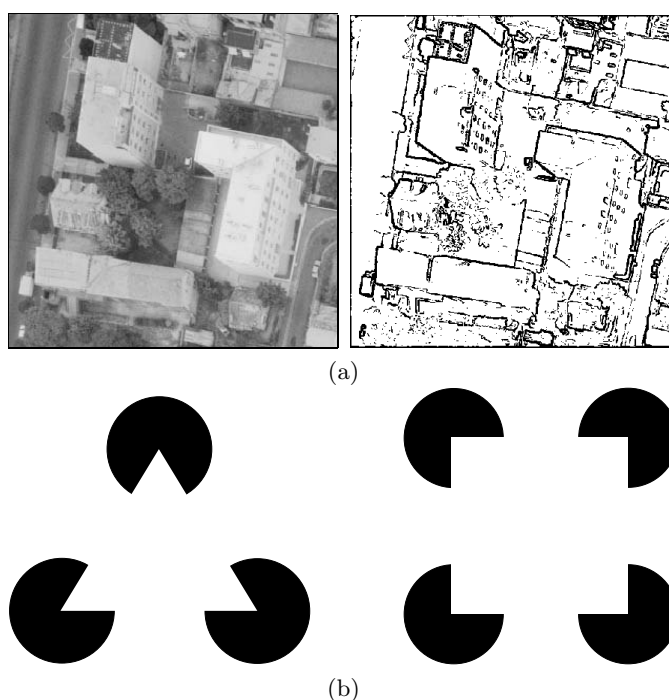
A primeira questão que se coloca é: em qual campo de conhecimento o trabalho de Guy se situa? Ele se insere no campo de visão computacional e no campo matemático. A matemática é seu instrumento na busca da solução. Natural, pois a própria ciência da computação é uma ciência matemática.

A meta anunciada foi de preencher o espaço entre a saída de algoritmos de baixo-nível e o que é desejável como entrada para algoritmos de alto nível: contornos perfeitos, sem ruído, sem fragmentação, etc. Como exemplo, a Figura 3.1a ilustra o resultado de um detector de borda que necessita ter os contornos fechados e menos ruído para posterior processamento.

Outro problema que Guy busca solucionar é a detecção e percepção de contornos ilusórios que faz parte do campo de **agrupamento perceptivo**. A Figura 3.1b ilustra duas imagens com contornos ilusórios.

Agrupamento perceptivo se refere a uma classe de fenômenos visuais nos quais um agrupamento de elementos não conectados fisicamente ocorre. As noções da Escola Gestalt são amplamente usadas no problema de percepção de contornos. Segundo Grossberg & Mingolla [GRO 85, GRO 87], desde o trabalho dessa escola tem-se reconhecido que características locais de uma cena, tais como posições de bordas, disparidades, comprimentos, orientações e contrastes, são ambíguos mas podem ser rapidamente agrupados para gerar uma separação entre fundo e objeto.

Nesse contexto, Guy afirma que seu método tenta imitar o fenômeno perceptivo de **pré-atenção**, isto é, tenta distinguir grupos de elementos organizados quando esses não



**Figura 3.1:** Imagens de interesse para o trabalho de Guy. (a) Uma imagem e suas bordas obtidas pelo detector ótimo Shen-Castan com  $\beta = 1, 0$  [SHE 92]. (b) O triângulo e o quadrado de Kanizsa que induzem contornos ilusórios.

estão conectados ou não estão dissociados de um fundo. Especialmente no que diz respeito ao problema de detecção de contornos ilusórios.

*Note que, em um primeiro momento, o trabalho de Guy não se preocupa com a reconstrução de dados esparsos. Suas metas concernem problemas de visão e, por consequência, seu trabalho se fundamenta em conceitos de agrupamento perceptivo. ■*

### 3.1.1 Os princípios básicos

Qual a procedência de suas proposições, ou seja, seu ponto de partida? Por se situar no campo cognitivo de agrupamento perceptivo, a pergunta que Guy se coloca, dado um conjunto esparsos de pontos, é: de todas as conexões possíveis entre os pontos, qual é a conexão que, provavelmente, seria percebida pelo sistema visual humano? Essa conexão pode ser aproximada através de atributos do conjunto de pontos e, obviamente, de hipóteses de funcionamento da visão humana. O ponto central das proposições de Guy envolve o conceito de **forma** das possíveis conexões entre pontos esparsos.

Guy se baseia na teoria de Ullman [ULL 76], amplamente utilizada em trabalhos de agrupamento perceptivo, que sugere que a curva usada pelo sistema visual humano para conectar dois fragmentos de contorno é construída a partir de dois arcos circulares. Dessa família de curvas, o par que minimiza a energia  $E = \int k(s)^2 ds$ , sendo  $k$  a função de curvatura e  $s$  a variável de integração sobre a curva, modela a forma do contorno ilusório.

A outra base teórica corresponde aos princípios básicos de agrupamento perceptivo da Escola *Gestalt* de psicologia:



- boa continuidade de curvatura;
- curvatura constante;
- favorecimento de baixas curvaturas;
- proximidade.

Tais princípios podem ser interpretados diferentemente e ter caráter ambíguo. A proposição de Guy é favorecer o agrupamento de pontos principalmente pela proximidade e pela boa continuidade de curvatura.

A teoria de Ullman e os princípios da Escola *Gestalt* têm uma relação de paralelismo. A proposta de minimizar uma energia total da curvatura pode ser relacionada aos princípios de forma: boa continuidade de curvatura, curvatura constante e favorecimento de baixas curvaturas.

A solução, portanto, é determinar a curva que minimiza a curvatura total entre pontos esparsos a partir de padrões de forma circulares e de acordo com os princípios da Escola Gestalt. Guy prova que a escolha de um círculo como conexão entre dois pontos (com restrições) minimiza a equação de curvatura total (Eq. 3.1) usada no algoritmo **rede de saliência** de Sha'ashua & Ullman [SHA 88, ALT 95].

### 3.1.2 O instrumento matemático

Segundo Guy, os problemas de percepção podem ser resolvidos somente pela imposição de restrições não locais na solução. Ou seja, não realizar decisões de conexão localmente como, por exemplo, em Ahuja & Tuceryan [AHU 89].

Guy utiliza duas noções matemáticas básicas: **campos vetoriais** e **matrizes de covariância**. A solução proposta está na modalidade espacial segundo a teoria das modalidades cósmicas de Dooyeweerd [DOO 58]. Entretanto, a noção de campo é uma antecipação de fenômenos físicos realizada pela matemática. Assim, o processo pode também representar fenômenos da modalidade física. Uma analogia com a física de partículas, por exemplo, é feita por Medioni *et al.* [MED 00].

Os campos vetoriais são construídos de acordo com a teoria de Ullman. Guy diz que esses campos codificam princípios de agrupamento perceptivo. Campos especiais são definidos para o problema de detecção de contornos ilusórios.

O método proposto realiza um processamento global para determinar as conexões entre os pontos. Para isso, os campos vetoriais são alinhados com todos os pontos de entrada e acumulados através de matrizes de covariância. A representação das orientações por vetores não é adequada para capturar a complexidade de múltiplas contribuições.

A representação matricial utilizada por Guy é um instrumento clássico amplamente utilizado. Por representar geometricamente elipsóides, Teichmann & Capps [TEI 98] a utilizam para definir formas-alfa anisotrópicas. Em processamento de imagens, Di Zenzo [DIZ 86] utiliza matrizes de covariância para calcular o gradiente de imagens multi-espectrais. É também utilizada em análise de componentes principais em estatística. Possui aplicações em cálculo tensorial [DAN 96] e processamento de sinais [WES 94]. Em reconstrução de superfícies, é a representação utilizada para estimar normais e tangentes de um conjunto de pontos [HOP 92, GUY 96, OBL 98].

Na tese de Guy, não está claro quais são as origens de seu encaminhamento. Não há

referências que expliquem a ligação dos princípios de agrupamento perceptivo e a escolha dos instrumentos matemáticos. Isso gera dificuldades para determinar se a abordagem ao problema foi **indutiva** ou **dedutiva**.

Não há indício de que técnicas de indução tenham sido usadas na busca da solução; tentativa e erro por exemplo. Todavia, as escolhas feitas no campo instrumental são explicadas pelos conceitos de agrupamento perceptivo, o que sugere uma abordagem dedutiva ao problema.

Já no primeiro trabalho de Guy [GUY 93], que busca inferir contornos globais a partir de características locais, encontram-se os principais elementos de suas idéias:

- **representação de estrutura local por matrizes de covariância:** utilizada para acumular a informação de campos vetoriais, torna possível a estimação de orientação local a partir de múltiplas contribuições;
- **campos vetoriais que codificam conexões globais:** induzem a organização de elementos de uma grade de matrizes de covariância de acordo com formas de conexão pré-definidas pelos princípios de agrupamento perceptivo;
- **técnicas de extração de estruturas:** adaptação de métodos clássicos para extrair estruturas do resultado da acumulação.

O que se vê nos trabalhos subseqüentes é um aperfeiçoamento desses elementos que são os pilares do método. Guy apresenta uma extensão do método para reconstrução de estruturas em 3D [GUY 95], que é revisada [GUY 97] após a publicação de sua tese [GUY 96].

### 3.1.3 Reconstrução de estruturas

A rigor, o método realiza organização espacial ao invés de organização perceptiva. Além disso, seus procedimentos podem ser percebidos diferentemente em outros campos científicos; não é inerente ao campo de agrupamento perceptivo. Isso é válido na migração da solução para o problema de reconstrução de superfícies.

Um dos aspectos mais importantes do método proposto é a sua capacidade de associar orientações e medidas de pertinência a um conjunto esparsos de pontos. Essa inferência da organização espacial possui várias aplicações e constitui o principal interesse desta tese.

Almejando os problemas de percepção, Guy desenvolveu um método para inferência de tangentes e reconstrução de curvas em 2D. Utilizando campos específicos, o método provê bons resultados na detecção de contornos ilusórios em imagens clássicas. Entretanto, seus resultados na reconstrução de pontos esparsos são mais consistentes.

Reconstruir estruturas em 3D é uma extensão natural do método originalmente proposto para os problemas de visão. Os mesmos conceitos são aplicados na definição dos campos vetoriais tridimensionais das três entradas possíveis: pontos, vetores normais e vetores tangentes à superfície. O mesmo processo de acumulação global é aplicado. Na publicação mais recente [GUY 97], observa-se que a contribuição para o problema de reconstrução é assumida como a mais importante do trabalho.

### 3.1.4 O epistemograma

Obviamente, problemas de agrupamento perceptivo têm uma complexidade muito maior que o da solução proposta. Portanto, Guy não imita o fenômeno de pré-atenção mas o **representa** com seu instrumental matemático. O método funcionalmente não realiza um dos estágios naturais da visão humana. A relação entre o trabalho de Guy e os princípios de agrupamento perceptivo é de representação.

Aparentemente, Guy parte das teorias de agrupamento perceptivo na busca da solução e tenta confirmá-las em seus resultados. Acredita-se que o sistema de inquirição de seu trabalho, i.e., sistema de acesso à verdade, é **leibniziano** (Seção 1.4.2).

A grosso modo, ele não desenvolveu empiricamente suas idéias como, por exemplo, neurofisiologistas fazem ao buscar respostas sobre um sistema visual. Nesse último caso a verdade é experimental, i.e., está nos dados, o que configura um sistema de inquirição **lockeano** pelo menos em parte. As proposições de Guy têm origem em um modelo formal de princípios de percepção.

O epistemograma [MAR 99] da Tabela 3.1 apresenta os objetivos e o contexto geral da tese de Guy. O método proposto pode ser aplicado em cada um dos objetivos descritos. Note, no entanto, que é o aspecto de reconstrução que guia essas aplicações.

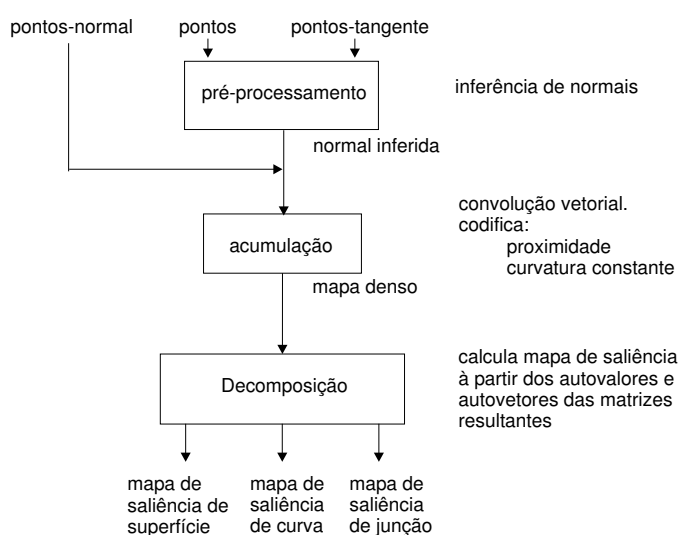
**Tabela 3.1:** Epistemograma simplificado da tese de Gideon Guy [GUY 96].

Objetivos	Desenvolver um método para realizar o processamento intermediário entre algoritmos de baixo e alto nível.	Desenvolver método para reconstruir contornos ilusórios em imagens.	Desenvolver método para reconstruir superfícies e curvas.
Ciências	- processamento de imagens; - visão computacional; - agrupamento perceptivo; - matemática aplicada.	- visão computacional; - agrupamento perceptivo; - matemática aplicada.	- visão computacional; - matemática aplicada; - reconstrução de formas.
Objetos reais	Objetos reais em cenas arbitrárias,	Objetos ilusórios em cenas arbitrárias.	Objetos reais.
Objetos de contato	Conjunto de pontos com ou sem tangente associada que representam objetos reais (como bordas ou pontos em contínuo).	Conjunto de segmentos de uma imagem que induzem conexões ilusórias à percepção humana.	Conjunto de pontos, tangentes e normais que representam parcialmente a forma de um objeto real.
Processos naturais	Alinhamento natural de fragmentos de contorno associados a um objeto real (maior probabilidade de pertencer ao mesmo objeto).	Processamento primário na visão humana que consiste em completar estruturas não conexas para assim perceber objetos fisicamente inexistentes.	
Produtos	Método para inferência de curvas em imagens.	Método para inferência de contornos ilusórios.	Método para inferência de superfícies e curvas.

## 3.2 A metodologia de Gideon Guy

O método proposto por Gideon Guy [GUY 96, GUY 97] considera as três formas de entrada definidas na Seção 1.2.1: ponto, ponto-tangente e ponto-normal. O sentido dos vetores de orientação fornecidos não é relevante devido à representação matricial utilizada no momento da acumulação. Guy considera pontos-normal como sendo o caso básico. Isso porque seu método utiliza somente a informação de normal associada a cada ponto para inferir superfícies e curvas. Um pré-processamento é realizado para estimar vetores normais nos dados que não os têm definidos: pontos e pontos-tangente.

O processo de determinação de normais e o de inferência de superfícies envolvem a convolução<sup>1</sup> de campos vetoriais. Esses campos são baseados em princípios de agrupamento perceptivo da Escola *Gestalt* de psicologia: boa continuidade de curvatura, curvatura constante, favorecimento de baixas curvaturas, e proximidade.



**Figura 3.2:** Abordagem de Guy para inferência de curvas, superfícies e junções.

As noções de proximidade e boa continuidade de curvatura são codificadas em um campo vetorial chamado diábolo (*diabolo field*). Quando alinhado com um ponto-normal, esse campo associa uma direção de preferência e sua saliência, ou medida de pertinência, à toda localidade ao redor desse ponto. Essa informação é codificada como matrizes de covariância de ordem 3 e acumulada em uma grade discreta que envolve os dados de entrada.

Após a acumulação da informação de todos os pontos de entrada, os autovetores e autovalores das matrizes resultantes são decompostos em três **mapas de saliência** que correspondem a superfícies, curvas e junções. Em cada um desses mapas, a estrutura correspondente é extraída através da detecção do conjunto de pontos que possuem saliência localmente máxima. O diagrama de processamento da abordagem de Guy está ilustrado na Figura 3.2.

<sup>1</sup> termo usado por Guy para seu processo de acumulação.

### 3.2.1 Construção dos campos de influência

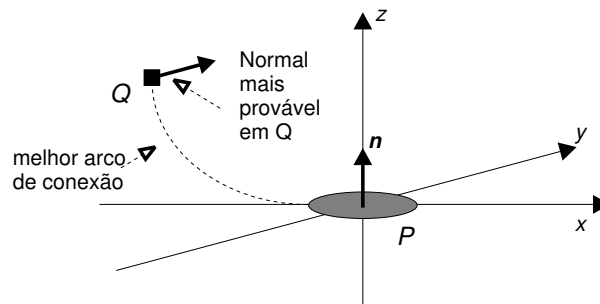
Campos de influência definem trajetórias preferenciais de conexão. Obviamente, o campo de cada tipo de entrada deve ser diferente já que representam atributos distintos das estruturas a serem reconstruídas. Guy propõe um campo de influência para cada tipo de entrada. Esta seção descreve a construção dos campos vetoriais que definem essas influências.

#### 3.2.1.1 Campo para ponto-normal

Dada uma normal  $\mathbf{n}$  a um ponto  $P$ , coloca-se a seguinte questão: para um ponto  $Q$  no espaço, qual é a normal mais provável em  $Q$  de uma superfície que passe por ele e que possua normal  $\mathbf{n}$  em  $P$ ? Essa situação está ilustrada na Figura 3.3. Guy afirma que uma continuação esférica entre o ponto-normal e  $Q$  é o mais indicado porque mantém a curvatura constante sobre o arco circular hipotético. O seu principal argumento é que esta é a extensão mais “natural”, baseando-se nos princípios dados pela Escola Gestalt de boa continuidade de curvatura e curvatura constante. Definindo a curvatura total como sendo

$$TC = \int_{\gamma} \left| \frac{d\theta}{ds} \right|^{\alpha} ds, \quad \alpha > 1, \quad (3.1)$$

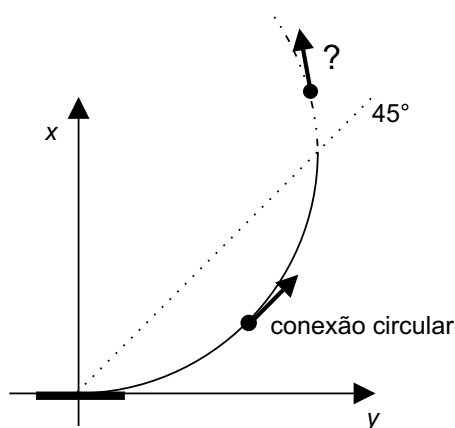
onde  $\theta$  é a tangente sobre a curva  $\gamma$  e  $s$  é a variável de integração em  $\gamma$ , Guy [GUY 96] demonstra que a escolha de um círculo minimiza  $TC$  para todos valores de  $\alpha > 1$ . Sha’ashua & Ullman [SHA 88] utilizam essa definição de curvatura total. Veja que  $TC = 0$  para uma linha reta. Dessa forma, dado um ponto-normal  $(P, \mathbf{n})$ , o campo vetorial associa a cada ponto  $Q$  no espaço, um vetor normal à esfera que passa por  $P$  e  $Q$  e que possui normal  $\mathbf{n}$  em  $P$ .



**Figura 3.3:** Continuação circular para conexão a pontos-normal.

Entretanto, é importante notar que um ponto-normal e um ponto no espaço nem sempre podem ser conectados por um arco circular. Estender uma conexão fora do limite de  $45^\circ$  a partir do plano definido por um ponto-normal obviamente não satisfaz a restrição de curvatura mínima (Fig. 3.4). Nesse caso a conexão poderia ser feita através de uma trajetória elíptica. Neste contexto, o campo vetorial proposto associa uma influência nula para os pontos que estão fora do limite de  $45^\circ$  de desvio, a partir do plano de um ponto-normal.

Para codificar o princípio de proximidade, Guy propôs que a norma, denominada saliência, destes vetores normais fossem calculados com uma atenuação em função de sua



**Figura 3.4:** Limite de conexão circular. Acima de  $45^\circ$ , um ponto e um ponto-normal não podem ser conectados por uma trajetória circular.

distância e da curvatura de seu arco de conexão. A idéia é privilegiar tanto a proximidade quanto a baixa curvatura de conexão em relação a um ponto-normal [GUY 97].

Em termos práticos, a proposta de Guy para determinar as normas é considerar um **caso indecível** ou **intencionalmente ambíguo**. Considere dois pontos-normais igualmente distantes da origem e com normais ortogonais. Segundo Guy, esse é o caso mais ambíguo para realizar a conexão. Nesse cenário, as probabilidades são atribuídas aos vetores de influência de tal forma que todos os caminhos que conectam os dois elementos tenham aproximadamente a mesma probabilidade de conexão e que não exista nenhuma melhor superfície entre eles. Entretanto, não existe nenhuma função analítica para expressar exatamente essa situação denominada por Guy de “**máxima indecisão**”.

Uma função analítica é então proposta para aproximar a situação acima. A atenuação pela proximidade e pela curvatura é expressa por uma gaussiana definida por

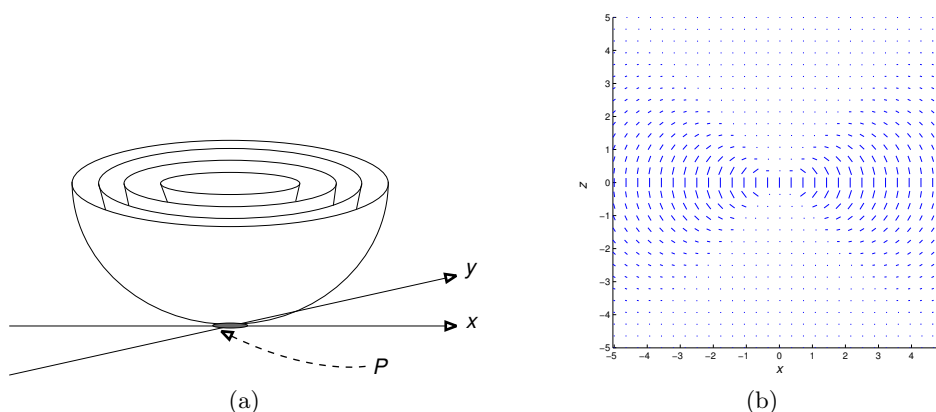
$$DF(x, \rho) = e^{-ax^2} e^{-b\rho^2}, \quad (3.2)$$

onde  $x$  é a distância sobre o arco circular e  $\rho$  é a curvatura desse arco. O parâmetro  $a$  controla a atenuação pela proximidade e  $b$  por curvaturas mais fortes. Esses parâmetros foram escolhidos empiricamente. Eles não são independentes e a mudança de um requer o ajuste do outro. Segundo Guy, essa correspondência é necessária para manter a propriedade de “máxima indecisão”. O parâmetro  $a$  está relacionado com o espaço entre pontos que deve ser preenchido por uma superfície. Na implementação de Guy, esse parâmetro foi selecionado de forma a preencher espaços de aproximadamente 50 pontos ( $a = 0,003$ ) e o parâmetro  $b$  foi ajustado para satisfazer a “máxima indecisão” ( $b = 2,85$ ).

O campo para ponto-normal, denominado campo diabolo, está ilustrado na Figura 3.5. Diabolo é o nome de um aparelho utilizado por malabaristas com o qual o campo construído se assemelha. Somente a direção dos vetores está indicada nos segmentos e seus tamanhos indicam a saliência dada pela Equação 3.2.

Este corte ilustra também o campo de influência em 2D, ou originalmente **campo de extensão** [GUY 93]. Formas similares de influência foram desenvolvidas em outros trabalhos [HEI 93, THO 96]. Os campos de Williams *et al.* [WIL 99] são parecidos embora

sejam construídos de forma estocástica. Todos esses trabalhos se situam no problema de detecção de contornos ilusórios. Uma das teorias mais antigas sobre a forma desse tipo de contorno sugere que a curva usada pelo sistema visual humano para conectar dois fragmentos de contorno é construída a partir de dois arcos circulares [ULL 76]. No campo de influência proposto (Fig. 3.5b), a trajetória de conexão entre um ponto com  $x < 0$  e um ponto com  $x > 0$  obedece essa proposição.



**Figura 3.5:** A forma geral do campo para ponto-normal (a) Ilustração das múltiplas esferas que definem conexões de superfície. (b) Um corte em  $y = 0$  que ilustra as direções do campo de vetores normais.

### 3.2.1.2 Campo para ponto-tangente

O campo para ponto-tangente é utilizado para inferir normais na fase de pré-processamento. Alinhado com um ponto-tangente, define planos que passam pela sua reta.

Obviamente, ter a informação tangencial de um ponto é melhor do que ter somente sua localização como no caso pontos sem orientação associada. Guy se refere a pontos-tangente como sendo **parcialmente orientados** já que inicialmente não se tem sua informação de normal.

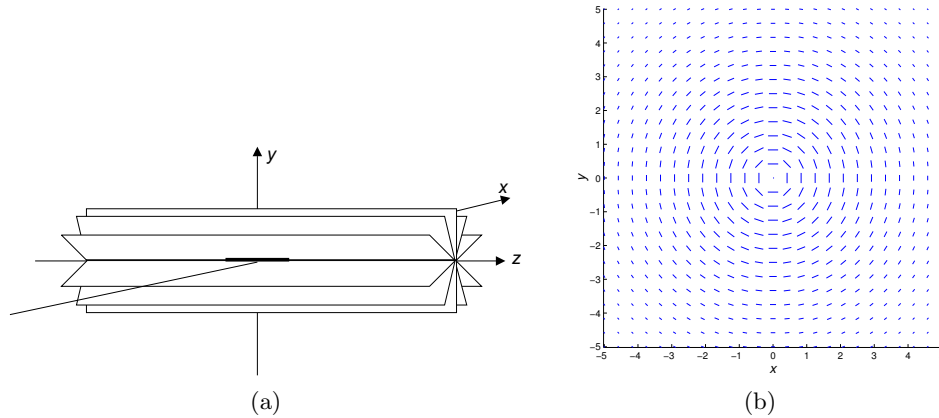
Dada uma tangente  $t$  a um ponto  $P$ , novamente coloca-se a questão: para um ponto  $Q$  no espaço, qual é a normal mais provável em  $Q$  de uma superfície que passe por ele e que possua tangente  $t$  em  $P$ ? Claramente, o campo de influência não pode codificar uma superfície específica. Isso porque infinitos planos passam pela linha definida por um ponto-tangente  $(P, t)$ , conforme ilustrado na Figura 3.6a. Entretanto, nesse contexto existe somente um plano que passa por  $Q$  e  $(P, t)$  que é então tido como o mais provável. O campo vetorial para pontos-tangente define a normal

$$n_Q = t \times PQ$$

em  $Q$ .

Guy propõe que esse campo de influência seja construído através de uma “convolução do campo para ponto-normal com uma máscara multidirecional”. Nenhum detalhe preciso sobre essa operação, bem como sua justificativa, são dados. Em termos práticos, o campo para ponto-tangente foi construído pela rotação e acumulação do campo para ponto-normal

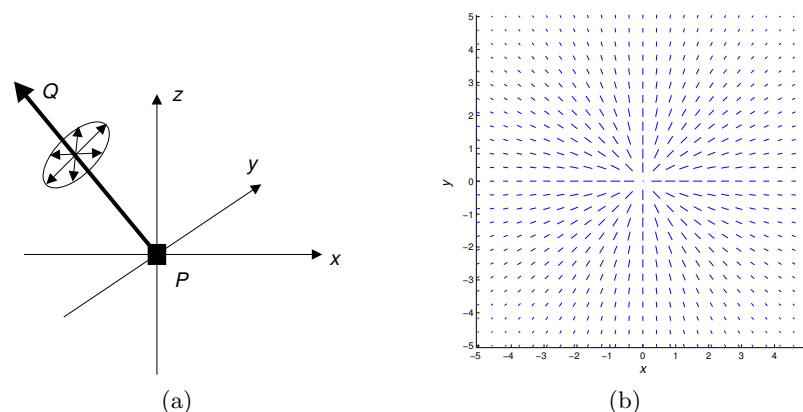
sobre o eixo  $x$  ou  $y$ . Essa construção também determina os valores de saliência em cada localidade do campo. A forma do campo vetorial está ilustrado na Figura 3.6b. O tamanho dos vetores indica saliência.



**Figura 3.6:** A forma geral do campo para ponto-tangente. (a) Ilustração dos planos que passam pelo ponto com tangente associada. (b) Um corte em  $z = 0$  que ilustra as direções do campo de vetores normais.

### 3.2.1.3 Campo para pontos

Pontos sem normal ou tangente associada possuem somente sua localização como informação a ser propagada. Como no caso de pontos-tangente, suas normais devem ser estimadas no pré-processamento e suas posições devem ser usadas para inferir a normal nos outros dados de entrada. A questão que se coloca nesse caso é: dado um ponto  $P$  de entrada e outro ponto  $Q$  no espaço, qual é a superfície mais provável que passa pelos dois pontos? Observa-se que a família de planos que passam pelos dois são igualmente prováveis e não há razão para se realizar uma ligação curvilínea. Para cada ponto no espaço, várias normais são possíveis e todas são perpendiculares à linha formada por  $Q$  e a origem (Fig. 3.7a).



**Figura 3.7:** O campo para pontos sem orientação associada. (a) Todas as normais no ponto  $Q$  são igualmente prováveis. (b) Um corte em  $z = 0$  que ilustra as direções do campo vetorial.

Como não se pode decidir a normal diretamente, o campo deve ser construído de



tal forma que o plano normal em  $Q$  seja calculado por mais de dois pontos vizinhos. Esse campo é então formado por vetores que apontam para a direção da origem e que descrevem a contribuição de todas as normais. Com isso, obtém-se um simples campo radial como mostrado na Figura 3.7b, no qual a saliência está representada pelo tamanho dos vetores e é dada por

$$PF(x) = e^{-ax^2} ,$$

onde  $x$  é a distância euclidiana a partir da origem. O parâmetro  $a$  controla a taxa de atenuação em função da distância.

### 3.2.2 A fase de acumulação

A acumulação é o processo de adição das contribuições de um elemento de entrada utilizando um dos campos de influência. Guy define esse processo através do que ele chama **operador de convolução**.

Os mapas de saliência são calculados a partir de pontos com normal dada ou estimada. Através de convolução vetorial, as orientações e saliências de cada elemento de entrada são acumuladas nas localidades de uma grade regular envolvendo os dados de entrada.

#### 3.2.2.1 O operador de convolução

Formalmente, Guy define o campo de influência para pontos-normal  $DF(i, j, k)$  em todo ponto  $(i, j, k)$  como sendo o campo vetorial

$$\overline{DF}(i, j, k) = [DF_{i,j,k}^x \quad DF_{i,j,k}^y \quad DF_{i,j,k}^z]^T .$$

O resultado da convolução  $O(i, j, k)$  é definido na forma de uma matriz de covariância para cada ponto no espaço como

$$O(i, j, k) = \mathbf{M}_{u,v,w}^{i,j,k} = \begin{bmatrix} m_{200}^{i,j,k} & m_{110}^{i,j,k} & m_{101}^{i,j,k} \\ m_{110}^{i,j,k} & m_{020}^{i,j,k} & m_{011}^{i,j,k} \\ m_{101}^{i,j,k} & m_{011}^{i,j,k} & m_{002}^{i,j,k} \end{bmatrix} .$$

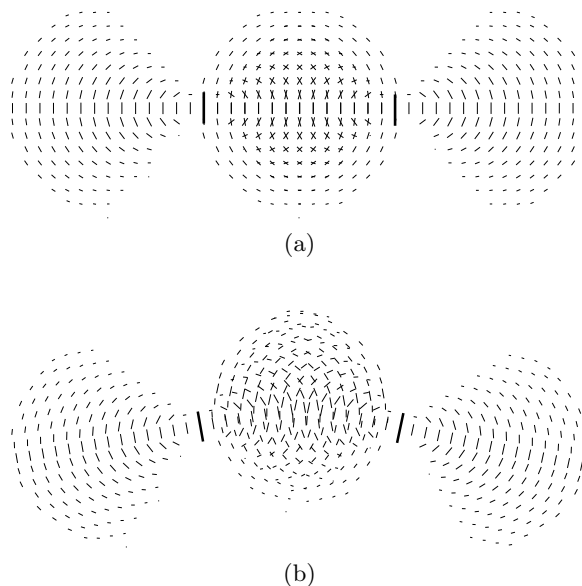
Utilizando as notações acima, o operador de convolução  $O = DF \oplus I$  de um campo vetorial  $DF$  e um ponto-normal  $(I_{i,j,k}, \mathbf{n}_{i,j,k})$  é definido por

$$\mathbf{M}_{u,v,w}^{x,y,z} = \sum_i \sum_j \sum_k |\mathbf{n}_{i,j,k}|^2 \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{v_{i,j,k}} DF)_{x,y,z}^x \end{bmatrix}^u \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{v_{i,j,k}} DF)_{x,y,z}^y \end{bmatrix}^v \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_{v_{i,j,k}} DF)_{x,y,z}^z \end{bmatrix}^w , \quad (3.3)$$

onde  $0 \leq u, v, w \leq 2$ ,  $u + v + w = 2$  e  $\mathbf{A}_{n_{i,j,k}}$  é o operador de alinhamento do eixo  $x$  do campo vetorial (Fig. 3.5a) com a normal  $\mathbf{n}_{i,j,k}$  associada a  $I_{i,j,k}$ . Esse operador define a contribuição de um ponto-normal  $(I_{i,j,k}, \mathbf{n}_{i,j,k})$  a todos elementos  $O(x, y, z)$  de uma grade tridimensional.

O resultado da convolução do campo para ponto-normal com todos os pontos de entrada é o somatório de suas contribuições em toda a grade, na forma de matriz. Cada matriz dessa grade representa uma localidade no espaço e define seus atributos locais em relação à superfície: normal, tangente e suas saliências. ■

Os mapas de saliência são calculados a partir desse conjunto de matrizes. A Figura 3.8 exemplifica a superposição do campo vetorial de dois campos de influência. Veja que os campos foram alinhados com as normais representadas pelos segmentos mais escuros.



**Figura 3.8:** Exemplo de superposição dos campos de influência de dois pontos-tangente coplanares. Os vetores superpostos estão no plano desses dois pontos. (a) Pontos colineares. (b) Pontos não colineares.

No pré-processamento, o mesmo operador de convolução é utilizado para os outros campos de influência, mas com operadores de alinhamento diferentes. Para um ponto-tangente  $(P, \mathbf{t})$ , o operador  $\mathbf{A}_{\mathbf{t}_{i,j,k}}$  deve alinhar o eixo  $z$  de seu campo de influência (Fig. 3.6) com a tangente  $\mathbf{t}$ . No caso de pontos sem orientação associada, nenhum alinhamento deve ser feito porque seu campo de influência é isotrópico.

Outra diferença da convolução para inferência de normais é que as contribuições são acumuladas somente nos pontos de entrada que não possuem normal. Ou seja, as informações não são propagadas a todos os elementos da grade. As normais são extraídas das matrizes resultantes após essa acumulação, conforme explicado na próxima seção.

### 3.2.3 Decomposição das informações acumuladas

Após uma acumulação, os autovalores e os autovetores associados às matrizes resultantes são uma estimativa de orientações e de suas saliências. A decomposição é realizada no processo de inferência de normais e no cálculo dos mapas de saliência conforme descrito a seguir.

### 3.2.3.1 Cálculo dos mapas de saliência

Cada matriz de covariância resultante é decomposta em seu autosistema no qual  $\lambda_{max} \geq \lambda_{med} \geq \lambda_{min} \geq 0$  representam seus autovalores e  $\mathbf{e}_{max} \perp \mathbf{e}_{med} \perp \mathbf{e}_{min}$  seus respectivos autovetores (Eq. 3.4).

$$\begin{bmatrix} m_{200} & m_{110} & m_{101} \\ m_{110} & m_{020} & m_{011} \\ m_{101} & m_{011} & m_{002} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{min} \\ \mathbf{e}_{med} \\ \mathbf{e}_{max} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{min} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{med} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{max} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{min} \\ \mathbf{e}_{med} \\ \mathbf{e}_{max} \end{bmatrix}^T. \quad (3.4)$$

Em uma representação geométrica da matriz, os três autovetores correspondem às três direções principais de um elipsóide, enquanto os autovalores descrevem a sua forma. Após a acumulação, os autovetores indicam as direções preferenciais de eventuais estruturas e seus autovalores representam uma medida de pertinência dessa estimativa.

$$\frac{\lambda_{min} + \lambda_{med} + \lambda_{max}}{3} \leq \lambda_{max} \leq \lambda_{min} + \lambda_{med} + \lambda_{max}. \quad (3.5)$$

O autovalor  $\lambda_{max}$  é limitado pela soma dos autovalores e codifica o que Guy chama de excentricidade (Eq. 3.5). Se ele tende para o lado direito da Equação 3.5, a excentricidade é alta. Da mesma forma, se ele está mais próximo do lado esquerdo da equação, a excentricidade é baixa. Assim,  $\lambda_{max}$  é escolhido como a medida total de saliência para superfícies e o autovetor correspondente determina a direção da normal.

Para refinar a medida de saliência de superfícies, pode-se exigir que os outros dois autovalores sejam baixos em comparação com  $\lambda_{max}$ , ou seja, capturar a informação de excentricidade. Isso pode ser feito observando a diferença  $\lambda_{max} - \lambda_{med}$ . Essa expressão resultará em altos valores quando  $\lambda_{med}$  e  $\lambda_{min}$  são baixos. A normal mais provável é o autovetor  $\mathbf{e}_{max}$ .

Analogamente, observa-se  $\lambda_{med}$  para quantificar a medida de saliência sobre interseções entre superfícies ou curvas. Quando  $\lambda_{med}$  é alto,  $\lambda_{max}$  também é, e a informação na localidade é formada por contribuições vindas de exatamente duas superfícies distintas [GUY 96]. Na verdade, esse tipo de informação é mais complexa do que isso [WES 94].

O autovalor  $\lambda_{med}$  é então tido como a medida de saliência bruta para interseções entre superfícies. Mais uma vez, essa medida pode ser refinada considerando  $\lambda_{med} - \lambda_{min}$ . Essa última expressão exclui a informação de interseções mais complexas, ou seja, do que Guy chama de **junções**. A direção da curva é dada pelo autovetor perpendicular às duas superfícies e que corresponde à  $\mathbf{e}_{min}$ .

Valores altos de  $\lambda_{min}$  correspondem a localidades nas quais três ou mais superfícies se interceptam. Guy chama essas localidades de junções 3D. Se o valor de  $\lambda_{min}$  é alto, os de  $\lambda_{max}$  e  $\lambda_{med}$  também são. Três autovalores altos indicam que várias direções distintas foram recebidas como contribuição para um ponto. Assim,  $\lambda_{min}$  é escolhido como indicador de junções.

Baseado nas observações acima, três mapas definindo as saliências de superfície, curva e junções são calculados. Com a mesma dimensão da grade de matrizes, os mapas são compostos por tuplas  $(s, \mathbf{v})$ , onde  $s$  é um escalar que define a medida de saliência e  $\mathbf{v}$  é o vetor unitário que indica a direção da estrutura correspondente:

- **mapa de superfície:**  $s = \lambda_{max} - \lambda_{med}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_{max}$ ;

- **mapa de curva:**  $s = \lambda_{med} - \lambda_{min}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_{min}$ ;
- **mapa de junções:**  $s = \lambda_{min}$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

Essa abordagem para indicação de saliência não é tida por Guy como única, mas apenas uma das mais simples de ser implementada e que provê bons resultados. As estruturas são reconstruídas através da extração de máximos locais em cada mapa de saliência.

### 3.2.3.2 Pré-processamento para inferência de normais

No caso de pontos-tangente, seu campo de influência (Fig. 3.6) é aplicado e o resultado é acumulado somente nos pontos com tangente associada. A interpretação dos resultados é idêntica à do cálculo dos mapas de saliência. Cada ponto-tangente recebe o autovetor correspondente a  $\lambda_{max}$  como normal.

Entretanto, nesse estágio não é possível derivar os mapas de saliência. Uma convolução adicional com o campo de influência para pontos-normal deve ser realizado como descrito na Seção 3.2.3.1.

Quando somente pontos estão disponíveis, utiliza-se o campo de influência para pontos sem orientação associada (Fig. 3.7). As contribuições de todos os pontos são acumuladas somente entre eles. Em seguida, as matrizes resultantes são decompostas em seu auto-sistema mas uma interpretação diferente é necessária.

O campo de influência determina o vetor tangente a todas as normais possíveis entre dois pontos. O problema é então colocado em ordem inversa, isto é, a resposta de normal é dada pelo autovetor correspondente ao menor autovalor  $\lambda_{min}$ . Esse vetor indica o melhor plano entre um conjunto de pontos sem orientação associada. Como no caso de pontos-tangente, o processo de acumulação de pontos-normal deve ser feito para o cálculo dos mapas de saliência.

## 3.3 Extração de estruturas

Esta seção apresenta as técnicas de extração de curvas e superfícies a partir dos mapas de saliência, conforme apresentado por Medioni *et al.* [MED 00]. Essas técnicas são comuns às abordagens de Guy e Lee já que elas definem os mapas da mesma maneira.

A extração de estruturas é um problema de detecção de máximos locais. Guy observa que curvas e superfícies estão localizadas nos pontos dos mapas nos quais a variação de saliência é localmente máxima. Portanto, as estruturas finais são obtidas pela detecção e aglomeração desses pontos.

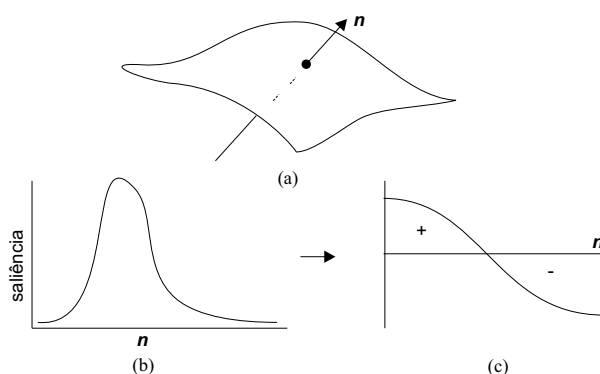
É importante notar que várias estruturas de um mesmo tipo podem ser extraídas de um mapa. Assim, as saídas do processo de extração de estruturas a partir de cada mapa de saliência são:

- **superfícies:** conjuntos de triângulos conectados entre si;
- **curvas:** conjuntos de segmentos de reta conectados entre si;
- **junções:** pontos.

