



Helder Alexander Santos e Costa

Emaranhamento e efeitos de interações no espaço-tempo em expansão

Belo Horizonte - MG, Brasil

11 de Abril de 2017



Helder Alexander Santos e Costa

Emaranhamento e efeitos de interações no espaço-tempo em expansão

Trabalho de dissertação de Doutorado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito para obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio

Co-orientador:

Prof. Dr. Irismar Gonçalves da Paz

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Belo Horizonte - MG, Brasil

11 de Abril de 2017

Dedico esta dissertação à minha família.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida.

Aos meus familiares, em especial a minha mãe (Jôse), a Rute Helena minha esposa, por terem me apoiado e incentivado por todos esses anos para a conclusão dos meus objetivos.

Ao meu orientador Marcos Donizeti Rodrigues Sampaio por ter me orientado e contribuído para a minha formação profissional. Além de agradecer pela paciência e também pelo incentivo, principalmente nos momentos mais difíceis.

Aos Profs. Irismar Gonçalves da Paz e Gustavo Henrique Costa de Souza pelas interessantes discussões físicas e pelas parcerias nas partes teóricas dos nossos trabalhos.

Aos professores e funcionários do Departamento de Física da UFMG que de alguma forma contribuíram para a minha formação.

A CAPES e ao CNPQ pelo apoio financeiro.

“A imaginação é mais importante do que o conhecimento.”

– Albert Einstein –

Resumo

Neste trabalho estudamos a quantização dos campos escalares e fermiônicos num espaço-tempo em expansão com duas regiões estacionárias. Calculamos os coeficientes de Bogoliubov em uma aproximação perturbativa e quantificamos os efeitos do acoplamento não-mínimo sobre a criação de partículas, no caso do campo escalar. Encontramos que o acoplamento não-mínimo guarda mais informação sobre a estrutura do espaço-tempo em expansão quando comparado com o acoplamento mínimo. Além disso, examinamos um protocolo de teletransporte quântico num espaço-tempo em expansão e mostramos que a medida de fidelidade sofre uma redução devido a expansão cósmica. Entretanto, observamos que o acoplamento não-mínimo do campo com a gravidade significativamente contribui para minimizar os efeitos da expansão do espaço-tempo sobre o teletransporte. E finalmente, estudamos com uma auto-interação afeta a quantidade de informação codificada no emaranhamento gerado pela expansão cósmica e como o emaranhamento entre dois campos escalares é afetado pela dinâmica do espaço-tempo.

Palavras-chave: Emaranhamento, espaço-tempo curvo, interação.

Abstract

In this work we study the quantization of scalar and fermionic fields in an expanding spacetime with two stationary regions. We calculate the Bogoliubov coefficients in a perturbative approach and quantify the effects of non-minimal couplings on particle creation in the case of scalar field. We find that the non-minimal coupling holds more information about the expanding spacetime structure when compared to the minimum coupling. In addition, we examined a quantum teleportation protocol in an expanding spacetime and showed that the fidelity measure is reduced due to cosmic expansion. However, we observe that the non-minimal field coupling with gravity significantly contributes to minimizing the effects of space-time expansion on teleportation. Finally, we study how self-interaction affects the amount of information encoded in the entanglement generated by the cosmic expansion and how the entanglement between two scalar fields is affected by the dynamics of spacetime.

Keywords: Entanglement, curved spacetime, interaction.

Lista de Figuras

- 1 Observadores uniformemente acelerados são descritos por trajetórias hiperbólicas no espaço-tempo Rindler. As linhas tracejadas definem um horizonte de eventos para os observadores acelerados e as regiões I e II estão casualmente desconectadas. p. 12
- 2 Um sistema composto formado por duas partículas com spin 1/2 (molécula de Hg2) é dividido por um campo externo. As duas partículas de spin 1/2 são separadas em direções opostas e ambas passam através de aparatos de Stern-Gerlach orientados ao longo do eixo z. p. 19
- 3 Ilustração de um teletransporte quântico. a) Uma fonte de partículas emaranhadas distribui suas partículas para Alice e Bob. b) Alice realiza uma medida de Bell em seus dois qubits. c) Em seguida, ela envia dois bits de informação a Bob, dizendo qual foi o resultado de sua medida. d) Após receber a mensagem de Alice, Bob implementa uma transformação unitária em seu qubit, fazendo com que seu qubit passe a ser descrito pelo estado $|\phi_1\rangle$. p. 28
- 4 Ilustração da expansão do universo por meio da imagem de um balão inflando. Note que os pontos sobre a superfície do balão representam as galáxias que formam o universo e que ao inflarmos o balão esses pontos se afastam uns dos outros simulando a expansão. p. 40
- 5 O fator de escala conforme $C(\eta)$ descreve um universo que sofre um período de expansão suave e possui duas regiões assintóticas quando $\eta \rightarrow \pm\infty$. Estas regiões assintóticas permiti-nos definir o estado de vácuo e bem como o conceito de partículas do ponto de vista de um observador inercial. . . . p. 41
- 6 Ilustração do contorno Σ p. 46

7	Número de partículas em função de k para diferentes valores de ξ . (figura da esquerda) 0 (linha pontilhada), $1/6$ (linha tracejada) e $1/4$ (linha sólida) com $m = 0.2$, $\rho = 1$, e $\epsilon = 0.7$ e (figura da direita) para diferentes parâmetros de expansão $\rho = 0.1\dots 1$ com $\xi = 1/4$ e $m = \epsilon = 0.5$	p. 47
8	Número de partículas em função de k para diferentes parâmetros de expansão $\rho = 0.1\dots 1$, onde temos fixado $m = \epsilon = 0.5$	p. 52
9	Ilustração de um teletransporte quântico no espaço-tempo em expansão. Alice e Bob no passado assintótico compartilham um estado maximalmente emaranhado, que é a fonte para realizar o teletransporte. Além disso, Alice possui um qubit extra, que deseja teletransportar para Bob. O protocolo é finalizado no futuro assintótico quando a expansão do espaço-tempo satura.	p. 60
10	Fidelidade em função do parâmetro de expansão ρ para o caso de campo bosônico com acoplamento mínimo (linha contínua) e acoplamento conformal (linha de pontos). A linha tracejada mostra a fidelidade para o caso fermiônico, onde fixamos $k = m = 1$ e $\epsilon = 0.7$	p. 66
11	Representação diagramática da criação de quartetos (esquerda) e da criação de pares (direita) pela auto-interação.	p. 69
12	Plot da entropia de von Neumann como função do momento p (esquerda) com $\rho = m = \epsilon = 1$ e como função da massa m (direita) com $\rho = p = \epsilon = 1$, ambos para diferentes valores da constante de acoplamento $0 \leq \lambda < 1$. Os picos mais altos correspondem a acoplamentos mais fortes.	p. 72
13	Plot de $\text{Cov}^{(\lambda)}(\hat{n}_p^{\text{out}}, \hat{n}_{-p}^{\text{out}})$ como uma função do momento p para diferentes valores do parâmetro de expansão $\rho = 1..10$ (figura da esquerda) com $\lambda = 0$, $m = 1$ and $\epsilon = 1$ e para diferentes valores da constante de acoplamento $0 < \lambda < 1$ (figura da direita), com $m = 1$ e $\rho = \epsilon = 1$	p. 73
14	Representação diagramática da criação de um par de partículas do vácuo pela interação mútua, onde p representa as partículas massivas do campo ϕ e k representa as partículas sem massa do campo ψ	p. 76
15	A negatividade logarítmica como função de ρ para diferentes constantes de acoplamentos $0.0005 \leq \lambda_{\phi\psi} < 0.001$ com $k = m = 1$ e $\epsilon = 40$, onde os picos espectrais mais elevados correspondem a acoplamentos fortes.	p. 79

Sumário

1	Introdução	p. 11
2	Informação Quântica	p. 15
2.1	Conceitos fundamentais	p. 16
2.1.1	Operador densidade	p. 16
2.1.2	Sistema composto	p. 17
2.1.3	Traço parcial	p. 17
2.2	Emaranhamento e sua caracterização	p. 18
2.2.1	Emaranhamento de estados puros	p. 19
2.2.2	Entropia de von Neumann	p. 21
2.2.3	Emaranhamento de estados mistos	p. 23
2.2.4	Negatividade logarítmica	p. 25
2.3	Teletransporte quântico	p. 25
2.3.1	O protocolo de teletransporte	p. 26
2.3.2	A fidelidade do teletransporte	p. 29
3	Teoria quântica de campos no espaço-tempo em expansão	p. 31
3.1	Quantização no espaço-tempo de Minkowski	p. 32
3.1.1	Campo de Klein-Gordon	p. 32
3.1.2	Quantização canônica do campo de Klein-Gordon	p. 34

3.1.3	Espaço de Fock para o campo de Klein-Gordon	p. 34
3.1.4	Campo de Dirac	p. 36
3.1.5	Quantização canônica do campo de Dirac	p. 37
3.1.6	Espaço de Fock para o campo de Dirac	p. 38
3.2	Quantização no espaço-tempo em expansão	p. 39
3.2.1	Campo de Klein-Gordon no espaço-tempo em expansão	p. 41
3.2.2	Campo de Dirac no espaço-tempo em expansão	p. 48
4	Emaranhamento no espaço-tempo curvo	p. 54
4.1	Emaranhamento bosônico e fermiônico no espaço-tempo em expansão . . .	p. 55
4.2	Teletransporte quântico no espaço-tempo em expansão	p. 59
4.2.1	Teletransporte quântico caso bosônico	p. 61
4.2.2	Teletransporte quântico caso fermiônico	p. 64
4.3	Emaranhamento com campo escalar auto-interagente	p. 67
4.4	Emaranhamento entre dois campos escalares	p. 74
5	Considerações Finais	p. 80
A	Apêndice A	p. 83
A.1	Trabalhos publicados associados à tese	p. 83
A.2	Trabalhos publicados não associados à tese	p. 83
	Referências	p. 85

Capítulo 1

Introdução

Até o presente momento, não existe uma teoria de Gravitação Quântica consistente. Apesar dos grandes esforços realizados para a obtenção desta, pouco progresso tem sido feito para descrever a gravidade em um nível quântico. Na ausência de tal teoria, uma linha de pesquisa bastante promissora que vem sendo usada para tentar compreender este tema é Gravidade Semiclássica, onde os campos de matéria são quantizados sobre um espaço-tempo de fundo fixo. Os principais aspectos desta abordagem são por um lado usar a equação semiclássica de Einstein para explicar como os campos de matéria tornam-se fontes de gravidade, e por outro, estudar os efeitos da gravidade sobre os campos quânticos através da Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos [1–3].

Historicamente, segundo Robert Wald [4], o estudo da Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos iniciou-se no final da década de 1960, com o trabalho pioneiro de Parker [5] sobre o estudo da criação de partículas produzidas pela expansão do universo no período próximo ao “Big Bang”. Posteriormente, grandes avanços foram feitos graças a descoberta, feita pelo físico inglês Stephen Hawking em 1975 [6, 7], de que efeitos quânticos permitem aos buracos negros emitir radiações exatamente como um corpo negro com uma temperatura que depende apenas de suas propriedades gravitacionais, dada por

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi GM k_B}, \quad (1.1)$$

onde \hbar é a constante de Dirac, c é a velocidade da luz, M é a massa do buraco negro, G é a constante gravitacional de Newton e k_B é a constante de Boltzmann. Esse resultado foi recebido com perplexidade, pois mostra que do ponto de vista quântico, buracos negros são instáveis, podendo decair através da emissão de radiação térmica e conseqüentemente evaporar até seu possível desaparecimento. Este fenômeno é atualmente conhecido pelo nome de radiação Hawking e estabelece uma conexão entre Termodinâmica, Mecânica Quântica e

Relatividade Geral.

Um melhor entendimento do efeito Hawking exposto acima exigiu a introdução de um aparato experimental. Desta forma William George Unruh em 1976 [8], introduziu um modelo simplificado de um detector acoplado a um campo escalar, e obteve um importante resultado que tem uma ligação direta com o descoberta de Hawking. Aquele autor demonstrou que, a probabilidade de excitação de um detector que percorre uma linha de universo com aceleração constante, trajetórias hiperbólicas na figura (1), é dada por

$$R = \frac{q^2}{2\pi} \frac{\Delta E}{e^{\frac{2\pi\Delta E}{a}} - 1} \quad (1.2)$$

onde q é a constante do acoplamento entre o detector e o campo, ΔE é a diferença de energia entre dois estados do detector e a corresponde à aceleração própria do detector. Este resultado simplesmente expressa o fato de que um detector uniformemente acelerado se comporta como se estivesse imerso em um banho térmico, cuja a temperatura é proporcional à aceleração própria do detector. A descoberta de Unruh completou estudos anteriores do matemático norte-americano Stephen Fulling [9] e esclareceu os resultados obtidos de forma independente na mesma época pelo australiano Paul Davies [10].

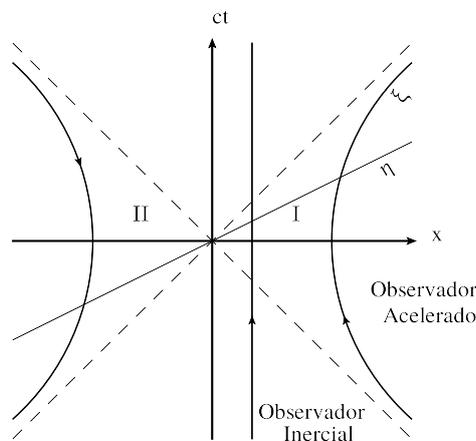


Figura 1: Observadores uniformemente acelerados são descritos por trajetórias hiperbólicas no espaço-tempo Rindler. As linhas tracejadas definem um horizonte de eventos para os observadores acelerados e as regiões I e II estão casualmente desconectadas.

Do ponto de vista prático a radiação prevista pelo efeito Unruh e pelo efeito Hawking não foram observadas por serem normalmente fracas demais. Por exemplo, um buraco negro com massa equivalente à do sol ($1,9891 \times 10^{31}$ kg) teria uma temperatura da ordem de 60 bilionésimos de grau Kelvin. Assim, tal buraco negro emitiria um fluxo de partículas com temperatura muito baixa para que pudessem ser observadas com a tecnologia atual. Essa dificuldade tem direcionado recentes pesquisas na busca por sistemas análogos ao efeito Unruh

e ao efeito Hawking. O próprio Unruh suscitou a possibilidade que um análogo da radiação Hawking poderia ser observado na forma da emissão de fônons a partir de “buracos mudos” [11]. Assim como buracos negros emitem radiação por possuírem um horizonte de eventos, buracos mudos, emitiriam fônons a partir de seus “horizontes sônicos”. A observação de tal efeito seria não apenas interessante para a Matéria Condensada, mas também teria impacto imediato em várias áreas da física, tais como astrofísica [12], cosmologia [13], física de partículas [14], gravidade quântica [15] e informação quântica relativística [16]. Posteriormente à descoberta dos “buracos mudos”, as potencialidades dos análogos gravitacionais em condensado de Bosen-Einstein [17], circuitos supercondutores [84], armadilhas de ions [19] e fibra ótica [20] iniciaram um fase de contínuo florescimento na busca por evidências do efeito Unruh e da radiação Hawking.

Além do exposto acima, a última década testemunhou um interesse crescente também na análise de sistemas quânticos relativísticos a partir da perspectiva da teoria da informação quântica [21–23]. Este interesse recai não somente sobre os fundamentos de ambas as teorias, mas essa discussão torna-se relevante devido às novas tendências de implementação de protocolos de informação quântica em escala global [24–28]. Desenvolvimentos no sentido de compreender como o movimento realtivo afeta os recursos quânticos, como emaranhamento e não-localidade, foram alcançados [29, 30]. Esta abordagem lançou base para a chamada informação quântica relativística, uma área da física que estuda os efeitos relativísticos em diversos contextos conhecidos da informação quântica, como por exemplo, nas desigualdades de Bell [31], na comunicação quântica [32], no teletransporte quântico [33] e na metrologia quântica [34]. Dentro deste contexto outra linha de pesquisa que tem sido bastante explorada na literatura é a conexão entre emaranhamento e a dinâmica do espaço-tempo em expansão. Estudos mostram que o emaranhamento entre modos de um campo escalar massivo, por exemplo, podem conter informação sobre os parâmetros cosmológicos que caracterizam a expansão do universo [35–38].

A pergunta natural ainda não respondida na literatura, parcialmente devido a complexidade de solução analítica, é como um ambiente ou interações afetam as correlações quânticas ao longo da evolução do universo. O papel das interações é evidentemente importante à medida que novos fenômenos podem ocorrer, como uma competição entre a produção de multipartículas do vácuo pela interação e a termalização gerada pela dinâmica do espaço-tempo [39, 40]. Neste contexto, a interação leva o sistema em direção ao equilíbrio, enquanto a expansão do espaço-tempo desvia o sistema do equilíbrio devido a produção de entropia e a criação de partículas. Além disso, no contexto da teoria inflacionária [41, 42], existem várias trabalhos que apontam como os diferentes aspectos da transição quântico para a clássica das flutuações quânticas do inflaton são produzidas e favorecidos quando o inflaton interage

com outros campos [43–45]. Portanto, se faz necessário quantificar e compreender o efeito de auto-interações e interações entre campos quânticos sobre a geração de partículas, de entropia e de emaranhamento em espaços-tempos dinâmicos. Essa é a principal motivação para esta tese de doutorado.

A dissertação está organizada da seguinte maneira. No capítulo 2, apresentamos uma breve revisão sobre os conceitos básicos da informação quântica, a saber, a entropia de von Neumann, a negatividade logarítmica, o emaranhamento e o teletransporte quântico. Estes conceitos são úteis praticamente durante todo o desenvolvimento desta dissertação. No capítulo 3, apresentamos o formalismo básico da Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos. Em particular, discutimos a quantização dos campos escalares e fermiônicos num espaço-tempo em expansão com duas regiões estacionárias, uma no passado distante e outra no futuro assintótico. Também discutimos uma aproximação perturbativa para calcular os coeficientes de Bogoliubov, com o objetivo de quantificar os efeitos do acoplamento não-mínimo sobre a criação de partículas. Em seguida, motivados pelas tendências atuais de se implementar protocolos de informação quântica em escala global, estudamos o efeito da dinâmica do espaço-tempo em expansão sobre uma tarefa particular de informação quântica, o teletransporte quântico. Além disso, discutimos como uma auto-interação $\lambda\phi^4$ afeta a quantidade de informação codificada no emaranhamento gerado entre os modos de um campo escalar depois do período de expansão. Por fim, estudamos dois campos escalares emaranhados via uma interação mútua no espaço-tempo em expansão. Neste caso, calculamos a negatividade logarítmica em primeira ordem na constante de acoplamento e mostro que no limite de expansão suave a interação contribui significativamente para a sobrevivência das correlações quânticas no futuro assintótico. Finalmente, no capítulo 5, apresentamos conclusões e algumas perspectivas do nosso trabalho.

Capítulo 2

Informação Quântica

A informação quântica é uma área de pesquisa em que são estudados métodos para armazenar, transmitir e quantificar a informação contida em sistemas quânticos. Nas últimas décadas, ela teve um desenvolvimento acelerado motivado pelas perspectivas de aplicações tecnológicas na computação, comunicação e criptografia. O principal personagem deste desenvolvimento é uma propriedade dos sistemas quânticos chamada de emaranhamento ou entrelaçamento. Este tem emergido como fonte indispensável para a realização de tarefas da informação quântica, como por exemplo: criptografia quântica [46], teletransporte quântico [47, 70], codificação superdensa [49, 50], computação quântica [51, 52], entre outros. Além disso, uma boa parte dos esforços para o desenvolvimento da Informação Quântica, estão voltados para a geração, caracterização e transmissão de estados emaranhados.

Neste capítulo preliminar, vamos brevemente revisar os conceitos básicos da teoria da informação quântica. Nosso objetivo é apresentar conceitos que serão importantes no decorrer desta dissertação. Na seção 2.1, vamos introduzir os conceitos fundamentais, como o conceito de operador densidade, sistema composto e traço parcial. A seção 2.2 é reservada para o estudo do emaranhamento e sua caracterização. Em especial vamos introduzir o conceito de emaranhamento e apresentar algumas medidas usadas para quantificar o emaranhamento em sistemas bipartidos. Vale ressaltar que muitos dos conceitos e ideias que vamos introduzir nesta seção pode ser generalizado para sistemas mais complicados, tal como estados multipartidos. Em seguida, na seção 2.3, estudaremos o funcionamento do protocolo de teletransporte quântico entre dois observadores inerciais.

2.1 Conceitos fundamentais

2.1.1 Operador densidade

Na descrição mais simples da Teoria Quântica, todo sistema quântico está associado a um espaço de estados que é um caso especial de espaço vetorial complexo, completo e dotado de produto interno. Este espaço de estados é também conhecido como espaço de Hilbert. Para mais informações sobre o espaço de Hilbert e sua associação com sistemas quânticos, veja as referências [53–55].

A forma mais geral de representar matematicamente um estado quântico é por meio de um operador densidade $\hat{\rho}$ definido no espaço de Hilbert \mathcal{H} associado ao sistema que ele descreve. O operador densidade é definido segundo as condições:

- Hermiticidade: $\hat{\rho}$ é hermitiano, ou seja, $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$, onde $\hat{\rho}^\dagger$ é o operador adjunto de $\hat{\rho}$.
- Positividade: $\hat{\rho}$ é positivo semi-definido, ou seja, $\text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\rho}) \geq 0$ para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, onde $\text{Tr}()$ denota traço.
- Normalização: $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 1$.
- Idempotência: $\hat{\rho} = \hat{\rho}^2$. $\hat{\rho}$ é um operador projeção, e portanto seus possíveis autovalores são 1 e 0.

