

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Física
Física

Clonagem quântica de qudits

Denise Ferreira Ávila

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua

Belo Horizonte
2015

Agradecimentos

Aos meus pais, Ana Maria Ávila e Sebastião Ferreira da Silva, por sempre terem me proporcionado o ambiente adequado e o privilégio de poder me preocupar só com meus sonhos. Em especial, ao meu pai por ter aceitado prontamente as escolhas e mudanças que realizei nos rumos da minha carreira e à minha mãe, pelo cuidado diário e dedicação às nossas necessidades.

Ao meu orientador de iniciação científica e mestrado, Sebastião José Nascimento de Pádua, pela paciência, calma, sensibilidade e sabedoria compartilhada durante esses anos.

À Bárbara, pelos nove(em breve dez) anos de dedicação, carinho e empenho em nossa amizade. Em especial, pela compreensão nos últimos meses de correria e cansaço.

Ao Raul, por ser meu porto seguro nos corredores do ICEX e minha fonte diária de lembrança dos dias mais simples da vida. Pelas conversas de física e de não-física, pelos cafés, almoços, palavras cruzadas e bons ouvidos.

Ao Davi, pelo companheirismo, carinho, compreensão e apoio no último ano. Por ter tornado os dias menos difíceis e por cada ajuda e intervenção presente neste texto. Hôn. Baiser. Bacio.

Ao Mário, João e Márcio, pelos almoços de La Palma, cervejas de Maletta, vinhos de Redentor e todas as risadas e conversas envolvidas nesses eventos.

Ao Silvio, Gabi, Cris e Téfis, pelas saídas sempre divertidas, independente de quanto tempo elas demorem para acontecer.

À Janaína, por ter se tornado a amiga da física e dos drinks (nem sempre tão) bons, além da amiga da Eletras.

À Gláucia, pelas conversas, amizade e saídas. Inicialmente, combinamos umas caronas mas ganhei uma grande amiga.

Aos amigos da Eletras, pelas sessões de terapia via Whatsapp e por serem os melhores amigos possíveis de adolescência e vida adulta.

Aos amiguinhos do LOLzim, por terem transformado alguns dos dias de derrota em dias de vitória(ou o contrário). Vai Tucopi!

Aos amigos da Física, por todas as conversas de corredor e de vida existidas. Em especial: Mangos, Lígia, Regiane, Alaninha, Bonninha, Tchê e Marcello.

Aos amigos do grupo de Óptica Quântica, em especial Gilberto e Tutu, por toda pergunta respondida e ajuda concedida.

Ao Pierre, pelas dúvidas respondidas.

Ao Tassius, pelas conversas sobre MUBs.

À Xúlia Roquette, pelos jantares pomposos das madrugadas(que estão fazendo falta este ano!).

Ao Pedro, pelas boas saídas e conversas (recompense-me com um agradecimento na futura Medalha Fields).

A todos os professores de Física que me fizeram acreditar na carreira e me ensinaram com dedicação e perseverança.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	v
Abstract	vi
1 Apresentação	1
2 Pré-requisitos	4
2.1 Elementos da Mecânica Quântica	4
2.1.1 Qubits	4
2.1.2 Qudits	6
2.1.3 O produto tensorial	6
2.1.4 O operador densidade	7
3 Clonagem Quântica - História e Elementos	11
3.1 EPR, não-localidade e comunicação superluminal	11
3.1.1 O argumento de Einstein, Podolsky e Rosen	11
3.1.2 O experimento EPR-Bohm	12
3.1.3 Estados emaranhados e comunicação superluminal	14
3.2 A proposta de Herbert para comunicação superluminal	16
3.3 Teorema da Não-clonagem	19
3.4 Máquinas de Clonagem Quântica	21
3.4.1 Definições em Clonagem Quântica	21
3.4.2 Clonagem trivial para qubits	24
3.4.3 Clonagem quântica universal	26
4 Implementação de UQCM para ququarts	35
4.1 Descrição matemática do processo de clonagem universal	35
4.2 Proposta de UQCM para sistemas de quatro dimensões utilizando o efeito Hong-Ou-Mandel	36

4.3	Realização experimental com ququarts codificados em momento angular orbital e polarização	41
4.3.1	Fonte de fótons: conversão paramétrica espontânea descendente	44
4.3.2	Preparação dos estados	46
4.3.3	Cálculo de propagação do estado	52
4.3.4	Sistema de detecção	57
4.3.5	Resultados Experimentais	60
4.4	Proposta de implementação para ququarts codificados em caminho	63
5	Considerações finais	71
A	Conjunto de MUBs para dimensão $d = 4$	73
B	Cálculo de Jones	79
B.1	Preparação dos estados	82
B.2	Sistema de detecção	82
C	Conversão Paramétrica Descendente	85
C.1	Estados de fenda	90

Resumo

Uma das principais diferenças entre informação clássica e informação quântica é que, classicamente, a informação pode ser replicada. Isto é, podemos facilmente obter cópias de bits clássicos mas, ao lidar com qubits ou qudits, estamos sujeitos às regras da Mecânica Quântica, que nos diz que estados quânticos arbitrários não podem ser copiados perfeitamente. Entretanto, podemos obter cópias aproximadas desses estados com a maior Fidelidade possível ou obter cópias perfeitas com a maior probabilidade de sucesso utilizando as chamadas máquinas de clonagem quântica. Essas máquinas são também ferramentas para estudar uma variedade de tarefas como, por exemplo, análise de segurança de protocolos de distribuição de chaves criptográficas e discriminação de estados quânticos. Um dos objetivos deste trabalho é apresentar uma breve revisão bibliográfica de alguns trabalhos sobre a teoria de clonagem quântica bem como as discussões anteriores ao teorema da não-clonagem, incluindo a proposta de Herbert para comunicação superluminal.

O segundo objetivo deste trabalho é analisar uma realização experimental e tem como base a implementação óptica da chamada máquina de clonagem quântica universal ótima para ququarts híbridos codificados em momento angular orbital e polarização, proposta por Nagali *et al.* {Phys. Rev. Lett. 105, 073602 }. A implementação baseia-se no efeito Hong-Ou-Mandel e nos fótons provenientes da Conversão Paramétrica Descendente. Apresentamos toda a teoria envolvida e obtivemos a curva de fidelidade teórica prevista utilizando o cálculo da propagação do estado quântico através dos elementos ópticos presentes no circuito. Além disso, propusemos uma modificação da implementação para a utilização de qudits codificados em momento transversal (qudits de caminho).

Abstract

One of the main differences between classical and quantum information is that the former can be replicated. That is, we can easily obtain copies from classical bits but, while dealing with qubits and qudits, we are subject to Quantum Mechanics's rules, which determines that arbitrary quantum states cannot be perfectly copied. Still, we can use the so called Quantum Cloning Machines to try and obtain approximate copies with the highest Fidelity or perfect copies with bigger success rates. Those machines are also tools that can be used to study a variety of tasks like, for example, the security analysis of quantum cryptography protocols and quantum state discrimination. One of the aims of this work is to present a brief review of some research about the quantum cloning theory as well as previous discussions on non-cloning theorem, including Herbert's proposal for superluminal communication.

This work's second aim is to analyse an experimental realization and is based on the optical implementation of the so-called optimal universal quantum cloning machines for hybrid ququarts encoded in the polarization and orbital angular momentum degrees of freedom of photons, proposed by Nagali *et al.* {Phys. Rev. Lett. 105, 073602 }. The implementation is based on the Hong-Ou-Mandel effect and on the photons produced by Parametric Down Conversion. We presented all the concerned theory and obtained the theoretical Fidelity curve predicted by using the quantum state propagation through the optical elements present on the circuit. We also proposed an implementation change for the use of qudits encoded in transversal momentum.

Lista de Figuras

2.1	Representação de um qubit na esfera de Bloch. Imagem retirada do livro de Nielsen Chuang[56].	5
3.1	Esquema da proposta de Herbert[34] para comunicação superluminal.	18
3.2	Representação na esfera de Bloch dos processos de clonagem quântica e realização da porta NOT, ambos proibidos pela teoria da Mecânica Quântica. Um estado de entrada arbitrário é clonado perfeitamente, i.e., o vetor de Bloch que representa esse estado permanece igual. No caso do anti-clone ideal, é obtido um estado cujo vetor de Bloch tem o mesmo tamanho do vetor original porém direção diametralmente oposta.	30
3.3	Representação na esfera de Bloch do processo de clonagem quântica universal proposto por Bužek e Hillery com a obtenção do anti-clone ótimo. Um estado de entrada é copiado de maneira ótima, i.e., o vetor de Bloch que representa o estado de cada cópia tem a mesma direção do vetor que representa o estado de entrada porém seu tamanho é reduzido por um fator de $2/3$. No caso do anti-clone ótimo, temos um estado cujo vetor de Bloch tem direção diametralmente oposta ao vetor que representa o estado de entrada e tamanho reduzido por um fator de $1/3$	31
4.1	Esquema de dois fótons incidindo em um BS com refletividade η . Na entrada a do BS temos um fóton em um estado dado por $ 1, i\rangle_a$ e na entrada b um fóton no estado $ 1, j\rangle_b$. Os índices i e j representam alguma propriedade dos fótons que determine a distinguibilidade entre eles.	37

4.2	Diagrama representando as situações correspondentes à cada um dos termos presentes na Equação (4.9). Podemos visualizar que dois dos termos referem-se às situações em que os dois fóton saem pela mesma porta do BS e os outros dois termos correspondem às situações em que os fótons deixam o BS por saídas diferentes.	37
4.3	Esquema de dois fótons de mesma frequência incidindo em um BS com reflexão e transmissão de 50%. Na entrada a enviamos um fóton no estado que desejamos clonar, $ \phi_1\rangle_a$, e na entrada b enviamos um fóton preparado em um estado totalmente misto, $\rho_b = \frac{1}{4} (\phi_1\rangle_b\langle\phi_1 + \phi_2\rangle_b\langle\phi_2 + \phi_3\rangle_b\langle\phi_3 + \phi_4\rangle_b\langle\phi_4)$	39
4.4	Diagrama experimental para a implementação da clonagem universal óptima para ququarts híbridos codificados nos graus de liberdade de polarização e OAM.	42
4.5	Diagrama experimental correspondente à fonte de fótons.	44
4.6	Diagrama esquemático da tomografia de processo quântico. A implementação experimental é represenada por uma caixa preta e os dados que temos acesso são os estados de entrada e saída do experimento, que serão utilizados para caracterizar o procedimento experimental.	47
4.7	Representação das polarizações circulares à direita e à esquerda com os momentos angulares de spin associados. Imagem retirada da Wikipedia[70].	48
4.8	Representação dos modos helicoidais para $m = +2, +1, 0, 1, 2$. Na primeira coluna à esquerda temos o formato de frente de onda do feixe. Na segunda coluna temos a distribuição de fase do feixe em uma seção transversal. Na terceira coluna temos a distruição de intensidade do feixe em uma seção transversal com o vórtex óptico representado pelo ponto escuro no centro. Imagem retirada da Wikipedia[69].	49
4.9	Efeito da q-plate em feixes de entrada no modo TEM_{00} com polarizações circular à direita e à esquerda. Imagem retirada da Wikipedia [68].	51
4.10	Representação esquemática das configurações de preparação dos ququarts utilizados no experimento. QP é a q-plate; $\frac{\lambda}{4}$ e $\frac{\lambda}{2}$ são placas de onda e PBS é o divisor de feixes polarizador; α, β, γ e δ são os ângulos das placas de onda em relação ao eixo rápido.	53

4.11	Representação esquemática das configurações do sistema de detecção utilizado para cada um dos estados das MUBs. QP é a q-plate; $\frac{\lambda}{4}$ e $\frac{\lambda}{2}$ são placas de onda e PBS é o divisor de feixes polarizador; ϵ , φ , λ , τ , χ e μ são os ângulos das placas de onda em relação ao eixo rápido. Ver Tabela 4.2	58
4.12	Gráfico da fidelidade em função do atraso temporal entre os fótons.	60
4.13	Resultados experimentais do procedimento de clonagem para os ququarts pertencentes à base I. (a) Interferência de Hong-Ou-Mandel. (b) Probabilidade $p(i \phi)$ de detectar um clone em um estado $ i\rangle$ da base, dado um estado de entrada $ \phi\rangle$ da mesma base. (c) Fidelidade de clonagem experimental para os fótons de entrada. Imagem retirada da Ref. [49].	61
4.14	Resultados experimentais do procedimento de clonagem para os ququarts pertencentes à base IV. (a) Interferência de Hong-Ou-Mandel. (b) Probabilidade $p(i \phi)$ de detectar um clone em um estado $ i\rangle$ da base, dado um estado de entrada $ \phi\rangle$ da mesma base. (c) Fidelidade de clonagem experimental para os fótons de entrada. Imagem retirada da Ref. [49].	62
4.15	a) Diagrama experimental da proposta de UQCM ótima para ququarts codificados em caminho. Os detalhes da implementação variam dependendo da base testada e serão apresentados no texto. O subíndice i indica o caminho dos fótons e, portanto, $i = a, b, c, d$. b) Fenda múltipla com quatro aberturas.	64
4.16	Exemplos de máscaras que podem ser utilizadas no SLM de fase. Escalas de cinza diferentes acrescentam diferentes fases nos caminhos dos fótons.	65
4.17	Exemplos de máscaras no SLM para gerar os estados pertencentes à duas bases. a) Máscaras para geração dos estados da base I. b) Máscaras para geração dos estados da base II. A fenda clara (cinza) identifica o caminho onde foi acrescentada uma fase de zero(π).	66
4.18	Sistema de detecção para as bases II, III, IV e V. A lente L_3 projeta a imagem do BS1 no plano dos SLMs de fase no sistema de detecção. Esses acrescentarão as fases ϕ'_i , representados pelas diferentes escalas de cinza. As lentes após os SLM projetam o estado a ser filtrado no centro do plano focal.	68

- C.1 Conversão Paramétrica Descendente. (a) Diagrama da CPD. (b) Casamento de fase tipo I. (c) Casamento de fase tipo II. Na figura, são mostrados os cones relativos à três diferentes comprimentos de onda dos fótons gerados e os símbolos mostram onde podem ser encontrados os fótons gêmeos. Imagem retirada da tese de doutorado de Leonardo Teixeira Neves [54]. 86
- C.2 Fótons signal e idler gerados na CPD são transmitidos através de fendas, representadas pelas funções de transmissão $A_i(\vec{\rho}_i)$ e $A_s(\vec{\rho}_s)$. Imagem retirada da tese de Leonardo Teixeira Neves[54]. 91
- C.3 (a) Ilustração das quatro fendas colocadas no caminho do signal e do idler. (b) Função transmissão das fendas. Imagem retirada da tese de Leonardo Teixeira Neves[54]. 93

Lista de Tabelas

4.1	MUBs para o sistema quadridimensional em termos da polarização e do OAM. À direita, indicamos as diferentes configurações de placas de onda(veja Fig. 4.10) para a preparação experimental dos estados. Os valores apresentados são relativos aos ângulos dos eixos ópticos rápidos das placas em relação ao eixo horizontal do laboratório, assumindo que o fóton de entrada está no estado $ H, 0\rangle$. As células com – indicam a retirada da correspondente placa de onda.	69
4.2	À direita, indicamos as diferentes configurações de placas de onda(veja Figura 4.11) para a detecção de cada um dos estados pertencentes às MUBs utilizadas. Os valores apresentados são relativos aos ângulos dos eixos ópticos rápidos das placas em relação ao eixo horizontal do laboratório. As células com – indicam a retirada da correspondente placa de onda.	70
B.1	Vetores de Jones normalizados para cada estado de polarização da luz.	81

Capítulo 1

Apresentação

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen[25] introduziram um tipo de estado quântico, hoje conhecido como estado emaranhado¹, que possui propriedades muito interessantes. As medições de propriedades físicas tais como: posição, momento, spin e polarização realizadas em partículas que são descritas por um estado emaranhado podem possuir correlações. Por exemplo, se duas partículas de spin $1/2$ são geradas em um estado de momento angular total nulo, ao medirmos o spin de uma das partículas em relação a um dado eixo e encontrarmos $+\hbar/2$, podemos afirmar que o valor do momento de spin da outra partícula, com relação ao mesmo eixo, será $-\hbar/2$, independente da direção de medição escolhida para as duas. Isso leva a crer que cada partícula possuía um valor bem determinado da propriedade antes da medição, para todas as direções possíveis, ou que uma partícula de um par emaranhado “sabe” que uma medição foi realizada na outra partícula, mesmo que elas estejam separadas por distâncias arbitrariamente grandes. Esse efeito, discutido na referência [25] em termos das variáveis posição e momento, não só intrigou Einstein, que não admitia a segunda opção e se referia à ela como ‘spooky action at a distance’, mas também intrigou (e intriga!) a comunidade científica até hoje[13].

Essas correlações apresentadas por estados emaranhados levaram à discussões [21, 59, 33] sobre a possibilidade de utilizá-las para transmissão de informação e, assim, conseguir realizar comunicação com velocidade mais rápida que a da luz. Entretanto, dada a situação descrita no parágrafo anterior – duas partículas de spin $1/2$ geradas em um estado de momento angular total nulo – uma simples investigação dos resultados de medições do spin das duas partículas com relação a eixos diferentes nos mostra porque não é possí-

¹O termo “emaranhamento” foi utilizado, inicialmente, por Schrödinger[61] em um artigo publicado em 1935 na revista *Proceedings*, da Cambridge Philosophical Society, onde ele discutiu e ampliou os argumentos utilizados por Einstein, Podolsky e Rosen[25].

vel transmitir informação utilizando apenas as correlações apresentadas por esses estados: um observador com acesso à uma das partículas não consegue interferir nas estatísticas de resultados obtidos através de medições na outra partícula[5].

Em 1982, Nick Herbert[34], publicou um artigo no qual propunha uma nova forma de utilizar estados emaranhados para comunicação superluminal. Sua proposta se baseava em um dispositivo hipotético imaginado por ele que seria capaz de realizar múltiplas cópias de estados quânticos arbitrários. No mesmo ano, Dieks[23] e Wootters e Zurek[72], de maneira independente, publicaram uma demonstração simples de um teorema conhecido como teorema da não clonagem. O teorema nos diz que é impossível obter cópias perfeitas de um estado quântico arbitrário.

O teorema da não clonagem possibilita um sistema de criptografia seguro pois impede um espião de obter cópias de informações trocadas entre duas partes sem perturbar a transmissão, revelando a espionagem. Isso garante a segurança dos protocolos quânticos de distribuição de chaves criptográficas[71]. Além disso, a não clonagem também está diretamente relacionada à questões fundamentais da mecânica quântica, como a discriminação de estados quânticos e o teorema da não-sinalização, impossibilitando a comunicação superluminal[28].

Entretanto, o teorema da não clonagem não é o fim da história. Embora a cópia perfeita de estados quânticos arbitrários seja proibida, ainda é possível obter cópias imperfeitas desses estados [14, 15] ou cópias perfeitas mas com probabilidade de sucesso menor que um[24]. Este assunto tem sido estudado amplamente nos últimos anos, levando a várias propostas teóricas e realizações experimentais das chamadas máquinas de clonagem quântica (Quantum Cloning Machine - QCM). Essas máquinas podem ser utilizadas para analisar a segurança de protocolos de distribuição de chaves criptográficas [55, 12, 1] e também para estimar estados quânticos[30, 11].

Os objetivos principais desse trabalho são três. Primeiramente, desejamos introduzir alguns elementos da teoria de clonagem quântica através de uma abordagem essencialmente histórica. Também apresentaremos um estudo da implementação experimental óptica da chamada máquina de clonagem quântica universal ótima para ququarts híbridos codificados em momento angular orbital e polarização, proposta por Nagali *et al*[49]. Além disso, ao final, apresentamos uma proposta de modificação do aparato experimental para a cópia de ququarts codificados em momento transversal. Para isso o trabalho está dividido em três partes:

Capítulo 2

O capítulo 2 é destinado à uma pequena e rápida revisão de alguns conceitos e resultados da teoria da Mecânica Quântica que serão utilizados ao longo do texto. Serão considerados temas tais como: postulados da Mecânica Quântica, operação de produto tensorial, formalismo de operador densidade, operadores de medição, etc.

Capítulo 3

O capítulo 3 é dedicado à uma revisão bibliográfica da teoria de clonagem quântica. Primeiramente, apresentamos os estados emaranhados e as correlações existentes em estados desse tipo. Em seguida, apresentamos a proposta de Herbert para a comunicação superluminal. Uma simples demonstração do teorema da não clonagem é apresentada seguida de algumas definições que serão utilizadas no estudo de clonagem quântica. Por fim, apresentamos as transformações unitárias propostas para máquinas de clonagem quântica universais.

Capítulo 4

No capítulo 4, apresentamos uma implementação experimental da máquina de clonagem quântica universal ótima, seguindo a proposta de Nagali *et al* [49]. A proposta em questão utiliza o efeito Hong-Ou-Mandel e, portanto, no início do capítulo apresentamos um resumo desse efeito. Posteriormente, explicamos como ele pode ser utilizado para realizar a clonagem quântica de ququarts híbridos codificados nos graus de liberdade de momento angular orbital e polarização. Além disso, neste capítulo será apresentado o conceito de bases mutualmente não enviesadas e como elas podem ser utilizadas para caracterização de experimentos de informação quântica. Por fim, apresentaremos nossa sugestão experimental para realizar a clonagem de qudits codificados em momento transversal.

Capítulo 5

No Capítulo 5, apresentamos nossas conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Pré-requisitos

2.1 Elementos da Mecânica Quântica

Neste capítulo serão abordados alguns conceitos e resultados da teoria da Mecânica Quântica que serão utilizados ao longo do texto. Para isso, realizaremos uma rápida revisão, sem a pretensão de ser um texto didático, seguindo a Ref. [56]. Para uma descrição mais detalhada dos conceitos e formalismos da Mecânica Quântica, as Refs. [56, 4] são recomendadas.

2.1.1 Qubits

Um bit clássico é uma variável que pode assumir dois estados, tradicionalmente denominados 0 e 1. Em Mecânica Quântica o sistema mais simples que podemos analisar é um sistema de dois níveis que chamaremos de qubit. Por exemplo, a polarização do fóton ou o spin de um elétron. Nesse caso, o espaço de Hilbert que descreve esse sistema tem dimensão $d = 2$ e podemos usar dois vetores ortogonais pra formar uma base para esse espaço. Tradicionalmente representamos os vetores dessa base por $|0\rangle$ e $|1\rangle$. A base formada por esses estados é usualmente denominada base computacional. Um qubit pode se encontrar em um estado de superposição dessas duas alternativas e o estado mais geral possível será escrito na forma:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2.1)$$

Como $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, a Equação (2.1) pode ser reescrita, descartando um fator de fase global sem consequências observáveis, na forma:

$$|\psi\rangle = \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \quad (2.2)$$

Os parâmetros θ e ϕ definem um ponto em uma esfera tridimensional unitária, como mostrado na Figura 2.1. Isto é, existe um vetor de raio $r = 1$ que liga à origem da esfera até esse ponto que denota o estado. Os ângulos azimutal e polar do vetor são dados por θ e ϕ , respectivamente. Essa esfera é frequentemente denominada esfera de Bloch e é um modo útil de visualizar o estado de um único qubit e operações realizadas nesse espaço.

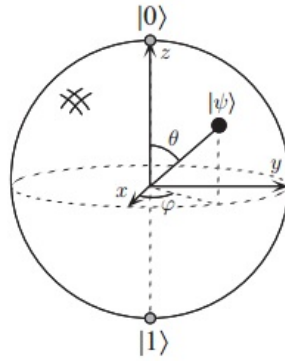


Figura 2.1: Representação de um qubit na esfera de Bloch. Imagem retirada do livro de Nielsen Chuang[56].

Para sistemas de duas dimensões, há um conjunto especial de matrizes hermitianas e unitárias, denominadas matrizes de Pauli, que são extremamente úteis e, portanto, vamos defini-las aqui:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Os estados da base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ são, em geral, definidos como os autovetores de σ_z correspondentes aos autovalores $+1$ e -1 , respectivamente.

Todos os operadores hermitianos que atuam nesse espaço bidimensional podem ser representados na forma $a\mathbb{1} + \vec{v} \cdot \vec{\sigma}$, onde $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathfrak{R}$, \vec{v} é um vetor unitário real e tridimensional e $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$ representa o operador

$$\vec{v} \cdot \vec{\sigma} = b_x \sigma_x + b_y \sigma_y + b_z \sigma_z. \quad (2.4)$$

¹As matrizes de Pauli em conjunto com a identidade formam uma base para o espaço de matrizes 2×2 e, portanto, toda matriz nesse espaço pode ser escrita como uma combinação linear dessas. Em particular, as matrizes hermitianas podem ser escritas com coeficientes reais.

2.1.2 Qudits

Como extensão dos qubits, temos os qudits que são sistemas de d níveis. Mais precisamente, um qudit é descrito por um espaço de Hilbert de dimensão d . Um estado nesse espaço pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_i^d c_i |i\rangle, \quad (2.5)$$

onde os coeficientes c_i são números complexos e $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |d\rangle\}$ denota uma base para esse espaço. Exemplos de qudits são os qutrits ($d = 3$) e ququarts ($d = 4$).

Recentemente foi reconhecido que a utilização de sistemas de maiores dimensões em computação e informação quântica têm vantagens fundamentais e práticas. Por exemplo, protocolos quânticos de criptografia baseados em qudits são mais seguros, qudits emaranhados são mais resistentes à ruído, tarefas de computação quântica podem ser implementadas de forma mais rápida com o uso de qudits e o uso de computadores quânticos como simuladores de física pode ser facilitado utilizando qudits [39, 18, 20, 41, 53, 64]. Essas vantagens levam a um aumento do interesse em sistemas quânticos multiníveis.

2.1.3 O produto tensorial

O produto tensorial é uma operação importante quando estamos estudando sistemas compostos. Nesta seção vamos fazer um detalhamento desse tópico, como apresentado em [56].

Suponha que V e W são espaços de Hilbert² de dimensões m e n , respectivamente. Então $V \otimes W$ é um espaço vetorial de dimensão $m \times n$ gerado por vetores da forma $|v\rangle \otimes |w\rangle$, onde $|v\rangle$ é um elemento de V e $|w\rangle$ é um elemento de W . Dessa forma, $\sum_i c_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle$ também é um elemento desse espaço.

Por definição, o produto tensorial satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para um escalar arbitrário λ e elementos $|v\rangle \in V$ e $|w\rangle \in W$,

$$\lambda(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (\lambda|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (\lambda|w\rangle). \quad (2.6)$$

2. Para arbitrários $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in V$ e $|w\rangle \in W$,

$$(|v_1\rangle + |v_2\rangle) \otimes |w\rangle = |v_1\rangle \otimes |w\rangle + |v_2\rangle \otimes |w\rangle. \quad (2.7)$$

²A saber, a discussão subsequente é válida para quaisquer espaços vetoriais complexos. Supomos espaços de Hilbert por conveniência.

3. Para um arbitrário $|v\rangle \in V$ e $|w_1\rangle, |w_2\rangle \in W$,

$$|v\rangle \otimes (|w_1\rangle + |w_2\rangle) = |v\rangle \otimes |w_1\rangle + |v\rangle \otimes |w_2\rangle. \quad (2.8)$$

4. Sejam arbitrários $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in V$ e $|w_1\rangle, |w_2\rangle \in W$. Se V e W possuem produto escalar, então define-se o produto escalar em $V \otimes W$ por:

$$(\langle v_1| \otimes \langle w_1|) (|v_2\rangle \otimes |w_2\rangle) = \langle v_1|v_2\rangle \langle w_1|w_2\rangle. \quad (2.9)$$

Seja $|v\rangle \in V$ e $|w\rangle$ elementos de W e A e B operadores lineares nos espaços V e W , respectivamente. Então, podemos definir um operador linear $A \otimes B$ em $V \otimes W$ pela equação:

$$(A \otimes B) (|v\rangle \otimes |w\rangle) \equiv A|v\rangle \otimes B|w\rangle. \quad (2.10)$$

A definição de $A \otimes B$ é estendida para todos os elementos de $V \otimes W$ de forma a garantir a linearidade desse operador. Portanto:

$$(A \otimes B) \left(\sum_i c_i |v_i\rangle \otimes |w_i\rangle \right) \equiv \sum_i c_i A|v_i\rangle \otimes B|w_i\rangle. \quad (2.11)$$

Comentário sobre a notação: Muitas vezes no decorrer deste trabalho, para simplificar a escrita, o produto tensorial de vetores será denotado por:

$$|v\rangle \otimes |w\rangle = |v\rangle|w\rangle = |vw\rangle. \quad (2.12)$$

2.1.4 O operador densidade

O formalismo de operador densidade é uma forma conveniente de descrever sistemas quânticos cujo estado não é completamente conhecido. Suponha que temos um sistema constituído de uma fonte que prepara estados $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$ com probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n . Chamaremos $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$ de um ensemble de estados puros. O operador densidade para esse sistema é, então, definido pela equação:

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.13)$$

Podemos mostrar que o operador densidade é um operador positivo de traço um. Seja o operador densidade dado pela Equação (2.13), então:

$$\text{Tr} \rho = \sum_i p_i \text{Tr} (|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \sum_i p_i = 1. \quad (2.14)$$

Se $|\psi\rangle$ é um vetor arbitrário, temos que:

$$\langle\phi|\rho|\phi\rangle = \sum_i p_i \langle\phi|\psi_i\rangle \langle\psi_i|\phi\rangle, \quad (2.15a)$$

$$= \sum_i p_i |\langle\phi|\psi_i\rangle|^2, \quad (2.15b)$$

$$\geq 0. \quad (2.15c)$$

Vale ressaltar outra propriedade importante de operadores densidades. Suponha que um sistema quântico é preparado no estado $|0\rangle$ com probabilidade $\frac{3}{4}$ e no estado $|1\rangle$ com probabilidade $\frac{1}{4}$. Portanto, esse sistema é descrito pelo operador densidade:

$$\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1|. \quad (2.16)$$

Agora definimos dois novos estados:

$$|a\rangle \equiv \sqrt{\frac{3}{4}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}|1\rangle, \quad (2.17a)$$

$$|b\rangle \equiv \sqrt{\frac{3}{4}}|0\rangle - \sqrt{\frac{1}{4}}|1\rangle, \quad (2.17b)$$

e consideramos que o sistema é preparado no estado $|a\rangle$ com probabilidade $1/2$ e no estado $|b\rangle$ com probabilidade $1/2$. Podemos verificar que o operador densidade que corresponde a esse sistema é dado por:

$$\rho = \frac{1}{2}|a\rangle\langle a| + \frac{1}{2}|b\rangle\langle b| = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| \quad (2.18)$$

Ou seja, diferentes ensembles podem dar origem ao mesmo operador densidade e, portanto, um operador densidade pode não ser unicamente definido.

Duas outras nomenclaturas são extremamente importantes e utilizadas e vamos apresentá-las. Um sistema cujo estado $|\psi\rangle$ é conhecido exatamente está em um **estado puro**. Nesse caso, o operador densidade é dado simplesmente por $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Caso contrário, dizemos que o sistema está em um **estado misto**. De acordo com a discussão apresentada acima, o operador densidade correspondente à um estado misto não é unicamente definido como combinação convexa de estados puros.

Podemos também utilizar a representação na esfera de Bloch para visualizarmos um estado misto. Nesse caso, o vetor que liga o centro da esfera até o ponto que denota o estado tem como ângulos polar e azimutal θ e ϕ , respectivamente, mas tem $r < 1$. Ou seja, estados mistos residem na região

interna da esfera de Bloch. Como o espaço interior à uma esfera é denominado bola, essa região pode ser chamada de bola de Bloch.

Qualquer operador densidade no espaço de Hilbert de duas dimensões pode ser representado na forma

$$\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.19)$$

onde $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ e é chamado vetor de Bloch do sistema.