A questão chave desse processo é a presença de informação vetorial associada às saliências. Ter ao mesmo tempo a variação da saliência em uma localidade e a sua orientação estimada viabiliza a detecção de máximos locais com precisão e eficiência.

### 3.3.1 Extração de superfícies

Sem o conhecimento de normais não é simples converter uma superfície de máxima saliência local em triângulos. Na solução dada por Guy, o mapa de saliência é utilizado para calcular uma grade regular de escalares cuja superfície equipotencial de valor 0 representa a superfície reconstruída. Dessa forma, a extração é reduzida ao problema de detecção de superfícies equipotenciais em uma grade discreta de escalares.



**Figura 3.9:** Ilustração de máximo local para superfícies. (a) Uma superfície com normal  $\mathbf{n}$ . (b) A saliência sobre a linha definida por  $\mathbf{n}$ . (c) A derivada da saliência. Seu valor é 0 sobre a superfície.

Dado um mapa de saliência de superfícies formado por tuplas  $(s, \mathbf{n})$ , esse arranjo de escalares é construído pela detecção da variação de  $s$  na direção indicada por  $\mathbf{n}$ . Em termos práticos, um ponto está em uma superfície se sua saliência  $s$  é um extremo local na direção da normal  $\mathbf{n}$ , i.e.,

$$\frac{ds}{dn} = 0 .$$

Essa é uma condição necessária para que um ponto seja máximo local. Uma condição suficiente é definida em termos da passagem por zero da variação de  $s$  na linha definida por  $\mathbf{n}$ , conforme ilustrado na Figura 3.9. Para isso, calcula-se o vetor gradiente

$$\mathbf{g} = \nabla s = \left[ \frac{\partial s}{\partial x} \quad \frac{\partial s}{\partial y} \quad \frac{\partial s}{\partial z} \right]^T \quad (3.6)$$

e o projeta em  $\mathbf{n}$  definindo um conjunto de escalares

$$q_{i,j,k} = \mathbf{n}_{i,j,k} \cdot \mathbf{g}_{i,j,k} . \quad (3.7)$$

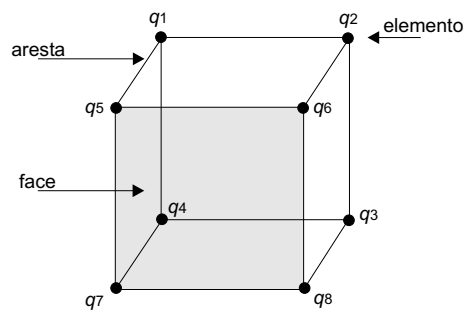
Em conseqüência, uma superfície é o conjunto de pontos nos quais  $q = 0$ . Na implementação proposta por Guy, o vetor  $\mathbf{g}$  é calculado a partir do mapa de saliência pela simples diferença local de  $s$ :

$$\mathbf{g}_{i,j,k} = \begin{bmatrix} s_{i+1,j,k} - s_{i,j,k} \\ s_{i,j+1,k} - s_{i,j,k} \\ s_{i,j,k+1} - s_{i,j,k} \end{bmatrix} .$$

O conjunto  $\{q_{i,j,k}\}$  constitui um campo escalar que pode ser processado diretamente por algoritmos de extração de superfícies equipotenciais [WYV 86, NIE 91]. Guy propõe uma variação do algoritmo *marching cubes* proposto por Lorensen & Cline [LOR 87] para essa extração.

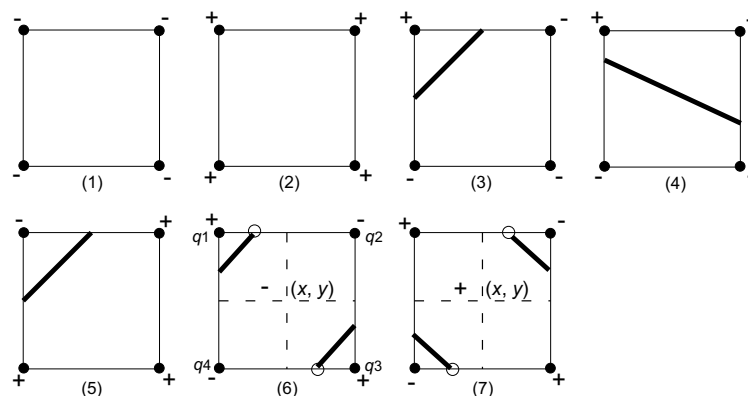
### 3.3.1.1 Determinando superfícies localmente

A estrutura chave do algoritmo de Lorensen & Cline [LOR 87] é denominado  **cubóide** . Dada uma grade tridimensional de escalares calculada pela Equação 3.7, um cubóide em  $(i, j, k)$  é definido pelos oito elementos vizinhos que formam um cubo. Esses elementos formam doze arestas e seis faces (Fig. 3.10).



**Figura 3.10:** Representação de um cubóide definido pelo agrupamento de oito elementos vizinhos.

Considere quatro elementos que constituem uma face de um cubóide. Cada elemento é rotulado “+” se  $q_{i,j,k} \geq 0$  ou “-” se não. Existem  $2^4 = 16$  configurações possíveis que podem ser reduzidas a sete por simetria e por inversão de sinal. Esses casos estão ilustrados na Figura 3.11. O objetivo é determinar os locais dessas arestas nos quais  $q_{i,j,k} = 0$ , ou seja, identificar as posições que representam suas interseções com uma superfície. A conexão aos pares desses locais correspondem à interseção de uma superfície com a face.



**Figura 3.11:** Ilustração da passagem por zero da derivada da saliência na face de um cubóide. Os quatro pontos representam quatro elementos adjacentes com saliência  $q_i$  cujos sinais estão indicados. A linha em negrito indica a passagem de uma superfície, i.e., um máximo local da saliência.

Observe que as configurações 6 e 7 representam uma situação de ambigüidade, já que as duas são igualmente possíveis. Essa ambigüidade deve ser resolvida de uma forma determinista para garantir uma reconstrução sem falhas entre dois cubóides [NIE 91]. Thirion & Gourdon [THI 96] definem a função de interpolação

$$v = \frac{q_1 q_3 - q_2 q_4}{q_1 + q_3 - q_2 - q_4}, \quad (3.8)$$

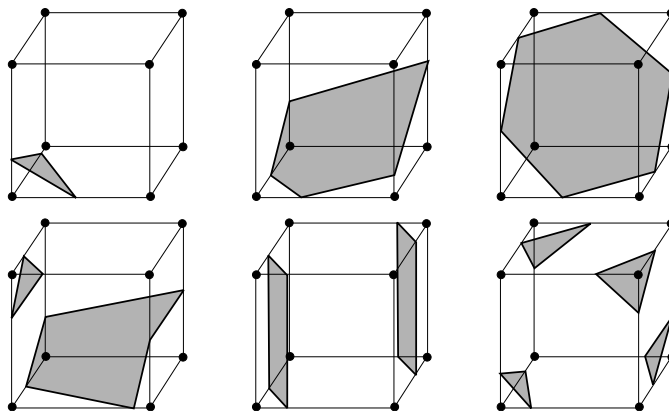
onde  $q_1, q_2, q_3$  e  $q_4$  são os valores nos quatro vértices, como função de desambigüidade. A configuração 7 é escolhida se  $v \geq 0$  ao passo que 6 é escolhida se  $v$  é negativo.

O cálculo das interseções de superfícies nas arestas pode ser realizado pela simples interpolação linear entre os valores de  $q$ . Nos casos 6 e 7, duas retas são definidas entre os pontos de interseção de cada aresta e se interceptam sobre a face (ver ponto  $(x, y)$  na Figura 3.11). A Equação 3.8 calcula o valor de  $q$  nessa interseção de forma similar à de uma interpolação bilinear.

Note que cada aresta define possíveis vértices entre segmentos de duas faces distintas. Com isso, cada face de um cubóide é examinada para se extrair suas superfícies internas. Elas são um conjunto de ciclos fechados formados pela ordenação dos segmentos em cada face. Cada ciclo é então decomposto em triângulos que constituem a saída da extração.

Como existem no máximo dois segmentos por face, o número máximo de segmentos por cubóide é 12. Como esses segmentos devem fazer parte de um ciclo de pelo menos três vértices para se gerar um triângulo, o número de possibilidades de configuração de um cubóide é reduzido para 20 [THI 96]. A Figura 3.12 ilustra seis desses casos típicos.

Se a superfície que intercepta a face de um cubóide não faz parte de uma borda, então essa mesma interseção é compartilhada pelo cubóide adjacente. Isso porque as interseções em cada face são decididas sem ambigüidade.



**Figura 3.12:** Algumas configurações de ciclos que definem superfícies em um cubóide e que são formados por máximos locais nas arestas.

### 3.3.1.2 Extraíndo superfícies

A extração começa por um elemento  $(i, j, k)$  do mapa de saliência no qual se estima que passa uma superfície. Localidades com altos valores de saliência têm maior proba-

bilidade de pertencer a uma superfície, embora isso não seja sempre o caso. Portanto, o elemento inicial deve corresponder à localidade de maior saliência.

Processa-se o cubóide definido por  $(i, j, k)$  conforme definido acima. Se triângulos são gerados nesse processo, eles são gravados e os cubóides vizinhos que compartilham seus segmentos são também processados. Essa cadeia de extração é realizada até que todos os cubóides vizinhos à superfície agregada tenham sido processados. Um cubóide cuja saliência associada seja menor que um limiar de controle não é processado.

Se há múltiplas superfícies, busca-se o elemento correspondente à maior saliência e que cujo cubóide ainda não tenha sido processado. O mesmo processo de extração é então realizado sobre esse novo elemento inicial.

### 3.3.2 Extração de curvas

No mapa de saliência para curvas, cada elemento é uma tupla  $(s, \mathbf{t})$  na qual  $\mathbf{t}$  indica a direção tangente da curva e  $s$  sua saliência. Como no caso de extração de superfícies, é a presença dessas duas estimativas que viabiliza a extração eficiente dos máximos locais que correspondem a curvas.

Um ponto  $P$  com  $(s, \mathbf{t})$  está em uma curva se qualquer deslocamento a partir de  $P$ , no plano normal à  $\mathbf{t}$ , resulta em um valor menor de saliência, i.e.,

$$\frac{ds}{d\mathbf{u}} = \frac{ds}{d\mathbf{v}} = 0 ,$$

onde  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores ortogonais entre si e  $\mathbf{t}$ , definindo o plano normal a  $\mathbf{t}$ . Essa é uma condição necessária para que  $P_{i,j,k}$  pertença a uma curva. Uma condição suficiente é definida em termos da passagem por zero da variação de  $s$  no plano  $\mathbf{uv}$ , que pode ser processada por uma adaptação do algoritmo *marching cubes* [MED 00], conforme descrito a seguir.

#### 3.3.2.1 Determinando curvas localmente

A extração local de curvas é realizada sobre cubóides a partir de uma adaptação do algoritmo *marching cubes*. Dado um mapa de saliência de curvas, o cubóide em  $(i, j, k)$  é definido pelos oito elementos vizinhos que formam um cubo. Sendo  $(s_r, \mathbf{t}_r)$ ,  $1 \leq r \leq 8$ , as tuplas que formam o cubóide, a tangente no seu centro é definida pela média das tangentes

$$\mathbf{w} = \sum_{r=1}^8 \frac{\mathbf{t}_r}{8} , \quad (3.9)$$

que é normal ao plano  $\mathbf{uv}$  e que define a tangente de uma possível curva que passa pelo cubóide.

O centro do cubóide é transladado para a origem através de uma matriz  $\mathbf{T}$ . O próximo passo é calcular a interseção do plano  $\mathbf{uv}$  com as arestas  $(P_0^m, P_1^m)$ ,  $1 \leq m \leq 12$ , do cubóide. Os pontos de interseção  $Q_m$  são dados pela equação paramétrica das arestas

$$Q_m = P_0^m + (P_1^m - P_0^m)u_m , \quad u_m = -\frac{\mathbf{w} \cdot P_0^m}{\mathbf{w} \cdot (P_1^m - P_0^m)} ,$$



onde  $u_m$  define o ponto de interseção na aresta  $m$ . Se  $\mathbf{w} \cdot (P_0^m - P_1^m) = 0$  ou  $u_m < 0$  ou  $u_m > 1$ , então não há interseção. O parâmetro  $u_m$  também é usado para interpolar o vetor gradiente da saliência em  $Q_m$

$$\mathbf{g}_m = \mathbf{g}_0^m + (\mathbf{g}_0^m - \mathbf{g}_1^m)u_m, \quad (3.10)$$

onde  $\mathbf{g}_0^m$  e  $\mathbf{g}_1^m$  são os vetores gradiente (Eq. 3.6) nos pontos  $P_0^m$  e  $P_1^m$  respectivamente.

O conjunto de  $n$  interseções encontradas forma um ciclo  $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$  sobre o plano  $\mathbf{uv}$ . Esse plano deve ser alinhado com o plano  $\mathbf{xy}$  para facilitar a determinação do ponto no qual passa uma curva. Note que o centro do cubóide está na origem devido à transformação  $\mathbf{T}$ . Portanto, a matriz de alinhamento é dada por

$$\mathbf{R} = [\mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \times \mathbf{y})]^T,$$

com  $\mathbf{x} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}|$  e  $\mathbf{y} = Q_l/|Q_l|$ , onde  $1 \leq l \leq n$  indica qualquer ponto de interseção. Para toda interseção  $Q_n$  calcula-se o vetor

$$\mathbf{q}_n = [q_{n_x} \quad q_{n_y} \quad q_{n_z}] = \mathbf{R}(\mathbf{w} \times \mathbf{g}_n),$$

onde  $\mathbf{g}_n$  é o vetor gradiente em  $Q_n$  interpolado (Eq. 3.10). O produto vetorial projeta  $\mathbf{g}_n$  no plano  $\mathbf{uv}$  enquanto  $\mathbf{R}$  calcula as coordenadas dessa projeção nesse mesmo plano. Após a transformação,  $q_{n_x}$  e  $q_{n_y}$  são as coordenadas da projeção sobre  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  respectivamente e  $q_{n_z} = 0$ . Por definição, uma curva é o conjunto de pontos nos quais  $\mathbf{q} = [q_x \quad q_y] = \mathbf{0}$ .

Considere os elementos do ciclo projetado  $\{\mathbf{R}Q_n\}$  e seus vetores associados  $\mathbf{q}_n$ . Em cada segmento desse ciclo calcula-se a posição na qual  $q_x = 0$  e  $q_y = 0$  pela interpolação linear dos componentes  $q_{n_x}$  e  $q_{n_y}$  respectivamente. Se existem dois segmentos que contêm um ponto com  $q_x = 0$  cada um, então esses pontos interpolados formam uma reta na qual  $\frac{ds}{du} = 0$ . Se existem dois segmentos que contêm um ponto com  $q_y = 0$  cada um, então esses pontos interpolados formam uma reta na qual  $\frac{ds}{dv} = 0$ . A interseção dessas duas retas corresponde ao ponto extremo projetado  $P$  no qual passa uma curva. A Figura 3.13 ilustra o cálculo do ponto no plano  $uv$ .

O ponto extremo  $I$  do cubóide no qual passa uma curva é então calculado pela transformação inversa

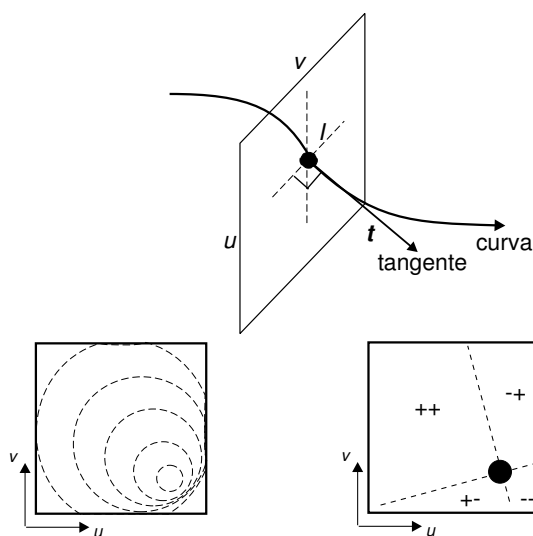
$$I = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^{-1}P.$$

Note que esse processo calcula o ponto de curva de forma determinista. Assim, ou existe somente um ponto extremo ou nenhum, em cada cubóide.

### 3.3.2.2 Extraíndo curvas

A extração começa por um elemento  $(i, j, k)$  do mapa de saliência de curvas que possui a maior saliência. Como no caso de superfícies, localidades com altos valores de saliência têm maior probabilidade de pertencer a uma curva, embora isso não seja sempre o caso.

Processa-se o cubóide definido por  $(i, j, k)$  conforme definido acima. Se existe o ponto de curva  $I_i$  nesse cubóide, então ele é guardado e o próximo cubóide é determinado pela orientação do vetor de pontos de curva  $I_i - I_{i-1}$  ou por  $\mathbf{w}$ , caso seja o início da cadeia. Cada segmento formado por  $I_i$  e  $I_{i-1}$  compõe a saída do processo.



**Figura 3.13:** Determinando o ponto de passagem de curva  $I$ , que tem saliência localmente máxima, no plano definido pela tangente.

O passo acima é repetido até que a saliência associada ao cubóide seja inferior a um limiar de controle. Os segmentos gerados formam a curva  $C_1$ . Retorna-se ao ponto inicial e o processo acima é realizado para a direção  $-w$ . Ou seja, analisa-se o outro sentido da curva a partir do cubóide inicial. A curva  $C_2$  gerada nesse processo é então invertida e a curva total direcionada  $C = C_1 \cup C_2$  é formada.

Se há múltiplas curvas, busca-se o elemento correspondente à maior saliência e cujo cubóide ainda não tenha sido processado. O mesmo processo de extração é então realizado sobre esse novo elemento inicial.

### 3.3.2.3 Extração de junções

O mapa de saliência de junções é formado por escalares que indicam contribuições complexas de orientação. Guy interpreta essa informação como sendo a interseção entre várias estruturas. A sua extração é realizada simplesmente pela localização de máximos e supressão dos altos valores de saliência em sua vizinhança.

A extração começa pelo elemento  $(i, j, k)$  do mapa de saliência que possui a maior saliência. Esse ponto constitui a saída do processo. Em seguida, os  $n$  vizinhos mais próximos contidos em uma esfera de raio fixo centrada em  $(i, j, k)$  são simplesmente zerados [GUY 96]. Esses vizinhos tendem a ter valores altos de saliência, o que pode dificultar a detecção de outras junções.

Se há vários pontos de junção, realiza-se o mesmo processo no elemento correspondente à maior saliência e que não tenha sido processado.

### 3.3.3 Alinhamento de vetores

Uma importante etapa para assegurar a consistência da avaliação dos cubóides na extração de superfícies e curvas é o alinhamento de seus vetores. Como a acumulação é feita por matrizes positivas simétricas, o sentido dos vetores resultantes é arbitrário.

Conseqüentemente, é necessário alinhar os vetores correspondentes aos vértices de cada cubóide antes de aplicá-los nas Equações 3.7 e 3.9. Dado um vetor  $v$  qualquer do cubóide, um outro vetor está alinhado se seu produto escalar com  $v$  for não negativo. Se seu produto escalar for negativo, basta invertê-lo para alinhá-lo com  $v$ .

### 3.4 Síntese conclusiva

Este capítulo apresenta a abordagem de Guy através de uma visada epistemológica. Em um processo crítico, deve-se entrar no campo cognitivo da obra e evidenciar seus fundamentos. Dessa forma, a primeira seção trata da fundamentação epistemológica da abordagem. A discussão é realizada a partir do ponto de vista do autor, o que permite um real entendimento de suas premissas e proposições.

Inicialmente, o trabalho de Guy tratou de problemas do campo de agrupamento perceptivo: fechamento de contornos e detecção de contornos ilusórios. Assim, seu ponto de partida foi a teoria de Ullman e os princípios da Escola Gestalt de psicologia. A solução de Guy busca traduzir tais princípios utilizando principalmente dois instrumentos matemáticos: campos vetoriais e matrizes de covariância. A escolha desses instrumentos é fundamentada no campo de agrupamento perceptivo, sugerindo uma abordagem dedutiva ao problema.

Entretanto, o método resultante realiza organização espacial ao invés de organização perceptiva. Ou seja, não é inerente ao campo de agrupamento perceptivo. Almejando os problemas de percepção, Guy desenvolveu um método para reconstrução de estruturas. Portanto, seu trabalho situa-se no campo de visão computacional e no campo matemático. Apresenta-se um epistemograma para ilustrar os objetivos, os objetos, os processos e os produtos dessa abordagem.

Após a fundamentação epistemológica, a metodologia de Guy para reconstrução de superfícies é apresentada. A abordagem se baseia na representação de estruturas locais por matrizes de covariância e no uso de campos vetoriais para codificar conexões globais. Um processo de acumulação gera mapas de saliência cujos máximos locais representam as estruturas. A última seção descreve os algoritmos adaptados para extrair os máximos locais desses mapas e, conseqüentemente, as estruturas.

## Capítulo 4

# Epistemologia da abordagem de Mi-Suen Lee

Mi-Suen Lee [LEE 99] proporciona um aperfeiçoamento do método de Guy com base em uma nova representação de orientações locais. Este capítulo apresenta o contexto científico dessa evolução e o método de acumulação de tensores proposto (denominado *tensor voting*).

### 4.1 Fundamentação epistemológica

Em qual campo do conhecimento o trabalho de Lee se situa? Estando fundamentado nas idéias de Guy, ele se insere no campo de visão computacional e no campo matemático. Lee assume o problema de reconstrução como o mais importante de seu trabalho. Ele propõe várias aplicações através da redução de problemas do campo de visão computacional ao de reconstrução de formas [MED 00]. Lee apresenta, por exemplo, uma solução ao problema de reconstrução estereoscópica aplicando seu método [LEE 98a].

O campo de agrupamento perceptivo continua a ter grande importância no trabalho de Lee. Todavia, seu objetivo é aumentar a eficácia do processo proposto por Guy para reconstrução de formas. Ele intervém nos instrumentos matemáticos: a representação de orientações, a definição dos campos e o método de inferência.

Lee observa que é a variação da orientação representada por vetores que permite detectar estruturas. Para aumentar a eficácia do método, ele propõe uma representação local através de tensores que são geralmente usados para capturar variações de direção no estudo de dinâmicas, elasticidade, fluídos, eletromagnetismo, etc.

#### 4.1.1 Continuidade metodológica

Lee efetivamente dá continuidade ao trabalho de Guy. Dessa forma, seus princípios são implicitamente os mesmos. Lee atua somente no instrumental matemático de Guy propondo um novo método de reconstrução que, naturalmente, está baseado na teoria de Ullman [ULL 76] e nos princípios da escola Gestalt de psicologia.

No sentido de aperfeiçoar o método de reconstrução de formas, Lee busca melhorar a representação local de estruturas para obter maior sucesso na reconstrução. A grosso modo, a idéia é levar em conta informações que são desconsideradas por Guy após as

etapas de acumulação. Pelo princípio de agregação, essas informações são aproveitadas para reforçar a definição de estruturas no processo.

Uma questão central do trabalho de Lee é: como capturar as variações de orientação definidas por campos vetoriais e melhor utilizá-las na reconstrução? Essa questão está relacionada com a medição da complexidade estrutural de um conjunto de pontos. O formalismo tensorial de Knutsson [KNU 89] e Westin [WES 94] é utilizado nesse sentido.

Knutsson define uma representação de orientação local de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  por tensores para aplicações em processamento de sinais e visão computacional [KNU 93]. Westin formaliza a interpretação da informação estrutural desses tensores. No trabalho de Lee, esse formalismo constitui a base dos aperfeiçoamentos e é utilizado para explorar as informações remanescentes da acumulação.

#### 4.1.2 O instrumento matemático

Na sua representação de orientação local, Knutsson chama a atenção para o fato de que rotacionar planos e retas em  $180^\circ$  não muda em nada sua representação local. Essa ambigüidade pode ser eliminada ao se estabelecer um mapeamento entre  $\mathbb{R}^3$  e um espaço tensorial de maior dimensão. Ele propõe o mapeamento de um vetor  $\mathbf{v}$  em um tensor  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = r^{-1} \mathbf{v} \mathbf{v}^T \quad (4.1)$$

e o inverso que é dado por

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T, \quad (4.2)$$

onde  $r > 0$  é uma constante,  $\lambda_1$  é o maior autovalor de  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{e}_1$  o autovetor correspondente. Knutsson mostra que esta representação é adequada porque possui três atributos:

- unicidade: mapeia todo par de vetores tridimensionais  $\mathbf{v}$  e  $-\mathbf{v}$  no mesmo tensor;
- uniformidade: implicitamente possui a definição de distância entre planos e retas em 3D que é invariante a rotações e monotônico em relação aos ângulos entre os planos;
- separabilidade polar: significa que a norma do tensor de representação é invariante a rotações.

Combinações lineares de tensores produzidos pelo mapeamento não possuem correspondentes em  $\mathbb{R}^3$ . O ponto em  $\mathbb{R}^3$  que corresponde à melhor aproximação de um tensor arbitrário é dado pelo mapeamento inverso (Eq. 4.2).

Westin [WES 94] realiza uma interpretação geométrica do tensor de orientação em  $\mathbb{R}^3$  proposto por Knutsson. Essa interpretação define o **tensor de saliência** (Seção 4.2.1) utilizado por Lee. Westin descreve, formalmente através de relações entre autovalores e autovetores, os diversos níveis de informação obtidos pela combinação linear de tensores simétricos positivos. Trata-se de uma confirmação das relações empiricamente propostas por Guy no cálculo dos mapas de saliência (Seção 3.2.3.1). A interpretação é generalizada para  $n$  dimensões.

Os principais instrumentos matemáticos do trabalho de Lee são o tensor de orientação proposto por Knutsson e a interpretação tensorial de Westin. A noção de campo de influência é adaptada para essa representação. Em contraste com as idéias de Guy, o método de Lee tem como características:

- representação de estrutura local por tensores: na verdade, a matriz de covariância utilizada por Guy é a mesma representação proposta por Knutsson. Lee utiliza toda a informação obtida após a acumulação de acordo com Westin;
- campos tensoriais que codificam conexões globais: os campos de influência são compostos por tensores ao invés de vetores. Eles codificam conexões pré-definidas pelos princípios de agrupamento perceptivo.

Lee define um campo para cada componente tensorial da interpretação de Westin, enquanto Guy define um campo para cada tipo de entrada. Essa abordagem por componentes tensoriais define um novo processo de acumulação. Entretanto, a extração de estruturas é realizada da mesma forma.

A abordagem ao problema de reconstrução no trabalho de Lee é dedutiva por ser uma continuidade do método de Guy e por estar baseada nesse formalismo tensorial.

### 4.1.3 O epistemograma

A busca da solução no trabalho de Lee mais uma vez passa pelo campo do conhecimento formal. O formalismo tensorial de Knutsson e Westin constitui o principal embasamento teórico do trabalho que é agregado ao método de Guy. Logo, o sistema de inquirição do trabalho de Lee é **leibniziano**.

A Tabela 4.1 mostra o principal objetivo do trabalho de Lee. O trabalho de Guy pode ser caracterizado como **seminal**. Nele é proposto um novo paradigma metodológico de reconstrução. O trabalho de Lee é tipicamente evolutivo.

**Tabela 4.1:** Epistemograma simplificado do trabalho de Mi-Suen Lee [LEE 99].

Objetivo	Ciências	Objeto real	Objeto de contato	Produto
Aperfeiçoar o método de Guy para reconstruir superfícies e curvas.	- visão computacional; - reconstrução de formas; - matemática aplicada.	Objetos reais.	Conjunto de pontos, tangentes e normais que representam parcialmente a forma de um objeto real.	Método para reconstrução de superfícies e curvas.

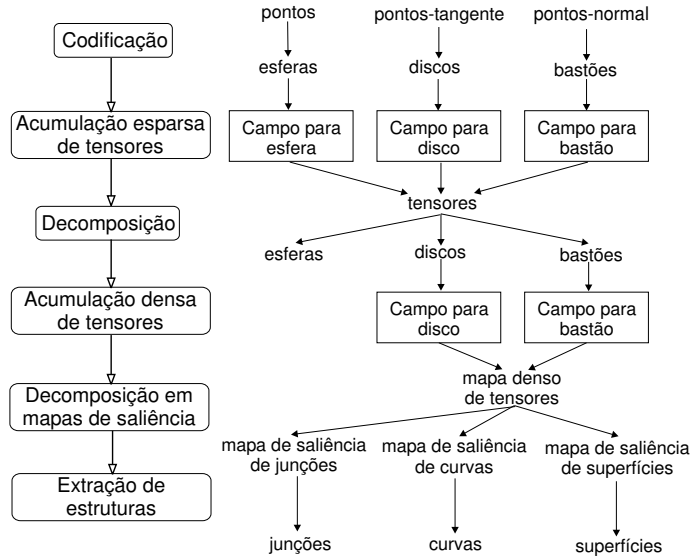
## 4.2 A metodologia de Mi-Suen Lee

A entrada é a mesma definida por Guy, ou seja, pontos, pontos-tangente e pontos-normal. O método consiste em quatro etapas:

- codificação da entrada;
- acumulação esparsa de tensores;
- acumulação densa de tensores;
- cálculo dos mapas de saliência.

O uso de propriedades de tensores é o principal aspecto do trabalho de Lee. Toda a cadeia de processamento é baseada em uma representação tensorial ao invés de vetorial,

conforme ilustrado na Figura 4.1. Logo, a primeira etapa de seu método é a codificação dos elementos de entrada, conforme descrito na Seção 4.2.1. Guy utiliza diretamente a informação de entrada para realizar a acumulação por convolução.



**Figura 4.1:** Abordagem de Lee para inferência de curvas, superfícies e junções. A cadeia de tratamento dos objetos está ilustrada à direita.

A **acumulação esparsa** de tensores tem a mesma funcionalidade da fase de pré-processamento do método de Guy. As contribuições são acumuladas somente nos dados de entrada e mantidas na forma de tensor. Essa etapa é sempre realizada para filtrar orientações com ruído.

Outra diferença é que cada elemento recebe a contribuição de todos os outros na primeira acumulação, mesmo sendo de tipos diferentes. Guy prevê o pré-processamento de cada tipo de entrada isoladamente.

O objetivo de Guy no pré-processamento é somente determinar o vetor normal de todo elemento de entrada. As outras informações contidas nas matrizes resultantes são simplesmente descartadas. Lee utiliza toda a informação tensorial resultante da segunda etapa na fase de **acumulação densa** na qual, todos os elementos de uma grade recebem suas contribuições. A acumulação dessas contribuições é realizada através de campos tensoriais.

O cálculo dos mapas de saliência bem como a extração de estruturas são realizados como proposto por Guy [GUY 96].

#### 4.2.1 O tensor de saliência

Para derivar seu método, Lee define o **tensor de saliência** que é capaz de sinalizar a presença de estruturas salientes, descontinuidade ou pontos não relevantes em cada localidade. O projeto do tensor de saliência é baseado na observação de que uma descontinuidade é indicada pelo desacordo na estimativa de superfícies ou curvas [KNU 89, WES 94].

Intuitivamente, a forma do elipsóide que representa um tensor define o tipo de informação capturada em 3D. O tamanho do elipsóide codifica a saliência dessas informações.

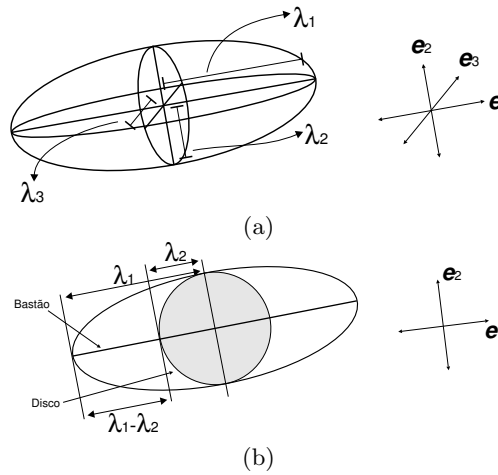
Outra forma de se representar um tensor  $\mathbf{T}$  é através da decomposição em seu autosistema

$$\mathbf{T} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \end{bmatrix},$$

ou

$$\mathbf{T} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T, \quad (4.3)$$

onde  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$  representam seus autovalores e  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  os respectivos autovetores<sup>1</sup>. Os autovetores correspondem aos eixos principais do elipsóide e os autovalores aos tamanhos de cada um desses eixos, definindo a forma geral ilustrada na Figura 4.2. A Figura 4.3 ilustra a codificação de cada tipo de entrada em tensores de saliência e sua representação geométrica.



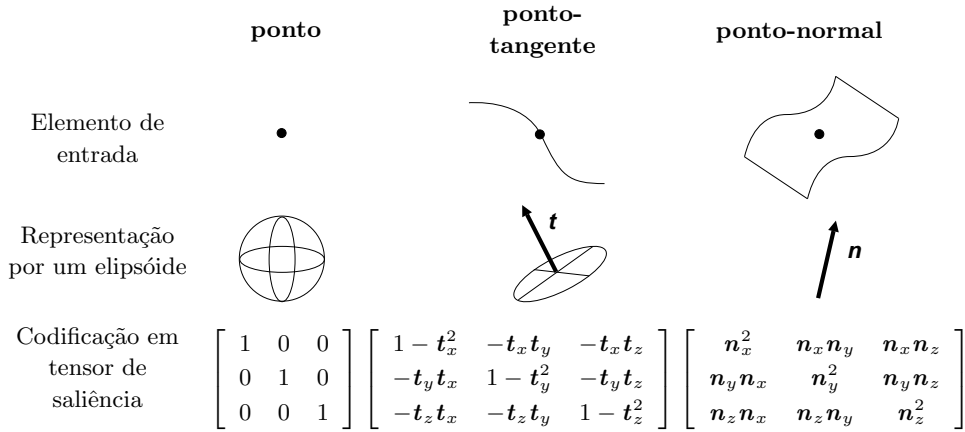
**Figura 4.2:** Representação geométrica de matrizes simétricas positivas semi-definitas. Note que os vetores dos eixos principais não têm sentido definido. (a) Elipsóide em 3D. (b) Elipse em 2D. Veja a representação da medida de saliência  $\lambda_1 - \lambda_2$ .

Um tensor de segunda ordem é uma função linear que mapeia todo vetor em outro vetor. Dados dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , o produto  $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$  é chamado **díado** ou produto direto com antecedente  $\mathbf{u}$  e conseqüente  $\mathbf{v}$ . Um díado é um tensor que mapeia todo vetor  $\mathbf{w}$  em um vetor paralelo a  $\mathbf{u}$ , de acordo com a definição  $\mathbf{u}\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$  [DAN 96]. Como  $\mathbf{T}$  é uma combinação linear de díados,  $\mathbf{T}$  é um tensor.

A interpretação do tensor de saliência é específica à estrutura a ser detectada, como curva ou superfície. A codificação ilustrada na Figura 4.3, por exemplo, determina superfícies como estrutura principal. Para estruturas distintas, tanto a codificação dos dados de entrada quanto a interpretação das informações resultantes devem ser diferentes. Essa é uma conseqüência direta das proposições de Westin [WES 94]. Lee & Medioni [LEE 99] definem uma codificação específica para a detecção de curvas e uma específica para superfícies. Paradoxalmente, Lee argumenta que o cálculo dos tensores é independente de sua interpretação estrutural.

<sup>1</sup>Note que, na realidade, essa é a mesma representação dada pela Equação 3.4 e utilizada por Guy.





**Figura 4.3:** A codificação dos elementos de entrada em tensores de saliência.

#### 4.2.1.1 Decomposição do tensor de saliência

De acordo com o teorema do espectro [WES 94, DAN 96], um tensor de saliência  $\mathbf{T}$  arbitrário pode ser expresso por uma combinação linear de três tensores, ou operadores de projeção, que possuem diferentes significados geométricos. Dessa forma, a Equação 4.3 pode ser re-escrita como

$$\mathbf{T} = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + (\lambda_2 - \lambda_3)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T) + \lambda_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^T), \quad (4.4)$$

onde  $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T$  geometricamente descreve um **bastão**,  $(\lambda_2 - \lambda_3)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T)$  descreve um **disco** e  $\lambda_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^T)$  uma **esfera**. Essas denominações foram dadas por Lee para tensores de saliência em  $\mathbb{R}^3$  e estão relacionadas unicamente com a forma de cada componente.

Segundo Lee, a adição de dois tensores de saliência simplesmente combina suas orientações e saliências. Essa linearidade do tensor permite uma combinação eficiente de várias contribuições de orientação. Em cada localidade, os três tipos de informação resultante são decodificados como:

- **atributo de superfície:** orientação é  $\mathbf{e}_1$ , saliência é  $\lambda_1 - \lambda_2$ ;
- **atributo de curva:** orientação é  $\mathbf{e}_3$ , saliência é  $\lambda_2 - \lambda_3$ ;
- **atributo de ponto:** sem orientação, saliência é  $\lambda_3$ .

A decodificação acima é a mesma descrita na Seção 3.2.3.1 e que foi proposta por Guy. Entretanto, os argumentos de Guy são de ordem empírica enquanto Westin [WES 94] formaliza a interpretação dos diversos componentes.

Essa representação tensorial pode ser generalizada para  $n$  dimensões [MED 00]. Nesse caso, o atributo de ponto seria representado por  $\lambda_n$  e a  $i$ -ésima hipersuperfície por  $\lambda_i$  e  $\lambda_{i-1}$ . Essa característica foi primeiramente evidenciada por Westin [WES 94].

#### 4.2.2 Construção dos campos tensoriais

Como no método de Guy, são os campos de influência que determinam a inferência de orientações em cada localidade. Devido à representação por tensores, eles são compostos de tensores de saliência que codificam as orientações preferenciais.

Guy define seus campos de influência de acordo com cada tipo de entrada. No método de Lee, os campos tensoriais são relacionados com cada componente de um tensor:

- campo para bastão: relacionado com  $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T$ ;
- campo para disco: relacionado com  $(\lambda_2 - \lambda_3)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T)$ ;
- campo para esfera:  $\lambda_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^T)$ .

Os campos tensoriais são definidos em forma discreta a partir de um **campo fundamental** [MED 00], que por sua vez é construído em 2D pelos mesmos princípios de percepção propostos por Guy.

#### 4.2.2.1 Construção do campo fundamental

O campo fundamental define trajetórias circulares em 2D, como definido na Seção 3.2.1.1. A saliência de cada elemento do campo é calculada em função do comprimento e curvatura do arco circular:

$$DF(s, \rho) = e^{-\frac{s^2 + c\rho^2}{\sigma^2}}, \quad s = \frac{\theta l}{\sin\theta}, \quad \rho = \frac{2\sin\theta}{l}, \quad (4.5)$$

onde  $c$  controla a atenuação em função da curvatura  $\rho$ ,  $s$  é o comprimento do arco circular,  $\sigma$  é o fator que determina a taxa de atenuação e  $(\theta, l)$  é a coordenada polar do ponto. Note que essa função é a Equação 3.2 com  $a = s^2/\sigma^2$  e  $b = c\rho^2/\sigma^2$ .

A Equação 4.5 simplifica a construção do campo fundamental reduzindo para um o número de parâmetros necessários para a acumulação: o parâmetro  $\sigma$  que define a extensão da influência. A constante  $c$  deve ser ajustada em função de  $\sigma$  [MED 00].

Dadas as coordenadas polares de um ponto  $Q$ , o campo tensorial fundamental é definido como

$$\mathbf{V}_F(s, \rho) = DF(s, \rho)\mathbf{v}\mathbf{v}^T, \quad (4.6)$$

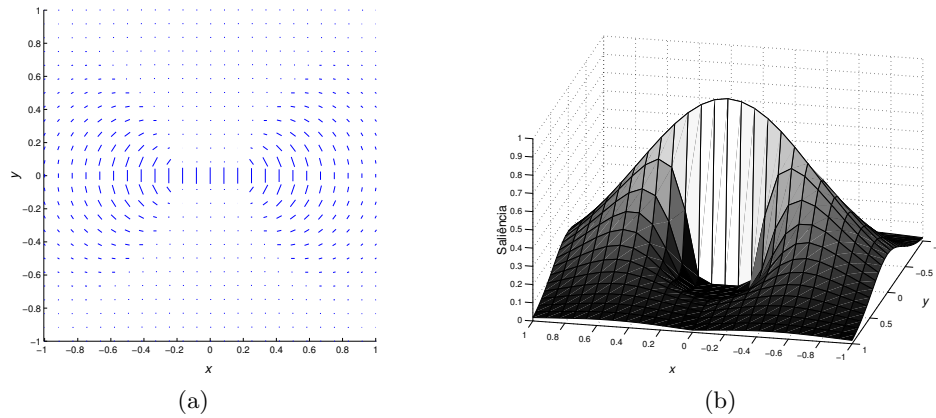
onde  $\mathbf{v} = [\sin 2\theta \quad -\cos 2\theta]^T$  é o vetor que define a continuidade circular. A Figura 4.4a ilustra o campo vetorial resultante definido por  $\mathbf{e}_1$ , enquanto a Figura 4.4b representa suas saliências  $\lambda_1 - \lambda_2$ . Note que o campo é definido em 2D.

#### 4.2.2.2 Derivação dos campos tensoriais a partir do campo fundamental

Pode-se definir um tensor de saliência (Eq. 4.3) com 6 parâmetros escalares  $\mathbf{T} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta, \phi, \psi)$ , onde  $\theta$ ,  $\phi$  e  $\psi$  são os ângulos em relação aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  em uma matriz de rotação  $\mathbf{R}_{\psi\phi\theta}$  que alinha o sistema de coordenadas global com o sistema de coordenadas definido por  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ .

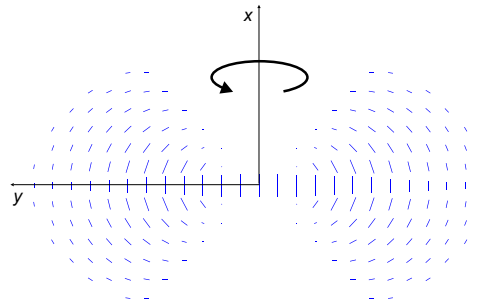
São necessários três campos tensoriais, um para cada componente de um tensor de saliência. Define-se o **campo para bastão** pela rotação do campo fundamental  $\mathbf{V}_F$  de  $90^\circ$  em relação ao eixo  $z$  e pela integração de suas contribuições em torno do eixo  $x$  (Fig. 4.5):

$$\mathbf{V}_B(\mathbf{T}, Q) = \int_0^\pi \mathbf{R}_{\psi\phi\theta} \mathbf{V}_F(\mathbf{R}_{\psi\phi\theta}^{-1} Q) \mathbf{R}_{\psi\phi\theta}^T d\phi \Big|_{\theta=0}. \quad (4.7)$$



**Figura 4.4:** O campo tensorial fundamental. (a) O campo vetorial definido por  $e_1$ . O tamanho dos segmentos indica sua saliência com  $\sigma = 0,8$  e  $c = 0,09$ . (b) Ilustração da distribuição de saliências  $\lambda_1 - \lambda_2$ .