Todo operador densidade pode ser escrito como combinação convexa de projetores unidimensionais

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2.1)$$

onde $\sum_i p_i = 1$. Esta descomposição consiste de uma mistura estatística de estados quânticos, ou seja, o estado do sistema pode ser algum dos estados quânticos $|\psi_i\rangle$ com probabilidades clássicas $p_i > 0$. Um estado com esta característica é dito misto. O fato é que a decomposição (2.1) não é única. Isso significa que o estado misto pode ser preparado por diferentes caminhos. Por exemplo, o estado $\hat{\rho} = \text{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pode ser preparado escolhendo aleatoriamente os estados $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ou os estados $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, onde $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$. Um contraexemplo de estado misto é o estado puro definido por um único projeto unidimensional, isto é, $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Para distinguir entre estados puros e misturas estatísticas, basta utilizar o fato:

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) \begin{cases} = 1 & \text{se o estado é puro,} \\ < 1 & \text{se o estado é misto.} \end{cases}$$

2.1.2 Sistema composto

Um sistema quântico composto é formado por duas ou mais partes que possam ser separadamente acessadas por meio de operações locais. O espaço de Hilbert associado a um sistema composto de duas ou mais partes é formado pelo produto tensorial dos espaços associados aos subsistemas. Um sistema bipartido, por exemplo, tem associado a si o espaço $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, onde \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B são os espaços de Hilbert associados aos subsistemas.

Seja $\{|i_A\rangle, |j_B\rangle\}$ uma base ortonormal de \mathcal{H}_{AB} . Qualquer estado puro de \mathcal{H}_{AB} pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{d_A} \sum_{j=1}^{d_B} c_{ij} |i_A\rangle \otimes |j_B\rangle, \quad \sum_{ij} |c_{ij}|^2 = 1, \quad (2.2)$$

onde d_A e d_B são as dimensões dos espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente. Vale ressaltar que, de acordo com o teorema da decomposição de Schmidt [56], podemos escrever o estado $|\psi\rangle$ na forma

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^d c_i |i'_A\rangle \otimes |i'_B\rangle, \quad (2.3)$$

com $d = \min\{d_A, d_B\}$, $c_i \geq 0$ e $\sum_i |c_i|^2 = 1$. Os coeficientes c_i são chamados de *coeficientes de Schmidt* e as bases $|i'_A\rangle$ e $|i'_B\rangle$ são *bases de Schmidt* para o estado $|\psi\rangle$.

2.1.3 Traço parcial

O traço parcial é uma operação quântica que representa o descarte de partes de um sistema composto. Toma-se o traço parcial a fim de obter o operador densidade reduzido do subsistema de interesse. Por exemplo, considere um sistema quântico bipartido no estado

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_{ij} \sum_{i'j'} c_{ii'jj'} |i_A\rangle \langle j_A| \otimes |i'_B\rangle \langle j'_B|, \quad (2.4)$$

onde $|i, i'\rangle \equiv |i\rangle \otimes |i'\rangle$ e $\{|i\rangle\}$ e $\{|i'\rangle\}$ são bases ortonormais dos espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente. O estado reduzido $\hat{\rho}_A$ do sistema A é obtido tomando o traço parcial sobre

os outros subsistemas:

$$\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho}_{AB}) = \sum_{ij} \sum_{i'} c_{ii'j'} |i_A\rangle \langle j_A|, \quad (2.5)$$

onde o traço parcial é denotado por:

$$\text{Tr}_B(\hat{\rho}_{AB}) = \sum_{i'} \langle i'_B | \hat{\rho}_{AB} | i'_B \rangle.$$

De forma análoga, o estado reduzido $\hat{\rho}_B$ do sistema B é

$$\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A(\hat{\rho}_{AB}) = \sum_i \sum_{i'j'} c_{ii'j'} |i'_B\rangle \langle j'_B|, \quad (2.6)$$

neste caso, o traço parcial é denotado por:

$$\text{Tr}_A(\hat{\rho}_{AB}) = \sum_i \langle i_A | \hat{\rho}_{AB} | i_A \rangle.$$

Segue-se diretamente do fato de $\hat{\rho}_{AB}$ ser um operador densidade sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H}_{AB} que $\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_B$ também são operadores densidade, isto é, operadores positivos de traço unitário sobre os espaços de Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B , respectivamente. É importante ressaltar que, em geral, o operador densidade reduzido é uma mistura estatística da forma de (2.1).

2.2 Emaranhamento e sua caracterização

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen publicaram na revista “*Physical Review*” o artigo intitulado “A descrição da realidade física fornecida pela mecânica quântica pode ser considerada completa?” [57]. Nele, pautados no princípio da superposição, na hipótese de realismo e na impossibilidade de comunicação superluminal, Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) concluíram que a mecânica quântica seria uma teoria incompleta. Inspirado neste trabalho, Schrödinger propôs um experimento mental para melhor ilustrar o paradigma de EPR [58]. No experimento mental, Schrödinger apresentou sua famosa metáfora do gato dentro de uma caixa lacrada, onde a vida ou morte do gato é dependente do estado de uma partícula subatômica (átomo). De acordo com Schrödinger, o princípio da superposição implica que o estado do sistema composto pelo gato e pelo átomo é

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle|\text{vivo}\rangle + b|1\rangle|\text{morto}\rangle, \quad (2.7)$$

onde $|0\rangle$ é o estado fundamental do átomo, $|1\rangle$ é o estado excitado do átomo, $|\text{vivo}\rangle$ é o estado do gato vivo, $|\text{morto}\rangle$ é o estado do gato morto e $|a|^2$ e $|b|^2$ são as probabilidades de o átomo não decair e decair, respectivamente. Foi no transcurso deste experimento que

Schrödinger introduziu na física o termo alemão “*Verschränkung*”, que significa em português emaranhamento ou entrelaçamento.

Atualmente, além dos aspectos qualitativos, o emaranhamento é visto como um importante recurso para processamento de informação quântica. Esse recurso permite a realização de tarefas que são impossíveis de serem executadas por meio de recursos clássicos. Um exemplo de tarefa eminentemente quântica e que será exposta mais à frente é o teletransporte quântico proposto no artigo [47].

2.2.1 Emaranhamento de estados puros

O emaranhamento é uma propriedade de sistemas físicos compostos por dois ou mais subsistemas. Em particular, pode haver emaranhamento entre dois átomos, entre dois spins, entre a polarização de dois fótons etc. Além disso, pode haver emaranhamento entre diferentes graus de liberdade de uma única partícula, por exemplo, o momentum de um átomo pode se emaranhar com seu spin pela interação com um campo magnético.

Um dos exemplos mais conhecidos de estado emaranhado é o estado singlete

$$|\Psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow_1, \downarrow_2\rangle + |\downarrow_1, \uparrow_2\rangle], \quad (2.8)$$

onde o fator $\sqrt{2}$ aparece por questões de normalização e $|\uparrow_1, \downarrow_2\rangle$ representa o estado da partícula 1 com spin para cima e o estado da partícula 2 com spin para baixo com respeito ao eixo z. Esse estado é obtido a partir do decaimento de uma partícula de spin-0 em um par de partículas de spin-1/2, conforme a figura 2.

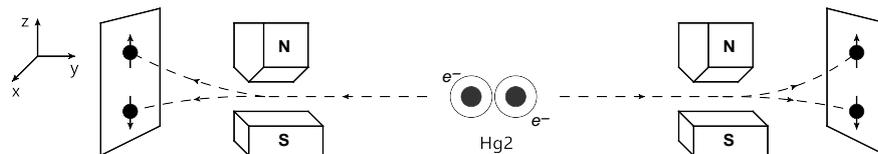


Figura 2: Um sistema composto formado por duas partículas com spin 1/2 (molécula de Hg2) é dividido por um campo externo. As duas partículas de spin 1/2 são separadas em direções opostas e ambas passam através de aparatos de Stern-Gerlach orientados ao longo do eixo z.

Vamos agora tentar escrever o estado (2.8) como um produto tensorial entre dois estados de uma única partícula.

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{12} &= (a|\uparrow_1\rangle + b|\downarrow_1\rangle) \otimes (c|\downarrow_2\rangle + d|\uparrow_2\rangle), \\ &= ac|\uparrow_1, \downarrow_2\rangle + ad|\uparrow_1, \uparrow_2\rangle + bc|\downarrow_1, \downarrow_2\rangle + bd|\downarrow_1, \uparrow_2\rangle \end{aligned} \quad (2.9)$$

com $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$. Note que não existem coeficientes a, b, c e d que compatibilizem as equações (2.8) e (2.9). Isso implica que o estado (2.8) não pode ser visto como estado de dois sistemas separados, ou seja, as duas partículas estão num estado emaranhado, e sua realidade só pode ser entendida admitindo que elas formam um todo único, mesmo quando estão separadas espacialmente.

A interpretação física desse resultado é bastante simples. Considere que num determinado instante inicial uma molécula de Hg_2 é dividida pela ação de um campo externo. Em seguida as duas partículas de spin $1/2$ (átomos) são separadas em direções opostas e o spin de cada partícula é medido em um aparato de Stern-Gerlach, como mostra a figura 2. Ao realizarmos uma medição sobre a primeira partícula, partícula indo para a esquerda na figura 2, podemos encontrar a partícula com spin para cima ou para baixo com igual probabilidade, o mesmo ocorre se fizermos uma medição sobre a segunda partícula, partícula indo para a direita na figura 2. Contudo, mesmo que essas partículas estejam a quilômetros de distância, se o resultado da medição na primeira partícula for spin para cima, então o da segunda partícula será spin para baixo e vice-versa. Existe, portanto, uma correlação não-local entre essas medições. Em certo sentido, isso sugere que ambas as partículas permanecem em contato através do espaço e do tempo e que é impossível atribuir propriedades locais (ou realidade física local) a cada partícula.

O estado singlete (2.8) é um caso de emaranhamento bipartido, isto é, emaranhamento entre dois subsistemas. Quando lidamos com mais de dois subsistemas podemos ter emaranhamento multipartido. Em particular, para três subsistemas temos emaranhamento tripartido. Um exemplo dessa classe de emaranhamento é o estado proposto por Greenberger, Horne e Zeilinger [59], mais conhecido como estado GHZ:

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle). \quad (2.10)$$

É importante ressaltar que o emaranhamento também pode ser encontrado em sistemas descritos por estados de variáveis contínuas. Um exemplo famoso dessa classe de emaranhamento é o estado comprimido de dois modos

$$|\psi(r)\rangle = \frac{1}{\cosh(r)} \sum_{n=0}^{\infty} \tanh^n(r) |n\rangle_1 \otimes |n\rangle_2, \quad (2.11)$$

onde $|n\rangle$ é o n -ésimo estado de Fock e $r > 0$ é o parâmetro de compressão. Em Ótica Quântica, este tipo de estado é produzido a partir de um processo de amplificação paramétrica não-degenerado [83]. Veremos mais adiante que estados comprimidos de dois modos também podem ser gerados depois do período de expansão do espaço-tempo, além

disso, veremos que o emaranhamento entre os modos guarda informação sobre a história da expansão do espaço-tempo.

Com base no exposto acima, podemos definir o emaranhamento para estados puros dizendo o que não é um estado emaranhado:

Definição 1. Um sistema físico multipartido, cujo o espaço de Hilbert é $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$, onde \mathcal{H}_i é o espaço de Hilbert associado a cada subsistema, não está emaranhado se, e somente se, podemos escrever o estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ como um estado produto

$$|\psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^n |\psi_i\rangle, \quad (2.12)$$

onde $|\psi\rangle_i \in \mathcal{H}_i$ e o símbolo $\bigotimes_{i=1}^n |\psi\rangle_i$ representa o produto tensorial dos vários estados de cada subsistema, ou seja, $\bigotimes_{i=1}^n |\psi\rangle_i = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\psi\rangle_n$. O mesmo vale para $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$, onde agora temos o produto tensorial dos espaços de Hilbert de cada subsistema.

2.2.2 Entropia de von Neumann

Na Termodinâmica, a entropia é vista como o grau de aleatoriedade em um sistema físico, ou seja, quanto maior a “desordem”, maior a alteração do estado do sistema e, consequentemente, maior será o grau de entropia. Este conceito foi reinterpretado com o surgimento do que é hoje conhecido como teoria de informação, ou seja, na teoria de informação, a entropia está associada ao grau de incerteza de uma variável aleatória antes de sua medição. Por exemplo, a entropia associada a uma variável aleatória \mathbf{X} , com distribuição de probabilidade p_j , é definida como

$$H(\mathbf{X}) = - \sum_{j=1}^n p_j \log_2 p_j, \quad (2.13)$$

onde o logaritmo na base 2 é usado por conveniência e por convenção $0 \log_2 0 = 0$. Esta quantidade foi introduzida por Claude Shannon em [61, 62], e é denominada de entropia de Shannon. A grosso modo, a entropia de Shannon pode ser interpretada como a quantidade de informação ganha ao se descobrir o valor da variável aleatória \mathbf{X} .

Posteriormente, a teoria de Shannon foi então estendida para o mundo quântico, com a entropia de Shannon sendo substituída pela entropia de von Neumann [63, 64]. De acordo com von Neumann, a entropia de um sistema quântico no estado $\hat{\rho}$ é definida como

$$S(\hat{\rho}) = -\text{Tr}(\hat{\rho} \log_2 \hat{\rho}) = - \sum_j^d \lambda_j \log_2 \lambda_j, \quad (2.14)$$

onde d é a dimensão do espaço de Hilbert \mathcal{H} , λ_j são os autovalores de $\hat{\rho}$ e $|j\rangle \in \mathcal{H}$ é uma base ortonormal de autovetores de $\hat{\rho}$. Ou seja, a entropia de von Neumann é a entropia de Shannon da distribuição de probabilidades dada pelos autovalores de $\hat{\rho}$. Além disso, a entropia de von Neumann é uma medida do grau de incerteza (ou mistura) associado ao estado quântico $\hat{\rho}$. Ela também é considerada um excelente quantificador de informação (2.14).

Outro ponto importante a se mencionar sobre a entropia de von Neumann é que ela satisfaz uma série de propriedades interessantes:

- A entropia de von Neumann $S(\hat{\rho})$ é nula se, e somente se, $\hat{\rho}$ é puro, ou seja, $S(\hat{\rho}) = 0$ implica que $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$, onde $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.
- A entropia de von Neumann assume valor máximo e igual a $\log_2 N$, quando o estado é maximalmente misto num espaço de Hilbert de dimensão N . Por exemplo, $S(\hat{\rho}) = \log_2 N$ para $\hat{\rho} = \frac{1}{N}\mathbb{1}$.
- A entropia de von Neumann é uma função côncava: $S(\sum_i \lambda_i \hat{\rho}_i) \geq \sum_i \lambda_i S(\hat{\rho}_i)$.
- A entropia de von Neumann $S(\hat{\rho})$ é invariante sobre mudança de base de $\hat{\rho}$, isto é, $S(\hat{\rho}) = S(U\hat{\rho}U^\dagger)$, onde U é uma transformação unitária.
- A entropia de von Neumann é subaditiva. Por exemplo, sejam A e B dois sistemas quânticos distintos descritos pelo operador densidade $\hat{\rho}_{AB}$. Então a entropia conjunta desse sistema satisfaz a desigualdade

$$S(\hat{\rho}_{AB}) \leq S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B), \quad (2.15)$$

onde $\hat{\rho}_A = \text{Tr}_B(\hat{\rho})$ e $\hat{\rho}_B = \text{Tr}_A(\hat{\rho})$. A igualdade vale apenas se $\hat{\rho} = \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$. Neste caso, a entropia $S(\hat{\rho})$ corresponde a: $S(\hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B) = S(\hat{\rho}_A) + S(\hat{\rho}_B)$.

Além do exposto acima, a entropia de von Neumann desempenha um papel fundamental em informação quântica, pois ela pode ser usada para quantificar o grau de emaranhamento de estados puros bipartidos. Além disso, ela formaliza a relação entre informação e emaranhamento. Por exemplo, considere o estado puro bipartido $\hat{\rho}_{12}$

$$\hat{\rho}_{12} = |\psi\rangle_{12}\langle\psi|. \quad (2.16)$$

A decomposição de Schmidt (2.3) nos permite escrever $\hat{\rho}_{12}$ como

$$\hat{\rho}_{12} = \sum_{i=1}^d \sum_{i'=1}^d c_i c_{i'}^* |i_1\rangle\langle i'_1| \otimes |i_2\rangle\langle i'_2|. \quad (2.17)$$

Logo, a entropia de von Neumann dos operadores densidades reduzidos $S(\hat{\rho}_1)$ e $S(\hat{\rho}_2)$ correspondem a

$$S(\hat{\rho}_1) = -\text{Tr}(\hat{\rho}_1 \log_2 \hat{\rho}_1) = -\sum_{i=1}^d |c_i|^2 \log_2 |c_i|^2, \quad (2.18)$$

onde $\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2(\hat{\rho}_{12})$. De forma análoga, temos que

$$S(\hat{\rho}_2) = -\text{Tr}(\hat{\rho}_2 \log_2 \hat{\rho}_2) = -\sum_{i=1}^d |c_i|^2 \log_2 |c_i|^2, \quad (2.19)$$

onde $\hat{\rho}_1 = \text{Tr}_2(\hat{\rho}_{12})$. Nota-se que a entropia de von Neumann dos operadores densidades reduzidos $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$ são iguais e dependem unicamente dos coeficientes de Schmidt c_i . Isso sugere que a entropia de von Neumann quantifica o grau de emaranhamento do estado bipartido $|\psi\rangle_{12}$ a partir do grau de mistura dos estados reduzidos $\hat{\rho}_1$ e $\hat{\rho}_2$. Isso demonstra um importante aspecto do emaranhamento, que embora possamos ter completo conhecimento de um sistema composto, teremos menor conhecimento sobre seus subsistemas.

Por fim, é importante ressaltar que a entropia de von Neumann aplica-se apenas para medir o emaranhamento no caso de estados puros. Para quantificar emaranhamento em estados mistos faz-se necessário definir outros tipos de medidas.

2.2.3 Emaranhamento de estados mistos

Para estados mistos precisamos de outra definição de emaranhamento que obviamente deve se reduzir a definição anterior para estados puros:

Definição 2. Um estado misto $\hat{\rho}$ que descreve um sistema cujo o espaço de estados é dado por $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n$ é dito ser emaranhado quando não pode ser escrito como

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j \hat{\rho}_1^j \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_n^j, \quad \sum_j p_j = 1, \quad (2.20)$$

onde $p_j > 0$ corresponde a probabilidade clássica do estado j .

Como exemplo de estado misto separável temos

$$\hat{\rho}_{ab} = \frac{1}{2}(|0_a 1_b\rangle\langle 0_a 1_b| + |1_a 1_b\rangle\langle 1_a 1_b|), \quad (2.21)$$

pois podemos escrever na forma fatorável da equação (2.20)

$$\hat{\rho}_{ab} = \frac{1}{2}[(|0_a\rangle\langle 0_a| + |1_a\rangle\langle 1_a|) \otimes |1_b\rangle\langle 1_b|]. \quad (2.22)$$

Os estados assim preparados, em geral, exibem correlações. Entretanto, essas correlações são

clássicas. Por isso, estados desse tipo são classificados como classicamente correlacionados.

No caso dos estados puros, a decomposição de Schmidt fornecia um critério suficiente e necessário para a separabilidade. Infelizmente uma elegante decomposição não existe no caso de estados mistos. Por isso, varios critérios de separabilidade têm sido desenvolvido em ordem para detectar emaranhamento em estados mistos. O mais proeminente critério de separabilidade é a critério de Peres-Horodecki [65].

Tal critério parte da seguinte observação: Se o estado $\hat{\rho}$ de um sistema composto é emaranhado, então sua transposta parcial¹ $\hat{\rho}^T$ é não-positiva, em outras palavras, a transposta parcial viola a propriedade de positividade dos operadores densidades. Na prática, basta observar se a transposta parcial possui algum autovalor negativo para ser emaranhado. Por exemplo, considere o estado misto proposto por Wener [66],

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_W &= \frac{1}{8}\mathbb{1} + \frac{1}{4}[|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01|], \\ &= \frac{1}{8}[|00\rangle\langle 00| + 3|01\rangle\langle 01| + 3|10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| - 2|01\rangle\langle 10| - 2|10\rangle\langle 01|],\end{aligned}\quad (2.23)$$

onde $\mathbb{1}$ corresponde a matriz identidade

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|. \quad (2.24)$$

A transposição parcial de $\hat{\rho}_W$ sobre o segundo subsistema, isto é, trocar linhas por colunas, é dada por

$$\hat{\rho}_W^T = \frac{1}{8}[|00\rangle\langle 00| + 3|01\rangle\langle 01| + 3|10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| - 2|00\rangle\langle 11| - 2|11\rangle\langle 00|], \quad (2.25)$$

com autovalores $\{\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\}$. Como o estado $\hat{\rho}_W$ possui pelo menos um autovalor negativo após a transposição parcial, de acordo com o critério de Peres, podemos concluir que $\hat{\rho}_W$ é um estado misto emaranhado. É importante salientar que critério de Peres é suficiente para sistemas bipartido de dimensionalidade 2×2 e 2×3 . Em grandes dimensões foi mostrado em [67] que existem estados emaranhados com transposta parcial positiva. Esses estados possuem emaranhamento preso (do inglês *bound entanglement*).

¹Em um sistema composto a transposta parcial é obtida realizando uma operação de transposição sobre um dos subsistemas.

2.2.4 Negatividade logarítmica

Baseado no critério de separabilidade de Peres várias medidas tem sido propostas para a quantificação do emaranhamento em estados mistos. Nesta dissertação vamos usar a definição de negatividade logarítmica para este fim.

A negatividade logarítmica é uma medida de emaranhamento que quantifica a violação do critério de Peres apresentado acima. Ela é definida como

$$E_{\mathcal{N}}(\hat{\rho}) = \log[1 + 2\mathcal{N}(\hat{\rho})], \quad (2.26)$$

onde $\mathcal{N}(\hat{\rho})$ corresponde a soma dos autovalores negativos da transposta parcial:

$$\mathcal{N}(\hat{\rho}) = \max\{0, -\sum_k \lambda_k^-\}, \quad (2.27)$$

com λ_k^- sendo os autovalores negativos. Note que se a transposta parcial é positiva $\hat{\rho}^{\text{PT}} \geq 0$, a negatividade é igual a zero. Já se a transposta parcial têm um ou mais autovalores negativos, isto é, $\mathcal{N}(\hat{\rho}) > 0$, a negatividade logarítmica $E_{\mathcal{N}}(\hat{\rho})$ será diferente de zero [68, 69].

Por exemplo, já sabemos que o estado de Wener (2.23) é um estado emaranhado, mas agora através da negatividade logarítmica podemos saber o quanto esse estado possui de emaranhamento. Como único autovalor negativo da transposta parcial de (2.23) é igual a $-\frac{1}{8}$. Assim, a negatividade logarítmica é dada por: $E_{\mathcal{N}}(\hat{\rho}) = 0,223$.