Agora que definimos o operador densidade, podemos formular os postulados da Mecânica Quântica usando esse formalismo:

Postulado 1: A todo sistema quântico isolado existe um espaço vetorial complexo (i.e., um espaço de Hilbert) associado denominado espaço de estados. O sistema é completamente descrito pelo seu operador densidade, que é um operador positivo com traço um. Se o sistema quântico está em um estado ρ_i com probabilidade p_i , então o operador densidade para o sistema é $\sum_i p_i \rho_i$.

Postulado 2: A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por uma transformação unitária. Isto é, o estado ρ de um sistema em um tempo t_1 se relaciona ao estado ρ' em um tempo t_2 por um operador unitário U que só depende dos instantes t_1 e t_2 ,

$$\rho' = U \rho U^\dagger. \quad (2.20)$$

Postulado 3: As medições quânticas são descritas por um conjunto de operadores de medida $\{M_m\}$ que atuam no espaço de estados. O índice m refere-se aos possíveis resultados da medição. Se o estado do sistema imediatamente antes da medição é dado por ρ então a probabilidade de obter o resultado m é dada por:

$$p(m) = \text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho), \quad (2.21)$$

e o estado do sistema após a medição é:

$$\frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{Tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}. \quad (2.22)$$

Os operadores de medida satisfazem a equação de completudeza

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = \mathbb{1}. \quad (2.23)$$

Postulado 4: O espaço de estados de um sistema quântico composto é o produto tensorial dos espaços de estados de cada sistema físico individual.

Operador densidade reduzido

Se ρ é um operador densidade que descreve um sistema composto AB, então definimos o operador densidade reduzido para o sistema A como:

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho. \quad (2.24)$$

Analogamente podemos definir o operador densidade reduzido ρ_b para o sistema B.

A operação Tr_B é chamada de traço parcial sobre o sistema B e é definida da seguinte forma:

$$\text{Tr}_B (|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) \equiv |a_1\rangle\langle a_2| \text{Tr} (|b_1\rangle\langle b_2|), \quad (2.25)$$

onde $|a_1\rangle$ e $|a_2\rangle$ são dois vetores no espaço de estados de A e $|b_1\rangle$ e $|b_2\rangle$ são dois vetores no espaço de estados de B. A operação de traço que aparece no lado direito da equação é a operação usual de traço para o sistema B, i.e., $\text{Tr}_B (|b_1\rangle\langle b_2|) = \langle b_2|b_1\rangle$.

Se $\{|a_i\rangle\}$ é uma base para o sistema A e, similarmente, $\{|b_j\rangle\}$ uma base para o sistema B, o valor médio de um observável descrito pelo operador R é dado por:

$$\langle R \rangle = \text{Tr} (\rho R) = \sum_{i,j,i',j'} \langle a_i b_j | \rho | a_{i'} b_{j'} \rangle \langle a_{i'} b_{j'} | R | a_i b_j \rangle, \quad (2.26)$$

onde ρ é o operador que descreve o sistema composto AB.

Se considerarmos um operador R_A que atua somente no sistema A, i.e., $R = R_A \otimes \mathbb{1}$, então teremos:

$$\langle R_A \rangle = \sum_{i,j,i',j'} \langle a_i b_j | \rho | a_{i'} b_{j'} \rangle \langle a_{i'} | R_A | a_i \rangle \langle b_{j'} | b_j \rangle, \quad (2.27)$$

$$= \sum_{i,i'} \sum_j \langle a_i b_j | \rho | a_{i'} b_j \rangle \langle a_{i'} | R_A | a_i \rangle. \quad (2.28)$$

Mas, pela definição de traço parcial, então $\sum_j \langle b_j | \rho | b_j \rangle = \text{Tr}_B (\rho) = \rho_A$ e, portanto a Equação 2.27 pode ser escrita como:

$$\langle R_A \rangle = \sum_i \langle a_i | \rho_A R_A | a_i \rangle, \quad (2.29)$$

$$= \text{Tr}_A (\rho_A R_A). \quad (2.30)$$

Portanto, a operação de traço parcial é suficiente para calcularmos valores médios de observáveis correspondentes à cada um dos sistemas individualmente.

Capítulo 3

Clonagem Quântica - História e Elementos

Este capítulo é dedicado à uma revisão bibliográfica da teoria de clonagem quântica através de uma abordagem essencialmente histórica. Nele serão apresentados os eventos que sucederam a publicação do teorema da não-clonagem e também suas consequências.

3.1 EPR, não-localidade e comunicação superluminal

3.1.1 O argumento de Einstein, Podolsky e Rosen

Estados emaranhados levantam questões fundamentais na Mecânica Quântica, como apontado por Einstein, Podolski e Rosen(EPR) no clássico artigo intitulado "*Can Quantum Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*"[25]. Neste artigo, conhecido popularmente como EPR, é proposto um experimento imaginário¹ que, segundo os autores, seria uma demonstração da incompletude da Mecânica Quântica. O artigo gerou diversas discussões na comunidade científica por muitos anos e a essência do argumento de EPR é descrita a seguir.

O artigo começa com uma definição dos autores para uma teoria completa: uma teoria completa é aquela em que todo *elemento de realidade* é representado por um elemento correspondente na teoria. O objetivo deles é mostrar que a Mecânica Quântica não é uma teoria completa mostrando alguns *elementos de realidade* essenciais que não estão contidos nela. Para

¹Do alemão gedankenexperiment

isso, introduzem o seguinte critério para que uma grandeza física seja um elemento de realidade:

If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of reality corresponding to that quantity.

De acordo com a Mecânica Quântica, se duas grandezas físicas são descritas por observáveis \mathbf{A} e \mathbf{B} que não comutam, isto é, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \neq 0$, não existe um estado quântico para o qual os resultados das medições de ambos os observáveis possam ser determinados simultaneamente. Assim, na visão dos autores, segue-se que, ou (1) a descrição quântica da natureza não está completa ou (2) grandezas físicas correspondentes à operadores que não comutam não podem ter realidade simultânea, i.e., não correspondem simultaneamente a elementos de realidade.

O próximo passo é mostrar que, em certas circunstâncias e assumindo que a Mecânica Quântica é uma teoria completa, um sistema quântico pode ter grandezas incompatíveis com realidade simultânea. Daí surge o aparente paradoxo, pois a negação da premissa (1) levaria à negação da única outra alternativa, a premissa (2). A conclusão dos autores é que a Mecânica Quântica é uma teoria incompleta.

No artigo, eles procedem esta discussão esboçando um experimento hipotético envolvendo um sistema quântico composto por duas partículas distantes correlacionadas em posição e momento. Mais tarde, Bohm modificou este experimento simplificando a matemática utilizada. Na versão de Bohm, temos um sistema composto por duas partículas de spin $1/2$ preparadas em um estado de momento angular total nulo. Este será o experimento imaginário discutido na próxima seção, conhecido como experimento EPR-Bohm[8].

3.1.2 O experimento EPR-Bohm

Considere um par de partículas de spin $1/2$ preparadas em um estado de momento angular total nulo. Utilizando a base computacional, essa situação corresponde à um par de qubits preparados no estado de Bell

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle), \quad (3.1)$$

onde

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

²Esses são os autoestados do operador σ_z com autovalores $+1$ e -1 , respectivamente.

Esse estado é conhecido popularmente como *estado singlete de spin*. Suponha que realizamos a medição do spin ao longo de um eixo \vec{v} em ambos os qubits. Isto é equivalente à medir um observável correspondente ao operador $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$ definido como

$$\vec{v} \cdot \vec{\sigma} \equiv v_x \sigma_x + v_y \sigma_y + v_z \sigma_z, \quad (3.3)$$

sendo \vec{v} um vetor unitário real e tridimensional.

Para cada qubit, temos como resultados possíveis os autovalores de $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$, +1 ou -1. Vamos verificar que, independente de qual seja a escolha de \vec{v} , os resultados das duas medições serão sempre opostos um ao outro. Para isso, suponha que $|a\rangle$ e $|b\rangle$ são autoestados de $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$, correspondentes aos autovalores +1 e -1, respectivamente. Então, existem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ complexos tais que

$$|0\rangle = \alpha |a\rangle + \beta |b\rangle \quad (3.4a)$$

$$|1\rangle = \gamma |a\rangle + \delta |b\rangle \quad (3.4b)$$

Substituindo na equação 3.1 obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle |1\rangle - |1\rangle |0\rangle) = (\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle |b\rangle - |b\rangle |a\rangle). \quad (3.5)$$

Mas, $\alpha\delta - \beta\gamma$ é o determinante da matriz unitária $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ e, portanto, igual à um fator de fase $e^{i\theta}$ para algum θ real. Assim, a menos de um fator de fase global, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle |1\rangle - |1\rangle |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle |b\rangle - |b\rangle |a\rangle). \quad (3.6)$$

Como resultado, se realizarmos uma medida de $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$ em ambos os qubits, um resultado de +1(-1) para o primeiro qubit implica em um resultado -1(+1) para o segundo qubit.

Assim, suponha que dois distantes observadores, usualmente chamados Alice e Bob, compartilhem um par de partículas no estado descrito pela Equação 3.1. Devido à distância entre as duas partes, por hipótese, não há interação entre os dois sistemas e, assim, uma medição no subsistema de Alice não tem nenhuma influência sobre o subsistema de Bob instantaneamente. Se Alice realizar uma medição em seu qubit do observável correspondente ao operador $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$ e obtiver o resultado +1, ela pode prever com certeza que, se Bob realizar uma medição do mesmo observável, encontrará o resultado -1. Similarmente, se Alice obtiver o resultado -1 ela pode prever com certeza que Bob obterá +1 como resultado. Como é sempre possível para Alice prever o valor do resultado obtido por Bob quando este realizar uma

medição do spin ao longo da direção \vec{v} em seu qubit, esta propriedade física deve corresponder à um elemento de realidade, de acordo com o critério de EPR. Portanto, deve ser representada em qualquer teoria física completa. Entretanto, na teoria da Mecânica Quântica, não temos elementos para representar o valor de $\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$ para *todo* vetor unitário \vec{v} . Por exemplo, operadores como $\hat{\sigma}_x$ e $\hat{\sigma}_z$ não comutam e, portanto, não é possível encontrar um estado para qual os resultados das medições de spin ao longo das direções x e z possam ser determinados simultaneamente. Assim, Einstein, Podolski e Rosen concluíram que a Mecânica Quântica estaria incompleta pois não incluía alguns elementos de realidade.

3.1.3 Estados emaranhados e comunicação superluminal

As correlações apresentadas por estados emaranhados, discutidas na seção anterior, levaram à discussões sobre a possibilidade de utilizá-las para transmissão de informação e colocar em evidência efeitos superluminais. Entretanto, como veremos no exemplo a seguir, não é possível transmitir informação apenas utilizando essas correlações.

Considere novamente uma situação como a descrita na seção anterior: pares de partículas emaranhadas são geradas em uma fonte e encaminhadas para dois observadores, Alice e Bob, localizados à uma certa distância. Cada um dos observadores têm acesso à uma parte do sistema [31, 5] e o estado das partículas é dado pela equação (3.1). Alice pode escolher uma dentre várias medições possíveis para realizar em seu sistema e denotaremos por x a medição escolhida por ela. Similarmente, denotaremos por y a medição escolhida por Bob. Uma vez que as medições são realizadas, elas produzem resultados a e b nos dois sistemas. A cada vez que o experimento é realizado, os resultados a e b obtidos podem variar, mesmo quando a mesma escolha de x e y é realizada. Esses resultados, em geral, são descritos por uma distribuição de probabilidade $p(a, b|x, y)$. Aqui, $p(a, b|x, y)$ é chamada *probabilidade conjunta* e denota a probabilidade de Alice obter o valor a e Bob obter o valor b , simultaneamente. Ao repetir o experimento um número suficiente de vezes e coletando os dados observados, pode-se obter uma estimativa razoável dessas probabilidades.

Cada parte pode também descrever seu experimento de forma individual através de *probabilidades marginais* denotadas por

$$p(a|x, y) = \sum_b p(a, b|x, y). \quad (3.7a)$$

$$p(b|x, y) = \sum_a p(a, b|x, y). \quad (3.7b)$$

Assim, se Alice e Bob realizam medidas do observável correspondente ao operador σ_z , com resultados possíveis $+1$ e -1 , temos que as probabilidades conjuntas são dadas por:

$$\begin{aligned} p(+1, +1|\sigma_z, \sigma_z) &= 0 = p(-1, -1|\sigma_z, \sigma_z), \\ p(+1, -1|\sigma_z, \sigma_z) &= \frac{1}{2} = p(-1, +1|\sigma_z, \sigma_z). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Já as probabilidades marginais para os dois resultados possíveis da medida de Bob são:

$$\begin{aligned} p(+1|\sigma_z, \sigma_z) &= p(+1, +1|\sigma_z, \sigma_z) + p(-1, +1|\sigma_z, \sigma_z) = \frac{1}{2}, \\ p(-1|\sigma_z, \sigma_z) &= p(+1, -1|\sigma_z, \sigma_z) + p(-1, -1|\sigma_z, \sigma_z) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora, se Alice e Bob realizarem medições de σ_x e σ_z , respectivamente, as probabilidades conjuntas são dadas por

$$\begin{aligned} p(+1, +1|\sigma_x, \sigma_z) &= \frac{1}{4} = p(+1, -1|\sigma_x, \sigma_z), \\ p(-1, +1|\sigma_x, \sigma_z) &= \frac{1}{4} = p(-1, -1|\sigma_x, \sigma_z). \end{aligned} \quad (3.10)$$

As probabilidades marginais para os resultados de Bob são, novamente, dadas por:

$$\begin{aligned} p(+1|\sigma_x, \sigma_z) &= p(+1, +1|\sigma_x, \sigma_z) + p(-1, +1|\sigma_x, \sigma_z) = \frac{1}{2}, \\ p(-1|\sigma_x, \sigma_z) &= p(+1, -1|\sigma_x, \sigma_z) + p(-1, -1|\sigma_x, \sigma_z) = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para um caso mais geral temos: suponha que $|\psi\rangle$ é o estado que descreve o sistema composto de Alice e Bob e Alice meça o observável correspondente ao operador A e Bob o observável correspondente ao operador B . Pelo postulado da medição, a probabilidade de Alice encontrar o valor a e Bob encontrar o valor b é dada pela probabilidade conjunta:

$$p(a, b|A, B) = \langle \psi | \left(A_a^\dagger A_a \otimes B_b^\dagger B_b \right) | \psi \rangle. \quad (3.12)$$

Se Bob só tem acesso aos resultados de sua própria medição, então tudo que ele tem acesso é a probabilidade marginal dada por:

$$p(b|A, B) = \sum_a p(a, b|A, B) = \sum_a \langle \psi | \left(A_a^\dagger A_a \otimes B_b^\dagger B_b \right) | \psi \rangle, \quad (3.13)$$

$$= \langle \psi | \left(\mathbb{1} \otimes B_b^\dagger B_b \right) | \psi \rangle. \quad (3.14)$$

Portanto, se Alice e Bob não trocam nenhuma informação por vias clássicas, os resultados de Bob são os únicos dados que ele possui e, portanto, as probabilidades marginais são tudo que o mesmo pode obter. Como essas probabilidades são iguais independente da escolha de observável de Alice, essa escolha não tem consequências observáveis para Bob e, portanto, não é possível Alice codificar informação na escolha de observável que ela vai medir. Portanto, parceiros que compartilham partículas em um estado emaranhado não podem trocar informações utilizando apenas as correlações apresentadas por esses. Vale notar que caso informação clássica sobre os resultados da medição de Alice estejam disponíveis para Bob esse cenário muda. Mas, nesse caso, a informação clássica é sempre transmitida com velocidade menor que a da luz.

3.2 A proposta de Herbert para comunicação superluminal

O evento desencadeador do Teorema da Não-Clonagem foi a proposta de comunicação superluminal sugerida por Herbert em seu artigo *FLASH - A superluminal communicator based on a new kind of quantum measurement* [34], publicado em 1981. Essa proposta envolvia não só o emaranhamento de subsistemas separados espacialmente e, portanto, o uso de correlações quânticas mas também a utilização de um dispositivo capaz de realizar múltiplas cópias de estados quânticos arbitrários. O dispositivo que, na opinião do autor, seria capaz de realizar tal tarefa era um tubo de ganho de laser idealizado que, estimulado por um único fóton em qualquer estado de polarização, emitiria um grande número de fótons com a mesma polarização do fóton incidente. Vamos considerar que N fótons são emitidos a partir de um fóton de entrada. Podemos resumir o funcionamento do tubo de ganho de laser idealizado por Herbert da seguinte forma:

$$|V, 1\rangle \rightarrow |V, N\rangle, |H, 1\rangle \rightarrow |H, N\rangle, |R, 1\rangle \rightarrow |R, N\rangle, |L, 1\rangle \rightarrow |L, N\rangle, \quad (3.15)$$

onde 1 e N denotam a quantidade de fótons propagando após o dispositivo. As polarizações horizontal, vertical, circular à direita e à esquerda são denotadas por H, V, R e L, respectivamente.

O experimento consiste em um *setup* como o descrito na seção anterior: uma fonte emitindo pares de fótons emaranhados para dois observadores, Alice e Bob, localizados em direções opostas. Os fótons estão num estado

singleto na variável de polarização, i.e., o estado do sistema é dado por:

$$|\psi\rangle_{AB} = |H, 1\rangle|V, 1\rangle - |V, 1\rangle|H, 1\rangle \equiv |R, 1\rangle|L, 1\rangle - |L, 1\rangle|R, 1\rangle^3. \quad (3.16)$$

Alice pode escolher livremente em quais bases realizará as medições em sua parte do sistema, i.e., Alice pode escolher realizar a medição de polarização plana (H ou V) ou circular (R ou L). Após Alice obter um resultado, o fóton a caminho de Bob será projetado em um estado de polarização que depende da medição e do resultado obtido por ela. Esse fóton entra no dispositivo e serão emitidos N fótons com a mesma polarização do incidente. Todos os fótons na saída do dispositivo são, então, enviados para Bob. Os N fótons que chegam até Bob são separados em quatro feixes de $N/4$ fótons cada e são direcionados para quatro detectores de polarização H, V, R e L. Para a discussão subsequente, considere que um detector detecta com probabilidade 1 um fóton com a polarização que ele é idealizado para detectar, não detecta fótons que tenham polarização ortogonal à este estado e detecta com probabilidade $1/2$ um fóton em um estado de polarização que é uma superposição balanceada do estado que ele é idealizado para detectar e o estado ortogonal à ele. Ou seja, um detector de polarização horizontal não detectará fótons com polarização vertical e detectará com probabilidade $1/2$ um fóton no estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|H\rangle + |V\rangle)$. Agora, podemos analisar a situação especificando as medições que Alice escolhe realizar, os resultados obtidos por ela e os números de fótons detectados nos detectores de Bob.

- Suponha que Alice realize uma medição de polarização destinada a descobrir se o seu fóton está em um estado de polarização vertical ou horizontal. Ela, então, determina que a polarização de seu fóton é horizontal. Nesse caso, o processo ocorre da seguinte forma:
 - a) Estado inicial: $|\psi\rangle_{AB} = |H, 1\rangle|V, 1\rangle - |V, 1\rangle|H, 1\rangle$; b) Medição com resultado Horizontal; c) Redução do estado: $|H, 1\rangle|V, 1\rangle$ c) Amplificação: $|H, 1\rangle|V, N\rangle$; d) Número de fótons detectados por Bob em cada detector: H: 0, V: $N/2$, R: $N/4$, L: $N/4$.
- Similarmente, se Alice determina que a polarização de seu fóton é vertical temos:
 - a) Estado inicial: $|\psi\rangle_{AB} = |H, 1\rangle|V, 1\rangle - |V, 1\rangle|H, 1\rangle$; b) Medição com resultado Vertical; c) Redução do estado: $|V, 1\rangle|H, 1\rangle$ c) Amplificação: $|V, 1\rangle|H, N\rangle$; d) Número de fótons detectados por Bob em cada detector: H: $N/2$, V: 0, R: $N/4$, L: $N/4$.

³O estado singleto possui invariância rotacional e, portanto, tem a mesma forma quando escrito na base $\{|R\rangle, |L\rangle\}$

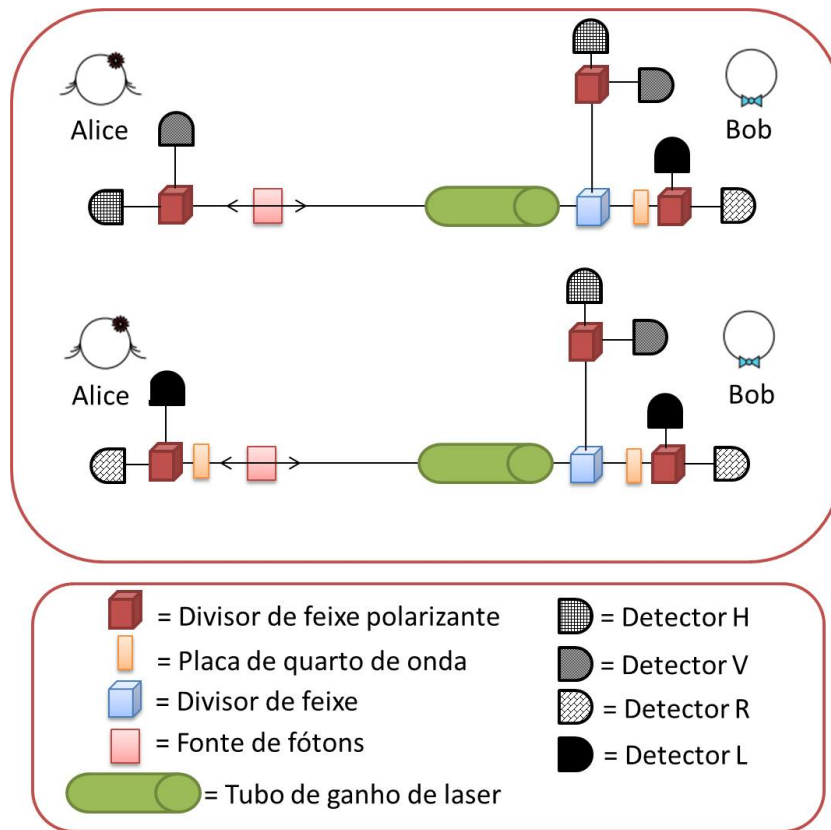


Figura 3.1: Esquema da proposta de Herbert[34] para comunicação superluminal.

- Agora, suponha que Alice realize uma medição de polarização de forma a verificar se o fóton a atinge com polarização circular direita ou esquerda. Ela, então, determina que a polarização de seu fóton é circular direita. O outro fóton é projetado em um estado de polarização circular esquerda e, portanto:
 - Estado inicial: $|\psi\rangle_{AB} = |R, 1\rangle|L, 1\rangle - |L, 1\rangle|R, 1\rangle$;
 - Medição com resultado circular à direita;
 - Redução do estado: $|R, 1\rangle|L, 1\rangle$;
 - Amplificação: $|R, 1\rangle|L, N\rangle$;
 - Número de fótons detectados por Bob em cada detector: H: $N/4$, V: $N/4$, R: 0, L: $N/2$.
- Novamente, se Alice determina que a polarização de seu fóton é circular esquerda então temos:
 - Estado inicial: $|\psi\rangle_{AB} = |R, 1\rangle|L, 1\rangle - |L, 1\rangle|R, 1\rangle$;
 - Medição com resultado circular à esquerda;
 - Redução do estado: $|L, 1\rangle|R, 1\rangle$;
 - Amplificação: $|L, 1\rangle|R, N\rangle$;
 - Número de fótons detectados por Bob

em cada detector: H: N/4, V: N/4, R: N/2, L: 0.

Pelas descrições acima, observamos que as distribuições de probabilidades para os resultados obtidos por Bob são diferentes dependendo de qual medição Alice escolhe realizar: note que nos dois primeiros casos o detector que não registra nenhum fóton é o primeiro ou o segundo enquanto nos dois casos subsequentes é o terceiro ou o quarto. Assim, se existisse tal dispositivo capaz de copiar um estado de polarização arbitrário dos fótons, seria possível Alice codificar informação na escolha de qual medição ela realiza e, portanto, poderia transmitir um sinal de forma instantânea para Bob.

A história curiosa que hoje se sabe é que GianCarlo Girardi e Asher Peres foram as pessoas designadas para a revisão do artigo de Herbert. Embora Girardi tenha recomendado sua rejeição, Peres recomendou ao editor da revista que o artigo fosse aceito, embora acreditasse que ele era incorreto por violar a relatividade especial. Nas palavras do próprio Peres, ao explicar sua decisão anos mais tarde: *I recommended to the editor that this paper should be published. I wrote that it was obviously wrong, but I expected that it would elicit considerable interest and that finding the error would lead to significant progress in our understanding of physics.* [58]

O artigo de Herbert foi publicado e pouco tempo depois vários autores, como Wootters e Zurek [72], Dieks[23] e Ghirardi[29] publicaram suas versões para o teorema da não-clonagem, que terá uma demonstração simples apresentada na próxima seção.

3.3 Teorema da Não-clonagem

O Teorema da Não-Clonagem é uma demonstração matemática da impossibilidade de clonar um estado quântico arbitrário e desconhecido através de uma transformação unitária. Existem várias provas propostas do teorema mas, para estados puros, existe uma demonstração extremamente simples, apresentada por Wootters e Zurek[72] no famoso artigo publicado em 1992⁴. Seguiremos a demonstração desse artigo, que também pode ser encontrada no livro de Leslie Ballentine.[4].

Para clonar um estado quântico arbitrário $|\phi\rangle$ precisamos de um aparato em algum estado $|Q\rangle$, um estado “em branco” $|0\rangle$ e um operador unitário U global que realize a seguinte transformação:

$$|\phi\rangle |0\rangle |Q\rangle \xrightarrow{U} |\phi\rangle |\phi\rangle |Q'\rangle, \quad (3.17)$$

⁴ Uma extensão desse resultado, a impossibilidade de se clonar estados mistos, foi obtida por Barnun *et al.* em 1996[6].

onde $|Q'\rangle$ é o estado final do aparato. Após a interação dos subsistemas, podemos obter o estado do subsistema original-cópia fazendo um traço parcial sobre os estados do aparato.

Supomos que haja dois estados, $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$, para os quais a equação (3.17) é válida, i.e.,

$$U |\phi_1\rangle |0\rangle |Q\rangle = |\phi_1\rangle |\phi_1\rangle |Q'\rangle, \quad (3.18a)$$

$$U |\phi_2\rangle |0\rangle |Q\rangle = |\phi_2\rangle |\phi_2\rangle |Q''\rangle. \quad (3.18b)$$

(Permitimos que o estado final do aparato, $|Q'\rangle$ ou $|Q''\rangle$ seja dependente do estado a ser clonado)

Pela linearidade do operador U , para um estado de superposição $|\phi_s\rangle = \alpha |\phi_1\rangle + \beta |\phi_2\rangle$, temos:

$$U |\phi_s\rangle |0\rangle |Q\rangle = \alpha |\phi_1\rangle |\phi_1\rangle |Q'\rangle + \beta |\phi_2\rangle |\phi_2\rangle |Q''\rangle. \quad (3.19)$$

Mas, esse não é o estado copiado que gostaríamos de obter. De acordo com a equação (3.17), o estado desejado era:

$$U |\phi_s\rangle |0\rangle |Q\rangle = |\phi_s\rangle |\phi_s\rangle |Q'''\rangle, \quad (3.20)$$

i.e., os termos cruzados de $|\phi_s\rangle \otimes |\phi_s\rangle$ não aparecem no estado final após o procedimento.

Portanto, embora o teorema não proíba a cópia de um conjunto discreto de estados específicos ($|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$), é impossível construir um dispositivo capaz de clonar um estado quântico arbitrário ($|\phi_s\rangle$). De fato, como veremos a seguir, é possível realizar a cópia perfeita de estados que pertençam a um conjunto ortogonal. Assim, o dispositivo imaginado por Herbert não poderia ter o funcionamento dado pela Equação (3.15): se o dispositivo é capaz de copiar perfeitamente os estados de polarização H e V, ele não poderia clonar idealmente os estados de polarizações R e L.

O teorema da não clonagem também pode ser provado utilizando o argumento que uma transformação unitária preserva o produto interno entre dois vetores. Igualando o produto interno dos estados inicial e final na equação (3.18), obtemos

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle \langle Q | Q \rangle = \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle^2 \langle Q' | Q'' \rangle. \quad (3.21)$$

Como $\langle Q | Q \rangle = 1$, $|\langle Q' | Q'' \rangle| \leq 1$ e $|\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle| \leq 1$, esta equação só será consistente em casos nos quais $\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = 0$, quando os dois estados são ortogonais, ou $\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = 1$, quando o estado é o mesmo.

Assim, podemos enunciar o Teorema da Não-Clonagem da seguinte forma:

Teorema 1 (Teorema da Não-Clonagem) *Não existe uma transformação unitária capaz de clonar perfeitamente um estado puro desconhecido.*

De certa forma, o teorema da não clonagem já estava intrinsicamente contido nas raízes da teoria da mecânica quântica sendo, portanto, trivial. Mas, por outro lado, sua descoberta contribuiu para uma revisitação da mecânica quântica em uma linguagem de teoria da informação, o que teve uma importante influência no desenvolvimento da teoria de Informação Quântica nos últimos anos[19].

3.4 Máquinas de Clonagem Quântica

3.4.1 Definições em Clonagem Quântica

Como vimos na seção anterior, só estados pertencentes à um conjunto conhecido de estados ortogonais podem ser perfeitamente clonados através de uma transformação unitária. Embora essa condição seja bastante restritiva, algumas possibilidades ainda podem ser analisadas. Por exemplo, o teorema não impede a obtenção de cópias imperfeitas de estados puros arbitrários, então, quão boa pode ser a cópia obtida? Além disso, se permitirmos uma medição em adição à uma operação unitária, a obtenção de cópias perfeitas também não é proibida. Nesse caso, a cópia perfeita é obtida com alguma probabilidade de sucesso menor que um e, assim, como maximizar essa probabilidade? Ou seja, podemos tentar otimizar os processos de clonagem⁵. No primeiro caso, quando o processo leva à uma cópia imperfeita, a clonagem é denominada *determinística*. Já no segundo, dizemos que a clonagem é *probabilística*[60].

Os dispositivos que realizam essas cópias são universalmente chamados de Máquinas de Clonagem Quântica (do inglês Quantum Cloning Machine, QCM). Neste trabalho, estamos particularmente interessados no estudo da clonagem imperfeita de estados quânticos, sendo as cópias mais fiéis possíveis.

Considerando que o estado puro de entrada⁶ a ser copiado é dado por $|\psi\rangle_a$, podemos definir o processo de clonagem quântica da seguinte forma:

$$|\psi\rangle_a |0\rangle_b |Q\rangle_x \xrightarrow{U} |\Psi\rangle_{abx}, \quad (3.22)$$

onde $|0\rangle_b$ é um estado “em branco” que vamos interagir com o estado a ser clonado, $|Q\rangle_x$ é um estado auxiliar que mediará a interação – usualmente chamado de estado da máquina ou *ancilla* – e U é uma unitária apropriada.

⁵A partir de agora, ao utilizar o termo Clonagem Quântica, estamos nos referindo aos processos permitidos pela teoria da Mecânica Quântica, salvo quando explicitado o contrário

⁶É importante salientar que, neste trabalho, só falaremos sobre clonagem de estados puros. Para estados mistos, ainda há poucos estudos e resultados provados.

O processo de clonagem quântica pode ser visualizado como uma interação entre dois subsistemas quânticos a e b mediada por um ancilla x , cujo efeito é distribuir a informação contida no subsistema a entre os dois subsistemas a e b .