Esse campo descreve a normal  $[1 \ 0 \ 0]^T$  e objetiva propagar o componente bastão  $(\lambda_1 - \lambda_2)e_1e_1^T$  codificado em um tensor. Sua forma é a mesma do campo para pontos-normal de Guy (Fig. 3.5a).



**Figura 4.5:** Construção do campo para bastão a partir do campo fundamental.

O **campo para esfera** pode ser obtido pela integração de  $V_B$  ao redor de  $z$  seguida pela integração em torno de  $y$ :

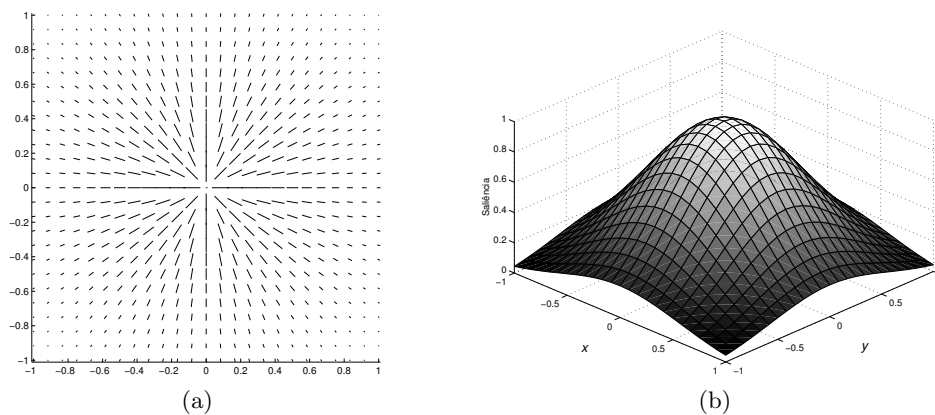
$$V_E(\mathbf{T}, Q) = \int_0^\pi \int_0^\pi \mathbf{R}_{\psi\phi\theta} V_B(\mathbf{R}_{\psi\phi\theta}^{-1} Q) \mathbf{R}_{\psi\phi\theta}^T d\psi d\phi \Big|_{\theta=0}. \quad (4.8)$$

Esse campo é utilizado para propagar a informação de isotropia  $\lambda_3(e_1e_1^T + e_2e_2^T + e_3e_3^T)$  que representa a indecisão da estimação de normais e tangentes de um tensor. O campo resultante está ilustrado na Figura 4.6.

O **campo para disco** é construído para inferir possíveis tangentes em algumas regiões e normais em outras. Ele é derivado da integração do campo de bastão em torno do eixo  $z$ , definindo um plano com normal  $[0 \ 0 \ 1]^T$ :

$$V_D(\mathbf{T}, Q) = \int_0^\pi \mathbf{R}_{\psi\phi\theta} V_B(\mathbf{R}_{\psi\phi\theta}^{-1} Q) \mathbf{R}_{\psi\phi\theta}^T d\psi \Big|_{\theta=0, \phi=0}. \quad (4.9)$$

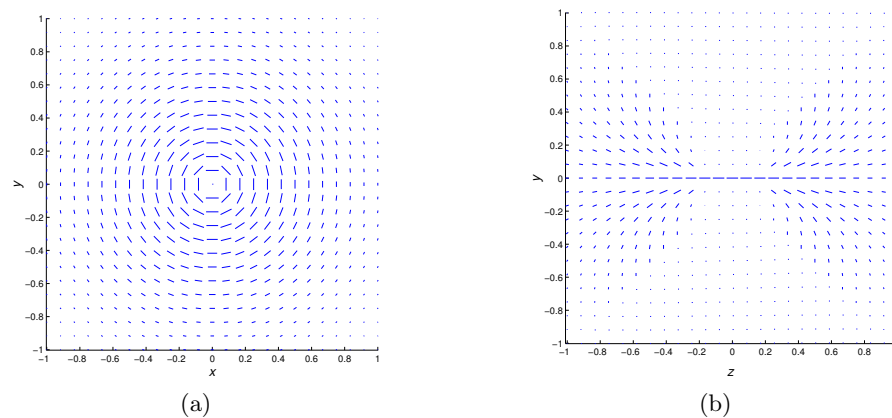
Esse campo é utilizado para propagar o componente tensorial  $(\lambda_2 - \lambda_3)(e_1e_1^T + e_2e_2^T)$  que representa a informação de tangente. Note que ele representa dois aspectos estruturais



**Figura 4.6:** O campo tensorial para esfera. (a) O campo vetorial definido por  $e_3$  no plano  $z=0$ . O tamanho dos segmentos indica sua saliência. (b) Ilustração da distribuição de saliências  $\lambda_2 - \lambda_3$ .

diferentes (Fig. 4.7). As contribuições de normais são representadas por  $e_1$  com saliência  $\lambda_1 - \lambda_2$  (Fig. 4.7a). Possíveis continuações de curva estão codificadas por  $e_3$  com saliência  $\lambda_2 - \lambda_3$  na direção do eixo  $z$  (Fig. 4.7b).

Sua derivação é a mesma definida por Guy para seu campo para pontos-tangente. A diferença é que acumula-se tensores em cada localidade durante a integração para o campo de disco (Eq. 4.9).



**Figura 4.7:** O campo tensorial para disco. O tamanho dos segmentos indica a saliência. (a) O campo vetorial para normais definido por  $e_1$  no plano  $z=0$ . (b) O campo vetorial para tangente definido por  $e_3$  no plano  $x=0$ .

### 4.2.3 Acumulação de tensores

Nesta etapa, os campos tensoriais são alinhados com as principais direções  $\theta$ ,  $\phi$  e  $\psi$  de um tensor de saliência, codificado a partir de uma entrada,  $\mathcal{S}(i, j, k) = \mathbf{T}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \theta, \phi, \psi)$  e seus centros são transladados para  $(i, j, k)$ . Os campos passam a representar, no espaço, a influência dos componentes do tensor que pode então ser acumulada.

Na acumulação esparsa, o tensor  $\mathcal{S}$  é decomposto (Eq. 4.4) e sua contribuição total para um ponto  $Q$  é o somatório das contribuições de seus componentes, estruturadas pelos

respectivos campos:

$$\mathbf{V}_T(\mathbf{S}, Q) = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{V}_B(\mathbf{S}, Q) + (\lambda_2 - \lambda_3) \mathbf{V}_D(\mathbf{S}, Q) + \lambda_3 \mathbf{V}_E(\mathbf{S}, Q) .$$

Note que nessa primeira acumulação todos os componentes dos tensores são usados na propagação de informações. A Figura 4.8 ilustra o processo de acumulação em 2D no qual  $\lambda_2$  é o atributo isotrópico. Como no método de Guy, o objetivo é usar toda a informação disponível para estimar normais e tangentes em cada elemento de entrada.

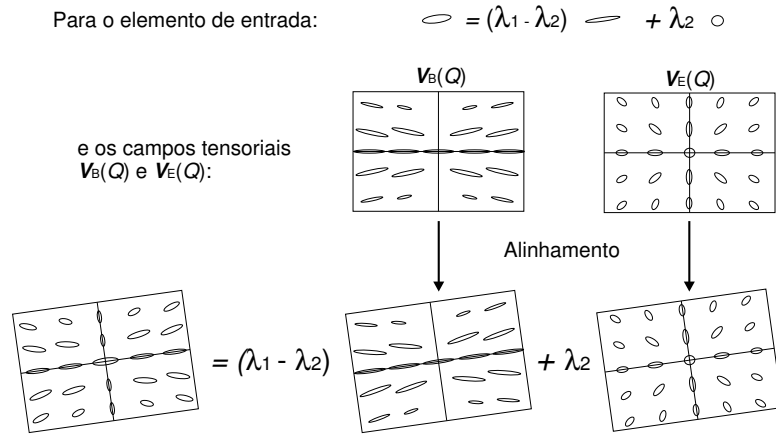
A acumulação densa propaga a informação resultante da primeira acumulação a todas as localidades de uma grade de tensores que engloba os dados de entrada. Somente as informações anisotrópicas são propagadas. Ou seja, o componente de esfera dos tensores resultantes não é utilizado porque busca-se somente estruturas direcionadas. O campo tensorial para acumulação densa é dado pela equação:

$$\mathbf{V}_T(\mathbf{S}, Q) = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{V}_B(\mathbf{S}, Q) + (\lambda_2 - \lambda_3) \mathbf{V}_D(\mathbf{S}, Q) . \quad (4.10)$$

Para uma localidade  $(l, m, n)$  da grade de tensores, o tensor resultante da acumulação é definido por

$$\mathbf{U}(l, m, n) = \sum_{i,j,k} \mathbf{V}_T(\mathbf{S}(i, j, k), Q(i, j, k, l, m, n)) , \quad (i, j, k) \in N(l, m, n) , \quad (4.11)$$

onde  $N(l, m, n)$  são as localidades que fazem parte dos dados de entrada e estão na vizinhança de  $(l, m, n)$ . As localidades  $(l, m, n)$  correspondem aos dados de entrada, no caso da acumulação esparsa, e a todos os elementos da grade, no caso da densa. A Fig. 4.8 ilustra o processo de acumulação.



**Figura 4.8:** Ilustração do processo de acumulação em 2D.

#### 4.2.4 Cálculo dos mapas de saliência

Os três mapas definindo as saliências de superfície, curva e junção são calculados a partir da decomposição dos tensores  $\mathbf{U}(l, m, n)$  obtidos após a acumulação densa (Eq. 4.11). Cada um tem as mesmas dimensões da grade que envolve a entrada e é composto por tuplas  $(s, \mathbf{e})$ , onde  $s$  é um escalar que define a medida de saliência e  $\mathbf{e}$  é o vetor unitário que indica a direção da estrutura correspondente:

- **mapa de saliência de superfícies:**  $s = \lambda_1 - \lambda_2$ ,  $e = e_1$ ;
- **mapa de saliência de curvas:**  $s = \lambda_2 - \lambda_3$ ,  $e = e_3$ ;
- **mapa de saliência de junções:**  $s = \lambda_3$ ,  $e = 0$ .

Note que esses mapas estão relacionados com os componentes do tensor de saliência e são calculados como no método de Guy. A extração de estruturas é efetuada através dos mesmos métodos desenvolvidos por Guy e apresentados na Seção 3.3.

### 4.3 Síntese conclusiva

Este capítulo apresenta o trabalho de Mi-Suen Lee através de sua epistemologia. Na fundamentação epistemológica, discute-se o contexto científico da abordagem a partir do ponto de vista do autor. Com base no trabalho de Guy, a abordagem de Lee se insere no campo de visão computacional e no campo matemático, com os mesmos princípios do campo de agrupamento perceptivo.

As proposições de Lee são de continuidade metodológica do trabalho de Guy. A idéia básica da abordagem é considerar as informações que são descartadas por Guy após as etapas de acumulação. O objetivo é obter maior sucesso na reconstrução, utilizando essas informações secundárias.

O formalismo tensorial de Knutsson e Westin constitui a base dos aperfeiçoamentos e é utilizado para explorar as informações remanescentes da acumulação. Knutsson define uma representação de orientação local de superfícies por tensores de segunda ordem. Westin formaliza a interpretação da informação estrutural desses tensores.

No método de Lee, as noções de campos de influência e de representação local de orientação propostos por Guy são adaptadas para o formalismo tensorial. A representação local por tensores, os campos tensoriais e os novos processos de acumulação são apresentados após a fundamentação epistemológica.

## Capítulo 5

# Epistemologia crítica

Nos Capítulos 3 e 4, os contextos científicos e metodológicos dos trabalhos de Guy e Lee são apresentados no sentido de fundamentá-los. Este capítulo completa o estudo epistemológico dos trabalhos fundamentais através de uma discussão crítica sobre seus principais aspectos. A fundamentação crítica desta tese é realizada com base nessa discussão.

### 5.1 Discussão sobre o trabalho de Guy

Gideon Guy apresenta uma abordagem original ao problema de reconstrução de superfícies baseada em princípios de agrupamento perceptivo. Sua tese é dividida claramente em duas partes. A primeira focaliza os problemas de fechamento de contornos e detecção de contornos ilusórios, enquanto a segunda apresenta a extensão para reconstrução em 3D. Os problemas de agrupamento perceptivo não são tema de estudo desta tese. Porém, não se pode discutir o trabalho de Guy sem entrar em seus fundamentos.

#### 5.1.1 Os problemas de agrupamento perceptivo

Uma breve crítica ao método de Guy, realizada por Thornber & Williams [THO 96], sugere que sua abordagem não pode modelar a distribuição inicial das trajetórias possíveis de conexão por definí-las de forma determinista. Segundo Williams & Hanson [WIL 96], Guy utiliza somente aspectos limitados do problema de conexão ilusória, como a forma dos contornos. Tanto esses quanto vários outros trabalhos tentam caracterizar a distribuição das possíveis trajetórias de forma estocástica ao invés de utilizar campos fixos [WIL 99].

Outras abordagens ao problema [GRO 87, HEI 93, LEO 97] sugerem que tais contornos não podem ser decididos apenas com trajetórias de conexão. Em contrapartida, sua proposição de não realizar decisões locais, ao contrário de vários trabalhos [AHU 89, MOH 89], se mostrou pertinente na busca da solução.

Obviamente, a contribuição de Guy no campo de agrupamento perceptivo está legitimada. Utilizando dados sintéticos, ele provê resultados favoráveis quanto ao problema de detecção de contornos ilusórios e, principalmente, quanto ao problema de fechamento de contornos. Sua abordagem constitui um novo paradigma metodológico para essa classe de problemas e, desse modo, uma importante contribuição científica.

Isso não quer dizer que o método seja viável em problemas reais de agrupamento.

É importante salientar que as aplicações acima carecem de uma adaptação especial do método proposto para a reconstrução. Campos de influência especiais e um processo intermediário para encontrar pontos finais em segmentos são necessários para a detecção de contornos ilusórios. Como consequência, o método final é específico e não robusto. Absolutamente o contrário do reivindicado por Guy.

O método de reconstrução também deve ser adaptado ao problema de fechamento de contornos. A presença de ruído estruturado nas imagens, i.e., pequenos segmentos, podem perturbar as conexões mais relevantes. Durante a extração de máximos locais, não se pode determinar quais contornos são válidos. Como os campos de influência têm extensão fixa, as regiões de baixa densidade de pontos podem não ter contornos extraídos, enquanto as de alta podem gerar bordas aberrantes. O método é, portanto, inviável para imagens com contornos complexos.

#### 5.1.1.1 Uma visada epistemológica

Para explicar as considerações feitas acima deve-se questionar de forma mais aprofundada:

- o método e as noções matemáticas empregadas por Guy são capazes de expressar princípios de percepção por ele argumentados?
- definir e aplicar a continuidade circular por meio de campos vetoriais pode imitar a percepção pré-atenciosa?

Observe que não se discute **leis** da percepção. Muito avanço foi feito no sentido de se evidenciar o seu processo natural, mas não se tem tal nível de esclarecimento.

Baseando-se na teoria das modalidades cósmicas de Dooyeweerd [DOO 58, MAR 99], o fenômeno de percepção visual é, no mínimo, sujeito na modalidade biótica que é regida por leis próprias, possui relações próprias e características que lhe são irredutíveis a qualquer outra modalidade. Contudo, tal fenômeno depende das modalidades precedentes: física, cinemática, espacial e numérica.

Ora, as soluções de Guy são regidas pela modalidade espacial e, por consequência, numérica. Segundo Martins Jr. [MAR 99], *“...a matemática por se apresentar na base dos fenômenos da existência é portanto universal e serve para descrever qualquer coisa. Não goza, todavia, da propriedade de esgotar a possibilidade de descrição de algum fenômeno de qualquer modalidade que seja...”*. Portanto, no melhor dos casos poder-se-ia responder as questões acima com: sim, mas não só.

Conclui-se que o método de Guy, ao invés de realizar “organização perceptiva”, realiza “organização espacial”. O instrumento matemático somente **representa** os princípios de agrupamento perceptivo. Isso explica sua aplicabilidade limitada em problemas de percepção e a necessidade de adaptações para esse fim.

#### 5.1.2 Reconstrução de estruturas

O método de Guy realiza uma reconstrução de curvas em 2D baseado em princípios de agrupamento perceptivo. Isto é o resultado de sua tentativa de “prover um método intermediário entre algoritmos de baixo e alto nível em processamento de imagens”. O



método só é reconhecido como tal por Medioni *et al.* [MED 00] que ainda o relaciona aos problemas de percepção.

Pode-se considerar que a extensão do método para reconstruir superfícies em 3D é **circunstancial**. Ou seja, não é inerente ao problema original, mas às circunstâncias geradas pela solução dada. O método de reconstrução em 2D foi estendido para 3D porque seus fundamentos são compatíveis com o problema de reconstrução de superfícies.

Todavia, Guy argumenta que seu método de reconstrução em 3D busca emular a inferência de formas realizada pela visão humana. Isso pode ser especulação, nem mesmo plausível, sob a perspectiva da área de agrupamento perceptivo. A partir de uma referência epistemológica, é um exagero pensar que o método proposto codifica funções de um processo visual complexo.

Isso demonstra que o trabalho convergiu para o problema de reconstrução mas suas idéias permaneceram estacionadas nos fundamentos de percepção. Isso induz uma compreensão de acordo com a perspectiva dessa área.

Focalizando o problema de reconstrução de superfícies, coloca-se a seguinte questão: os fundamentos de percepção podem fornecer parâmetros, como a forma do campo ou a metodologia de acumulação, que sejam ótimos para se reconstruir superfícies? Observe que a problemática envolvida no método de reconstrução proposto não explica fundamentos de percepção e tampouco pode ser explicada por esses.

*Acredita-se que a influência de temas de visão computacional levou rapidamente aos excelentes resultados obtidos em reconstrução, mas discussões mais profundas sobre as possibilidades e limites de suas propostas seriam extremamente pertinentes. Várias questões topológicas, geométricas e de representação restam abertas.* ■

### 5.1.3 O método de reconstrução

Guy não apresenta as limitações de seu método nem as condições necessárias para uma boa reconstrução. Entretanto, ele destaca vários de seus aspectos na sua avaliação geral:

- **não iterativo:** diz respeito à acumulação dos campos para se obter os mapas de saliência. Isso é uma vantagem já que vários métodos dependem de convergência;
- **livre de parâmetros:** essa afirmação simplesmente é falsa. É óbvio que a extensão dos campos de influência, no momento da acumulação, é crítica para o processo. Isso sem contar seus próprios parâmetros de construção (Eq. 3.2). Além disso, os algoritmos de extração devem ter limiares para identificar as fronteiras das estruturas (Seções 3.3.1.2 e 3.3.2.2). As dimensões da grade de matrizes influencia fortemente o resultado. É preciso fornecer também o número de estruturas esperado;
- **método unificado:** “unificado” quer dizer que os tipos de entrada são tratados em conjunto e sem casos especiais. Da mesma forma, a fase de acumulação infere todas as estruturas ao mesmo tempo. Na realidade, as curvas obtidas no processo correspondem geralmente a interseções de superfícies;
- **operador global:** ligado ao fato de que decisões locais não são feitas antes da fase de extração. Os campos de influência propagam informações de forma global embora tenham extensão finita;

- **baixa sensibilidade a ruído:** está relacionada tanto com o tipo de representação local quanto com o processo como um todo. As matrizes de covariância usadas podem identificar as orientações preferenciais mesmo se uma vizinhança é perturbada por ruído. Obviamente, os campos de influência têm um importante papel nesse processo de organização espacial;
- **sem restrição topológica:** essa característica é principalmente evocada para o método em 3D. A maioria dos métodos de reconstrução de superfícies impõem restrições na topologia dos dados de entrada. O método de Guy é mais flexível. Todavia, ele não pode reconstruir interseções de superfícies como triângulos. Nesse caso tem-se curvas com resultado.

O método de reconstrução de Guy pode ser classificado como um método de superfície de nível (Seção 2.2). Ao contrário da maioria dos métodos dessa categoria, o campo escalar definido pela Equação 3.7 não é uma estimativa da distância à superfície. O algoritmo de extração de superfície de Hoppe *et al.* [HOP 92] pára ao encontrar um voxel com distância maior que  $\tau^{-1} + \delta$ . Nesse caso, uma estimativa da densidade  $\tau$  e do indicador de erro  $\delta$  devem ser informados (Seção 1.2). Essa possibilidade não existe no algoritmo de Guy que, portanto, não pode determinar corretamente as fronteiras de um objeto. O algoritmo de extração pára quando a medida de saliência é menor que um limiar pré-determinado, o que não define necessariamente uma fronteira. Pode haver buracos na superfície final se o valor do limiar for muito restritivo ou, caso contrário, haver superfícies aberrantes.

Mesmo sem presença de ruído, algumas superfícies de valor zero no campo escalar podem não corresponder ao objeto a ser reconstruído. Certas situações favorecem o surgimento e a extração desse tipo de superfície, promovendo reconstruções incorretas:

- extensão  $h$  dos campos de influência não compatível com a densidade dos dados de entrada: campos largos ( $h \gg \tau^{-1} + \delta$ ) podem promover uma comunicação entre pontos que não são vizinhos (*crosstalk*) e gerar distorções, enquanto campos reduzidos ( $h \ll \tau^{-1} + \delta$ ) podem não ser suficientes para definir bem a superfície;
- forte presença de ruído;
- topologias complexas: superfícies que são paralelas ou possuem interseções complexas;
- densidade variável: é difícil determinar uma extensão adequada para os campos de influência quando os dados esparsos não possuem densidade constante (Seção 1.2);
- grade com resolução insuficiente para separar os dados de entrada.

Ao contrário do que é sugerido, a eficácia do método depende da topologia do objeto e da amostragem dos dados esparsos. Interseções de superfícies geram buracos, e objetos com fronteiras não podem ser corretamente reconstruídos. O tamanho dos campos de influência é fixo, o que pode inviabilizar a reconstrução de dados esparsos com densidade de amostragem variável.

### 5.1.3.1 Interpretação das estruturas resultantes

O método de Guy em 3D reconstrói somente superfícies. O mapa de saliência de curvas representa a medida de complexidade de uma localidade quanto ao número de

planos que passam por ela. Em outras palavras, não se pode decidir a normal nessas localidades. Da mesma forma, localidades com forte resposta no mapa de saliência de junções não possuem nem normal nem tangente predominante. Essa relação de complexidade é demonstrada por Westin [WES 94].

Guy diz que essa é uma vantagem do método porque permite detectar interseções entre superfícies. Sem dúvida essas são informações importantes sobre a topologia de entrada. Tang & Medioni [TAN 98b] usam esses três mapas em conjunto para refinar a reconstrução.

É importante salientar que os mapas de curva e junção podem ser interpretados negativamente. Em reconstrução, eles representam a impossibilidade de se obter estruturas em algumas regiões e, portanto, são um limite do método. De fato, essa característica restringe a topologia de entrada podendo reconstruir totalmente somente objetos que não se interceptam.

Quando somente pontos-tangente são dados, as superfícies entre eles são produzidas mas as curvas que passam por eles não são reconstruídas. O conceito de “método unificado” corresponde somente ao tratamento de vários tipos de entrada. Conclui-se que o método de Guy não extrai curvas em função do alinhamento curvilíneo dos diversos elementos de entrada. As curvas reconstruídas correspondem a interseções de superfícies.

### 5.1.3.2 A transformada de Hough

A transformada de Hough pode detectar agrupamentos colineares em uma imagem de pontos com presença de ruído [HOU 62, DUD 72]. Isto é feito pela extração de picos em um arranjo de acumuladores que mapeia o espaço paramétrico de retas  $(\theta, d)$ . Cada escalar com coordenadas  $(\theta, d)$  nesse arranjo conta o número de alinhamentos entre pontos que forma uma reta com esses parâmetros. Os picos no espaço paramétrico definem conjuntos de retas, dos quais segmentos devem ser extraídos através de um processamento posterior. Esse esquema pode ser estendido a formas mais complexas pela modificação do espaço paramétrico [BAL 81].

Em contraste, o esquema de acumulação de Guy em 2D pode detectar formas definidas por suas possíveis continuações, ao invés de suas formas analíticas exatas (retas, círculos, etc.).

Guy afirma que seu esquema pode ser mudado para implementar a transformada de Hough. Basta utilizar um campo que codifica uma linha reta sem atenuação de força para pontos-tangente (em 2D). Obviamente, essa afirmação é falsa. É suficiente notar que a transformada de Hough é um processo totalmente global, já que ignora distâncias entre pontos. A eficácia de tal implementação depende da orientação de todos os elementos de entrada, o que não é o caso para a transformada de Hough. Além disso, segmentos colineares podem não ser agrupados em uma mesma reta devido à limitação da reconstrução em junções.

Para implementar a versão que detecta círculos, Guy propõe a utilização de um campo vetorial com continuidade circular no qual todos os vetores são unitários, i.e., força constante igual a 1. Isso é falso pelos mesmos argumentos da versão para retas. Infelizmente Guy não implementou essa insustentável versão. Caso contrário, não a teria proposto.

## 5.2 Discussão sobre o trabalho de Lee

O método de Lee é a continuidade do método de Guy. A interpretação de tensores simétricos semi-definitos de Westin [WES 94] constitui a base das modificações propostas. Lee argumenta que Guy utiliza vetores para representar orientações locais. Isso é verdade somente na composição dos campos de influência.

Porém, é falsa a afirmação feita por Lee [LEE 99] de que se introduz uma nova representação local no esquema de Guy. Observe que o mapeamento de Knutsson (Eq. 4.1) está embutido no operador de convolução (Eq. 3.3). Note também que a decomposição dos mapas de saliência é idêntica à interpretação de Westin. Ou seja, Guy interpreta o resultado da acumulação da mesma forma que Westin. Entretanto, ele não utiliza a informação dessa decomposição **durante** a acumulação.

Diferentemente, todo o método de Lee é consistente com a representação tensorial:

- os campos de influência são compostos por tensores: eles passam a corresponder às informações representadas pelos componentes tensoriais, embora sejam construídos pelas mesmas proposições de Guy (Seção 4.2.2);
- acumulação guiada por componentes tensoriais: a acumulação consiste em decompor tensores que representam a entrada e aplicar os campos em cada um de seus componentes;
- inferência de tensores de orientação: utilizando todos os tipos de entrada, define uma acumulação esparsa para inferir tensores de orientação iniciais.

Outra modificação importante é a função de força utilizada na construção do campo fundamental (Eq. 4.5). Essa função, que foi definida empiricamente, aumenta a eficácia da reconstrução, sendo adequada para o processo de acumulação de Lee. Todas as modificações acima proporcionam resultados qualitativos bem melhores que os do método de Guy.

Lee avança no sentido de se fazer um método unificado de reconstrução. Ao contrário do de Guy, seu campo para pontos-tangente promove a reconstrução de pontos estruturados em curvas. Esse aspecto é limitado porque o método tem superfícies como estrutura principal, i.e., normais são codificadas no principal autovetor. Com isso, interseções de superfícies geram curvas. A vantagem de se adequar o método a estruturas diferentes chega a ser discutida [LEE 99].

As modificações de Lee estão no campo metodológico. Colocar o método matemático em questão é um ponto bastante positivo. Todavia, Lee não avança a discussão a respeito e proporciona somente um aperfeiçoamento técnico. Nenhuma discussão sobre as limitações do método nem estudos comparativos são apresentados. De um modo geral, as mesmas limitações do método de Guy (Seção 5.1.3) são válidas para o método de Lee.

## 5.3 Fundamentação crítica

A fundamentação crítica que se propõe é a transição entre os trabalhos fundamentais e esta tese. O objetivo aqui é anunciar a direção de soluções através de observações críticas. O desenvolvimento subsequente é o encaminhamento realizado sobre essas observações.

### 5.3.1 O ponto de vista crítico

Por trás dos reclames no campo de agrupamento perceptivo, o produto de Guy e Lee são métodos matemáticos para reconstrução espacial. Propõe-se um ponto de vista crítico que focaliza as noções matemáticas utilizadas e seu papel nos métodos de reconstrução. O argumento para essa visada é simples: essas noções são elementares e independentes das idéias de agrupamento perceptivo.

O **processo elementar** dos métodos é a inferência da organização espacial de dados esparsos (orientações e medidas de pertinência) conduzida por campos de orientação e viabilizada por matrizes simétricas positivas (matriz de covariância ou tensor de segunda ordem).

Coloca-se em questão a capacidade de organização espacial do processo elementar, tal como ele foi proposto, tendo a reconstrução de estruturas como aplicação.

### 5.3.2 Sobre o tensor de orientação de Westin

Westin [WES 94] define um tensor simétrico de orientação para realizar agrupamento que pode ser decomposto em uma soma ponderada de operadores de projeção:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T ,$$

onde  $\lambda_i$  é um autovalor e  $\mathbf{e}_i$  o autovetor correspondente. Se os autovalores  $\lambda_i$  são distintos, a decomposição de  $\mathbf{T}$  é única e os operadores de projeção são os díados  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T$ . Se dois ou mais autovalores são iguais, há uma opção na definição dos autovetores. Entretanto, o sub-espaço definido por eles é distinto. Por exemplo, se os autovetores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  compartilham o mesmo autovalor, eles definem o seguinte operador de projeção em seu sub-espaço

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T .$$

Assim, a decomposição do tensor nesses operadores provê um conjunto único de coeficientes. Westin propõe essa decomposição em operadores que possuem diferentes significados geométricos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{T}_2 &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{T}_i &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \cdots + \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T , \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde o primeiro operador de projeção corresponde a um sub-espaço unidimensional, o segundo a um sub-espaço bidimensional e assim por diante. O tensor de orientação nessa nova base é dado por

$$\mathbf{T} = \lambda_n \mathbf{T}_n + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \mathbf{T}_i . \quad (5.2)$$

Com  $n = 3$ , obtém-se o tensor de saliência de Lee (Eq. 4.4). Nesse caso o tensor  $\mathbf{T}$  pode ser expresso por

$$\mathbf{T} = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{T}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3) \mathbf{T}_2 + \lambda_3 \mathbf{T}_3 ,$$

sendo que os coeficientes  $(\lambda_1 - \lambda_2)$ ,  $(\lambda_2 - \lambda_3)$  e  $\lambda_3$  podem ser vistos como coordenadas na base  $\mathbf{T}_i$  (Eq. 5.1). No trabalho de Westin, o posto de um tensor de orientação reflete a **complexidade da vizinhança**. Em 3D, ele interpreta três casos particulares de distribuição de autovalores  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ :

- caso planar, tensor de posto 1 com  $\lambda_1 \gg \lambda_2 \simeq \lambda_3$ :  $\mathbf{T} \simeq \lambda_1 \mathbf{T}_1 = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T$  corresponde a uma vizinhança que é aproximadamente planar. A orientação do vetor normal do plano é dado por  $\mathbf{e}_1$ ;
- caso linear, tensor de posto 2 com  $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \gg \lambda_3$ :  $\mathbf{T} \simeq \lambda_1 \mathbf{T}_2 = \lambda_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T)$  corresponde a uma vizinhança que é aproximadamente linear. A orientação da reta é dada pelo autovetor  $\mathbf{e}_3$ ;
- caso isotrópico, tensor de posto 3 com  $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq \lambda_3$ :  $\mathbf{T} \simeq \lambda_1 \mathbf{T}_3 = \lambda_1 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T)$  corresponde a uma vizinhança isotrópica, significando que há energia na vizinhança mas nenhuma orientação dominante.

### 5.3.2.1 Discussão sobre a interpretação do tensor de orientação

Os operadores de projeção  $\mathbf{T}_i$  são distintos e formam uma base cujas coordenadas são os coeficientes da Equação 5.2. Isso formaliza a decomposição empiricamente proposta por Guy. A compreensão dos diversos componentes é importante para a sua aplicação.

Observando o elipsóide de um tensor de orientação  $\mathbf{T}$  (Fig. 4.2), o eixo  $\lambda_1 \mathbf{e}_1$  corresponde a direção principal (orientação principal do tensor). O eixo  $\lambda_2 \mathbf{e}_2$  indica o grau de incerteza sobre a direção principal no plano  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  (cuja normal é  $\mathbf{e}_3$ ). Em uma soma, esse eixo representa o grau de liberdade na escolha da direção principal nesse plano. Por sua vez, o eixo  $\lambda_3 \mathbf{e}_3$  indica a incerteza na definição do plano  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ . Em uma soma, representa o grau de liberdade na escolha desse plano e, conseqüentemente, da direção principal.

Dados os tensores  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  que representam orientações em  $\mathbb{R}^3$ , pode-se interpretar a soma  $\mathbf{T} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  da seguinte forma:

- $(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T$  representa o grau de colinearidade das direções principais de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{e}_1$  indica a melhor reta entre as orientações de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ;
- $(\lambda_2 - \lambda_3) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T)$  representa a coplanaridade das direções principais de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  é o melhor plano entre as orientações de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ . Indica o primeiro nível de incerteza (complexidade planar) na definição da direção principal da soma;
- $\lambda_3 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T)$  representa a isotropia das direções principais de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ : indica o segundo nível de incerteza (complexidade esférica) na definição da direção principal da soma.

O vetor  $\mathbf{T}_1 \mathbf{v}$  é a projeção de um vetor arbitrário  $\mathbf{v}$  em  $\mathbf{e}_1$ , enquanto  $\mathbf{T}_2 \mathbf{v}$  é a projeção de  $\mathbf{v}$  no plano  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ . Os coeficientes representam a pertinência de cada componente.

Os componentes de um tensor de orientação resultante de uma soma permitem várias interpretações:

- geométrica: os operadores de projeção  $\mathbf{T}_i$  indicam as melhores estruturas representadas pelos tensores acumulados em função de suas direções principais;
- certitude: os coeficientes são uma medida de pertinência da informação associada;

- complexidade: cada componente  $(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \mathbf{T}_i$  representa um nível de complexidade estrutural das direções principais dos tensores acumulados. O coeficiente do componente mais complexo também pode ser visto como uma **medida de incerteza** dos componentes mais simples.

É importante salientar a importância da “direção principal” representada por  $\lambda_1 \mathbf{e}_1$ . Toda informação obtida na adição de tensores está relacionada a ela. Em uma aplicação arbitrária, é melhor que o principal atributo estrutural esteja codificado no eixo  $\lambda_1 \mathbf{e}_1$  para que seus vários níveis de complexidade possam ser inferidos.

Assume-se a decomposição proposta por Westin como fundamento deste trabalho. Por isso, denomina-se “tensor” as matrizes simétricas positivas semi-definitas usadas na representação de orientações locais.

### 5.3.2.2 Nota sobre autovalores de somas de matrizes reais e simétricas

Em 1912, o matemático Hermann Weyl colocou o seguinte problema [KNU 01]: dados os autovalores de duas matrizes auto-adjuntas (reais e simétricas)  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  de dimensões  $n \times n$ , como se pode determinar todos os conjuntos possíveis de autovalores da soma  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ? Veja que essa pergunta é importante para esta tese, pois sua resposta caracteriza o processo elementar da acumulação: somatório de matrizes simétricas positivas que codificam orientações locais.

Todos os autovalores de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  são reais. Quando  $n=1$ , o autovalor de  $\mathbf{C}$  é obviamente a soma dos autovalores de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  mas a resposta é mais complicada em dimensões maiores. Denota-se os autovalores(espectro) de  $\mathbf{A}$  por

$$\alpha : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n$$

e similarmente  $\beta$  e  $\gamma$  para os autovalores de  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ . Uma condição óbvia é que o traço de  $\mathbf{C}$  deve ser a soma dos traços de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , i.e.,

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i . \quad (5.3)$$

Há uma longa lista condições adicionais para os possíveis autovalores. O primeiro resultado significativo é dado por Weyl:

$$\gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i + \beta_j , \quad \text{para } i + j - 1 \leq n . \quad (5.4)$$

Para  $n = 2$ , pode-se verificar que as condições 5.3 e 5.4 que definem

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 &\leq \alpha_1 + \beta_1 , \quad \gamma_2 \leq \alpha_2 + \beta_1 \quad \text{e} \quad \gamma_2 \leq \alpha_1 + \beta_2 \end{aligned}$$

são ambas necessárias e suficientes para a existência de matrizes  $2 \times 2$  auto-adjuntas (ou reais e simétricas) com esses autovalores [FUL 00]. Outras condições são encontradas por Fan [FAN 49]:

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i + \sum_{i=1}^r \beta_i \quad \text{para todo } r < n .$$

Wielandt [WIE 55] encontra as seguintes inequações

$$\sum_{i \in I} \gamma_i \leq \sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{i=1}^r \beta_i$$

para todo subconjunto  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$  de cardinalidade  $r$ , para todo  $r < n$ . Obviamente, as mesmas inequações são válidas se  $\alpha$  e  $\beta$  são intercambiados. Horn [HOR 62] mostrou que as inequações listadas acima com a adição de

$$\gamma_2 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_3$$

são necessárias e suficientes para a existência de matrizes auto-adjuntas de ordem 3 com esses autovalores. Outros resultados foram dados no sentido de se descrever todos os autovalores possíveis da soma de matrizes auto-adjuntas de ordem  $n$ . Trabalhos recentes demonstram que este tema de pesquisa ainda é importante [KNU 01, FUL 00, KLY 98].

As inequações para matrizes de ordem 3 estão listadas na coluna esquerda da Tabela 5.1. Elas podem ser combinadas para se obter novas relações. As inequações da coluna direita foram obtidas pela diferença entre a Equação 5.3 e a respectiva inequação da coluna esquerda. Com essa lista pode-se descrever todos os autovalores possíveis da soma de duas matrizes reais e simétricas de ordem 3.

As matrizes utilizadas na inferência de orientação possuem autovalores positivos ou nulos. No contexto desta tese, as relações entre autovalores podem ser úteis na construção de campos formados por tensores de orientação. É importante notar a relevância dos autovalores  $\alpha_1$  e  $\beta_1$ , e da informação que eles codificam, na definição dos limites do resultado da soma.

**Tabela 5.1:** Relações de autovalores na soma de matrizes reais e simétricas de ordem 3.

1) $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$	
2) $\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1$	$\gamma_2 + \gamma_3 \geq \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_2 + \beta_3$
3) $\gamma_2 \leq \alpha_2 + \beta_1$	$\gamma_1 + \gamma_3 \geq \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_2 + \beta_3$
4) $\gamma_2 \leq \alpha_1 + \beta_2$	$\gamma_1 + \gamma_3 \geq \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_3$
5) $\gamma_3 \leq \alpha_2 + \beta_2$	$\gamma_1 + \gamma_2 \geq \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_3$
6) $\gamma_3 \leq \alpha_1 + \beta_3$	$\gamma_1 + \gamma_2 \geq \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2$
7) $\gamma_3 \leq \alpha_3 + \beta_1$	$\gamma_1 + \gamma_2 \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \beta_3$
8) $\gamma_1 + \gamma_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2$	$\gamma_3 \geq \alpha_3 + \beta_3$
9) $\gamma_1 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2$	$\gamma_2 \geq \alpha_2 + \beta_3$
10) $\gamma_1 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_3$	$\gamma_2 \geq \alpha_3 + \beta_2$
11) $\gamma_2 + \gamma_3 \leq \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2$	$\gamma_1 \geq \alpha_1 + \beta_3$
12) $\gamma_2 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \beta_3$	$\gamma_1 \geq \alpha_3 + \beta_1$
13) $\gamma_2 + \gamma_3 \leq \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_3$	$\gamma_1 \geq \alpha_2 + \beta_2$

### 5.3.2.3 Discussão sobre o tensor de orientação

Os métodos de Guy e Lee codificam normais como direção principal. Por isso a informação de curva resultante está relacionada com a indecisão na inferência de normais. Em geral, obtém-se interseções de superfícies como resultado.



O método de Lee é capaz de reconstruir curvas formadas pelos dados de entrada porque tem duas diferenças básicas em relação ao método de Guy. Primeiramente, seu campo para disco é formado por tensores que codificam tanto a informação de normal quanto a de tangente (Eq. 4.9). Em segundo lugar, esse campo é utilizado para propagar a informação de tangente obtida após a acumulação esparsa. Isso é feito juntamente com a propagação da informação de normal (Fig. 4.1).

Essa abordagem de Lee tem a vantagem de viabilizar um método unificado de reconstrução e é derivada da decomposição proposta por Westin. Portanto, Lee classifica a informação de tangente inferida nos dados esparsos como importante na reconstrução de superfícies. Ou seja, é um nível a mais de informação a ser propagado.

Todavia, a informação de tangente pode ser interpretada como incerteza na inferência de normais. Ela reflete uma estruturação linear da vizinhança que, inclusive, pode estar associada a ruído. Obviamente, a propagação dessa informação pode perturbar a reconstrução de superfícies. O campo para disco não codifica conexões suaves de superfície e pode, mesmo se a tangente não for causada por ruído, distorcer a ação do campo para normais.

O esquema de Lee pode ser vantajoso nas situações em que a inferência de normais fica prejudicada. Isso ocorre, por exemplo, em cantos e interseções. Em geral, a própria informação de normal é suficiente para reconstruir essas regiões.

### 5.3.3 Morfologia dos campos de influência

Os campos de influência definem trajetórias preferenciais de conexão. Sua função é induzir orientações de acordo com suas propriedades espaciais. O campo mais importante nos métodos de Guy e Lee é aquele destinado a propagar a informação de normal. É ele que promove conexões de superfícies.

No momento da acumulação do método de Guy (Eq. 3.3), a contribuição de cada elemento do campo para ponto-normal é definido pela matriz

$$\mathbf{M} = s\mathbf{v}\mathbf{v}^T,$$

onde  $\mathbf{v}$  é o vetor unitário dado pela continuidade circular e  $s$  é sua força. O escalar  $s$  determina o quanto  $\mathbf{M}$  pode votar pela direção de  $\mathbf{v}$ . Ou seja, define a **capacidade de indução** de  $\mathbf{M}$ . Todo tensor  $\mathbf{T}$  do campo para bastão do método de Lee é definido da mesma forma que a matriz  $\mathbf{M}$ . Pelas Equações 4.6 e 4.7, os dois menores autovalores de  $\mathbf{T}$  são nulos.