2.3 Teletransporte quântico

O teletransporte quântico foi teoricamente proposto em 1993 por Charles Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres e William Wootters em um artigo intitulado “Teletransportando um estado quântico desconhecido através de canais clássicos e do tipo Einstein-Podolsky-Rosen” [47]. Nele, os autores mostraram a possibilidade de transmitir o estado quântico de uma partícula (fotón ou elétron, por exemplo) de um determinado lugar para outro através de dois canais de comunicação, um clássico e outro quântico ².

Desde o surgimento do protocolo de teletransporte de Bennett *et. al.* [47], várias implementações tanto teóricas como experimentais foram propostas, por exemplo, algumas usando estados de polarização de um fóton [70], átomos de dois níveis [71], estados internos de íons armadilhados [72, 73], circuitos supercondutores [74, 75] etc . Além disso, muitos

²Aqui entende-se por canal clássico tudo o que se usa normalmente para transmitir a informação clássica, por exemplo, cabos elétricos, fibras óticas, etc. Já por canal quântico, entende-se qualquer sistema emaranhado que possa ser empregado na implementação do protocolo

esforços tem sido feitos para implementar o protocolo de teletransporte em distâncias cada vez maiores. Recentemente, pesquisadores Australianos estabeleceram um recorde ao teleportar informações a uma distância de 143 km [76]. “O passo seguinte será conseguir o teletransporte com um satélite em órbita, para demonstrar que a comunicação quântica é possível em escala global”, comenta Rupert Ursin, um dos autores do artigo.

2.3.1 O protocolo de teletransporte

O protocolo de teletransporte descrito em [47] funciona da seguinte maneira: Considere a presença de dois observadores, Alice e Bob, e canais de comunicação pelos quais a informação, tanto clássica quanto quântica, possa fluir livremente entre eles.

Vamos supor que Alice tenha uma partícula no estado quântico $|\phi_1\rangle$ e deseja enviar a informação contida nesse estado para Bob. O estado quântico $|\phi_1\rangle$ desconhecido a ser teletransportado pela Alice ao Bob é escrito como:

$$|\phi_1\rangle = a|0_1\rangle + b|1_1\rangle, \quad (2.28)$$

onde a e b são coeficientes arbitrários totalmente desconhecidos para Alice e que satisfazem a relação

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (2.29)$$

Nesse exemplo, o sistema considerado é um sistema de dois níveis $|0\rangle$ e $|1\rangle$ que podem ser os estados de polarização de um fóton ou os estados de um átomo de dois níveis. No contexto de informação quântica, estados desse tipo e sua superposição representam os bits quânticos, comumente conhecidos na literatura de qubits.

Em seguida, duas partículas, 2 e 3, são produzidas num estado emaranhado

$$|\psi_{23}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0_2\rangle|0_3\rangle + |1_2\rangle|1_3\rangle]. \quad (2.30)$$

A partícula 2 é enviada para Alice e a partícula 3 é enviada para Bob, conforme figura (3). Deste modo, o estado quântico do sistema completo constituído pelas três partículas 1, 2 e 3 é descrito pelo produto direto dos estados $|\phi_1\rangle$ e $|\psi_{23}\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi_{123}\rangle &= |\phi_1\rangle|\psi_{23}\rangle \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}[|0_1\rangle|0_2\rangle|0_3\rangle + |0_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle] \\ &\quad + \frac{b}{\sqrt{2}}[|1_1\rangle|0_2\rangle|0_3\rangle + |1_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ao realizar uma medida de Bell no qubit a ser teletransportado (partículas 1) e no seu qubit do estado emaranhado compartilhado com Bob (partícula 2), Alice acopla o estado quântico da partícula 1 ao estado emaranhado das partículas 2 e 3. Desta forma, é conveniente reescrever o estado $|\psi_{123}\rangle$ na base de Bell, ou seja,

$$|\psi_{123}\rangle = \frac{1}{2} [|\phi_{12}^+\rangle(a|0_3\rangle + b|1_3\rangle) + |\phi_{12}^-\rangle(a|0_3\rangle - b|1_3\rangle) + |\psi_{12}^+\rangle(b|0_3\rangle + a|1_3\rangle) + |\psi_{12}^-\rangle(b|0_3\rangle - a|1_3\rangle)], \quad (2.32)$$

onde $\{|\phi_{12}^+\rangle, |\phi_{12}^-\rangle, |\psi_{12}^+\rangle, |\psi_{12}^-\rangle\}$ corresponde a base de Bell:

$$\begin{aligned} |\phi_{12}^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|0_1\rangle|0_2\rangle + |1_1\rangle|1_2\rangle], \\ |\phi_{12}^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|0_1\rangle|0_2\rangle - |1_1\rangle|1_2\rangle], \\ |\psi_{12}^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|0_1\rangle|1_2\rangle + |1_1\rangle|0_2\rangle], \\ |\psi_{12}^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}[|0_1\rangle|1_2\rangle - |1_1\rangle|0_2\rangle]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

É importante notar que Alice não tem controle sobre o resultado de sua medida, pois a Teoria Quântica não permite isso. Assim, após a medida de Alice, o estado que descreve o sistema completo corresponde a uma das quatro possibilidades apresentadas abaixo:

$$\begin{cases} |\phi_{12}^+\rangle(a|0_3\rangle + b|1_3\rangle), \\ |\phi_{12}^-\rangle(a|0_3\rangle - b|1_3\rangle), \\ |\psi_{12}^+\rangle(b|0_3\rangle + a|1_3\rangle), \\ |\psi_{12}^-\rangle(b|0_3\rangle - a|1_3\rangle), \end{cases} \quad (2.34)$$

onde cada um desses quatro estados possíveis tem $\frac{1}{4}$ de chance de ocorrer.

Após a realização da medida de Bell, Alice informa a Bob via canais clássicos o resultado de suas medidas, isto é, Alice envia para Bob dois bits de informação. Com esses dois bits de informação, Bob por sua vez sabe qual dos quatro estados expostos em (2.34) descreve seu qubit. Assim, ele termina o protocolo aplicando em seu qubit uma determinada operação unitária de forma tornar o estado dessa partícula idêntico ao estado da partícula 1 inicial $|\phi_1\rangle$. Vale ressaltar que a operação unitária que Bob deve implementar depende de qual dos estados de Bell Alice obteve em sua medida, conforme a tabela abaixo.

Tabela 1: A primeira coluna mostra os possíveis resultados da medida feita por Alice. A segunda coluna mostra a codificação entre Alice e Bob, a qual rotula cada estado de Bell a uma par de bits. A terceira coluna corresponde as operações unitárias que Bob deve implementar em seu qubit para finalizar o protocolo de teletransporte.

Medida de Alice	bits	Operação de Bob	Qubit de Bob
$ \phi_{12}^+\rangle$	00	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}(a 0_3\rangle + b 1_3\rangle) = \phi_1\rangle$
$ \phi_{12}^-\rangle$	01	σ_z	$\sigma_z(a 0_3\rangle - b 1_3\rangle) = \phi_1\rangle$
$ \psi_{12}^+\rangle$	10	σ_x	$\sigma_x(b 0_3\rangle + a 1_3\rangle) = \phi_1\rangle$
$ \psi_{12}^-\rangle$	11	σ_y	$\sigma_y(b 0_3\rangle - a 1_3\rangle) = i \phi_1\rangle$

Na Tabela 1 σ_x, σ_y e σ_z são as matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Elas representam o tipo de transformação unitária que Bob deve realizar para que o processo de teletransporte quântico se complete. Por exemplo, caso o estado da partícula de Bob seja $a|0_3\rangle - b|1_3\rangle$, Bob aplicará o operador σ_z que rotaciona o estado de 180 grau em torno do eixo z.

A figura abaixo ilustra de forma resumida todos os princípios teóricos do protocolo de teletransporte do estado $|\phi_1\rangle$ de Alice para Bob descrito acima.

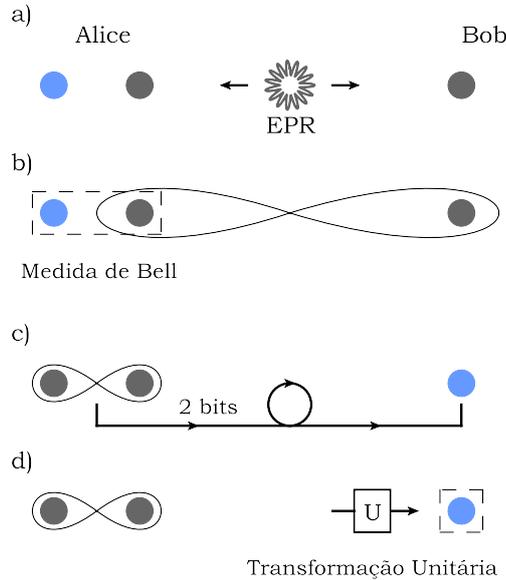


Figura 3: Ilustração de um teletransporte quântico. a) Uma fonte de partículas emaranhadas distribui suas partículas para Alice e Bob. b) Alice realiza uma medida de Bell em seus dois qubits. c) Em seguida, ela envia dois bits de informação a Bob, dizendo qual foi o resultado de sua medida. d) Após receber a mensagem de Alice, Bob implementa uma transformação unitária em seu qubit, fazendo com que seu qubit passe a ser descrito pelo estado $|\phi_1\rangle$.

É importante destacar alguns aspectos a respeito do protocolo de teletransporte quântico. Primeiro, no teletransporte, o estado $|\phi_1\rangle$ a ser teleportado é desconhecido por Alice e Bob durante todo o processo, além disso, o estado $|\phi_1\rangle$ passa a descrever a partícula 2 de Bob e a partícula 1 de Alice, no entanto, passa a ser descrita pelo estado:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_A &= \text{Tr}_{23}(|\psi_{123}\rangle\langle\psi_{123}|), \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|).\end{aligned}\tag{2.36}$$

Isso significa que depois da medida de Bell realizada por Alice o estado de sua partícula corresponde a uma mistura estatística. Este resultado está de acordo com o teorema da não-clonagem, o qual impede que a partícula de Alice e a partícula de Bob sejam descritas pelo mesmo estado $|\phi_1\rangle$. Caso isso ocorresse teríamos um “clonador” de estados quânticos, algo proibido pela teoria quântica.

Segundo, o teleporte não é instantâneo pois Bob precisa receber os dois bits de informação clássica de Alice para completar o protocolo. Sem os dois bits clássicos o teletransporte não funciona. Isso pode ser visto da seguinte forma: Se Bob não recebe a informação clássica, ou melhor, se Bob não sabe qual estado de Bell Alice mediu. Do estado $|\psi_{123}\rangle$ seu estado é calculado tomando o traço sobre todos os qubits de Alice

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_B &= \text{Tr}_{12}(|\psi_{123}\rangle\langle\psi_{123}|), \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|).\end{aligned}\tag{2.37}$$

Note que esse estado é uma mistura estatística máxima o que significa que Bob não tem nenhuma informação sobre ele. Entretanto, se Bob sabe qual estado de Bell Alice obteve, seu qubit é descrito por um dos quatro estados apresentados em (2.34). Logo, podemos concluir que Bob só pode reconstruir o estado teletransportado depois de receber a informação clássica de Alice e como a informação clássica não viaja mais rápido que a velocidade da luz, o protocolo não tem conflito com a Teoria da Relatividade.

2.3.2 A fidelidade do teletransporte

Em qualquer protocolo ideal de teletransporte o estado reconstruído por Bob é exatamente o estado quântico enviado por Alice. No entanto, sabemos que ruídos e incertezas podem afetar a “qualidade” do teletransporte através de medidas imperfeitas, do canal de comunicação clássica, da degradação do emaranhamento etc. Logo, o estado reconstruído por Bob pode não ser exatamente o estado inicial teleportado.

Para quantificar a semelhança entre os estados de entrada e de saída do teletransporte

existe uma medida denominada de fidelidade quântica F . Para um estado de entrada arbitrário $|\phi_{\text{in}}\rangle$ e um estado de saída, o estado que foi teleportado, definido pelo operador densidade $\hat{\rho}_{\text{tel}}$, a fidelidade é definida por [55, 77]

$$F = \langle \phi_{\text{in}} | \hat{\rho}_{\text{tel}} | \phi_{\text{in}} \rangle. \quad (2.38)$$

Desta forma, a fidelidade é, obviamente, igual a 1 se o estado quântico final for o estado $\hat{\rho}_{\text{tel}} = |\phi_{\text{in}}\rangle\langle\phi_{\text{in}}|$, que corresponde o caso ideal. Entretanto, se os estados quânticos forem ortogonais entre si ou se forem distinguíveis por alguma medida quântica, a fidelidade é igual a zero. É importante notar que a fidelidade é uma média sobre todos os estados da entrada, então ela mede a habilidade de se transferir de Alice para Bob uma sobreposição arbitrária e desconhecida de estados.

A fim de completar nossa análise desse protocolo, vale ressaltar que resultados com fidelidade menores que 1 ocorrem devido principalmente a imperfeições no emaranhamento, na medição de Alice e na transformação unitária de Bob. Por exemplo, quando o canal quântico não é um estado maximalmente emaranhado a fidelidade do teletransporte é reduzida. Mais adiante no capítulo 4, veremos que esta situação pode ocorrer quando o protocolo de teletransporte é realizado em um espaço-tempo em expansão.

Capítulo 3

Teoria quântica de campos no espaço-tempo em expansão

Inicialmente a teoria quântica dos campos foi concebida e formulada no espaço-tempo de Minkowski, isto é, num espaço-tempo sem curvatura. Posteriormente, na década de 70, percebeu-se que o domínio de aplicabilidade da teoria quântica de campos deveria ser estendido para o espaço-tempo curvo. Esta abordagem lançou bases para a chamada teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo ou gravitação semi-clássica. Nela, diferentes observadores definem diferentes esquemas de quantização e como consequência diferentes estados de vácuo. Desta forma, campos quânticos no espaço-tempo curvo apresentam efeitos peculiares quando comparados com campos quânticos no espaço-tempo de Minkowski [1, 78]. Em particular, uma das previsões teóricas da teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo é o fato de que partículas podem ser criadas devido a dinâmica de campos gravitacionais dependentes do tempo [9, 10] ou devido a presença de horizonte de eventos [6, 8, 79].

Neste capítulo vamos apresentar uma breve discussão sobre o formalismo básico da teoria quântica de campos no espaço-tempo curvo. Em particular, na seção 3.1 vamos apresentar uma breve revisão do procedimento de quantização canônica dos campos escalares e fermiônicos no espaço-tempo Minkowski. Em seguida, na seção 3.2, vamos discutir a quantização dos campos escalares e fermiônicos num espaço-tempo em expansão com duas regiões estacionárias, uma no passado assintótico e outra no futuro assintótico. Nessa seção vamos também explorar uma aproximação perturbativa para calcular os coeficientes de Bogoliubov, com o objetivo de quantificar os efeitos do acoplamento não-conformal sobre a criação de partículas. Mais adiante, no capítulo 4, vamos também investigar os efeitos do acoplamento do campo com a curvatura sobre um protocolo de teletransporte.

3.1 Quantização no espaço-tempo de Minkowski

Nesta seção vamos apresentar uma breve revisão do procedimento de quantização canônica de um campo quântico no espaço-tempo de Minkowski. Nosso objetivo é introduzir primeiramente os conceitos e notações da teoria quântica de campos no espaço-tempo de Minkowski e depois generalizá-los para o espaço-tempo em expansão na próxima seção.

3.1.1 Campo de Klein-Gordon

Por simplicidade, considere um campo escalar real massivo $\phi(x, t)$ de massa m no espaço-tempo de Minkowski com métrica

$$ds^2 = \eta^{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &= \eta^{00} dx^0 dx^0 + \eta^{11} dx^1 dx^1, \\ &= dt^2 - dx^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ é o tensor métrica de Minkowski e $\mu, \nu = \{0, 1\}$. A ação do campo $\phi(x, t)$ nesse espaço-tempo é dada por

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{M}}[\phi] &= \frac{1}{2} \int d^2x [\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2], \\ &= \frac{1}{2} \int dx dt [(\partial_t \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2 - m^2 \phi^2]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Note que a ação $S_{\mathcal{M}}[\phi]$ é invariante sobre transformação do grupo de Poincaré. Em outras palavras, (3.62) é invariante sobre translação e sobre uma transformação de Lorentz:

$$x'^\mu = x^\mu + c^\mu, \quad (3.4)$$

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (3.5)$$

onde a matrix de transformação satisfaz $\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}$.

Variando a ação com respeito ao campo ϕ e exigindo que a ação seja estacionária, ou seja, $\delta S_{\mathcal{M}}[\phi] = 0$, chegaremos a equação de movimento que descreve a propagação do campo $\phi(x, t)$

$$[(\partial_t)^2 - (\partial_x)^2 + m^2]\phi(x, t) = 0. \quad (3.6)$$

Esta equação é equação de Klein-Gordon para um campo escalar livre.

O campo $\phi(x, t)$ pode ser interpretado como um sistema físico análogo a uma coleção de osciladores harmônicos acoplados: $\phi(x, t) = \phi_x(t)$. Os osciladores podem ser desacoplados

expandindo o campo $\phi(x, t)$ na transformada de Fourier

$$\phi(x, t) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \phi_k(t), \quad (3.7)$$

onde $\phi_k(t)$ são chamados de modos normais de Fourier. Inserindo (3.7) na equação (3.6), obtemos a seguinte equação de movimento para os modos $\phi_k(t)$,

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi_k(t) + \omega_k \phi_k(t) = 0, \quad \omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}. \quad (3.8)$$

Esta equação descreve um conjunto infinito de osciladores harmônicos desacoplados, cujas soluções correspondem as ondas planas

$$u_k(t) = \frac{e^{-i\omega_k t}}{\sqrt{2\pi\omega_k}}, \quad (3.9)$$

$$u_k^*(t) = \frac{e^{i\omega_k t}}{\sqrt{2\pi\omega_k}}. \quad (3.10)$$

Desde que o espaço-tempo de Minkowski admite um vetor de Killing global do tipo tempo ∂_t ¹, as soluções u_k e u_k^* podem ser classificadas como frequência negativa e frequência positiva, respectivamente. Isso significa que elas são auto-funções do vetor de Killing ∂_t

$$\begin{aligned} \partial_t u_k &= -i\omega_k u_k, \quad \omega_k > 0, \\ \partial_t u_k^* &= i\omega_k u_k^*, \quad \omega_k > 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Um detalhe importante, é que este critério para classificar as soluções em frequência negativa e frequência positiva será o mesmo se considerarmos o tempo próprio de algum observador inercial.

Além disso, as funções modos u_k e u_k^* formam uma base ortonormal de soluções, ou seja, elas satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade

$$(u_k, u_{k'}) = \delta_{kk'}, \quad (3.12)$$

$$(u_k^*, u_{k'}^*) = -\delta_{kk'}, \quad (3.13)$$

$$(u_k, u_{k'}^*) = 0, \quad (3.14)$$

onde o produto escalar de Klein-Gordon é definido como

$$(u_k, u_{k'}) = -i \int_{\Sigma_t} dx [u_k \partial_t u_{k'}^* - u_{k'}^* \partial_t u_k], \quad (3.15)$$

com Σ_t sendo uma superfície espacial de Cauchy.

¹Os vetores de Killing estão relacionados com as simetrias do espaço-tempo. Neste caso, o vetor de Killing ∂_t expressa uma simetria de translação temporal.

3.1.2 Quantização canônica do campo de Klein-Gordon

Na quantização canônica as variáveis dinâmicas do campo são interpretadas como operadores Hermitianos no espaço de Hilbert. Além disso, no processo de quantização é importante verificar se os operadores Hermitianos são complementares ou não, ou seja, devemos verificar quais as relações canônicas de comutação que eles satisfazem [80].

O esquema padrão da quantização canônica funciona da seguinte maneira: primeiro, vamos definir operador campo como

$$\hat{\phi}(x, t) = \int dk [\hat{a}_k u_k e^{ikx} + \hat{a}_k^\dagger u_k^* e^{-ikx}], \quad (3.16)$$

onde \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger são os operadores criação e aniquilação, respectivamente. Estes operadores satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_q] = \delta_{pq}, \quad (3.17)$$

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_q] = 0, \quad (3.18)$$

$$[\hat{a}_p^\dagger, \hat{a}_q^\dagger] = 0. \quad (3.19)$$

As relações de comutação obedecidas por \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger dão suporte para as relações de comutação dos observáveis $\hat{\phi}(x, t)$ e $\hat{\Pi}(x, t)$:

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\Pi}(x', t)] = i\delta(x - x'), \quad (3.20)$$

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\phi}(x', t)] = 0, \quad (3.21)$$

$$[\hat{\Pi}(x, t), \hat{\Pi}(x', t)] = 0. \quad (3.22)$$

onde $\hat{\Pi}(x, t)$ é o momento conjugado do operador campo $\hat{\phi}(x, t)$ definido por:

$$\hat{\Pi}(x, t) = \partial_t \hat{\phi}(x, t). \quad (3.23)$$

É importante notar que as relações de comutação entre os campos devem ser calculadas no mesmo tempo.

3.1.3 Espaço de Fock para o campo de Klein-Gordon

Na representação de Heisenberg, os operadores \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger agem sobre os estados de um tipo específico de espaço de Hilbert, chamado de espaço de Fock. O espaço de Fock pode ser construído a partir do estado fundamental ou estado de vácuo $|0\rangle$. O estado de vácuo é um

estado quântico que não contém partículas e podemos definir ele como

$$\hat{a}_k|0\rangle = 0, \forall k. \quad (3.24)$$

O estado com n partículas no modo k é obtido pela operação repetida de \hat{a}_k^\dagger sobre $|0\rangle$

$$|n_k\rangle = \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (3.25)$$

De maneira similar, um estado excitado $|n_{k_1}, m_{k_2}, \dots\rangle$ com n, m, \dots números de ocupação nos modos k_1, k_2, \dots , é obtido por

$$|n_{k_1}, m_{k_2}, \dots\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!n!\dots}} [(\hat{a}_{k_1}^\dagger)^n (\hat{a}_{k_2}^\dagger)^m \dots] |0\rangle, \quad (3.26)$$

onde $|0\rangle \equiv |0_{k_1}, 0_{k_2}, \dots\rangle$.