Tomando o traço parcial do estado final do sistema, $|\Psi\rangle_{abx}$, com respeito ao subsistema x , obtemos o operador densidade reduzido que descreve o estado do subsistema original-cópia, ρ_{ab} . Também podemos obter o operador que descreve o estado do subsistema original (cópia) tomando o traço parcial com respeito ao subsistema cópia (original), i.e., $\rho_a = \text{Tr}_b(\rho_{ab})$ e $\rho_b = \text{Tr}_a(\rho_{ab})$.

Após o procedimento de clonagem, chamaremos cada um dos subsistemas a e b de *cópias*⁷ do estado inicial. Na descrição acima, consideramos o caso $1 \rightarrow 2$, ou seja, duas cópias são obtidas a partir de um estado de entrada. Podemos generalizar a expressão obtida para o caso $N \rightarrow M$:

$$\left(|\psi\rangle^{\otimes N}\right) \left(|0\rangle^{\otimes M-N}\right) |Q\rangle_x \xrightarrow{U} |\Psi\rangle_{abx}{}^8. \quad (3.23)$$

O que buscamos é uma otimização do processo descrito acima, i.e., procuramos por unitárias que nos permitam obter as cópias mais fiéis possíveis ao estado original. Para isso, primeiramente, precisamos definir uma quantidade que caracterize a performance do dispositivo, i.e., que seja adequada para avaliar a qualidade das cópias obtidas. Na literatura, a *Fidelidade* é a figura de mérito mais comumente utilizada para esse fim. Outra forma de avaliar a qualidade dos clones é através da norma de Hilbert-Schmidt, que é utilizada no artigo original de Bužek e Hillery[14].

Fidelidade como figura de mérito na Clonagem Quântica

Considere dois operadores densidades ρ e σ . Se ρ é um estado puro, i.e., $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, a fidelidade é definida por [38]:

$$F(\rho, \sigma) \equiv \langle\psi|\sigma|\psi\rangle. \quad (3.24)$$

Se σ também é um estado puro, $\sigma = |\phi\rangle\langle\phi|$, então:

$$F(\rho, \sigma) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2. \quad (3.25)$$

Assim, para $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ normalizados, se $|\psi\rangle$ é o autoestado de algum observável e o sistema é preparado em um estado $|\phi\rangle$, a fidelidade nos dá a

⁷Ao longo deste trabalho, usaremos também a denominação *clones*.

⁸Nessa notação utilizada $|i\rangle^{\otimes j}$ indica o estado produto de j qubits idênticos no estado $|i\rangle$, isto é, $|i\rangle^{\otimes j} = \underbrace{|i\rangle \otimes |i\rangle \otimes \dots \otimes |i\rangle}_j$.

probabilidade do sistema estar no estado $|\psi\rangle$ após a medição do observável correspondente. Uma importante propriedade da Fidelidade é, então:

$$0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1. \quad (3.26)$$

Distância de Hilbert-Schmidt como figura de mérito na Clonagem Quântica

A norma de Hilbert-Schmidt de um operador A é dada por:

$$\|A\|_2 = [\text{Tr}(A^\dagger A)]^{1/2}, \quad (3.27)$$

e tem a propriedade

$$|\text{Tr}(A^\dagger B)| \leq \|A\|_2 \|B\|_2 \quad (3.28)$$

A Distância de Hilbert-Schmidt entre dois operadores densidade ρ e σ é, então, definida como

$$D(\rho, \sigma) \equiv (\|\rho - \sigma\|_2)^2 = \text{Tr}(\rho - \sigma)^2. \quad (3.29)$$

Vamos analisar o que essa quantidade nos diz. Em um sistema de duas dimensões, qualquer operador hermitiano A que descreve um determinado observável pode ser expresso como

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, \quad (3.30)$$

onde λ_1 e λ_2 são reais e P_1 e P_2 são projetores com a propriedade $P_1 P_2 = 0$.

Para um dado operador densidade ρ , a probabilidade do observável correspondente ao operador A assumir o valor λ_i é dada por

$$p_i^{(\rho)} = \text{Tr}(\rho P_i). \quad (3.31)$$

Da mesma forma, para um operador densidade σ , temos

$$p_i^{(\sigma)} = \text{Tr}(\sigma P_i). \quad (3.32)$$

O uso da Distância de Hilbert-Schmidt como forma de avaliar a similaridade entre dois operadores densidade é baseado nas distribuições de probabilidades geradas por eles para a medida de um observável arbitrário. Se os dois operadores são “próximos” essas distribuições de probabilidades também deverão ser próximas. Isto é, se ρ e σ são próximos, a probabilidade que o observável correspondente ao operador A assuma o valor λ_i no estado ρ , $p_i^{(\rho)}$, deve ser próxima da probabilidade desse mesmo observável assumir o valor λ_i no estado σ , $p_i^{(\sigma)}$.

Utilizando a propriedade descrita na Equação (3.28), podemos calcular:

$$\begin{aligned} |p_i^{(\rho)} - p_i^{(\sigma)}| &= |\text{Tr}[P_i(\rho - \sigma)]| \\ &\leq \|P_i\|_2 \|\rho - \sigma\|_2 = \|\rho - \sigma\|_2 = \sqrt{D(\rho, \sigma)}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Na expressão acima, podemos ver que a definição da Distância de Hilbert-Schmidt se comporta da forma desejada, nos dando uma ideia da similaridade dos operadores densidades. Temos também que a seguinte propriedade é satisfeita:

$$0 \leq D(\rho, \sigma) \leq 1. \quad (3.34)$$

Ressaltamos eue essa interpretação da Distância de Hilbert-Schmidt em termos das distribuições de probabilidades foi realizada considerando um sistema de duas dimensões. Para sistemas de dimensões infinitas, essa interpretação não é válida [14] e, mesmo para espaços de dimensão finita, ela se torna pior à medida que a dimensão do espaço cresce. Então, embora a Distância de Hilbert-Schmidt seja mais facilmente calculada em alguns casos, a Fidelidade é uma figura de mérito mais popular na avaliação das cópias obtidas a partir da clonagem quântica e, portanto, será a medida que utilizaremos nesse trabalho

Podemos, agora, apresentar uma classificação padrão utilizada para QCMs:

- Uma QCM é denominada *universal* se ela copia igualmente bem todos os estados de entrada, isto é, se F_j é independente de $|\psi\rangle$. Aqui, F_j indica a Fidelidade da cópia j e $|\psi\rangle$ é o estado inicial a ser clonado. A notação UQCM é frequentemente utilizada. Uma QCM não universal é chamadas de *dependente do estado*;
- Uma QCM é denominada *simétrica* se todos os clones têm a mesma fidelidade, i.e., $F_j = F_{j'}$ para todo $j, j' = 1, \dots, M$;
- Uma QCM é denominada *ótima* se as Fidelidades dos clones são as máximas permitidas pela teoria da Mecânica Quântica.

3.4.2 Clonagem trivial para qubits

Vamos agora analisar um pouco mais profundamente a QCM proposta por Wootters e Zurek em sua prova do Teorema da Não-Clonagem. Ela é definida de forma que os vetores da base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ são copiados idealmente, i.e., o processo de clonagem realizado por essa máquina, descrito pela Equação (3.22), é definido como

$$|0\rangle_a |0\rangle_b |Q\rangle_x \xrightarrow{U} |0\rangle_a |0\rangle_b |Q_0\rangle_x, \quad (3.35a)$$

$$|1\rangle_a |0\rangle_b |Q\rangle_x \xrightarrow{U} |1\rangle_a |1\rangle_b |Q_1\rangle_x. \quad (3.35b)$$

Da unitariedade da transformação U e da ortonormalidade dos vetores da base $|0\rangle_a$ e $|1\rangle_a$, podemos assumir que os estados finais da máquina $|Q_0\rangle_x$ e $|Q_1\rangle_x$ são normalizados, desde que o estado inicial $|Q\rangle$ também o seja:

$${}_x\langle Q|Q\rangle_x = {}_x\langle Q_0|Q_0\rangle_x = {}_x\langle Q_1|Q_1\rangle_x = 1. \quad (3.36)$$

Se o estado de entrada que desejamos clonar é dado pela superposição

$$|\psi\rangle_a = \alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a, \quad (3.37)$$

com α e β assumidos reais por simplicidade dos cálculos e $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, temos:

$$|\psi\rangle_a |0\rangle_b |Q\rangle_x \xrightarrow{U} \alpha |0\rangle_a |0\rangle_b |Q_0\rangle_x + \beta |1\rangle_a |1\rangle_b |Q_1\rangle_x \equiv |\Psi\rangle_{abx}. \quad (3.38)$$

Assim, o operador densidade que descreve o sistema após o procedimento é dado por

$$\rho_{abx}^{\text{out}} = |\Psi\rangle_{abx} {}_{abx}\langle\Psi|,$$

$$\begin{aligned} \rho_{abx}^{\text{out}} &= \alpha^2 |0\rangle_a |0\rangle_b |Q_0\rangle_{xx} \langle Q_0|_b \langle 0|_a \langle 0| + \alpha\beta |0\rangle_a |0\rangle_b |Q_0\rangle_{xx} \langle Q_1|_b \langle 1|_a \langle 1| \\ &+ \alpha\beta |1\rangle_a |1\rangle_b |Q_1\rangle_{xx} \langle Q_0|_b \langle 0|_a \langle 1| + \beta^2 |1\rangle_a |1\rangle_b |Q_1\rangle_{xx} \langle Q_1|_b \langle 1|_a \langle 1| \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para analisar o estado do subsistema composto pelas duas cópias, tomamos o traço parcial sobre os estados da máquina. Utilizando as relações dadas pela Equação (3.36), obtemos:

$$\rho_{ab}^{\text{out}} = \text{Tr}_x(\rho_{abx}^{\text{out}}) = \alpha^2 |00\rangle \langle 00| + \beta^2 |11\rangle \langle 11|, \quad (3.40)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} |00\rangle &\equiv |0\rangle_a |0\rangle_b, & |11\rangle &\equiv |1\rangle_a |1\rangle_b, \\ |01\rangle &\equiv |0\rangle_a |1\rangle_b, & |10\rangle &\equiv |1\rangle_a |0\rangle_b. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Os operadores que descrevem os estado quânticos de cada uma das cópias após o procedimento de clonagem são dados por

$$\rho_a^{(\text{out})} = \text{Tr}_b(\rho_{ab}^{\text{out}}) = \alpha^2 |0\rangle_a \langle 0| + \beta^2 |1\rangle_a \langle 1|, \quad (3.42a)$$

$$\rho_b^{(\text{out})} = \text{Tr}_a(\rho_{ab}^{\text{out}}) = \alpha^2 |0\rangle_b \langle 0| + \beta^2 |1\rangle_b \langle 1|. \quad (3.42b)$$

Da Equação 3.42, uma primeira informação que podemos obter é que os estados obtidos são idênticos e, portanto, a máquina é simétrica. Ou seja, as duas cópias têm a mesma Fidelidade. Ressaltamos uma característica

comum à toda QCM simétrica: o estado puro de entrada foi modificado e, na saída, obtemos duas cópias com estados misto.

Podemos reescrever os estados acima como

$$\begin{aligned}\rho_a^{(\text{out})} &= (\alpha^4 + \beta^4) |\psi\rangle_a \langle\psi| + (1 - \alpha^4 + \beta^4) |\psi^\perp\rangle_a \langle\psi^\perp|, \\ \rho_b^{(\text{out})} &= (\alpha^4 + \beta^4) |\psi\rangle_b \langle\psi| + (1 - \alpha^4 + \beta^4) |\psi^\perp\rangle_b \langle\psi^\perp|,\end{aligned}\quad (3.43)$$

onde $|\psi\rangle_i$, para $i = a, b$, é definido como na Equação (3.37) e $|\psi^\perp\rangle = \beta|0\rangle - \alpha|1\rangle$.

Portanto, a fidelidade de cada cópia, obtida através da Equação (3.24), é dada por

$$F_a = F_b = \alpha^4 + \beta^4, \quad (3.44)$$

que atinge um valor máximo de $F = 1$ para $\alpha = 1$ ou $\beta = 1$ e um valor mínimo de $F = 1/2$ para $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Portanto, os estados da base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ são clonados perfeitamente pela QCM mas, se o estado de entrada está em uma superposição, $|\psi\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a)$, o que obtemos após o procedimento, é um estado maximamente misto. Concluímos que um procedimento de clonagem quântica, como o imaginado por Wootters e Zurek, é dependente do estado.

3.4.3 Clonagem quântica universal

UQCM simétrica para qubits ($1 \rightarrow 2$):

A primeira UQCM simétrica para qubits foi proposta por Bužek e Hillery [14] e produz duas cópias a partir de um qubit de entrada ($1 \rightarrow 2$). Seja $\{|0\rangle_i, |1\rangle_i\}$ uma base para os subsistemas das duas cópias e para o subsistema da máquina; $i = a, b, x$. O processo de clonagem em questão é definido pelas seguintes atuações nos estados de entrada, $|0\rangle_a$ e $|1\rangle_a$ ⁹:

$$|0\rangle_a |0\rangle_b |Q\rangle_x \xrightarrow{U} \sqrt{\frac{2}{3}} |0\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_x + \sqrt{\frac{1}{6}} [|0\rangle_a |1\rangle_b + |1\rangle_a |0\rangle_b] |1\rangle_x, \quad (3.45a)$$

$$|1\rangle_a |0\rangle_b |Q\rangle_x \xrightarrow{U} \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle_a |1\rangle_b |1\rangle_x + \sqrt{\frac{1}{6}} [|0\rangle_a |1\rangle_b + |1\rangle_a |0\rangle_b] |0\rangle_x. \quad (3.45b)$$

⁹Aqui, a Eq. (3.29) de [14] foi reescrita utilizando uma mudança de notação para os estados finais da máquina.

¹⁰No artigo original essa transformação é construída a partir de uma expressão mais geral e impondo que o procedimento seja universal, ou seja, independente do estado de entrada.

Vamos mostrar que essa transformação produz cópias com mesma Fidelidade, independente do estado de entrada.

Dada a linearidade da operação unitária, para um estado de superposição $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, com α e β complexos e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, temos:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_a |0\rangle_b |Q\rangle_x &\xrightarrow{U} \sqrt{\frac{2}{3}} (\alpha |0\rangle_a |0\rangle_b |0\rangle_x + \beta |1\rangle_a |1\rangle_b |1\rangle_x) \\ &+ \sqrt{\frac{1}{6}} (|0\rangle_a |1\rangle_b + |1\rangle_a |0\rangle_b) (\alpha |1\rangle_x + \beta |0\rangle_x) = |\Psi\rangle_{abx} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Através de um cálculo direto e longo, podemos reescrever a expressão acima como:

$$|\Psi\rangle_{abx} = \sqrt{\frac{2}{3}} |\psi\rangle_a |\psi\rangle_b |\psi\rangle_x + \sqrt{\frac{1}{6}} [|\psi\rangle_a |\psi^\perp\rangle_b + |\psi^\perp\rangle_a |\psi\rangle_b] |\psi^\perp\rangle_x, \quad (3.47)$$

onde definimos $|\psi^\perp\rangle = \beta^* |0\rangle - \alpha^* |1\rangle$.

O estado de saída do subsistema formado pelas duas cópias é dado por:

$$\begin{aligned} \rho_{ab}^{\text{out}} &= \text{Tr}_x(|\Psi\rangle_{abx} \langle\Psi|_{abx}), \\ \rho_{ab}^{\text{out}} &= \frac{2}{3} |\psi\rangle_a \langle\psi| \otimes |\psi\rangle_b \langle\psi| + \frac{1}{6} (|\psi\rangle_a \langle\psi| + |\psi^\perp\rangle_a \langle\psi^\perp|) ({}_a\langle\psi|_b \langle\psi^\perp| + {}_a\langle\psi^\perp|_b \langle\psi|). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para calcular as Fidelidade precisamos obter os operadores densidade que descrevem o estado de cada cópia:

$$\rho_a^{\text{out}} = \text{Tr}_b(\rho_{ab}^{\text{out}}) = \frac{2}{3} |\psi\rangle_a \langle\psi| + \frac{1}{6} (|\psi\rangle_a \langle\psi| + |\psi^\perp\rangle_a \langle\psi^\perp|) = \frac{2}{3} |\psi\rangle_a \langle\psi| + \frac{1}{6} \mathbb{1}, \quad (3.49a)$$

$$\rho_b^{\text{out}} = \text{Tr}_a(\rho_{ab}^{\text{out}}) = \frac{2}{3} |\psi\rangle_b \langle\psi| + \frac{1}{6} (|\psi\rangle_b \langle\psi| + |\psi^\perp\rangle_b \langle\psi^\perp|) = \frac{2}{3} |\psi\rangle_b \langle\psi| + \frac{1}{6} \mathbb{1}. \quad (3.49b)$$

Com isso, as Fidelidades de cada cópia podem ser calculadas a partir da Equação 3.24 e são dadas por:

$$F_a = F_b = \frac{5}{6}. \quad (3.50)$$

Destacamos que, assim como na QCM de Wootters e Zurek, a fidelidade obtida é a mesma para ambas as cópias e, portanto, a máquina de clonagem é dita simétrica. Além disso, a fidelidade das cópias não depende do estado de entrada e a máquina de clonagem é então dita universal.

As cópias obtidas através dessa QCM possuem uma alta fidelidade, $F_a = F_b = \frac{5}{6} \approx 83\%$, mas podemos nos perguntar se é possível construir uma transformação que nos forneça um valor maior que esse. Após o trabalho de Bužek e Hillery, alguns outros autores[11, 30], utilizando resultados conhecidos da teoria da Mecânica Quântica, mostraram que esse valor é o máximo permitido e, portanto, a QCM é dita ótima.

A transformação do ancilla – Porta NOT universal:

Na seção anterior, analisamos apenas o estado de cada uma das cópias obtidas após o procedimento de clonagem, i.e., os estados finais dos subsistemas a e b . Entretanto, após o procedimento, o estado do subsistema da máquina também tem um interessante significado. Assim como foi demonstrado no Teorema da Não-Clonagem que não é possível construir um dispositivo capaz de clonar idealmente um estado quântico arbitrário, Bužek, Hillery e Werner[16] mostraram que não é possível construir um dispositivo cuja entrada é um estado arbitrário $|\psi\rangle$ e a saída é um estado ortogonal à ele, $|\psi^\perp\rangle$. O estado $|\psi^\perp\rangle$ é chamado de anti-clone e uma operação desse tipo é chamada de porta NOT quântica. Para qubits, podemos visualizar intuitivamente esse resultado da seguinte forma: sabemos que qualquer operação unitária em um qubit atua como uma rotação em torno de um eixo na esfera de Bloch e, portanto, os vetores sobre esse eixo não são alterados. Dois vetores ortogonais na esfera de Bloch são antípodas. Então, a operação NOT universal equivaleria a levar cada ponto da esfera no ponto diagonalmente oposto, o que não é possível através de uma rotação, onde os pontos sobre o eixo são preservados.

Assim como o obtido para a clonagem quântica, pode-se encontrar operações que implementam perfeitamente a porta NOT quântica somente para um conjunto específico de estados ou podemos encontrar operações que aproximam a operação, da melhor forma possível, para qualquer estado arbitrário e desconhecido. Nesse último caso, denominaremos tal dispositivo por porta NOT universal(UNOT). Bužek, Hillery e Werner, no mesmo artigo[16], mostraram que a UNOT ótima pode ser implementada usando a UQCM descrita nesta seção. Nesse caso, o estado do estado do ancilla é o anti-clone ótimo do estado de entrada. Para apresentar o resultado, vamos retornar ao caso da clonagem simétrica para qubits ($1 \rightarrow 2$) apresentado anteriormente.

Seja $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, com α, β complexos e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, o estado de entrada que desejamos clonar. O estado da ancilla pode ser obtido realizando o traço sobre os subsistemas a e b :

$$\rho_x^{\text{out}} = \text{Tr}_{ab}(|\Psi\rangle_{abx} \langle\Psi|), \quad (3.51)$$

onde $|\Psi\rangle_{abx}$ é dado pela Equação (3.47).

Ao realizar esse cálculo, obtemos:

$$\rho_x^{\text{out}} = \frac{2}{3}|\psi^\perp\rangle_x \langle\psi^\perp| + \frac{1}{3}|\psi\rangle_x \langle\psi|, \quad (3.52)$$

onde $|\psi^\perp\rangle = \beta^*|0\rangle - \alpha^*|1\rangle$ é o anti-clone ideal do estado de entrada.

Nesse caso, é fácil perceber que a fidelidade é dada por:

$$F = \frac{2}{3}. \quad (3.53)$$

Representação na esfera de Bloch

Podemos utilizar a representação na esfera de Bloch para comparar o procedimento de clonagem ideal, proibido pelo teorema da não-clonagem, e o procedimento de clonagem universal para qubits descrito nesta seção. Considere o estado de entrada que desejamos clonar dado por $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Na representação de esfera de Bloch, esse estado é representado como um vetor \vec{v} apontando da origem para um ponto na superfície da esfera. A direção desse vetor é especificada pelo ângulo polar θ e o ângulo azimutal ϕ . O operador densidade do estado de entrada pode ser escrito como:

$$\rho_a = |\psi\rangle_a \langle\psi| = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{v} \cdot \vec{\sigma}). \quad (3.54)$$

Agora considere o estado de uma das cópias após o procedimento de clonagem universal, dado pela Equação (3.49). Utilizando a equação acima podemos escrever:

$$\rho_a^{\text{out}} = \frac{2}{3} |\psi\rangle_a \langle\psi| + \frac{1}{6} \mathbb{1} = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{v} \cdot \vec{\sigma}) \right] + \frac{1}{6} \mathbb{1}, \quad (3.55a)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \frac{2}{3} \vec{v} \cdot \vec{\sigma} \right). \quad (3.55b)$$

Portanto, o que a UQCM de Bužek e Hillery faz é reduzir o vetor de Bloch do estado original de entrada, \vec{v} , por um fator de $\frac{2}{3}$, sem alterar sua direção.

Da mesma forma, podemos comparar o estado do anti-clone ideal e o anti-clone ótimo. Na esfera de Bloch, o anti-clone ideal é representado pelo vetor $-\vec{v}$ e, portanto, seu estado pode ser escrito como:

$$\rho_x = |\psi^\perp\rangle_x \langle\psi^\perp| = \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \vec{v} \cdot \vec{\sigma}) \quad (3.56)$$

A partir do estado do anti-clone obtido a partir da UQCM, dado pela Equação (3.52), podemos escrever:

$$\rho_x^{\text{out}} = \frac{2}{3} |\psi^\perp\rangle_x \langle\psi^\perp| + \frac{1}{3} |\psi\rangle_x \langle\psi| = \frac{1}{3} |\psi^\perp\rangle_x \langle\psi^\perp| + \frac{1}{3} \mathbb{1}, \quad (3.57a)$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (\mathbb{1} - \vec{v} \cdot \vec{\sigma}) \right] + \frac{1}{3} \mathbb{1} \quad (3.57b)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} - \frac{1}{3} \vec{v} \cdot \vec{\sigma} \right). \quad (3.57c)$$

Portanto, ao final do procedimento, o estado do subsistema da máquina é um anti-clone imperfeito com o vetor de Bloch na mesma direção do anti-clone ideal mas reduzido por um fator de $\frac{2}{3}$.

A discussão acima pode ser visualizada nas Figuras 3.2 e 3.3. Na figura 3.2 temos as representações na esfera de Bloch dos processos de clonagem quântica e realização da porta NOT, ambos proibidos pela teoria da Mecânica Quântica. Na Figura 3.3 temos a representação do processo de clonagem universal proposto por Bužek e Hillery com a obtenção do anti-clone universal ótimo.

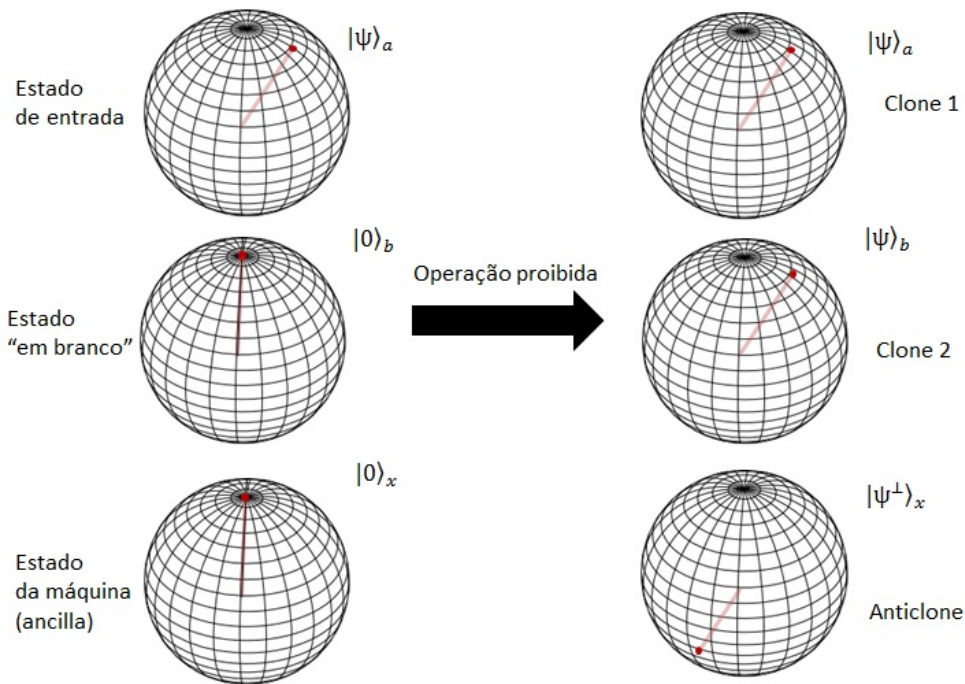


Figura 3.2: Representação na esfera de Bloch dos processos de clonagem quântica e realização da porta NOT, ambos proibidos pela teoria da Mecânica Quântica. Um estado de entrada arbitrário é clonado perfeitamente, i.e., o vetor de Bloch que representa esse estado permanece igual. No caso do anti-clone ideal, é obtido um estado cujo vetor de Bloch tem o mesmo tamanho do vetor original porém direção diametralmente oposta.

Generalização para o caso $(N \rightarrow M)$

Em 1997 [30], Gisin e Massar obtiveram a generalização para a UQCM $N \rightarrow M$, ou seja, M cópias obtidas a partir de N qubits idênticos de entrada.

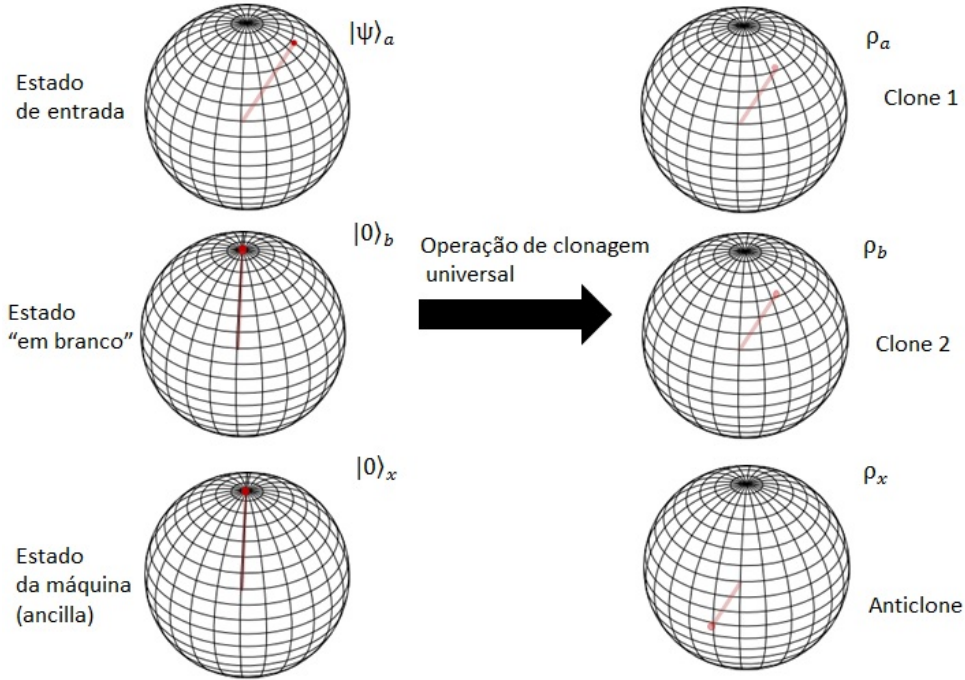


Figura 3.3: Representação na esfera de Bloch do processo de clonagem quântica universal proposto por Bužek e Hillery com a obtenção do anti-clone ótimo. Um estado de entrada é copiado de maneira ótima, i.e., o vetor de Bloch que representa o estado de cada cópia tem a mesma direção do vetor que representa o estado de entrada porém seu tamanho é reduzido por um fator de $2/3$. No caso do anti-clone ótimo, temos um estado cujo vetor de Bloch tem direção diametralmente oposta ao vetor que representa o estado de entrada e tamanho reduzido por um fator de $1/3$.

O estado de cada qubit de entrada que desejamos clonar é dado por $|\psi\rangle$ e a UQCM proposta pelos autores é descrita pela transformação:

$$|N\psi\rangle_a |0\rangle_b |Q\rangle_x \xrightarrow{U} \sum_{j=0}^{M-N} \alpha_j \left| (M-N)\psi, j\psi^\perp \right\rangle_{ab} |Q_j\rangle_x, \quad (3.58)$$

onde

$$\alpha_j = \sqrt{\frac{N+1}{M+1}} \sqrt{\frac{(M-N)!(M-j)!}{(M-N-j)!M!}},$$

e $\left| (M-N)\psi, j\psi^\perp \right\rangle_{ab}$ denota o estado normalizado simétrico com $M-j$ estados $|\psi\rangle_a$ e j estados $|\psi^\perp\rangle_b$.

Para essa transformação, os autores obtiveram a fidelidade como:

$$F_{(N \rightarrow M)}^{univ}(d = 2) = \frac{M(N + 1) + N}{M(N + 2)}, \quad (3.59)$$

que reproduz o valor de $F = 5/6$ obtido para $N = 1$ e $M = 2$; $d = 2$ indica que a fidelidade é relativa à clonagem de qubits.

UQCM simétrica para qudits ($1 \rightarrow 2$):

No início de 1998, a generalização de UQCMs para espaços de maiores dimensões foi considerada por Bužek e Hillery [15] e Werner [67], independentemente. A transformação da UQCM $1 \rightarrow 2$ para espaços de dimensão d foi proposta por Bužek e Hillery e o caso $N \rightarrow M$ foi derivado por Werner. Vamos apresentar aqui a construção realizada por Bužek e Hillery.

Seja $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_d\rangle\}$ uma base para um sistema de dimensão d tal que um estado quântico puro nesse espaço pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d \alpha_i |\phi_i\rangle, \quad (3.60)$$

onde $\sum_{i=1}^d |\alpha_i|^2 = 1$.