Imagine dois campos sobrepostos como ilustrado na Figura 3.8. O mecanismo de acumulação a partir dos campos de influência é simples: localidades cujas orientações dadas pelos campos estão mais alinhadas, i.e., que definem a melhor conexão segundo as trajetórias dos dois campos, tendem a ser um máximo local de saliência e definir a superfície. Ora, a capacidade de indução de cada elemento dos campos é um fator importante nesse processo. Ela pode promover conexões locais que não são necessariamente as mais alinhadas. O campo gradiente da força indica essa tendência de desvio.

*Portanto, o campo de influência para normais dos dois métodos é composto por um **campo escalar**, ou de força,  $s(P)$  e um **campo vetorial**  $\mathbf{v}(P)$ . O que Guy e Lee*

*negligenciam é que o campo escalar  $s(P)$  também tem ação global na definição da forma preferencial de conexão através de seu campo gradiente  $\mathbf{w} = \nabla s$ .* ■

### 5.3.3.1 Análise e projeto de campos de influência

Um campo de influência deve estar associado a uma estrutura principal. É essa estrutura que irá definir a forma do campo vetorial e da distribuição de forças. Ela define também a codificação dessas informações em tensores.

As trajetórias formadas pelo campo vetorial devem favorecer conexões que definem a estrutura principal. Essa estrutura também determina as curvaturas, a região de atuação e a extensão do campo. No caso de superfícies, por exemplo, pode-se regular esses itens no campo para normal para obter diferentes conexões. O campo vetorial é a principal característica morfológica do campo de influência.

O campo de força associa um peso a cada tensor em função de sua localização. O seu campo gradiente favorece conexões preferenciais cuja forma pode ser diferente da do campo vetorial. Nesse caso, a conexão será formada pela tensão entre os dois campos. O máximo de concordância é obtido se o campo gradiente define a mesma trajetória do campo vetorial. Essa escolha deve ser feita em função da estrutura que se quer inferir. Em geral, o cálculo da força é feito em função de uma medida de distância ou desvio.

A interpretação do tensor de orientação (Seção 5.3.2.3) é a chave para se compor um campo de influência. Os coeficientes e os operadores de direção dos tensores de orientação (Eq. 5.2) podem ser ajustados para se obter a influência desejada. A orientação da estrutura principal deve ser codificada em  $\mathbf{e}_1$  e sua capacidade de indução em  $(\lambda_1 - \lambda_2)$ . Se há incerteza na definição de  $\mathbf{e}_1$  sobre algum plano,  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  deve definir esse plano e  $(\lambda_2 - \lambda_3)$  o grau de incerteza. A incerteza na determinação desse plano deve ser codificada em  $\lambda_3$ .

Associações simples de componentes tensoriais são suficientes para codificar influências. Para representar direções principais em  $\mathbf{e}_1$ , basta fixar  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  e codificar a força no autovalor  $\lambda_1 > 0$ . Da mesma forma, basta fixar  $\lambda_3 = 0$  e codificar a força em  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$  para definir planos  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  que podem conter a direção principal.

Difícilmente há necessidade de se compor elementos com  $\lambda_3 > 0$ . Afinal, o objetivo dos campos é dar direções preferenciais e não gerar incertezas. Entretanto, isso pode ocorrer em campos gerados a partir de campos fundamentais. Esses campos fundamentais e o processo de construção permitem analisar a morfologia desses campos.

O campo para bastão de Lee, por exemplo, é a base de construção dos campos para disco e esfera (Eq. 4.8 e 4.9). Esses campos codificam exatamente o nível de indecisão desejada para tangentes e pontos. Seus componentes tensoriais refletem todos os níveis de incerteza na definição de normais e, em geral, possuem  $\lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0$ .

A morfologia de um campo de força depende da medida de capacidade total de indução de seus tensores. Essa medida de força total pode ser dada pela **norma de operador**

$$|\mathbf{T}|_O = \lambda_1 ,$$

que representa o máximo de amplificação que um operador  $\mathbf{T}$  pode realizar em um vetor [WES 94]. Essa norma pode falhar se as variações no campo ocorrerem principalmente em  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ . Outra possibilidade é medir a quantidade de energia do tensor pela sua norma

de Frobenius:

$$|\mathbf{T}|_F = \sum_n \lambda_n^2 .$$

Em geral, campos de influência são formados por tensores que possuem  $\lambda_1 \gg \lambda_2 \simeq \lambda_3$  ou  $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \gg \lambda_3$ . Com isso, a norma de operador é suficiente para calcular o gradiente da capacidade de indução de um campo de influência. Ela é efetivamente utilizada neste trabalho.

### 5.3.3.2 Derivando o campo de influência circular

Suponha que um campo de influência composto por tensores simétricos positivos

$$\mathbf{G}(P) = s(P)\mathbf{v}(P)\mathbf{v}(P)^T$$

deva codificar conexões circulares em  $\mathbb{R}^2$  através de suas normais. Usando as coordenadas polares  $(\theta, l)$  de  $P$ , o campo vetorial que representa a continuidade circular é dado por

$$\mathbf{v}(\theta) = [\text{sen}2\theta \quad -\text{cos}2\theta]^T . \quad (5.5)$$

O campo escalar  $s(P)$  deve ser definido de tal forma que a capacidade de indução de cada elemento  $\mathbf{G}(P)$  favoreça localmente a continuidade circular. Isto é, que a distribuição espacial de forças não altere a preferência pelas trajetórias determinadas no campo vetorial. Note que a força define a norma de operador dos tensores.

Um campo escalar  $s(P)$  codifica as mesmas trajetórias definidas pelo campo vetorial  $\mathbf{v}(P)$  se para todo ponto  $P$  se tem

$$\left| \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} \cdot \mathbf{v}(P) \right| = c , \quad (5.6)$$

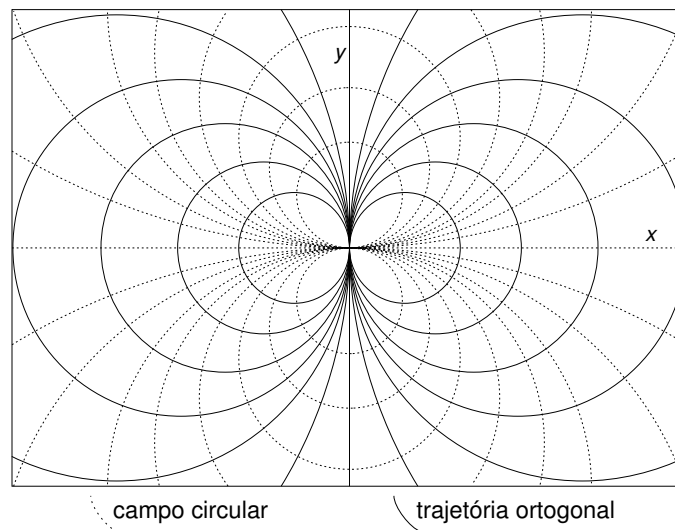
onde  $c$  é uma constante e  $\mathbf{w}$  é o vetor gradiente  $\nabla s$  em  $P$ . Ou seja, se o campo gradiente  $\nabla s$  define as mesmas trajetórias do campo vetorial  $\mathbf{v}$ .

Os vetores de um campo vetorial podem sofrer uma rotação mantendo um ângulo constante em relação às trajetórias. No campo da Equação 5.5, por exemplo, os vetores estão rotacionados de  $90^\circ$  para representar vetores normais aos círculos de conexão. Um campo gradiente que defina conexões circulares satisfaz a Equação 5.6 com  $c = 0$ .

O campo escalar  $s = \text{constante}$  é uma solução trivial para que as trajetórias induzidas sejam as do campo vetorial. Obviamente, tal campo não serve para os métodos de reconstrução porque a variação de força é um fator importante na determinação das conexões.

O vetor gradiente  $\nabla s$  ao ponto  $A$  é ortogonal em  $A$  à superfície de equação  $s(M) = s(A)$ . As superfícies de equação  $s(M) = \text{constante}$  são chamadas **superfícies de nível** ou **superfícies equipotenciais** do campo  $\mathbf{w} = \nabla s$ . Em todo ponto regular  $P$  do campo  $\nabla s$  passa somente uma superfície equipotencial. As superfícies equipotenciais são as **trajetórias ortogonais** das linhas de força (que definem conexões) e vice-versa [HOC 93].

Uma das formas de se derivar o campo escalar que satisfaça a Equação 5.6 é defini-lo em termos de trajetórias ortogonais aos círculos de conexão (Fig. 5.1). A continuidade circular é definida pela família de círculos com centro no eixo  $y$  e que passam pela origem.



**Figura 5.1:** Trajetória ortogonal do campo circular.

A sua trajetória ortogonal é a família de círculos com centro no eixo  $x$  e que igualmente passam pela origem.

O campo escalar é obtido ao se atribuir uma força a cada curva da família ortogonal em função de sua distância à origem. Para cada ponto do espaço, calcula-se a distância da curva ortogonal que passa por ele. No caso da família de círculos, essa distância pode ser dada pela interseção do círculo com o eixo  $x$

$$d(\theta, l) = \frac{l}{\cos \theta} ,$$

que representa também o diâmetro do círculo ortogonal. Note que o campo escalar  $d(P)$  já satisfaz a Equação 5.6, mas é crescente em função da distância à origem. Ou seja, quanto mais distante é um ponto, maior é sua capacidade de indução. Para inverter essa situação, pode-se utilizar a mesma atenuação exponencial de Guy e Lee

$$s(\theta, l) = e^{-\frac{d(\theta, l)^2}{\sigma^2}} = e^{-\frac{(l/\cos \theta)^2}{\sigma^2}} ,$$

definindo um campo escalar para o campo de influência  $\mathbf{G}(P)$  que satisfaz a Equação 5.6. Os vetores de maior variação de força desse campo, i.e.,  $\nabla s$ , são ortogonais à trajetória ortogonal e, portanto, definem a continuidade circular. Esse campo naturalmente codifica a preferência por pontos mais próximos da origem e mais alinhados com o eixo  $x$ .

### 5.3.3.3 Sobre os campos de influência de Guy e Lee

Guy e Lee derivam seus campos escalares de forma empírica e ajustam seus parâmetros experimentalmente (Eq. 3.2 e 4.5). Observe que esses campos não satisfazem a Equação 5.6. A consequência é que seus campos de influência não promovem conexões circulares tal como eles argumentam em princípios de agrupamento perceptivo.

O campo da Equação 3.2 é estranhamente associado por Guy a um suposto “caso indecível ou intencionalmente ambíguo, que mantém a propriedade de máxima indecisão

do campo de influência”. Ora, observando seu gradiente constata-se que ele não é nada ambíguo na definição de trajetórias preferenciais. O mesmo é válido para o campo escalar proposto por Lee.

Na verdade, esses campos têm a propriedade de deslocar a origem nos dois sentidos do eixo  $x$  e promover conexões diretas a esses deslocamentos. Isso desvia as conexões circulares dos campos vetoriais e gera uma resposta maior de  $(\lambda_2 - \lambda_3)$  e  $\lambda_3$ . A superfície resultante não passa necessariamente pelas regiões em que as normais estão mais alinhadas. Outra consequência é a realização de uma decisão local através desse deslocamento cujo tamanho pode ser regulado pelos parâmetros das Equações 3.2 e 4.5.

É importante salientar que esses campos são absolutamente legítimos por estarem adaptados aos métodos de Guy e Lee. Chama-se a atenção apenas para a natureza matemática dos campos de influência e para sua flexibilidade de representação que é, obviamente, independente de questões de percepção.

Conclui-se que os campos de influência para normais definem conexões em dois níveis distintos: pelos campos vetoriais e pelo gradiente dos campos escalares. A forma desses campos componentes pode ser ajustada de acordo com a aplicação.

### 5.3.4 Discussão geral sobre os métodos de Guy e Lee

As discussões acima mostram a flexibilidade das noções matemáticas utilizadas por Guy e Lee. Elas formam a base para o conjunto de ações que visa inferir organização espacial a partir de dados esparsos. Nesta seção, considera-se a consistência dessas ações nesse processo.

A primeira consideração é sobre a tentativa de se fazer um método unificado de reconstrução. Isso justifica a propagação da informação de tangente proposta por Lee apesar das desvantagens dessa agregação secundária (Seção 5.3.2.3).

Na verdade, tanto Guy quanto Lee tentam aproveitar todas as informações contidas nas matrizes após a acumulação. Isso é legítimo, pois essas informações estruturais sobre os dados esparsos são relevantes. O que se questiona é o enfoque dado: reconstruir curvas e superfícies ao mesmo tempo e sem casos especiais.

Pelas discussões acima, tanto o tensor de orientação quanto os campos de influência devem ser definidos de acordo com uma estrutura principal. O uso indevido da informação secundária pode perturbar a determinação dessa estrutura. Nos dois métodos, os tensores codificam principalmente normais e os campos são construídos para determinar superfícies. A informação de curva é de fato o primeiro nível de indecisão de normais. A reconstrução de curvas fica prejudicada se os dados estiverem estruturados como superfícies.

*Um tensor de orientação representa hierarquicamente um tipo de estrutura. Conclui-se que métodos dedicados a cada tipo de estrutura são mais pertinentes para reconstrução. Isso envolve uma representação tensorial específica, campos morfologicamente apropriados e um conjunto de ações dedicado.* ■

Para reconstruir curvas, por exemplo, tangentes devem ser codificadas como direção principal e os campos de influência devem induzir conexões lineares. Isso viabilizaria a reconstrução de curvas, sendo que superfícies seriam obtidas como indecisão de tangente. Lee introduz essa possibilidade [LEE 99] mas sem uma discussão aprofundada.

Questiona-se também a consistência da inferência inicial de orientações. Essa inferência provê a orientação e o fator de multiplicação de cada campo de influência para a acumulação (Eq. 4.10). É, portanto, um processo crucial para a reconstrução cuja importância não pode ser subestimada. Guy e Lee propõem apenas uma estimativa primária de orientações e saliências. Acredita-se que tal processo não é suficiente para avaliar a organização espacial dos dados esparsos. Um tratamento posterior pode reforçar as estimativas e aumentar a qualidade da reconstrução.

## 5.4 Síntese conclusiva

A epistemologia crítica completa o estudo epistemológico dos trabalhos de Guy e Lee e fundamenta os desenvolvimentos desta tese. A análise e crítica dos principais aspectos são feitas a partir do campo da matemática e da epistemologia. Argumenta-se que esses trabalhos não pertencem ao campo de agrupamento perceptivo.

Na discussão sobre a abordagem de Guy, questiona-se seus encaminhamentos a partir dos princípios de agrupamento perceptivo e a aplicabilidade da solução nos problemas desse campo. Consta-se que essa solução promove “organização espacial” de dados esparsos ao invés de “organização perceptiva”. Ou seja, o método realiza apenas reconstrução de estruturas. Discute-se também a avaliação geral do método feita por Guy e sua interpretação das informações contidas nos mapas de saliência.

Observa-se que Lee não introduziu uma nova representação local nem uma nova interpretação do resultado da acumulação. O mapeamento tensorial de Knutsson está embutido no operador de convolução de Guy. Todavia, seu método voltado para componentes tensoriais e baseado em novos campos de influência proporciona resultados superiores aos do método de Guy. Os avanços obtidos estão unicamente no campo metodológico. Em geral, o método de Lee tem as mesmas limitações do método de Guy.

A fundamentação crítica é uma transição entre os trabalhos fundamentais e esta tese. Discute-se com detalhes os instrumentos metodológicos das abordagens de Guy e Lee, questionando sua capacidade de avaliar a organização espacial de dados esparsos.

Primeiramente, o tensor de orientação de Westin é apresentado e sua interpretação é discutida. Conclui-se que as informações secundárias dos tensores indicam níveis de complexidade de vizinhança. Os mapas de saliência de curvas e junções devem ser interpretados como indecisão na obtenção de superfícies. Assim, a propagação da informação de tangente do método de Lee é desvantajosa para a reconstrução de superfícies.

Guy e Lee negligenciam a morfologia do campo de força e sua influência na formação de trajetórias. Observa-se que o gradiente desse campo também define conexões preferenciais. Assim, é necessário uma coerência entre o campo vetorial e o de força. No caso da continuidade circular, propõe-se um campo gradiente de força que também defina trajetórias circulares. Isso é feito em um contexto de análise e projeto de campos de influência. Conclui-se que os campos de força de Guy e Lee tendem a deslocar a trajetória circular do campo vetorial.

A inferência inicial de orientações proposta por Guy e Lee realiza apenas uma estimativa primária. Sendo um processo crucial para o método de reconstrução, um tratamento posterior deve ser realizado para reforçar a precisão das estimativas.

## Capítulo 6

# Desenvolvimento metodológico

A partir de proposições para melhor avaliar a organização de dados esparsos, apresenta-se neste capítulo um método dedicado a inferência de superfícies. Essas proposições são baseadas nos estudos epistemológicos e de fundamentação crítica realizados nesta tese.

### 6.1 Um método dedicado a superfícies

O objetivo metodológico da tese é inferir a organização espacial de dados esparsos com robustez e qualidade. As discussões até aqui realizadas fundamentam as proposições que se seguem para melhor inferir orientações a partir de dados esparsos. Isso é feito no contexto de reconstrução de superfícies, que é apenas uma das aplicações possíveis para essa inferência. Portanto, o método de reconstrução que se propõe é caracterizado por uma avaliação mais consistente da organização de dados esparsos.

As discussões realizadas na fundamentação crítica (Seção 5.3) formam as seguintes hipóteses:

- um método dedicado de reconstrução é mais pertinente que um método unificado: o tensor de orientação representa uma estrutura de maneira hierárquica, o que sugere campos de influência e método de acumulação apropriados;
- a inferência inicial de orientações é crucial para a reconstrução: as informações obtidas nessa fase conduzem o processo de acumulação;
- a morfologia de campos vetoriais e de campos de gradiente de força devem estar consistentes com as conexões desejadas, com a representação tensorial e com o processo de acumulação: o tipo de reconstrução esperada define a forma dos campos de influência que pode variar em todas as etapas do processo.

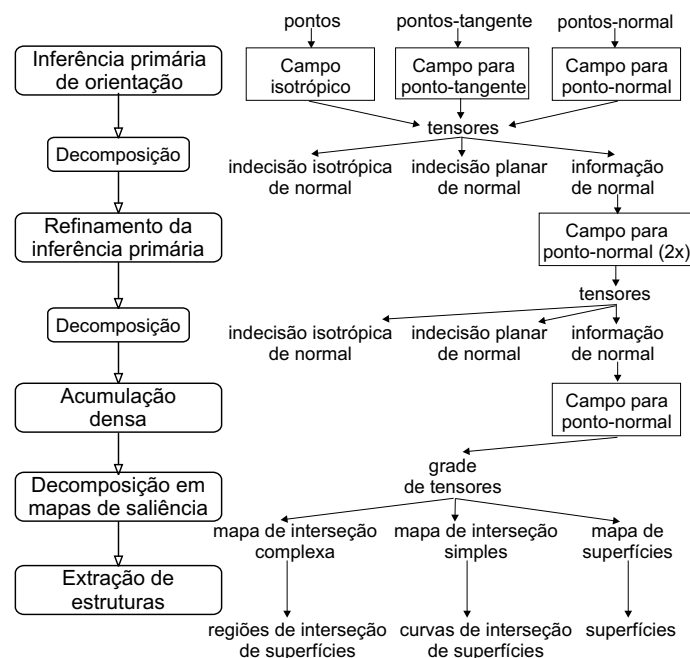
As propostas feitas neste capítulo estão fundamentadas nessas hipóteses e atuam no processo elementar de Guy e Lee: avaliação de organização espacial de dados esparsos. Todo esforço é feito para determinar orientações e suas medidas de pertinência que permitam uma reconstrução mais robusta com resultados mais suaves. Subentende-se que uma **superfície suave** possua pequenas variações locais de normal em uma determinada escala e, conseqüentemente, um aspecto visual de menor rugosidade. Robustez na reconstrução significa estar menos sujeito a ruído e a variações na densidade de amostragem dos dados (Seção 1.2).

Portanto, a prioridade é reconstruir superfícies suaves e contínuas com baixa sensibilidade a ruído. Para isso, propõe-se um **método dedicado** que busca ressaltar a organização espacial dos dados esparsos em termos de superfície. A ideia é priorizar a inferência e o uso da informação de normal.

### 6.1.1 Visão geral do método em proposição

O desenvolvimento metodológico é guiado pelas hipóteses acima e pela prioridade de se obter um método robusto e capaz de prover superfícies suaves. Os procedimentos e os instrumentos matemáticos propostos são adaptados unicamente à reconstrução de superfícies. A visão geral do método está ilustrada na Figura 6.1. É importante salientar que esse método é baseado no paradigma de reconstrução de Guy.

Guy e Lee classificam as informações de incerteza de normais como curvas e junções. No método que se propõe, as informações secundárias do tensor de orientação são interpretadas como indecisão na inferência de normal (Seção 5.3.2.1). Essa precisão influencia a construção dos campos, os procedimentos de acumulação e a decomposição tensorial.



**Figura 6.1:** Visão geral do método em proposição, dedicado a reconstrução de superfícies.

O processo de reconstrução parte dos mesmos tipos de entrada do método de Guy: pontos, pontos-normal e pontos-tangente. A primeira fase consiste em inferir a orientação dos dados esparsos. Considera-se essa etapa como a mais importante do método. Isso porque as normais e as medidas de pertinência inferidas conduzem o processo de acumulação densa. Portanto, a reconstrução falha se a inferência inicial não for consistente.

Considera-se a inferência inicial de orientação proposta por Guy e Lee insuficiente. Trata-se de uma avaliação preliminar da organização dos dados esparsos. Nesse contexto, propõe-se utilizar o campo para ponto-normal para refinar essa avaliação. O refinamento consiste em propagar somente a informação de normal inicialmente obtida a todos os



pontos de entrada. Ou seja, procura-se reforçar a estruturação em termos de superfície, descartando as informações de indecisão. Essa proposição de refinamento promove uma avaliação de organização espacial mais consistente e constitui uma contribuição importante deste trabalho.

A acumulação densa consiste em propagar a informação de normal obtida na inferência inicial em um subespaço que envolve os dados de entrada. O resultado deste processo depende das normais inferidas e do campo para ponto-normal. Note que a informação de indecisão planar dos tensores é descartada para não perturbar a reconstrução de superfícies.

*As fases de inferência inicial de orientação e de acumulação densa estão diretamente ligadas ao problema fundamental desta tese, que é inferir a organização espacial de dados esparsos. ■*

Após a acumulação densa, a grade de tensores resultante é decomposta em mapas de saliência como definido por Guy (Seção 3.2.3.1). Entretanto, a interpretação do resultado é diferente: no melhor caso, a indecisão de normal indica interseções de superfícies. As estruturas são extraídas através dos algoritmos desenvolvidos por Guy.

A morfologia e a representação tensorial dos campos de influência são adaptadas para induzir somente normais. Os campos anisotrópicos não codificam nenhuma informação de indecisão nem conexões que não formam superfícies. O campo para ponto-tangente, por exemplo, é construído pela proposição de Guy, que é voltada para a inferência de normais.

Os campos para ponto-tangente e isotrópico são utilizados somente na inferência preliminar de orientação dos dados esparsos. Observe que este esquema é de certa forma um retorno às idéias de Guy.

O campo para ponto-normal viabiliza a reconstrução de superfícies durante a acumulação densa. Sua morfologia é, portanto, outro fator importante para a reconstrução. O campo proposto neste trabalho codifica trajetórias elípticas de conexão. A forma das elipses define a curvatura preferencial de reconstrução. Para se obter superfícies mais suaves, o campo vetorial e o campo gradiente de força definem a mesma trajetória. Essas proposições constituem outra contribuição desta tese.

### 6.1.2 Interpretação do tensor de orientação

O método é específico para reconstrução de superfícies. Logo, os tensores de orientação são utilizados para representar informação de normal (Seção 5.3.2.1). Por ser um método dedicado, os campos de influência e o processo de acumulação garantem que os tensores têm normais como direção principal. Em todas as etapas, eles podem ser interpretados da seguinte maneira:

- componente linear  $(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T$ : representa a direção principal. A normal é dada pelo vetor  $\mathbf{e}_1$  com pertinência  $(\lambda_1 - \lambda_2)$ ;
- componente planar  $(\lambda_2 - \lambda_3)(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T)$ : representa o primeiro nível de indecisão de normais (complexidade planar). A normal faz parte do plano  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  com pertinência  $(\lambda_2 - \lambda_3)$ ;
- componente isotrópico  $\lambda_3(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^T)$ : representa o segundo nível de

indecisão de normais (complexidade esférica). A normal não tem direção definida (isotrópica) com pertinência  $\lambda_3$ .

A representação é a mesma utilizada nos métodos de Guy e Lee. Todavia, há uma diferença conceitual na interpretação. As informações dos componentes tensoriais planares e isotrópicos são tidas como incerteza na definição de normais (Seção 5.3.2.1). Note que os componentes tensoriais são denominados pelo sub-espaço que contém a informação de normal. Mais uma vez, os campos de influência e o processo de acumulação favorecem essa interpretação porque não buscam inferir curvas.

No método de Lee, os campos e o processo de acumulação induzem a informação de tangente. Assim, a informação secundária dos tensores pode indicar a estruturação dos dados como curvas ou uma interseção de superfícies.

No método que se propõe, a informação secundária é interpretada simplesmente como indecisão planar de normais. Fortes respostas podem ocorrer em zonas de interseção de superfícies, sob presença de ruído e, em menor escala, devido à estruturação de curvas. De uma forma geral, essa informação não deve ser propagada.

### 6.1.3 Construção dos campos de influência

Os campos de influência que se propõe são específicos para inferência de normais. Adotou-se uma codificação tensorial que visa não propagar indecisão de normais:

- campos anisotrópicos: vetores normais são codificados em  $e_1$  e a capacidade de indução em  $\lambda_1$ . Atribui-se  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$  para que nenhuma medida de incerteza seja propagada. Isso também permite o controle do campo gradiente de força;
- campo isotrópico: o plano que se estima conter a normal é codificado em  $e_1 e_2$ . O autovetor  $e_3$  codifica a normal a esse plano e  $\lambda_1 = \lambda_2$  sua capacidade de indução. Atribui-se  $\lambda_3 = 0$  para não propagar incerteza isotrópica.

Por ser uma informação de incerteza, a indecisão planar de normais não deve ser propagada como proposto por Lee. Isso pode diminuir a robustez do método em presença de ruído. Além disso, perturbações na propagação da informação de normal podem causar uma menor qualidade de reconstrução. Portanto, o campo para ponto-normal é o único utilizado na acumulação densa.

Os campos para ponto-tangente e isotrópico são utilizados somente para inferir orientações iniciais. A influência desses campos é definida de acordo com as proposições de Guy. Entretanto, a construção que se propõe é diferente pois não depende de convoluções de um campo fundamental.

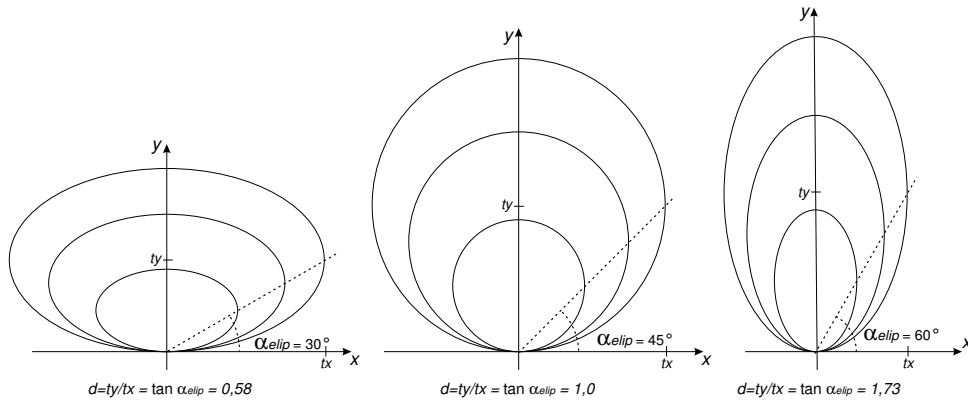
#### 6.1.3.1 Campo para ponto-normal

Somente a informação de normal é propagada na acumulação densa. Suas trajetórias de conexão definem a curvatura das superfícies reconstruídas. Por isso, o campo para ponto-normal é o mais importante do método. O objetivo de reconstruir superfícies suaves e com baixa sensibilidade a ruído definem as diretrizes básicas para sua construção:

- utilizar campo vetorial com conexões suaves, que permita ajustes de curvatura: o ajuste de curvatura pode ser útil na reconstrução de formas específicas como, por exemplo, planos;
- priorizar as conexões do campo vetorial: o objetivo é obter superfícies mais suaves e maior robustez, devido a uma melhor definição de máximos locais;
- evitar deslocamentos da origem nos campos vetorial e de força: isso torna o método menos sensível a mudanças na extensão do campo (Seção 5.3.3.3).

Sob essas diretrizes, optou-se por campos vetorial e de força cujas trajetórias preferenciais de conexão são idênticas e convergentes à origem.

Para se ajustar a curvatura das superfícies reconstruídas é necessário uma família de curvas cuja forma pode ser modificada. Por exemplo, pode-se utilizar curvas polinomiais ou exponenciais variando o grau, ou expoente, para se modificar trajetórias em um intervalo finito. Essas famílias de curva têm duas desvantagens. Primeiramente, não se pode obter a continuidade circular, que é um tipo de conexão importante. Em segundo lugar, não se pode definir normais paralelas ao eixo  $x$ , que podem ser úteis na reconstrução de cantos. Outra possibilidade é o uso de *splines*. A vantagem é uma maior flexibilidade na definição das trajetórias de conexão. Entretanto, essa flexibilidade torna a determinação de trajetórias ortogonais às *splines* mais complicada, dificultando a derivação de uma função de força que atenda às diretrizes.



**Figura 6.2:** Famílias de elipses de formas diferentes.

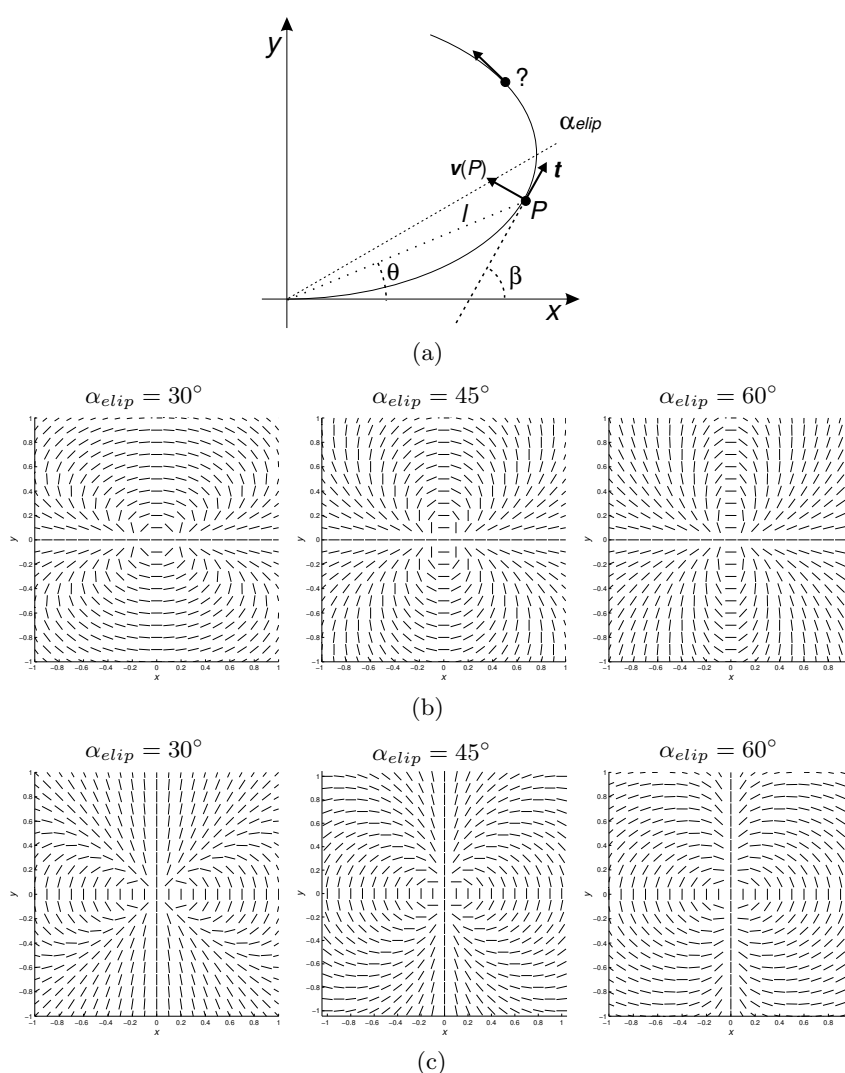
Dessa forma, propõe-se utilizar uma família de elipses com centro no eixo  $y$  e tangentes ao eixo  $x$  cuja equação é dada por

$$\frac{x^2}{t_x^2 k^2} + \frac{(-t_y + \frac{y}{k})^2}{t_y^2} = 1, \quad (6.1)$$

onde  $t_x$  e  $t_y$  são constantes e  $k$  define a elipse da família cujos eixos paralelos a  $x$  e a  $y$  têm tamanhos  $2kt_x$  e  $2kt_y$  respectivamente. A forma das elipses define a curvatura das trajetórias de conexão e pode ser facilmente controlada pela razão entre os tamanhos dos eixos

$$d = \frac{2kt_y}{2kt_x} = \frac{t_y}{t_x}, \quad (6.2)$$

que é a mesma para toda elipse de uma família. A Figura 6.2 ilustra famílias de elipses com diferentes valores de  $d$ . Note que a continuidade circular proposta por Guy é obtida com  $d = 1$ .



**Figura 6.3:** Campo vetorial elíptico. (a) Cálculo dos vetores (b) Vetores tangentes às elipses:  $t$ . (c) Vetores normais às elipses:  $v(P)$ .

Dado um ponto  $P \in \mathbb{R}^2$  com coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ , a inclinação da reta tangente à elipse (Eq. 6.1) cujos eixos satisfazem a Equação 6.2 e que passa por  $P$  é

$$\tan \beta = \frac{2d^2 \tan \theta}{d^2 - \tan^2 \theta}, \quad \cos \theta \neq 0 \quad \text{e} \quad d \neq |\tan \theta|, \quad (6.3)$$

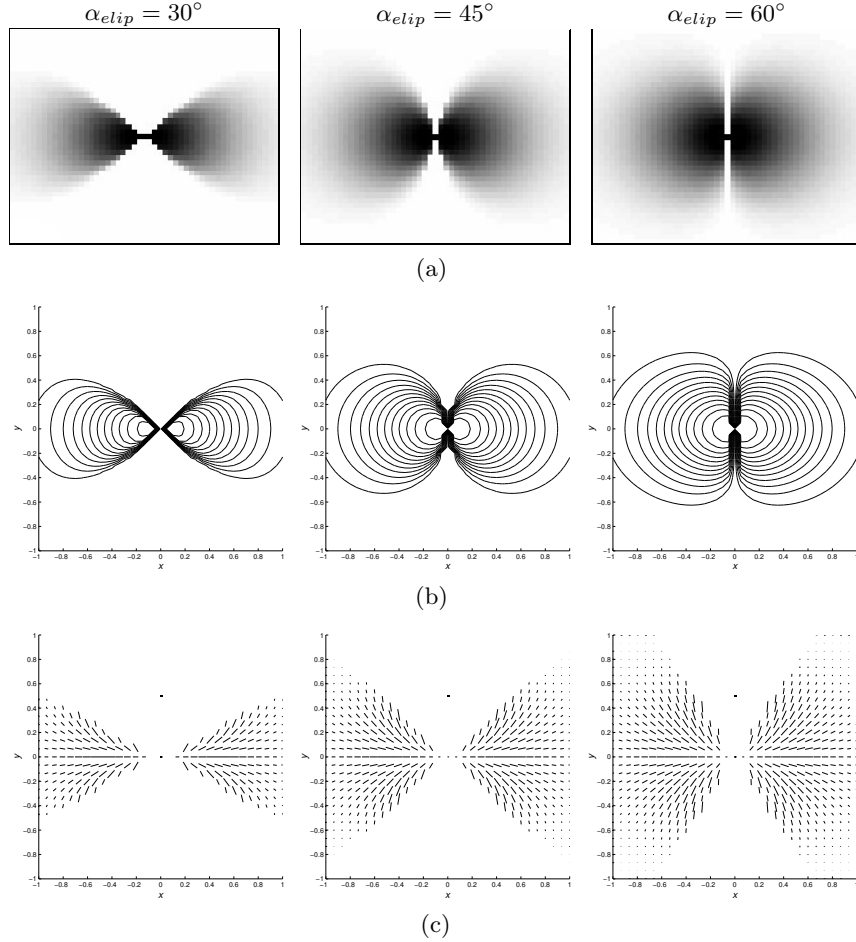
sendo  $\beta$  o ângulo entre essa reta e o eixo  $x$  (Fig. 6.2). Quando  $|\tan \theta| = d$ , a reta tangente é perpendicular ao eixo  $x$  ( $\beta = 90^\circ$ ), invalidando a Equação 6.3. Isso ocorre nos pontos extremos da elipse de seu eixo paralelo a  $x$ . Um ponto não pode ser conectado à origem por uma trajetória elíptica além desses extremos (Fig. 6.3a,b). Portanto, eles formam o ângulo máximo de conexão  $\alpha_{elip}$  (Fig. 6.2). Pode-se definir a família de elipses em função desse ângulo atribuindo

$$d = \tan \alpha_{elip}. \quad (6.4)$$

A Equação 6.3 foi obtida pela observação de que elipses são transformações afins de círculos. O vetor normal à elipse no ponto  $P$  é perpendicular à reta tangente e é dado por

$$v(P) = [\sin \beta \quad -\cos \beta]^T,$$

que efetivamente define o campo vetorial elíptico em  $\mathbb{R}^2$  (Fig. 6.3a,c). De acordo com as diretrizes acima, o campo gradiente de força deve definir a mesma trajetória elíptica desse campo vetorial.



**Figura 6.4:** Campo de força elíptico com  $\sigma = 1$ . (a) Distribuição de força de 0 (branco) a 1 (preto). (b) Superfícies equipotenciais. (c) Campo gradiente.

Para isso, as superfícies equipotenciais de força devem ser as trajetórias ortogonais à família de elipses (Seção 5.3.3.2). Ou seja, deve-se atribuir a mesma força aos pontos de uma mesma trajetória ortogonal.

Observa-se que a trajetória que passa por  $P$ , ortogonal às elipses da Equação 6.1, intercepta o eixo  $x$  em

$$s(\rho, \theta) = \rho \cos \theta \left( 1 + \left( 2 - \frac{1}{d^2} \right) \tan^2 \theta \right) \frac{d^2}{2d^2 - 1}, \quad (6.5)$$

que, obviamente, é o mesmo valor para todos os pontos dessa trajetória. Utilizando  $s$  como distância, o campo de força elíptico é definido por

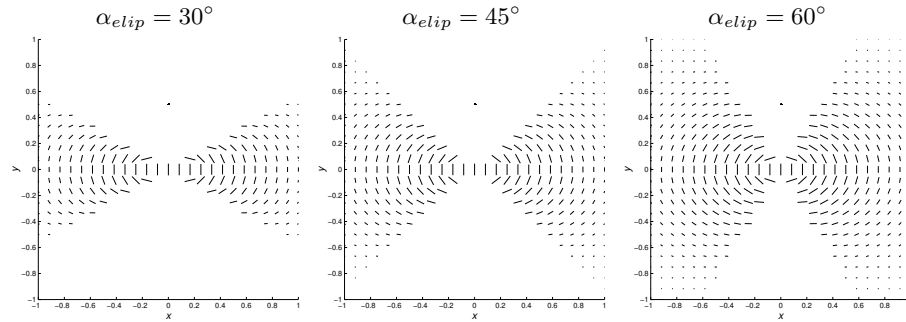
$$f(\rho, \theta) = e^{-\frac{s(\rho, \theta)^2}{\sigma^2}}, \quad (6.6)$$

onde  $\sigma$  controla a atenuação em função de  $s$  e a extensão do campo. A distribuição de força dessa função está ilustrada na Figura 6.4a e seu campo gradiente na Figura 6.4c. Observe as trajetórias ortogonais à família de elipses (Fig. 6.4b).

O campo de influência para ponto-normal em 2D que codifica trajetórias elípticas de conexão à origem é

$$\mathbf{T}(P) = f(P)\mathbf{v}(P)\mathbf{v}(P)^T, \quad (6.7)$$

onde  $\alpha_{elip}$  é o ângulo máximo de conexão (Eq. 6.4) que, conseqüentemente, define a forma das elipses e a curvatura de conexão. O campo de influência elíptico está ilustrado na Figura 6.5.



**Figura 6.5:** Campo de influência elíptico. O tamanho dos vetores indica sua força.

### 6.1.3.2 Campo para ponto-normal em 3D

O campo para ponto-normal em  $\mathbb{R}^2$  pode ser facilmente estendido para coordenadas esféricas. Isso porque as Equações 6.3 e 6.5 são baseadas em um desvio  $\theta$ , a partir do eixo  $x$ , que representa a estrutura principal. Em 3D, o ângulo de desvio de um ponto é calculado em relação à sua projeção em um plano. Dessa forma, essas equações podem ser diretamente aplicadas.

Dado um ponto-normal  $(P, \mathbf{n})$ , os campos vetorial e de força passam a definir elipsóides que tangenciam o plano com normal  $\mathbf{n}$  em  $P$ , e cujos centros estão sobre a reta que passa por  $P$  com direção  $\mathbf{n}$ . Como em 2D, a forma dos elipsóides é controlada pela razão  $d = constante$  entre o tamanho do eixo paralelo a  $\mathbf{n}$  e do eixo perpendicular a  $\mathbf{n}$ .