Atuando os operadores \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger sobre o estado (3.25) encontramos

$$\hat{a}_k^\dagger |n_k\rangle = \sqrt{n+1} |(n+1)_k\rangle, \quad (3.27)$$

$$\hat{a}_k |n_k\rangle = \sqrt{n} |(n-1)_k\rangle. \quad (3.28)$$

Outro ponto importante é que os estados que formam a base do espaço de Fock são autoestados do operador número. É conveniente definir o operador número da seguinte forma:

$$\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger a_k. \quad (3.29)$$

Além disso, \hat{n}_k satisfaz a seguinte equação de autovalor:

$$\hat{n}_k |n_k\rangle = n |n_k\rangle.$$

Note que devido as simetrias do espaço-tempo de Minkowski, o esquema de quantização canônica apresentado acima é independente da escolha particular do observador inercial. Por exemplo, considere a transformação de Lorentz

$$t = \gamma(t' + vx'), \quad (3.30)$$

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad (3.31)$$

onde $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$. Assim, a equação (3.11) no sistema de coordenadas (x', t') corresponde

a

$$\begin{aligned}
\partial_{t'} u_k &= \frac{\partial x^\mu}{\partial t'} \partial_\mu u_k, \\
&= \gamma(-i\omega_k) u_k + \gamma v(ik) u_k, \\
&= -i\omega'_k u_k,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

onde $\omega'_k = \gamma(\omega_k - vk)$ é a frequência no referencial (x', t') . Vale ressaltar que este resultado pode ser encontrado para u_k^* . Observe que as definições dos modos de frequência negativa e frequência positiva são invariantes sobre transformações de Lorentz. Conseqüentemente, a expansão do operador campo na equação (3.16), a definição do estado de vácuo e a construção do espaço de Fock são equivalentes nos sistemas de coordenadas (x, t) e (x', t') .

3.1.4 Campo de Dirac

O exemplo mais proeminente de um campo fermiônico é o campo de Dirac, o qual descreve férmions com spin-1/2, tais como elétrons, prótons, quarks, etc. A equação de movimento que descreve a dinâmica de um campo fermiônico $\Psi(x, t)$ no espaço-tempo de Minkowski 4-dimensional é dada pela equação de Dirac

$$i\bar{\gamma}^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi = 0, \tag{3.33}$$

onde m é a massa e $\bar{\gamma}^\mu$ são as matrizes de Dirac no espaço-tempo Minkowski. As matrizes de Dirac satisfazem as relações de anticomutação $\{\bar{\gamma}^\mu, \bar{\gamma}^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$. Na representação quiral, as matrizes $\bar{\gamma}^\mu$ se apresentam da seguinte forma

$$\bar{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ -\sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ -\sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ -\sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

onde σ_x, σ_y e σ_z são novamente as matrizes de Pauli e I corresponde a matriz identidade

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Substituindo as matrizes $\bar{\gamma}^\mu$ na equação de Dirac, obtemos

$$(\bar{\gamma}^0 \partial_0 + \bar{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{k} - m)\Psi(x, t) = 0, \tag{3.36}$$

onde $\bar{\boldsymbol{\gamma}} = (\bar{\gamma}^1, \bar{\gamma}^2, \bar{\gamma}^3)$.

3.1.5 Quantização canônica do campo de Dirac

O esquema de quantização é análogo ao caso bosônico. No caso do campo de Dirac, vamos definir o operador campo $\hat{\Psi}(x, t)$ como

$$\hat{\Psi}(x, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{(2E_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}}} \sum_s (\hat{c}_k \psi_k^+ e^{-ikx} + \hat{d}_k^\dagger \psi_k^- e^{ikx}), \quad (3.37)$$

onde \hat{c}_k^\dagger e \hat{d}_k^\dagger são os operadores criação da partícula e da antipartícula respectivamente, enquanto que \hat{c}_k e \hat{d}_k são os operadores aniquilação. O campo de Dirac descreve partículas de spin-1/2, conseqüentemente ele deve obedecer a estatística de Fermi. Isso significa que os operadores de criação e de aniquilação satisfazem as seguintes relações de anticomutação:

$$\{\hat{c}_k, \hat{c}_{k'}^\dagger\} = \{\hat{d}_k, \hat{d}_{k'}^\dagger\} = \delta^3(k - k'),$$

onde todos os outros anticomutadores são iguais a zero. Das relações de anticomutação acima obtemos as relações de anticomutação para os operadores $\hat{\Psi}(x, t)$ e $\hat{\Pi}_\Psi(x, t)$:

$$\{\hat{\Psi}^a(x, t), \hat{\Pi}_\Psi^b(x', t)\} = \delta^{ab} \delta^3(x - x'), \quad (3.38)$$

$$\{\hat{\Psi}^a(x, t), \hat{\Psi}^b(x', t)\} = 0, \quad (3.39)$$

$$\{\hat{\Pi}_\Psi^a(x, t), \hat{\Pi}_\Psi^b(x', t)\} = 0, \quad (3.40)$$

onde o momento conjugado $\hat{\Pi}_\Psi = i\hat{\Psi}^\dagger$ e os subscritos a e b referem-se aos índices dos espinores.

As funções ψ_k^+ e $\psi_{k'}^-$ são soluções da equação de Dirac e formam um conjunto completo de soluções, isto é, elas satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$(\psi_k^+, \psi_{k'}^+) = \delta(k - k'), \quad (3.41)$$

$$(\psi_k^-, \psi_{k'}^-) = -\delta(k - k'), \quad (3.42)$$

$$(\psi_k^\pm, \psi_{k'}^\mp) = 0, \quad (3.43)$$

onde o produto escalar de Dirac é definido como

$$(\psi_k^a, \psi_k^b) = \int d\mathbf{x} \psi_k^{a\dagger} \psi_k^b. \quad (3.44)$$

As soluções ψ_k^+ e $\psi_{k'}^-$ da equação de Dirac são respectivamente:

$$\psi_k^+ = \phi_s^+(k) e^{-ikx} \quad (\text{Partícula}), \quad (3.45)$$

$$\psi_k^- = \phi_s^-(k) e^{ikx}, \quad (\text{Antipartícula}), \quad (3.46)$$

onde $\phi_s(k)$ é o espinor de Dirac no espaço dos momentos com $s = \{\uparrow, \downarrow\}$ indicando spin para cima ou spin para baixo ao longo do eixo de quantização, por exemplo, para uma partícula com momento $p^\mu = (E_{\mathbf{k}}, 0, 0, k)$ o espinor ϕ_s^+ é dado por:

$$\phi_\uparrow^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\mathbf{k}} + k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E_{\mathbf{k}} - k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad \phi_\downarrow^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{E_{\mathbf{k}} + k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sqrt{E_{\mathbf{k}} - k} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

onde $k = |\mathbf{k}|$ e os espinores satisfazem as condições de normalização

$$\phi_s^{+\dagger}(k) \bar{\gamma}^0 \phi_{s'}^+(k) = 2m \delta_{ss'}, \quad (3.48)$$

$$\phi_s^{-\dagger}(k) \bar{\gamma}^0 \phi_{s'}^-(k) = -2m \delta_{ss'}, \quad (3.49)$$

$$\phi_s^{+\dagger}(k) \bar{\gamma}^0 \phi_{s'}^-(k) = \phi_s^{-\dagger}(k) \bar{\gamma}^0 \phi_{s'}^+(k) = 0. \quad (3.50)$$

Como consequência da equação de Dirac (3.33), os espinores satisfazem a equação

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \psi_k^+ = 0, \quad (3.51)$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m) \psi_k^- = 0. \quad (3.52)$$

De maneira similar ao caso do campo escalar, as funções modos ψ_k^\pm são classificadas como soluções de frequência positiva e de frequência negativa com respeito ao vetor de Killing ∂_t para $\omega_k > 0$, ou seja, $\partial_t \psi_k^\pm = \mp i \omega_k \psi_k^\pm$.

3.1.6 Espaço de Fock para o campo de Dirac

O estado de vácuo do campo de Dirac do ponto de vista de um observador inercial é definido como

$$|0^F\rangle = \prod_{kk'} |0_k\rangle^+ |0_{k'}\rangle^-, \quad (3.53)$$

onde os índices + e - sobre os ket's são usados para indentificar os estados de vácuo da partícula e da antipartícula, respectivamente. Note que os estados de vácuo da partícula e da antipartícula são aniquilados pelos operadores \hat{c}_k e \hat{d}_k :

$$\hat{c}_k |0_k\rangle^+ = \hat{d}_{k'} |0_{k'}\rangle^- = 0.$$

Aqui o espaço de Fock usual é então construído aplicando os operadores de criação sobre o vácuo $|0^F\rangle$. Entretanto, diferentemente do campo escalar, o princípio de exclusão de Pauli

limita o número de excitações fermiônicas no espaço de Fock para $\{0, 1\}$. Dessa forma são permitidos apenas modos de excitação de uma partícula:

$$\hat{c}_k^\dagger |0_k\rangle^+ = |1_k\rangle^+, \quad (3.54)$$

$$(\hat{c}_k^\dagger)^2 |0_k\rangle^+ = 0, \quad (3.55)$$

e de maneira análoga temos para a antipartícula:

$$\hat{d}_k^\dagger |0_k\rangle^- = |1_k\rangle^-, \quad (3.56)$$

$$(\hat{d}_k^\dagger)^2 |0_k\rangle^- = 0. \quad (3.57)$$

É importante notar que assim como no caso bosônico a invariância de Lorentz da teoria no espaço-tempo de Minkowski implica que estados vetores do espaço de Fock do campo de Dirac representam o mesmo estado quântico de um sistema físico em dois diferentes referências inerciais.

3.2 Quantização no espaço-tempo em expansão

Em geral, o espaço-tempo curvo não possui uma simetria global de Poincaré, o que dificulta o esquema de quantização dos campos quânticos em espaços-tempos curvos. Além disso, não podemos definir um único estado de vácuo e a interpretação de partícula consequentemente torna-se dependente do observador.

Por simplicidade, vamos aqui nos restringir a uma importante classe de espaços-tempos hiperbólicos, os quais são descritos pela métrica de Robertson-Walker. A métrica de Robertson-Walker é uma razoável descrição do universo em expansão, que em grande escala é considerado ser homogêneo e isotrópico², ou seja, em grande escala, os aglomerados e os superaglomerados de galáxias que compõe o universo se comportam como moléculas de um gás perfeito, onde suas trajetórias são descritas por geodésicas que nunca se interceptam, ao menos que seja em um único ponto no passado ou no futuro.

O elemento de linha da métrica de Robertson-Walker é dada na forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2, \quad (3.58)$$

onde $a(t)$ é um fator de escala que caracteriza a expansão do espaço-tempo. Devido ao fato que a expansão da métrica não é vista na escala física do nosso dia-a-dia o conceito pode ser

²Isso que dizer que o Universo possui as mesmas propriedades em todos os pontos e em todas as direções do espaço. A isotropia é a invariância em relação às rotações e a homogeneidade é a invariância em relação às translações.

difícil de ser compreendido. A melhor forma de ilustrar isso é por meio da imagem de um balão inflando, conforme ilustrado na figura abaixo.

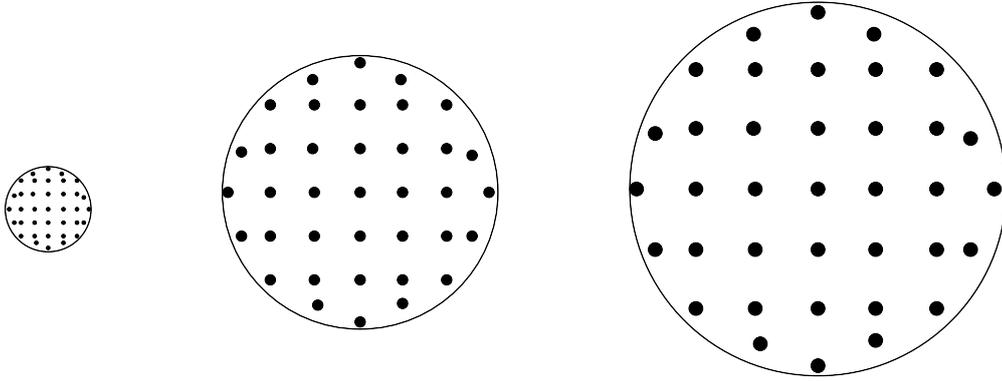


Figura 4: Ilustração da expansão do universo por meio da imagem de um balão inflando. Note que os pontos sobre a superfície do balão representam as galáxias que formam o universo e que ao inflarmos o balão esses pontos se afastam uns dos outros simulando a expansão.

Como a métrica de Robertson-Walker (3.58) é conformemente plana³, podemos escrevê-la de modo tal a explicitar esta simetria, o que, em muitos casos, facilita a obtenção das soluções das equações de movimento dos campos. Consideremos, pois, a forma conformemente plana da métrica (3.58) como:

$$ds^2 = C(\eta)(dt^2 - d\mathbf{x}^2), \quad (3.59)$$

onde $C(\eta) = a^2(\eta)$ é o fator de escala conforme e η corresponde ao tempo conforme definido por

$$\eta = \int \frac{dt}{a(t)} \quad (3.60)$$

Suponha o fator de escala $C(\eta)$ ter a seguinte forma

$$C(\eta) = 1 + \epsilon(1 + \tanh(\rho\eta)), \quad (3.61)$$

onde ϵ e ρ são os parâmetros que controlam o volume e velocidade da expansão, respectivamente. Esse fator de escala simula um espaço-tempo em expansão com duas regiões assintóticas, a saber, uma no passado distante ($\eta \rightarrow -\infty$) e outra no futuro distante ($\eta \rightarrow \infty$). Aqui vamos demonimar as regiões assintóticas, conforme a figura (5), como:

$$\begin{aligned} \text{região-in para } & (\eta \rightarrow -\infty), \\ \text{região-out para } & (\eta \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

³A métrica de Robertson-Walker (3.58) pode ser colocada na forma $g_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$.

Além disso, essas regiões assintóticas nos permiti definir o estado de vácuo e bem como o conceito de partículas do ponto de vista de um observador inercial.

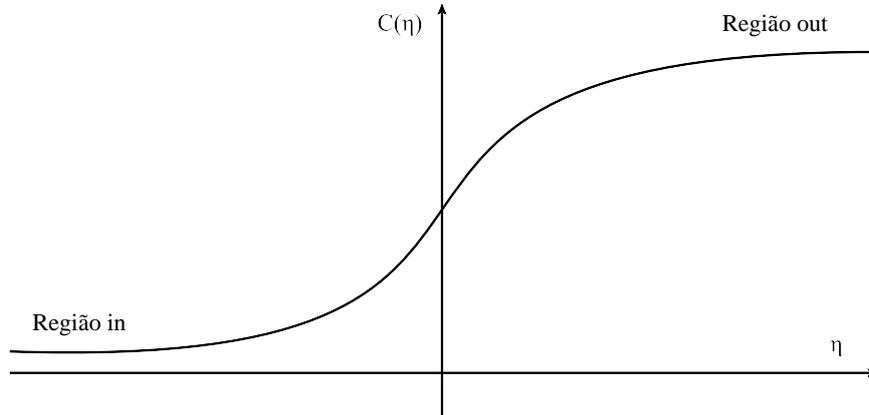


Figura 5: O fator de escala conforme $C(\eta)$ descreve um universo que sofre um período de expansão suave e possui duas regiões assintóticas quando $\eta \rightarrow \pm\infty$. Estas regiões assintóticas permiti-nos definir o estado de vácuo e bem como o conceito de partículas do ponto de vista de um observador inercial.

Nas regiões assintóticas o campo vetor ∂_η possui propriedades dos vetores de Killing. Isso significa que o procedimento de quantização dos campos nas regiões “in” e “out” é equivalente ao esquema de quantização realizado no espaço-tempo de Minkowski na seção 3.1. Desde que, os modos de frequências positiva e negativa e o conceito de partículas são bem definidos nestas regiões existe a possibilidade de calcular observáveis no futuro assintótico sabem a priori o estado do campo no passado assintótico.

3.2.1 Campo de Klein-Gordon no espaço-tempo em expansão

O comportamento de partículas relativistas que obedecem à equação de Klein-Gordon, bem como a equação de Dirac, em espaços curvos, em particular no espaço-tempo em expansão, é de considerável importância na astrofísica e cosmologia. Nesta seção vamos analisar o campo escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ no espaço-tempo descrito pela métrica de Robertson-Walker (3.59).

A ação do campo escalar na métrica de Robertson-Walker é dada por

$$S_{\mathcal{RW}}[\phi] = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\eta [(\partial_\eta \phi)^2 - (\nabla \phi)^2 - (m^2 + \xi R)\phi^2]. \quad (3.62)$$

onde ξ é o acoplamento do campo com a curvatura escalar de Ricci R . Para o caso $\xi = 0$ corresponde ao acoplamento mínimo. Já para $\xi = \frac{1}{6}$ corresponde ao acoplamento conforme. Gostariamos de ressaltar que este caso é de grande interesse no cenário cosmologia.

A equação de Klein-Gordon nas coordenadas (\mathbf{x}, η) corresponde a

$$\phi'' + 2\frac{a'}{a}\phi' - \nabla^2\phi + (m^2 + \xi R)a^2\phi = 0, \quad (3.63)$$

onde $'$ denota derivadas com respeito a η . Em termos do campo auxiliar $\chi(\mathbf{x}, \eta) \equiv a(\eta)\phi(\mathbf{x}, \eta)$ a equação (3.63) fica

$$\chi'' - \nabla^2\chi + C(\eta)[m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R]\chi = 0. \quad (3.64)$$

A expansão do campo $\chi(\mathbf{x}, \eta)$ nos modos de Fourier é dada por

$$\chi(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \chi_k(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.65)$$

Inserindo este resultado na equação (3.64), podemos encontrar a equação de movimento desacoplada para os modos $\chi_k(\eta)$:

$$\chi_k''(\eta) + [k^2 + C(\eta)(m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R(\eta))]\chi_k(\eta) = 0. \quad (3.66)$$

Note que a equação (3.66) corresponde a equação de um oscilador harmônico com a frequência dependente do tempo

$$\omega_k(\eta) \equiv \sqrt{k^2 + C(\eta)[m^2 + (\xi - \frac{1}{6})R]},$$

onde o escalar de Ricci na métrica de Robertson-Walker é dado por $R(\eta) = \frac{6a''(\eta)}{a^3(\eta)}$.

Nas regiões assintóticas o fator de escala $C(\eta)$ assume valores constantes:

$$C(\eta \rightarrow -\infty) = 1,$$

$$C(\eta \rightarrow \infty) = 1 + \epsilon.$$

Como consequência, o escalar de Ricci nessas regiões, $R(\eta \rightarrow \pm\infty)$, é igual a zero. Assim, as soluções da equação (3.66) nas regiões “in” e “out” são

$$u_k^{\text{in}}(\eta) \rightarrow \frac{e^{-i\omega_k^{\text{in}}\eta}}{\sqrt{2\omega_k^{\text{in}}}}, \quad (3.67)$$

$$u_k^{\text{out}}(\eta) \rightarrow \frac{e^{-i\omega_k^{\text{out}}\eta}}{\sqrt{2\omega_k^{\text{out}}}}, \quad (3.68)$$

onde

$$\omega_k^{\text{in}} = \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (3.69)$$

$$\omega_k^{\text{out}} = \sqrt{k^2 + (1 + 2\epsilon)m^2}. \quad (3.70)$$

As funções modos u_k^{in} e u_k^{out} podem ser classificadas como soluções de frequência positiva com respeito ao vetor de Killing ∂_η , ou seja, elas satisfazem as seguintes equações:

$$\partial_\eta u_k^{\text{in}} = -i\omega_k^{\text{in}} u_k^{\text{in}}, \quad \omega_k^{\text{in}} > 0, \quad (3.71)$$

$$\partial_\eta u_k^{\text{out}} = -i\omega_k^{\text{out}} u_k^{\text{out}}, \quad \omega_k^{\text{out}} > 0. \quad (3.72)$$

Além disso, as funções modos u_k^{in} e $u_k^{\text{in}*}$ formam uma base ortonormal de soluções na região assintótica “in”. Similarmente, as funções modos u_k^{out} e $u_k^{\text{out}*}$ formam uma base ortonormal de soluções na região assintótica “out”. Logo, podemos quantizar o campo $\chi(\mathbf{x}, \eta)$ em ambas as regiões assintóticas. Neste intuito, vamos definir o operador campo em termos de ambos os conjuntos de soluções

$$\hat{\chi}^{\text{in}}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{in}} u_k^{\text{in}*} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} u_k^{\text{in}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (3.73)$$

$$\hat{\chi}^{\text{out}}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} [\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{out}} u_k^{\text{out}*} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} u_k^{\text{out}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}], \quad (3.74)$$

onde $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{in}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}$ são os operadores criação e aniquilação que caracterizam os estado de vácuo na região-in $|0\rangle^{\text{in}}$: $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{in}}|0\rangle^{\text{in}} = 0$. Já $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger}$ são os operadores criação e aniquilação que caracterizam os estado de vácuo na região-out $|0\rangle^{\text{out}}$: $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{out}}|0\rangle^{\text{out}} = 0$.

A relação entre os modos da região-in e da região-out é dada pela transformação de Bogoliubov

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{out}} = \alpha_k \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{in}} + \beta_k \hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}, \quad (3.75)$$

onde α_k e β_k são os coeficientes de Bogoliubov definidos por: $\alpha_k = (u_k^{\text{out}}, u_k^{\text{in}})$ and $\beta_k = (u_k^{\text{out}}, u_k^{\text{in}*})$. No caso de $\beta_k \neq 0$, implica que os estados de vácuo $|0\rangle_{\text{in}}$ e $|0\rangle_{\text{out}}$ são inequivalentes. Além disso, na representação de Heisenberg o operador número na região-out $N_{\mathbf{k}}^{\text{out}} = \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$ possui um valor esperado no estado de vácuo $|0\rangle_{\text{in}}$ diferente de zero, isto é,

$${}_{\text{in}}\langle 0|N_{\mathbf{k}}^{\text{out}}|0\rangle_{\text{in}} = |\beta_k|^2. \quad (3.76)$$

Este resultado significa que ocorre produção de partículas durante a dinâmica do espaço-tempo. É importante notar que quando $m = 0$ e $\xi = \frac{1}{6}$, $\omega_k^{\text{in}} = \omega_k^{\text{out}}$, e como consequência $|\beta_k|^2 = 0$, ou seja, nenhuma partícula é gerada no futuro assintótico depois do período de expansão do espaço-tempo. Esse resultado reflete o fato que nessas condições, $m = 0$ e $\xi = \frac{1}{6}$, a teoria possui simetria conforme.