Para uma UQCM $1 \rightarrow 2$ simétrica, precisa-se de uma transformação unitária que seja capaz de copiar qualquer estado de entrada, $|\psi\rangle_a$, igualmente bem e que produza duas cópias com a mesma fidelidade. O processo de clonagem quântica de qudits, proposto por Bužek e Hillery, é definido pela seguinte transformação em cada um dos estados da base $|\phi_i\rangle_a$:

$$|\phi_i\rangle_a |0\rangle_b |Q\rangle_x \xrightarrow{U} g |\phi_i\rangle_a |\phi_i\rangle_b |Q_i\rangle_x + h \sum_{i \neq j}^d (|\phi_i\rangle_a |\phi_j\rangle_b + |\phi_j\rangle_a |\phi_i\rangle_b) |Q_j\rangle_x, \quad (3.61)$$

onde $|Q_i\rangle$ é um conjunto de estados ortonormalizados da máquina e os coeficientes g e h são assumidos reais. Assumimos também que o estado inicial da máquina seja normalizado, i.e., ${}_x \langle Q|Q\rangle_x = 1$. Dada a unitariedade da transformação temos que g e h devem satisfazer a relação:

$$g^2 + 2(d - 1)h^2 = 1. \quad (3.62)$$

A qualidade da clonagem deve ser independente do estado de entrada e todas as cópias devem ter a mesma fidelidade. Essa invariância do processo pode ser formalmente expressa pelas relações:

$$\rho_a^{\text{out}} = s |\psi\rangle_a \langle \psi| + \frac{1-s}{d} \mathbb{1}, \quad (3.63a)$$

$$\rho_b^{\text{out}} = s|\psi\rangle_b\langle\psi| + \frac{1-s}{d}\mathbb{1}, \quad (3.63b)$$

onde s é um fator de escala que se relaciona com a fidelidade das cópias através da expressão:

$$F = s + \frac{1-s}{d}. \quad (3.64)$$

Ressaltamos que essa é a mesma forma do operador que descreve cada uma das cópias obtidas através da máquina de clonagem de qubits, Equação (3.49). Naquele caso $s = 2/3$, $d = 2$ e, portanto, $F = 5/6$.

Ao aplicar a transformação definida pela Equação (3.61) no estado de entrada que desejamos clonar, Equação (3.60), obtemos:

$$|\psi\rangle_a |0\rangle_b |Q\rangle_x \xrightarrow{U} g \sum_{i=1}^d \alpha_i |\phi_i\rangle_a |\phi_i\rangle_b |Q_i\rangle_x + h \sum_{i=1}^d \sum_{i \neq j}^d \alpha_i \left(|\phi_i\rangle_a |\phi_j\rangle_b + |\phi_j\rangle_a |\phi_i\rangle_b \right) |Q_j\rangle_x = |\Psi\rangle_{abx} \quad (3.65)$$

A partir dessa expressão, podemos obter os operadores densidade que descrevem o estado de cada uma das cópias:

$$\rho_a^{\text{out}} = \text{Tr}_{bx}(|\Psi\rangle_{abx} \langle\Psi|)$$

$$\rho_a^{\text{out}} = \sum_{i=1}^d |\alpha_i|^2 \left[g^2 + (d-2)h^2 \right] |\phi_i\rangle_a \langle\phi_i| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^d \alpha_i \alpha_j \left[2gh + (d-2)h^2 \right] |\phi_i\rangle_a \langle\phi_j| + h^2 \mathbb{1}. \quad (3.66a)$$

$$\rho_b^{\text{out}} = \text{Tr}_{ax}(|\Psi\rangle_{abx} \langle\Psi|)$$

$$\rho_b^{\text{out}} = \sum_{i=1}^d |\alpha_i|^2 \left[g^2 + (d-2)h^2 \right] |\phi_i\rangle_b \langle\phi_i| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^d \alpha_i \alpha_j \left[2gh + (d-2)h^2 \right] |\phi_i\rangle_b \langle\phi_j| + h^2 \mathbb{1}. \quad (3.66b)$$

Devemos, então, encontrar os valores de g e h que garantam que operadores densidade na Equação (3.66) assumam a forma dada pela Equação (3.63). Dessa forma, a universalidade da transformação é garantida. Comparando essas duas equações, podemos visualizar que g e h devem satisfazer a condição:

$$2gh = g^2. \quad (3.67)$$

Aplicando essa relação na condição de normalização, dada pela Equação (3.62), temos:

$$g^2 = \frac{2}{d+1}, \quad (3.68a)$$

$$h^2 = \frac{1}{2(d+1)}, \quad (3.68b)$$

de onde segue-se que o fator de escala s é dado por:

$$s = g^2 + (d - 2)h^2 = \frac{d + 2}{2(d + 1)}. \quad (3.69)$$

Por fim, aplicando os valores de g e h encontrados acima na Equação (3.61), que descreve o processo de clonagem, obtemos a transformação realizada pela UQCM simétrica para qudits de Bužek e Hillery:

$$|\phi_i\rangle_a |0\rangle_b |Q\rangle_x \xrightarrow{U} \frac{2}{\sqrt{2(d+1)}} |\phi_i\rangle_a |\phi_i\rangle_b |Q_i\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2(d+1)}} \sum_{\phi_i \neq \phi_j} (|\phi_i\rangle_a |\phi_j\rangle_b + |\phi_j\rangle_a |\phi_i\rangle_b) |Q_j\rangle_x, \quad (3.70)$$

A fidelidade pode ser calculada a partir das Equações (3.64) e (3.69) como:

$$F_{(1 \rightarrow 2)}^{univ}(d) = \frac{d + 3}{2d + 2}. \quad (3.71)$$

Ressaltamos que, para $d = 2$, a transformação acima se reduz àquela obtida para a clonagem de qubits, dada pela Equação (3.45). Além disso, da expressão acima podemos notar que quanto maior a dimensão d do sistema, menor será a fidelidade de cada uma das cópias obtidas.

Capítulo 4

Implementação de UQCM para ququarts

Neste capítulo, vamos apresentar uma implementação experimental de uma máquina de clonagem universal para sistemas de quatro dimensões, cuja transformação unitária teórica foi proposta por Bužek e Hillery. A implementação se refere ao caso $1 \rightarrow 2$, ou seja, 2 ququarts são obtidos a partir de 1 ququart de entrada.

4.1 Descrição matemática do processo de clonagem universal

Seja $|\phi\rangle$ o estado de entrada que desejamos clonar. Podemos definir uma base $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle, |\phi_4\rangle\}$ para um sistema de quatro dimensões, tal que $|\phi\rangle$ é um dos elementos da base, i.e., $|\phi_1\rangle = |\phi\rangle$. O estado final após a UQCM é obtido aplicando a unitária sugerida por Bužek e Hillery, descrita na Equação (3.70):

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{abx} = & \frac{2}{\sqrt{10}}|\phi_1\rangle_a|\phi_1\rangle_b|Q_1\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{10}}[(|\phi_1\rangle_a|\phi_2\rangle_b + |\phi_2\rangle_a|\phi_1\rangle_b)|Q_2\rangle_x + \\ & + (|\phi_1\rangle_a|\phi_3\rangle_b + |\phi_3\rangle_a|\phi_1\rangle_b)|Q_3\rangle_x + (|\phi_1\rangle_a|\phi_4\rangle_b + |\phi_4\rangle_a|\phi_1\rangle_b)|Q_4\rangle_x] \end{aligned} \quad (4.1)$$

Podemos calcular o estado de cada cópia tomando o traço parcial sobre os estados dos demais subsistemas :

$$\rho_a = \text{Tr}_{bx}(|\Psi\rangle_{abx}\langle\Psi|) = \frac{7}{10}|\phi_1\rangle_a\langle\phi_1| + \frac{1}{10}|\phi_2\rangle_a\langle\phi_2| + \frac{1}{10}|\phi_3\rangle_a\langle\phi_3| + \frac{1}{10}|\phi_4\rangle_a\langle\phi_4|, \quad (4.2)$$

$$\rho_b = \text{Tr}_{\text{ax}}(|\Psi\rangle_{abxabx}\langle\Psi|) = \frac{7}{10}|\phi_1\rangle_b\langle\phi_1| + \frac{1}{10}|\phi_2\rangle_b\langle\phi_2| + \frac{1}{10}|\phi_3\rangle_b\langle\phi_3| + \frac{1}{10}|\phi_4\rangle_b\langle\phi_4|, \quad (4.3)$$

Para os estados acima, utilizando a Equação (3.24), podemos obter a fidelidade de cada cópia:

$$F_a = F_b = \frac{7}{10}. \quad (4.4)$$

Portanto, buscamos um procedimento experimental que alcance a fidelidade de $7/10$ e que, portanto, transforme o estado puro de entrada, $|\phi\rangle$, em um estado misto como o da Equação (4.2).

4.2 Proposta de UQCM para sistemas de quatro dimensões utilizando o efeito Hong-Ou-Mandel

O efeito Hong-Ou-Mandel é um efeito demonstrado por C. K. Hong, Z. Y. Ou e L. Mandel em 1987 [36] que ocorre quando dois fótons interagem em um divisor de feixes. Do ponto de vista prático, um fóton ao entrar em um divisor de feixe com refletividade $\eta = 0,5$ (BS, do inglês beamsplitter) tem uma probabilidade de 50% de ser transmitido(ou refletido). Quando dois fótons de mesma polarização e frequência, perfeitamente indistinguíveis espacialmente e temporalmente, entram em um divisor por diferentes portas a interferência ocorre e os dois emergem pela mesma saída, i.e., a probabilidade de detectar um fóton em cada saída do BS é nula. Se os dois fótons tiverem, por exemplo, polarizações ortogonais, a interferência não ocorre mesmo que suas outras características sejam iguais, devido à distinguibilidade no grau de liberdade de polarização. Nesse caso, cada fóton se comportará de forma independente no divisor de feixe. Para modelar o efeito, vamos escrever o estado de dois fótons, considerando cada um deles entrando em uma porta do BS, como indicado na Figura (4.1). Utilizando o formalismo de segunda quantização, temos:

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = |1, i\rangle_a |1, j\rangle_b, \quad (4.5a)$$

$$= a_i^\dagger b_j^\dagger |\text{vac}\rangle \quad (4.5b)$$

onde a e b representam os modos de entrada e saída do BS, sendo a e b os modos de entrada e saída na direções horizontal e vertical, respectivamente, e i e j alguma propriedade dos fótons que determina a distinguibilidade entre eles. Esses podem se referir à polarização, frequência ou tempo de chegada no BS, por exemplo.

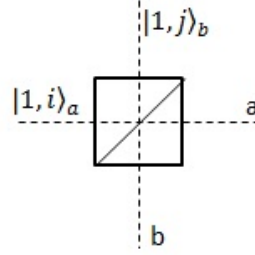


Figura 4.1: Esquema de dois fótons incidindo em um BS com refletividade η . Na entrada a do BS temos um fóton em um estado dado por $|1, i\rangle_a$ e na entrada b um fóton no estado $|1, j\rangle_b$. Os índices i e j representam alguma propriedade dos fótons que determine a distinguibilidade entre eles.

Podemos modelar a atuação de um BS com refletividade η através de uma unitária U_{BS} que realiza as seguintes transformações nos operadores[42]:

$$a_j^\dagger \rightarrow (\sqrt{\eta}a_j^\dagger + i\sqrt{1-\eta}b_j^\dagger), b_j^\dagger \rightarrow (i\sqrt{1-\eta}a_j^\dagger + \sqrt{\eta}b_j^\dagger). \quad (4.8)$$

Após passar pelo BS, o estado dos fótons é dado por:

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = (\sqrt{\eta}a_i^\dagger + i\sqrt{1-\eta}b_i^\dagger) (i\sqrt{1-\eta}a_j^\dagger + \sqrt{\eta}b_j^\dagger) |\text{vac}\rangle, \quad (4.9a)$$

$$= (i\sqrt{\eta}\sqrt{1-\eta}a_i^\dagger a_j^\dagger + \eta a_i^\dagger b_j^\dagger - (1-\eta)b_i^\dagger a_j^\dagger + i\sqrt{\eta}\sqrt{1-\eta}b_i^\dagger b_j^\dagger) |\text{vac}\rangle \quad (4.9b)$$

Na Figura 4.2, apresentamos um diagrama representando as situações que correspondem à cada um dos termos acima.

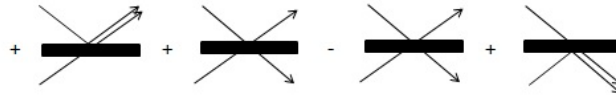


Figura 4.2: Diagrama representando as situações correspondentes à cada um dos termos presentes na Equação (4.9). Podemos visualizar que dois dos termos referem-se às situações em que os dois fótons saem pela mesma porta do BS e os outros dois termos correspondem às situações em que os fótons deixam o BS por saídas diferentes.

Vamos considerar dois fótons indistinguíveis em todos os graus de liberdade exceto polarização e modo de propagação. Além disso consideraremos que o

BS é balanceado, i.e., possui refletividade $\eta = 0,5$. No cenário em que os dois fótons possuem polarizações ortogonais, horizontal para o fóton na entrada a e vertical para o fóton na entrada b , o estado de saída após o BS pode ser escrito como:

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \frac{1}{2} \left(ia_H^\dagger a_V^\dagger + a_H^\dagger b_V^\dagger - b_H^\dagger a_V^\dagger + ib_H^\dagger b_V^\dagger \right) |\text{vac}\rangle \quad (4.10a)$$

$$= \frac{i}{2} |1, H\rangle_a |1, V\rangle_b + \frac{1}{2} |1, H\rangle_a |1, V\rangle_b - \frac{1}{2} |1, V\rangle_a |1, H\rangle_b + \frac{i}{2} |1, H\rangle_b |1, V\rangle_b. \quad (4.10b)$$

Na Equação (4.10), os dois termos do meio correspondem às situações em que os dois fótons saem por diferentes portas do BS. Assim, a probabilidade de dois fótons deixarem o BS por saídas diferentes é $p = 1/2$.

Agora vamos considerar o cenário em que os dois fótons possuem polarização horizontal, i.e., os fótons são indistinguíveis. Nesse caso, o estado de saída após o BS pode ser escrito como:

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \frac{1}{2} \left(ia_H^\dagger a_H^\dagger + a_H^\dagger b_H^\dagger - b_H^\dagger a_H^\dagger + ib_H^\dagger b_H^\dagger \right) |\text{vac}\rangle, \quad (4.11a)$$

$$= \frac{1}{2} \left(ia_H^\dagger a_H^\dagger + ib_H^\dagger b_H^\dagger \right) |\text{vac}\rangle, \quad (4.11b)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |2, H\rangle_a + \frac{1}{\sqrt{2}} |2, V\rangle_b. \quad (4.11c)$$

Note que na Equação (4.11), utilizamos $(a^\dagger)^n |\text{vac}\rangle = \sqrt{n!} |n\rangle$ e, portanto, o estado está normalizado. Nesse caso, vemos que um fenômeno de interferência ocorre e os termos correspondentes aos dois fótons saindo por diferentes portas no BS se cancelam. Assim, a probabilidade de dois fótons deixarem o BS por diferentes saídas é nula, $p = 0$.

O fenômeno descrito acima é um dos mais citados em Óptica Quântica e tem desempenhado importante papel em vários experimentos de Informação Quântica como o teleporte[9] e codificação superdensa[46]. A seguir, acompanhando a proposta de E. Nagali *et al*[49], vamos mostrar como esse mesmo fenômeno pode ser utilizado para realizar a clonagem universal em um sistema de quatro dimensões.

Suponha que enviamos um fóton em um modo monocromático no estado que desejamos clonar, $|\phi_1\rangle_a$, na entrada a do BS. Aqui, $|\phi_1\rangle_a$ é o estado do fóton em graus de liberdade diferentes de frequência. Na entrada b , enviamos um fóton de mesma frequência do anterior em um estado totalmente misto nos mesmos graus de liberdade que $|\phi_1\rangle_a$. Podemos utilizar a base definida

na seção anterior para escrevê-lo¹:

$$\rho_b = \frac{1}{4} (|\phi_1\rangle_b \langle \phi_1| + |\phi_2\rangle_b \langle \phi_2| + |\phi_3\rangle_b \langle \phi_3| + |\phi_4\rangle_b \langle \phi_4|).$$

Note que esse estado possui a mesma forma em qualquer base, garantindo que os cálculos seguintes sejam válidos para um estado arbitrário de entrada. Neste primeiro cálculo, lembramos que estamos considerando uma situação ideal em que os dois fótons incidentes têm a mesma frequência e a distinguibilidade entre eles é determinada por outras propriedades como polarização, momento angular, modo espacial e outras. O operador densidade que des-

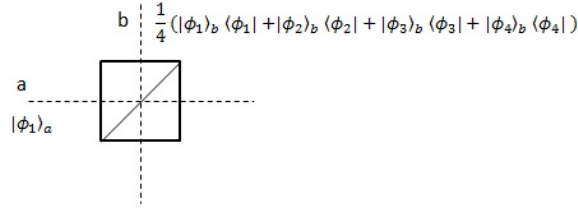


Figura 4.3: Esquema de dois fótons de mesma frequência incidindo em um BS com reflexão e transmissão de 50%. Na entrada a enviamos um fóton no estado que desejamos clonar, $|\phi_1\rangle_a$, e na entrada b enviamos um fóton preparado em um estado totalmente misto, $\rho_b = \frac{1}{4} (|\phi_1\rangle_b \langle \phi_1| + |\phi_2\rangle_b \langle \phi_2| + |\phi_3\rangle_b \langle \phi_3| + |\phi_4\rangle_b \langle \phi_4|)$.

creve os dois fótons na entrada do BS pode ser escrito como:

$$\rho^{in} = \frac{1}{4} [|\phi_1\rangle_a \langle \phi_1| \otimes (|\phi_1\rangle_b \langle \phi_1| + |\phi_2\rangle_b \langle \phi_2| + |\phi_3\rangle_b \langle \phi_3| + |\phi_4\rangle_b \langle \phi_4|)]. \quad (4.12)$$

Usando o formalismo de segunda quantização reescrevemos o estado acima:

$$\rho^{in} = \frac{1}{4} \left(a_1^\dagger b_1^\dagger |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_1 b_1 + a_1^\dagger b_2^\dagger |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_1 b_2 + a_1^\dagger b_3^\dagger |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_1 b_3 + a_1^\dagger b_4^\dagger |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_1 b_4 \right), \quad (4.13)$$

onde $|\text{vac}\rangle$ denota o estado de vácuo do campo e a_i^\dagger , b_i^\dagger , a_i e b_i referem-se aos operadores de criação e destruição nos modos a e b ². Os subíndices

¹Os detalhes da implementação de ququarts utilizando, ρ_b , fótons serão discutidos na Seção 4.3.

²Durante todo o capítulo, adotaremos a convenção de usar sempre a letra a para denominar os modos na direção horizontal e a letra b para os verticais.

desses operadores são correspondentes aos subíndices dos estados da base, $i = 1, 2, 3, 4$.

Novamente, o efeito do BS nesse estado pode ser modelado através de uma unitária U_{BS} que realiza as seguintes transformações nos operadores de criação[42]:

$$a_j^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (a_j^\dagger + ib_j^\dagger), b_j^\dagger \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (ia_j^\dagger + b_j^\dagger). \quad (4.14)$$

e, portanto,

$$a_j \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (a_j - ib_j), b_j \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (-ia_j + b_j). \quad (4.15)$$

O estado dos dois fótons após passar pelo BS é, então, dado por:

$$\rho^{\text{out}} = \frac{1}{16} (A|\text{vac}\rangle\langle\text{vac}|A^\dagger + B|\text{vac}\rangle\langle\text{vac}|B^\dagger + C|\text{vac}\rangle\langle\text{vac}|C^\dagger + D|\text{vac}\rangle\langle\text{vac}|D^\dagger), \quad (4.16)$$

sendo A, B, C e D definidos como

$$\begin{aligned} A &= \frac{i}{2} (a_1^\dagger a_1^\dagger + b_1^\dagger b_1^\dagger), \\ B &= \frac{1}{2} (ia_1^\dagger a_2^\dagger + a_1^\dagger b_2^\dagger - a_2^\dagger b_1^\dagger + ib_1^\dagger b_2^\dagger), \\ C &= \frac{1}{2} (ia_1^\dagger a_3^\dagger + a_1^\dagger b_3^\dagger - a_3^\dagger b_1^\dagger + ib_1^\dagger b_3^\dagger), \\ D &= \frac{1}{2} (ia_1^\dagger a_4^\dagger + a_1^\dagger b_4^\dagger - a_4^\dagger b_1^\dagger + ib_1^\dagger b_4^\dagger). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Depois da interação no BS, consideraremos somente o caso em que dois fótons saem pelo mesmo modo de saída. Isso será feito através de uma pós-seleção do estado com dois fótons saindo no modo b. O estado pós-selecionado, já normalizado, é dado por:

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{1}{5} (b_1^\dagger b_1^\dagger |\text{vac}\rangle\langle\text{vac}|b_1 b_1 + b_1^\dagger b_2^\dagger |\text{vac}\rangle\langle\text{vac}|b_1 b_2 + b_1^\dagger b_3^\dagger |\text{vac}\rangle\langle\text{vac}|b_1 b_3 \\ &\quad + b_1^\dagger b_4^\dagger |\text{vac}\rangle\langle\text{vac}|b_1 b_4). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Usando a base de Fock para representar o estado acima, temos

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{1}{5} (2|2, 0, 0, 0\rangle\langle 2, 0, 0, 0| + |1, 1, 0, 0\rangle\langle 1, 1, 0, 0| + |1, 0, 1, 0\rangle\langle 1, 0, 1, 0| \\ &\quad + |1, 0, 0, 1\rangle\langle 1, 0, 0, 1|), \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde $|a, b, c, d\rangle$ representa “a” fótons ocupando o estado $|\phi_1\rangle$, “b” fótons ocupando o estado $|\phi_2\rangle$, “c” fótons ocupando o estado $|\phi_3\rangle$ e “d” fótons ocupando o estado $|\phi_4\rangle$.

Para obter o estado de cada um dos fótons, reescrevemos o estado de dois fótons da Equação (4.19) na base $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle$ e $|\phi_4\rangle$, levando em conta a simetrização:

$$|2, 0, 0, 0\rangle \rightarrow |\phi_1\rangle_i |\phi_1\rangle_s, \quad (4.20)$$

$$|1, 1, 0, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1\rangle_i |\phi_2\rangle_s + |\phi_2\rangle_i |\phi_1\rangle_s), \quad (4.21)$$

$$|1, 0, 1, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1\rangle_i |\phi_3\rangle_s + |\phi_3\rangle_i |\phi_1\rangle_s), \quad (4.22)$$

$$|1, 0, 0, 1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1\rangle_i |\phi_4\rangle_s + |\phi_4\rangle_i |\phi_1\rangle_s), \quad (4.23)$$

onde os subíndices i e s foram utilizados para denominar cada um dos dois fótons.

O estado de cada fóton é calculado como

$$\rho_i = \rho_s = \frac{7}{10} |\phi_1\rangle_a \langle \phi_1| + \frac{1}{10} |\phi_2\rangle_a \langle \phi_2| + \frac{1}{10} |\phi_3\rangle_a \langle \phi_3| + \frac{1}{10} |\phi_4\rangle_a \langle \phi_4|. \quad (4.24)$$

Portanto, a fidelidade é $F = \frac{7}{10}$.

4.3 Realização experimental com ququarts codificados em momento angular orbital e polarização

Agora apresentaremos uma forma de implementar experimentalmente a proposta descrita na seção anterior e de testar seu funcionamento (veja Ref. [49]). Para isso, serão utilizados os fótons gerados no processo conhecido como Conversão Paramétrica Descendente Espontânea (CPD), um dos métodos mais comuns para gerar pares de fótons correlacionados no laboratório. Nesse processo, um laser intenso é usado para bombear um cristal não linear e há uma pequena probabilidade de obter dois novos fótons de menor energia. No processo há conservação de momento e energia entre os fótons convertidos e o feixe de entrada fazendo com que os fótons gerados sejam correlacionados em vários parâmetros, como por exemplo, tempo de emissão, frequência e momento. Essas correlações tornam o processo útil para se demonstrar experimentalmente o procedimento de clonagem descrito na Seção 4.2³.

A representação esquemática do experimento está relatada na Figura 4.4. A figura foi dividida em três partes denominadas: fonte de fótons, preparação dos estados e sistema de detecção, que serão detalhadas nas próximas

³Para maiores detalhes sobre a Conversão Paramétrica Descendente Espontânea, consulte o Apêndice C.

seções. Os detalhes das montagens experimentais para a preparação dos estados e o sistema de detecção, i.e., o conjunto de placas e PBS utilizado, varia ligeiramente dependendo dos estados que serão preparados, como será discutido nas Seções 4.3.2 e 4.3.4. Nessa figura está representada uma das configurações utilizadas.

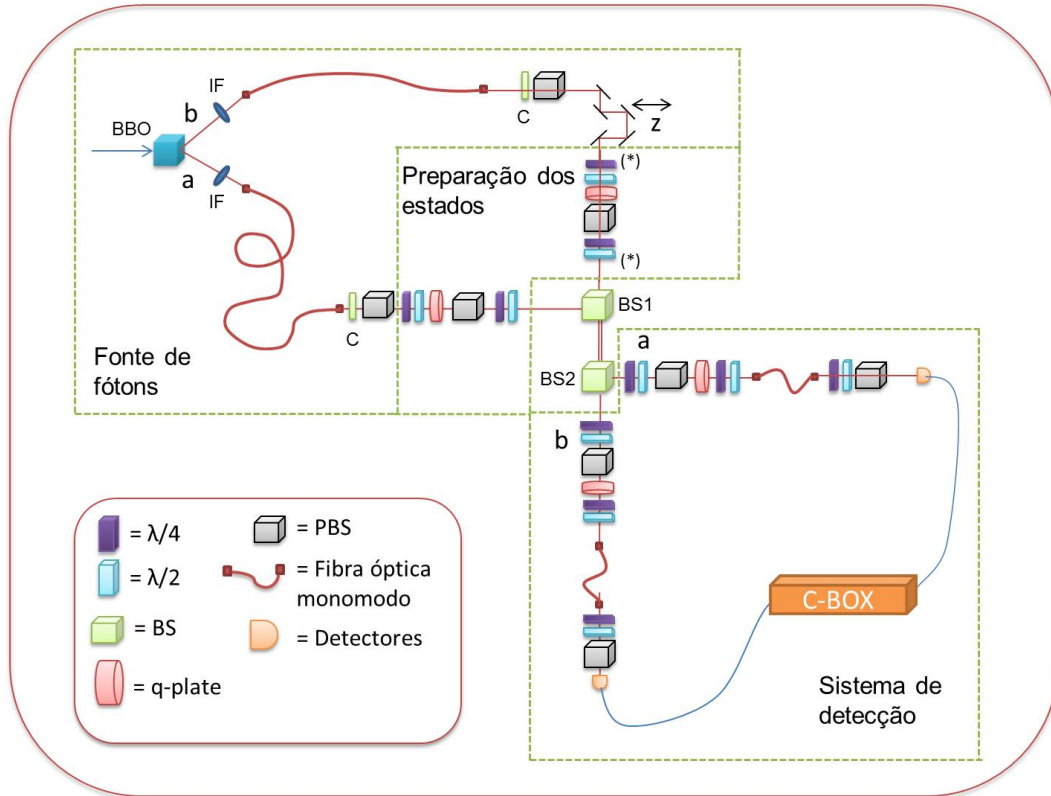


Figura 4.4: Diagrama experimental para a implementação da clonagem universal óptica para ququarts híbridos codificados nos graus de liberdade de polarização e OAM.

Um cristal de β -Borato de Bário (BBO), ajustado para a condição de casamento de fase tipo II, é bombeado pelo segundo harmônico⁴ de um laser de Titânio-Safira com modo travado⁵ no modo espacial transversal TEM_{00} , gerando pares de fótons nos modos a e b , via CPD. Os fótons possuem

⁴A geração de segundo harmônico é um processo óptico não linear demonstrado por Peter Franken no qual fótons de frequência $2\omega_0$ são gerados a partir da interação de dois fótons de frequência ω_0 em um meio não linear [27]

⁵Um laser pulsado com modo travado é um laser que produz pulsos de luz de duração extremamente curta, da ordem de picosegundos ($10^{-12}s$) ou femtosegundos ($10^{-15}s$)

polarização linear, comprimento de onda $\lambda = 795\text{nm}$ e largura de $\Delta\lambda = 4, 5\text{nm}$, determinada por dois filtros de interferência(IF) na saída da fonte.

Os pares de fótons gerados são, então, transmitidos até o estágio de preparação dos estados através de fibras ópticas monomodos, que definem o modo espacial transversal como TEM_{00} , que possui momento angular orbital(OAM, do inglês orbital angular momentum,) $m = 0$. Depois das fibras ópticas, duas placas de onda(C) compensam a rotação introduzida pelas fibras nas polarizações dos fótons e um divisor de feixes polarizado(PBS) projeta a polarização de ambos para o estado horizontal.

No estágio de preparação dos estados, os ququarts são codificados explorando dois graus de liberdade da mesma partícula: polarização e OAM, sendo, por isso, chamados de *híbridos*. Essa codificação dos ququarts baseada no OAM e polarização leva à uma maior estabilidade na propagação do fóton em comparação com o ququart implementado explorando somente o grau de liberdade de OAM [50, 17].

No modo a , é enviado um fóton preparado no estado que se deseja clonar, $|\phi\rangle$ e no modo b é enviado um fóton preparado em um estado totalmente misto - totalmente aleatório em polarização e OAM. Esses estados são gerados através de uma combinação de placas de ondas, divisor de feixes polarizador e um dispositivo denominado q-plate, responsável por acoplar o momento angular orbital e polarização do fóton[50].

O atraso temporal entre os fótons nos dois modos é ajustado através de uma linha de atraso(Z), de modo a garantir a condição de interferência para o efeito Hong-Ou-Mandel ocorrer no divisor de feixes(BS1).

Um segundo divisor de feixes(BS2) é utilizado para separar os dois fótons clones que saem pela mesma porta do BS1, permitindo uma pós seleção desse resultado através de medições em coincidência. Na saída a do BS2, o sistema de detecção é ajustado para projetar o estado do fóton no estado inicial que se desejava clonar. Na saída b , todos os quatro estados pertencentes à uma base são detectados. Isso é feito, novamente, através de uma combinação de placas de onda, PBSs e q-plates. Os fótons na saída do BS2 são acoplados em fibras ópticas monomodos e detectados por detectores de coincidências(D1 e D2), de forma a pós selecionar os fótons que agora saíram por diferentes saídas no BS2. Através dessas detecções, podemos obter uma estimativa da fidelidade das cópias.

4.3.1 Fonte de fótons: conversão paramétrica espontânea descendente

A primeira parte do experimento consiste em uma fonte de fótons gerados a partir da Conversão Paramétrica Descendente (CPD) utilizando um cristal de β -Borato de Bário (BBO) ajustado para a condição de casamento de fase tipo II. O feixe de entrada está no modo espacial transversal TEM_{00} e, portanto, tem $m = 0, l = 0$. Como pode ser verificado no Apêndice C, utilizando a aproximação de cristal fino, o estado dos dois fótons após o processo é dado por:

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma_i, \sigma_s} \int d\omega \int d\vec{q}_i \int d\vec{q}_s G_{\sigma_i, \sigma_s, m}(\vec{q}_i + \vec{q}_s) |\vec{q}_i, \omega; \sigma_i, -m\rangle |\vec{q}_s, \omega_0 - \omega; \sigma_s, m\rangle, \quad (4.25)$$

onde $|\vec{q}_j, \omega_j; \sigma_j, m_j\rangle$ representa um estado de um fóton no modo definido pela componente transversal \vec{q}_j do vetor de onda, frequência ω_j , polarização σ_j e momento angular orbital $m_j \hbar$.

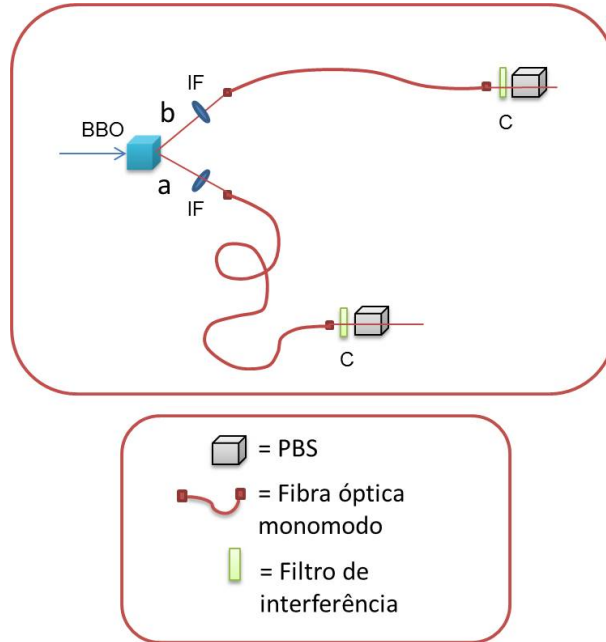


Figura 4.5: Diagrama experimental correspondente à fonte de fótons.