Considere um ponto-normal  $(P, \mathbf{k}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  e os vetores  $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$ , unitários, arbitrários e perpendiculares a  $\mathbf{k}$ . O vetor normal  $\mathbf{k}$  define o plano  $\mathbf{i}\mathbf{j}$  representado pelo ponto-normal. O ponto  $P$  e a base ortonormal  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  formam um sistema de coordenadas em  $\mathbb{R}^3$  (Fig. 6.6). As coordenadas esféricas  $(\rho, \phi, \theta)$  de um ponto qualquer  $Q \in \mathbb{R}^3$  são dadas pelas equações:

$$\rho = |PQ|, \quad \tan \phi = \frac{k}{\sqrt{i^2 + j^2}}, \quad \tan \theta = \frac{j}{i}, \quad (6.8)$$

onde  $i = \mathbf{i} \cdot PQ$ ,  $j = \mathbf{j} \cdot PQ$  e  $k = \mathbf{k} \cdot PQ$  são as coordenadas cartesianas de  $Q$  no sistema. Observe que  $\phi$  é o desvio do ponto  $Q$  ao plano  $\mathbf{i}\mathbf{j}$ . A Figura 6.6 ilustra as coordenadas esféricas de  $Q$ . Portanto, a Equação 6.3 pode ser usada para calcular o ângulo  $\beta$  entre o

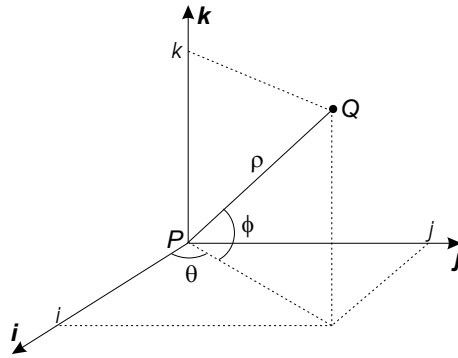
plano  $ij$  e o plano tangente ao elipsóide que passa por  $Q$ :

$$\tan \beta = \frac{2d^2 \tan \phi}{d^2 - \tan^2 \phi}, \quad \cos \phi \neq 0, \quad d = \tan \alpha_{elip} \quad \text{e} \quad d \neq |\tan \phi|, \quad (6.9)$$

onde  $\alpha_{elip}$  é o ângulo máximo de conexão. O campo vetorial em 3D para normais é definido por

$$\mathbf{v}_N((P, \mathbf{k}), Q) = (\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta) \cos \left( \beta + \frac{\pi}{2} \right) + \mathbf{k} \sin \left( \beta + \frac{\pi}{2} \right), \quad (6.10)$$

onde o acréscimo de  $\pi/2$  a  $\beta$  define vetores normais aos elipsóides.



**Figura 6.6:** As coordenadas esféricas de um ponto  $Q$  no sistema de coordenadas de um ponto-normal  $(P, \mathbf{k})$ .

Da mesma forma, a distância à origem da trajetória ortogonal que passa por  $Q$  pode ser dada por

$$s((P, \mathbf{k}), Q) = \rho \cos \phi \left( 1 + \left( 2 - \frac{1}{d^2} \right) \tan^2 \phi \right) \frac{d^2}{2d^2 - 1}, \quad (6.11)$$

o que resulta na equação de força

$$f_N((P, \mathbf{k}), Q) = e^{-\frac{s((P, \mathbf{k}), Q)^2}{\sigma^2}},$$

cujo campo gradiente define a mesma trajetória elíptica do campo vetorial (Eq. 6.10). O campo de influência elíptico para um ponto-normal  $(P, \mathbf{k})$  em 3D é, então,

$$\mathbf{C}_N((P, \mathbf{k}), Q) = \begin{cases} r\mathbf{v}\mathbf{v}^T, & \text{se } \phi \leq \alpha_{max} \\ \mathbf{0}, & \text{se } \phi > \alpha_{max} \end{cases}, \quad (6.12)$$

$$\alpha_{max} \leq \alpha_{elip}, \quad r = f_N((P, \mathbf{k}), Q), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_N((P, \mathbf{k}), Q),$$

onde  $\alpha_{elip}$  define o ângulo máximo de conexão, a forma dos elipsóides e, conseqüentemente, a curvatura para conexão de superfícies. O parâmetro  $\alpha_{max}$  define o ângulo máximo de influência acima do qual a contribuição do campo é nula. Pode ser usado para definir campos com abrangência menor que  $\alpha_{elip}$ .

### 6.1.3.3 Campo para ponto-tangente

O campo para ponto-tangente tem a função de induzir normais no espaço, dada uma tangente. Na construção desse campo, utiliza-se a proposta de Guy de definir planos que passam pela reta formada pelo ponto-tangente (Seção 3.2.1.2).

Um ponto-tangente  $(P, \mathbf{t}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  define uma reta que pode ser interpretada como uma interseção de planos no espaço (Fig. 3.6a). Nesse contexto, há somente um plano que passa por  $(P, \mathbf{t})$  e um ponto  $Q$  cuja normal é dada por

$$\mathbf{v}_T((P, \mathbf{t}), Q) = \frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{t} \times PQ, \quad (6.13)$$

o que representa o campo vetorial para ponto-tangente.

É importante que o campo gradiente de força seja ortogonal às normais dadas. Isso reforça a preferência pelos planos que passam pelo ponto-tangente. Ainda assim, o campo gradiente pode definir trajetórias tangentes a esses planos como, por exemplo, privilegiar os pontos mais alinhados com a tangente  $\mathbf{t}$ .

Observe que o campo vetorial (Eq. 6.13) não busca inferir conexões curvilíneas com a tangente  $\mathbf{t}$ . Portanto, não há necessidade de se privilegiar pontos que estão alinhados com essa tangente. A força pode então ser calculada em função da distância ao ponto  $P$ :

$$f_I(P, Q) = e^{-\frac{|PQ|^2}{\sigma^2}}, \quad (6.14)$$

onde  $\sigma$  define, como fator de atenuação, a extensão do campo. Esse campo de força isotrópico privilegia os pontos mais próximos de  $P$ . O campo de influência para ponto-tangente em 3D é então definido por

$$\mathbf{C}_T((P, \mathbf{t}), Q) = r \mathbf{v} \mathbf{v}^T, \quad r = f_I(P, Q), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_T((P, \mathbf{t}), Q).$$

### 6.1.3.4 Campo isotrópico

Um ponto sem orientação associada  $P \in \mathbb{R}^3$  não possui informações suficientes para induzir normais diretamente em outro ponto  $Q$ . De fato, qualquer plano que passe pela reta  $PQ$  é válido (Fig. 3.7a). O campo vetorial que define essa reta

$$\mathbf{v}_I(P, Q) = \frac{PQ}{|PQ|}$$

deve ser utilizado para codificar essa indecisão planar de normais.

Obviamente, o campo gradiente de força também deve ser isotrópico para não codificar trajetórias preferenciais. Utilizando a Equação 6.14, o campo isotrópico para normais em 3D é dado por

$$\mathbf{C}_I(P, Q) = r (\mathbf{I} - \mathbf{v} \mathbf{v}^T), \quad r = f_I(P, Q), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_I(P, Q),$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade. Dessa forma, o plano no qual se estima estar a normal é codificado em  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$  através do autovetor  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_I(P, Q)$ . A capacidade de indução é codificada em  $\lambda_1 = \lambda_2 = f_I(P, Q)$  com  $\lambda_3 = 0$ .



### 6.1.4 Inferência inicial de orientação

Considera-se esta fase como a mais importante do método. Ela determina a normal e a medida de pertinência de cada elemento de entrada. Se essa normal é arbitrária, ela agirá negativamente na acumulação densa, pois o campo de influência estará mal orientado em relação à superfície. O efeito negativo será proporcional à sua pertinência, podendo até inviabilizar localmente a reconstrução.

Por outro lado, se a normal inferida estiver perfeitamente alinhada com a superfície, mas sua medida de pertinência for fraca, ela pode não promover a reconstrução em sua vizinhança. Dados esparsos com presença de ruído aumentam bastante a chance de problemas. É evidente que normais consistentes e medidas de pertinência equilibradas são importantes para a reconstrução.

Os métodos de Guy e Lee realizam uma estimação primária de orientação cujo resultado pode não ser suficiente para uma boa reconstrução. De fato, eles negligenciam os efeitos de uma má inferência inicial sobre seus resultados. Se a entrada consiste somente de pontos sem orientação associada, por exemplo, suas normais serão obtidas através do campo isotrópico. Qual a garantia de que essas normais e medidas de pertinência são apropriadas para a reconstrução? A relação entre o resultado da influência isotrópica e o processo de acumulação não é evidente.

Obviamente, obter normais e medidas de pertinência ótimos é um problema difícil. Exige uma avaliação exata da organização dos dados esparsos que pode ser aproximada através de heurísticas. No contexto de um método dedicado, propõe-se utilizar o campo de influência da estrutura principal para refinar a inferência primária.

#### 6.1.4.1 Inferência primária de orientação

A inferência primária é realizada pela acumulação da influência entre todos elementos de entrada, como na acumulação esparsa de Lee (Seção 4.2.3). Considere o conjunto de entrada  $D = P \cup N \cup T$  composto de  $n = i + j + k$ ,  $n > 0$ , elementos:

- pontos:  $P = \{P_1, \dots, P_i\} \cup \{\emptyset\}$ ;
- pontos-normal:  $N = \{(N_1, \mathbf{n}_1), \dots, (N_j, \mathbf{n}_j)\} \cup \{\emptyset\}$ ;
- pontos-tangente:  $T = \{(T_1, \mathbf{t}_1), \dots, (T_k, \mathbf{t}_k)\} \cup \{\emptyset\}$ .

Para inferir orientação, a cada elemento do conjunto total de pontos de entrada

$$Q = P \cup \{N_1, \dots, N_j\} \cup \{T_1, \dots, T_k\}, \quad (6.15)$$

associa-se um tensor de orientação  $\mathbf{T}_m \in \{\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n\}$  representando a influência total os dados esparsos

$$\mathbf{T}_m = \sum_i \mathbf{C}_I(P_i, Q_m) + \sum_j \mathbf{C}_N((N_j, \mathbf{n}_j), Q_m) + \sum_k \mathbf{C}_T((T_k, \mathbf{t}_k), Q_m), \quad (6.16)$$

onde  $Q_m$  é o  $m$ -ésimo ponto de  $Q$ . Cada tensor  $\mathbf{T}_m$  contém a orientação inferida para seu ponto correspondente  $Q_m$  a partir de todos os elementos de entrada em  $D$ . Lee utiliza essa informação diretamente na acumulação densa.

Consideram-se as normais e suas medidas de pertinência em  $\mathbf{T}_m$  ainda inadequadas. Isso porque os campos para ponto-tangente e isotrópico não definem superfícies suaves.

Além disso, elementos com ruído votam com o mesmo peso dos elementos mais precisos. Trata-se de um resultado preliminar que deve ser refinado.

### 6.1.4.2 Refinamento da inferência primária

Para refinar a inferência inicial, propõe-se propagar a informação de normal contida em  $\mathbf{T}_m$  através do campo para ponto-normal. A informação de indecisão é descartada. Os argumentos para se aplicar esse processo são:

- o campo para ponto-normal é morfologicamente adaptado para inferir normais. Pode induzir normais que formam superfícies mais suaves e medidas de pertinência mais equilibradas;
- o uso da medida de pertinência obtida na inferência primária reduz o efeito de elementos menos estruturados. Espera-se que elementos com ruído tenham pertinência menor;
- a repropagação de informação permite uma avaliação mais abrangente das normais. Obtém-se estimativas menos localizadas.

Dado um tensor de orientação  $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T$ , a sua informação de normal é dada pelas seguintes funções

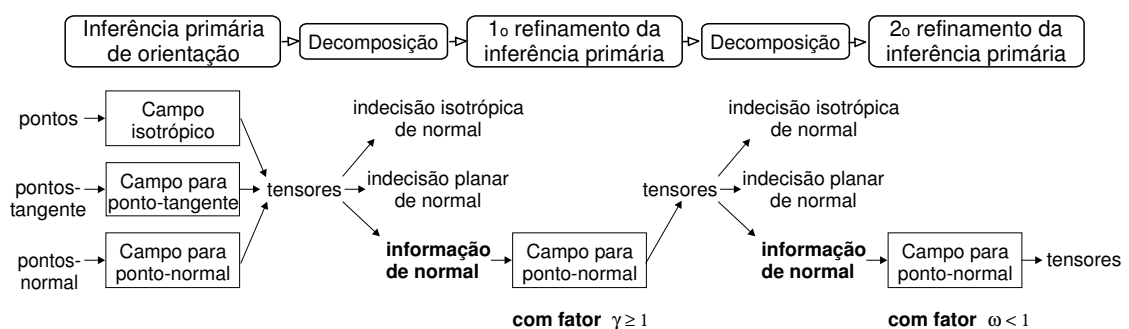
$$\mathbf{vn}(\mathbf{A}) = \mathbf{e}_1, \quad s(\mathbf{A}) = \lambda_1 - \lambda_2, \quad (6.17)$$

onde  $\mathbf{vn}$  é o vetor normal e  $s$  é sua medida de pertinência.

Um novo conjunto de tensores  $\mathbf{U}_m \in \{\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n\}$  é associado ao conjunto de pontos de entrada  $Q$  e definido pela propagação da informação de normais contida em  $\mathbf{T}_m$  (Eq. 6.16):

$$\mathbf{U}_m = \sum_{l=1}^n s(\mathbf{T}_l)^\gamma \mathbf{C}_N((Q_l, \mathbf{vn}(\mathbf{T}_l)), Q_m), \quad (6.18)$$

onde a tupla  $(Q_l, \mathbf{vn}(\mathbf{T}_l))$  é composta pelos  $n$  pontos de entrada e suas normais estimadas.



**Figura 6.7:** O processo completo de inferência de orientação com as duas fases de refinamento.

O fator  $\gamma$  serve para regularizar as medidas de pertinência. Se  $\gamma \geq 1$ , a diferença entre medidas de pertinência é intensificada. Elementos com baixa pertinência passam a ter menor influência, favorecendo a filtragem de ruído. Se  $\gamma < 1$ , a diferença entre pertinências é reduzida, provocando uma igualação de influências.

Esse fator depende dos dados de entrada. Com forte presença de ruído, por exemplo,  $\gamma < 1$  pode perturbar a reconstrução. Utilizar  $\gamma \geq 1$  pode gerar buracos em regiões de menor densidade de pontos.

Para aplicações em geral, sugere-se propagar a informação de normal em duas etapas. A primeira com o objetivo de filtrar ruído. A segunda para igualar pertinências e assim reduzir os efeitos da primeira etapa sobre os elementos estruturados com baixa pertinência.

Na primeira etapa, estima-se  $\mathbf{U}_m$  com  $\gamma \geq 1$  (Eq. 6.18) para filtrar as orientações primárias. Associando o conjunto de tensores  $\mathbf{V}_m \in \{\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n\}$  ao conjunto de pontos  $Q$ , a segunda propagação de normais é dada por

$$\mathbf{V}_m = \sum_{l=1}^n s(\mathbf{U}_l)^\omega \mathbf{C}_N((Q_l, \mathbf{vn}(\mathbf{U}_l)), Q_m), \quad (6.19)$$

onde  $n$  é o número de pontos de entrada e  $\omega < 1$  é o fator de regularização. Essa segunda acumulação busca diminuir a diferença entre as medidas de pertinência obtidas em  $\mathbf{U}_m$ . O processo completo de inferência de orientação está ilustrado no diagrama da Figura 6.7.

Note que esse processo pode ser modificado em função da necessidade. Propagações sucessivas de normais têm maior efeito de refinamento de suas estimativas. Entretanto, duas acumulações se mostraram suficientes para se obter normais mais precisas. Experimentos realizados mostram que  $\gamma = 1$  e  $\omega = 1/2$  geram bons resultados em aplicações gerais.

### 6.1.5 Acumulação densa

A inferência inicial de orientação realiza a avaliação da organização espacial dos dados de entrada em termos de superfície. É importante salientar que essa inferência possui várias aplicações.

Na aplicação de reconstrução, a informação de normal é inferida em pontos pertencentes a um subespaço  $S \subset \mathbb{R}^3$  que envolve a entrada. Esses pontos funcionam como uma extensão dos dados esparsos. A superfície é aproximada pela avaliação das orientações obtidas nesses pontos extras.

As etapas precedentes fornecem a informação de uma entrada  $D$ , necessária para a inferência do tensor de orientação em um ponto arbitrário  $P \in S$ :

$$\mathbf{I}(D, P) = \sum_{l=1}^n s(\mathbf{V}_l) \mathbf{C}_N((Q_l, \mathbf{vn}(\mathbf{V}_l)), P),$$

onde  $Q_l$  é o  $l$ -ésimo ponto de entrada  $Q$  (Eq. 6.15) e  $\mathbf{V}_l$  é seu tensor de orientação obtido na inferência refinada (Eq. 6.19). As funções  $\mathbf{vn}(\mathbf{V}_l)$  e  $s(\mathbf{V}_l)$  (Eq. 6.17) representam a normal de  $\mathbf{V}_l$  e sua medida de pertinência.

O sub-espaço  $S$  é representado por uma grade tridimensional e discreta de tensores (Seções 3.2.2.1 e 4.2.3). Assim, a propagação da informação de uma entrada  $D$  sobre um conjunto de tensores  $\mathbf{G}_{i,j,k}$ , que forma uma grade de dimensões  $r \times t \times u$  com  $i, j, k, r, t, u \in \mathbb{Z}^+$ , é definida por

$$\mathbf{G}_{i,j,k} = \mathbf{I}(D, H(i, j, k)), \quad i \leq r, \quad j \leq t, \quad k \leq u,$$

onde a função  $H: \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  representa a transformação das coordenadas discretas  $(i, j, k)$  nas coordenadas reais correspondentes do sub-espço  $S$ . Observe que a indecisão de normais não é propagada. Nesse ponto, assume-se que a informação de normal contida em  $V_l$  é suficiente para a reconstrução.

### 6.1.6 Cálculo dos mapas de saliência

Para a extração de superfícies e de sua informação de indecisão, é necessário a decomposição da grade discreta  $G_{i,j,k}$  em mapas de saliência, como definido por Guy. Todavia, os mapas são interpretados de acordo com o tensor de orientação (Seção 6.1.2).

Cada mapa tem as mesmas dimensões da grade  $r \times t \times u$  e é composto por tuplas  $(s, \mathbf{e})$ , onde  $s$  é um escalar que define a medida de pertinência e  $\mathbf{e}$  é o vetor unitário que indica a direção da informação correspondente:

- mapa de superfície:  $s = \lambda_1 - \lambda_2$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1$ ;
- mapa de interseções simples:  $s = \lambda_2 - \lambda_3$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$ . Na melhor das hipóteses, a indecisão planar de normais representa curvas formadas pela interseção de planos;
- mapa de interseções complexas:  $s = \lambda_3$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ . A indecisão isotrópica indica ausência de normal dominante. Pode conter fortes respostas em regiões com interseções complexas de planos.

As denominações dos mapas de indecisão são apenas sugestivas. Na verdade, fortes respostas de pertinência nesses mapas podem indicar presença de ruído. Percebidos como incerteza na definição de normal, eles podem ser úteis na reconstrução de superfícies. As estruturas dos mapas de saliência podem ser extraídas pelos algoritmos propostos por Guy (Seção 3.3).

## 6.2 Síntese conclusiva

O desenvolvimento metodológico apresentado baseia-se nas discussões da fundamentação crítica. Busca-se uma melhoria da avaliação da organização espacial de dados esparsos. As proposições estão fundamentadas nas hipóteses de que: um método dedicado a superfícies é mais pertinente, a inferência inicial de orientação é crucial para o processo e a morfologia dos campos vetoriais e de força deve ser coerente com os objetivos de reconstrução.

O método proposto é dedicado a superfícies. Ou seja, a codificação e interpretação tensorial, a construção dos campos de influência, os processos de acumulação e a inferência inicial são específicos a esse tipo de estrutura. Na interpretação tensorial utilizada, as informações secundárias são tidas como indecisão da estimação de normais. Elas são descartadas em todas as fases do método.

A forma e a composição dos campos de influência são específicos para indução de normais. Propõe-se que o campo para pontos-normal defina trajetórias elípticas. Isso permite que a curvatura das conexões preferenciais sejam ajustadas, viabilizando uma reconstrução mais precisa de objetos de diferentes curvaturas ou com fortes níveis de ruído aditivo. Para obter superfícies mais suaves, o gradiente do campo de força define a

mesma trajetória elíptica do campo vetorial. Todos os campos de influência são definidos por codificação tensorial dos campos vetorial e de força.

O diferencial mais importante está na fase de inferência inicial de orientações. É essa fase que promove a avaliação da organização espacial dos dados esparsos. Por ser uma etapa crucial para a reconstrução, os processos propostos por Guy e Lee são considerados primários. Propõe-se um refinamento da inferência primária, que consiste em repropagar a informação de normal inicialmente obtida. Utilizando o campo para ponto-normal, que é morfologicamente adaptado a superfícies, reforça-se a avaliação da organização dos pontos sobre essa estrutura.

A inferência refinada de orientações promove uma avaliação mais eficaz da organização dos dados esparsos. Para a aplicação de reconstrução de superfícies, a fase de acumulação densa e de cálculo dos mapas de saliência são apresentados.

# Capítulo 7

## Aplicações experimentais

Neste capítulo, apresenta-se vários experimentos para evidenciar o comportamento do método proposto e dos métodos de Guy e Lee. Resultados qualitativos e quantitativos ilustram a eficácia desses métodos quanto a reconstrução de superfícies. Propõe-se um método para segmentação de pontos organizados sobre superfícies. Uma avaliação dos comportamentos dos métodos nessa aplicação de filtragem é apresentada.

### 7.1 Reconstrução de superfícies

A reconstrução de superfícies é apenas uma das aplicações da inferência da organização espacial de dados esparsos. O objetivo desta seção é evidenciar as diferenças entre o método em proposição e os métodos fundamentais. Os resultados a seguir permitem uma avaliação experimental dos temas discutidos através de uma análise comparativa.

#### 7.1.1 Resultados qualitativos

Cada método tem propriedades que se destacam em situações específicas. O objetivo desta seção é ilustrar seus comportamentos com diferentes objetos e amostragens.

O parâmetros dos métodos foram ajustados por experimentação e comparação de diversos resultados. Para o método em proposição, utiliza-se  $\gamma = 1$  (Eq. 6.18) e  $\omega = 1/2$  (Eq. 6.19) em todos os modelos. Reconstruções com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$  e com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$  são realizadas. Ambas com ângulo máximo de ação  $\alpha_{max} = 45^\circ$  (Eq. 6.13). A primeira permite avaliar o resultado da continuidade circular, enquanto a segunda ilustra o efeito de campos de influência com curvatura diferente.

Para o método de Guy, utilizou-se  $a = 3$  e  $b = 1$  (Eq. 3.2) para definir um campo de força normalizado entre  $-1 \leq x \leq 1$ . Assim, esse mesmo campo é aplicado com extensões relativas aos modelos. O método de Lee é aplicado com  $c = 0,02$  (Eq. 4.5). O único parâmetro livre é o  $\sigma$  das gaussianas que definem a atenuação de força.

Por questões de desempenho, os campos de influência devem ter extensão finita. Ou seja, a força deve ser considerada nula a partir de uma certa distância em relação ao ponto de máxima força do campo de influência (**ponto de referência**). Isso não altera o resultado já que as equações de força tendem a zero quando essa distância tende a infinito. Assim, uma distância máxima de ação  $d_{max}$  deve ser fornecida a todos os métodos. No trabalho de Lee, a extensão dos campos é fixada em  $d_{max} = 3\sigma$ , talvez pelo fato de que,

em uma distribuição normal, 99,75% das observações estão entre  $\mu \pm 3\sigma$ .

A extensão dos campos de influência é mais facilmente comparável que o fator de atenuação  $\sigma$ . Por isso, escolheu-se utilizar a distância máxima de ação como o parâmetro livre de todos os métodos. Assim, os parâmetros de um campo de força  $f$  são ajustados de tal forma que

$$f(P, Q) \leq k \quad \forall Q \in \mathbb{R}^3 \quad | |PQ| \geq dmax, \quad (7.1)$$

onde  $P$  é o ponto de referência do campo de influência. Ou seja, todo ponto a uma distância  $dmax$  pode, no máximo, ter  $k$  como força. No caso dos campos anisotrópicos, os pontos com força  $k$  são aqueles que estão mais alinhados.

Como os campos do método de Guy são normalizados, basta que seus mapeamentos para as coordenadas dos dados de entrada satisfaçam a inequação 7.1. Dada a distância máxima  $dmax$ , o parâmetro  $\sigma$  dos campos com atenuação é calculado por

$$\sigma^2 = \frac{(dmax)^2}{\ln \frac{1}{k}},$$

sendo  $k = 0,05$  em todos os casos. Nos exemplos abaixo, o parâmetro  $dmax$  é ajustado em função do maior lado da caixa que envolve os dados esparsos. Assim, se o maior lado da caixa é 200 e  $dmax = 0,15$ , a distância máxima de ação entre os pontos de entrada será  $200 \times 0,15 = 30$ . Ou seja,  $dmax$  é relativo aos modelos normalizados em um cubo unitário.

Os objetos reconstruídos são definidos por equações e amostrados com densidade constante (Seção 1.2) sobre toda sua superfície. Portanto, os experimentos a seguir não caracterizam um sensor ou método de aquisição específico. De fato, esse não é o objetivo dessa avaliação.

Os dados esparsos utilizados representam apenas uma possível distribuição de elementos sobre os objetos. A quantidade foi escolhida de forma arbitrária. Obviamente, conjuntos diferentes de pontos geram resultados distintos. Dessa forma, as reconstruções obtidas não ilustram a eficácia dos métodos de uma forma geral.

#### 7.1.1.1 Dados esparsos sem orientação associada

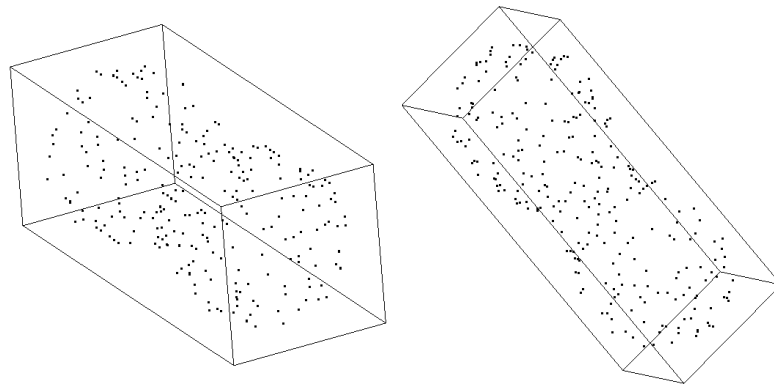
A Figura 7.1 ilustra 250 pontos que formam um oval de Cassini, cuja equação é

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 + y^2) - (a^4 - c^4) = 0,$$

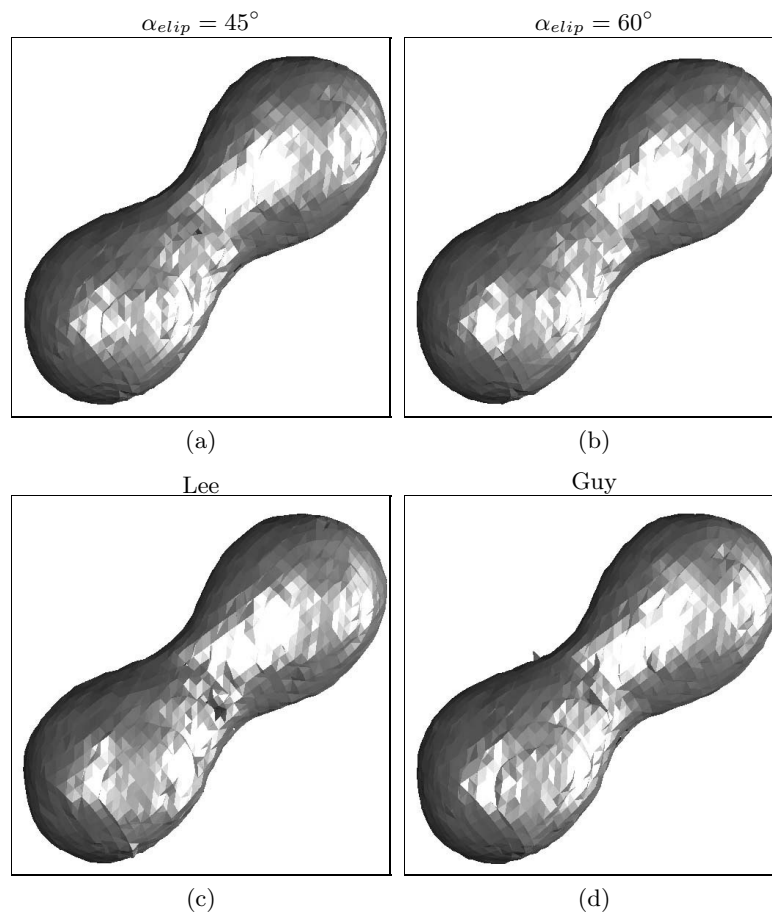
onde  $a$  e  $c$  são constantes positivas. Esse modelo foi utilizado por Guy e Lee em seus trabalhos. Sua variação de curvatura é interessante para avaliar os resultados da reconstrução.

O resultado da reconstrução do oval de Cassini está na Figura 7.2. Observa-se que uma superfície mais suave foi obtida com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$  (Fig. 7.2b). Note que esse resultado possui um número de triângulos bem menor. Isso porque a curvatura definida pela família de elipses favorece conexões mais “diretas”, diminuindo a área total reconstruída.

A partir das medidas de pertinência de um corte na grade (Fig. 7.3), observa-se que o método em proposição define melhor a superfície. Isto é, as localidades que não fazem parte da superfície possuem menor pertinência relativa. Isso é mais notório no centro do objeto.



**Figura 7.1:** Um oval de Cassini formado por 250 pontos.

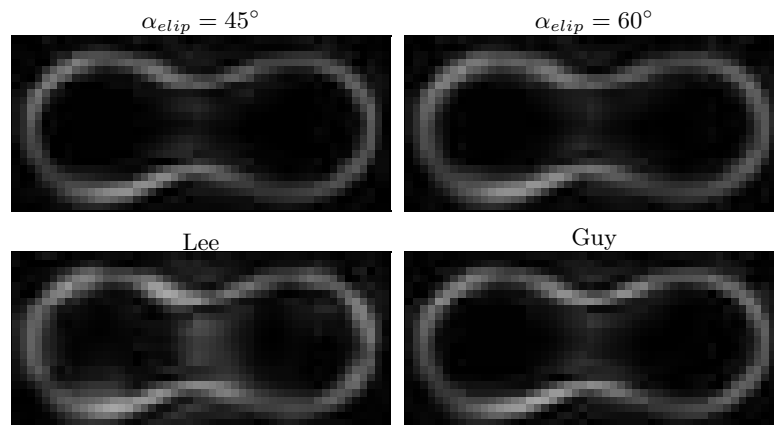


**Figura 7.2:** Reconstrução do oval de Cassini em uma grade de dimensões  $23 \times 23 \times 50$ . (a)  $d_{max} = 0, 20$ . 8487 triângulos. (b)  $d_{max} = 0, 20$ . 6600 triângulos. (c)  $d_{max} = 0, 21$ . 7289 triângulos. (d)  $d_{max} = 0, 21$ . 8501 triângulos.

### Dados com pontos incorretos

Uma importante característica dos métodos é a capacidade de reconstruir superfícies a partir de dados com grande quantidade de pontos que não fazem parte do objeto. Talvez este seja o maior diferencial do método proposto por Guy em relação às outras abordagens



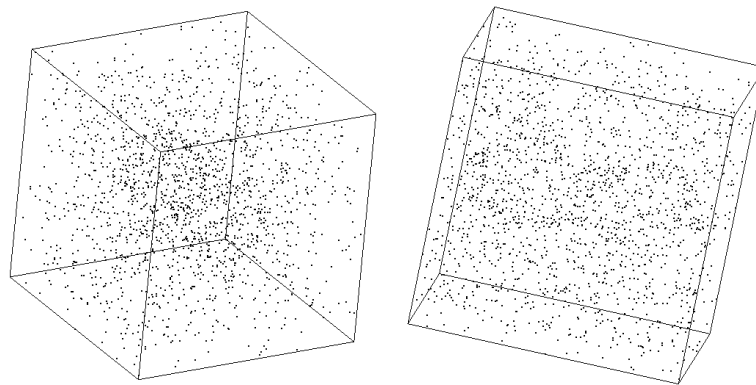


**Figura 7.3:** Cortes na grade discreta do oval de Cassini ilustrando a medida de pertinência de normais. Pontos mais claros possuem maior pertinência.

de reconstrução (Cap. 2).

Os pontos mostrados na Figura 7.4 são formados pelos dados do oval de Cassini (Fig. 7.1) e 1500 pontos incorretos uniformemente distribuídos, i.e., sem regiões privilegiadas, no cubo de lado 15% maior que o do cubo que envolve o oval.

Observe que todos os métodos extraíram o objeto (Fig. 7.5). Entretanto, somente o método dedicado foi capaz de reconstruir toda a superfície do oval e ainda com suavidade. Esse é um importante diferencial.

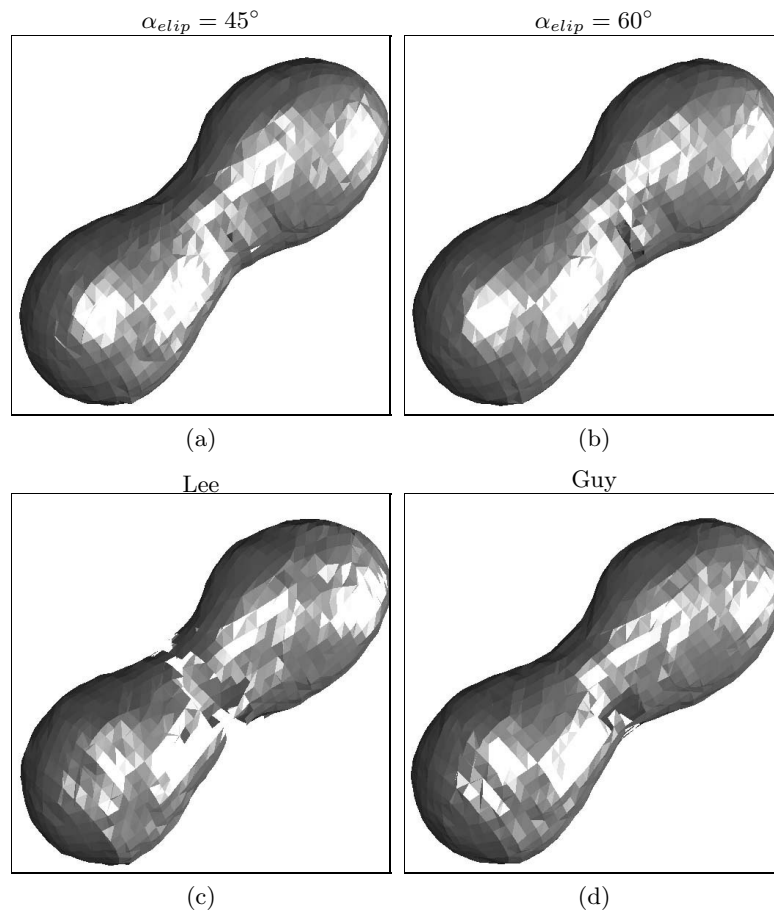


**Figura 7.4:** O oval de Cassini com pontos incorretos. Formado por 1750 pontos entre os quais 1500 não fazem parte do oval. Os outros 250 são os mesmos ilustrados na Figura 7.1.

De fato, o método dedicado se destaca em dados esparsos com ruído. Ele reduz consideravelmente as medidas de pertinência dos pontos não organizados como superfície (Fig. 7.6a,b). Isso se deve principalmente à fase de refinamento de orientações iniciais (Seção 6.1.4.2). Notoriamente, o método de Lee é o mais sensível ao ruído adicionado.

### Interseção de superfícies

Os pontos da Figura 7.7 formam um oval de Cassini e um plano cuja interseção



**Figura 7.5:** Reconstrução do oval de Cassini com pontos incorretos em uma grade de dimensões  $50 \times 50 \times 50$ . (a)  $d_{max} = 0,22$ . 5956 triângulos. (b)  $d_{max} = 0,22$ . 5634 triângulos. (c)  $d_{max} = 0,21$ . 4299 triângulos. (d)  $d_{max} = 0,22$ . 4512 triângulos.

dificulta a sua reconstrução. A Figura 7.8 ilustra os resultados obtidos pelos diversos métodos. Observe que praticamente não há diferenças entre eles. Um dos motivos é a alta densidade dos dados esparsos. Isso faz com que a medida de pertinência seja forte em toda a superfície.

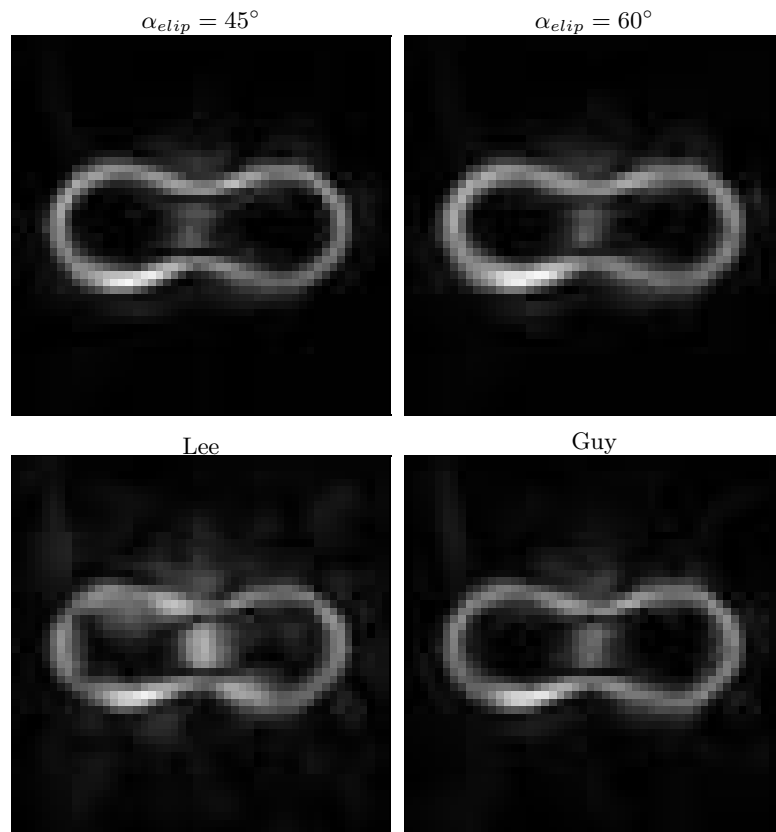
O plano reconstruído pelo método de Lee é ligeiramente mais regular. Isso porque seu campo para bastão favorece conexões mais próximas dos planos definidos pelas normais.

A interseção entre os objetos não pode ser reconstruída porque a indecisão de normais é alta nessa região. A curva formada por essa interseção pode ser obtida através do mapa de indecisão de normais.

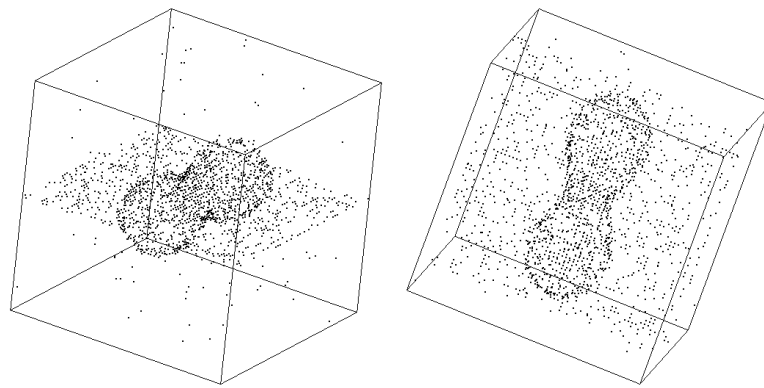
### 7.1.1.2 Dados esparsos com normal associada

Os pontos-normal da Figura 7.9 formam duas semi-esferas concêntricas e de raios distintos. Em geral, dados esparsos com normais associadas facilitam a reconstrução. No caso das semi-esferas, a ação direcionada do campo para normais diminui a influência entre elementos que não pertencem à mesma superfície.

Esses dados são suficientemente densos para promoverem conexões quase planares

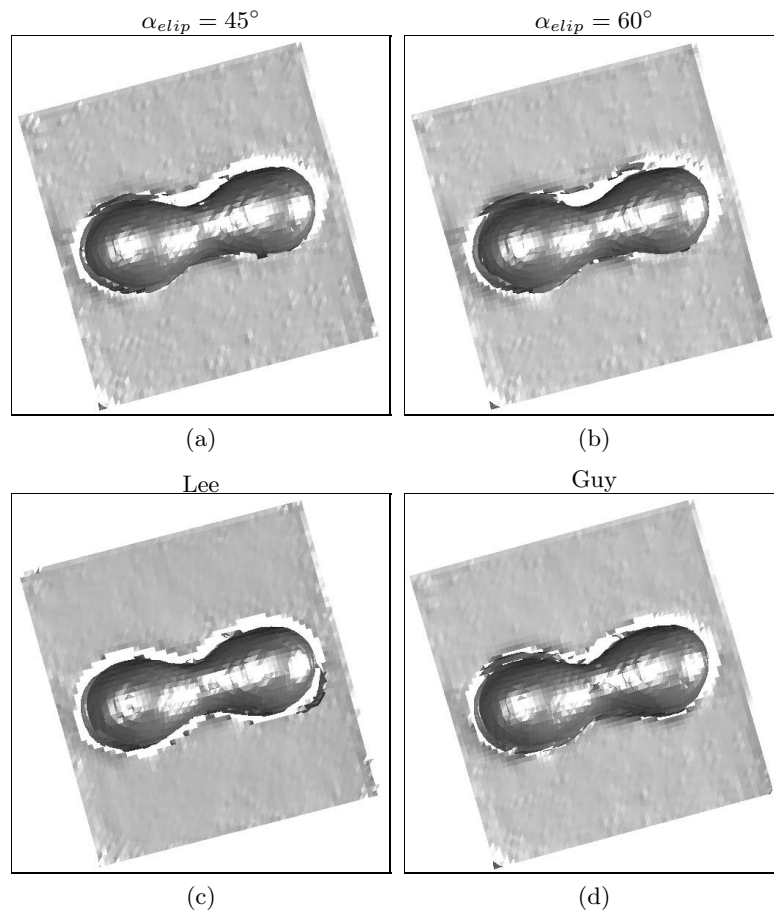


**Figura 7.6:** Cortes na grade discreta do oval de Cassini com pontos incorretos que ilustram a medida de pertinência de normais. Pontos mais claros possuem maior pertinência.