No que segue vamos explorar uma aproximação perturbativa para calcular os coeficientes de Bogoliubov. Nosso objetivo é investigar como o acoplamento do campo com a curvatura

escalar afeta o comportamento espectral do número de partículas. Nesse intuito, vamos reescrever a equação (3.66) como

$$[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2]\chi_k(\eta) + V(\eta)\chi_k(\eta) = 0, \quad (3.77)$$

onde $V(\eta)$ corresponde a

$$V(\eta) \equiv [C(-\infty) - C(\eta)]m^2 - \left(\xi - \frac{1}{6}\right)C(\eta)R(\eta). \quad (3.78)$$

Seguindo as referências [1, 81], vamos resolver a equação (3.77) por interação para baixas ordens em $V(\eta)$. Podemos pensar no problema como na teoria de espalhamento, o que significa assumir que a interação do campo gravitacional com o campo da matéria seja zero no início e no futuro distante, isto é, $V(\eta \rightarrow \pm\infty) = 0$. Desta forma, a forma integral da equação (3.77) é dada por:

$$\chi_k(\eta) = \chi_k^{in}(\eta) - \int_{-\infty}^{\infty} G_r(\eta, \eta')V(\eta')\chi_k(\eta')d\eta', \quad (3.79)$$

onde $\chi_k^{in}(\eta)$ corresponde a solução da parte livre da equação (3.77)

$$\chi_k^{in}(\eta) = \frac{e^{-i\omega_k^{in}\eta}}{\sqrt{2\omega_k^{in}}}, \quad (3.80)$$

e $G_r(\eta, \eta')$ é propagador retardado no espaço dos momentos

$$G_r(\eta, \eta') = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{-ik'_0(\eta'-\eta)}}{k'^2_0 - \bar{\omega}_k^2 - i\epsilon k'_0} dk'_0, \quad (3.81)$$

o qual também satisfaz a equação

$$[\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2] G_r(\eta, \eta') = \delta(\eta - \eta').$$

Note que a integral no momento é feita fazendo um contorno fechado semi-circular na parte superior do plano complexo.

Na região assintótica $\eta \rightarrow +\infty$, $\chi_k(\eta)$ corresponde a

$$\chi_k(\eta) \rightarrow (2\omega_k^{in})^{-\frac{1}{2}}[\alpha_k e^{-i\omega_k^{in}\eta} + \beta_k e^{i\omega_k^{in}\eta}], \quad (3.82)$$

onde os coeficientes de Bogoliubov são dados por:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 1 + \frac{i}{\sqrt{2\omega_k^{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k^{in}\eta} V(\eta) \chi_k(\eta) d\eta, \\ \beta_k &= -\frac{i}{\sqrt{2\omega_k^{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k^{in}\eta} V(\eta) \chi_k(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Para primeira ordem em $V(\eta)$ temos que

$$\chi_k(\eta) \cong \chi_k^{\text{in}}(\eta)$$

e os coeficientes de Bogoliubov tornam-se

$$\begin{aligned}\alpha_k &= 1 + \frac{i}{2\omega_k^{\text{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} V(\eta) d\eta, \\ \beta_k &= -\frac{i}{2\omega_k^{\text{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega_k^{\text{in}}\eta} V(\eta) d\eta.\end{aligned}\quad (3.84)$$

Substituindo (3.78) em (3.84) obtemos

$$\beta_k = \frac{i}{2\omega_k^{\text{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega_k^{\text{in}}\eta} [m^2\epsilon(1 + \tanh(\rho\eta)) + (\xi - \frac{1}{6})C(\eta)R(\eta)] d\eta. \quad (3.85)$$

Nota-se que o primeiro termo na equação (3.85) corresponde a

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{im^2\epsilon}{2\omega_k^{\text{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta (1 + \tanh(\rho\eta)) e^{-2i\omega_k^{\text{in}}\eta}, \\ &= \frac{im^2\epsilon\delta(2\omega_k^{\text{in}})}{\omega_k^{\text{in}}} + \frac{im^2\epsilon}{2\omega_k^{\text{in}}} f(\omega_k^{\text{in}}),\end{aligned}\quad (3.86)$$

onde

$$\begin{aligned}f(\omega_k^{\text{in}}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \tanh(\rho\eta) e^{-2i\omega_k^{\text{in}}\eta}, \\ &= \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \tanh(\tau) e^{-i\Omega\tau}, \quad \Omega \equiv \frac{2\omega_k^{\text{in}}}{\rho}.\end{aligned}\quad (3.87)$$

Observe que o termo proporcional à função delta não contribui para o resultado final de I_1 , desde que ele produz apenas um deslocamento no fator de escala [78]. Outro ponto importante é que a integral expressa por $f(\omega_k^{\text{in}})$ não é trivial devido à divergência quando $\tau \rightarrow \pm\infty$. Entretanto, podemos obter uma versão regularizada de $f(\omega_k^{\text{in}})$ fazendo $\Omega \rightarrow \Omega - i\varepsilon\kappa(\tau)$, com $\varepsilon > 0$, $\kappa(\tau) = \frac{\tau}{|\tau|}$:

$$f_\varepsilon(\Omega) = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \tanh(\tau) e^{-i\Omega\tau - \varepsilon\kappa(\tau)}. \quad (3.88)$$

Note que a integral $f_\varepsilon(\Omega)$ converge para $\tau \rightarrow \pm\infty$. Depois de uma integração por partes obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(\Omega) = -\frac{i}{\rho\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{e^{-i\Omega\tau}}{\cosh^2(\tau)}.$$

A integral acima pode ser calculada no plano complexo substituindo a variável real τ por uma variável complexa z e integrando em torno de um contorno retangular fechado no sentido

anti-horário Σ com vértices em $-R$, R , $R + \frac{i\pi}{\rho}$, $-R + \frac{i\pi}{\rho}$, conforme a figura abaixo,

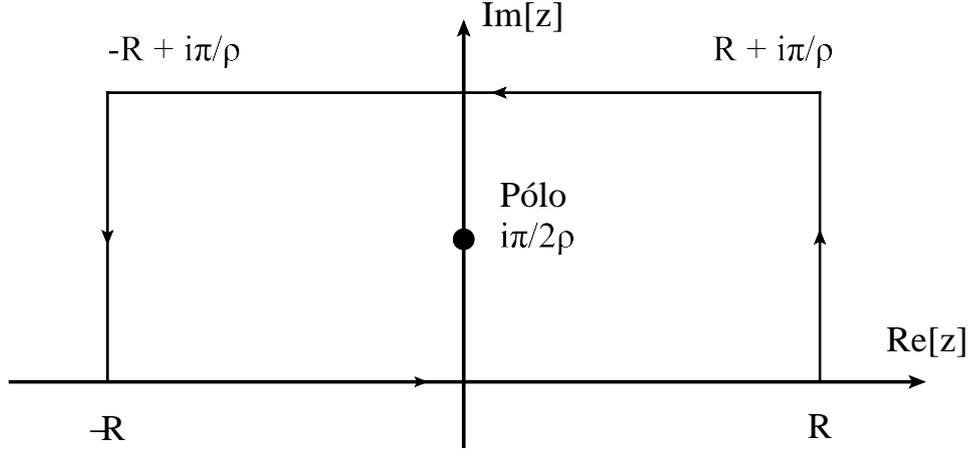


Figura 6: Ilustração do contorno Σ .

No caminho superior horizontal assumimos que $\cosh^2(\tau) = \cosh^2(\tau + i\pi)$. Enquanto que os dois caminhos verticais paralelos ao eixo imaginário desaparecem exponencialmente quando $R \rightarrow \infty$. Assim temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(\Omega) = \frac{i}{\rho\Omega} \frac{1}{e^{\Omega\pi} - 1} \oint_{\Sigma} dz \frac{e^{-i\Omega z}}{\cosh^2(z)}, \quad (3.89)$$

onde o integrando tem um pólo em $z = \frac{i\pi}{2}$. Usando a fórmula integral de Cauchy, encontramos

$$I_1 = \frac{m^2\epsilon}{2\rho\omega_k^{\text{in}}} \frac{\pi}{\sinh\left(\frac{\pi\omega_k^{\text{in}}}{\rho}\right)}. \quad (3.90)$$

De maneira semelhante podemos calcular o segundo termo na equação (3.85). Neste caso, para $\epsilon \ll 1$ temos que

$$C(\eta)R(\eta) \approx -6\epsilon\rho^2 \frac{\sinh(\rho\eta)}{\cosh(\rho\eta)} + O(\epsilon^2).$$

Usando este resultado temos a seguinte integral:

$$I_2 = -(6\xi - 1) \frac{i\epsilon\rho^2}{2\omega_k^{\text{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{\sinh(\rho\eta)}{\cosh(\rho\eta)} e^{-2i\omega_k^{\text{in}}\eta}. \quad (3.91)$$

De maneira similar a integral I_1 , podemos calcular a integral I_2 no plano complexo utilizando o mesmo contor de integração. Desta forma, encontramos o seguinte resultado

$$I_2 = (6\xi - 1) \frac{\omega_k^{\text{in}}\epsilon}{\rho} \frac{\pi}{\sinh\left(\frac{\pi\omega_k^{\text{in}}}{\rho}\right)}. \quad (3.92)$$

Por fim, inserindo os resultados de I_1 e I_2 em (3.85), podemos encontrar a expressão

resultante para o coeficiente β_k :

$$\beta_k \approx \left[\frac{m^2 \epsilon}{2\omega_k^{\text{in}} \rho} - (6\xi - 1) \frac{\omega_k^{\text{in}} \epsilon}{\rho} \right] \frac{\pi}{\sinh\left(\frac{\pi\omega_k^{\text{in}}}{\rho}\right)}. \quad (3.93)$$

Vale ressaltar que a expressão resultante de β_k corresponde a um dos resultados obtidos em nosso trabalho publicado na revista “*Europhysics letters*” [82]. De maneira análoga, podemos calcular o coeficiente α_k , onde obtemos que

$$\alpha_k \approx 1 - O(\epsilon).$$

Outro resultado importante corresponde em calcular a razão entre os coeficientes de Bogoliubov $\frac{\beta_k}{\alpha_k}$. Esse cálculo pode ser feito para primeiro ordem em ϵ :

$$\frac{\beta_k}{\alpha_k} \approx \left[\frac{m^2 \epsilon}{2\omega_k^{\text{in}} \rho} - (6\xi - 1) \frac{\omega_k^{\text{in}} \epsilon}{\rho} \right] \frac{\pi}{\sinh\left(\frac{\pi\omega_k^{\text{in}}}{\rho}\right)} + O(\epsilon^2). \quad (3.94)$$

Um detalhe importante, é que para $\omega_- \simeq \frac{m^2 \epsilon}{2\omega_k}$ e $\omega_+ \simeq \omega_k$, o primeiro termo de $\frac{\beta_k}{\alpha_k}$ coincide com $|\frac{\beta_k}{\alpha_k}|$ obtido no artigo [35].

Além dos resultados obtidos acima, podemos encontrar também o valor esperado do número de partículas no futuro assintótico:

$$\text{in} \langle 0 | N_{\mathbf{k}}^{\text{out}} | 0 \rangle_{\text{in}} = \left[\frac{m^2 \epsilon}{2\omega_k^{\text{in}} \rho} - (6\xi - 1) \frac{\omega_k^{\text{in}} \epsilon}{\rho} \right]^2 \frac{\pi^2}{\sinh^2\left(\frac{\pi\omega_k^{\text{in}}}{\rho}\right)}.$$

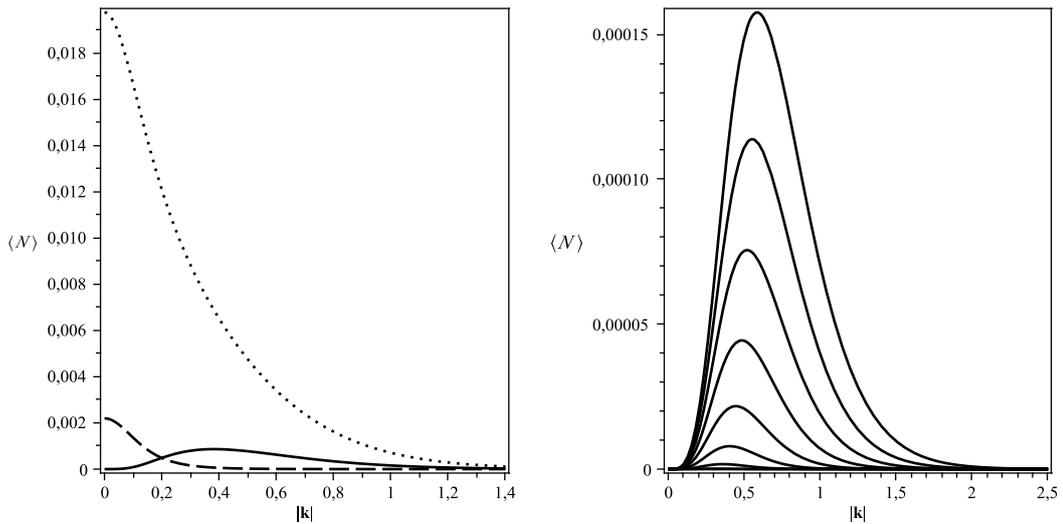


Figura 7: Número de partículas em função de k para diferentes valores de ξ . (figura da esquerda) 0 (linha pontilhada), 1/6 (linha tracejada) e 1/4 (linha sólida) com $m = 0.2$, $\rho = 1$, e $\epsilon = 0.7$ e (figura da direita) para diferentes parâmetros de expansão $\rho = 0.1 \dots 1$ com $\xi = 1/4$ e $m = \epsilon = 0.5$.

A figura (7) mostra explicitamente que a presença de uma “pequena” massa ou de um acoplamento não-mínimo a simetria conforme da teoria é quebrada, ou seja, $\beta_k \neq 0 \forall k$. Como consequência, partículas bosônicas são criadas depois do período de expansão do espaço-tempo. Isso sugere que fixando o parametro ϵ a informação sobre ρ está codificada na curva espectral do número médio de partículas.

Além disso, a figura (7) mostra que para diferentes valores do parâmetro ξ , em particular para $\xi = \frac{1}{4}$, a geração de partículas bosônicas depois do período de expansão apresenta um comportamento espectral bastante peculiar. Desta forma, podemos concluir que existe uma diferença substancial entre a física dos dois tipos de acoplamento, ou seja, o acoplamento não-mínimo guarda mais informação sobre a estrutura do espaço-tempo em expansão quando comparado com o acoplamento mínimo. Na próxima seção, vamos mostrar que esse resultado reproduz o mesmo comportamento espectral da geração de partículas fermiônicas no espaço-tempo em expansão.

3.2.2 Campo de Dirac no espaço-tempo em expansão

O procedimento de quantização do campo fermiônico em um espaço-tempo curvo é análogo ao esquema descrito para o campo escalar na seção anterior. Neste caso, a dinâmica do campo é dada pela forma covariante da equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu D_\mu + m)\Psi = 0, \quad (3.95)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu$ é a derivada covariante do campo fermiônico, com Γ_μ sendo os coeficientes de conexão spinorial. γ^μ são as matrizes de Dirac no espaço-tempo curvo e satisfazem a seguinte relação de anticomutação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (3.96)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrica do espaço-tempo.

A relação entre as matrizes de Dirac γ^μ e $\bar{\gamma}^\mu$ é dada por

$$\gamma_\mu = e_\mu^\nu \bar{\gamma}_\nu, \quad (3.97)$$

onde e_μ^ν é o campo vierbein ou tetrada. O campo vierbein consiste de um conjunto ortogonal de quatro vetores covariantes que servem como um sistema referencial local em cada ponto do espaço-tempo, tal que $g^{\mu\nu} = e_\alpha^\mu e_\beta^\nu \eta^{\alpha\beta}$. No caso particular do espaço-tempo em expansão,

o campo vierbein é dado por:

$$e^{\mu\nu} = a(\eta)\eta^{\mu\nu}. \quad (3.98)$$

Desde que $C(\eta)$ não depende das coordenadas espaciais, a invariância translacional é uma simetria do espaço-tempo descrito pela métrica de Robertson-Walker (3.59). Assim, podemos expressar a solução da equação de Dirac como [36, 85]

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \eta) = C(\eta)^{-\frac{3}{4}}(\bar{\gamma}^0 \partial_\eta + i\bar{\gamma}k - m\sqrt{C(\eta)})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\phi_k(\eta). \quad (3.99)$$

Inserindo (3.99) na equação de Dirac (3.95) e usando o fato de que os autovalores de $\bar{\gamma}^0$ são ± 1 encontramos a seguinte equação:

$$[\partial_\eta^2 + k^2 + m^2 C(\eta) \pm im \frac{C'(\eta)}{\sqrt{C(\eta)}}]\phi_k^{(\pm)}(\eta) = 0. \quad (3.100)$$

Nas regiões assintóticas esta equação possui as seguintes soluções

$$\phi_k^{(\pm)\text{in}} \approx \frac{e^{\pm i\omega_k^{\text{in}}\eta}}{\sqrt{2\omega_k^{\text{in}}}}, \quad (3.101)$$

$$\phi_k^{(\pm)\text{out}} \approx \frac{e^{\pm i\omega_k^{\text{out}}\eta}}{\sqrt{2\omega_k^{\text{out}}}}. \quad (3.102)$$

Estas soluções correspondem aos modos de frequência positiva no passado e no futuro distante, onde o espaço-tempo admite o campo vetor de Killing tipo tempo ∂_η . De maneira similar, identificamos o complexo conjugado de (3.102) $\phi_k^{(\mp)\text{in}*}$ e $\phi_k^{(\mp)\text{out}*}$ correspondem aos modos de frequência negativa. Dessa forma, o campo $\Psi(\mathbf{x}, \eta)$ é quantizado definindo o operador campo em termos de ambos os conjuntos de soluções

$$\hat{\Psi}^{\text{in}}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{(2E_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}}} \sum_s (\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\text{in}} \phi_k^{+\text{in}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger} \phi_k^{-\text{in}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), \quad (3.103)$$

$$\hat{\Psi}^{\text{out}}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{(2E_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}}} \sum_s (\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\text{out}} \phi_k^{+\text{out}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger} \phi_k^{-\text{out}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}), \quad (3.104)$$

onde $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\text{in}}$ e $\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\text{in}\dagger}$ são os operadores de aniquilação e de criação na região-in, respectivamente. Assim, o estado de vácuo do campo fermiônico na região-in é definido por:

$$\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\text{in}}|0^F\rangle^{\text{in}} = 0, \quad (3.105)$$

Já $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\text{out}}$ e $\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\text{out}\dagger}$ são os operadores de aniquilação e de criação na região-out, respectivamente. Logo, o estado de vácuo do campo fermiônico na região-out é definido por:

$$\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\text{out}}|0^F\rangle^{\text{out}} = 0. \quad (3.106)$$

Assim como no campo escalar, a transformação de Bogoliubov entre os modos da região-in e da região-out é

$$\phi_k^{(\pm)\text{in}} = \alpha_k^{(\pm)} \phi_k^{(\pm)\text{out}} + \beta_k^{(\pm)} \phi_k^{(\pm)\text{out}*}, \quad (3.107)$$

onde $\alpha_k^{(\pm)}$ e $\beta_k^{(\pm)}$ são os coeficientes de Bogoliubov e satisfazem a condição de normalização de Dirac:

$$|\alpha_k^{(\pm)}|^2 + |\beta_k^{(\pm)}|^2 = 1. \quad (3.108)$$

Vamos agora calcular os coeficientes $\alpha_k^{(-)}$ e $\beta_k^{(-)}$ usando a aproximação perturbativa da seção anterior. Com essa finalidade é conveniente reescrever a equação de Dirac (3.100) como

$$[\partial_\eta^2 + k^2 + m^2]\phi_k^-(\eta) + V_f(\eta)\phi_k^-(\eta) = 0, \quad (3.109)$$

onde

$$V_f(\eta) = [C(-\infty) - C(\eta)]m^2 - im \frac{C'(\eta)}{\sqrt{C(\eta)}}. \quad (3.110)$$

Novamente, seguindo as referências [1, 81], vamos resolver a equação (3.109) por interação para baixas ordens em $V(\eta)$. Na região assintótica ($\eta \rightarrow \infty$) temos

$$\phi_k^-(\eta) \longrightarrow (2\omega_k^{\text{in}})^{-\frac{1}{2}} [\alpha_k^{(-)} e^{-i\omega_k^{\text{in}}\eta} + \beta_k^{(-)} e^{i\omega_k^{\text{in}}\eta}], \quad (3.111)$$

onde os coeficientes de Bogoliubov $\beta_k^{(-)}$ e $\alpha_k^{(-)}$ são dados por

$$\alpha_k^{(-)} = 1 + \frac{i}{\sqrt{2\omega_k^{\text{in}}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_k^{\text{in}}\eta} V_f(\eta') \phi_k^{(-)}(\eta) d\eta, \quad (3.112)$$

$$\beta_k^{(-)} = -\frac{i}{\sqrt{2\omega_k^{\text{in}}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_k^{\text{in}}\eta} V_f(\eta) \phi_k^{(-)}(\eta) d\eta. \quad (3.113)$$

Para a primeira ordem em $V_f(\eta)$ temos que

$$\phi_k^{(-)}(\eta') \approx \phi_k^{-\text{in}}, \quad (3.114)$$

e os coeficientes de Bogoliubov tornam-se

$$\alpha_k^{(-)} = 1 + \frac{i}{2\omega_k^{\text{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} V_f(\eta) d\eta, \quad (3.115)$$

$$\beta_k^{(-)} = -\frac{i}{2\omega_k^{\text{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega_k^{\text{in}}\eta} V_f(\eta) d\eta. \quad (3.116)$$

Substituindo (3.110) em $\beta_k^{(-)}$, obtemos a seguinte expressão

$$\beta_k^{(-)} = \frac{i}{2\omega_k^{\text{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega_k^{\text{in}}\eta} \left[m^2\epsilon(1 + \tanh(\rho\eta)) + im \frac{C'(\eta)}{\sqrt{C(\eta)}} \right] d\eta. \quad (3.117)$$

O primeiro termo em $\beta_k^{(-)}$ corresponde a integral I_1 (3.86). Já para segundo termo podemos escrever

$$I_3 = -\frac{m}{2\omega_k^{\text{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega_k^{\text{in}}\eta} \frac{C'(\eta)}{\sqrt{C(\eta)}} d\eta. \quad (3.118)$$

Note que o termo $\frac{C'(\eta)}{\sqrt{C(\eta)}} = 2(\sqrt{C(\eta)})'$ e que para $\epsilon \ll 1$ temos que

$$\frac{C'(\eta)}{\sqrt{C(\eta)}} \approx \epsilon\rho \text{sech}^2(\rho\eta) + O(\epsilon^2). \quad (3.119)$$

Usando este resultado podemos reescrever a integral I_3 como

$$I_3 = -\frac{m}{2\omega_k^{\text{in}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\omega_k^{\text{in}}\eta} \epsilon\rho \text{sech}^2(\rho\eta) d\eta. \quad (3.120)$$

A integral em η pode ser calculada no plano complexo da mesma maneira que a integral (3.86). Neste caso, encontramos

$$I_3 = -\frac{m\epsilon}{\rho} \frac{\pi}{\sinh\left(\frac{\pi\omega_k^{\text{in}}}{\rho}\right)}. \quad (3.121)$$

Finalmente, obtemos o seguinte resultado para $\beta_k^{(-)}$ [82]:

$$\beta_k^{(-)} \approx \left(\frac{m^2\epsilon}{\omega_k^{\text{in}}\rho} - \frac{m\epsilon}{\rho} \right) \frac{\pi}{\sinh\left(\frac{\pi\omega_k^{\text{in}}}{\rho}\right)}. \quad (3.122)$$

De maneira similar, podemos calcular o coeficiente $\alpha_k^{(-)}$. Para a primeira ordem em ϵ obtemos $\alpha_k^{(-)} \approx 1 + O(\epsilon)$. Além disso, a razão entre os coeficientes de Bogoliubov $\frac{\beta_k^{(-)}}{\alpha_k^{(-)}}$ resulta em

$$\frac{\beta_k^{(-)}}{\alpha_k^{(-)}} \approx \left(\frac{m^2\epsilon}{\omega_k^{\text{in}}\rho} - \frac{m\epsilon}{\rho} \right) \frac{\pi}{\sinh\left(\frac{\pi\omega_k^{\text{in}}}{\rho}\right)}. \quad (3.123)$$

Para $\omega_+ = \omega_k^{\text{in}} + \frac{m^2\epsilon}{\omega_k^{\text{in}}}$ e $\omega_- = \frac{m^2\epsilon}{\omega_k^{\text{in}}}$ este resultado coincide para $\epsilon \ll 1$ com o $\left| \frac{\beta_k^{(-)}}{\alpha_k^{(-)}} \right|$ obtido em [36].