Os dois fótons convertidos são detectados através de pequenas aberturas em posições fixas longe o suficiente da fonte, de forma que apenas um modo espacial é selecionado por cada detector. Vamos denominar cada um desses modos, indicados na Figura 4.5, por a e b . Neste caso, ao utilizar filtros

de interferência com largura de banda estreita, centrados em $\omega_0/2$, o estado quântico acima, assume a forma:

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma_i, \sigma_s} \int d\omega G'_{\sigma_i, \sigma_s, m} f(\omega) |\omega; \sigma_i, m\rangle_a |\omega_0 - \omega; \sigma_s, -m\rangle_b, \quad (4.26)$$

onde $f(\omega)$ é dado pelas funções de transferências do filtros $f(\omega) = F_i(\omega)F_s(\omega_0 - \omega)$ e tem a forma de uma gaussiana[66, 35]. No experimento, foram utilizados dois filtros de interferência(IF) centrados no comprimento de onda $\lambda = 795\text{nm}$ e largura de banda de $\Delta\lambda = 4,5\text{nm}$.

Os fótons são enviados para fibras ópticas que definem o modo espacial transversal TEM_{00} , i.e., o modo com $m = 0$:

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma_i, \sigma_s} \int d\omega G'_{\sigma_i, \sigma_s, m} f(\omega) \delta_{m,0} |\omega; \sigma_i, m\rangle_a |\omega_0 - \omega; \sigma_s, -m\rangle_b, \quad (4.27a)$$

$$= \sum_{\sigma_i, \sigma_s} \int d\omega G'_{\sigma_i, \sigma_s, 0} f(\omega) |\omega; \sigma_i, 0\rangle_a |\omega_0 - \omega; \sigma_s, 0\rangle_b. \quad (4.27b)$$

As fibras ópticas introduzem uma rotação na polarização dos fótons que é compensada por dois compensadores(C) localizados na saída das fibras. Após esses dois compensadores, um PBS é utilizado para filtrar os fótons com polarização horizontal. Portanto, o estado final após essa etapa pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma_i, \sigma_s} \int d\omega G'_{\sigma_i, \sigma_s, 0} f(\omega) \delta_{\sigma_i, H} \delta_{\sigma_s, H} |\omega; \sigma_i, 0\rangle_a |\omega_0 - \omega; \sigma_s, 0\rangle_b, \quad (4.28a)$$

$$= \int d\omega G'_{H, H, 0} f(\omega) |\omega; H, 0\rangle_a |\omega_0 - \omega; H, 0\rangle_b. \quad (4.28b)$$

Utilizando os operadores de criação, podemos reescrever o estado acima, normalizando-o, como:

$$|\psi\rangle = \int d\omega f(\omega) a_{H0}^\dagger(\omega) b_{H0}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle, \quad (4.29)$$

onde a_{H0}^\dagger e b_{H0}^\dagger representam a criação de fótons nos modos espaciais a e b , respectivamente, com polarização horizontal e momento angular orbital $m\hbar = 0$.

Após o PBS, o fóton no modo b é preparado em um estado totalmente misto em polarização e o fóton no modo a será o estado de entrada, do qual obteremos a cópia. Na próxima seção, descreveremos o processo de preparação dos estados.

4.3.2 Preparação dos estados

Para certificar que a implementação experimental desempenha a função que esperamos e, portanto, corresponda à uma máquina de clonagem universal, devemos saber como é sua atuação em um estado arbitrário de entrada, i.e., devemos ser capazes de determinar o estado de saída do experimento dado um estado de entrada arbitrário. Para sistemas de dimensão finita, isso pode ser feito através da chamada tomografia de processo quântico[56] cuja função é caracterizar o processo quântico associado à um dado experimento - uma das tarefas mais importantes em implementações físicas de algoritmos de Informação Quântica. A tomografia é realizada utilizando um conjunto de “estados de prova” como estados de entrada da implementação experimental e determinando, através de medições, os respectivos estados na saída. Com isso, é possível caracterizar o funcionamento do dispositivo. Na Figura 4.6, ilustramos a Tomografia de Processo Quântico. A QCM é visualizada como uma caixa preta e tudo que temos acesso são os estados de entrada e estados de saída dessa caixa, que serão utilizados para reconstruir a matriz de processo⁶ correspondente ao procedimento experimental. Precisamos definir qual o conjunto de estados de prova que devem ser utilizados e quais as medições que devem ser realizadas na saída para obter a completa caracterização. Para sistemas com dimensão $d = p^r$, onde p é um número primo e r um número inteiro, podem ser utilizadas as chamadas bases mutualmente não enviesadas(MUBs, do inglês mutually unbiased bases)[26]. Adotando como estados de entrada do dispositivo os $d(d+1)$ estados obtidos a partir de um conjunto de $d+1$ MUBs e realizando medições nos estados de saída nessas mesmas bases, podemos reconstruir a matriz de processo correspondente ao procedimento experimental[26]. Portanto, para confirmar a generalidade da implementação experimental da QCM para sistemas de quatro dimensões, é necessário testá-la para vinte estados de entrada que formam cinco MUBs para o correspondente sistema.

Um sistema de dimensão $d = 4$ pode ser obtido explorando os graus de liberdade de momento angular orbital e de spin de fótons. Um feixe de luz monocromático propagando ao longo da direção z pode transportar momento angular na direção de propagação de duas formas[37, 2]. A primeira forma está associada com a polarização circular da luz, à direita ou à esquerda, e cada fóton carrega um momento angular de spin(ASM, do inglês angular spin momentum) $\pm\hbar$, onde $+$ é relativo à polarização circular à esquerda e $-$ à polarização circular à direita. A segunda forma é chamada de momento

⁶Uma transformação linear que mapeia operadores densidade em operadores densidade é descrita por uma matriz de processo que possui dimensão d^2 , onde d é a dimensão dos operadores densidade.

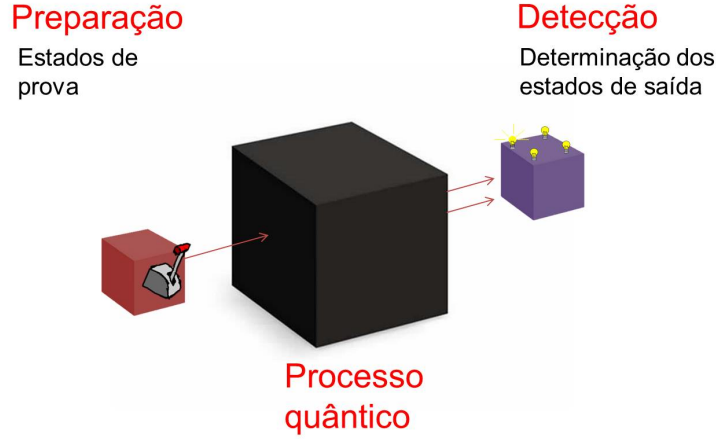


Figura 4.6: Diagrama esquemático da tomografia de processo quântico. A implementação experimental é representada por uma caixa preta e os dados que temos acesso são os estados de entrada e saída do experimento, que serão utilizados para caracterizar o procedimento experimental.

angular orbital (OAM, do inglês orbital angular momentum) e está associada à distribuição espacial do feixe, i.e., ao perfil de fase do feixe em um plano perpendicular à direção de propagação. A dinâmica de propagação do feixe de luz ao longo da direção z é dada pela equação de Helmholtz na aproximação paraxial que tem como uma das soluções

$$\vec{E}(r, \phi) = \vec{E}_0(r)e^{im\phi}, \quad (4.30)$$

onde r e ϕ são coordenadas polares no plano xy e m é um número inteiro. Para essas soluções, comumente chamadas de modos helicoidais, cada fóton carrega um momento angular orbital quantizado intrínseco na direção de propagação do feixe dado por $m\hbar$ [2]. Esses modos helicoidais são caracterizados por uma frente de onda que tem a forma de uma hélice com um vórtex óptico⁷ no eixo do feixe, com exceção do caso $m = 0$ [57, 7]. O inteiro m também é chamado de helicidade orbital do feixe ou carga topológica do vórtex óptico. Na Figura 4.8 podemos ver a representação dos modos helicoidais para alguns valores de m .

Os ququarts híbridos utilizados no experimento são codificados no espaço “spin-órbita” $\pi \otimes o_2$, onde π refere-se ao espaço de polarização e o_2 ao subespaço de OAM gerado para $m = \pm 2$ (em unidades de \hbar). Um estado separável genérico do espaço quadridimensional será, então, indicado por $|\varphi l\rangle = |\varphi\rangle_\pi |l\rangle_{o_2}$, onde $|\cdot\rangle_\pi$ e $|\cdot\rangle_{o_2}$ denotam os estados quânticos nos graus

⁷Um vórtex óptico é um ponto de intensidade nula do campo eletromagnético.

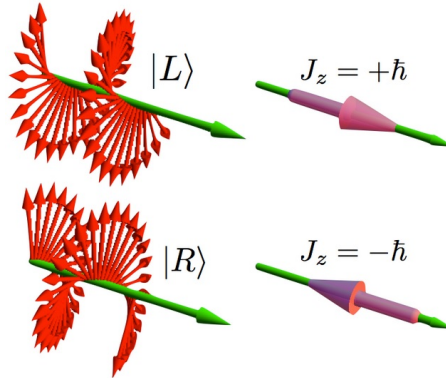


Figura 4.7: Representação das polarizações circulares à direita e à esquerda com os momentos angulares de spin associados. Imagem retirada da Wikipedia[70].

de liberdade de polarização e OAM, respectivamente. Podemos introduzir uma base para esse espaço $\{|H, +2\rangle, |H, -2\rangle, |V, +2\rangle, |V, -2\rangle\}$, onde H(V) refere-se a polarização horizontal(vertical) e $+(-)$ refere-se a $m = 2(-2)$. A partir dessa primeira base, podemos encontrar quatro novas que formam as cinco MUBs necessárias⁸, indicadas na Tabela (4.1). Para gerar todos os estados pertencentes às cinco bases precisamos de componentes ópticos que permitam a manipulação dos graus de liberdade de polarização e OAM. A polarização pode facilmente ser manipulada com placas de onda, polarizadores e PBSs. Para a manipulação de OAM e acoplamento dos dois graus de liberdade pode-se utilizar um dispositivo conhecido q-plate.

Uma q-plate(QP) é uma placa birrefringente que possui um padrão apropriado para o eixo óptico transversal cuja função é acoplar o momento angular de spin e o momento angular orbital dos fótons que a atravessam[45]. Quando a luz se propaga no vácuo ou em um meio isotrópico e homogêneo, o momento angular de spin e o momento angular orbital são conservados separadamente. Entretanto, quando a propagação ocorre em outros materiais, ambas as formas de momento podem ser transferidas para o meio, permitindo a manipulação de cada uma delas de forma separada ou conjunta. A transferência do momento angular de spin ocorre quando a propagação se dá em meios anisotrópicos, como placas de onda birrefringentes e cristais líquidos. Já a transferência do momento angular orbital ocorre quando são utilizados meios isotrópicos transparentes não homogêneos. Utilizando materiais que sejam ao mesmo tempo anisotrópicos e não homogêneos é possível que as transferências dos dois momentos ocorram de forma dependente, i.e., é pos-

⁸Para o cálculo do conjunto das 5 MUBs utilizadas, consulte o Apêndice A.

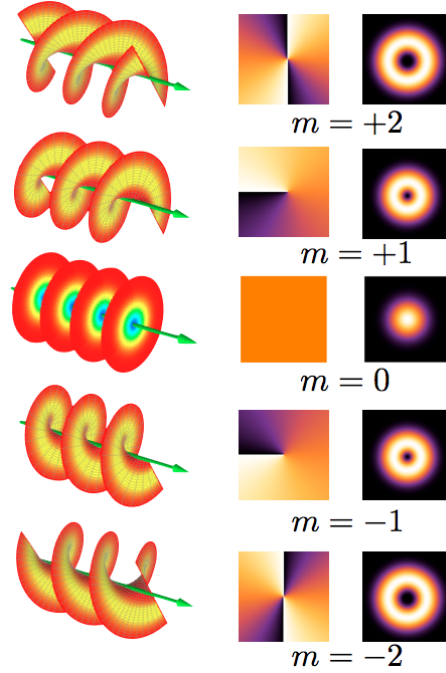


Figura 4.8: Representação dos modos helicoidais para $m = +2, +1, 0, -1, -2$. Na primeira coluna à esquerda temos o formato de frente de onda do feixe. Na segunda coluna temos a distribuição de fase do feixe em uma seção transversal. Na terceira coluna temos a distribuição de intensidade do feixe em uma seção transversal com o vórtex óptico representado pelo ponto escuro no centro. Imagem retirada da Wikipedia[69].

sível que a transferência de momento angular de spin afete a transferência do momento de angular orbital. Existem ainda geometrias específicas em que o momento angular total transferido para o meio é nulo. Nesse caso, ocorre uma transferência direta do momento angular de spin para momento angular orbital e, dessa forma, pode-se controlar a distribuição espacial do feixe de luz de saída a partir da polarização de entrada.

Para ilustrar o efeito, vamos considerar uma placa feita de um material birrefringente uniaxial que provoca uma diferença de fase de π entre as componentes da polarização (placa de meia onda). Consideramos que o feixe de luz se propaga na direção z e incide sobre a placa com incidência normal, de modo que os planos das faces da placa são paralelos ao plano de coordenadas xy . Além disso, a orientação do eixo óptico da placa, localizado no plano xy , é especificada pelo ângulo α que ele forma com o eixo x . Considere que esse ângulo é dado pela expressão:

$$\alpha(r, \phi) = q\phi + \alpha_0, \quad (4.31)$$

onde q e α_0 são constantes e r e ϕ são as coordenadas polares no plano xy . Da equação acima, podemos ver que a placa deve ter uma singularidade na origem, dado que o ângulo do eixo óptico varia de acordo com o ângulo polar. Os dispositivos birrefringentes não homogêneos que possuem essa geometria especificada acima são denominados q-plates.

Podemos analisar o efeito da q-plate em um feixe de luz aplicando o formalismo de Jones[32]. A matriz de Jones correspondente a uma placa de meia onda é dada por:

$$\text{HWP}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

onde α é o ângulo do eixo rápido da placa em relação ao eixo x . Consideramos que o ângulo α depende do ponto (r, ϕ) do plano xy como apresentado na Equação (4.31).

Uma onda plana ($m = 0$) com polarização circular à esquerda, descrita pelo vetor normalizado

$$\vec{E}_{\text{in}}(r, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

após ser transmitida pela q-plate, será dada por:

$$\vec{E}_{\text{out}}(r, \phi) = \text{HQP}(\alpha) \vec{E}_{\text{in}}(r, \phi), \quad (4.34a)$$

$$= \frac{e^{2i\alpha}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (4.34b)$$

$$= \frac{e^{2iq\phi} e^{2i\alpha_0}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (4.34c)$$

Portanto, o feixe que emerge da q-plate, além de possuir polarização circular à direita, como o obtido normalmente através de uma placa de meia onda, adquire um fator de fase $e^{im\phi}$, com $m = 2q$; i.e., o feixe de entrada foi transformado em um feixe com helicidade orbital de $2q$ e momento angular orbital de $m\hbar = 2q\hbar$ por fóton. Da mesma forma, podemos verificar que, para um feixe de polarização circular à direita, o fator de fase é dado por $e^{-im\phi}$.

Ao ser transmitido pela q-plate, cada fóton cuja polarização é convertida de circular esquerda para circular direita tem seu momento angular de spin alterado de \hbar para $-\hbar$. No caso da q-plate com $q = 1$, o momento angular orbital de cada fóton muda de 0 para $2\hbar$. Portanto, a variação total do momento angular do feixe é nula e não há transferência líquida de momento para a placa. Nesse caso, a placa atua como um acoplador das duas formas de momento, permitindo a transferência de uma forma para a outra. No outros

casos, quando $q \neq 1$, podemos visualizar que essa conservação do momento angular do feixe não acontece e, portanto, há transferência de momento para a placa.

A q-plate(QP) utilizada nessa implementação tem $q = 1$ e, portanto, impõe uma variação de $\Delta m = \pm 2$ dependendo da polarização do feixe de entrada, positivo para polarização circular à esquerda e negativo para circular à direita. No grau de liberdade de polarização, a q-plate atua como uma placa de meia onda introduzindo uma retardação de π ⁹. Portanto, um feixe de fótons no modo TEM_{00} , que possui $m = 0$, é convertido em um feixe com $m = \pm 2$ de acordo com as expressões:

$$\begin{aligned} |L\rangle_\pi |0\rangle_o &\xrightarrow{QP} |R\rangle_\pi | + 2\rangle_{o2}, \\ |R\rangle_\pi |0\rangle_o &\xrightarrow{QP} |L\rangle_\pi | - 2\rangle_{o2}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde onde R(L) refere-se à polarização circular à direita(esquerda). Esse resultado pode ser visualizado na Figura 4.9.

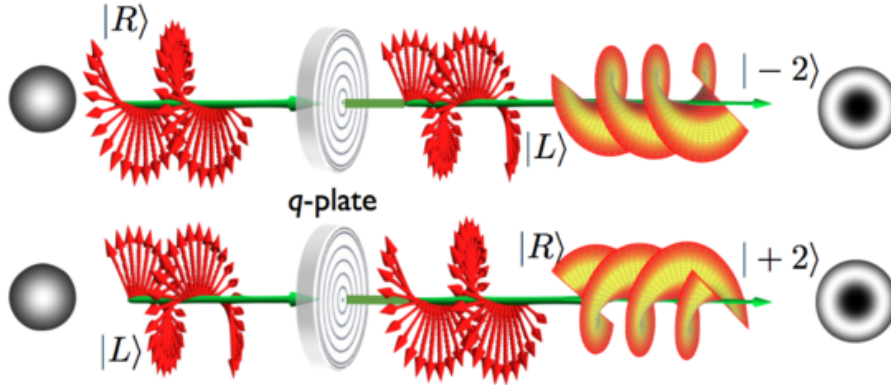


Figura 4.9: Efeito da q-plate em feixes de entrada no modo TEM_{00} com polarizações circular à direita e à esquerda. Imagem retirada da Wikipedia [68].

Experimentalmente[52] foi demonstrado que qualquer superposição coerente de dois estados dados pela Equação (4.35) é preservada pela transformação na q-plate, levando à superposição dos estados de saída correspondentes, i.e.:

$$\begin{aligned} |H\rangle_\pi |0\rangle_o &\xrightarrow{QP} \frac{1}{\sqrt{2}} (|L\rangle_\pi | - 2\rangle_{o2} + |R\rangle_\pi | + 2\rangle_{o2}), \\ |V\rangle_\pi |0\rangle_o &\xrightarrow{QP} \frac{1}{\sqrt{2}} (|L\rangle_\pi | - 2\rangle_{o2} - |R\rangle_\pi | + 2\rangle_{o2}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

⁹Para uma descrição mais detalhada desse dispositivo, consulte as Referências [50] e [52].

Como indicado na Fig. (4.10), para preparar os estados pertencentes às bases I, II e III utiliza-se a seguinte sequência de elementos ópticos: uma placa de quarto de onda(α), uma placa de meia onda(β), uma q-plate, um PBS e duas outras placas de quarto de onda e meia onda(γ e δ , respectivamente). O estados das bases IV e V são obtidos retirando o PBS e a terceira placa de onda, γ . A placa de onda δ também deve ser inserida ou retirada, dependendo do estado a ser preparado. Através do formalismo matricial de Jones, podemos obter os ângulos dos eixos ópticos das placas de onda para obtenção dos estados desejados. Os ângulos calculados encontram-se indicados na Tabela (4.1) e as demonstrações dos cálculos podem ser encontradas no Apêndice (B).

Utilizando os componentes ópticos descritos acima pode-se obter os estados desejados nas entradas a e b do BS1. Na entrada a do BS1 enviamos o fóton que desejamos clonar, preparado em um dos estados de uma das MUBs, e na entrada b enviamos um fóton preparado em um estado totalmente misto. Esse estado misto é obtido utilizando a mesma sequência de elementos para a preparação dos estados pertencentes à base I mas rodando aleatoriamente¹⁰, durante cada teste experimental, a primeira placa de quarto de onda(α) e aleatoriamente inserindo ou retirando a última placa de meia onda(δ) posicionada com um ângulo de $+45^\circ$. Como os fótons da Conversão Paramétrica Descendente são gerados aleatoriamente, o estado gerado é aproximadamente maximamente misto.

Com a realização de várias repetições do experimento, para todos os estados de entrada descritos acima e com as medições apropriadas na saída, é realizada a caracterização experimental da implementação.

4.3.3 Cálculo de propagação do estado

Nesta seção, vamos apresentar o cálculo teórico da propagação do estado que descreve os dois fótons desde o estágio de preparação até o estágio de detecção. Para isso, vamos considerar que o fóton que desejamos clonar foi preparado no estado $|H+\rangle$, pertencente à primeira base descrita na Seção 4.3.2. O segundo fóton foi preparado em um estado totalmente misto, que pode ser escrito nessa mesma base. Como já discutido na Seção (4.2), essa consideração é feita sem perda de generalidade. Ao utilizar um estado arbitrário de entrada para o nosso cálculo, seria possível encontrar uma nova base para escrever o estado misto de forma que a álgebra permaneceria idêntica e o resultado em termos dessa nova base seria equivalente ao que será obtido nesta seção.

¹⁰O ângulo da placa é alternado aleatoriamente entre $+45^\circ$ e -45° .

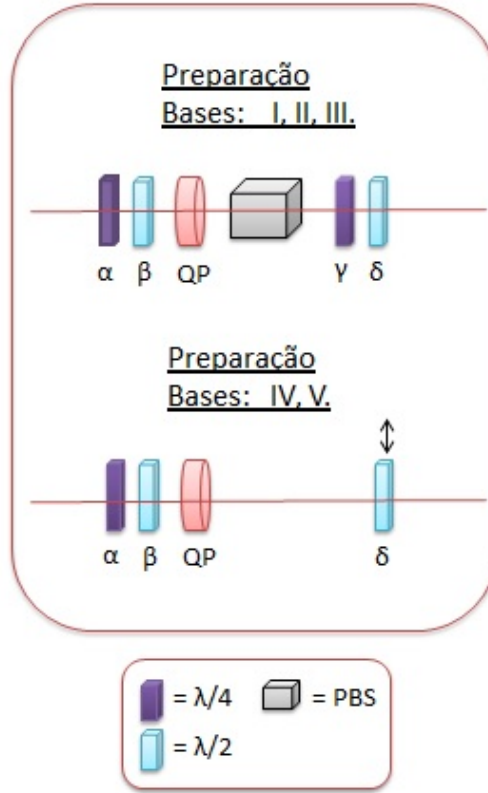


Figura 4.10: Representação esquemática das configurações de preparação dos ququarts utilizados no experimento. QP é a q-plate; $\frac{\lambda}{4}$ e $\frac{\lambda}{2}$ são placas de onda e PBS é o divisor de feixes polarizador; α , β , γ e δ são os ângulos das placas de onda em relação ao eixo rápido.

Após o processo de preparação, temos o seguinte operador densidade que descreve o estado dos dois fótons:

$$\begin{aligned} \rho = \frac{1}{4} \int d\omega \int d\omega' f(\omega) f^*(\omega') & \left[a_{H+}^\dagger(\omega) b_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega') b_{H+}(\omega_0 - \omega') \right. \\ & + a_{H+}^\dagger(\omega) b_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega') b_{H-}(\omega_0 - \omega') \\ & + a_{H+}^\dagger(\omega) b_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega') b_{V+}(\omega_0 - \omega') \\ & \left. + a_{H+}^\dagger(\omega) b_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega') b_{V-}(\omega_0 - \omega') \right]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Introduzimos um atraso temporal no modo b , dada pela linha ajustável de atraso(Z), cuja ação nos operadores de criação é dada por:

$$b_i^\dagger(\omega_0 - \omega) = e^{-i(\omega_0 - \omega)t} b_i^\dagger(\omega_0 - \omega), \quad (4.38)$$

onde t é o atraso temporal do fóton no modo b em relação ao fóton no modo a .

Assim, temos o estado antes do BS1:

$$\begin{aligned} \rho = \frac{1}{4} \int d\omega \int d\omega' f(\omega) f^*(\omega') e^{i\omega t} e^{-i\omega' t} & \left[a_{H+}^\dagger(\omega) b_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega') b_{H+}(\omega_0 - \omega') \right. \\ & + a_{H+}^\dagger(\omega) b_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega') b_{H-}(\omega_0 - \omega') \\ & + a_{H+}^\dagger(\omega) b_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega') b_{V+}(\omega_0 - \omega') \\ & \left. + a_{H+}^\dagger(\omega) b_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega') b_{V-}(\omega_0 - \omega') \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Usando a Equação (4.14), obtemos o estado após a interação no BS1:

$$\begin{aligned} \rho = \frac{1}{16} \int d\omega \int d\omega' f(\omega) f^*(\omega') e^{i\omega t} e^{-i\omega' t} & \left[A(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| A^\dagger(\omega') \right. \\ & \left. + B(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| B^\dagger(\omega') + C(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| C^\dagger(\omega') + D(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| D^\dagger(\omega') \right], \end{aligned} \quad (4.40)$$

onde A, B, C e D são definidos como

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \left(ia_{H+}^\dagger(\omega) a_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) + a_{H+}^\dagger(\omega) b_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) - a_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) b_{H+}^\dagger(\omega) \right. \\ & \quad \left. + ib_{H+}^\dagger(\omega) b_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) \right), \\ B(\omega) &= \left(ia_{H+}^\dagger(\omega) a_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) + a_{H+}^\dagger(\omega) b_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) - a_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) b_{H+}^\dagger(\omega) \right. \\ & \quad \left. + ib_{H+}^\dagger(\omega) b_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) \right), \\ C(\omega) &= \left(ia_{H+}^\dagger(\omega) a_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) + a_{H+}^\dagger(\omega) b_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) - a_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) b_{H+}^\dagger(\omega) \right. \\ & \quad \left. + ib_{H+}^\dagger(\omega) b_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) \right), \\ D(\omega) &= \left(ia_{H+}^\dagger(\omega) a_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) + a_{H+}^\dagger(\omega) b_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) - a_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) b_{H+}^\dagger(\omega) \right. \\ & \quad \left. + ib_{H+}^\dagger(\omega) b_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Pós-selecionando o estado que descreve ambos os fótons saindo pela mesma saída do BS1, o estado dos dois fótons antes da interação no BS2 é descrito pelo operador normalizado:

$$\begin{aligned} \rho' = \frac{1}{5} \int d\omega \int d\omega' f(\omega) f^*(\omega') e^{i\omega t} e^{-i\omega' t} & \left[b_{H+}^\dagger(\omega) b_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| b_{H+}(\omega') b_{H+}(\omega_0 - \omega') \right. \\ & + b_{H+}^\dagger(\omega) b_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| b_{H+}(\omega') b_{H-}(\omega_0 - \omega') \\ & + b_{H+}^\dagger(\omega) b_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega') b_{V+}(\omega_0 - \omega') \\ & \left. + b_{H+}^\dagger(\omega) b_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| b_{H+}(\omega') b_{V-}(\omega_0 - \omega') \right]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Usando novamente a Equação (4.14), obtemos o estado após a interação no BS2. Repare que agora os dois fótons entram pela mesma porta do BS2 e, portanto, usaremos somente a relação para b_i^\dagger :

$$\begin{aligned} \rho' = & \frac{1}{20} \int d\omega \int d\omega' f(\omega) f^*(\omega') e^{i\omega t} e^{-i\omega' t} \left[A_1(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| A_1^\dagger(\omega') \right. \\ & \left. + B_1(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| B_1^\dagger(\omega') + C_1(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| C_1^\dagger(\omega') + D_1(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| D_1^\dagger(\omega') \right], \end{aligned} \quad (4.43)$$

onde A_1 , B_1 , C_1 e D_1 agora são definidos como

$$\begin{aligned} A_1(\omega) = & \left(b_{H+}^\dagger(\omega) b_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) + i b_{H+}^\dagger(\omega) a_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) + i a_{H+}^\dagger(\omega) b_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) \right. \\ & \left. - a_{H+}^\dagger(\omega) a_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) \right), \\ B_1(\omega) = & \left(b_{H+}^\dagger(\omega) b_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) + i b_{H+}^\dagger(\omega) a_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) + i a_{H+}^\dagger(\omega) b_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) \right. \\ & \left. - b_{H+}^\dagger(\omega) b_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) \right), \\ C_1(\omega) = & \left(b_{H+}^\dagger(\omega) b_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) + i b_{H+}^\dagger(\omega) a_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) + i a_{H+}^\dagger(\omega) b_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) \right. \\ & \left. - b_{H+}^\dagger(\omega) b_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) \right), \\ D_1(\omega) = & \left(b_{H+}^\dagger(\omega) b_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) + i b_{H+}^\dagger(\omega) a_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) + i a_{H+}^\dagger(\omega) b_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) \right. \\ & \left. - b_{H+}^\dagger(\omega) b_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) \right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Pós-selecionando o estado que corresponde aos os dois fótons agora saindo por diferentes portas do BS2 e tomando o traço sobre o modo b , podemos obter o estado do fóton que sai pela saída a :

$$\begin{aligned} \rho_a = & \frac{1}{10} \int d\omega \int d\omega' f(\omega) f^*(\omega') e^{i\omega t} e^{-i\omega' t} \left[\delta(\omega - \omega') a_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega_0 - \omega') \right. \\ & + 4\delta(\omega - \omega') a_{H+}^\dagger(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega') \\ & + \delta(\omega - \omega_0 + \omega') a_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega_0 - \omega') \\ & + \delta(\omega - \omega_0 + \omega') a_{H+}^\dagger(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega_0 - \omega') \\ & + \delta(\omega - \omega') a_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H-}(\omega_0 - \omega') \\ & + \delta(\omega - \omega_0 + \omega') a_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{V+}(\omega_0 - \omega') \\ & \left. + \delta(\omega - \omega_0 + \omega') a_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{V-}(\omega_0 - \omega') \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}
 \rho_a = & \frac{1}{10} \int d\omega |f(\omega)|^2 \left[a_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega_0 - \omega) + 4a_{H+}^\dagger(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega) \right. \\
 & + a_{H-}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H-}(\omega_0 - \omega) + a_{V+}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{V+}(\omega_0 - \omega) \\
 & \left. + a_{V-}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{V-}(\omega_0 - \omega) \right] \\
 & + \frac{1}{10} \int d\omega f(\omega) f(\omega_0 - \omega) e^{i\omega t} e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \left[a_{H+}^\dagger(\omega_0 - \omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega_0 - \omega) \right. \\
 & \left. + a_{H+}^\dagger(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega) \right]
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Tipicamente, a função de distribuição espectral $f(\omega)$ é uma gaussiana normalizada centrada em $\frac{\omega_0}{2}$, determinada pelos dois filtros de interferência, para o caso em que são selecionados pares de fótons que possuem a mesma frequência:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}(2\pi)^{1/4}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega - \frac{\omega_0}{2}}{4\sigma} \right)^2}, \tag{4.47}$$

onde σ é a largura da curva de transmissão do filtro. Da Equação (4.47), temos que:

$$\begin{aligned}
 f(\omega) &= f\left(\frac{\omega_0}{2} + \left(\omega - \frac{\omega_0}{2}\right)\right) \\
 &= f\left(\frac{\omega_0}{2} - \left(\omega - \frac{\omega_0}{2}\right)\right) = f(\omega_0 - \omega).
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

Podemos reescrever a Equação (4.46) através de uma mudança de variável:

$$\omega_0 - \omega \mapsto \omega, \tag{4.49}$$

e na correspondente mudança na variável de integração $d\omega$.

$$\begin{aligned}
 \rho_a = & \frac{1}{10} \int d\omega |f(\omega)|^2 \left\{ [5 + 2\cos(\omega_0 - 2\omega)t] a_{H+}^\dagger(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H+}(\omega) \right. \\
 & + a_{H-}^\dagger(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{H-}(\omega) + a_{V+}^\dagger(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{V+}(\omega) \\
 & \left. + a_{V-}^\dagger(\omega) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_{V-}(\omega) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

Assim, ajustando corretamente o tempo da chegada dos fótons no BS1, $t = 0$, obtemos a fidelidade:

$$F = \frac{7}{10} \int d\omega |f(\omega)|^2 = \frac{7}{10}. \tag{4.51}$$

4.3.4 Sistema de detecção

Agora, é necessário encontrar uma forma de obter a fidelidade a partir de dados experimentais para comparar com o valor teórico previsto na seção anterior, $F = 7/10$. Simon *et al*, na proposta experimental discutida em [62], sugerem uma forma equivalente de obter a fidelidade em implementações experimentais sem utilizar a matriz densidade do estado, como a forma usual. De acordo com os autores, a fidelidade é dada pela frequência relativa de fótons com polarização e OAM corretos — iguais aos do fóton de entrada — no estado final, i.e.:

$$F = \frac{N_C}{N_C + N_R}, \quad (4.52)$$

onde N_C é a contagem de fótons encontrados no mesmo estado do fóton de entrada (clones) e N_R é a contagem de fótons encontrados em um estado diferente do estado de entrada (ruído). Essa fidelidade pode, então, ser obtida no experimento da forma descrita abaixo.