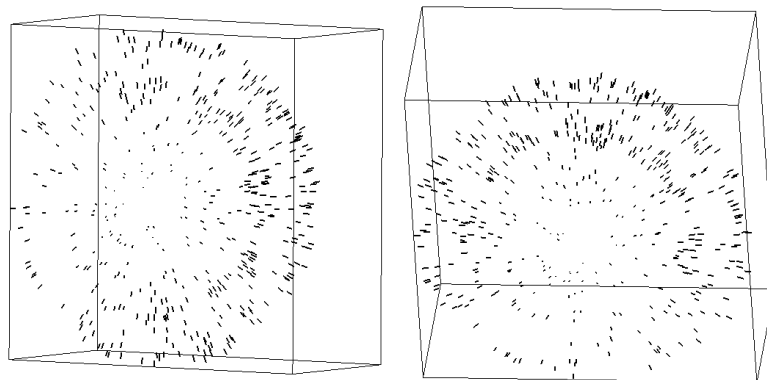


**Figura 7.7:** Um oval de Cassini e um plano formados por 2100 pontos esparsos com pontos incorretos. É o mesmo conjunto de dados utilizado por Lee em seu trabalho.

entre os pontos-normal. Assim, o método de Lee obteve o melhor resultado, já que seu campo para bastão favorece esse tipo de conexão. Nesse contexto, a curvatura definida por  $\alpha_{elip} = 60^\circ$  tende a gerar melhores resultados. De fato, a reconstrução menos suave foi obtida com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$ .



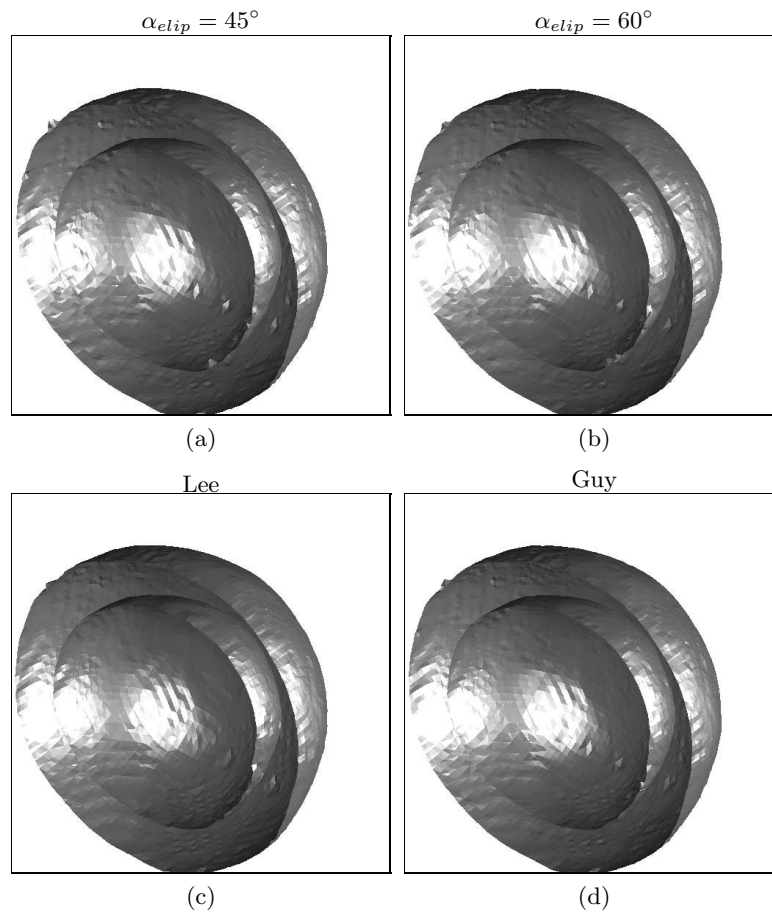
**Figura 7.8:** Reconstrução do oval de Cassini e do plano em uma grade de dimensões  $60 \times 60 \times 60$ . (a)  $d_{max} = 0,18$ . 13009 triângulos. (b)  $d_{max} = 0,18$ . 13469 triângulos. (c)  $d_{max} = 0,18$ . 13238 triângulos. (d)  $d_{max} = 0,18$ . 11948 triângulos.



**Figura 7.9:** Duas semi-esferas concêntricas formadas por 463 pontos-normal.

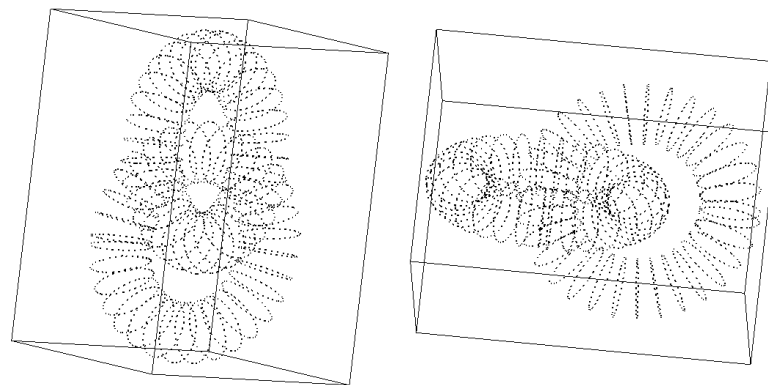
### 7.1.1.3 Dados esparsos com tangente associada

Os dois torus da Figura 7.11 são formados por anéis de pontos-tangente. A topologia desse modelo é complexa e várias abordagens falham em reconstruí-la porque suas estratégias não são adequadas. Esse é o caso, por exemplo, de alguns métodos baseados em



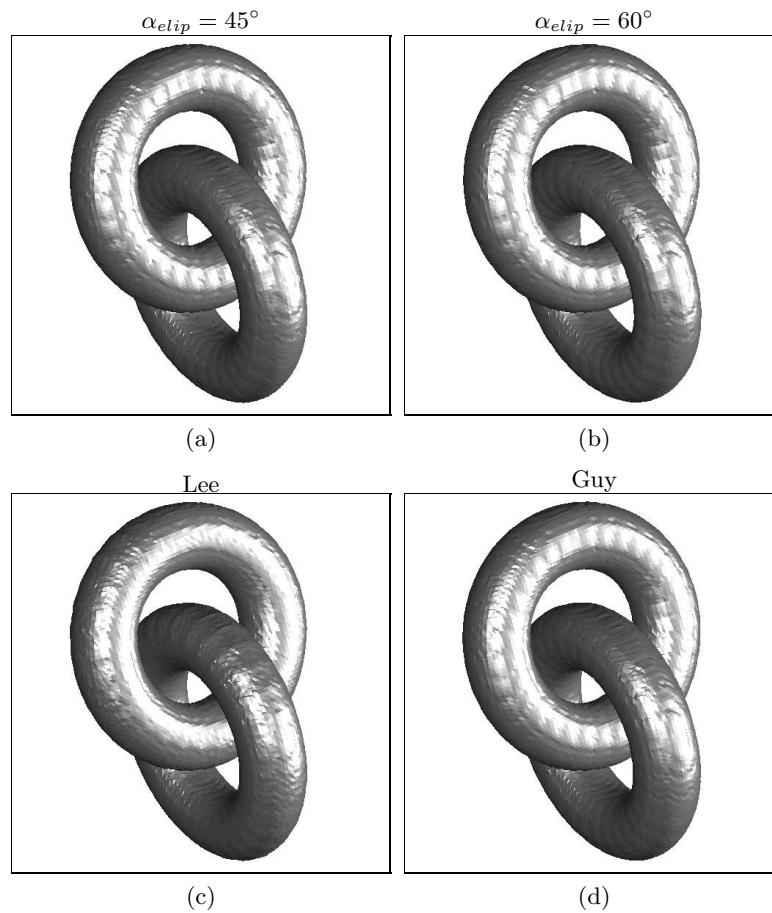
**Figura 7.10:** Reconstrução das semi-esferas concêntricas em uma grade de dimensões  $33 \times 60 \times 60$ . (a)  $d_{max} = 0,25$ . 21022 triângulos. (b)  $d_{max} = 0,25$ . 20941 triângulos. (c)  $d_{max} = 0,25$ . 21006 triângulos. (d)  $d_{max} = 0,26$ . 20938 triângulos.

subdivisão espacial [BOI 84], baseados em deformação [TER 88b, SZE 93] e métodos paramétricos [BAR 98]. Outros podem falhar porque a amostragem pode não ser adequada [AME 98].



**Figura 7.11:** Dois torus formados por 2048 pontos-tangente.

Os dois objetos foram totalmente reconstruídos pelos métodos em estudo (Fig. 7.12).



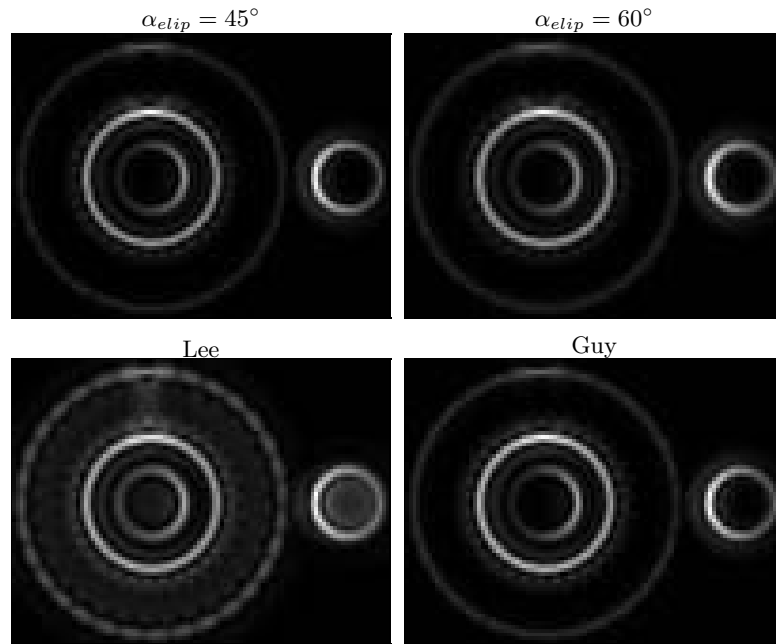
**Figura 7.12:** Reconstrução dos dois torus em uma grade de dimensões  $75 \times 100 \times 75$ . (a)  $d_{max} = 0,10$ . 89943 triângulos. (b)  $d_{max} = 0,10$ . 50740 triângulos. (c)  $d_{max} = 0,11$ . 50811 triângulos. (d)  $d_{max} = 0,11$ . 50840 triângulos.

As superfícies mais regulares foram obtidas com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$ . Observe que os anéis de pontos-tangente são bastante salientes no resultado do método de Lee (Fig. 7.12c). Isso é consequência da propagação da informação de tangente durante a acumulação densa. Esse efeito é mais evidente no corte que ilustra medidas de pertinência (Fig. 7.13c). Obviamente, as superfícies obtidas são menos suaves.

### 7.1.2 Resultados quantitativos

Avaliar a eficácia ou a precisão de métodos de reconstrução não é tarefa fácil. Em várias situações, isso nem mesmo é possível pelas dificuldades em se estabelecer critérios viáveis e, principalmente, legítimos. Em geral, esse tipo de avaliação quantitativa não é realizada nos diversos trabalhos do campo de reconstrução (Cap. 2). A análise de desempenho e a escolha de parâmetros são essencialmente visuais e qualitativos. Não há, portanto, nem critérios estabelecidos nem modelos de referência para uma análise quantitativa de métodos.

O método em proposição e o de Lee estão sob o paradigma de reconstrução de Guy. Seus parâmetros livres têm basicamente o mesmo significado metodológico. Esse contexto



**Figura 7.13:** Cortes na grade discreta dos dois torus ilustrando a medida de pertinência de normais. Pontos mais claros possuem maior pertinência.

facilita o desenvolvimento de um protocolo comum para avaliar a eficácia desses métodos na reconstrução de modelos específicos.

Procura-se evidenciar os comportamentos dos métodos em situações específicas. O protocolo de avaliação que se propõe fornece indícios de desempenho nessas situações.

### 7.1.2.1 O protocolo de avaliação

Os resultados quantitativos apresentados a seguir estão baseados em uma medida de aderência das superfícies reconstruídas em relação ao objeto original. Uma superfície reconstruída  $S$  é formada por  $k$  pontos distintos  $\{V_1, \dots, V_n\}$  que são os vértices de seus triângulos (Seção 3.3.1). Como o objeto original é uma referência exata, a estimação global da qualidade dessa reconstrução pode ser dada pela **média de erros**  $\bar{\varepsilon}$  e pelo **erro quadrático médio**  $\overline{eq}$ :

$$\bar{\varepsilon}(S, U) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon, \quad \overline{eq}(S, U) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \varepsilon^2, \quad \varepsilon = d(P_i, U), \quad (7.2)$$

onde  $d$  é a menor distância euclidiana entre o ponto  $P_i$  e a superfície original  $U$ .

Obviamente, o erro calculado de uma única reconstrução não pode discriminar o comportamento dos métodos. Dados de entrada  $D_i$  diferentes, que representam um mesmo objeto, proporcionam reconstruções distintas que podem não caracterizar o resultado mais provável. Assim, as reconstruções apresentadas na Seção 7.1.1 apenas discriminam casos isolados de amostragem.

Para uma avaliação mais precisa, é necessário uma grande quantidade  $n$  de amostras  $D_i$ , realizadas nas mesmas condições, que representem objetos  $M_i$  de uma mesma classe.

A esperança de erro médio para essa classe de objetos é calculada pela média dos erros individuais das reconstruções  $S_i$  obtidas a partir de  $D_i$ :

$$E(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{\varepsilon}(S_i, M_i), \quad E(\bar{e}q) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{e}q(S_i, M_i). \quad (7.3)$$

Os objetos  $M_i$  podem ter diferentes orientações ou variações de forma, mas devem representar a mesma estrutura. Se essa estrutura é elipsoidal por exemplo, o conjunto  $M_i$  pode conter elipsóides com variações de excentricidade e com diferentes orientações. Nesse caso, a Equação 7.3 indica as esperanças das médias de erros na reconstrução de uma população de elipsóides independentes obtidos nas mesmas condições.

Todavia, as estimativas de erro da Equação 7.2 não são adequadas para avaliar todo tipo de reconstrução. Basta verificar que o ponto mais próximo de  $P_i$  não é necessariamente seu homólogo na superfície original. Além disso,  $S_j$  pode ser uma reconstrução parcial de  $M_j$  e ainda ter um erro global baixo. Ou seja, essa avaliação de qualidade somente é válida se a superfície reconstruída é uma boa aproximação do objeto original.

Embora sejam raras, superfícies que não são uma boa aproximação do objeto original devem ser excluídas do cálculo da esperança da média de erro (Eq. 7.3). Pelas razões acima, não se pode determinar tais superfícies através de suas estimativas individuais de erro médio (Eq. 7.2). Dadas as  $n$  reconstruções, observa-se que a quantidade  $t_i$  de triângulos das superfícies consideradas **inválidas** diverge da média do conjunto. Portanto, pode-se utilizar a média  $\bar{t}$  e o desvio-padrão  $\sigma(t)$  dos triângulos obtidos nas  $n$  amostras

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad \sigma(t) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - \bar{t}^2},$$

para determinar o limite de controle  $\bar{t} \pm b\sigma(t)$  que define reconstruções válidas [SOA 91]. Dessa forma, uma superfície  $S_j$  é simplesmente rejeitada se seu número de triângulos  $t_j$  for muito divergente do que é esperado, ou seja, se  $t_j < \bar{t} - b\sigma(t)$  ou  $t_j > \bar{t} + b\sigma(t)$ . O fator  $b$  define os limites em função do desvio-padrão  $\sigma(t)$ . Utilizou-se  $b = 2$  nos experimentos realizados. Com uma distribuição normal de  $t_i$ , a faixa de aceitação corresponde a 95,45% das reconstruções geradas. Na prática, esse limite de controle se mostrou eficaz na determinação de reconstruções inválidas.

É importante frisar que os critérios de avaliação acima somente são válidos se as superfícies reconstruídas forem obtidas nas mesmas condições. Primeiramente, isso implica em aplicar os métodos com os mesmos parâmetros em todas as amostras. Em segundo lugar, os dados esparsos devem ter as mesmas características espaciais como, por exemplo, a densidade de amostragem. Se esses fatores variam em cada amostragem, pode-se obter uma maior variância nas estimativas de erro, dificultando a interpretação de suas esperanças.

Propõe-se uma análise da evolução da estimativa de erros promovida pela variação de um dos fatores envolvidos na reconstrução. Isso proporciona uma visão geral do comportamento de cada método em função desse fator. Nos experimentos a seguir, procurou-se evidenciar principalmente a robustez dos métodos. Para cada classe de objetos, são gerados três gráficos de evolução de esperança de erro:

- com diferentes quantidades de pontos incorretos uniformemente distribuídos em uma caixa que envolve os dados esparsos;



- com ruído aditivo de distribuição normal  $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$  com diferentes desvios-padrão  $\sigma$ ;
- com diferentes distâncias máximas de ação  $dmax$ .

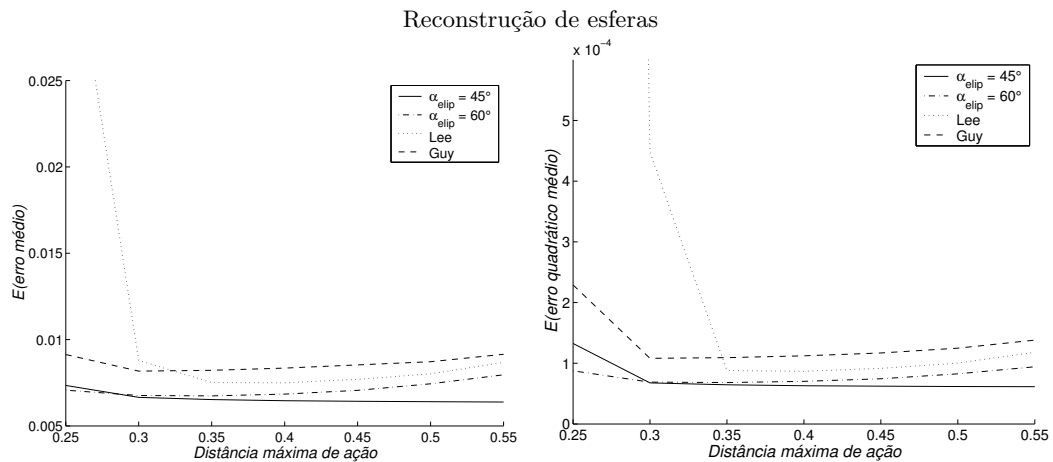
A rigor, todas as reconstruções com a mesma topologia do objeto original são válidas. De fato, os vazios entre os pontos podem ser preenchidos livremente. As avaliações de eficácia dos métodos apresentadas são baseadas na **tendência** de se obter a superfície original mesmo se os dados esparsos possuem ruído.

### 7.1.2.2 Avaliação da reconstrução de esferas

Os métodos são adaptados para inferir orientações que formam estruturas esféricas no espaço. As avaliações a seguir buscam evidenciar o comportamento desses métodos na reconstrução de superfícies com curvatura constante.

Cada conjunto esparsos gerado para calcular as médias de erro é composto pela quantidade arbitrária de 250 pontos com densidade constante sobre uma esfera unitária. Ou seja, os pontos são aleatoriamente gerados de forma isotrópica.

Todos os métodos reconstróem superfícies válidas a partir desses conjuntos, i.e., geram uma boa aproximação da esfera. Essa é uma condição necessária para que as estimativas de erro sejam válidas (Eq. 7.2). As reconstruções foram realizadas com uma grade discreta de  $40 \times 40 \times 40$ .

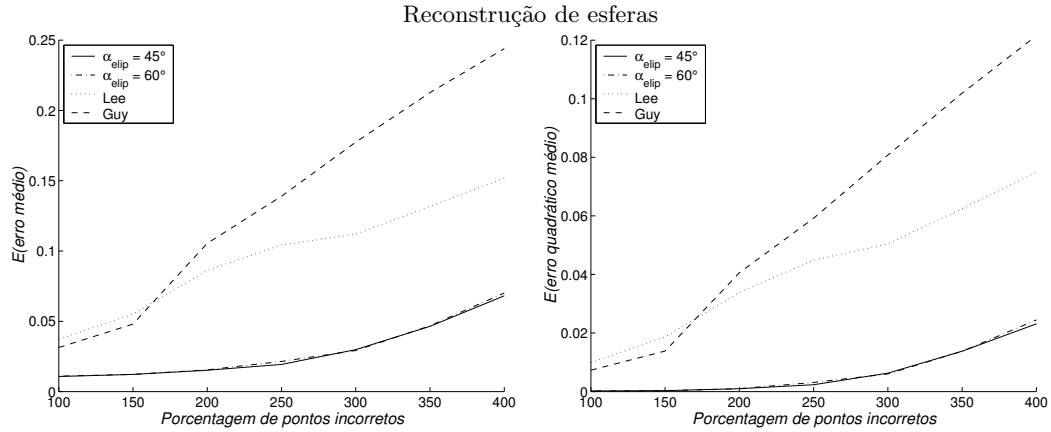


**Figura 7.14:** Variação de erro em função da distância máxima de ação  $dmax$ . Para cada  $dmax$ , utilizou-se  $n = 157$  diferentes conjuntos de pontos esparsos.

A Figura 7.14 mostra os gráficos de variação da média de erros em função de  $dmax$ . Observe que o método de Lee é bastante sensível a baixos valores de  $dmax$ . Seus resultados passam a melhorar com  $dmax$  entre 0,30 e 0,35. O método dedicado com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$  é o mais estável. Isso porque seu campo para ponto-normal favorece somente conexões esféricas sem deslocar a origem. Os outros métodos apresentam uma ligeira piora a partir de  $dmax=0,35$ . Nos métodos de Guy e Lee, isso é causado pelo campo gradiente de força que não define trajetórias esféricas. No método dedicado com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$ , a causa é a curvatura elíptica.

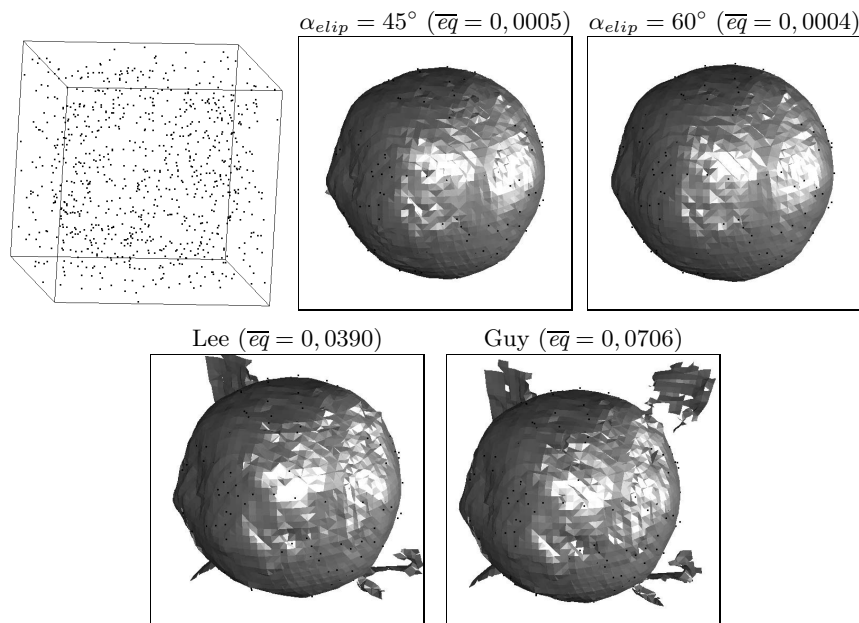
A translação da curva do método de Guy em relação ao método dedicado com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$  sugere que seus comportamentos são idênticos (Fig. 7.14). Nesse caso, não se

pode dizer que um é melhor que o outro, embora os resultados do método dedicado sejam aparentemente melhores. O mesmo é válido para o método de Lee com  $dmax > 0,40$ . O método dedicado com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$  se destaca ainda que ligeiramente.



**Figura 7.15:** Variação de erro em função da quantidade de pontos incorretos nos dados esparsos. Essa quantidade é dada em porcentagens do número de dados de entrada ( $k = 250$ ). Para cada nível de ruído, utilizou-se  $n = 114$  diferentes conjuntos de pontos esparsos.

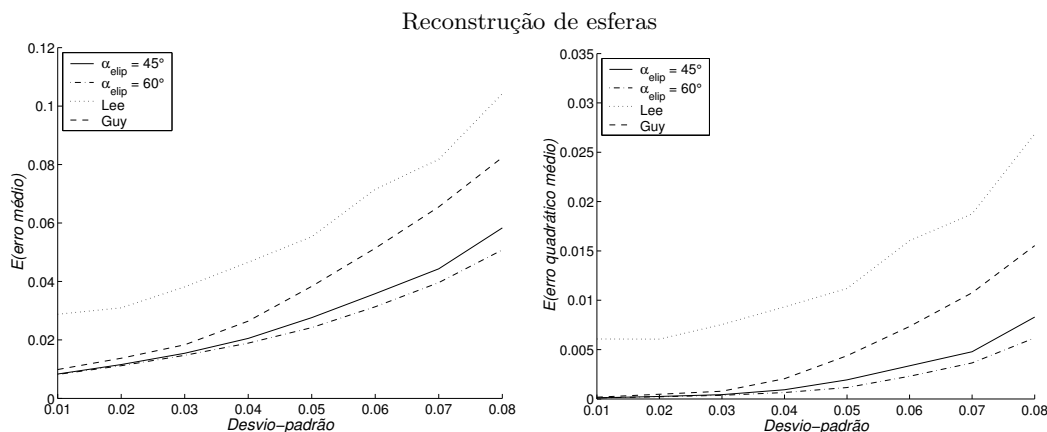
A Figura 7.15 mostra a evolução do erro em função da quantidade de pontos incorretos nos dados esparsos. Utilizou-se  $dmax = 0,30$  para todos os métodos, e o número de pontos adicionados ao modelo varia de 250 a 1000. A reconstrução de dados esparsos com 625 pontos incorretos está ilustrada na Figura 7.16.



**Figura 7.16:** Reconstrução de uma esfera formada por 250 pontos (indicados nos resultados) com 625 pontos incorretos (250%).

Nitidamente, os métodos dedicados obtiveram melhores resultados em todos os níveis. A razão disso é a melhoria na inferência da organização espacial dos dados esparsos proporcionada pelo refinamento da inferência primária (Seção 6.1.4.2). Curvatu-

ras diferentes não influenciaram os resultados. Observe que, com até 150% de ruído, os métodos de Guy e Lee têm o mesmo comportamento. Após esse limite, o método de Lee proporciona melhores resultados. Isso porque, em níveis altos de ruído, a propagação de tangente passa a reforçar a localização das superfícies. Visualmente, essas superfícies não são suaves, o que mantém o alto nível de erro.



**Figura 7.17:** Variação de erro em função do desvio-padrão do erro gaussiano nos dados de entrada. Para cada desvio-padrão, utilizou-se  $n = 175$  diferentes conjuntos de pontos esparsos.

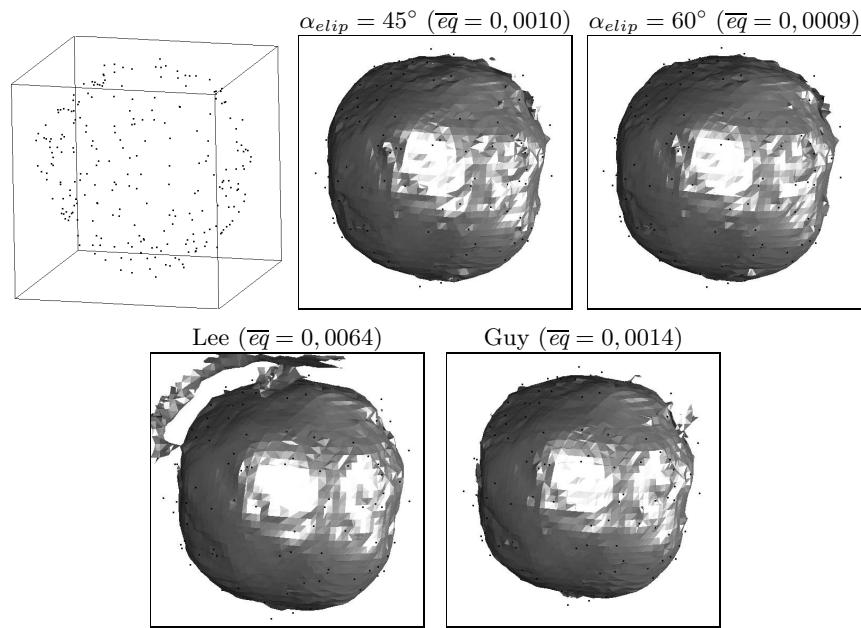
O comportamento dos métodos quanto a presença de ruído aditivo gaussiano está ilustrado na Figura 7.17. As superfícies foram reconstruídas com  $d_{max} = 0,30$ . Como a esfera é unitária, os desvios-padrão indicados representam o máximo de erro possível que um ponto pode ter. A Figura 7.18 ilustra um exemplo de reconstrução de dados com ruído aditivo.

O método de Lee está diferenciado dos demais. A translação de sua curva não significa necessariamente uma maior sensibilidade a ruído gaussiano. Constata-se apenas que seu comportamento é praticamente o mesmo dos outros métodos. De fato, o comportamento dos métodos de Guy e de Lee são semelhantes. Observe que os métodos dedicados provêm resultados com melhoria proporcional ao desvio-padrão dos pontos. Nos dados utilizados, essa melhoria somente é significativa em desvios maiores que 0,04. O método com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$  tem resultados ligeiramente melhores. Isso porque sua trajetória elíptica tende a reduzir a curvatura da superfície entre os pontos com ruído.

### 7.1.2.3 Avaliação da reconstrução de elipsóides

O objetivo desta avaliação é evidenciar o comportamento dos métodos na reconstrução de superfícies com curvatura variável. Para isso, optou-se pela utilização de elipsóides com formas e orientações variadas. A análise da evolução de erro de reconstruções de um mesmo elipsóide pode não caracterizar suficientemente tal comportamento.

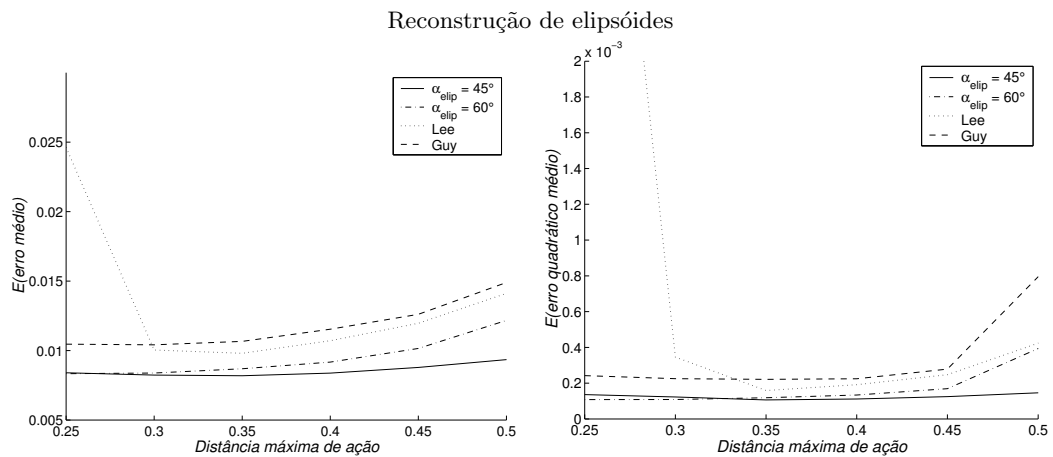
Cada conjunto de dados esparsos é gerado pela aplicação de um operador linear sobre uma quantidade arbitrária de 250 pontos com densidade constante sobre a esfera unitária de centro  $(0,0,0)$ . Os operadores lineares são matrizes simétricas positivas cujos autovalores indicam os tamanhos dos eixos principais de um elipsóide. O maior autovalor é escolhido de forma aleatória no intervalo  $[1; 1,4]$  e o menor entre  $[0,6; 1]$ . O autovalor



**Figura 7.18:** Reconstrução de uma esfera formada por 250 pontos com erro aditivo de distribuição  $\mathcal{N}(0; 0, 05^2)$ .

intermediário é fixado em 1. Os autovetores indicam a orientação dos eixos e também são determinados aleatoriamente.

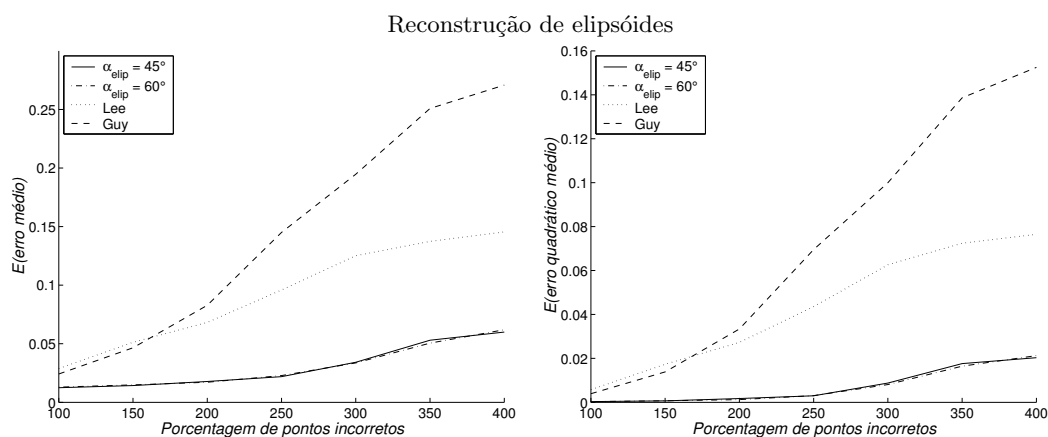
A variação da densidade de pontos sobre o elipsóide, causada pela transformação, não influencia as reconstruções. Somente resultados que formam uma boa aproximação dos elipsóides são utilizados. Uma grade discreta de  $40 \times 40 \times 40$  é utilizada nas reconstruções.



**Figura 7.19:** Variação de erro em função da distância máxima de ação  $d_{max}$ . Para cada  $d_{max}$ , utilizou-se  $n = 150$  diferentes conjuntos de pontos esparsos.

A Figura 7.19 mostra a evolução de erro em função da distância máxima de ação dos campos de influência. Em todos os métodos, o erro aumenta com essa evolução de  $d_{max}$ . Esse comportamento é causado pelo aumento da influência cruzada entre pontos não vizinhos entre si. Em geral, valores muito grandes de  $d_{max}$  podem gerar superfícies aberrantes. No caso dos elipsóides, observou-se que as regiões de maior curvatura são suavizadas, o que explica o aumento do erro médio.

Os resultados do método dedicado com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$  são melhores do que com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$ . Esse último tende a obter resultados mais suaves porque promove conexões elípticas de menor curvatura que a esférica. Ou seja, as conexões esféricas aproximam melhor as regiões de maior curvatura. Note que o método com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$  é bem mais estável que os outros. Os métodos de Guy e Lee têm, a partir de  $dmax = 0,03$ , o mesmo comportamento do método com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$ . Veja que o método de Lee não produz bons resultados com valores baixos de  $dmax$ .



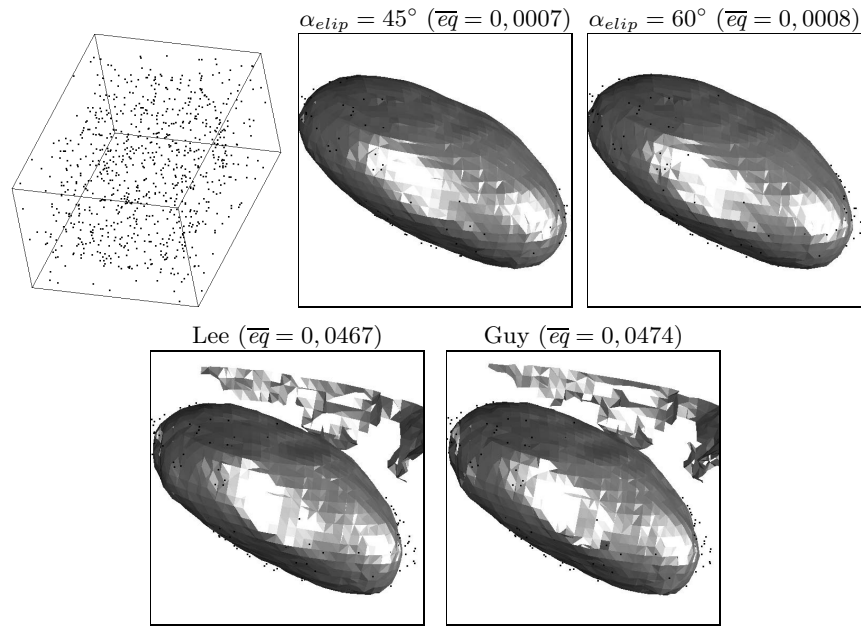
**Figura 7.20:** Variação de erro em função da quantidade de pontos incorretos nos dados esparsos. Essa quantidade é dada em porcentagens do número de dados de entrada ( $k = 250$ ). Para cada nível de ruído, utilizou-se  $n = 122$  diferentes conjuntos de pontos esparsos.

A evolução de erro em função da quantidade de pontos incorretos está ilustrada na Figura 7.20. As superfícies foram reconstruídas com  $dmax = 0,30$  e com a quantidade de pontos adicionados variando de 250 a 1000. A Figura 7.21 ilustra a reconstrução de uma elipse com 625 pontos incorretos.

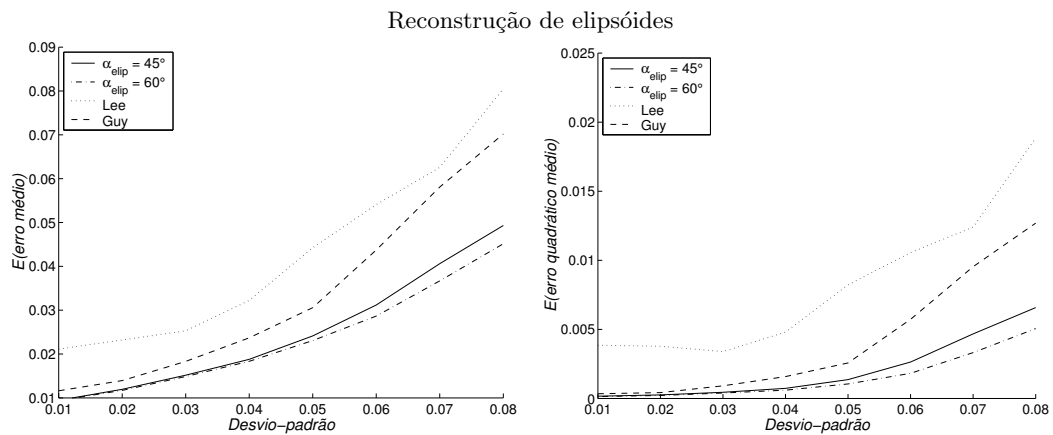
O comportamento dos métodos é o mesmo observado na reconstrução de esferas (Fig. 7.15). Os métodos dedicados obtiveram os melhores resultados, pois avaliam melhor a organização espacial dos dados esparsos no início do processo. Note que as curvaturas diferentes não atuaram nos resultados de forma significativa. Os métodos de Lee e Guy têm o mesmo comportamento com até 200% de pontos adicionados. Acima desse nível de ruído, a propagação de tangente do método de Lee funciona como um reforço na localização das superfícies, resultando em uma melhor reconstrução dos elipsóides.

A Figura 7.22 ilustra a variação das médias de erro em função de diversas distribuições normais de erro. Os elipsóides foram reconstruídos com  $dmax = 0,30$ . A reconstrução de uma elipse a partir de dados com ruído aditivo está ilustrada na Figura 7.23. O deslocamento da curva do método de Lee em relação à curva do método de Guy não indica uma maior sensibilidade a ruído gaussiano. Na verdade, a evolução paralela dessas curvas indica que o comportamento dos dois métodos é semelhante. Em geral, os métodos dedicados apresentam uma evolução menor da média de erro. Dessa forma, as melhorias são mais significativas com altos desvios nos dados esparsos. O método com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$  obtém médias de erro ligeiramente menores do que com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$ .

De uma forma geral, as avaliações de erro obtidas para elipsóides são as mesmas obtidas para a esfera. Essas avaliações podem servir de referência para outros tipos de



**Figura 7.21:** Reconstrução de uma elipse formada por 250 pontos (indicados nos resultados) com 625 pontos incorretos (250%).



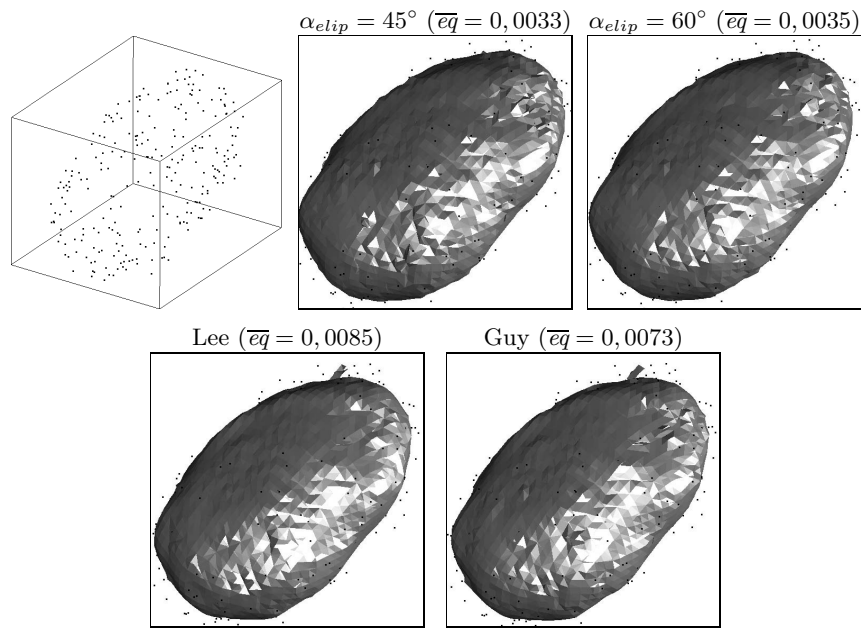
**Figura 7.22:** Variação de erro em função do desvio-padrão do erro gaussiano nos dados de entrada. Para cada desvio-padrão, utilizou-se  $n = 236$  diferentes conjuntos de pontos esparsos.

estrutura. Elas apresentam evidências do comportamento dos métodos de reconstrução.