O valor esperado do número de partículas no futuro assintótico é dado por

$$\langle N_{\mathbf{k}}^{(-)\text{out}} \rangle_{\text{in}} \approx \left(\frac{m^2\epsilon}{\omega_k^{\text{in}}\rho} - \frac{m\epsilon}{\rho} \right)^2 \frac{\pi^2}{\sinh^2\left(\frac{\pi\omega_k^{\text{in}}}{\rho}\right)}. \quad (3.124)$$

É importante ressaltar que uma expressão análoga é obtida para o valor esperado do número de antipartículas no futuro assintótico. Nota-se que para o caso de partículas com $m = 0$, neutrinos sem massa, a taxa de criação de partículas é zero. Isso significa que a invariância conformal da teoria é preservada. Já a presença de uma “pequena” massa quebra a simetria conforme e como consequência partículas fermiônicas são criadas depois do período de expansão, como mostra a figura (8).

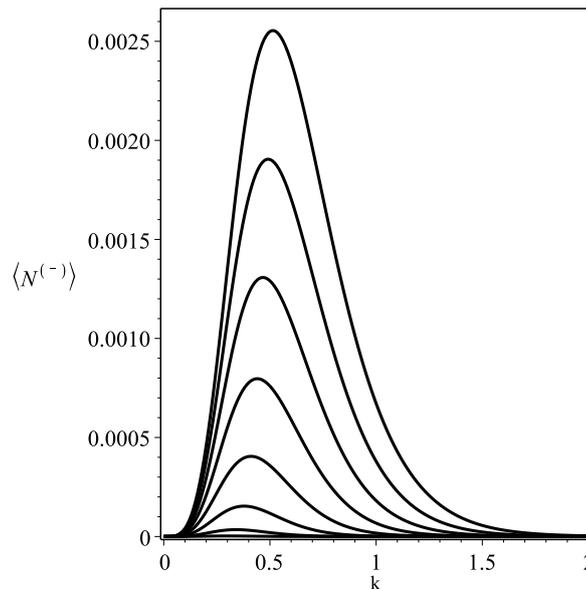


Figura 8: Número de partículas em função de k para diferentes parâmetros de expansão $\rho = 0.1 \dots 1$, onde temos fixado $m = \epsilon = 0.5$.

A figura (8) mostra o espectro do número de partículas criadas para o campo férmionico. Note que esse espectro é análogo ao espectro do número de partículas para o campo bosônico com acoplamento não-mínimo, como mostra a figura (7). Isso expressa o fato que em um sistema de coordenadas local a equação de Dirac covariante é uma natural extensão da equação de Klein-Gordon com o termo de acoplamento não-mínimo $\frac{1}{4}R$, para mais detalhes ver a referência [2]. Todos esses resultados indicam que o campo fermiônico e o campo bosônico com acoplamento não-mínimo codificam mais informação sobre os parâmetros cosmológicos que o caso do campo bosônico com acoplamento mínimo.

Nossos resultados mostram que o acoplamento não-mínimo do campo escalar com a gravidade pode simular a geração de partículas pelo campo fermiônico no espaço-tempo em expansão. Neste caso, existiu um privilegiado modo que é mais sensível aos parâmetros de expansão. Além disso, eles mostram que a estatística do campo e o acoplamento dele com a gravidade possui um importante papel na forma como a expansão do espaço-tempo gera partículas nos campos quânticos.

No próximo capítulo vamos estudar como a natureza estatística do campo e o aco-

plamento do campo com a gravidade afetam um protocolo de teletransporte quântico no espaço-tempo em expansão e também vamos investigar como uma autointeração e interação entre dois campos afetam e são afetadas pela dinâmica do espaço-tempo em expansão.

Capítulo 4

Emaranhamento no espaço-tempo curvo

Recentemente campos bosônicos e fermiônicos livres em evolução num universo em expansão com a métrica de Robertson-Walker foram estudados nas referências [35, 36]. Nelas, os autores mostraram que o espaço-tempo em expansão pode gerar emaranhamento entre os modos de momentos opostos de um campo quântico. Além disso, os autores mostraram que é possível obter informação sobre a expansão do espaço-tempo, ou seja, obter informação sobre os parâmetros cosmológicos que caracterizam a expansão através da entropia de emaranhamento gerada depois do período de expansão do espaço-tempo.

Neste capítulo vamos estudar a geração da entropia de emaranhamento em um espaço-tempo com a métrica de Robertson-Walker. Por simplicidade vamos considerar um espaço-tempo com duas regiões assintóticas, onde a interpretação de partículas pode ser bem definida nessas regiões assintoticamente estacionárias. Na seção 4.1, vamos também estudar como um estado de vácuo no passado assintótico torna-se um estado “comprimido” de dois modos no futuro assintótico. Em seguida, na seção 4.2, veremos o efeito da dinâmica do espaço-tempo sobre uma particular tarefa de informação quântica, a saber, o teletransporte quântico. Na seção 4.3, vamos investigar com uma auto-interação $\lambda\phi^4$ afeta a quantidade de informação codificada no emaranhamento gerado entre os modos de um campo escalar depois do período de expansão. E finalmente, na seção 4.4, vamos estudar dois campos escalares emaranhados via uma interação mútua no espaço-tempo em expansão. Nessa seção, vamos calcular a negatividade logarítmica em primeira ordem na constante de acoplamento e mostraremos que no limite de expansão suave a interação contribui significativamente para a sobrevivência das correlações quânticas no futuro assintótico.

4.1 Emaranhamento bosônico e fermiônico no espaço-tempo em expansão

Nesta seção, vamos mostrar que o estado de vácuo do campo no passado assintótico evolui para um estado emaranhado no futuro assintótico. O emaranhamento gerado pela expansão codifica informações sobre os parâmetros da expansão, esta informação pode ser obtido para partículas com massa específica, como foi mostrado em [36].

Considere que o estado do campo escalar ϕ na perspectiva de um observador inercial situado na região-in é o estado de vácuo

$$|0\rangle_{\text{in}} = \prod_k |0_k, 0_{-k}\rangle_{\text{in}}. \quad (4.1)$$

Ele pode ser escrito na base de estados da região-out como

$$|0\rangle_{\text{in}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n_k, n_{-k}\rangle_{\text{out}}, \quad (4.2)$$

onde n é o número de excitações do modo k visto por um observador na região-out. Desde que o estado de vácuo é definido como $a_k^{\text{in}}|0\rangle_{\text{in}} = 0$, podemos usar a transformação de Bogoliubov e obter a seguinte equação

$$0 = a_k^{\text{in}}|0\rangle_{\text{in}} = (\alpha_k a_k^{\text{out}} + \beta_k a_k^{\text{out}\dagger}) \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n_k, n_{-k}\rangle_{\text{out}}, \quad (4.3)$$

$$= \alpha_k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1} |n_k, (n+1)_{-k}\rangle_{\text{out}} \quad (4.4)$$

$$- \beta_k \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1} |(n+1)_k, n_{-k}\rangle_{\text{out}}. \quad (4.5)$$

Resolvendo essa equação encontramos a relação de recorrência $c_n = \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)^n c_0$. Dessa forma, o estado de vácuo do ponto de vista de um observador inercial no passado distante torna-se

$$|0\rangle_{\text{in}} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right)^n |n_k, n_{-k}\rangle_{\text{out}}, \quad (4.6)$$

para um observador no futuro distante. A condição de normalização ${}_{\text{in}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}} = 1$ nos permite obter a seguinte expressão para c_0 :

$$c_0 = \sqrt{1 - \left|\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right|^2}. \quad (4.7)$$

Como consequência o estado $|0\rangle_{\text{in}}$ torna-se

$$|0\rangle_{\text{in}} = \sqrt{1 - \Theta(k)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^n |n_k, n_{-k}\rangle_{\text{out}}, \quad (4.8)$$

onde $\Theta(k) = \left| \frac{\beta_k}{\alpha_k} \right|^2$. Esse resultado significa que o estado de vácuo na região-in é visto como um estado “comprimido” de dois modos na região-out. É importante notar que esse estado é idêntico ao estado obtido por um processo de amplificação paramétrica não-degenerado, para mais detalhes ver as referências [83, 84]. De maneira análoga, o estado de uma partícula $|1\rangle_{\text{in}}$ na região-in do ponto de vista de um observador inercial na região-out corresponde a

$$|1\rangle_{\text{in}} = (1 - \Theta(k)) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} \right)^n \sqrt{n+1} |n+1_k, n_{-k}\rangle_{\text{out}}. \quad (4.9)$$

Note que o estado (4.8) é um estado puro com uma correlação entre os modos de k e $-k$. Podemos usar a entropia de von Neumann definida no capítulo 2 para quantificar o emaranhamento entre esses modos. Para esse fim, vamos primeiro calcular a matriz densidade reduzida de um dos modos. Por exemplo, a matriz densidade reduzida para o modo k é obtida fazendo um traço parcial sobre o modo $-k$ da matriz densidade $\rho_{k-k} = |0\rangle_{\text{in}}\langle 0|$, ou seja,

$$\rho_k = \text{Tr}_{-k}(\rho_{k-k}) = (1 - \Theta(k)) \sum_n \Theta(k)^n |n_k\rangle_{\text{out}}\langle n_k|, \quad (4.10)$$

Vale notar que a matriz densidade reduzida ρ_k é uma matriz diagonal com auto-valores

$$\nu_n = (1 - \Theta(k))\Theta(k)^n, \quad (4.11)$$

o que facilita no cálculo da entropia de von Neumann. Logo, usando 2.14 temos que

$$\begin{aligned} S_k &= -\text{Tr}(\nu_n \log_2 \nu_n) \\ &= -(1 - \Theta(k)) \sum_n \Theta(k)^n \log_2 [(1 - \Theta(k))\Theta(k)^n], \\ &= (\Theta(k) - 1) \sum_n [n\Theta(k)^n \log_2 \Theta(k) + \Theta(k)^n \log_2(1 - \Theta(k))], \\ &= (\Theta(k) - 1) \log_2 \Theta(k) \sum_n n\Theta(k)^n + (\Theta(k) - 1) \log_2(1 - \Theta(k)), \\ &= \frac{\Theta(k)}{\Theta(k) - 1} \log_2 \Theta(k) - \log_2(1 - \Theta(k)), \\ &= \log_2 \left[\frac{\Theta(k)^{\frac{\Theta(k)}{\Theta(k)-1}}}{1 - \Theta(k)} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

De acordo com as referências [35, 37], num espaço-tempo em expansão com métrica de

Robertson-Wlaker bidimensional, $\Theta(k)$ é dado por

$$\Theta(k) = \left| \frac{\beta_k}{\alpha_k} \right|^2 = \frac{\sinh^2(\pi\omega_-/\sigma)}{\sinh^2(\pi\omega_+/\sigma)}, \quad (4.13)$$

onde

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}[\omega_k^{\text{out}} \pm \omega_k^{\text{in}}].$$

Em resumo, esse resultado significa que a expansão emaranha modos massivos de momentos opostos. Além disso, esse emaranhamento contém informação sobre a expansão do espaço-tempo. Em particular, para $m \ll 2\sigma\epsilon^{-1/2}$ e $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ temos o seguinte resultado [35]

$$\epsilon \approx \frac{2E^2}{m^2} \sqrt{\gamma(S)}, \quad (4.14)$$

$$\sigma \approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{1 + \gamma(S)}{-\frac{E}{4} \frac{d}{dE} \ln \gamma(S) - 1} \right)^{\frac{1}{2}} E. \quad (4.15)$$

No caso do campo fermiônico, de acordo com as referências [37, 38], a relação entre os operadores das regiões assintóticas é dada por

$$c_k^{\text{in}} = \alpha_k^{-*} c_k^{\text{out}} + \beta_k^{-*} X(k) d_{-k}^{\text{out}\dagger}, \quad (4.16)$$

onde X é o tensor de polarização dado por

$$X(k) = \frac{\sqrt{1 + 2\epsilon} m}{k} \left(1 - \frac{\omega_k}{\sqrt{1 + 2\epsilon} m} \right). \quad (4.17)$$

De forma análoga ao campo bosônico, podemos escrever o estado de vácuo da região-in em termos da base de Fock da região-out como

$$|0\rangle_{\text{in}} = \prod_k (A_0 |0_k, 0_{-k}\rangle_{\text{out}} + A_1 |1_k, 1_{-k}\rangle_{\text{out}}). \quad (4.18)$$

Aqui a notação $|1_k\rangle$ representa uma partícula com momento k e $|1_{-k}\rangle$ representa uma antipartícula com momento $-k$. Desde que o estado de vácuo é definido como $c_k^{\text{in}}|0\rangle_{\text{in}} = 0$, podemos usar a transformação de Bogoliubov (4.16) e obter a seguinte equação

$$\begin{aligned} 0 &= c_k^{\text{in}}|0\rangle_{\text{in}} \\ &= (\alpha_k^{-*} c_k^{\text{out}} + \beta_k^{-*} X(k) d_{-k}^{\text{out}\dagger})(A_0 |0_k, 0_{-k}\rangle_{\text{out}} + A_1 |1_k, 1_{-k}\rangle_{\text{out}}), \\ &= \alpha_k^{-*} A_1 |0_k, 1_{-k}\rangle_{\text{out}} + \beta_k^{-*} X(k) A_0 |0_k, 1_{-k}\rangle_{\text{out}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Resolvendo esta equação podemos encontrar a seguinte relação:

$$A_1 = -\frac{\beta_k^{-*}}{\alpha_k^{-*}} X(k) A_0. \quad (4.20)$$

Já usando a normalização do estado de vácuo ${}_{\text{in}}\langle 0|0\rangle_{\text{in}} = 1$ temos que

$$1 = |A_0|^2 (1 + |\Theta_k^- X(k)|^2),$$

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + |\Theta_k^- X(k)|^2}}, \quad (4.21)$$

onde $\Theta_k^- = \frac{\beta_k^-}{\alpha_k^-}$.

O estado de vácuo da região-in visto por um observador inercial na região-out

$$|0\rangle_{\text{in}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\Theta_k^- X(k)|^2}} \prod_k (|0_k, 0_{-k}\rangle_{\text{out}} - \Theta_k^- X(k) |1_k, 1_{-k}\rangle_{\text{out}}). \quad (4.22)$$

Este estado corresponde a um estado emaranhado entre os modos das partículas e das antipartículas com momentos opostos. Desde que ele é puro, o emaranhamento entre os modos pode ser quantificado via entropia de von Neumann:

$$S(\hat{\rho}_k^F) = \text{Tr}(\hat{\rho}_k^F \log \hat{\rho}_k^F),$$

onde $\hat{\rho}_k^F$ é a matrix densidade reduzida do estado com modo k . Ela é obtida fazendo o traço sobre os estados das antipartículas com modos $-k$, isto é, $\hat{\rho}_k^F = \text{Tr}_{-k}(|0\rangle_{\text{in}}\langle 0|)$. Deste modo $\hat{\rho}_k^F$ corresponde a

$$\hat{\rho}_k^F = \frac{1}{\sqrt{1 + |\Theta_k^- X(k)|^2}} [|0_k\rangle_{\text{out}}\langle 0_k| + |\Theta_k^- X(k)|^2 |1_k\rangle_{\text{out}}\langle 1_k|], \quad (4.23)$$

e a entropia de von Neuman resulta em

$$S(\hat{\rho}_k^F) = \log \left(\frac{1 + |\Theta_{\text{F}}^-|^2}{|\Theta_{\text{F}}^-|^{|\Theta_{\text{F}}^-|^2 - 1}} \right), \quad (4.24)$$

onde $|\Theta_{\text{F}}^-| = |\Theta_k^- X(k)|$.

Curiosamente, existem diferenças qualitativas marcantes entre os campos bosônico e fermiônico. Por exemplo, o emaranhamento gerado pela expansão do universo como função da frequência do modo do campo cresce até um pico e depois decresce. Para o caso bosônico, por outro lado, ele decresce monotonicamente, ou seja, para bósons os modos mais sensíveis são aqueles para os quais $|k| \rightarrow 0$ ao passo que existe um valor específico o qual é mais sujeito a emaranhamento para o caso de férmions. Desta forma, os campos fermiônicos armazenam mais informação sobre a evolução do espaço-tempo que os campos bosônicos.

A pergunta natural ainda não respondida na literatura desse caso específico, parcialmente devido a complexidade de solução analíticas, é como um ambiente/interação afetam essas correlações quânticas ao longo da evolução do universo. Pois, sabe-se que o emaranhamento degrada-se facilmente quando exposto a meios que geram decoerência.

4.2 Teletransporte quântico no espaço-tempo em expansão

Nesta seção, vamos estudar um protocolo de teletransporte quântico entre dois observadores inerciais em um espaço-tempo em expansão. Vamos mostrar que no futuro assintótico, após a expansão do espaço-tempo saturar, o estado emaranhado compartilhado entre Alice e Bob não será mais um estado maximalmente emaranhado, em vez disso, ele será o estado misto com o grau de emaranhamento reduzido. Como consequência, essa degradação do grau de emaranhamento do canal quântico resulta na degradação da fidelidade do teletransporte. Por uma questão de generalidade, vamos explorar os modos do campo bosônico e do campo fermiônico. Vamos também investigar e quantificar os efeitos do acoplamento não-mínimo do campo com a curvatura escalar sobre o protocolo de teletransporte.

Primeiramente, vamos supor que o espaço-tempo é descrito pela métrica de Robertson-Walker (3.58). No que segue, consideremos o seguinte experimento de pensamento: no passado assintótico, dois observadores comóveis Alice e Bob possuem cavidades ideais isoladas¹ capaz de armazenar os modos espaciais e ortogonais \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 com frequência $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2| \equiv k$ do campo ϕ em um estado de superposição, isto é, em um qubit². Vamos aqui rotular esses modos como A_i para Alice e B_i para Bob, onde $i = 1, 2$.

Além disso, Alice e Bob compartilham o estado maximalmente emaranhado,

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A\rangle_{\text{in}}|0_B\rangle_{\text{in}} + |1_A\rangle_{\text{in}}|1_B\rangle_{\text{in}}), \quad (4.25)$$

onde os estados $|0_A\rangle$ e $|1_A\rangle$ são definidos em termos da base *dual rail* como sugerido na referência [21], $|0_A\rangle = |1_{A_1}\rangle|0_{A_2}\rangle$, $|1_A\rangle = |0_{A_1}\rangle|1_{A_2}\rangle$. De maneira similar, temos para cavidade de Bob: $|0_B\rangle = |1_{B_1}\rangle|0_{B_2}\rangle$, $|1_B\rangle = |0_{B_1}\rangle|1_{B_2}\rangle$. Vale ressaltar que no referencial local da Alice, os modos na região-in e na região-out são os mesmos e o subscrito “in” daqui para frente pode ser ignorado para os estados de Alice. É importante salientar também que o estado emaranhado que Alice e Bob compartilham pode ser codificado em termos dos modos de um campo escalar real massivo ou de um campo fermiônico.

¹Cavidade ideal corresponde a uma cavidade livre de defeitos que possam causar decoerência no qubit.

²Por simplicidade, estamos ignorado a polarização e modelando os fótons com os modos de um campo escalar ou fermiônico.

Conforme ilustrado na figura (9), Alice possui uma cavidade ideal extra, rotulada de cavidade C, com um qubit que ela deseja teletransportar para Bob usando o protocolo padrão de teletransporte discutido no capítulo 2. Vale salientar que o papel de Alice e Bob pode ser trocado, já que ambos são observadores comóveis no espaço-tempo em expansão.