Consideramos que deseja-se obter a fidelidade relativa ao fóton que deixa o BS2 pela saída a . Por simetria, seria possível obter de forma equivalente a fidelidade do fóton na saída b , e o resultado encontrado seria igual ao calculado a seguir. Após a interação no BS2, temos um sistema de medição ajustado para detectar, no modo a , apenas fótons no mesmo estado do fóton de entrada que deseja-se clonar, $|H+\rangle$. No modo b , fótons em todos os estados pertencentes à base $\{|H+\rangle, |H-\rangle, |V+\rangle, |V-\rangle\}$ são detectados. Cada um dos estados pertencentes às cinco MUBs podem ser detectados através de um conjunto de placas de onda, PBSs, q-plates e fibras ópticas monomodos[50], como indicado na Figura 4.11. Destacamos que a fibra monomodo tem como função selecionar apenas as contribuições orbitais com $m = 0$, pois essas somente transmitem fótons com perfis transversais gaussianos. Através do formalismo matricial de Jones, podemos obter os ângulos das placas utilizadas. Os ângulos calculados encontram-se indicados na Tabela 4.2 e uma explicação detalhada pode encontrada no Apêndice (B).

Após o apropriado conjunto de elementos ópticos há dois detectores de coincidência entre os modos a e b . Então, registra-se os valores para cada par de detecções. Ressaltamos aqui que a utilização de detectores em coincidência é essencial para que seja pós selecionado o estado que corresponde à cada uma das cópias saindo por saídas diferentes no BS2. Podemos descrever teoricamente esse sistema de detecção e obter as probabilidades de medição em coincidência como mostrado abaixo.

Vamos modelar cada detector de forma a ter uma resposta plana em frequência, ou seja, nenhuma frequência é privilegiada. Assim, o operador

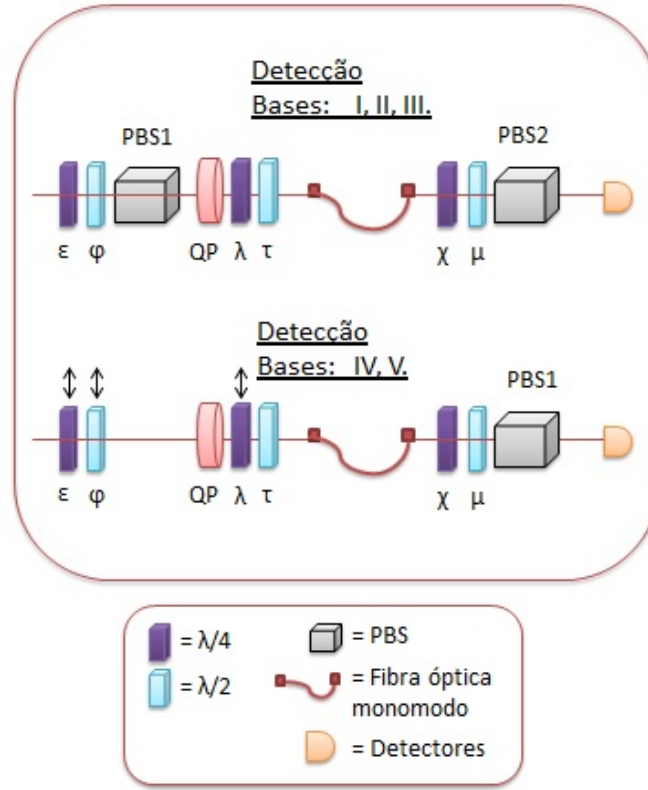


Figura 4.11: Representação esquemática das configurações do sistema de detecção utilizado para cada um dos estados das MUBs. QP é a q-plate; $\frac{\lambda}{4}$ e $\frac{\lambda}{2}$ são placas de onda e PBS é o divisor de feixes polarizador; ϵ , φ , λ , τ , χ e μ são os ângulos das placas de onda em relação ao eixo rápido. Ver Tabela 4.2

de medida que descreve um detector no modo $c = a, b$ é dado por[10]:

$$M_c = \int d\omega_c c^\dagger(\omega_c) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| c(\omega_c). \quad (4.53)$$

O operador de medida que corresponde à detecção em coincidência de um fóton no modo a e um fóton no modo b pode ser escrito como:

$$M_{ab} = \int d\omega_a a^\dagger(\omega_a) b^\dagger(\omega_0 - \omega_a) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a(\omega_a) b(\omega_0 - \omega_a). \quad (4.54)$$

Portanto, nosso sistema de detecção completo, como descrito acima, pode ser modelado por operadores de medição dados por:

$$M_{ij} = \int d\omega_a a_i^\dagger(\omega_a) b_j^\dagger(\omega_0 - \omega_a) |\text{vac}\rangle \langle \text{vac}| a_i(\omega_a) b_j(\omega_0 - \omega_a), \quad (4.55)$$

onde $i = |H+\rangle$ e j é um dos elementos da base $\{|H+\rangle, |H-\rangle, |V+\rangle, |V-\rangle\}$.

Dessa forma, a probabilidade de detecção em coincidência de um fóton no modo a no estado i e o outro fóton no modo b no estado j é dada por:

$$p_{ij} = \text{Tr}(\rho' M_{ij}). \quad (4.56)$$

Podemos, utilizando as Equações (4.47) e (4.56), obter as seguintes probabilidades associadas às medições:

$$\begin{aligned} p_{H+H+} &= \text{Tr}(\rho' M_{H+H+}), \\ &= \frac{1}{20} \int d\omega_a |f(\omega_a)|^2 (2 + e^{i(\omega_0 - 2\omega_a)t} + e^{-i(\omega_0 - 2\omega_a)t}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} e^{-2\sigma^2 t^2}, \\ p_{H+H-} &= \text{Tr}(\rho' M_{H+H-}) \\ &= \frac{1}{20} \int d\omega_a |f(\omega_a)|^2 = \frac{1}{20} \\ p_{H+V+} &= \text{Tr}(\rho' M_{H+V+}), \\ &= \frac{1}{20} \int d\omega_a |f(\omega_a)|^2 = \frac{1}{20} \\ p_{H+V-} &= \text{Tr}(\rho' M_{H+V-}). \\ &= \frac{1}{20} \int d\omega_a |f(\omega_a)|^2 = \frac{1}{20} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Além disso, temos três novas situações se considerarmos as coincidências adicionais detectadas caso trocássemos as medições realizadas nos modos a e b , i.e., se permitíssemos a detecção de fótons com estado diferente do fóton de entrada no modo a . Ou seja:

$$\begin{aligned} p_{H-H+} &= \text{Tr}(\rho' M_{H-H+}) \\ &= \frac{1}{20} \int d\omega_a |f(\omega_a)|^2 = \frac{1}{20} = p_{H+H-} \\ p_{V+H+} &= \text{Tr}(\rho' M_{V+H+}) \\ &= \frac{1}{20} \int d\omega_a |f(\omega_a)|^2 = \frac{1}{20} = p_{H+V+} \\ p_{V-H+} &= \text{Tr}(\rho' M_{V-H-}) \\ &= \frac{1}{20} \int d\omega_a |f(\omega_a)|^2 = \frac{1}{20} = p_{H+V-}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Assim, usando a Equação (4.52) podemos obter a Fidelidade da cópia:

$$F = \frac{p_{H+H+} + p_{H+H-} + p_{H+V+} + p_{H+V-}}{p_{H+H+} + p_{H+H-} + p_{H+V+} + p_{H+V-} + p_{H-H+} + p_{V+H+} + p_{V-H+}}, \quad (4.59a)$$

$$F = \frac{5 + 2e^{-2\sigma^2 t^2}}{8 + 2e^{-2\sigma^2 t^2}} \quad (4.59b)$$

Na Figura 4.12, representamos a fidelidade em função do atraso temporal entre os fótons. Se o atraso temporal entre os fótons ao chegar no BS1 é nulo, i.e., $t = 0$, então encontramos a fidelidade

$$F = \frac{7}{10}, \quad (4.60)$$

como esperado.

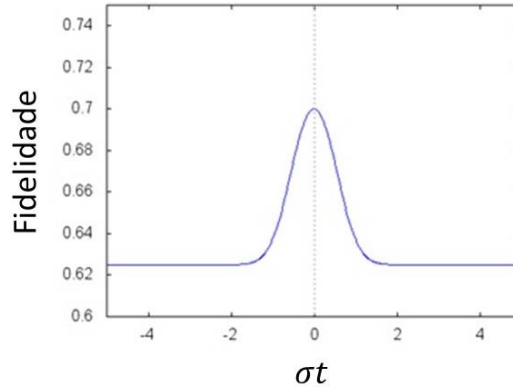


Figura 4.12: Gráfico da fidelidade em função do atraso temporal entre os fótons.

4.3.5 Resultados Experimentais

Apesar de toda a discussão presente neste capítulo fornecer um teste adequado para garantir que a implementação corresponda à uma máquina de clonagem universal, o experimento realizado por Nagali *et al.*[49] utilizou apenas duas bases para o teste, sendo uma delas formada por quatro estados separáveis e a outra por quatro estados emaranhados nos graus de liberdade de polarização e OAM. Portanto, tecnicamente, não se pode afirmar que ela

é uma máquina de clonagem quântica universal mas, no caso de qubits codificados no grau de liberdade de OAM, o teste foi feito para todos os estados pertencentes às três MUBs necessárias[51], garantindo a universalidade do processo.

Abaixo apresentamos os resultados experimentais obtidos na Ref. [49] para o procedimento de clonagem descrito neste capítulo.

Primeiramente, foi verificada a ocorrência de interferência HOM entre os fótons incidentes nos modos a e b do BS14.4. Para isso, o fóton na entrada b foi preparado no mesmo estado do fóton na entrada a . As contagens de coincidência entre os dois fótons na saída do BS2 foram medidas em função do atraso entre os fótons nos modos a e b na entrada do BS1. Nas Figuras 4.13(a) e 4.14(a) estão relatados os resultados obtidos para o caso dos estados de entrada pertencerem às bases I e IV, respectivamente. O pico do HOM é observado como um aumento nas contagens em coincidência de $R = (1,89 \pm 0,5)$, compatível com o valor teórico previsto de $R_{\text{teo}} = 2$.

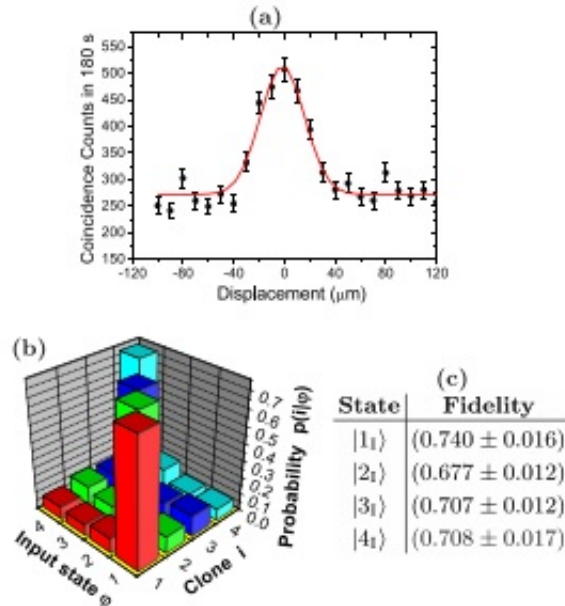


Figura 4.13: Resultados experimentais do procedimento de clonagem para os ququarts pertencentes à base I. (a) Interferência de Hong-Ou-Mandel. (b) Probabilidade $p(i|\phi)$ de detectar um clone em um estado $|i\rangle$ da base, dado um estado de entrada $|\phi\rangle$ da mesma base. (c) Fidelidade de clonagem experimental para os fótons de entrada. Imagem retirada da Ref. [49].

Depois que a condição de interferência foi obtida, foi testado o procedimento de clonagem para cada um dos estados da base I. Na Figura 4.13(b) estão representadas as probabilidades $p(i|\phi)$ de cada clone ser encontrado em um estado da base $|i\rangle$ em função do estado de entrada a ser clonado $|\phi\rangle$ com $|i\rangle, |\phi\rangle = |H, +2\rangle, |H, -2\rangle, |V, +2\rangle, |V, -2\rangle$. Temos que $p(i|\phi) = N_{\phi,i}/N$ para $i \neq \phi$ e $p(\phi|\phi) = (N_{\phi,\phi} + \sum_{i \neq \phi} N_{\phi,i})/N$, com $N = N_{\phi,\phi} + 2 \sum_{i \neq \phi} N_{\phi,i}$ e $N_{\phi,i}$ representa o número de contagens de coincidências entre fótons no estado $|\phi\rangle$ no modo a e fótons no estado $|i\rangle$ no modo b . Na Figura 4.14(b) são apresentados os mesmos resultados para os estados pertencentes à base IV.

Nas figuras 4.13(c) e 4.14(c) estão representados os valores experimentais das fidelidades de clonagem para os estados base I e IV, respectivamente.

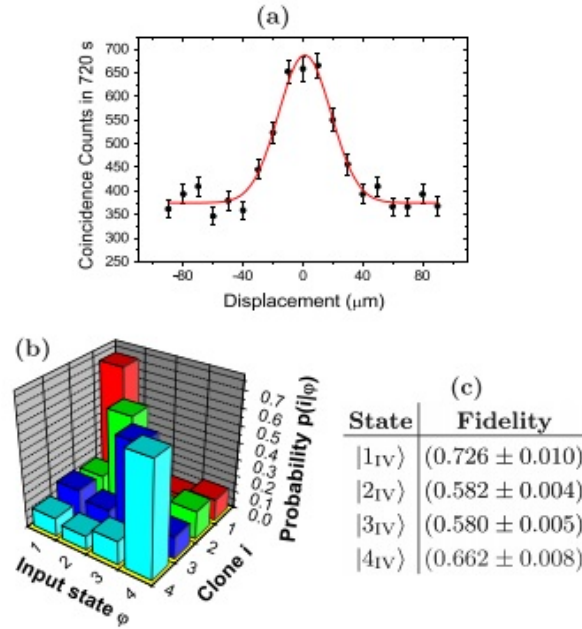


Figura 4.14: Resultados experimentais do procedimento de clonagem para os ququarts pertencentes à base IV. (a) Interferência de Hong-Ou-Mandel. (b) Probabilidade $p(i|\phi)$ de detectar um clone em um estado $|i\rangle$ da base, dado um estado de entrada $|\phi\rangle$ da mesma base. (c) Fidelidade de clonagem experimental para os fótons de entrada. Imagem retirada da Ref. [49].

4.4 Proposta de implementação para ququarts codificados em caminho

Embora a implementação experimental descrita na seção anterior seja designada para a clonagem de ququarts híbridos codificados nos graus de liberdade de polarização e momento angular orbital, o mesmo efeito Hong-Ou-Mandel[36] pode ser utilizado para obter a clonagem universal de ququarts codificados em outros graus de liberdade. Para isso, basta que o estado misto utilizado no procedimento seja gerado nos graus de liberdade do estado que desejamos clonar. Além disso, para caracterizar o funcionamento da máquina no laboratório, deve-se adaptar os sistemas de preparação e detecção dos estados para que sejam adequados para as novas variáveis. Assim, utilizaremos nesta seção todos os resultados teóricos obtidos anteriormente e vamos apenas apresentar as sugestões de modificações experimentais.

Abaixo, na Figura 4.15 (a), apresentamos um diagrama esquemático da nossa proposta de implementação do processo de clonagem utilizando o efeito Hong-Ou-Mandel para ququarts codificados em caminho. Os ququarts são codificados em momento linear transversal, sendo também chamados de ququarts espaciais ou ququarts de caminho. Ao contrário dos ququarts híbridos podemos utilizar somente um grau de liberdade definido pelas fendas através das quais os fótons são transmitidos.

Cada um dos fótons produzidos pela conversão paramétrica, após passar por um conjunto apropriados de lentes, é direcionado para um anteparo com quatro fendas idênticas transparentes. Dependendo da escolha de lentes que utilizamos no caminhos entre as fendas (L_{1a} e L_{1b}) e o cristal, ou a imagem do perfil transversal do laser no centro do cristal ou a transformada de Fourier desse perfil são transferidos para a correlação dos fótons nos planos das fendas[22]. O primeiro caso é obtido utilizando um telescópio com duas lentes¹¹ e o segundo utilizando uma lente simples, para o qual pode-se mostrar que é possível gerar após as fendas um estado produto na forma:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= |\psi\rangle_i \otimes |\psi\rangle_s, \\ &= \frac{1}{4}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle) \otimes (|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle), \end{aligned} \quad (4.61)$$

onde i e s designam cada um dos fótons produzidos na conversão paramétrica e $|j\rangle$, com $j = 1, 2, 3, 4$, rotula a fenda pela qual cada fóton passou, como pode ser visualizado na Figura 4.15(b). Introduzimos para o espaço desse

¹¹Um telescópio é um sistema de duas lentes no qual uma lente está no plano focal da outra.

sistema a primeira base(I): $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$. Dada essa primeira base podemos encontrar as quatro outras bases que formam um conjunto completo de MUBs, como obtido no Apêndice A.

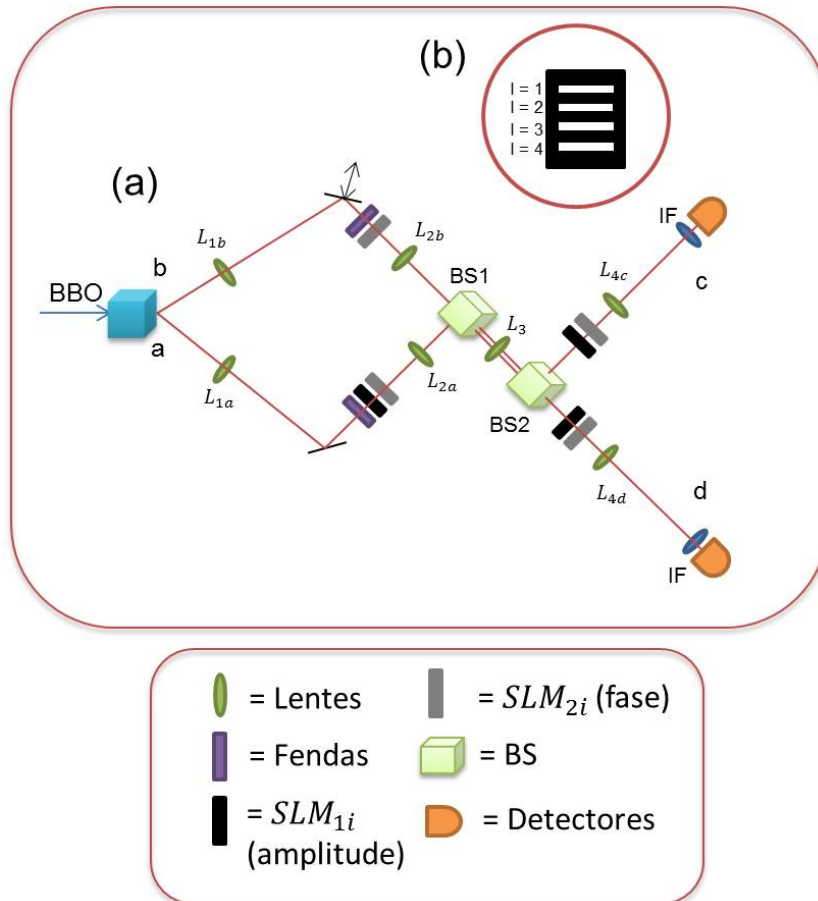


Figura 4.15: a) Diagrama experimental da proposta de UQCM ótima para ququarts codificados em caminho. Os detalhes da implementação variam dependendo da base testada e serão apresentados no texto. O subíndice i indica o caminho dos fótons e, portanto, $i = a, b, c, d$. b) Fenda múltipla com quatro aberturas.

Preparação dos estados de entrada

No braço a devemos preparar os fótons em cada um dos estados pertencentes às MUBs para os quais vamos testar o procedimento de clonagem. Isso pode ser realizado com uma sequência de dois moduladores espaciais de luz

(SLM, do inglês Spatial Light Modulator) localizados após as fendas, nos caminhos a e b . O SLM é um dispositivo que possui uma tela de cristal líquido, cuja principal função é realizar a modulação espacial de um feixe. i.e., modificar sua intensidade(amplitude) e fase em função da posição transversal. Essa modulação é obtida através da programação de padrões específicos na tela do SLM, também chamados de máscaras. A Figura 4.16 mostra alguns exemplos de máscaras que podem ser utilizadas no SLM de fase.

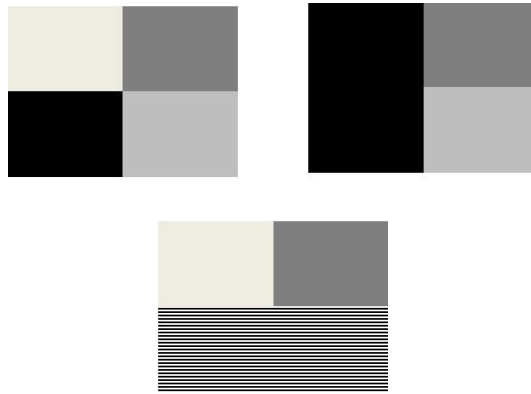


Figura 4.16: Exemplos de máscaras que podem ser utilizadas no SLM de fase. Escalas de cinza diferentes acrescentam diferentes fases nos caminhos dos fótons.

Nessa proposta, o SLM1a é utilizado para modificar a contribuição de cada componente do estado de entrada(SLM de amplitude) e o SLM2a(2b) é utilizado como modulador de fase(SLM de fase). Os estados da base I podem ser facilmente gerados utilizando apenas o SLM de amplitude. Para obtê-los, tudo que precisamos fazer é tampar os caminhos (as fendas) adequados. Os estados das outras bases são gerados como combinações lineares dos estados da base I, com fases apropriadas(veja Apêndice A). Para gerá-los, podemos utilizar somente o SLM de fase para modificar os coeficientes do estado mostrado na Equação (4.61) através da implementação de fases em cada caminho¹². Nas Figuras 4.17 a) e b) apresentamos dois exemplos de máscaras que podem ser utilizadas para geração de duas das bases. Na Figura 4.17 a) temos as máscaras para gerar os estados pertencentes à base I: três caminhos são bloqueados, deixando aberto apenas o caminho referente à cada um dos estados desejados. Na Figura 4.17 b) são implementadas fases em determinados caminhos, possibilitando a geração de estados dos estados pertencentes à base II.

¹²Na prática, em uma montagem no laboratório, o SLM de amplitude pode ser substituído por uma máscara que bloqueia três dos quatro caminhos.

Após os SLMs, duas lentes (L_{2a} e L_{2b}) formam a imagem das fendas no centro do BS1, onde deve ocorrer o efeito Hong-Ou-Mandel. Uma outra lente (L_3) projeta a imagem do BS1 nos SLMs, que vão compor o sistema de detecção que será descrito abaixo.

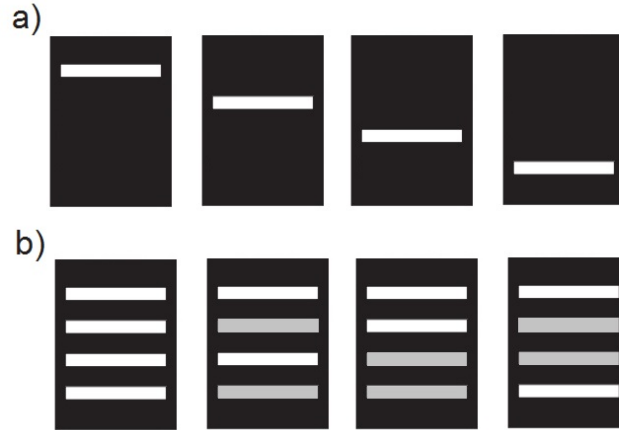


Figura 4.17: Exemplos de máscaras no SLM para gerar os estados pertencentes à duas bases. a) Máscaras para geração dos estados da base I. b) Máscaras para geração dos estados da base II. A fenda clara (cinza) identifica o caminho onde foi acrescentada uma fase de zero(π).

Preparação do estado misto

No braço b devemos preparar um estado totalmente misto no grau de liberdade de caminho. Para gerar esse estado, seguindo a proposta encontrada no trabalho [63], a ideia é utilizar um SLM após as fendas com a função de modular a fase de cada componente. Ao invés de utilizarmos uma única imagem(máscara) no SLM durante todo o tempo de aquisição, devemos utilizar um “filme” com cada uma das máscaras ficando ativa por uma determinada fração do tempo de aquisição. Para gerar o estado totalmente misto, i.e., com iguais coeficientes para cada um dos estados da base, podemos dividir o tempo de aquisição em quatro partes e deixar cada uma das quatro máscaras, que implementam uma fase de π em um dos caminhos e 0 nos três caminhos restantes, por um $1/4$ do tempo¹³.

¹³Os fótons da CPD são gerados aleatoriamente, então não é possível determinar o instante de interação entre o fóton e o SLM, garantindo que o estado é misto.

Sistema de detecção

Como anteriormente, após a interação no BS2, precisamos de um sistema de medição ajustado para detectar, no modo c , apenas fótons no mesmo estado do fóton de entrada para o qual o procedimento de clonagem deveria funcionar. No modo d , fótons em todos os estados pertencentes à mesma base são detectados. Para os estados da base I, isso pode ser feito utilizando um SLM de amplitude, SLM1c(1d), para bloquear os demais caminhos, como pode ser visualizado na Fig.4.17. Para as demais bases, um sistema mais complexo é necessário. Nesse caso, podemos utilizar um SLM de fase, SLM2c(2d), seguido de uma lente que projeta o feixe numa distância focal, na qual será posicionado uma abertura acompanhada de um detector de fótons.¹⁴ No plano focal será formado um padrão de interferência dos caminhos dos fótons. O tempo de chegada dos fótons no centro do padrão de interferência é o mesmo, independente de por qual a fenda eles passaram, garantindo que o estado dos fótons detectados no centro do padrão de interferência tenha a mesma fase em todas as componentes¹⁵. Podemos implementar fases no SLM para que, após o dispositivo, o estado que desejamos filtrar tenha sido transformado no estado que gere um máximo no centro do padrão de interferência (Veja Fig. 4.18). Ou seja, escrevendo cada um dos estados pertencentes às bases II, III, IV e V na forma geral:

$$|\psi\rangle = e^{i\phi_1}|1\rangle + e^{i\phi_2}|2\rangle + e^{i\phi_3}|3\rangle + e^{i\phi_4}|4\rangle, \quad (4.62)$$

temos que o SLM deve implementar fases $\phi'_1, \phi'_2, \phi'_3, \phi'_4$ tal que $\phi_i + \phi'_i = 2\pi$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Os detectores nos caminhos c e d estão no plano da imagem em relação aos planos dos dois SLMs ou no plano focal das lentes L_{4c} e L_{4d} , dependendo da escolha de lente após os SLMs (L_{4c} e L_{4d}).

Desta forma, a partir do número de contagens em coincidência nos detectores podemos montar um gráfico de probabilidades e obter as fidelidades dos estados obtidos a partir do processo de clonagem, de forma equivalente à descrita na Seção 4.3.5.

¹⁴Para os estados da base I, devemos substituir essa lente por uma lente que formará a imagem dos SLMs no plano dos detectores.

¹⁵Ref. [63] mostra, no Apêndice B, a expressão matemática do operador de medida de um detector no plano focal de uma lente, escrito na base dos estados de caminho. Fica claro na expressão (B.20) a projeção no estado de superposição de caminho com coeficientes iguais quando o detector é posicionado no centro do padrão de interferência.

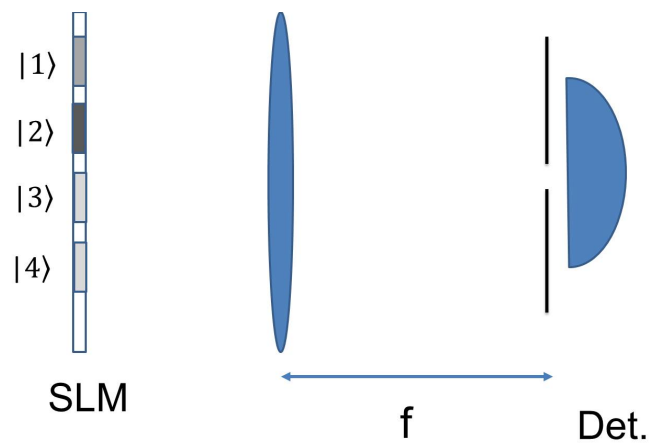


Figura 4.18: Sistema de detecção para as bases II, III, IV e V. A lente L_3 projeta a imagem do BS1 no plano dos SLMs de fase no sistema de detecção. Esses acrescentarão as fases ϕ'_i , representados pelas diferentes escalas de cinza. As lentes após os SLM projetam o estado a ser filtrado no centro do plano focal.

Bases	Estados	α	β	γ	δ
I	$ H, +2\rangle$	-45	0	0	0
	$ H, -2\rangle$	+45	0	0	0
	$ V, +2\rangle$	+45	0	0	+45
	$ V, -2\rangle$	-45	0	0	+45
II	$ D, h\rangle$	0	0	0	+22,5
	$ D, v\rangle$	0	+45	0	+22,5
	$ A, h\rangle$	0	0	0	-22,5
	$ A, v\rangle$	0	+45	0	-22,5
III	$ L, a\rangle$	0	-22,5	+45	0
	$ L, d\rangle$	0	+22,5	+45	0
	$ R, a\rangle$	0	-22,5	-45	+45
	$ R, d\rangle$	0	+22,5	-45	+45
IV	$\frac{1}{\sqrt{2}}(R, +2\rangle + L, -2\rangle)$	0	0	-	-
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(R, +2\rangle - L, -2\rangle)$	0	+45	-	-
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(L, +2\rangle + R, -2\rangle)$	0	0	-	+45
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(L, +2\rangle - R, -2\rangle)$	0	+45	-	+45
V	$\frac{1}{\sqrt{2}}(H, a\rangle + V, d\rangle)$	0	+22,5	-	-
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(H, a\rangle - V, d\rangle)$	0	-22,5	-	-
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(H, d\rangle + V, a\rangle)$	0	+22,5	-	+45
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(H, d\rangle - V, a\rangle)$	0	-22,5	-	+45

Tabela 4.1: MUBs para o sistema quadridimensional em termos da polarização e do OAM. À direita, indicamos as diferentes configurações de placas de onda (veja Fig. 4.10) para a preparação experimental dos estados. Os valores apresentados são relativos aos ângulos dos eixos ópticos rápidos das placas em relação ao eixo horizontal do laboratório, assumindo que o fóton de entrada está no estado $|H, 0\rangle$. As células com - indicam a retirada da correspondente placa de onda.