#### 7.1.2.4 Avaliação da reconstrução de superfícies abertas

A avaliação da reconstrução de esferas e elipsóides mostra o comportamento dos métodos com dois tipos de objetos fechados. Nesta seção, busca-se avaliar a reconstrução de superfícies abertas de diferentes formas. Como no caso de elipsóides, reconstruções de uma mesma superfície aberta podem não caracterizar o comportamento dos métodos.

Cada conjunto de dados é composto de 250 pontos com densidade constante sobre

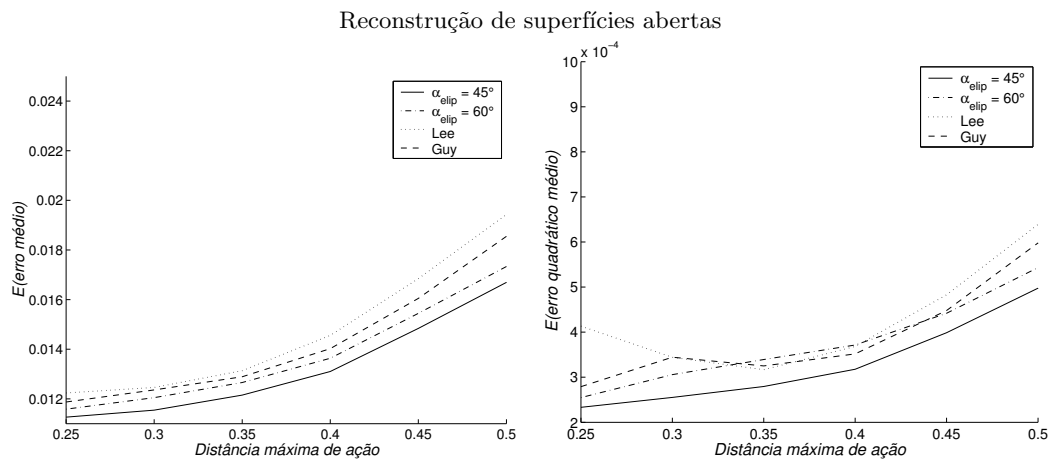


**Figura 7.23:** Reconstrução de uma elipse formada por 250 pontos com erro aditivo de distribuição  $\mathcal{N}(0; 0, 07^2)$ .

a superfície de equação

$$z = x e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{\sigma^2}},$$

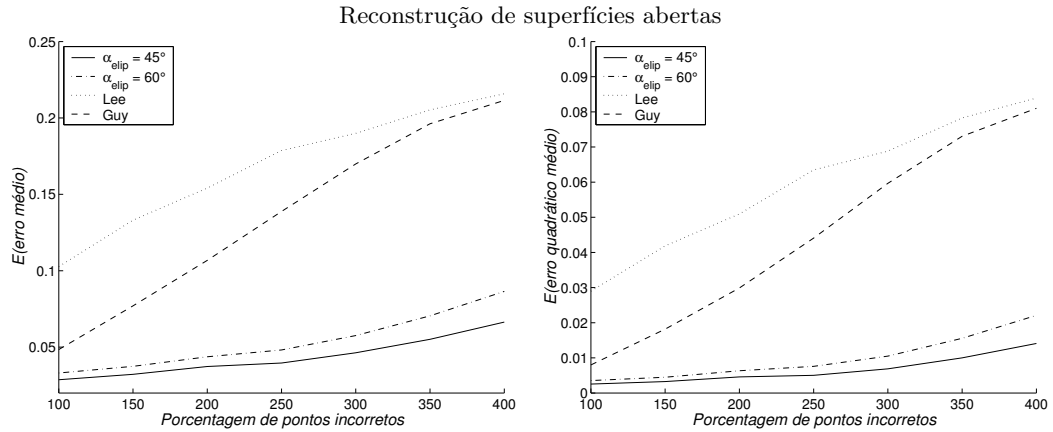
inserida em um cubo unitário. A forma da superfície é definida com  $\sigma$  variando aleatoriamente no intervalo  $[0, 5; 1]$ . As reconstruções são realizadas em uma grade discreta de  $40 \times 40 \times 40$ .



**Figura 7.24:** Variação de erro em função da distância máxima de ação  $dmax$ . Para cada  $dmax$ , utilizou-se  $n = 227$  diferentes conjuntos de pontos esparsos.

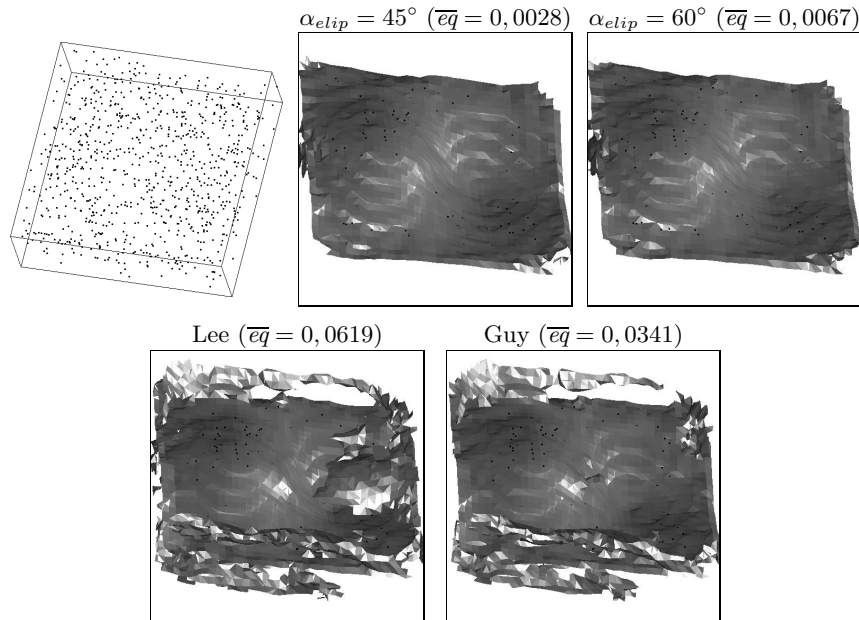
A Figura 7.24 mostra a evolução de erro em função da distância máxima de ação dos campos de influência. A influência cruzada entre pontos não vizinhos entre si aumenta com essa evolução de  $dmax$ . Observou-se que as regiões de maior curvatura das superfícies são suavizadas, o que explica o aumento do erro médio.

Ao contrário do que ocorre com esferas e elipsóides, não há diferenças entre o comportamento dos métodos. Observa-se apenas uma ligeira melhora nos resultados dos métodos dedicados. O método com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$  tende a obter resultados mais suaves porque promove conexões de menor curvatura que a esférica.



**Figura 7.25:** Variação de erro em função da quantidade de pontos incorretos nos dados esparsos. Essa quantidade é dada em porcentagens do número de dados de entrada ( $k = 250$ ). Para cada nível de ruído, utilizou-se  $n = 140$  diferentes conjuntos de pontos esparsos.

A evolução do erro em função da quantidade de pontos incorretos está ilustrada na Figura 7.25. As superfícies foram reconstruídas com  $dm_{max} = 0, 30$  e com a quantidade de pontos adicionados variando de 250 a 1000. A Figura 7.26 ilustra a reconstrução de uma superfície aberta com 625 pontos incorretos.

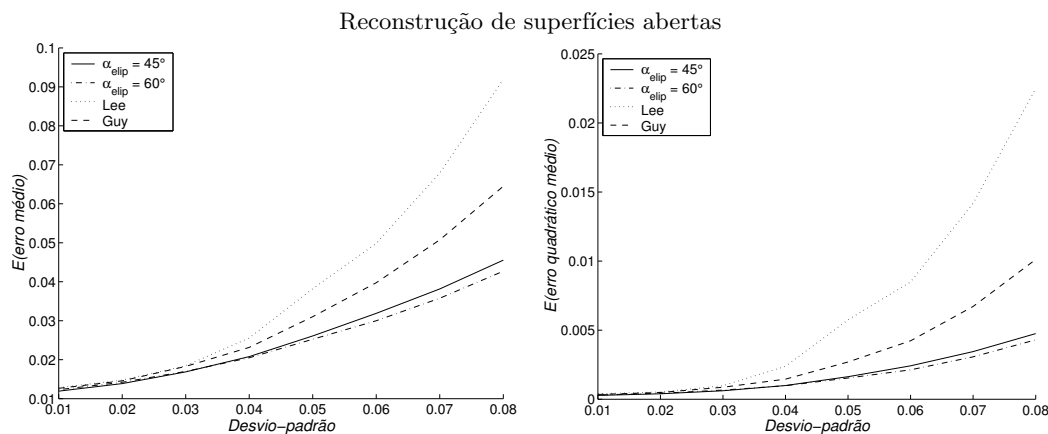


**Figura 7.26:** Reconstrução de uma superfície ( $\sigma = 0,5$ ) formada por 250 pontos (indicados nos resultados) com 625 pontos incorretos (250%).

Os métodos dedicados obtiveram os melhores resultados, pois avaliam melhor a



organização espacial dos dados esparsos. Ao contrário do verificado na reconstrução de esferas e elipsóides (Fig. 7.15 e 7.20), o método com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$  obteve melhores resultados. Isso porque seu campo para ponto-normal com curvatura esférica adere melhor às regiões de maior curvatura. Outra diferença é que o método de Guy provê melhores resultados que o de Lee em todos os casos. Entretanto, o desempenho desses métodos tendem a se igualar com o aumento de pontos incorretos. Note que o comportamento dos métodos dedicados está diferenciado dos demais.



**Figura 7.27:** Variação de erro em função do desvio-padrão do erro gaussiano nos dados de entrada. Para cada desvio-padrão, utilizou-se  $n = 368$  diferentes conjuntos de pontos esparsos.

A Figura 7.27 ilustra a variação das médias de erro em função de diversas distribuições normais de erro. As superfícies foram reconstruídas com  $dmax = 0,30$ . Um exemplo de reconstrução de superfície aberta com ruído aditivo está ilustrado na Figura 7.28.

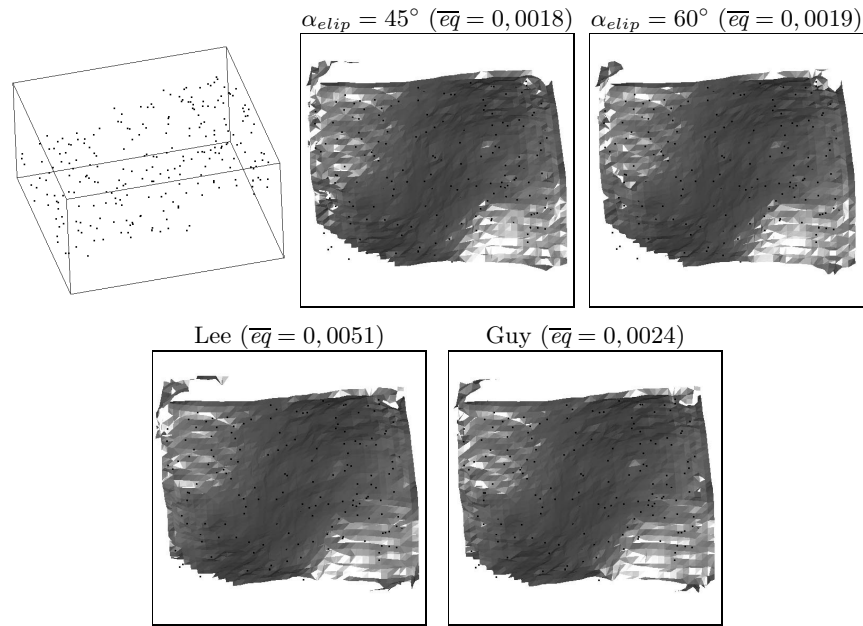
Observa-se que não há deslocamento da curva do método de Lee em relação à curva do método de Guy como no caso de esferas e elipsóides. Entretanto, o método de Lee se mostrou mais sensível aos aumentos do desvio-padrão. A propagação da informação de tangente é a principal causa desse resultado.

Os métodos dedicados apresentam uma evolução menor da média de erro. Dessa forma, as melhorias são mais significativas com altos desvios nos dados esparsos. O método com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$  tende a suavizar as grandes variações geradas pelo erro aditivo, obtendo médias de erro ligeiramente menores do que com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$ .

## 7.2 Filtragem de dados esparsos

Os métodos fundamentais e o proposto podem ser utilizados para detectar conjuntos de pontos que se estruturam sobre superfícies. Essa aplicação de filtragem pode ser útil em pré-processamentos para eliminar pontos não organizados. Os pontos classificados como organizados podem ser a entrada de processos subsequentes.

Em geral, assume-se que os dados esparsos sejam formados por  $ne$  pontos estruturados sobre superfícies e  $nd$  pontos desorganizados que foram incorretamente obtidos ou cuja norma do erro aditivo é bastante superior ao dos pontos organizados. Com esses



**Figura 7.28:** Reconstrução de uma superfície ( $\sigma = 1$ ) formada por 250 pontos com erro aditivo de distribuição  $\mathcal{N}(0; 0,05^2)$ .

dados, o processo de filtragem deve ser capaz de segmentar os  $ne$  pontos, classificando-os como organizados.

As matrizes simétricas  $\mathbf{M}_i = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \lambda_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T + \lambda_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T$ , resultantes dos processos de acumulação esparsa, fornecem a medida de pertinência de normal

$$s(\mathbf{M}_i) = \lambda_1 - \lambda_2$$

para cada ponto de entrada  $P_i$  que é um forte indicador de organização sobre superfícies. A partir desses valores, pode-se estabelecer hipóteses para determinar pontos organizados.

Obviamente, isso depende da capacidade dos métodos de obter pertinências consistentes na acumulação esparsa. Refinamentos sucessivos da inferência primária de orientação, como o proposto nesta tese, melhoram a avaliação da organização e a filtragem de dados esparsos.

Para uma filtragem ideal, a acumulação esparsa deve ser capaz de atribuir pertinência máxima aos pontos estruturados e mínima aos desorganizados. Nos métodos de Guy, Lee e no método que se propõe, há apenas uma tendência nesse sentido. Pontos organizados tendem a ter pertinências maiores que os desorganizados. Esse aspecto bimodal da distribuição de medidas de pertinência permite o estabelecimento de um limiar de separação entre os dois conjuntos como hipótese de filtragem.

Assim, dado um conjunto  $D$  de  $n$  elementos e suas respectivas matrizes simétricas  $\mathbf{M}_i$  resultantes da acumulação esparsa, pode-se definir um limiar  $l$  que classifica os pontos  $P_i \in D$  da seguinte maneira:

- se  $s(\mathbf{M}_i) \geq l$ ,  $P_i$  está organizado sobre uma superfície;
- se  $s(\mathbf{M}_i) < l$ ,  $P_i$  não está organizado.

As medidas de pertinência devem ser normalizadas entre 0 e 1 para facilitar a escolha empírica do limiar  $l$ . Pode-se aplicar esse critério de segmentação iterativamente, descar-

tando somente pontos com baixíssima pertinência a cada passo. Nesta seção, procura-se avaliar a capacidade dos métodos de classificar todos os pontos corretamente em um único passo.

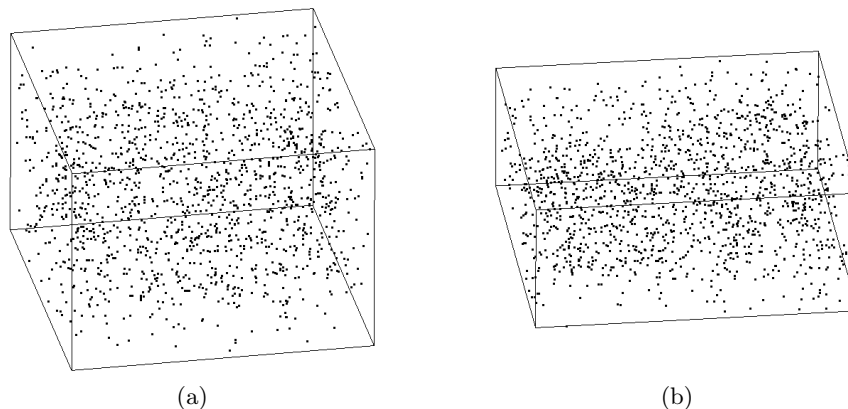
Como indicador de eficácia da filtragem, propõe-se um **índice de pontos corretamente classificados**

$$ipc = \frac{nec}{2 \cdot ne} + \frac{ndc}{2 \cdot nd},$$

onde  $nec$  e  $ndc$  são o número de pontos corretamente classificados entre os  $ne$  pontos estruturados e os  $nd$  desorganizados respectivamente. Esse índice é a média das frações de pontos estruturados e desorganizados corretamente classificados, podendo variar de 0,50 a 1 em função do limiar de pertinência  $l$ .

### 7.2.1 Aplicação do processo de filtragem

A Figura 7.29 ilustra um elipsóide e uma superfície aberta gerados conforme descrito nas Seções 7.1.2.3 e 7.1.2.4. O alto nível de ruído dificulta bastante a filtragem dos pontos. Entretanto, todos os métodos obtiveram bons resultados de classificação com  $l=0,30$ . Esse limiar foi escolhido pela observação da distribuição de pertinências (Fig. 7.32).

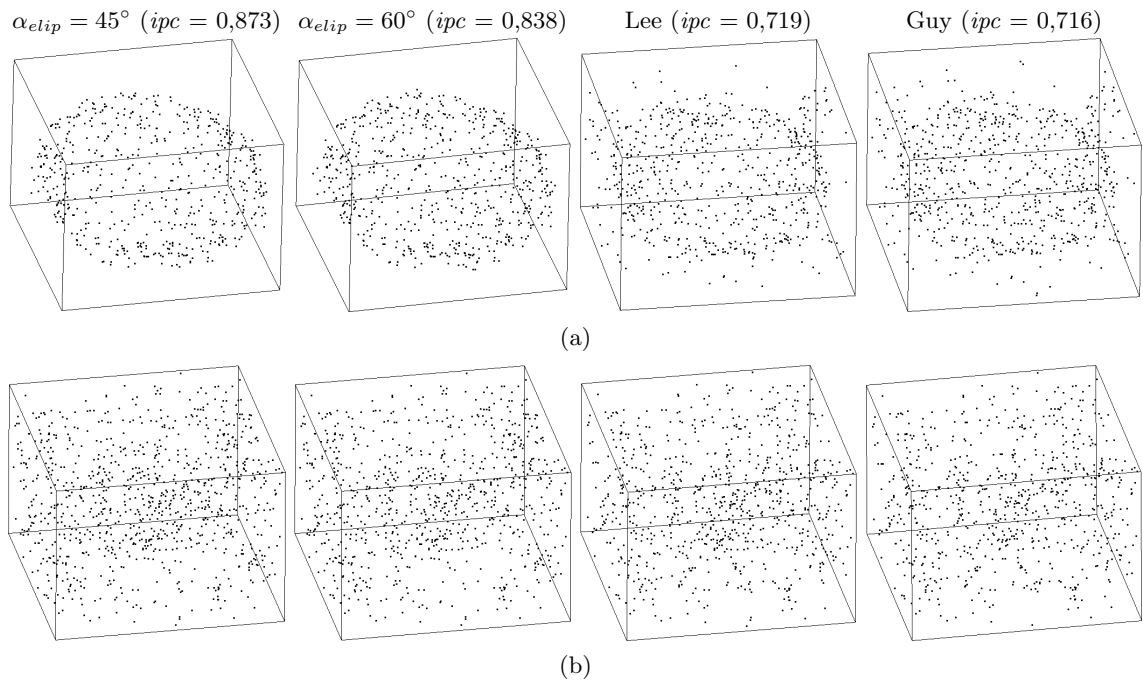


**Figura 7.29:** Dados esparsos utilizados na aplicação de filtragem. Ambos os modelos são formados por 250 pontos com erro aditivo de distribuição  $\mathcal{N}(0; 0,02^2)$  e com 1250 pontos incorretos (500%). (a) Elipsóide. (b) Superfície aberta.

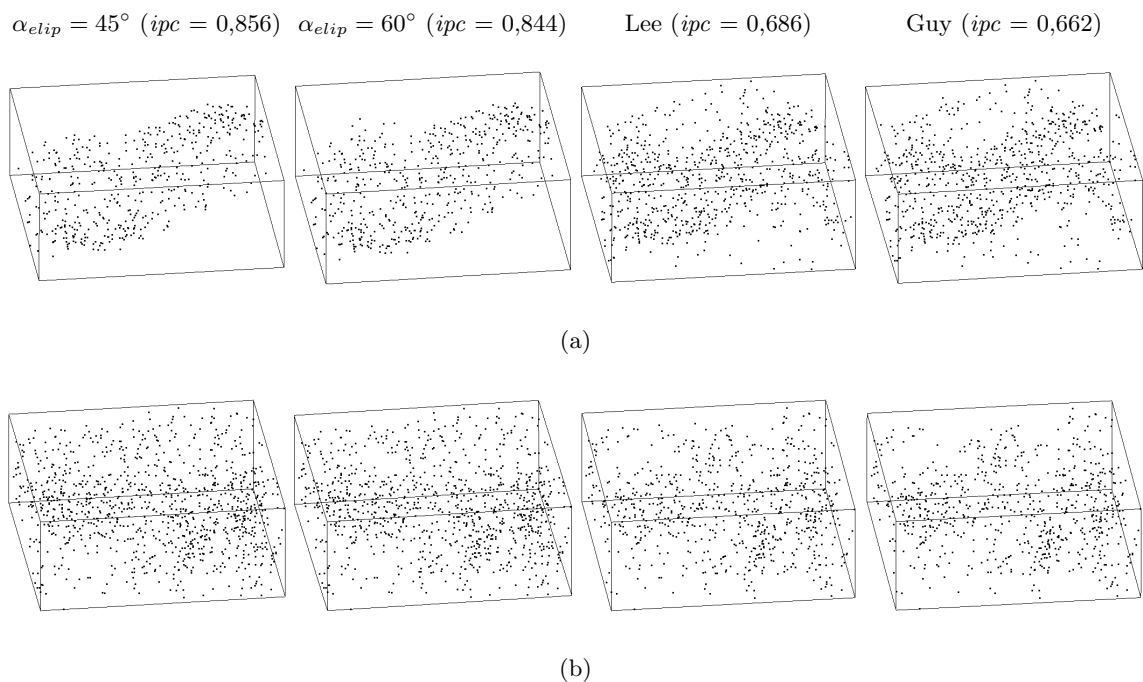
Os resultados da filtragem do elipsóide e da superfície aberta estão ilustrados nas Figuras 7.30 e 7.31 respectivamente. Visualmente, verifica-se que os métodos dedicados classificam melhor os dados esparsos. Eles são mais eficazes na identificação de pontos organizados sobre superfícies (Fig. 7.30a e 7.31a). Note que o número de pontos incorretos classificados como organizados é maior nos métodos de Guy e Lee.

O desempenho dos métodos pode ser comparado pelo índice de pontos corretamente classificados  $ipc$ . Os maiores valores de  $ipc$  dos métodos dedicados indicam que eles segmentaram melhor os dois conjuntos de pontos. Os índices dos métodos de Guy e Lee refletem sua baixa eficácia na determinação de pontos não organizados (Tab. 7.1). Os melhores resultados foram obtidos com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$ , enquanto os piores foram obtidos com o método de Guy.

A Tabela 7.1 apresenta alguns resultados numéricos da filtragem. Verifica-se que



**Figura 7.30:** Resultado da filtragem do elipsóide (Fig. 7.29a) com  $l=0,30$  e  $dmax=0,30$ . (a) Pontos classificados como organizados sobre superfície. (b) Pontos classificados como desorganizados.



**Figura 7.31:** Resultado da filtragem da superfície aberta (Fig. 7.29b) com  $l=0,30$  e  $dmax=0,30$ . (a) Pontos classificados como organizados sobre superfície. (b) Pontos classificados como desorganizados.

parte dos pontos incorretos gerados são classificados como estruturados por estarem bastante próximos às superfícies. Esse é o caso da maioria dos 25% de pontos incorretos classificados como estruturados no método com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$ .

**Tabela 7.1:** Resultados da filtragem dos dados esparsos com  $l=0,30$  e  $dmax=0,30$ .

			Elipsóide	Superfície aberta
<b>Pontos sobre superfície</b> ( $n=250$ )	$\alpha_{elip} = 45^\circ$	Média de pertinência	0,584	0,529
		Desvio-padrão de pertinência	0,186	0,197
		Pontos detectados ( $\geq 0,30$ )	249 (99,6%)	227 (90,8%)
	$\alpha_{elip} = 60^\circ$	Média de pertinência	0,609	0,540
		Desvio-padrão de pertinência	0,184	0,195
		Pontos detectados ( $\geq 0,30$ )	249 (99,6%)	230 (92%)
	Lee	Média de pertinência	0,529	0,497
		Desvio-padrão de pertinência	0,191	0,196
		Pontos detectados ( $\geq 0,30$ )	204 (81,6%)	204 (81,6%)
	Guy	Média de pertinência	0,537	0,512
		Desvio-padrão de pertinência	0,188	0,207
		Pontos detectados ( $\geq 0,30$ )	213 (85,2%)	198 (79,2%)
<b>Pontos incorretos</b> ( $n=1250$ )	$\alpha_{elip} = 45^\circ$	Média de pertinência	0,227	0,219
		Desvio-padrão de pertinência	0,209	0,210
		Pontos detectados ( $< 0,30$ )	938 (75%)	1004 (80,3%)
	$\alpha_{elip} = 60^\circ$	Média de pertinência	0,247	0,246
		Desvio-padrão de pertinência	0,215	0,213
		Pontos detectados ( $< 0,30$ )	851 (68%)	961 (76,9%)
	Lee	Média de pertinência	0,295	0,301
		Desvio-padrão de pertinência	0,181	0,191
		Pontos detectados ( $< 0,30$ )	778 (62,2%)	696 (55,7%)
	Guy	Média de pertinência	0,318	0,315
		Desvio-padrão de pertinência	0,189	0,191
		Pontos detectados ( $< 0,30$ )	724 (57,9%)	665 (53,2%)

Observa-se que os métodos dedicados obtêm distribuições de pertinência mais favoráveis à filtragem (Fig. 7.32). De fato, a diferença entre as médias do conjunto de pontos estruturados e do conjunto de pontos incorretos é menor nos métodos de Guy e Lee. Os desvios-padrão desses métodos indicam uma maior interseção da distribuição de pertinências dos dois conjuntos, o que dificulta a classificação por limiar.

As distribuições apresentadas na Figura 7.32 mostram a tendência dos métodos dedicados de melhor segmentarem os dados esparsos. Veja que esses métodos atribuem pertinências menores e menos dispersas aos pontos incorretos e maiores aos pontos estruturados. Como consequência, os dois conjuntos estão mais separados do que nos métodos de Guy e Lee. Isso é mais evidente para o conjunto de pontos incorretos (Fig. 7.32b,d).

## 7.2.2 Resultados quantitativos

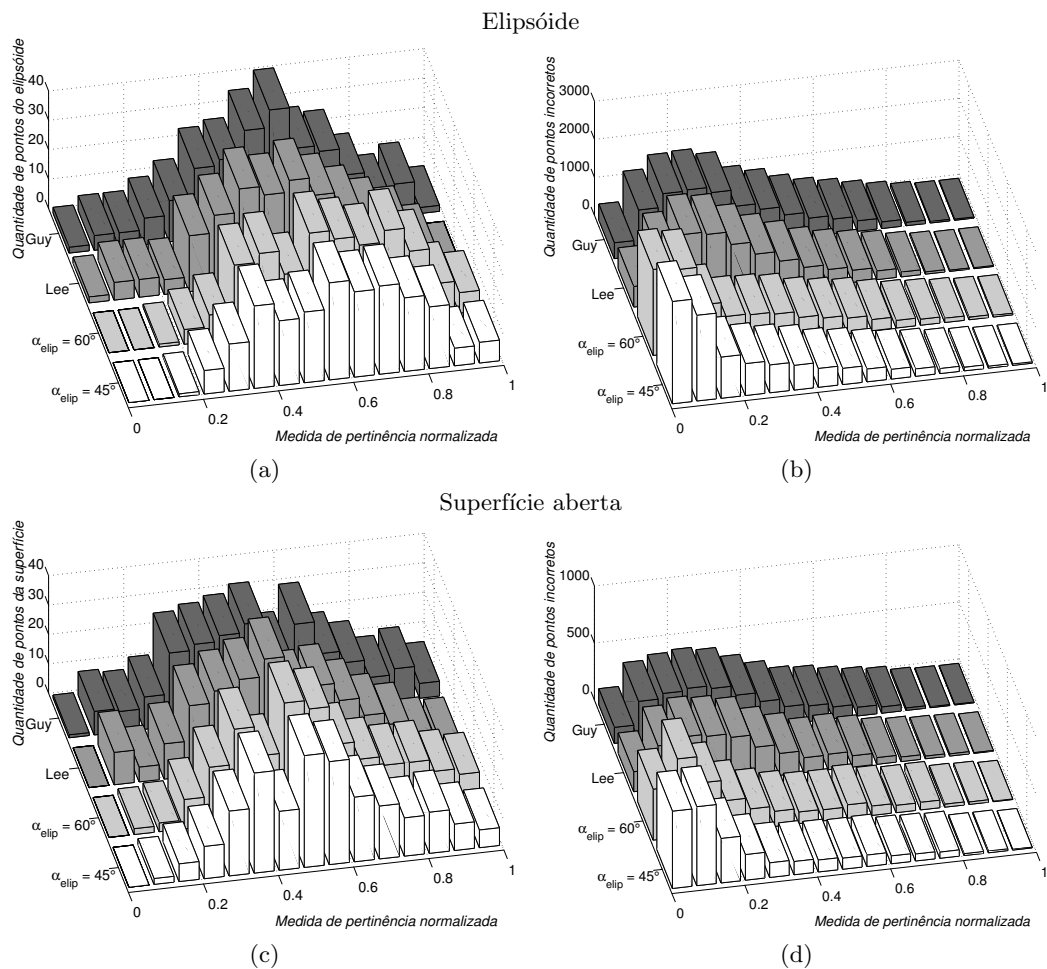
Os resultados de filtragem apresentados correspondem a duas configurações particulares de dados esparsos (Fig. 7.29). Isoladamente, não se pode dizer que esses resultados são os mais prováveis. Para evidenciar o comportamento dos métodos, é necessário um grande número de filtrações.

Um indicador de eficácia de filtragem mais preciso pode ser calculado pela média de  $k$  índices de pontos corretamente classificados

$$\overline{ipc} = k^{-1} \sum_k ipc_i ,$$

relativos a filtragem de  $k$  conjuntos esparsos de pontos, obtidos nas mesmas condições.

Como realizado na Seção 7.1.2, gráficos de evolução desse índice médio podem evi-

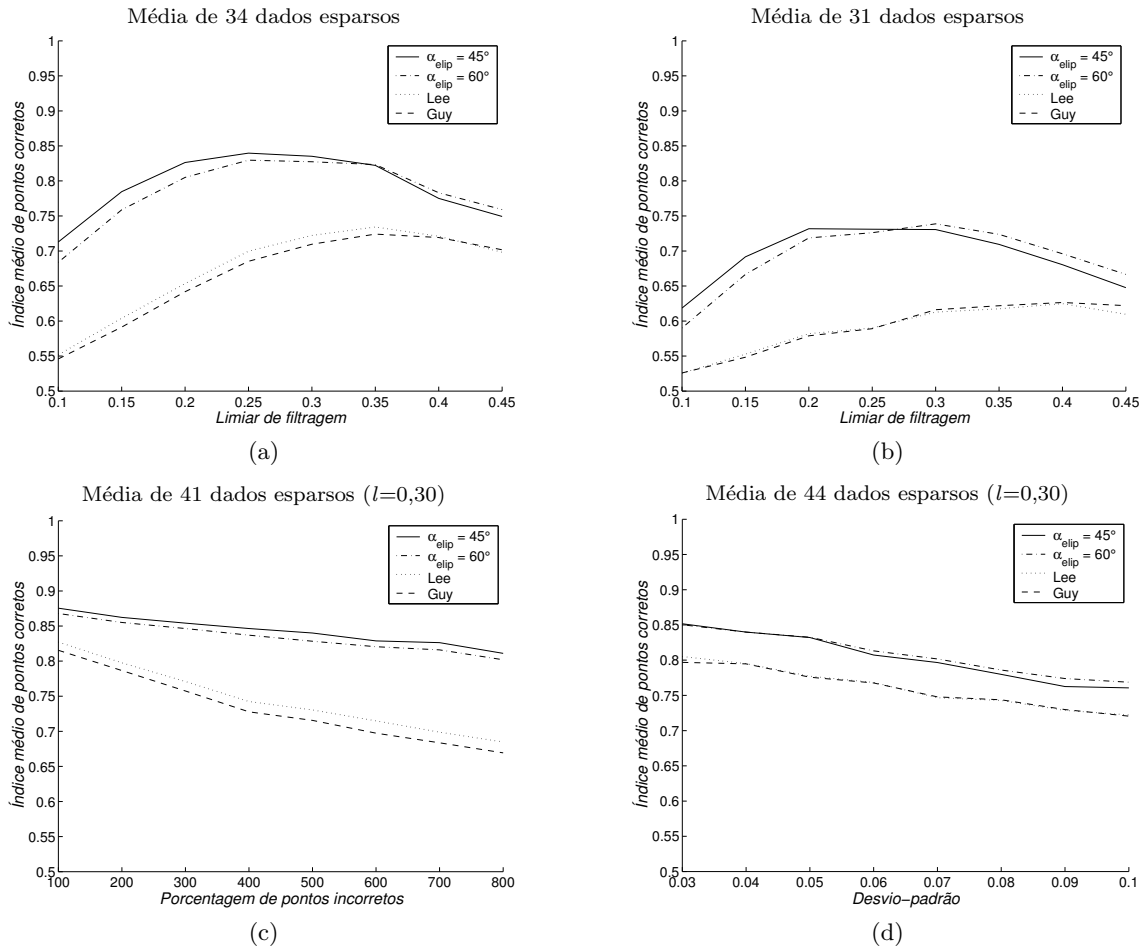


**Figura 7.32:** Histograma das medidas de pertinência obtidas na filtragem dos dados esparsos. (a) (c) Distribuição das pertinências dos 250 pontos que formam os objetos. (b) (d) Distribuição das pertinências dos 1250 pontos incorretos.

denciar o comportamento dos métodos em situações específicas. A evolução do  $\overline{ipc}$  da filtragem de elipsóides e superfícies abertas com várias formas é apresentada nas Figuras 7.33 e 7.34. Cada conjunto esparsos foi obtido conforme descrito nas Seções 7.1.2.3 e 7.1.2.4.

Os gráficos 7.33a,b e 7.34a,b mostram a variação do  $\overline{ipc}$  em função do limiar de filtragem  $l$ . Nos gráficos (a), os objetos são formados por 250 pontos com erro aditivo de distribuição  $\mathcal{N}(0; 0,02^2)$  e com 1250 pontos incorretos. O nível de ruído é bastante superior nos gráficos (b), com erro aditivo de distribuição  $\mathcal{N}(0; 0,08^2)$  e com 2500 pontos incorretos. O pico das curvas indica o limiar que, em média, provê melhores resultados para esses casos.

Os métodos dedicados obtiveram resultados melhores em todo o intervalo. Isso indica que eles são menos sensíveis quanto à definição do limiar. Há uma ligeira translação horizontal entre as curvas dos métodos dedicados. Os picos de  $\overline{ipc}$  são os mesmos mas ocorrem em limiares distintos. Esse deslocamento é menor no caso de superfícies abertas (Fig. 7.34a,b). Os métodos de Guy e Lee possuem comportamento semelhante. Entretanto, nota-se pela Figura 7.34a que o de Lee provê melhores resultados que o de Guy.



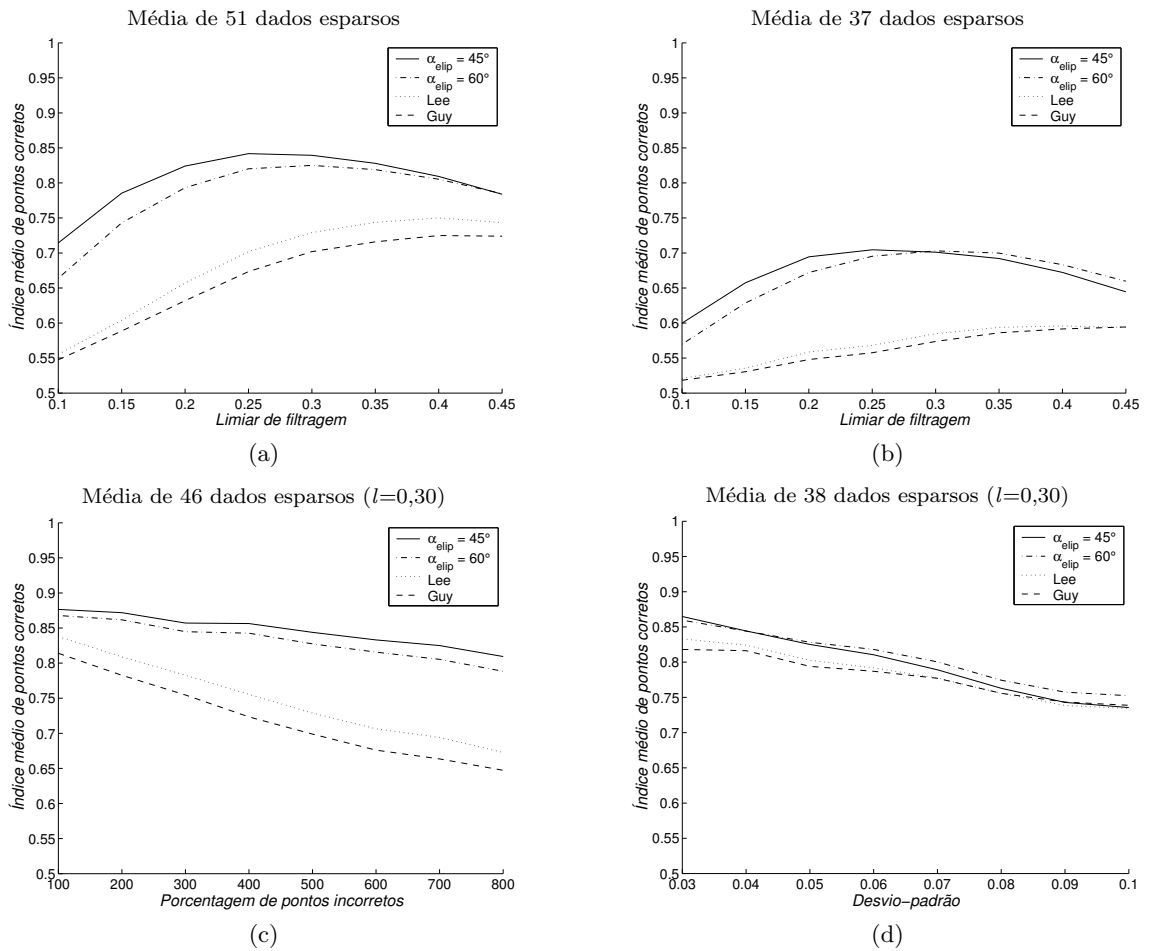
**Figura 7.33:** Gráficos de evolução do índice médio de pontos corretamente classificados na filtragem de elipsóides. Utilizou-se  $d_{max}=0,30$  em todos os métodos. Os elipsóides são formados por 250 pontos com erro aditivo de distribuição  $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$  e com  $q$  pontos incorretos. (a)  $\sigma = 0,02$  e  $q = 1250$  (500%). (b)  $\sigma = 0,08$  e  $q = 2500$  (1000%). (c)  $\sigma = 0,01$ . (d)  $q = 250$  (100%).

A variação do  $\overline{ipc}$  em função da quantidade de pontos incorretos é apresentada nos gráficos 7.33c e 7.34c. Os dados são gerados com erro aditivo de distribuição  $\mathcal{N}(0; 0,01^2)$ . Os resultados da filtragem de elipsóides e superfícies abertas são semelhantes. O paralelismo entre as curvas dos métodos dedicados e entre as curvas dos métodos de Guy e Lee indica que eles têm o mesmo comportamento.

Em geral, os métodos dedicados filtram com maior eficácia, obtendo bons resultados ( $\overline{ipc} > 0,80$ ) mesmo com altos níveis de ruído. A diferença entre os índices dos métodos dedicados e os de Guy e Lee é proporcional à quantidade de pontos incorretos. Em todos os casos, o método de Lee é ligeiramente melhor que o de Guy.

O comportamento dos métodos quanto a presença de ruído aditivo de distribuição normal está ilustrado nas Figuras 7.33d e 7.34d. Os dados são gerados com 250 pontos incorretos. Todos os métodos possuem comportamento semelhante, principalmente na filtragem de superfícies abertas (Fig. 7.34d). Entretanto, nota-se que o método com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$  obtém melhores resultados com grandes desvios.

Os bons resultados dos métodos dedicados é uma consequência direta das proposições desta tese. A filtragem depende da avaliação da organização dos dados esparsos. As



**Figura 7.34:** Gráficos de evolução do índice médio de pontos corretamente classificados na filtragem de superfícies abertas. Utilizou-se  $d_{max}=0,30$  em todos os métodos. As superfícies são formadas por 250 pontos com erro aditivo de distribuição  $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$  e com  $q$  pontos incorretos. (a)  $\sigma = 0,02$  e  $q = 1250$  (500%). (b)  $\sigma = 0,08$  e  $q = 2500$  (1000%). (c)  $\sigma = 0,01$ . (d)  $q = 250$  (100%).

melhorias obtidas nesse sentido, principalmente pelo processo de inferência refinada de orientação (Seção 6.1.4), são responsáveis pela maior eficácia do método dedicado.

### 7.3 Síntese conclusiva

Este capítulo apresenta diversos experimentos com os métodos fundamentais e o método proposto. Busca-se evidenciar empiricamente a validade das discussões realizadas na fundamentação crítica e no desenvolvimento metodológico. Os métodos são avaliados nas aplicações de reconstrução de superfícies e filtragem de dados esparsos. O método dedicado foi aplicado com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$  e  $\alpha_{elip} = 60^\circ$ .