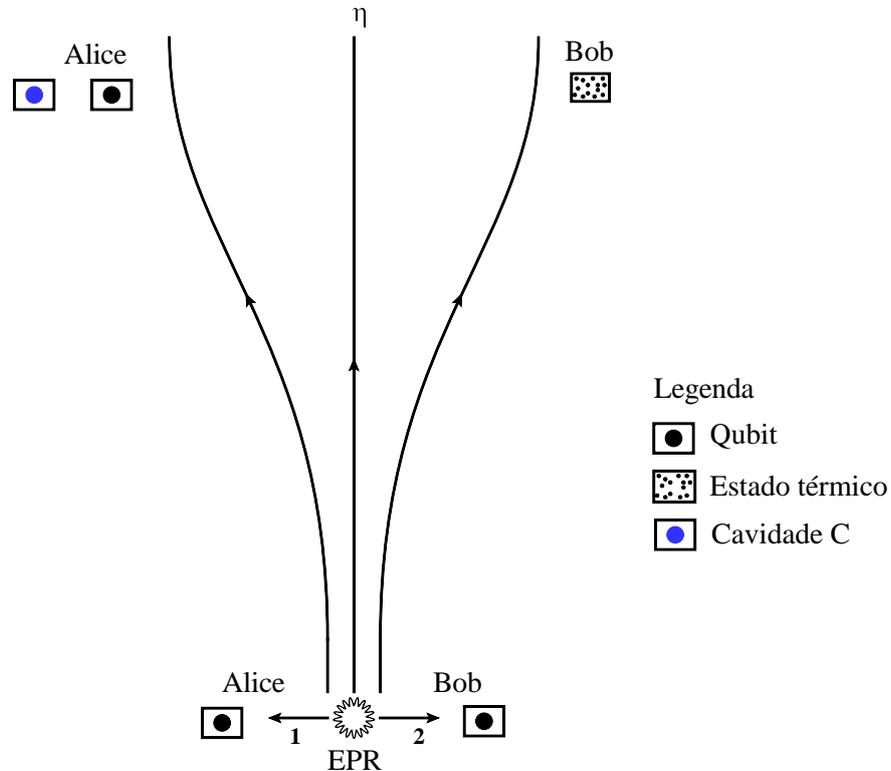


Figura 9: Ilustração de um teletransporte quântico no espaço-tempo em expansão. Alice e Bob no passado assintótico compartilham um estado maximalmente emaranhado, que é a fonte para realizar o teletransporte. Além disso, Alice possui um qubit extra, que deseja teletransportar para Bob. O protocolo é finalizado no futuro assintótico quando a expansão do espaço-tempo satura.

Note que, se o protocolo de teletransporte é executado quando os observadores Alice e Bob estão no passado assintótico, então a fidelidade do teletransporte será máxima, ou seja, igual a 1. Entretanto, suponhamos que Alice e Bob desejam realizar o protocolo de teletransporte no futuro assintótico, depois que a expansão do espaço-tempo satura. Nosso intuito é estudar como a expansão do espaço-tempo afeta o protocolo, já que recentemente na literatura tem sido extensivamente estudado efeitos não-inerciais sobre o emaranhamento e sobre tarefas de informação.

4.2.1 Teletransporte quântico caso bosônico

Na perspectiva de Alice, o estado de vácuo dentro da cavidade de Bob $|0_B\rangle_{\text{in}}$ torna-se populado com partículas no futuro assintótico $|0_B\rangle_{\infty}$,

$$|0_B\rangle_{\infty} = \sqrt{1 - \Theta_k} \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_k^n |n_{\mathbf{k}}, n_{-\mathbf{k}}\rangle, \quad (4.26)$$

Similarmente, a excitação de uma partícula $|1_B\rangle_{\text{in}}$ evolui no futuro assintótico para o estado $|1_B\rangle_{\infty}$

$$|1_B\rangle_{\infty} = (1 - \Theta_k) \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_k^n \sqrt{n+1} |n+1_{\mathbf{k}}, n_{-\mathbf{k}}\rangle. \quad (4.27)$$

Logo, o estado emaranhado $|\beta\rangle$ torna-se $|\beta\rangle_{\infty}$:

$$|\beta\rangle_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\mathbf{0}_A\rangle |\mathbf{0}_B\rangle_{\infty} + |\mathbf{1}_A\rangle |\mathbf{1}_B\rangle_{\infty}), \quad (4.28)$$

onde definimos $|\mathbf{0}_B\rangle_{\infty} = |1_{B_1}\rangle_{\infty} |0_{B_2}\rangle_{\infty}$ e $|\mathbf{1}_B\rangle_{\infty} = |0_{B_1}\rangle_{\infty} |1_{B_2}\rangle_{\infty}$, seguindo a notação introduzida nas equações (4.26) e (4.27). O estado $|\beta\rangle_{\infty}$ ainda é um estado emaranhado e pode ser usado para executar o teletransporte do qubit de Alice para Bob. No entanto, ele não é mais um estado maximalmente emaranhado.

Para ver como a degradação do emaranhamento afeta a fidelidade do teletransporte, suponha que a cavidade adicional de Alice contenha o seguinte estado:

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = a|\mathbf{0}_A\rangle + b|\mathbf{1}_A\rangle, \quad (4.29)$$

onde este estado é desconhecido para Bob.

Ao realizar uma medida de Bell sobre o estado $|\psi\rangle_{\text{in}}$ e no seu qubit do estado emaranhado compartilhado com Bob, Alice acopla o estado quântico $|\psi\rangle_{\text{in}}$ ao estado emaranhado $|\beta\rangle_{\infty}$. Dessa forma, o estado total do sistema tripartido no futuro assintótico pode ser escrito como

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle_{\text{in}} &= |\psi\rangle_{\text{in}} \otimes |\beta\rangle_{\infty}, \\ &= \frac{1}{2} \left[|\phi_A^+\rangle (a|0_B\rangle_{\infty} + b|1_B\rangle_{\infty}) + |\phi_A^-\rangle (a|0_B\rangle_{\infty} - b|1_B\rangle_{\infty}) \right. \\ &\quad \left. + |\psi_A^+\rangle (a|0_B\rangle_{\infty} + b|1_B\rangle_{\infty}) + |\psi_A^-\rangle (a|0_B\rangle_{\infty} - b|1_B\rangle_{\infty}) \right], \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde os estados $|\phi_A^\pm\rangle$ e $|\psi_A^\pm\rangle$ correspondem a base de Bell:

$$|\phi_A^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\mathbf{0}_A\rangle \otimes |\mathbf{0}_A\rangle + |\mathbf{1}_A\rangle \otimes |\mathbf{1}_A\rangle], \quad (4.31)$$

$$|\phi_A^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\mathbf{0}_A\rangle \otimes |\mathbf{0}_A\rangle - |\mathbf{1}_A\rangle \otimes |\mathbf{1}_A\rangle], \quad (4.32)$$

$$|\psi_A^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\mathbf{0}_A\rangle \otimes |\mathbf{1}_A\rangle + |\mathbf{1}_A\rangle \otimes |\mathbf{0}_A\rangle], \quad (4.33)$$

$$|\psi_A^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\mathbf{0}_A\rangle \otimes |\mathbf{1}_A\rangle - |\mathbf{1}_A\rangle \otimes |\mathbf{0}_A\rangle]. \quad (4.34)$$

Após a medição de Alice em seus dois qubits no futuro assintótico, o estado que descreve o sistema completo é dado por:

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = |\mathbf{i}\rangle \otimes |\mathbf{j}\rangle \otimes |\phi_{i,j}\rangle_\infty, \quad (4.35)$$

com os possíveis resultados $|\mathbf{i}\rangle \otimes |\mathbf{j}\rangle$, $i, j \in \{0, 1\}$ e o estado final de Bob corresponde a

$$|\phi_{i,j}\rangle_\infty \equiv x_{ij}|\mathbf{0}\rangle_\infty + y_{ij}|\mathbf{1}\rangle_\infty$$

com as quatro possíveis amplitudes sendo

$$\begin{aligned} (x_{00}, y_{00}) &= (a, b), \\ (x_{01}, y_{01}) &= (b, a), \\ (x_{10}, y_{10}) &= (a, -b), \\ (x_{11}, y_{11}) &= (-b, a). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Usando as equações (4.26) e (4.27) em $|\psi\rangle_{\text{in}}$, o estado na cavidade de Bob corresponde a

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{ij}(k) &= \text{Tr}_{-\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2} (|\phi_{i,j}\rangle_\infty \langle \phi_{i,j}|) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \hat{\rho}_{ij,n}(k) \\ &= (1 - \Theta_k)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\Theta_k^{n-1} [(n-m)|x_{ij}|^2 + m|y_{ij}|^2] |m, n-m\rangle \langle m, n-m| \right. \\ &\quad + x_{ij} y_{ij}^* \Theta_k^n \sqrt{(m+1)(n-m-1)} |m, n-m+1\rangle \langle m+1, n-m| \\ &\quad \left. + x_{ij}^* y_{ij} \Theta_k^n \sqrt{(m+1)(n-m-1)} |m+1, n-m\rangle \langle m, n-m+1| \right], \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde o traço parcial sobre os momentos negativos $-\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2$ da parte de Bob em $|\phi_{i,j}\rangle_\infty \langle \phi_{i,j}|$ significa que Bob no futuro assintótico não tem acesso aos modos de momentos negativos $-\mathbf{k}$. A matrix densidade reduzida $\hat{\rho}_{ij}(k)$ é uma matrix de dimensão infinita, mas que possui

uma estrutura diagonal blocada. Para os setores de excitação $n = \{0, 1, 2\}$ temos

$$\hat{\rho}_{ij}(k) = (1 - \Theta_k)^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |x_{ij}|^2 & x_{ij}y_{ij}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{ij}^*y_{ij} & |y_{ij}|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\Theta_k|x_{ij}|^2 & \sqrt{2}\Theta_k x_{ij}y_{ij}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\Theta_k x_{ij}^*y_{ij} & \Theta_k & \sqrt{2}\Theta_k x_{ij}y_{ij}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\Theta_k x_{ij}y_{ij}^* & 2\Theta_k|y_{ij}|^2 \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

onde temos usado a base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |02\rangle, |11\rangle, |20\rangle\}$. Note que os setores de excitações tem probabilidades

$$p_0 = 0, \quad p_1 = (1 - \Theta_k)^3, \quad p_n = (1 - \Theta_k)^3 \Theta_k^{n-1}.$$

O teletransporte só estará completo quando Bob receber de Alice a informação clássica $\{i, j\}$ do resultado da medida de Bell feita por Alice e então aplicar uma transformação unitária sobre o estado teletransportado em seu referencial local (ou laboratório). Vale notar que nosso resultado está restrito ao setor de excitação $n = 1$, desde que o estado que Alice deseja teletransportar reside nesse setor.

Para quantificar a qualidade do teletransporte, calculamos a probabilidade do estado teletransportado na cavidade de Bob ser o mesmo estado inicial da cavidade de Alice via uma medida de fidelidade [82]

$$F(\epsilon, \rho) = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\hat{\rho}_{ij}(k)) = (1 - \Theta_k)^3. \quad (4.39)$$

Com os resultados encontrados para os coeficientes de Bogoliubov no capítulo 3 na seção do campo bosônico no espaço-tempo de Robertson-Walker, a saber, a equação (3.94), nos permite determinar a influência da expansão do espaço-tempo sobre o protocolo. Percebe-se que mesmo uma pequena perturbação na simetria conformal resulta na degradação da qualidade do teletransporte. De fato, é somente sob simetria conforme que não há criação de partículas devido à expansão do espaço-tempo e consequentemente nenhuma resposta sobre a medida de fidelidade F , ou seja, no limite $\beta_k = 0$, a fidelidade do teletransporte é igual a 1, que corresponde a situação no caso ideal. A redução da fidelidade corresponde ao fato que o emaranhamento do estado compartilhado entre Alice e Bob degrada durante o período de expansão do espaço-tempo.

Uma análise numérica da equação (4.39) mostra que a fidelidade do teletransporte sempre se degrada devido à expansão do espaço-tempo para massa não nula e/ou acoplamento não-conformal, como mostra a figura (10). Além disso, para $m \neq 0$, à medida que o coeficiente

ξ aumenta de mínimo para conformal, a fidelidade também aumenta. Com relação ao papel desempenhado pelos parâmetros da expansão, ϵ e ρ , podemos verificar que o aumento da rapidez ρ da expansão leva a uma redução da fidelidade. Além disso, podemos ressaltar que a criação de partículas com massa m grande e momento k grande demanda uma grande quantidade de energia da expansão do espaço-tempo, logo somente os modos com baixa energia contribuem significativamente para a redução da fidelidade.

4.2.2 Teletransporte quântico caso fermiônico

Nesta seção vamos estender nossos resultados acima para o emaranhamento entre partículas fermiônicas de spin 1/2. Nosso objetivo é avaliar o efeito do caráter estatístico, Fermi-Dirac e Bose-Einstein, do campo na medida de fidelidade do teletransporte.

Nesse propósito, considere um campo de Dirac de massa m no espaço-tempo descrito pela métrica de Robertson-Walker (3.58). Neste caso, na perspectiva de Alice o estado de vácuo dentro da cavidade do Bob é dada por

$$|0_B^F\rangle_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 + |\Theta_k^- X(k)|^2}} \prod_{\mathbf{k}} (|0_{\mathbf{k}}, 0_{-\mathbf{k}}\rangle - \Theta_k^- X(k) |1_{\mathbf{k}}, 1_{-\mathbf{k}}\rangle). \quad (4.40)$$

Observe que, devido ao princípio de exclusão de Pauli o número de excitações férmionicas é limitado no setor $\{1, 0\}$. De maneira similar, o estado de uma partícula na região-in evolui para

$$|1_B^F\rangle_\infty = |1_{\mathbf{k}}, 0_{-\mathbf{k}}\rangle. \quad (4.41)$$

O protocolo de teletransporte nesta seção segue a mesma linha que foi discutida na seção anterior com o campo escalar. Neste caso, o estado maximalmente emaranhado $|\beta\rangle$ corresponde a

$$|\beta^F\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_A^F\rangle_{\text{in}} |0_B^F\rangle_{\text{in}} + |1_A^F\rangle_{\text{in}} |1_B^F\rangle_{\text{in}}), \quad (4.42)$$

onde a base “*dual rail*” pode ser interpretado em termos de excitações fermiônicas nos dois modos espaciais das cavidades de Alice e de Bob.

Novamente, vamos supor que Alice e Bob compartilham o estado maximalmente emaranhado $|\beta^F\rangle$ no passado assintótico, que Alice possua uma cavidade adicional contendo o qubit

$$|\psi\rangle_{\text{in}} = a|0_A^F\rangle + b|1_A^F\rangle, \quad (4.43)$$

e que após uma medida de Bell realizada por Alice em seus dois qubits no futuro assintótico, o estado que descreve o sistema completo é dado por:

$$|\psi^F\rangle_{\text{in}} = |\mathbf{i}\rangle \otimes |\mathbf{j}\rangle \otimes |\phi_{i,j}^F\rangle_{\infty}, \quad (4.44)$$

com os possíveis resultados $|\mathbf{i}\rangle \otimes |\mathbf{j}\rangle$, $i, j \in \{0, 1\}$ e o estado final de Bob corresponde a

$$|\phi_{i,j}^F\rangle_{\infty} \equiv x_{ij}|\mathbf{0}^F\rangle_{\infty} + y_{ij}|\mathbf{1}^F\rangle_{\infty}$$

com as quatro possíveis amplitudes sendo

$$\begin{aligned} (x_{00}, y_{00}) &= (a, b), \\ (x_{01}, y_{01}) &= (b, a), \\ (x_{10}, y_{10}) &= (a, -b), \\ (x_{11}, y_{11}) &= (-b, a). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Usando as equações (4.40) e (4.41) em $|\psi\rangle_{\text{in}}$, o estado na cavidade de Bob corresponde a

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{ij}^F(k) &= \text{Tr}_{-\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2} (|\phi_{i,j}^F\rangle_{\infty} \langle \phi_{i,j}^F|) \\ &= \frac{1}{1 + |\Theta_k^- X(k)|^2} \left[|x_{ij}|^2 |10\rangle \langle 10| + |y_{ij}|^2 |01\rangle \langle 01| \right. \\ &\quad \left. + x_{ij} y_{ij}^* |10\rangle \langle 01| + x_{ij}^* y_{ij} |01\rangle \langle 10| + |\Theta_k^- X(k)|^2 |11\rangle \langle 11| \right], \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde o traço parcial sobre os momentos negativos $-\mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2$ da parte de Bob em $|\phi_{i,j}\rangle_{\infty} \langle \phi_{i,j}|$ significa que no futuro assintótico Bob não tem acesso aos modos de momentos negativos $-\mathbf{k}$ das antipartículas.

De maneira similar a matriz densidade reduzida $\hat{\rho}_{ij}(k)$, a matriz densidade reduzida (4.46) possui uma forma diagonal em blocos, ou seja,

$$\hat{\rho}_{ij}^F(k) = \frac{1}{1 + |\Theta_k^- X(k)|^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |y_{ij}|^2 & x_{ij}^* y_{ij} & 0 \\ 0 & x_{ij}^* y_{ij} & |y_{ij}|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |\Theta_k^- X(k)|^2 \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

onde temos usado a base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Neste caso, as probabilidades são

$$p_0^F = 0, \quad p_1^F = \frac{1}{1 + |\Theta_k^- X(k)|^2}, \quad p_2^F = \frac{|\Theta_k^- X(k)|^2}{1 + |\Theta_k^- X(k)|^2}.$$

No caso fermiônico, o número de excitações está limitado até $n = 2$ e novamente o estado teleportado por Alice reside no setor $n = 1$. Assim, a fidelidade do teletransporte no setor $n = 1$ é dada por

$$F(\epsilon, \rho) = \frac{1}{1 + |\Theta_k^- X(k)|^2}. \quad (4.48)$$

A figura (10) mostra que a fidelidade decresce com o aumento do parâmetro cosmológico ρ . Neste caso, temos usado os coeficientes de Bogoliubov calculados no capítulo 3 na seção do campo fermiônico no espaço-tempo de Robertson-walker, a saber, a equação (3.123). Além disso, podemos notar que quando ρ é grande a fidelidade para o caso fermiônico satura para um valor fixo, por causa do princípio de exclusão de Pauli. Entretanto, para o caso bosônico na condição de acoplamento mínimo ($\xi = 0$) a fidelidade assume valores próximos de zero. Este resultado mostra que o emaranhamento entre modos fermiônicos são menos afetados pela expansão do espaço-tempo e Bob pode completar o protocolo com menor probabilidade de erro que no caso bosônico.

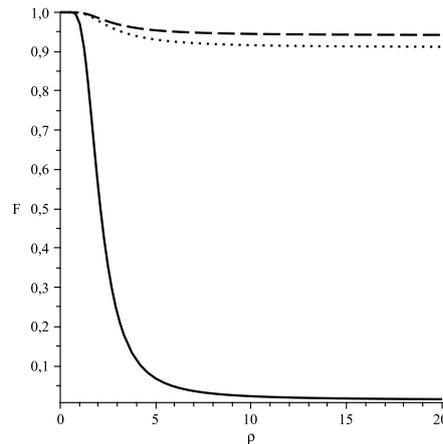


Figura 10: Fidelidade em função do parâmetro de expansão ρ para o caso de campo bosônico com acoplamento mínimo (linha contínua) e acoplamento conformal (linha de pontos). A linha tracejada mostra a fidelidade para o caso fermiônico, onde fixamos $k = m = 1$ e $\epsilon = 0.7$.

No caso do campo escalar com acoplamento não-mínimo, conforme a figura (10) (linha de pontos), a redução da fidelidade é bem menor que o caso do campo escalar com acoplamento mínimo (linha contínua) e qualitativamente semelhante ao caso fermiônico (linha tracejada). Esta é uma consequência do fato já observado no capítulo 3 de que a geração de partículas bosônicas para $\xi = \frac{1}{4}$ é equivalente à geração de partículas fermiônicas. Vale ressaltar também que a equação de Dirac no espaço-tempo curvo pode ser escrita como uma equação do tipo Klein-Gordon com um acoplamento não-mínimo com a gravidade. Nossos resultados sugerem que o acoplamento não-mínimo do campo escalar com a gravidade significativamente contribui para minimizar os efeitos da expansão do espaço-tempo sobre o protocolo de um

teletransporte quântico entre dois observadores inerciais.

4.3 Emaranhamento com campo escalar auto-interagente

Nesta seção estamos interessados em quantificar e compreender o efeito de uma auto-interações sobre o emaranhamento quântico em um espaço-tempo em expansão. Nosso objetivo é ter alguma idéia da importância relativa desse efeito comparado ao caso livre, ou seja, na ausência de interações.