Bases	Estados	ϵ	φ	λ	τ	χ	μ
I	$ H, +2\rangle$	0	0	-45	+45	0	0
	$ H, -2\rangle$	0	0	-45	+45	0	+45
	$ V, +2\rangle$	0	+45	-45	+45	0	0
	$ V, -2\rangle$	0	+45	-45	+45	0	+45
II	$ D, h\rangle$	+45	+22,5	-45	+45	+45	+45
	$ D, v\rangle$	+45	+22,5	-45	+45	+45	0
	$ A, h\rangle$	+45	-22,5	-45	+45	+45	+45
	$ A, v\rangle$	+45	-22,5	-45	+45	+45	0
III	$ L, d\rangle$	+45	0	-45	+45	+45	+22,5
	$ L, a\rangle$	+45	0	-45	+45	-45	+22,5
	$ R, d\rangle$	-45	0	-45	+45	+45	+22,5
	$ R, a\rangle$	-45	0	-45	+45	+45	+22,5
IV	$\frac{1}{\sqrt{2}}(R, +2\rangle + L, -2\rangle)$	-	-	-	0	0	0
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(R, +2\rangle - L, -2\rangle)$	-	-	-	0	0	+45
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(L, +2\rangle + R, -2\rangle)$	-	0	-	0	0	0
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(L, +2\rangle - R, -2\rangle)$	-	0	-	0	0	+45
V	$\frac{1}{\sqrt{2}}(H, d\rangle + V, a\rangle)$	+45	-	-45	+45	+45	+22,5
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(H, d\rangle - V, a\rangle)$	+45	-	-45	+45	+45	-22,5
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(H, a\rangle + V, d\rangle)$	+45	0	-45	+45	+45	+22,5
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(H, a\rangle - V, d\rangle)$	+45	0	-45	+45	+45	-22,5

Tabela 4.2: À direita, indicamos as diferentes configurações de placas de onda (veja Figura 4.11) para a detecção de cada um dos estados pertencentes às MUBs utilizadas. Os valores apresentados são relativos aos ângulos dos eixos ópticos rápidos das placas em relação ao eixo horizontal do laboratório. As células com $-$ indicam a retirada da correspondente placa de onda.

Capítulo 5

Considerações finais

A clonagem quântica vem sendo tornando uma área de pesquisa muito explorada em teoria da Informação Quântica, com grande desenvolvimento nas últimas décadas. Além da importância do tópico em pesquisas nas áreas de Informação Quântica e Computação Quântica, a clonagem quântica também é um excelente objeto para ser abordado no ensino de Mecânica Quântica. A prova do teorema da não-clonagem é extremamente simples e pode ser compreendida tão logo se postule a linearidade dos operadores na Mecânica Quântica e, ainda, o teorema tem relação direta com diversas outras questões fundamentais na teoria. Por exemplo, a clonagem ideal de estados arbitrários implicaria na medição simultânea de observáveis incompatíveis (primeiro você poderia obter clones do estado e depois realizar medições diferentes em cada clone). Além disso, a clonagem quântica também está relacionada com a condição de não-sinalização e com a discriminação de estados quânticos não ortogonais. No Capítulo 3 deste trabalho são discutidas algumas dessas questões relacionadas ao teorema da não-clonagem.

O teorema da não-clonagem nos impõe restrições sobre a cópia de estados quânticos, mas ainda é possível obter cópias de estados com grande fidelidade. Neste trabalho apresentamos as primeiras discussões realizadas nessa direção, com a transformação unitária proposta por Bužek e Hillery [15] para a clonagem universal de $1 \rightarrow 2$ qubits, mostrando que essa alcança uma fidelidade das cópias de $F_{(1 \rightarrow 2)}^{univ}(d = 2) = 5/6 \approx 85\%$, independente do estado de entrada. Além disso, também apresentamos a transformação unitária, proposta pelos mesmos autores [15], para sistemas de dimensão arbitrária d . Nesse caso, os autores mostraram que a fidelidade depende da dimensão do sistema de acordo com a expressão $F_{(1 \rightarrow 2)}^{univ}(d) = \frac{d+3}{2d+2}$. Esses valores obtidos são os maiores permitidos pela teoria da Mecânica Quântica, como apontado nas Refs. [11, 30]. Para um sistema de quatro dimensões, essa fidelidade ótima foi calculada como $F_{(1 \rightarrow 2)}^{univ}(d = 4) = 7/10$.

No Capítulo 4, apresentamos uma estratégia de como implementar e testar o funcionamento de uma máquina de clonagem quântica universal para ququarts híbridos codificados nos graus de liberdade de polarização e momento angular orbital, seguindo as realizações de Nagali *et al.*[49] e [50] para a implementação da QCM e geração e detecção das MUBs, respectivamente. A proposta da QCM é baseada no efeito Hong-Ou-Mandel e, a princípio, pode também ser aplicada para sistemas de dimensões maiores. Apresentamos toda a teoria envolvida no procedimento, com cálculos para sistemas de quatro dimensões, e mostramos que a fidelidade obtida equivale à fidelidade ótima de $F = 7/10$. Entretanto, a implementação experimental da QCM[49] não foi testada para todos os estados pertencentes às cinco MUBs necessárias e, portanto, tecnicamente não pode-se afirmar ser uma UQCM.

O cálculo realizado é geral e pode ser usado para quarts codificados em outros graus de liberdade. Assim, apresentamos uma proposta própria de modificação experimental para implementar e testar uma máquina de clonagem para ququarts codificados no grau de liberdade de momento transversal ou, como também são chamados, ququarts de caminho. Essa proposta tem como vantagem a facilidade de geração e detecção desses ququarts utilizando um número reduzido de componentes ópticos e a facilidade de realização do teste para qudits de dimensões diferentes. Deixamos a perspectiva de implementar experimentalmente essa proposta e comprovar a universalidade do procedimento.

Apêndice A

Conjunto de MUBs para dimensão $d = 4$

Sejam $B_1 = \{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_d\rangle\}$ e $B_2 = \{|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_d\rangle\}$ duas bases ortonormais para um sistema de dimensão d . Essas bases são ditas mutuamente não enviesadas (MUB, do inglês mutually unbiased bases) se e somente se $|\langle\phi_i|\psi_j\rangle| = \frac{1}{\sqrt{d}}$, para todo $i, j = 1, \dots, d$. Um conjunto $\{B_1, \dots, B_m\}$ de bases ortonormais em \mathbb{C}^d é chamado de conjunto de bases mutuamente enviesadas se cada par de bases B_1 e B_2 são mutuamente enviesadas. Foi mostrado que para espaços de dimensão d , onde d é uma potência inteira de um número primo, o número máximo de elementos em um conjunto de MUBs é $d + 1$.

Para um sistema de dimensão $d = 4$, um exemplo de um conjunto de $d + 1 = 5$ MUBs, onde cada base é denotada por M_j , $1 \leq j \leq 5$, é dado por [40]:

$$M_1 = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \quad (\text{A.1a})$$

$$M_2 = \left\{ \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{2}(1, -1, +1, -1), \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1), \frac{1}{2}(1, -1, -1, +1) \right\}, \quad (\text{A.1b})$$

$$M_3 = \left\{ \frac{1}{2}(1, i, i, -1), \frac{1}{2}(1, -i, i, 1), \frac{1}{2}(1, i, -i, 1), \frac{1}{2}(1, -i, -i, -1) \right\}, \quad (\text{A.1c})$$

$$M_4 = \left\{ \frac{1}{2}(1, 1, i, -i), \frac{1}{2}(1, -1, i, i), \frac{1}{2}(1, 1, -i, i), \frac{1}{2}(1, -1, -i, -i) \right\}, \quad (\text{A.1d})$$

$$M_5 = \left\{ \frac{1}{2}(1, i, 1, -i), \frac{1}{2}(1, i, -1, i), \frac{1}{2}(1, -i, 1, i), \frac{1}{2}(1, -i, -1, -i) \right\}. \quad (\text{A.1e})$$

Da mesma forma, usando as equações acima, podemos encontrar os vetores que compõem o conjunto de MUBS $\{I, II, III, IV, V\}$ utilizado nesse traba-

lho, a partir da primeira base, I, definida como $\{|H, +2\rangle, |H, -2\rangle, |V, +2\rangle, |V, -2\rangle\}$. Antes, vamos apresentar algumas convenções que serão utilizadas.

Seguindo a mesma convenção utilizada para o espaço de polarização, onde uma das bases é definida como $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ com vetores correspondentes às polarizações lineares horizontal e vertical, respectivamente, definiremos para o espaço de OAM gerado para $m \pm 2$ uma base $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ onde os vetores são dados por:

$$|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+2\rangle + |-2\rangle), \quad (\text{A.2a})$$

$$|v\rangle = \frac{1}{i\sqrt{2}} (|+2\rangle - |-2\rangle). \quad (\text{A.2b})$$

As polarizações circulares direita(R) e esquerda(L) têm como vetores correspondentes:

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i|V\rangle) \quad (\text{A.3a})$$

$$|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i|V\rangle). \quad (\text{A.3b})$$

Finalmente, as polarizações lineares angulo de $\pm 45^\circ$ em relação ao eixo x , tipicamente conhecidas como diagonal(45°) e antidiagonal(-45°), têm como vetores correspondentes $|D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle)$ e $|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle)$. Da mesma forma, definiremos para o espaço de OAM os correspondentes vetores:

$$|d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle + |v\rangle) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} (|+2\rangle + i|-2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+2\rangle + i|-2\rangle), \quad (\text{A.4a})$$

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|h\rangle - |v\rangle) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} (|+2\rangle - i|-2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+2\rangle - i|-2\rangle), \quad (\text{A.4b})$$

onde desprezamos o fatores de fase globais nas últimas igualdades.

Abaixo, apresentamos o cálculo do conjunto de MUBS, $\{I, II, III, IV, V\}$, para o sistema considerado neste trabalho.

Vetores da base I

$$|1\rangle_I = |H, +2\rangle, \quad (\text{A.5a})$$

$$|2\rangle_I = |H, -2\rangle, \quad (\text{A.5b})$$

$$|3\rangle_I = |V, +2\rangle, \quad (\text{A.5c})$$

$$|4\rangle_I = |V, -2\rangle, \quad (\text{A.5d})$$

Vetores da base II

$$|1\rangle_{II} = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle + |H, -2\rangle + |V, +2\rangle + |V, -2\rangle) \quad (\text{A.6a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+2\rangle + |-2\rangle) \\ &= |D, h\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.6b})$$

$$|2\rangle_{II} = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle - |H, -2\rangle + |V, +2\rangle - |V, -2\rangle) \quad (\text{A.7a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+2\rangle - |-2\rangle) \\ &= |D, v\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.7b})$$

$$|3\rangle_{II} = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle + |H, -2\rangle - |V, +2\rangle - |V, -2\rangle) \quad (\text{A.8a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+2\rangle + |-2\rangle) \\ &= |A, h\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.8b})$$

$$|4\rangle_{II} = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle - |H, -2\rangle - |V, +2\rangle + |V, -2\rangle) \quad (\text{A.9a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+2\rangle - |-2\rangle) \\ &= |A, v\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.9b})$$

Vetores da base III

$$|1\rangle_{III} = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle + i|H, -2\rangle + i|V, +2\rangle - |V, -2\rangle) \quad (\text{A.10a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i|V\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+2\rangle + i|-2\rangle) \\ &= |L, d\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.10b})$$

$$|2\rangle_{III} = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle - i|H, -2\rangle + i|V, +2\rangle + |V, -2\rangle) \quad (\text{A.11a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + i|V\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+2\rangle - i|-2\rangle) \\ &= |L, a\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.11b})$$

$$|3\rangle_{III} = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle + i|H, -2\rangle - i|V, +2\rangle + |V, -2\rangle) \quad (\text{A.12a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i|V\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+2\rangle + i|-2\rangle) \\ &= |R, d\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.12b})$$

$$|4\rangle_{III} = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle - i|H, -2\rangle - i|V, +2\rangle - |V, -2\rangle) \quad (\text{A.13a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - i|V\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|+2\rangle - i|-2\rangle) \\ &= |R, a\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.13b})$$

Vetores da base IV

$$|1\rangle_{IV} = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle + |H, -2\rangle + i|V, +2\rangle - i|V, -2\rangle) \quad (\text{A.14a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (|H\rangle + i|V\rangle) \otimes |+2\rangle + \frac{1}{2} (|H\rangle - i|V\rangle) \otimes |-2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|L, +\rangle + |R, -\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.14b})$$

$$|2\rangle_{IV} = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle - |H, -2\rangle + i|V, +2\rangle + i|V, -2\rangle) \quad (\text{A.15a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (|H\rangle + i|V\rangle) \otimes | +2\rangle - \frac{1}{2} (|H\rangle - i|V\rangle) \otimes | -2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|L, +\rangle - |R, -\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.15b})$$

$$|3\rangle_{IV} = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle + |H, -2\rangle - i|V, +2\rangle + i|V, -2\rangle) \quad (\text{A.16a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (|H\rangle - i|V\rangle) \otimes | +2\rangle + \frac{1}{2} (|H\rangle + i|V\rangle) \otimes | -2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|R, +\rangle + |L, -\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.16b})$$

$$|4\rangle_{IV} = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle - |H, -2\rangle - i|V, +2\rangle - i|V, -2\rangle) \quad (\text{A.17a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (|H\rangle - i|V\rangle) \otimes | +2\rangle - \frac{1}{2} (|H\rangle + i|V\rangle) \otimes | -2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|R, +\rangle - |L, -\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.17b})$$

Vetores da base \mathbf{V}

$$|1\rangle_V = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle + i|H, -2\rangle + |V, +2\rangle - i|V, -2\rangle) \quad (\text{A.18a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} |H\rangle \otimes (| +2\rangle + i| -2\rangle) + \frac{1}{2} |V\rangle \otimes (| +2\rangle - i| -2\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H, d\rangle + |V, a\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.18b})$$

$$|2\rangle_V = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle + i|H, -2\rangle - |V, +2\rangle + i|V, -2\rangle) \quad (\text{A.19a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} |H\rangle \otimes (| +2\rangle + i| -2\rangle) - \frac{1}{2} |V\rangle \otimes (| +2\rangle - i| -2\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H, d\rangle - |V, a\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.19b})$$

$$|1\rangle_V = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle - i|H, -2\rangle + |V, +2\rangle + i|V, -2\rangle) \quad (\text{A.20a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}|H\rangle \otimes (|+2\rangle - i|-2\rangle) + \frac{1}{2}|V\rangle \otimes (|+2\rangle + i|-2\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H, a\rangle + |V, d\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.20b})$$

$$|1\rangle_V = \frac{1}{2} (|H, +2\rangle - i|H, -2\rangle + |V, +2\rangle + i|V, -2\rangle) \quad (\text{A.21a})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}|H\rangle \otimes (|+2\rangle - i|-2\rangle) - \frac{1}{2}|V\rangle \otimes (|+2\rangle + i|-2\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|H, a\rangle - |V, d\rangle) \end{aligned} \quad (\text{A.21b})$$

Apêndice B

Cálculo de Jones

Um método muito importante para estudar o comportamento de luz polarizada ao atravessar elementos ópticos é o chamado cálculo de Jones, descoberto pelo americano R. Clark Jones em 1941[32]. Nesse formalismo, a luz polarizada é representada por um vetor, denominado vetor de Jones, e os elementos ópticos lineares são representados por matrizes conhecidas como matrizes de Jones. Quando a luz atravessa uma sequência de elementos, podemos obter a polarização do feixe emergente tomando o produto das matrizes de Jones correspondentes e o vetor de Jones da luz incidente. Ressaltamos que esse formalismo só é utilizado quando trabalhamos com luz polarizada.

Considere uma onda monocromática transversal plana viajando na direção z . A amplitude complexa do campo elétrico correspondente pode ser escrita como:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{z}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_x(\mathbf{z}, t) + \tilde{\mathbf{E}}_y(\mathbf{z}, t), \quad (\text{B.1})$$

com

$$\tilde{\mathbf{E}}_x(z, t) = E_{0x}e^{i(kz - \omega t + \phi_x)}\hat{\mathbf{i}} \quad (\text{B.2a})$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_y(z, t) = E_{0y}e^{i(kz - \omega t + \phi_y)}\hat{\mathbf{j}}, \quad (\text{B.2b})$$

onde ϕ_x e ϕ_y são as fases de cada componente. O campo elétrico $\tilde{\mathbf{E}}$ é dado pela parte real da Equação (B.1).

O vetor de Jones é então definido como:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ E_{0y}e^{i\phi_y} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Portanto, o vetor de Jones representa a amplitude e fase do campo elétrico nas direções x e y . Ressaltamos que a soma dos quadrados dos valores absolutos das duas componentes do vetor de Jones é proporcional à intensidade da luz.

Os estados de polarização horizontal(H) e vertical(V) são dados por:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4a})$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y}e^{i\phi_y} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4b})$$

No caso da luz polarizada à $+45^\circ$, temos que $E_{0x} = E_{0y}$ e $\phi_x = \phi_y$. De acordo com a Equação (B.3), o vetor de Jones correspondente é dado por:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{+45} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ E_{0x}e^{i\phi_x} \end{pmatrix} = E_{0x}e^{i\phi_x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Similarmente, para a luz polarizada à -45° temos $E_{0x} = -E_{0y}$ e $\phi_x = \phi_y$ e, portanto:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{-45} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ E_{0x}e^{i\phi_x} \end{pmatrix} = E_{0x}e^{i\phi_x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Para a luz circularmente polarizada à direita(R) temos $E_{0x} = -E_{0y}$ e a componente y está 90° na frente da componente x . Como convencionamos que a fase da onda de luz é dada por $(kz - \omega t + \phi)$, um aumento em $\phi_x(\phi_y)$ indica uma retardação na fase enquanto que uma diminuição indica avanço. Dessa forma, $\phi_y = \phi_x - \frac{\pi}{2}$ e, portanto:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ E_{0x}e^{i(\phi_x - \frac{\pi}{2})} \end{pmatrix} = E_{0x}e^{i\phi_x} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = E_{0x}e^{i\phi_x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Similarmente, para a luz polarizada à esquerda(L) temos:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} E_{0x}e^{i\phi_x} \\ E_{0x}e^{i(\phi_x + \frac{\pi}{2})} \end{pmatrix} = E_{0x}e^{i\phi_x} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = E_{0x}e^{i\phi_x} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Em muitas aplicações não é necessário saber exatamente as amplitudes e fases das ondas. Nesses casos, é comum normalizar a irradiância para a unidade obtendo expressões mais simples para os vetores de Jones. Para isso, dividimos ambas as componentes do vetor pelo mesmo escalar de modo que a soma do módulo ao quadrado das componentes seja igual à 1. Os correspondentes vetores de Jones normalizados encontram-se na Tabela B.1.

Suponha que tenhamos um feixe de luz polarizada incidente, representada pelo vetor de Jones $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{i}}$, atravessando um elemento óptico. O feixe transmitido é, então, descrito por um novo vetor $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{t}}$. O elemento óptico transformou um vetor $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{i}}$ em $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{t}}$, um processo que pode ser descrito matematicamente

utilizando uma matriz 2×2 . Se \mathbf{A} representa a transformação do elemento em questão, então:

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{E}}_i, \quad (\text{B.9})$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Polarização	Vetor de Jones normalizado
H	$\tilde{\mathbf{E}}_H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
V	$\tilde{\mathbf{E}}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
+45	$\tilde{\mathbf{E}}_{+45} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
-45	$\tilde{\mathbf{E}}_{-45} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
R	$\tilde{\mathbf{E}}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
L	$\tilde{\mathbf{E}}_L = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Tabela B.1: Vetores de Jones normalizados para cada estado de polarização da luz.

Se o feixe de luz passa por uma série de n elementos representados pelas matrizes $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$, então:

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \mathbf{A}_n \dots \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \tilde{\mathbf{E}}_i. \quad (\text{B.11})$$

Ressaltamos que as matrizes dos componentes não comutam, elas devem ser aplicadas na ordem correta. O feixe deixa o primeiro componente da série como $\mathbf{A}_1 \tilde{\mathbf{E}}_i$; após passar pelo segundo componente torna-se $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \tilde{\mathbf{E}}_i$ e assim sucessivamente.

As matrizes de Jones que são utilizadas nesse trabalho, correspondentes às placas de quarto de onda(QWP) e meia onda(HWP), são dadas por:

$$\mathbf{HWP}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{QWP}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + i\sin^2\theta & (1-i)\cos\theta\sin\theta \\ (1-i)\cos\theta\sin\theta & i\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix}, \quad (\text{B.13})$$

onde θ é o ângulo do eixo rápido de cada placa com o eixo horizontal.

Embora esse formalismo foi criado para descrever a polarização de uma onda clássica, o vetor de estado de polarizado utilizado em Mecânica Quântica assume uma forma idêntica ao vetor de Jones. Portanto, a analogia é direta e o mesmo cálculo pode ser utilizado para a polarização de fótons, no contexto da Mecânica Quântica.

B.1 Preparação dos estados

Considere o segundo estado pertencente à base I, $|H+2\rangle$. Para a preparação de fótons nesse estado, utilizamos a sequência de elementos indicadas na Figura 4.10, ajustados com os ângulos indicados na Tabela 4.1. Temos que o fóton antes do sistema de preparação encontra-se em um estado $|\psi\rangle = |H, 0\rangle$. O efeito do primeiro conjunto de placas de onda (α e β) no estado de polarização horizontal é dado por:

$$\mathbf{HWP}(0)\mathbf{QWP}(45)|H\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = |L\rangle. \quad (\text{B.14})$$

Portanto, o estado do fóton após as primeiras placas de onda é dado por:

$$|\psi\rangle = |L\rangle|0\rangle. \quad (\text{B.15})$$

A atuação da q-plate é descrita pela Equação (4.36) e o estado do fóton após esse dispositivo é:

$$|\psi\rangle = |R\rangle|+2\rangle. \quad (\text{B.16})$$

O PBS1 tem como função filtrar as contribuições de polarização horizontal e, portanto, após o PBS temos:

$$|\psi\rangle = |H\rangle|+2\rangle. \quad (\text{B.17})$$

Após o PBS1, um novo conjunto de placas de onda (γ e δ) é utilizado. Sua atuação em um estado de polarização horizontal é dada por:

$$\mathbf{HWP}(0)\mathbf{QWP}(0)|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |H\rangle \quad (\text{B.18})$$

Portanto, o estado na saída após esse conjunto de dispositivos ópticos ao utilizar esses ângulos é dado por $|\psi\rangle = |H, +2\rangle$. Através de cálculos similares podemos verificar todos os ângulos apresentados na Tabela 4.1.

B.2 Sistema de detecção

Considere a base I definida neste trabalho como $\{|H+2\rangle, |H-2\rangle, |V+2\rangle, |V-2\rangle\}$. A sequência de elementos ópticos utilizados para detecção de cada um desses estados está representado na Figura 4.11. A seguir, mostraremos que, utilizando as configurações de ângulos apresentadas na Tabela 4.2, pode-se implementar cada um dos operadores de medida descritos na

Seção 4.3.4. Considere que o estado antes do sistema de detecção é dado por um estado arbitrário escrito na mesma base acima:

$$|\psi\rangle = a|H, +2\rangle + b|H, -2\rangle + c|V, +2\rangle + d|V, -2\rangle, \quad (\text{B.19})$$

com $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1$.

Considere também que os elementos estão ajustados com a primeira configuração de ângulos apresentada na Tabela 4.2, correspondente à detecção do estado $|H + 2\rangle$:

$$\epsilon = 0; \quad \varphi = 0; \quad \lambda = -45; \quad \tau = +45; \quad \chi = 0; \quad \mu = 0. \quad (\text{B.20})$$

Abaixo calculamos o efeito das duas primeiras placas de onda (ϵ e φ) nos estados de polarização $|H\rangle$ e $|V\rangle$, respeitando a ordem correta de aplicação:

$$\mathbf{HWP}(0)\mathbf{QWP}(0)|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |H\rangle \quad (\text{B.21a})$$

$$\mathbf{HWP}(0)\mathbf{QWP}(0)|V\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|V\rangle \quad (\text{B.21b})$$

As placas de onda atuam somente no grau de liberdade de polarização e utilizando as Equações (B.21) e (B.19) podemos escrever o estado após o primeiro conjunto de placas(ϵ e φ) como:

$$|\psi\rangle_{\epsilon\varphi} = a|H\rangle|+2\rangle + b|H\rangle|-2\rangle - c|V\rangle|+2\rangle - d|V\rangle|-2\rangle. \quad (\text{B.22})$$

Ressaltamos que o ket acima não está normalizado. Para simplificar as expressões, o utilizaremos nos cálculos subsequentes e realizaremos a normalização no estado final, após a passagem por todos os componentes.

O primeiro PBS(PBS1) atua como um filtro de polarização horizontal, pois selecionamos os fótons que são transmitidos por ele. Assim, temos após o PBS1:

$$|\psi\rangle_{PBS1} = a|H\rangle|+2\rangle + b|H\rangle|-2\rangle. \quad (\text{B.23})$$

A atuação da q-plate(QP) localizada após o PBS1 é similar à apresentada na Equação (4.36) mas agora, no estado de entrada do dispositivo, temos contribuições de estados com $m = 2, -2$. Dada a variação de $\Delta m = \pm 2$ imposta pelo dispositivo, dependendo da polarização de entrada(+2 para polarização circular à direita e -2 para circular à esquerda), temos após a q-plate:

$$|\psi\rangle_{QP} = \frac{a}{\sqrt{2}}|L\rangle|0\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|R\rangle|+4\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|L\rangle|-4\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|L\rangle|0\rangle. \quad (\text{B.24})$$

A atuação das duas próximas placas de onda (λ e τ) nos estados de polarização $|R\rangle$ e $|L\rangle$ é dada por:

$$\mathbf{HWP}(+45)\mathbf{QWP}(-45)|R\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |V\rangle \quad (\text{B.25a})$$

$$\mathbf{HWP}(+45)\mathbf{QWP}(-45)|L\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = i|H\rangle \quad (\text{B.25b})$$

Portanto, após esse segundo conjunto de placas de onda, temos:

$$|\psi\rangle_{\gamma\tau} = \frac{ia}{\sqrt{2}}|H\rangle|0\rangle + \frac{a}{\sqrt{2}}|V\rangle|+4\rangle + \frac{ib}{\sqrt{2}}|H\rangle|-4\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|V\rangle|0\rangle. \quad (\text{B.26})$$

Após a fibra óptica, cuja função é selecionar as contribuições orbitais com $m = 0$, temos:

$$|\psi\rangle_{\text{fibra}} = \frac{ia}{\sqrt{2}}|H\rangle|0\rangle + \frac{b}{\sqrt{2}}|V\rangle|0\rangle. \quad (\text{B.27})$$

A atuação do próximo conjunto de placas (χ e μ) nos estados de polarização $|H\rangle$ e $|V\rangle$ é novamente dada pela equação B.25 e, assim:

$$|\psi\rangle_{\chi\mu} = \frac{ia}{\sqrt{2}}|H\rangle|0\rangle - \frac{b}{\sqrt{2}}|V\rangle|0\rangle. \quad (\text{B.28})$$

Na Equação (B.28) o termo que acompanha o coeficiente a corresponde ao primeiro termo da Equação (B.19), após a transformação realizada pelos componentes ópticos. Isso significa que se o fóton antes do sistema de detecção está em um estado $|H, +2\rangle$, ao colocar um detector na saída de transmissão do PBS2, ele será detectado. Caso o fóton esteja em um estado diferente da base, i.e., $|H, -2\rangle$, $|V, +2\rangle$ e $|V, -2\rangle$, ele não será detectado. Ou seja, o sistema de detecção atuará como um filtro de fótons no estado $|H, +2\rangle$.

Com cálculos similares podemos verificar todos os outros ângulos disponíveis na Tabela 4.2, correspondentes à detecção de cada um dos estados das MUBs utilizadas.

Apêndice C

Conversão Paramétrica Descendente

A conversão paramétrica descendente (CPD) é um processo óptico não linear no qual um feixe de luz (usualmente denominado *pump*) com vetor de onda \vec{k}_p e frequência ω_p ao incidir em um cristal não linear tem uma pequena probabilidade de ser convertido espontaneamente e gerar pares de fótons (usualmente denominados *signer* e *idler* com vetores de onda \vec{k}_s, \vec{k}_i e frequências ω_s e ω_i , respectivamente [44]). A criação dos pares de fótons é simultânea e, por isso, eles também são chamados de fótons gêmeos. A frequência do pump está tipicamente na região do violeta ou ultravioleta, enquanto que as frequências dos fótons gerados estão na região do visível ou infravermelho próximo. Um diagrama simplificado do processo é encontrado na Figura C.1 (a).

O processo conserva energia e momento quando as chamadas condições de casamento de fase são satisfeitas, i.e.,

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i, \quad (\text{C.1a})$$

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i. \quad (\text{C.1b})$$

Em geral, é difícil satisfazer essas duas condições simultaneamente em materiais isotrópicos e homogêneos e, portanto, usualmente são utilizados cristais birrefringentes. Nesse caso, o índice de refração no cristal depende da direção de propagação do feixe, de sua polarização e frequência. Como $|\vec{k}| = \frac{n\omega}{c}$ (onde n é o índice de refração), podemos reescrever a segunda condição de casamento de fase (C.1b) como:

$$n(\theta_p, \omega_p)\omega_p\hat{k}_p = n(\theta_s, \omega_s)\omega_s\hat{k}_s + n(\theta_i, \omega_i)\omega_i\hat{k}_i, \quad (\text{C.2})$$

onde θ_x , com $x = p, s, i$, é o ângulo entre o feixe e o eixo óptico do cristal. Há duas maneiras de satisfazer essa condição, conhecidas como casamento

de fase tipo I e tipo II. No casamento de fase tipo I, os feixes convertidos compartilham a mesma polarização, ortogonal à polarização do pump, e são emitidos em forma de cones concêntricos em torno da direção de propagação do pump. No casamento de fase tipo II, os fótons gerados têm polarizações ortogonais, sendo uma delas coincidente com a polarização do pump, e são emitidos em forma de dois cones distintos. Nas figuras C.1 (b) e (c) são mostrados os cones relativos à três diferentes comprimentos de onda dos fótons gerados e os símbolos mostram onde podem ser encontrados os fótons gêmeos.