A aplicação de reconstrução de superfícies é avaliada através de resultados qualitativos e quantitativos. Nos qualitativos, diversos objetos e amostragens são reconstruídos para uma comparação visual. Cortes realizados nas grades discretas ilustram as medidas de pertinência resultantes. Apresenta-se reconstruções de objetos fechados, com altos níveis de ruído, com topologia complexa e com superfícies que se interceptam.



O protocolo de avaliação quantitativa é baseado em uma estimativa de erro médio, calculada pela reconstrução de vários objetos obtidos nas mesmas condições. Os resultados são apresentados em gráficos de evolução dessa média em função de três fatores: distância máxima de ação dos campos, quantidade de pontos incorretos e desvio-padrão do erro aditivo. O objetivo é evidenciar o comportamento dos métodos em relação a esses fatores.

O protocolo é aplicado em três classes de objetos: esferas, elipsóides e superfícies abertas. Respectivamente, cada classe ilustra o comportamento dos métodos na reconstrução de superfícies de curvatura constante, fechadas com curvatura variável e abertas com curvatura variável. Os gráficos obtidos são semelhantes e indicam que os métodos dedicados provêm melhores resultados.

A aplicação de filtragem de dados esparsos objetiva determinar quais pontos estão organizados sobre superfícies. Primeiramente, avalia-se a filtragem de dois conjuntos esparsos que formam um elipsóide e uma superfície aberta. A comparação é feita por um índice que corresponde à porcentagem de pontos corretamente classificados.

Em seguida, utiliza-se a média dos índices da filtragem de diversos dados esparsos para uma avaliação quantitativa. Os resultados são apresentados em gráficos de evolução dessa média em função do limiar de filtragem, da quantidade de pontos incorretos e do desvio-padrão do erro aditivo. A filtragem de elipsóides e superfícies abertas demonstra que os métodos dedicados são mais eficazes na segmentação de dados estruturados.

## Capítulo 8

# Conclusões e sínteses

Neste capítulo apresenta-se conclusões sobre os diversos temas discutidos nesta tese. Realiza-se uma síntese conclusiva dos trabalhos fundamentais. As conclusões da tese se baseiam no capítulo de epistemologia crítica (Cap. 5) e nos resultados das aplicações experimentais (Cap. 7).

### 8.1 Síntese de conclusões analíticas

Esta seção apresenta algumas conclusões sobre os trabalhos fundamentais que foram realizadas ao longo da tese. O objetivo é proporcionar uma visão geral de tais conclusões e assim caracterizar todos os métodos. As conclusões feitas nesta seção se estendem ao método dedicado proposto nesta tese porque ele está inserido no paradigma de Guy.

#### **Agrupamento perceptivo e reconstrução em 2D**

Guy apresenta um novo paradigma de reconstrução de superfícies. Devido às suas aspirações no campo de agrupamento perceptivo, seu método tem a importante característica de inferir a organização espacial de dados esparsos mesmo sob forte presença de ruído.

Embora o método tenha sido originalmente concebido para fechamento de contornos em imagens e detecção de contornos ilusórios, a sua aplicação nesses problemas é dificultada pelos diversos ajustes necessários (Seção 5.1.1). No problema de fechamento de contornos, a presença de ruído estruturado pode perturbar as conexões mais relevantes. Como os campos de influência têm extensão fixa, as regiões com baixa densidade de pontos podem não ter contornos extraídos, enquanto as de alta podem gerar bordas aberrantes.

*O método de Guy tem aplicação limitada nos problemas de fechamento de contornos em imagens e detecção de contornos ilusórios. Aplicações reais são inviabilizadas por sua sensibilidade a dados com densidade variável ou com ruído estruturado.* ■

#### **Limitações na reconstrução**

Os métodos do paradigma de Guy podem ser classificados como métodos baseados em superfície de nível (Seção 2.2). Esses métodos não podem determinar corretamente as fronteiras de um objeto porque não utilizam funções de distância. Nem toda superfície de

valor zero corresponde ao objeto a ser reconstruído. Assim, resultados aberrantes ou com buracos podem ser gerados se (Seção 5.1.3):

- a extensão dos campos de influência não é compatível com a densidade dos dados de entrada;
- há superfícies que se interceptam;
- há forte presença de ruído;
- há ruído estruturado;
- o objeto tem topologia complexa;
- densidade dos dados é variável;
- a grade tem resolução insuficiente para separar os dados de entrada.

*Ao contrário do que é sugerido por Guy e Lee, a eficácia de seus métodos depende da topologia do objeto e da amostragem dos dados esparsos. Interseções de superfícies geram buracos, e objetos com fronteiras não podem ser corretamente reconstruídos. O tamanho dos campos de influência é fixo, o que pode inviabilizar a reconstrução de dados esparsos com densidade de amostragem variável.* ■

### Reconstrução de curvas e interseções de superfícies

Fortes respostas de pertinência nos mapas de curvas e junções indicam a impossibilidade de se inferir normais por causa de ruído ou interseções de superfícies. Isso impede a reconstrução total de objetos que se interceptam, limitando a aplicação dos métodos nesse tipo de topologia.

*O método de Guy e o método dedicado proposto não extraem curvas em função do alinhamento curvilíneo dos dados de entrada. As curvas reconstruídas correspondem, no melhor caso, a interseções de superfícies. Para o método de Guy, o conceito de “método unificado” corresponde somente ao tratamento de vários tipos de entrada. O método de Lee pode reconstruir curvas, mas de forma limitada e em detrimento da reconstrução de superfícies.* ■

### Complexidade de tempo e espaço

Uma vantagem dos métodos é o fato deles não serem iterativos. Várias abordagens dependem de convergência. No melhor caso, a complexidade de tempo de todos os métodos apresentados é  $O(n^2)$ , onde  $n$  é o número de elementos de entrada. Isso corresponde à inferência inicial de orientação que ocorre somente nos elementos de entrada. No pior caso, a complexidade é  $O(n^2 + kn + p)$ , onde  $k$  é o número de elementos induzidos por um campo de influência e  $p$  é a complexidade de extração de estruturas.

O fator  $k$  depende da extensão dos campos e do tamanho da grade discreta. Se a densidade dos pontos for alta, é necessário uma grade de maior resolução. A complexidade de extração  $p$  depende dos dados de entrada e das dimensões da grade discreta.

*Na prática, o algoritmo força bruta para os métodos é bastante lento, inviabilizando a reconstrução de dados esparsos com muitos elementos. A complexidade de espaço depende das dimensões da grade discreta de tensores, sendo outra limitação dos métodos.* ■

## Os parâmetros

Guy diz que seu método é livre de parâmetros enquanto Lee diz que o parâmetro  $\sigma$  não é crítico. Essas afirmações são falsas, de acordo com as discussões da Seção 5.1.3.

*A extensão dos campos de influência é crítica para a reconstrução, e as dimensões da grade discreta influenciam fortemente o resultado. Os limiares para identificar as fronteiras dos objetos são cruciais para a extração de superfícies. A necessidade de se fornecer o número de estruturas esperado limita aplicações gerais.* ■

## 8.2 Síntese de conclusões metodológicas

As conclusões a seguir fazem parte da fundamentação crítica aos trabalhos de Guy e Lee (Cap. 5.3). Elas formam a base para as propostas do desenvolvimento metodológico no sentido de melhor avaliar a organização de dados esparsos.

### A interpretação dos tensores de orientação

A informação contida no tensor de orientação deve ser interpretada de acordo com o processo pelo qual ela é obtida. A codificação tensorial e o conjunto de ações desse processo determina o que é inferido (Seção 5.3.4).

*Para inferir orientações, uma estrutura principal deve ser codificada nos tensores. Todas as informações obtidas por acumulação se referem a ela. Assim, o tensor de orientação de Westin representa hierarquicamente os níveis de complexidade espacial dessa estrutura.* ■

Os métodos de Guy e Lee codificam normais como direção principal de suas representações. Por isso, a informação de curva resultante está relacionada com a indecisão na inferência de normais. Ao contrário do sugerido, essa informação não é independente da inferência de superfícies.

### Reconstrução de curvas pelo método de Lee

O método de Lee é capaz de reconstruir curvas formadas pelos dados de entrada. Seu campo para disco morfologicamente define curvas e é usado para propagar a informação de tangente obtida após a acumulação esparsa (Seção 5.3.2.3).

*Lee avança no sentido de se fazer um método unificado de reconstrução. Seu campo para disco (ponto-tangente) é capaz de induzir curvas a partir de alinhamentos curvilíneos de pontos. Esse aspecto é limitado porque a estrutura principal é definida por superfícies.* ■

Lee classifica a informação de tangente inferida nos dados esparsos como importante na reconstrução de superfícies. Todavia, essa informação pode ser interpretada como incerteza na inferência de normais. Ela reflete uma estruturação linear da vizinhança que, inclusive, pode estar associada a ruído.

*A propagação dessa informação perturba a reconstrução de superfícies. O campo para disco não codifica conexões suaves de superfície e pode, mesmo se a tangente não for causada por ruído, distorcer a ação do campo para normais.* ■

### Os campos de influência

A capacidade de indução de cada elemento dos campos de influência pode, localmente, promover conexões não alinhadas com as do campo vetorial (Seção 5.3.3).

*O campo de influência para normais dos métodos é composto por um campo escalar, ou de força, e um campo vetorial. O campo gradiente de força também tem ação global na definição das trajetórias preferenciais de conexão. Isso deve ser levado em consideração na construção de campos de influência.* ■

Guy e Lee derivam seus campos escalares e ajustam seus parâmetros empiricamente. Esses campos têm a propriedade de deslocar a origem nos dois sentidos do eixo  $x$  e promover conexões diretas a esses deslocamentos. Portanto, seus campos de influência não promovem conexões circulares tal como eles argumentam.

*Embora não realizem conexões circulares, os campos de Guy e Lee são bem adaptados aos seus métodos. A função de força proposta por Lee (Eq. 4.5) é mais eficaz em reconstruções com inferência inicial primária de orientações (Seção 6.1.4.1).* ■

De fato, não se obtém necessariamente os melhores resultados com conexões circulares. Dados esparsos com ruído aditivo gaussiano, por exemplo, podem ser melhor reconstruídos com curvaturas de conexão menores (Seção 6.1.3.1).

*Campos de influência definem trajetórias preferenciais de conexão. Sua construção depende do tipo de estrutura que se quer reconstruir e da natureza dos dados esparsos.* ■

### O método unificado

Tanto Guy quanto Lee tentam aproveitar todas as informações contidas nas matrizes após a acumulação. Essa idéia é legítima, pois essas são informações estruturais relevantes dos dados esparsos. O que se questiona é o enfoque realizado: reconstruir curvas e superfícies ao mesmo tempo e sem casos especiais (Seção 5.3.4).

*Nos dois métodos, a estrutura principal é clara: os tensores codificam principalmente normais e os campos são construídos para determinar superfícies. O que é chamado de atributo de curva é de fato o primeiro nível de indecisão de normais.* ■

Dessa forma, a reconstrução de curvas fica prejudicada se os dados estiverem estruturados como superfícies. Além disso, o uso indevido da informação secundária pode perturbar a determinação da estrutura principal (Seção 5.3.2.3).

*Métodos dedicados a cada tipo de estrutura são mais pertinentes para a reconstrução. Isso envolve uma representação tensorial específica, campos morfologicamente apropriados e um conjunto de ações dedicado.* ■

### A inferência inicial de orientação

A inferência inicial dos métodos provê a orientação e o fator de multiplicação de cada campo de influência no momento da acumulação densa (Seção 6.1.4).

*A fase de inferência inicial de orientações é crucial para a reconstrução. É evidente*

*que normais consistentes e medidas de pertinência equilibradas são importantes para se obter superfícies com qualidade e robustez.* ■

Guy e Lee propõem apenas uma estimação primária de orientações e pertinências. Acredita-se que tal processo não é suficiente para uma boa avaliação da organização espacial de dados esparsos.

### 8.3 Conclusões metodológicas de experimento

As discussões realizadas na fundamentação crítica (Seção 5.3) indicaram caminhos para melhor avaliar a organização espacial de dados esparsos. A partir dessas discussões, formaram-se as seguintes hipóteses básicas:

- um método dedicado de reconstrução é mais pertinente que um método unificado;
- a inferência inicial de orientações é crucial para a reconstrução;
- a morfologia de campos vetoriais e de campos gradiente de força deve estar consistentes com as conexões desejadas, com a representação tensorial e com o processo de acumulação.

O método dedicado a superfícies proposto está baseado nestas hipóteses. As escolhas feitas para esse método objetivam avaliar melhor a organização de dados esparsos para se obter, com robustez, superfícies suaves. Os resultados apresentados e discutidos no Capítulo 7 permitem verificar a validade dessas escolhas.

#### Reconstrução dedicada à superfícies

A dedicação do método à superfícies está no fato de que todas as etapas estão voltadas para a inferência de normais (Fig. 6.1). Cada uma dessas etapas contribuiu positivamente nos resultados qualitativos e quantitativos obtidos na reconstrução de superfícies.

*A interpretação específica do tensor de orientação, a construção apropriada dos campos de influência e a inferência inicial refinada permitem uma avaliação mais consistente de normais. O método resultante se mostrou menos sensível à variações nos parâmetros e à presença de ruído.* ■

#### Refinamento da inferência primária

Por melhor avaliar a organização espacial de dados esparsos, esse processo diminuiu consideravelmente a pertinência de pontos que não estão estruturados como superfície. Note na Figura 7.6a,b que o ruído foi excluído pela inferência inicial. Isso explica o excelente desempenho do método dedicado nos resultados quantitativos com ruído e nos resultados de filtragem.

As Figuras 7.30 e 7.31 demonstram a eficácia superior do método dedicado na aplicação de filtragem (Seção 7.2). Essa aplicação comprova a importância da inferência refinada na avaliação da organização de dados esparsos.

Os resultados da reconstrução do oval de Cassini com pontos incorretos (Pág. 104) e as estimativas de evolução de erro em função da presença de ruído (Seção 7.1.2) demonstram os efeitos positivos da fase de refinamento na aplicação de reconstrução.

O equilíbrio das medidas de pertinência estimadas é responsável pela menor sensibilidade do método a variações de  $dmax$  (Fig. 7.14, 7.19 e 7.24). O mesmo é válido para todos os modelos apresentados nos resultados qualitativos. Nos cortes ilustrados nas Figuras 7.3 e 7.13, pode-se verificar que os máximos locais de pertinência variam menos.

*O refinamento da inferência primária é o diferencial mais importante do método proposto. Sua avaliação de orientações mais consistente define melhor a organização dos dados esparsos e reduz a sensibilidade do método quanto a ruído.* ■

### Trajetórias elípticas

Trajetórias de conexão elípticas foram propostas para se poder ajustar o método a diferentes tipos de dados esparsos. Trata-se de uma alternativa à idéia equivocada de Guy de que conexões circulares são, em geral, o melhor para a reconstrução.

O comportamento do método que se propõe em dados com ruído aditivo gaussiano mostra que conexões de menor curvatura geram melhores resultados (Fig. 7.17, 7.22, 7.33d e 7.34d).

Na maioria dos casos, o método com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$  forneceu superfícies mais suaves que o método com  $\alpha_{elip} = 45^\circ$ . Isso pode ser notado nas Figuras 7.2, 7.8 e 7.10.

*Campos de influência com curvatura ajustada aos dados de entrada podem gerar resultados melhores. Nesse sentido, curvaturas menores que a circular ( $\alpha_{elip} > 45^\circ$ ) são mais eficazes na inferência de superfícies de dados com ruído aditivo.* ■

Os experimentos se limitaram a dados com ruído aditivo de distribuição normal. Entretanto, o método proposto obteve bons resultados em dados com grandes quantidades de pontos incorretos (Fig. 7.5, 7.30 e 7.31). Com base nessa observação, acredita-se que o método também seja robusto a dados com ruído aditivo com outras distribuições.

### Morfologia do campo para ponto-normal

O campo para ponto-normal é fundamental para a reconstrução (Seção 6.1.3.1). Conforme discutido, trajetórias elípticas tornam o método mais flexível. Entretanto, os campos vetorial e de força com trajetórias preferenciais idênticas, em geral, não promovem superfícies mais suaves como esperado.

Na verdade, resultados mais suaves são obtidos com campos mais extensos, i.e., com valores maiores de  $dmax$ . Isso não é satisfatório pois, dessa forma, aumentam-se os riscos de haver influência cruzada entre pontos, diminuindo a robustez do método.

Um dos problemas é a discretização do campo na grade tridimensional. Resoluções baixas, como as que foram utilizadas, causam deslocamentos que diminuem a qualidade do resultado. Basta imaginar um feixe de trajetórias distintas passando em um voxel. Quanto maior o número de feixes e maior suas curvaturas, mais difícil é a determinação da orientação e da medida de pertinência desse voxel.

Isso pode explicar o bom desempenho dos campos de força de Guy e Lee que promovem conexões retas a partir de um certo ponto. Os resultados mais suaves obtidos com  $\alpha_{elip} = 60^\circ$  também podem estar relacionados a uma discretização insuficiente do espaço.

Outro problema é a mudança brusca de força nos limites do ângulo máximo de ação, principalmente nas proximidades do ponto de referência. Isso pode causar distorções nessas

regiões no momento da extração de superfícies. O deslocamento da origem realizada pelo campo de força de Lee reduz esse efeito.

As magnitudes do campo gradiente de força podem ser ajustadas para amenizar os problemas acima. Definir trajetórias elípticas com curvaturas diferentes para o campo vetorial e de força também pode melhorar os resultados. O campo com curvatura menor poderia reduzir os efeitos da discretização.

## 8.4 Conclusões epistemológicas

A primeira conclusão epistemológica é a de que Guy define um novo paradigma para reconstrução de superfícies. Com proposições para evoluí-lo, o trabalho de Lee e esta tese estão inteiramente inseridos nesse paradigma. Eles não configuram um avanço revolucionário de idéias e nem se propõem a fazê-lo.

Guy e Lee procuram propor um método de aplicação abrangente. Obviamente, uma reivindicação nesse sentido seria ilegítima. Os métodos possuem várias limitações e, portanto, não são indicados para aplicações gerais. Uma importante conclusão é de que o método de Lee não reconstrói superfícies com melhor qualidade que o de Guy. Embora com limitações, sua contribuição está no avanço realizado no sentido de se reconstruir curvas e superfícies no mesmo processo. Portanto, as propostas realizadas recentemente no livro [MED 00] baseadas no método de Lee são discutíveis.

### 8.4.1 Contribuições da tese

O aspecto mais importante do paradigma de Guy é a inferência da organização espacial de dados esparsos. Essa característica forma o tema e os objetivos desta tese. Os objetivos epistemológicos apresentados na introdução (Seção 1.4.3) foram alcançados no desenvolvimento geral:

- os capítulos de epistemologia dos métodos de Guy e Lee apresentam suas bases e seu contexto científico;
- o capítulo de crítica epistemológica (Cap. 5) discute as contribuições, conclusões, deficiências, resultados e limitações dos métodos fundamentais;
- a fundamentação crítica (Seção 5.3) identifica os limites e possíveis extensões dos métodos e constitui a base para as proposições desta tese.

Esse estudo complementar dos trabalhos fundamentais que envolve questionamentos, discussões gerais, conclusões e proposições teóricas configura a **contribuição epistemológica** da tese.

A fundamentação crítica formou as bases para se realizar uma melhor avaliação da organização de dados esparsos. Proposições nesse sentido culminam no desenvolvimento de um método cuja característica principal é uma inferência robusta de normais:

- **método dedicado a superfícies**: representação tensorial de orientação, campos tensoriais e processos de acumulação específicos para inferência de normais;
- **campo elíptico**: permite um ajuste de curvatura para adaptar as trajetórias do campo à forma da superfície a ser inferida;



- **campo vetorial gradiente do campo de força define a trajetória do campo vetorial:** garante que as normais inferidas sejam coerentes com as conexões elípticas;
- **processo de refinamento de orientações:** utiliza o campo da estrutura principal para aumentar a precisão da inferência de normais. Com uma acumulação não linear de sucessivas inferências, esse campo age como um elemento estruturante de superfícies.

Os resultados das aplicações experimentais em dados com ruído evidenciam o caráter iminente organizativo do método. Assim, o objetivo de se propor um método para avaliar a organização de dados esparsos com maior precisão e menor sensibilidade a ruído foi atingido e configura a **contribuição metodológica** da tese.

#### 8.4.2 Possíveis extensões

Várias questões relacionadas com o paradigma de Guy restam abertas. Entre os caminhos e questões a explorar destacam-se os seguintes:

- a relação entre o campo gradiente de força e o campo vetorial não está clara;
- o refinamento de orientações iniciais proposto provê bons resultados mas outras heurísticas podem fornecer melhores;
- processos iterativos podem ser utilizados para refinar a própria reconstrução;
- campos de extensão variável podem tornar o método menos sensível a variações de densidade;
- quais os efeitos da grade discreta na reconstrução?
- quais os melhores campos de influência para a reconstrução de superfícies ou curvas?

Uma continuação pertinente seria a apresentação de um método dedicado à curvas. Bordas de edifícios obtidas com dados estereoscópicos podem ser filtradas e conectadas com tal método.

Outro caminho aberto envolve as possíveis aplicações do método dedicado (Seção 1.4.4). A informação obtida nos tensores poder ser útil em outros processos de reconstrução. Métodos de conjuntos de nível (*level set*), por exemplo, podem ser adaptados para levar em consideração as múltiplas informações do campo tensorial denso. Isso exige a derivação de equações diferenciais parciais específicas.

Em uma analogia com técnicas de morfologia matemática, os campos de influência podem ser interpretados como elementos estruturantes. Assim, o refinamento de orientações proposto nesta tese pode ser visto como uma operação morfológica. Outras operações podem ser construídas com esses campos para se obter informações espaciais.

# Bibliografia

- [ADÁ 00] ADÁN, A.; CERRADA, C.; FELIU, V. Modeling wave set: Definition and application of a new topological organization of 3d modeling. **Computer Vision, Graphics, and Image Processing**, v.79, p.281–307, 2000.
- [AHU 89] AHUJA, N.; TUCERYAN, M. Extraction of early perceptual structure in dot patterns: Integrating region, boundary, and component gestalt. **Computer Vision, Graphics, and Image Processing**, v.48, p.304–356, 1989.
- [ALT 95] ALTER, T.; BASRI, R. Extracting salient curves from images: An analysis of the saliency network, Agosto, 1995. MIT Memo 1550.
- [AME 98] AMENTA, N.; BERN, M.; KMYSSSELIS, M. A new voronoi-based surface reconstruction algorithm. In: SIGGRAPH. **Proceedings...**, 1998. p.415–421.
- [AME 99] AMENTA, N.; BERN, M. Surface reconstruction by voronoi filtering. **Discrete Computational Geometry**, v.22, n.4, p.481–504, 1999.
- [ATT 95] ATTALI, D. **Squelettes et Graphes de Voronoi 2D et 3D**. Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1995. Tese de Doutorado.
- [BAI 99] BAILLARD, C.; MAÎTRE, H. 3-d reconstruction of urban scenes from aerial stereo imagery: A focusing strategy. **Computer Vision and Image Understanding**, v.76, n.3, p.244–258, Dezembro, 1999.
- [BAJ 95] BAJAJ, C. L.; BERNARDINI, F.; XU, G. Automatic reconstruction of surfaces and scalar fields from 3d scenes. In: SIGGRAPH. **Proceedings...**, 1995. p.109–118.
- [BAL 81] BALLARD, D. H. Generalizing the hough transform to detect arbitrary shapes. **Pattern Recognition**, v.13, n.2, p.111–122, 1981.
- [BAR 98] BARDINET, E.; COHEN, L. D.; AYACHE, N. A parametric deformable model to fit unstructured 3d data. **Computer Vision and Image Understanding**, v.71, n.1, p.39–54, Julho, 1998.
- [BER 96] BERNARDINI, F.; BAJAJ, C. L.; CHEN, J.; SCKIKORE, D. R. Automatic reconstruction of 3d cad models from digital scans, 1996. Tech. Rep. submitted for publication.
- [BER 97] BERNARDINI, F.; BAJAJ, C. L. Sampling and reconstructing manifolds using alpha-shapes. In: 9TH CANADIAN CONFERENCE ON COMPUTATIONAL GEOMETRY. **Proceedings...**, 1997. p.193–198.

- [BLA 00] BLANE, M. M.; LEI, Z.; HAKAN C.; COOPER, D. B. The 3l algorithm for fitting implicit polynomial curves and surfaces to data. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.22, n.3, p.298–313, Março, 2000.
- [BOI 84] BOISSONNAT, J.-D. Geometric structures for three-dimensional shape representation. **ACM Transactions on Graphics**, v.3, n.4, p.266–286, Outubro, 1984.
- [BOI 95] BOISSONNAT, J.-D.; YVINEC, M. **Géométrie Algorithmique**. Ediscience International, Paris, 1. ed., 1995.
- [BOI 00] BOISSONNAT, J.-D.; CAZALS, F. Smooth surface reconstruction via natural neighbour interpolation of distance functions. In: ACM SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY. **Proceedings...** Hong Kong, 2000. p.223–232.
- [COR 98] CORD, M. **Analyse d’Images Aériennes Haute Résolution: Détection et Modélisation du Bâti en Zone Urbaine**. Université de Cergy-Pontoise - ENSEA, 1998. Tese de Doutorado.
- [COR 02] CORD, M.; JORDAN, M.; BELLI, T.; VIEIRA, M. B. Analyse d’images aériennes haute résolution pour la reconstruction de scènes urbaines. **Société Française de Photogrammétrie et Télédétection**, v., 2002.
- [CUR 96] CURLESS, B.; LEVOY, M. A volumetric method for building complex models from range images. In: SIGGRAPH. **Proceedings...**, 1996. p.303–312.
- [DAN 96] DANIELSON, D. A. **Vectors and Tensors in Engineering and Physics**. Addison Wesley Longman, 2. ed., 1996.
- [DAN 98] DANUSER, G.; STRICKER, M. Parametric model fitting: From inlier characterization to outlier detection. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.20, n.2, p.263–280, Março, 1998.
- [DIZ 86] DIZENZO, S. A note on the gradient of a multi-image. **Computer Vision, Graphics and Image Processing**, v.33, p.116–125, 1986.
- [DOO 58] DOOYEWEERD, H. **A New Critique of Philosophical Thought**. Philadelphia:Presbyterian and Reformed Publishing Co., 1. ed., 1958. 4 vol.
- [DUD 72] DUDA, R. O.; HART, P. E. Use of the hough transform to detect lines and curves in pictures. **Communications of the ACM**, v.15, p.11–15, 1972.
- [EAS 87] EASTMAN, R. D.; WAXMAN, A. M. Using disparity functionals for stereo correspondence and surface reconstruction. **Computer Vision, Graphics, and Image Processing**, v.39, p.73–101, 1987.
- [EDE 92] EDELSBRUNNER, H.; SHAH, N. R. Incremental topological flipping works for regular triangulations. In: ACM SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY. **Proceedings...**, 1992. p.43–52.

- [EDE 94] EDELSBRUNNER, H.; MÜCKE, E. P. Three-dimensional alpha shapes. **ACM Transactions on Graphics**, v.13, n.1, p.43–72, Janeiro, 1994.
- [FAN 49] FAN, K. On a theorem of weyl concerning eigenvalues of linear transformations. In: NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES. **Proceedings...**, 1949. v.35, p.652–655.
- [FUL 00] FULTON, W. Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and schubert calculus. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v.37, n.3, p.209–249, Abril, 2000.
- [GAL 00a] GALIN, E.; AKKOUCHE, S. Incremental polygonization of implicit surfaces. **Graphical Models**, v.62, p.19–39, 2000.
- [GAL 00b] GALLO, G.; SPAGNUOLO, M.; SPINELLO, S. Fuzzy b-splines: A surface model encapsulating uncertainty. **Graphical Models**, v.62, p.40–55, 2000.
- [GOP 00] GOPI, M.; KRISHMAN, S. A fast and efficient projection-based approach for surface reconstruction. **High Performance Computer Graphics, Multimedia and Visualization**, v.1, n.1, p.1–12, 2000.
- [GRO 85] GROSSBERG, S.; MINGOLLA, E. Neural dynamics of perceptual grouping: Textures, boundaries and emergent segmentations. **Perception & Psychophysics**, v.38, n.2, p.141–171, Fevereiro, 1985.
- [GRO 87] GROSSBERG, S.; MINGOLLA, E. Neural dynamics of surface perception: Boundary webs, illuminants, and shape-from-shading. **Computer Vision, Graphics, and Image Processing**, v.37, p.116–165, 1987.
- [GUY 93] GUY, G.; MEDIONI, G. Inferring global perceptual contours from local features. In: CVPR. **Proceedings...** New York, 1993. p.786–787.
- [GUY 95] GUY, G.; MEDIONI, G. Inference of surfaces, 3-d curves, and junctions from sparse 3-d data. In: IEEE SYMPOSIUM ON COMPUTER VISION. **Proceedings...** Coral Gables, 1995. p.599–604.
- [GUY 96] GUY, G. **Inference of Multiple Curves and Surfaces from Sparse Data**. IRIS/University of Southern California, 1996. Tese de Doutorado.
- [GUY 97] GUY, G.; MEDIONI, G. Inference of surfaces, 3-d curves, and junctions from sparse noisy, 3-d data. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.19, n.11, p.1265–1277, Novembro, 1997.
- [HEI 93] HEITGER, F.; VON DER HEYDT, R. A computational model of neural contour processing: Figure-ground segregation and illusory contours. In: IEEE PROCEEDINGS OF EUROPEAN CONFERENCE ON COMPUTER VISION. **Proceedings...** Berlin, Germany, 1993. p.32–40.
- [HEN 98] HENRICSSON, O. The role of color attributes and similarity grouping in 3-d building reconstruction. **Computer Vision and Image Understanding**, v.72, n.2, p.163–164, Novembro, 1998.

- [HIL 98] HILTON, A.; STODDAT, A. J.; ILLINGWORTH, J.; WINDEATT, T. Implicit surface-based geometric fusion. **Computer Vision and Image Understanding**, v.69, n.3, p.273–291, Março, 1998.
- [HOC 93] HOCQUENGHEM, A.; JAFFARD, P.; CHENON, R. **Mathématiques**. Ediscience, 2. ed., 1993.
- [HOF 89] HOFF, W.; AHUJA, N. Surfaces from stereo: Integrating feature matching, disparity estimation, and contour detection. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.11, n.2, p.121–136, Fevereiro, 1989.
- [HOP 92] HOPPE, H.; DEROSE, T.; DUCHAMP, T.; MCDONALD, J.; STUETZLE, W. Surface reconstruction from unorganized points. In: SIGGRAPH. **Proceedings...**, 1992. v.26, p.71–78.
- [HOP 94] HOPPE, H. **Surface Reconstruction from Unorganized Points**. University of Washington, 1994. Tese de Doutorado.
- [HOR 62] HORN, A. Eigenvalues of sums of hermitian matrices. **Pacific Journal of Mathematics**, v.12, p.225–241, 1962.
- [HOU 62] HOUGH, P. V. C. A method and means for recognizing complex patterns, 1962. U.S. Patent 3,069,654.
- [HSI 92] HSIEH, Y. C.; MCKEOWN Jr., D. M.; PERLANT, F. P. Performance evaluation of scene registration and stereo matching for cartographic feature extraction. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.14, n.2, p.214–237, Fevereiro, 1992.
- [JOR 95] JORDAN, M.; COCQUEREZ, J.-P. Three-dimensional description of scenes observed in aerial photography. **Pattern Recognition**, v.28, n.7, 1995.
- [KLE 00] KLEIN, R.; SCHILLING, A.; STRASSER, W. Reconstruction and simplification of surfaces from contours. **Graphical Models**, v.62, p.429–443, 2000.
- [KLY 98] KLYACHKO, A. A. Stable bundles, representation theory and hermitian operators. **Selecta Mathematica, New Series**, v.4, p.419–445, 1998.
- [KNU 89] KNUTSSON, H. Representing local structure using tensors. In: THE 6TH SCANDINAVIAN CONFERENCE ON IMAGE ANALYSIS. **Proceedings...** Oulu, Finland, 1989. p.19–22.
- [KNU 93] KNUTSSON, H.; WESTIN, C.-F. Normalized and differential convolution: Methods for interpolation and filtering of incomplete and uncertain data. In: IEEE COMPUTER SOCIETY CONFERENCE ON COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION. **Proceedings...** New York, 1993. p.515–523.
- [KNU 01] KNUTSON, A.; TAO, T. Honeycombs and sums of hermitian matrices. **Notices of the American Mathematical Society**, v.48, n.2, p.175–186, Fevereiro, 2001.

- [LEE 98a] LEE, M.-S.; MEDIONI, G. Inferring segmented surface description from stereo data. In: IEEE CONFERENCE ON COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION. **Proceedings...** Santa Barbara, 1998.
- [LEE 98b] LEE, M.-S.; MEDIONI, G. A unified framework fo salient curves, regions, and junctions inference. In: 3RD ASIAN CONFERENCE ON COMPUTER VISION. **Proceedings...** Hong Kong, 1998. p.315–322.
- [LEE 99] LEE, M.-S.; MEDIONI, G. Grouping  $\cdot$ ,  $-$ ,  $\rightarrow$ ,  $\theta$ , into regions, curves, and junctions. **IEEE Computer Vision and Image Understanding**, v.76, n.1, p.54–69, Outubro, 1999.
- [LEO 97] LEOW, W. K.; LUA, S. C. An improved neural network for segmenting objects boundaries in real images. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEURAL NETWORKS. **Proceedings...**, 1997. p.1663–1668.
- [LIV 96] LIVNAT, Y.; SHEN, H.-W.; JOHNSON, C. R. A near optimal isosurface extraction algorithm using the span space. **IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics**, v.2, n.1, p.73–84, Setembro, 1996.
- [LOR 87] LORENSEN, W. E.; CLINE, H. E. Marching cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm. **Computer Graphics**, v.21, n.4, p.163–169, Julho, 1987.
- [MAÎ 92] MAÎTRE, H.; LUO, W. Using models to improve stereo reconstruction. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.14, n.2, p.269–277, Fevereiro, 1992.
- [MAR 76] MARR, D.; POGGIO, T. Cooperative computation of stereo disparity. **Science**, v.194, p.209–236, Outubro, 1976.
- [MAR 82] MARR, D. **Vision: A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information**. W.H. Freeman and Co., 1982.
- [MAR 98] MARTINS Jr., P. P. Conceito e construção dos objetos das geociências. percepção da realidade histórica do passado da terra e da vida. **Caderno de Filosofia e Ciências Humanas**, v.6, n.10, p.50–61, Abril, 1998.
- [MAR 99] MARTINS Jr., P. P. **Realidade e Ciência - Epistemologia Aplicada: Um Estudo Sobre a Estrutura do Conhecimento e a Aplicação Prática da Epistemologia na Pesquisa Científica**. Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, Brasil, 1. ed., Dezembro, 1999. Apostila do curso de Epistemologia do Departamento de Geologia.
- [MAY 99] MAYER, H. Automatic object extraction from aerial imagery - a survey focusing on buildings. **Computer Vision and Image Understanding**, v.74, n.2, p.138–149, Maio, 1999.
- [MED 00] MEDIONI, G.; LEE, M.-S.; TANG, C.-K. **A Computational Framework for Segmentation and Grouping**. Elsevier Science B.V., 1. ed., 2000.

- [MEN 98] MENCL, R.; MULLER, H. Interpolation and approximation of surfaces from three-dimensional scattered data points. In: STATE OF THE ART REPORTS, EUROGRAPHICS. **Proceedings...**, 1998. p.51–67.
- [MOH 89] MOHAN, R.; NEVATIA, R. Using perceptual organization to extract 3-d structures. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.11, n.11, p.1121–1139, Novembro, 1989.
- [NIE 91] NIELSON, G. M.; HAMANN, B. The asymptotic decider: Resolving the ambiguity in marching cubes. In: IEEE VISUALIZATION. **Proceedings...**, 1991. p.83–90.
- [OBL 98] OBLONŠEK, Č.; GUID, N. A fast surface-based procedure for object reconstruction from 3d scattered points. **Computer Vision and Image Understanding**, v.69, n.2, p.185–185, Fevereiro, 1998.
- [O’N 66] O’NEILL, B. **Elementary Differential Geometry**. Academic Press - Orlando, 1. ed., 1966.
- [OSH 00] OSHER, S.; FEDKIW, R. P. Level set methods: An overview and some recent results, 2000. UCLA CAM Report 00-08.
- [PAP 98] PAPARODITIS, N.; CORD, M.; JORDAN, M.; COCQUEREZ, J.-P. Building detection and reconstruction from mid- and high-resolution aerial imagery. **Computer Vision and Image Understanding**, v.72, n.2, p.122–142, Novembro, 1998.
- [PF 01a] PHILIPP-FOLIGUET, S.; VIEIRA, M. B. Segmentation floue d’images couleur. In: 18TH SYMPOSIUM GRETSI ON SIGNAL AND IMAGE PROCESSING. **Proceedings...** France, 2001.
- [PF 01b] PHILIPP-FOLIGUET, S.; VIEIRA, M. B.; ARAÚJO, A. A. Segmentation into fuzzy regions using topographic distance. In: SIBGRAPI. **Proceedings...** Brasil, 2001. p.282–288.
- [PF 02a] PHILIPP-FOLIGUET, S.; VIEIRA, M. B.; SANFOURCHE, M. Fuzzy segmentation of color images and indexing of fuzzy regions. In: CONFERENCE ON COLOR IN GRAPHICS, IMAGE AND VISION. **Proceedings...** Poitiers - France, 2002.
- [PF 02b] PHILIPP-FOLIGUET, S.; VIEIRA, M. B.; SANFOURCHE, M. Indexing of fuzzy regions. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER VISION, PATTERN RECOGNITION AND IMAGE PROCESSING - CVPRIP. **Proceedings...** Durham - North Carolina - USA, 2002.
- [SHA 88] SHA’ASHUA, A.; ULLMAN, S. Structural saliency: The detection of globally salient structures using a locally connected network. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER VISION. **Proceedings...**, 1988. p.321–327.

- [SHE 92] SHEN, J.; CASTAN, S. An optimal linear operator for step edge detection. **Graphical Models and Image Processing**, v.54, n.2, p.112–133, Março, 1992.
- [SIN 92] SINHA, S. S.; SCHUNCK, B. G. A two-stage algorithm for discontinuity-preserving surface reconstruction. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.14, n.1, p.36–55, Janeiro, 1992.
- [SOA 91] SOARES, J. F.; FARIAS, A. A.; CESAR, C. C. **Introdução à estatística**. Guanabara Koogan, 1. ed., 1991.
- [SZE 93] SZELISKI, R.; TONNESEN, D.; TERZOPOULOS, D. Modeling surfaces of arbitrary topology with dynamics particles. In: IEEE CONFERENCE ON COMPUTER VISION AND PATTERN RECOGNITION. **Proceedings...**, 1993. p.82–87.
- [TAN 98a] TANG, C.-K.; MEDIONI, G. Extremal feature extraction from 3d vector and noisy scalar fields. In: IEEE VISUALIZATION. **Proceedings...** Triangle Park, 1998. p.95–102.
- [TAN 98b] TANG, C.-K.; MEDIONI, G. Integrated surface, curve, and junction from sparse 3d data sets. In: ICCV. **Proceedings...** Bombay, India, 1998. p.818–824.
- [TEI 98] TEICHMANN, M.; CAPPS, M. Surface reconstruction with anisotropic density-scaled alpha shapes. In: IEEE VISUALIZATION. **Proceedings...** Triangle Park, 1998. p.67–72.
- [TER 88a] TERZOPOULOS, D. The computation of visible-surface representations. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.10, n.4, p.417–437, Julho, 1988.
- [TER 88b] TERZOPOULOS, D.; WITKIN, A.; KASS, M. Constraints on deformable models: Recovering 3d shape and nonrigid motion. **Artificial Intelligence**, v.36, p.91–123, 1988.
- [THI 96] THIRION, J.-P.; GOURDON, A. The 3d marching lines algorithm. **Graphical Models and Image Processing**, v.58, n.6, p.503–509, Novembro, 1996.
- [THO 96] THORNBUR, K.; WILLIAMS, L. R. Analytic solution of stochastic completion fields. **Biological Cybernetics**, v.75, p.141–151, Abril, 1996.
- [ULL 76] ULLMAN, S. Filling-in the gaps: the shape of subjective contours and a model for their generation. **Biological Cybernetics**, v.21, p.1–6, 1976.
- [VEL 95] VELTKAMP, R. C. Boundaries through scattered points of unknown density. **Graphical Models and Image Processing**, v.57, n.6, p.441–452, 1995.
- [VEM 93] VEMURI, B. C.; LAI, S. H. A fast solution to the surface reconstruction problem. In: SPIE CONFERENCE ON MATHEMATICAL IMAGING GEOMETRIC METHODS IN COMPUTER VISION. **Proceedings...** San Diego, 1993. p.27–37.



- 
- [WES 94] WESTIN, C.-F. **A Tensor Framework for Multidimensional Signal Processing**. Linköping University/Sweden, 1994. Tese de Doutorado.
- [WIE 55] WIELANDT, H. An extremum property of sums of eigenvalues. In: PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY. **Proceedings...**, 1955. v.6, p.106–110.
- [WIL 96] WILLIAMS, L. R.; HANSON, A. R. Perceptual completion of occluded surfaces. **IEEE Computer Vision and Image Understanding**, v.64, n.1, p.1–20, Julho, 1996.
- [WIL 99] WILLIAMS, L. R.; ZWECK, J.; WANG, T.; THORNER, K. Computing stochastic completion fields in linear-time using a resolution pyramid. **IEEE Computer Vision and Image Understanding**, v.76, n.3, p.289–297, Dezembro, 1999.
- [WYV 86] WYVILL, G.; MCPHEETERS, C.; WYVILL, B. Data structures for soft objects. **The Visual Computer**, v.2, n.4, p.227–234, Agosto, 1986.
- [ZHA 00] ZHAO, H.-K.; OSHER, S.; MERRIMAN, B.; KANG, M. Implicit and non-parametric shape reconstruction from unorganized data using a variational level set method. **Computer Vision and Image Understanding**, v.80, p.295–314, 2000.
- [ZIT 00] ZITNICK, C. L.; KANADE, T. A cooperative algorithm for stereo matching and occlusion detection. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v.22, n.7, p.675–684, Julho, 2000.