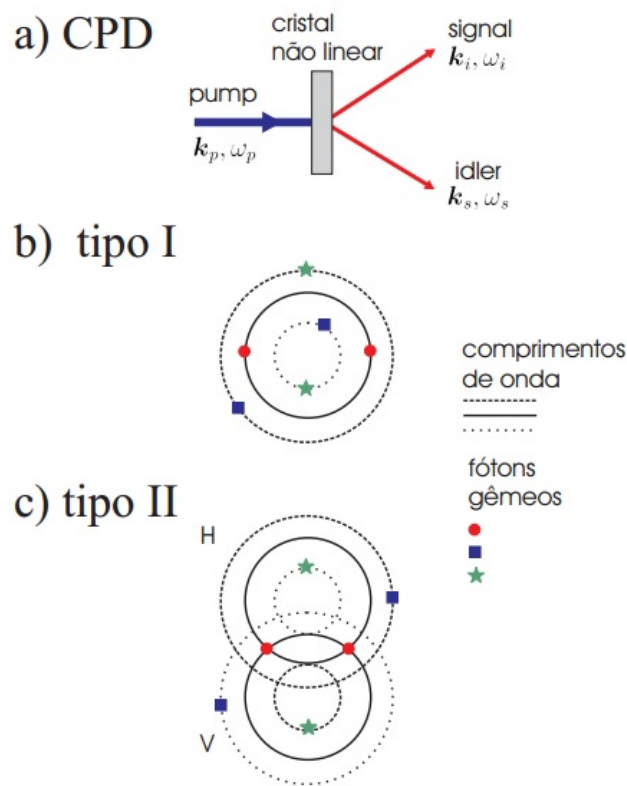


Figura C.1: Conversão Paramétrica Descendente. (a) Diagrama da CPD. (b) Casamento de fase tipo I. (c) Casamento de fase tipo II. Na figura, são mostrados os cones relativos à três diferentes comprimentos de onda dos fótons gerados e os símbolos mostram onde podem ser encontrados os fótons gêmeos. Imagem retirada da tese de doutorado de Leonardo Teixeira Neves [54].

Os fótons produzidos pela CPD podem ter diversos graus de emaranhamento, como por exemplo, frequência, polarização e momento linear. Além

disso, na Ref. foi mostrado experimentalmente que a CPD conserva momento angular orbital e os fótons gerados são emaranhados em espaços discretos e multidimensionais, neste grau de liberdade.

A teoria quântica da CPD pode ser derivada da descrição clássica da interação não linear seguida da quantização do campo eletromagnético. O tratamento teórico convencional é descrito por Mandel [44] mas, neste trabalho, utilizaremos também os resultados obtidos nas referências [3, 65, 47] que levam em consideração o grau de liberdade de momento angular orbital. O objetivo não é fazer uma descrição detalhada dos cálculos, mas sim apresentar a forma do estado final nos graus de liberdade de energia, momento linear, polarização e momento angular orbital.

Quando um campo eletromagnético se propaga em um meio não linear e a interação desse campo com o meio é suficientemente fraca, pode-se tratá-la como uma perturbação em relação aos termos do Hamiltoniano correspondente ao meio e ao campo. Para um cristal com uma susceptibilidade não linear de segunda ordem dada pelo tensor χ_{ijk} , aplicando o procedimento de quantização dos campos dos fótons gêmeos e assumindo que o feixe do pump pode ser tratado classicamente, o Hamiltoniano de interação é dado por [3, 44]:

$$\begin{aligned}
 H_I(t) = & \sum_{\sigma_i, \sigma_s, \sigma_p} \int d\vec{k}_i \int d\vec{k}_s \int d\vec{k}_p l^*(\omega_i) l^*(\omega_s) l(\omega_p) a^\dagger(\vec{k}_i, \sigma_i) a^\dagger(\vec{k}_s, \sigma_s) a^\dagger(\vec{k}_p, \sigma_p) \\
 & \times e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t} \chi_{ijk}(\hat{e}_{\vec{k}_p, \sigma_p}^*)_i (\hat{e}_{\vec{k}_i, \sigma_i}^*)_j (\hat{e}_{\vec{k}_s, \sigma_s}^*)_k \int_V d\vec{r} e^{-i(\vec{k}_i + \vec{k}_s - \vec{k}_p) \cdot \vec{r}} + \text{H.c.},
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

onde V é o volume de interação, $\sigma_i, \sigma_s, \sigma_p$ são as polarizações do idler, sinal e pump; $\hat{e}_{\vec{k}_i, \sigma_i}^*, \hat{e}_{\vec{k}_s, \sigma_s}^*, \hat{e}_{\vec{k}_p, \sigma_p}^*$ são vetores bidimensionais de polarização desses fótons e

$$l(\omega_i) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega(\vec{k}_i, \sigma_i)}{2 \epsilon_0 n^2(\vec{k}_i, \sigma_i)}}. \tag{C.4}$$

Assim, se o estado inicial é o $|\psi(0)\rangle$, o estado após um tempo t é dado por:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' H_I(t')\right) |\psi(0)\rangle. \tag{C.5}$$

Se o feixe de bombeamento é suficientemente fraco, podemos expandir a exponencial da Equação (C.5) e tomar só os dois primeiros termos:

$$|\psi(t)\rangle = \left[\mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' H_I(t') \right] |\psi(0)\rangle. \tag{C.6}$$

Usando a Equação C.3 pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned}
 \int_0^t dt' H_I(t') &= \sum_{\sigma_i, \sigma_s, \sigma_p} \int d\vec{k}_i \int d\vec{k}_s \int d\vec{k}_p l^*(\omega_i) l^*(\omega_s) l(\omega_p) a^\dagger(\vec{k}_i, \sigma_i) a^\dagger(\vec{k}_s, \sigma_s) a^\dagger(\vec{k}_p, \sigma_p) \\
 &\times e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2} \chi_{ijk}(\hat{e}_{\vec{k}_p, \sigma_p})_i (\hat{e}_{\vec{k}_i, \sigma_i})_j (\hat{e}_{\vec{k}_s, \sigma_s})_k \sin \frac{(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2}{(\omega_s + \omega_i - \omega_p)/2} \\
 &\times \prod_{m=1}^3 \left[\sin \frac{(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p)_m l_m/2}{(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_i)_m/2} \right] e^{-i(\vec{k}_i + \vec{k}_s - \vec{k}_p) \cdot \vec{r}_0} + H.c., \quad (C.7)
 \end{aligned}$$

onde l_m são as dimensões do volume de interação e \vec{r}_0 é a origem do sistema de coordenadas. As funções do tipo $\text{sinc}(x) = (\sin x)/x$ (a menos de fatores multiplicativos) fornecem as condições de casamento de fase na CPD.

A expressão acima pode ser simplificada utilizando algumas aproximações:

1. O feixe de bombeamento é fraco o suficiente para que o intervalo de tempo entre dois pares que são convertidos na CPD seja grande comparado ao tempo de detecção. Dessa forma, na Equação (C.7), o tempo de interação pode ser considerado longo e o termo $\sin \frac{(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2}{(\omega_s + \omega_i - \omega_p)/2}$ só tem valor apreciável quando $\omega_i + \omega_s = \omega_p$;
2. O feixe de bombeamento pode ser tratado classicamente, pois é muito mais intenso que os feixes convertidos. Desta forma, o operador a_{k_p} na Equação (C.7) pode ser substituído por $v(\vec{k}_p, \sigma_p)$, a amplitude coerente do feixe pump;
3. O cristal está centrado na origem do sistema de coordenadas ($\vec{r}_0 = 0$), o feixe pump se propaga z e a espessura do cristal na direção de propagação é pequena. Além disso, nas direções x e y o cristal pode ser considerado grande o suficiente para que $\sin \frac{(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_p)_m l_m/2}{(\vec{k}_s + \vec{k}_i - \vec{k}_i)_m/2}$ só tenha valor apreciável quando $(\vec{k}_s = \vec{k}_i - \vec{k}_p)_m$, para $m = x, y$;
4. Os campos pump, signal e idler são observados somente em pontos próximos do eixo z , de forma que a magnitude das componentes transversal do vetor de onda é muito menor que a magnitude do próprio vetor de onda. Essa é a chamada aproximação paraxial.

Considerando as aproximações acima, pode ser mostrado [48, 66] que o estado da luz gerada na CPD é dado por:

$$|\psi(t)\rangle = |\text{vac}\rangle + \sum_{\sigma_i, \sigma_s} \int d\omega_i \int d\vec{q}_i \int d\vec{q}_s C_{\sigma_i, \sigma_s} v(\vec{q}_i + \vec{q}_s) a^\dagger(\vec{q}_i, \omega_i, \sigma_i) a^\dagger(\vec{q}_s, \omega_p - \omega_i, \sigma_s) |\text{vac}\rangle, \quad (C.8)$$

onde C_{σ_i, σ_s} é uma constante de acoplamento que depende das polarizações dos feixes convertidos e depende do tipo de casamento de fase (I ou II), $v(\vec{q}_p)$ é o espectro angular do feixe pump em $z = 0$, i.e., a transformada de Fourier do perfil transversal do campo do feixe de bombeamento em $z = 0$ e \vec{q}_i, \vec{q}_s são as componentes transversais do vetor de onda do idler (\vec{k}_i) e signal (\vec{k}_s), respectivamente.

O resultado mostrado acima mostra que, ao considerarmos as aproximações de cristal fino e paraxial, o espectro angular do feixe pump é transferido para o estado dos dois fótons. Isso significa que este estado carrega informação sobre o feixe de laser que o gerou. Na Ref. [43] foi mostrado experimentalmente que na CPD há conservação de momento angular orbital e emaranhamento, nesse grau de liberdade, dos fótons gerados.

Considere que o feixe pump está no modo transversal TEM00, i.e., o feixe tem um perfil gaussiano. Nas Refs. [3, 65] foi mostrado que, após calcular o espectro angular para o feixe com esse perfil, o estado da luz gerada pela CPD pode ser escrito como:

$$|\psi(t)\rangle = |\text{vac}\rangle + \eta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma_i, \sigma_s} \int d\omega_i \int d\vec{q}_i \int d\vec{q}_s G_{\sigma_i, \sigma_s, m}(\vec{q}_i + \vec{q}_s) \times e^{-im\phi_i} e^{im\phi_s} a^\dagger(\vec{q}_i, \omega_i, \sigma_i) a^\dagger(\vec{q}_s, \omega_p - \omega_i, \sigma_s) |\text{vac}\rangle, \quad (\text{C.9})$$

onde

1. $G_{\sigma_i, \sigma_s}(\vec{q}_i, \vec{q}_s, m)$ é proporcional ao coeficiente de expansão em série de Fourier da transformada de Fourier do perfil transversal do feixe de bombeamento escrito em termos dos modos de Laguerre-Gauss[3].
2. $e^{-im\phi_i}$ e $e^{im\phi_s}$ indicam que os fótons idler e signal dos feixes convertidos têm, respectivamente, momento angular orbital $-m\hbar$ e $m\hbar$. Podemos definir:

$$e^{-im\phi_i} a^\dagger(\vec{q}_i, \omega_i, \sigma_i) \equiv a^\dagger(\vec{q}_i, \omega_i, \sigma_i, -m) \quad (\text{C.10})$$

$$e^{im\phi_s} a^\dagger(\vec{q}_s, \omega_s, \sigma_s) \equiv a^\dagger(\vec{q}_s, \omega_s, \sigma_s, m), \quad (\text{C.11})$$

onde $a^\dagger(\vec{q}_i, \omega_i, \sigma_i, -m)$ é o operador de criação que, atuando no vácuo, cria um fóton com componente transversal do momento q , frequência ω , polarização σ e momento angular orbital $-m$;

Reescrevendo a Equação (C.9) usando as considerações acima, temos:

$$|\psi(t)\rangle = |\text{vac}\rangle + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma_i, \sigma_s} \int d\omega_i \int d\vec{q}_i \int d\vec{q}_s G_{\sigma_i, \sigma_s, m}(\vec{q}_i + \vec{q}_s) \times a^\dagger(\vec{q}_i, \omega_i, \sigma_i, -m) a^\dagger(\vec{q}_s, \omega_p - \omega_i, \sigma_s, m) |\text{vac}\rangle, \quad (\text{C.12})$$

C.1 Estados de fenda

Das Referências [65, 48, 66], temos que o estado dos dois fótons gerados na CPD, usando a aproximação de cristal fino e a aproximação monocromática, é dado por:

$$|\psi\rangle = \eta \int d\vec{q}_i \int d\vec{q}_s f(\vec{q}_i + \vec{q}_s) a^\dagger(\vec{q}_s) a^\dagger(\vec{q}_i) |\text{vac}\rangle, \quad (\text{C.13})$$

onde η é uma constante, \vec{q}_i e \vec{q}_s são as componentes transversais dos vetores de onda dos fótons idler e signal, respectivamente, e $f(\vec{q}_i + \vec{q}_s)$ é o espectro angular do feixe pump em $z = 0$, i.e., a transformada de Fourier do perfil transversal do campo do feixe de bombeamento em $z = 0$.¹

Como indicado na Figura C.2, cada componente do par de fótons gerado na CPD é direcionado para um anteparo opaco com D fendas transparentes ($D \geq 2$) que, nos planos z_{A_i} e z_{A_s} , são representadas por funções de transmissões $A_i(\rho_i)$ e $A_s(\rho_s)$, respectivamente (Veja Ref. [54]). Se $W_{\text{inc}}(\vec{\rho}_i, \vec{\rho}_s; z_{A_i}, z_{A_s})$ é o perfil transversal do campo do feixe de bombeamento transferido para o estado dos dois fótons e $W_{\text{trans}}(\vec{\rho}_i, \vec{\rho}_s; z_{A_i}, z_{A_s})$ é o perfil transversal transmitido através das fendas, temos que:

$$W_{\text{inc}}(\vec{\rho}_i, \vec{\rho}_s; z_{A_i}, z_{A_s}) = A_i(\rho_i) A_s(\rho_s) W_{\text{trans}}(\vec{\rho}_i, \vec{\rho}_s; z_{A_i}, z_{A_s}), \quad (\text{C.14})$$

onde $\vec{\rho}_i$ e $\vec{\rho}_s$ são as componentes transversais dos vetores de posição.

Ao passar pelas fendas, o estado dos dois fótons, dado pela Equação (C.13), será modificado e teremos:

$$|\psi\rangle = \eta \int d\vec{q}_i \int d\vec{q}_s \mathcal{F}(\vec{q}_i, \vec{q}_s) a^\dagger(\vec{q}_s) a^\dagger(\vec{q}_i) |\text{vac}\rangle, \quad (\text{C.15})$$

onde $\mathcal{F}(\vec{q}_i, \vec{q}_s)$ é o espectro angular do feixe transmitido através das fendas que, é obtido fazendo a transformada de Fourier do lado direito da Equação (C.14).

Consideraremos o caso degenerado, i.e., fótons gêmeos com mesmo comprimento de onda, o que pode ser obtido através de filtros de interferência no caminho de cada fóton centrados no mesmo comprimento de onda. Assim, $k_s = k_i = k_p/2$. Além disso, os dois anteparos com as fendas estão posicionados à igual distância do cristal, então $z_{A_i} = z_{A_s} = z_A$. Por fim, a dimensão das fendas na direção y é muito maior que na direção x e, portanto, consideraremos as equações em uma única dimensão ($\vec{\rho}_j \rightarrow x_j$ e $\vec{q}_j \rightarrow q_j$). Sob essas

¹Nesta seção, não mostraremos explicitamente nas equações os graus de liberdade de polarização e momento angular orbital, pois exploraremos as correlações dos fótons gêmeos em momento transversal.

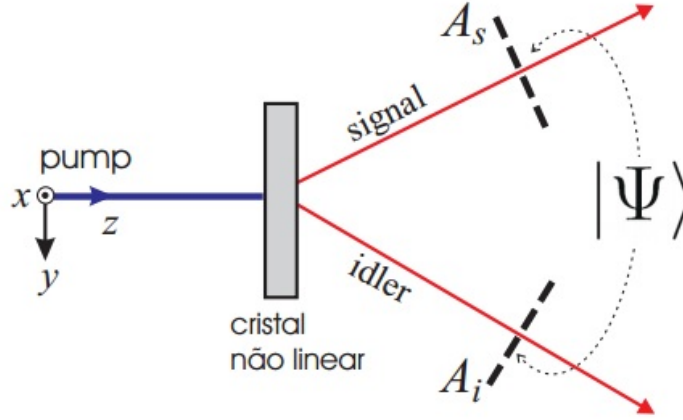


Figura C.2: Fótons signal e idler gerados na CPD são transmitidos através de fendas, representadas pelas funções de transmissão $A_i(\vec{\rho}_i)$ e $A_s(\vec{\rho}_s)$. Imagem retirada da tese de Leonardo Teixeira Neves[54].

restrições, mostrou-se[54] que o estado dos dois fótons após as fendas é dado por:

$$|\psi\rangle = \int dq_i \int dq_s \mathcal{F}(q_i, q_s) a^\dagger(\vec{q}_s) a^\dagger(\vec{q}_i) |\text{vac}\rangle, \quad (\text{C.16})$$

com $\mathcal{F}(q_i, q_s)$ dado por:

$$\mathcal{F}(q_i, q_s) = \gamma \int dx_i \int dx_s A_i(x_i) A_s(x_s) \exp(ik(x_i - x_s)^2/8z_A) \quad (\text{C.17})$$

$$\times W\left(\frac{1}{2}(x_i + x_s); z_A\right) \exp(-i(q_i x_i + q_s x_s)). \quad (\text{C.18})$$

A função transmissão que descreve a abertura de cada fenda é dada por:

$$A(x) = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \prod \left(\frac{x - l_D}{2a} \right), \quad (\text{C.19})$$

onde $l_D \equiv (D - 1)/2$, $2a$ é a largura de cada fenda, d é a separação de duas fendas consecutivas (centro a centro). $\prod(\xi)$ é uma função retângulo de largura e altura unitária:

$$\prod(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\xi| \leq 1/2 \\ 0, & \text{se } |\xi| > 1/2 \end{cases}. \quad (\text{C.20})$$

O índice l na Equação (C.19) funciona como um rótulo para uma dada fenda deslocada de ld da origem (centro) do anteparo.

Pode-se, então, inserir a Equação (C.19) em (C.16) e encontrar o estado dos dois fótons após as fendas[54], que é dado por:

$$|\psi\rangle = \sum_{l=-l_D}^{l_D} \sum_{m=-l_D}^{l_D} W_{mn} e^{i \frac{kd^2}{8z_A} (m-l)^2} |l\rangle_i \otimes |m\rangle_s, \quad (\text{C.21})$$

onde

$$W_{mn} \equiv \gamma W \left(\frac{(l+m)d}{2}; z_A \right) \quad (\text{C.22})$$

e $|l\rangle_i(|l\rangle_s)$ é o estado de um fóton idler(signal) transmitido pela fenda $l(m)$, que pode ser escrito nas variáveis de momento transversal como:

$$|l\rangle \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int dq e^{-iqld} \text{sinc}(qa) |1q\rangle. \quad (\text{C.23})$$

Para obter a Equação (C.21) supõe-se que o perfil do feixe de bombeamento é constante na região de cada fenda e que as fendas são estreitas quando comparadas com a separação entre elas.

Como estamos interessados, inicialmente, em realizar a clonagem de quarts, utilizaremos anteparos com quatro fendas cada ($D = 4$), como ilustrado na Figura C.3 (a). Na Figura C.3 (b) está representada a forma da função de transmissão para essa configuração. Substituindo $D = 4$ na Equação (C.21), temos:

$$|\psi\rangle = \sum_{l=-3/2}^{3/2} \sum_{m=-3/2}^{3/2} W_{mn} e^{i \frac{kd^2}{8z_A} (m-l)^2} |l\rangle_i \otimes |m\rangle_s. \quad (\text{C.24})$$

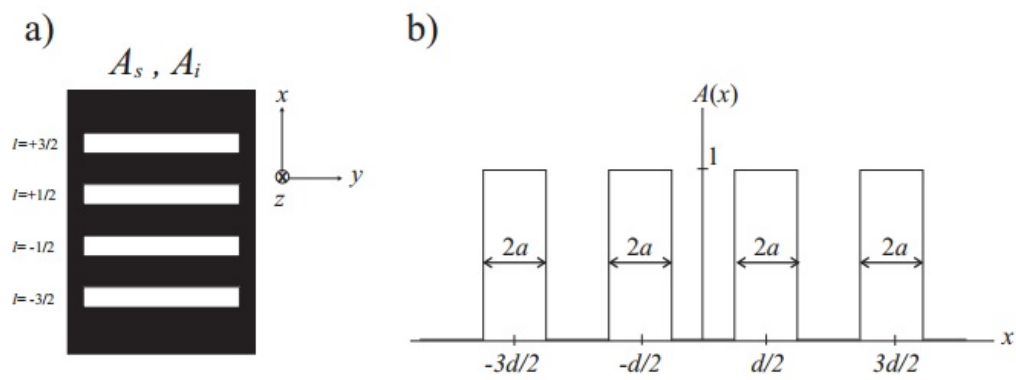


Figura C.3: (a) Ilustração das quatro fendas colocadas no caminho do sinal e do idler. (b) Função transmissão das fendas. Imagem retirada da tese de Leonardo Teixeira Neves[54].

Referências Bibliográficas

- [1] A. Acín, N. Gisin, and V. Scarani. Coherent-pulse implementations of quantum cryptography protocols resistant to photon-number-splitting attacks. *Phys. Rev. A*, 69:012309, Jan 2004.
- [2] L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. Spreeuw, and J. Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes. *Physical Review A*, 45(11):8185, 1992.
- [3] H. H. Arnaut and G. A. Barbosa. Orbital and intrinsic angular momentum of single photons and entangled pairs of photons generated by parametric down-conversion. *Phys. Rev. Lett.*, 85:286–289, Jul 2000.
- [4] L. E. Ballentine. *Quantum mechanics*, volume 280. Prentice Hall Englewood Cliffs, 1990.
- [5] S. Barnett. *Quantum information*, volume 16. Oxford University Press, 2009.
- [6] H. Barnum, C. M. Caves, C. A. Fuchs, R. Jozsa, and B. Schumacher. Noncommuting mixed states cannot be broadcast. *Physical Review Letters*, 76(15):2818, 1996.
- [7] V. Y. Bazhenov, M. Vasnetsov, and M. Soskin. Laser beams with screw dislocations in their wavefronts. *Jetp Lett*, 52(8):429–431, 1990.
- [8] D. Bohm. *Quantum theory*. Courier Corporation, 2012.
- [9] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390(6660):575–579, 1997.
- [10] A. M. Branczyk. Notes on hong-ou-mandel interference, 2013.

- [11] D. Bruß, D. P. DiVincenzo, A. Ekert, C. A. Fuchs, C. Macchiavello, and J. A. Smolin. Optimal universal and state-dependent quantum cloning. *Physical Review A*, 57(4):2368, 1998.
- [12] D. Bruss and C. Macchiavello. Optimal eavesdropping in cryptography with three-dimensional quantum states. *Physical review letters*, 88(12):127901, 2002.
- [13] J. Bub. Quantum entanglement and information. In E. N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2015 edition, 2015.
- [14] V. Bužek and M. Hillery. Quantum copying: Beyond the no-cloning theorem. *Physical Review A*, 54(3):1844, 1996.
- [15] V. Bužek and M. Hillery. Universal optimal cloning of arbitrary quantum states: From qubits to quantum registers. *Physical review letters*, 81(22):5003, 1998.
- [16] V. Bužek, M. Hillery, and R. F. Werner. Optimal manipulations with qubits: Universal-not gate. *Phys. Rev. A*, 60:R2626–R2629, Oct 1999.
- [17] A. Cabello, V. D’Ambrosio, E. Nagali, and F. Sciarrino. Hybrid ququart-encoded quantum cryptography protected by kochen-specker contextuality. *Phys. Rev. A*, 84:030302, Sep 2011.
- [18] N. J. Cerf, M. Bourennane, A. Karlsson, and N. Gisin. Security of quantum key distribution using d -level systems. *Phys. Rev. Lett.*, 88:127902, Mar 2002.
- [19] N. J. Cerf and J. Fiurasek. Optical quantum cloning-a review. *arXiv preprint quant-ph/0512172*, 2005.
- [20] D. Collins, N. Gisin, N. Linden, S. Massar, and S. Popescu. Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems. *Phys. Rev. Lett.*, 88:040404, Jan 2002.
- [21] N. Cufaro-Petroni, A. Garuccio, F. Selleri, and J.-P. Vigièr. On a contradiction between the classical (idealised) quantum theory of measurement and the conservation of the square of the total angular momentum in the einstein-podolsky-rosen paradox. 1980.
- [22] P.-L. de Assis. *Manipulação e mapeamento de correlações quânticas em estados de quatro qudits espaciais*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Jun 2011.

- [23] D. Dieks. Communication by epr devices. *Physics Letters A*, 92:271–272, 1982.
- [24] L.-M. Duan and G.-C. Guo. Probabilistic cloning and identification of linearly independent quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, 80:4999–5002, Jun 1998.
- [25] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.
- [26] A. Fernández-Pérez, A. B. Klimov, and C. Saavedra. Quantum process reconstruction based on mutually unbiased basis. *Phys. Rev. A*, 83:052332, May 2011.
- [27] P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, and G. Weinreich. Generation of optical harmonics. *Phys. Rev. Lett.*, 7:118–119, Aug 1961.
- [28] G. Ghirardi. Entanglement, nonlocality, superluminal signaling and cloning. *arXiv preprint arXiv:1305.2305*, 2013.
- [29] G. Ghirardi and T. Weber. Quantum mechanics and faster-than-light communication: Methodological considerations. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, 78(1):9–20, 1983.
- [30] N. Gisin and S. Massar. Optimal quantum cloning machines. *Physical review letters*, 79(11):2153, 1997.
- [31] G. M. Guimaraes. Não-localidade em sistemas quânticos. Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Fev 2012.
- [32] E. Hecht. Hecht optics. *Addison Wesley*, 997:213–214, 1998.
- [33] N. Herbert. Quick-a new superluminal transmission concept. *Boulder Creek, Cal.: C-Life Institute*, 1979.
- [34] N. Herbert. Flash - a superluminal communicator based upon a new kind of quantum measurement. *Foundations of Physics*, 12:1171–1179, 1982.
- [35] C. K. Hong and L. Mandel. Theory of parametric frequency down conversion of light. *Phys. Rev. A*, 31:2409–2418, Apr 1985.
- [36] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, 59:2044–2046, Nov 1987.

- [37] J. Humblet. Sur le moment d'impulsion d'une onde électromagnétique. *Physica*, 10(7):585–603, 1943.
- [38] R. Jozsa. Fidelity for mixed quantum states. *Journal of Modern Optics*, 41(12):2315–2323, 1994.
- [39] D. Kaszlikowski, P. Gnacinski, M. Zukowki, W. Miklaszewski, and A. Zeilinger. Violations of local realism by two entangled N -dimensional systems are stronger than for two qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4418–4421, Nov 2000.
- [40] A. Klappenecker and M. Rotteler. Constructions of mutually unbiased bases. In G. Mullen, A. Poli, and H. Stichtenoth, editors, *Finite Fields and Applications*, volume 2948 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 137–144. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [41] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida, T. Jennewein, T. C. Ralph, K. J. Resch, G. J. Pryde, J. L. O'Brien, A. Gilchrist, and A. G. White. Simplifying quantum logic using higher-dimensional hilbert spaces. *Nature Physics*, 5(2):134–140, 2009.
- [42] R. Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford university press, 2000.
- [43] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature*, 412(6844):313–316, 2001.
- [44] L. Mandel and E. Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press, 1995.
- [45] L. Marrucci, C. Manzo, and D. Paparo. Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media. *Physical review letters*, 96(16):163905, 2006.
- [46] K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat, and A. Zeilinger. Dense coding in experimental quantum communication. *Phys. Rev. Lett.*, 76:4656–4659, Jun 1996.
- [47] F. Miatto, H. Di Lorenzo Pires, S. Barnett, and M. van Exter. Spatial schmidt modes generated in parametric down-conversion. *The European Physical Journal D*, 66(10), 2012.
- [48] C. H. Monken, P. H. S. Ribeiro, and S. Pádua. Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, 57:3123–3126, Apr 1998.

- [49] E. Nagali, D. Giovannini, L. Marrucci, S. Slussarenko, E. Santamato, and F. Sciarrino. Experimental optimal cloning of four-dimensional quantum states of photons. *Phys. Rev. Lett.*, 105:073602, Aug 2010.
- [50] E. Nagali, L. Sansoni, L. Marrucci, E. Santamato, and F. Sciarrino. Experimental generation and characterization of single-photon hybrid ququarts based on polarization and orbital angular momentum encoding. *Phys. Rev. A*, 81:052317, May 2010.
- [51] E. Nagali, L. Sansoni, F. Sciarrino, F. De Martini, L. Marrucci, B. Piccirillo, E. Karimi, and E. Santamato. Optimal quantum cloning of orbital angular momentum photon qubits through hong–ou–mandel coalescence. *Nature Photonics*, 3(12):720–723, 2009.
- [52] E. Nagali, F. Sciarrino, F. De Martini, L. Marrucci, B. Piccirillo, E. Karimi, and E. Santamato. Quantum information transfer from spin to orbital angular momentum of photons. *Phys. Rev. Lett.*, 103:013601, Jun 2009.
- [53] M. Neeley, M. Ansmann, R. C. Bialczak, M. Hofheinz, E. Lucero, A. D. O’Connell, D. Sank, H. Wang, J. Wenner, A. N. Cleland, et al. Emulation of a quantum spin with a superconducting phase qudit. *Science*, 325(5941):722–725, 2009.
- [54] L. T. Neves. *Estados emaranhados de qudits e qubits criados com pares de fotons produzidos na conversao parametrica descendente*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Set 2006.
- [55] A. Niederberger, V. Scarani, and N. Gisin. Photon-number-splitting versus cloning attacks in practical implementations of the bennett-brassard 1984 protocol for quantum cryptography. *Physical Review A*, 71(4):042316, 2005.
- [56] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.
- [57] J. F. Nye and M. V. Berry. Dislocations in wave trains. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 336(1605):165–190, 1974.
- [58] A. Peres. How the no-cloning theorem got its name. *Fortschritte der Physik*, 51(4-5):458–461, 2003.

- [59] K. R. Popper. Quantum theory and the schism in physics [the postscript to the logic of scientific discovery, vol. iii]. *Hutchinson, London, and Rowman & Littlefield, Totowa*, 1982.
- [60] V. Scarani, S. Iblisdir, N. Gisin, and A. Aín. Quantum cloning. *Rev. Mod. Phys.*, 77:1225–1256, 2005.
- [61] E. Schrödinger. Discussion of probability relations between separated systems. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 31, pages 555–563. Cambridge Univ Press, 1935.
- [62] C. Simon, G. Weihs, and A. Zeilinger. Optimal quantum cloning via stimulated emission. *Phys. Rev. Lett.*, 84:2993–2996, Mar 2000.
- [63] B. M. G. Teixeira. *Modulador espacial de luz para processos quânticos: algoritmo de Deutsch, concentração de emaranhamento e simulação de sistemas quânticos abertos*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Abr 2013.
- [64] T. Vertesi, S. Pironio, and N. Brunner. Closing the detection loophole in bell experiments using qudits. *Phys. Rev. Lett.*, 104:060401, Feb 2010.
- [65] S. Walborn, A. De Oliveira, R. Thebaldi, and C. Monken. Entanglement and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion. *Physical Review A*, 69(2):023811, 2004.
- [66] S. Walborn, C. Monken, S. Padua, and P. S. Ribeiro. Spatial correlations in parametric down-conversion. *Physics Reports*, 495(4–5):87 – 139, 2010.
- [67] R. F. Werner. Optimal cloning of pure states. *Physical Review A*, 58(3):1827, 1998.
- [68] Wikipedia. Angular momentum of light, 2015. [Online; acessado 08-Junho-2015].
- [69] Wikipedia. Orbital angular momentum of light, 2015. [Online; acessado 08-Junho-2015].
- [70] Wikipedia. Spin angular momentum of light, 2015. [Online; acessado 08-Junho-2015].
- [71] E. Woodhead. Quantum cloning bound and application to quantum key distribution. *Phys. Rev. A*, 88:012331, Jul 2013.

- [72] W. K. Wootters and W. H. Zurek. A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 209:802–803, 1982.