Considere agora o campo escalar ϕ em uma métrica bidimensional tipo Robertson-Walker

$$ds^2 = C(\eta)(d\eta^2 - dx^2), \quad (4.49)$$

com o fator de escala conforme descrito por (3.61). Neste caso $\xi = 0$, e a Lagrangiana que descreve a dinâmica do campo escalar é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2] - \lambda\phi^4, \quad (4.50)$$

onde λ é a constante de acoplamento. Na representação de interação, o operador campo satisfaz a forma covariante da equação de Klein-Gordon neste espaço-tempo

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (4.51)$$

e a informação sobre a criação de partículas causada pela auto-interação é transportada pelo estado $|\psi\rangle$ do sistema, que satisfaz a equação de Schrödinger

$$H_I |\psi\rangle = i\partial_\eta |\psi\rangle, \quad (4.52)$$

onde H_I é o Hamiltoniano de interação

$$H_I = \lambda \int dx \sqrt{-g} \phi^4. \quad (4.53)$$

Aqui a integração é sobre uma hipersuperfície de tempo conforme η constante. Dessa forma, a quantização do campo ϕ é idêntica ao caso do campo livre. Vamos definir o operador campo como

$$\hat{\phi}(x, \eta) = \int dk [\hat{a}_k F_k(x, \eta) + \hat{a}_k^\dagger F_k^*(x, \eta)], \quad (4.54)$$

com

$$F_k(x, \eta) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi\omega_k}} \xi_k(\eta). \quad (4.55)$$

Sendo que $\xi_k(\eta)$ satisfaz a seguinte equação de movimento:

$$\partial_\eta^2 \xi_k(\eta) + (k^2 + C(\eta)m^2)\xi_k(\eta) = 0. \quad (4.56)$$

A solução geral desta equação é dada em termos de duas funções hipergeométricas [35]:

$$\begin{aligned} F_k^{(1)}(x, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k^{\text{in}}}} e^{ikx - i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln(2 \cosh(\rho\eta))} \\ &\quad \times h_1\left[1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}, 1 - \frac{i\omega_k^{\text{in}}}{\rho}, \frac{1}{2}(1 + \tanh(\rho\eta))\right], \\ F_k^{(2)}(x, \eta) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k^{\text{out}}}} e^{ikx - i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho} \ln(2 \cosh(\rho\eta))} \\ &\quad \times h_1\left[1 + \frac{i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}, 1 + \frac{i\omega_k^{\text{out}}}{\rho}, \frac{1}{2}(1 - \tanh(\rho\eta))\right], \end{aligned}$$

onde

$$\omega_\pm = \frac{1}{2}(\omega_k^{\text{out}} \pm \omega_k^{\text{in}}). \quad (4.57)$$

Note que função modo $F_k^{(1)}$ no passado assintótico tornam-se

$$F_k^{(1)} = (4\pi\omega_k)^{-\frac{1}{2}} e^{i(kx - \omega_k^{\text{in}}\eta)}, \quad (4.58)$$

e a função modo $F_k^{(2)}$ no futuro assintótico corresponde a

$$F_k^{(2)} = (4\pi\omega_k)^{-\frac{1}{2}} e^{i(kx - \omega_k^{\text{out}}\eta)}, \quad (4.59)$$

Desta forma, o operador campo na região-in pode ser expandido em termos dos operadores \hat{a}_k^{in} e $\hat{a}_k^{\text{in}\dagger}$:

$$\hat{\phi}_{in} = \int \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} [\hat{a}_k^{\text{in}} e^{i(kx - \omega_k^{\text{in}}\eta)} + \hat{a}_k^{\text{in}\dagger} e^{-i(kx - \omega_k^{\text{in}}\eta)}], \quad (4.60)$$

e de maneira análoga podemos expandir o operador campo na região-out em termos dos operadores \hat{a}_k^{out} e $\hat{a}_k^{\text{out}\dagger}$:

$$\hat{\phi}_{out} = \int \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} [\hat{a}_k^{\text{out}} e^{i(kx - \omega_k^{\text{out}}\eta)} + \hat{a}_k^{\text{out}\dagger} e^{-i(kx - \omega_k^{\text{out}}\eta)}], \quad (4.61)$$

O operador de aniquilação da região-out está relacionado com os operadores criação e aniquilação da região-in por uma transformação de Bogoliubov similar a equação (3.75).

Neste caso, os coeficientes de Bogoliubov obtidos de forma exata são dados por [35]

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \sqrt{\frac{\omega_k^{\text{out}}}{\omega_k^{\text{in}}}} \frac{\Gamma(1 - \frac{i\omega_k^{\text{in}}}{\rho})\Gamma(-\frac{i\omega_k^{\text{out}}}{\rho})}{\Gamma(-\frac{i\omega_+}{\rho})\Gamma(1 - \frac{i\omega_+}{\rho})}, \\ \beta_k &= \sqrt{\frac{\omega_k^{\text{out}}}{\omega_k^{\text{in}}}} \frac{\Gamma(1 - \frac{i\omega_k^{\text{in}}}{\rho})\Gamma(\frac{i\omega_k^{\text{out}}}{\rho})}{\Gamma(\frac{i\omega_-}{\rho})\Gamma(1 + \frac{i\omega_-}{\rho})},\end{aligned}\quad (4.62)$$

É importante salientar que na representação de interação, os coeficientes de Bogoliubov carregam apenas informação sobre a contribuição não interagente no processo de criação de partículas.

Vamos supor que nenhuma partícula esteja presente no passado distante, logo o estado inicial do sistema é o estado de vácuo: $|0\rangle_{\text{in}}$. Este estado evolui para um estado de partículas como consequência tanto da expansão do espaço-tempo quanto pela auto-interação do campo.

A criação de partículas devido à interação pode ser calculada usando teoria de perturbação desde que $|\lambda| \ll 1$ [78, 86]. Deste modo vamos aplicar o esquema da matrix- S na representação de interação. Assim, para baixas ordens em λ , a matrix- S é dada por

$$S = 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_I(\eta) d\eta + O(\lambda^2). \quad (4.63)$$

observe que a interação pode produzir partículas em pares ou quartetos, como mostra a figura (11).

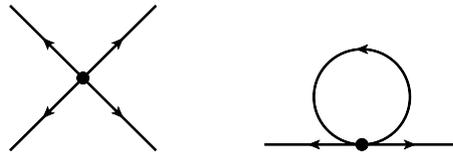


Figura 11: Representação diagramática da criação de quartetos (esquerda) e da criação de pares (direita) pela auto-interação.

A amplitude para a criação de um quarteto corresponde a

$$\begin{aligned}\text{in} \langle 1_{k_1}, 1_{k_2}, 1_{k_3}, 1_{k_4} | S | 0 \rangle_{\text{in}} &= -4!i\lambda \int d^2x \sqrt{-g} F_{k_1}^* F_{k_2}^* F_{k_3}^* F_{k_4}^*, \\ &= -i\lambda \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) B(k_1, k_2, k_3, k_4),\end{aligned}\quad (4.64)$$

onde

$$B(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{3}{\pi \sqrt{\omega_{k_1}^{\text{in}} \omega_{k_2}^{\text{in}} \omega_{k_3}^{\text{in}} \omega_{k_4}^{\text{in}}}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta C(\eta) e^{i(\omega_{k_1}^{\text{in}} + \omega_{k_2}^{\text{in}} + \omega_{k_3}^{\text{in}} + \omega_{k_4}^{\text{in}})\eta}, \quad (4.65)$$

Isso é semelhante ao processo de espalhamento de um par de partículas. A diferença essencial

é que o espalhamento ocorrer no espaço-tempo de Minkowski. Enquanto que a criação de partículas é possível apenas em um espaço-tempo curvo, onde a energia geralmente não é conservada. É importante também notar que a interação H_I é adiabaticamente desligada nas regiões assintóticas, em outras palavras, a criação de partículas devido a auto-inetração ocorre somente durante o período de expansão do espaço-tempo.

O processo de criação de um par de partículas tem amplitude

$${}_{\text{in}} \langle 1_{k_1}, 1_{k_2} | S | 0 \rangle_{\text{in}} = -12i\lambda \int d^2x \sqrt{-g} F_{k_1}^* F_{k_2}^* \int dk |F_k|^2. \quad (4.66)$$

Note que a integral $\int dk |F_k|^2$ é divergente e necessita ser regularizada e renormalizada. A divergência pode ser absorvida pela renormalização da massa [78, 81], isto é, adicionando um contratermo tipo $\frac{1}{2}\delta m^2 \phi^2$ na Lagrangiana e escolhendo $\delta m^2 = -12\lambda \langle \phi^2 \rangle$ renormaliza a amplitude da criação de um par de partículas para zero.

Dessa forma, no futuro assintótico, o estado do sistema torna-se [78, 87, 88]

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} |\psi\rangle = N \left[|0\rangle_{\text{in}} + \frac{1}{4!} \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 {}_{\text{in}} \langle 1_{k_1}, 1_{k_2}, 1_{k_3}, 1_{k_4} | S | 0 \rangle_{\text{in}} |1_{k_1}, 1_{k_2}, 1_{k_3}, 1_{k_4}\rangle_{\text{in}} \right], \quad (4.67)$$

onde $4!$ é o fator de simetria e para garantir que $|\psi\rangle$ é normalized, devemos impor a condição de que

$$|N|^{-2} = 1 + \frac{1}{4!} \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 {}_{\text{in}} \langle 1_{k_1}, 1_{k_2}, 1_{k_3}, 1_{k_4} | S | 0 \rangle_{\text{in}}|^2. \quad (4.68)$$

Aplicando o operador “comprimido” de dois modos:

$$\mathcal{S} \equiv \exp \left(\sum_q r a_q a_{-q} - r^* a_q^\dagger a_{-q}^\dagger \right),$$

em ambos os lados da equação (4.67) e usando a relação

$$\begin{aligned} \mathcal{S} |1_{k_1} \dots 1_{k_n}\rangle_{\text{in}} &= \mathcal{S} a_{k_1}^{\dagger \text{in}} \mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} \dots a_{k_n}^{\dagger \text{in}} \mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} |0\rangle_{\text{in}} \\ &= (\alpha_{k_1}^* a_{k_1}^{\dagger \text{in}} + \beta_{k_1}^* a_{-k_1}^{\text{in}}) \dots (\alpha_{k_n}^* a_{k_n}^{\dagger \text{in}} + \beta_{k_n}^* a_{-k_n}^{\text{in}}) \bigotimes_q \sum_n c_n^q |n_q, n_{-q}\rangle_{\text{in}}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

podemos construir a matriz densidade

$$\hat{\rho}_{p,-p} = \mathcal{S} |\psi\rangle_{\text{in}} \langle \psi | \mathcal{S}^\dagger \quad (4.70)$$

para um particular modo $q = p$.

Note que o estado $\hat{\rho}_{p,-p}$ é um estado puro com uma correlção entre os modos de p e $-p$.

Podemos usar a entropia de von Neumann para quantificar o emaranhamento entre esses modos. Neste propósito, vamos primeiro calcular a matrix densidade reduzida $\hat{\rho}_p$ tomando o traço parcial sobre os modos com momento $-p$ [89]

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_p &= \sum_m \langle \bar{m}_{-p} | \hat{\rho}_{p,-p} | \bar{m}_{-p} \rangle \\ &= \sum_n |c_n^p|^2 \left(1 + \lambda(10n^2 + 14n + 6) \text{Re}[(\alpha_p^*)^2 (\beta_p^*)^2 B(p)] \right) |\bar{n}_p\rangle \langle \bar{n}_p|,\end{aligned}\quad (4.71)$$

onde

$$c_n^p = \sqrt{1 - \gamma_q} \left(\frac{\beta_q}{\alpha_q} \right)^n, \quad \text{com} \quad \gamma_q = \left| \frac{\beta_q}{\alpha_q} \right|^2, \quad (4.72)$$

e $B(p) = B(k_1, \dots, k_4)$ para $k_i \rightarrow \pm p$. Num espaço-tempo bidimensional $B(P) \neq 0$, isso significa que a auto-interação destrói a invariância conforme da teoria. Note também que o primeiro termo da equação (4.71) é justamente a contribuição do campo livre, enquanto que o segundo termo expressa a contribuição da interação em $O(\lambda)$. Neste caso, $B(p)$ é dado por

$$\begin{aligned}B(p) &= \frac{i}{4\omega_k^{\text{in}}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta C^2(\eta) e^{-4i\omega_k^{\text{in}}\eta} \\ &= \frac{i\pi(1 + \epsilon)\delta(4\omega_k^{\text{in}})}{2\omega_k^{\text{in}}} + \frac{i\epsilon}{4\omega_k^{\text{in}}} f(4\omega_k^{\text{in}}),\end{aligned}\quad (4.73)$$

onde

$$f(4\omega_k^{\text{in}}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \tanh(\rho\eta) e^{-4i\omega_k^{\text{in}}\eta}.$$

Esta integral é calculada de maneira similar a (3.87) no capítulo 3. Novamente, o primeiro termo não contribui no resultado final da matrix densidade reduzida. Logo, encontramos a seguinte expressão para $B(p)$:

$$B(p) = \frac{\epsilon}{4\omega_k^{\text{in}}\rho} \frac{\pi}{\sinh\left(\frac{2\pi\omega_k^{\text{in}}}{\rho}\right)}. \quad (4.74)$$

De posse desses resultados, podemos quantificar emaranhamento entre os modos de campo $-p$ e p via entropia de von Neumann. Desde que, a matrix densidade reduzida $\hat{\rho}_p$ é uma matrix diagonal com auto-valores

$$\Lambda_n^{(\lambda)} = |c_n^p|^2 \left[1 + \lambda(10n^2 + 14n + 6) \text{Re}((\alpha_p^*)^2 (\beta_p^*)^2 B(p)) \right], \quad (4.75)$$

a entropia de von Neumann é dada por

$$S_{vN} = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{(\lambda)} \log_2 \Lambda_n^{(\lambda)}. \quad (4.76)$$

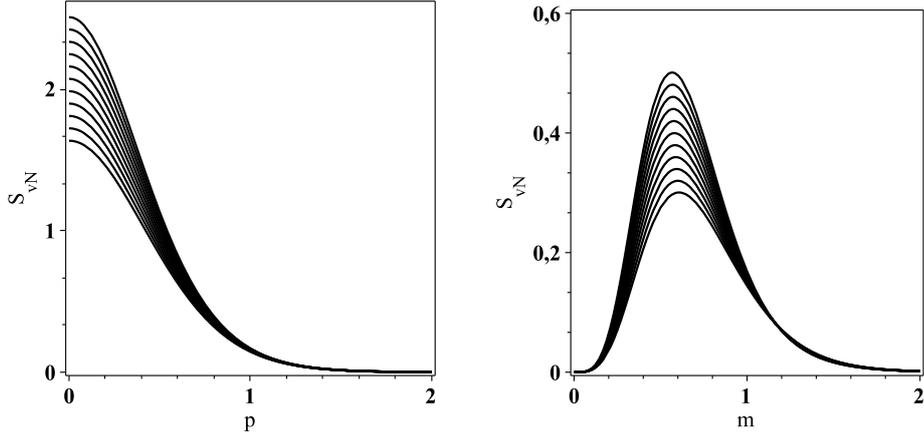


Figura 12: Plot da entropia de von Neumann como função do momento p (esquerda) com $\rho = m = \epsilon = 1$ e como função da massa m (direita) com $\rho = p = \epsilon = 1$, ambos para diferentes valores da constante de acoplamento $0 \leq \lambda < 1$. Os picos mais altos correspondem a acoplamentos mais fortes.

O comportamento espectral da entropia de emaranhamento S_{vN} sugere que os efeitos da auto-interação são importantes para pequenos valores de p , como mostra a figura (12). Isso significa que a auto-interação amplifica os modos de baixa frequência do campo escalar produzindo um aumento na correlação quântica entre os pares de partículas criadas pela expansão do espaço-tempo.

Outra maneira de quantificar a correlação quântica entre os modos p e $-p$ é examinar a covariância dos operadores números. Esta é definida como

$$\text{Cov}(\hat{n}_p^{\text{out}}, \hat{n}_{-p}^{\text{out}}) = \langle \hat{n}_p^{\text{out}} \hat{n}_{-p}^{\text{out}} \rangle - \langle \hat{n}_p^{\text{out}} \rangle \langle \hat{n}_{-p}^{\text{out}} \rangle, \quad (4.77)$$

onde os operadores números em cada modo é dado por

$$\begin{aligned} \hat{n}_p^{\text{out}} &= a_p^{\text{out}\dagger} a_p^{\text{out}}, \\ &= |\alpha_p|^2 a_p^{\text{in}\dagger} a_p^{\text{in}} + \alpha_p^* \beta_p a_p^{\text{in}\dagger} a_{-p}^{\text{in}\dagger} + \alpha_p \beta_p^* a_{-p}^{\text{in}} a_p^{\text{in}} + |\beta_p|^2 a_{-p}^{\text{in}} a_{-p}^{\text{in}\dagger}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \hat{n}_{-p}^{\text{out}} &= a_{-p}^{\text{out}\dagger} a_{-p}^{\text{out}}, \\ &= |\alpha_p|^2 a_{-p}^{\text{in}\dagger} a_{-p}^{\text{in}} + \alpha_p^* \beta_p a_{-p}^{\text{in}\dagger} a_p^{\text{in}\dagger} + \alpha_p \beta_p^* a_p^{\text{in}} a_{-p}^{\text{in}} + |\beta_p|^2 a_p^{\text{in}} a_p^{\text{in}\dagger}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

Devido à correlação e à simetria entre os dois modos, o número médio em cada modo é o mesmo. Por exemplo, a média dos operadores numéricos para o estado (4.67) é

$$\langle \hat{n}_p^{\text{out}} \rangle = \langle \hat{n}_{-p}^{\text{out}} \rangle = |\beta_p|^2 + O(\lambda^2). \quad (4.80)$$

Deste modo, a covariância corresponde a

$$\begin{aligned} \text{Cov}^{(\lambda)}(\hat{n}_p^{\text{out}}, \hat{n}_{-p}^{\text{out}}) &= |\alpha_p|^2 |\beta_p|^2 + \frac{\lambda}{12} \text{Re}[(\alpha_p^* \beta_p)^2 B(p)], \\ &= |\alpha_p|^2 |\beta_p|^2 + \text{Re}[(\alpha_p^* \beta_p)^2] \frac{\lambda \epsilon}{48 \rho \omega_p^{\text{in}}} \frac{\pi}{\sinh(\frac{2\pi \omega_p^{\text{in}}}{\rho})} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Para o estado que não contém correlação entre os modos, o valor da covariância será zero. O primeiro termo em $\text{Cov}^{(\lambda)}(\hat{n}_p^{\text{out}}, \hat{n}_{-p}^{\text{out}})$ refere-se ao emaranhamento entre os modos do campo escalar livre. Enquanto que os outros dois termos representam o efeito da interação. Este resultado corrobora com a entropia de von Neumann (4.76), onde o aumento no emaranhamento entre os modos de momentos opostos é o efeito combinado da expansão cósmica através das transformações de Bogoliubov e da auto-interação gerando um acoplamento não trivial entre os modos do campo escalar. Observe que o último termo em (4.81) pode ser interpretado como uma contribuição térmica sobre o emaranhamento entre os modos p e $-p$. Por uma análise numérica desta expressão, resumida na figura 13, verificamos que na presença de uma auto-interação há um aumento na quantidade de emaranhamento gerado entre os modos de momentos opostos de campo ϕ durante o período de expansão.

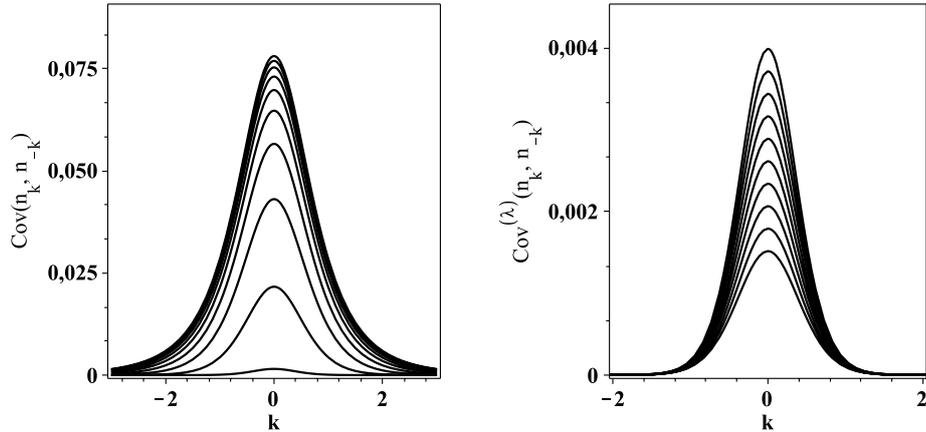


Figura 13: Plot de $\text{Cov}^{(\lambda)}(\hat{n}_p^{\text{out}}, \hat{n}_{-p}^{\text{out}})$ como uma função do momento p para diferentes valores do parâmetro de expansão $\rho = 1..10$ (figura da esquerda) com $\lambda = 0$, $m = 1$ and $\epsilon = 1$ e para diferentes valores da constante de acoplamento $0 < \lambda < 1$ (figura da direita), com $m = 1$ e $\rho = \epsilon = 1$.

Similarmente a entropia de von Neumann (4.76), o comportamento espectral da covariância $\text{Cov}^{(\lambda)}(\hat{n}_p^{\text{out}}, \hat{n}_{-p}^{\text{out}})$ mostra um crescimento rápido para pequenos valores de p . Isto significa que existem estados para os quais pequenos valores de momentum p produzem um aumento relativo na correlação quântica pelo efeito de amplificação da interação. O ponto principal da discussão é que essa amplificação favorece a codificação de informações sobre o espaço-tempo subjacente no emaranhamento entre os modos do campo. Assim, é ne-

cessária uma exploração mais aprofundada das propriedades do emaranhamento para campos quânticos interagindo no espaço-tempo curvo, em especial o espaço-tempo em expansão.

4.4 Emaranhamento entre dois campos escalares

Nesta seção vamos estudar os efeitos da expansão do espaço-tempo sobre a interação entre os modos de um campo escalar sem massa ϕ e de um campo escalar massivo ψ . Estes campos escalares interagem mutuamente e formam um sistema quântico bipartido. Nosso principal objetivo consiste em obter algum “*insight*” como termalização gerado pela expansão do espaço-tempo é afetada por uma interação mútua entre dois campos.

Considere dois campos escalares ϕ e ψ no espaço-tempo Robertson-Walker bidimensional com métrica (4.49). A ação que descreve o sistema é dada por

$$S_{\phi\psi} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi + m^2 \psi^2 + 2\lambda_{\phi\psi} \phi \psi],$$

onde $\lambda_{\phi\psi}$ é a constante de acoplamento normalizada, tal que $|\lambda_{\phi\psi}| \ll 1$. De maneira similar ao modelo $\lambda\phi^4$ na seção anterior, as dinâmicas dos campos ϕ e ψ na representação de interação são governadas pelas equações de Klein-Gordon no espaço-tempo curvo

$$\square\phi(\eta, x) = 0, \quad (4.82)$$

$$(\square + m^2)\psi(\eta, x) = 0, \quad (4.83)$$

e o vetor estado do sistema $|\Psi\rangle$ satisfaz a equação de Schrödinger (4.52), só que nesse caso o Hamiltoniano de interação H_I é dado por [90]

$$H_I = \lambda_{\phi\psi} \int dx \sqrt{-g} \phi(\eta, x) \psi(\eta, x). \quad (4.84)$$

A quantização canônica dos campos ϕ e ψ são indênticas para o caso livre. Dessa forma, temos que

$$\phi(x, \eta) = \int dk (a_k \phi_k + a_k^\dagger \phi_k^*), \quad (4.85)$$

$$\psi(x, \eta) = \int dk (b_k \psi_k + b_k^\dagger \psi_k^*), \quad (4.86)$$

com

$$\phi_k(x, \eta) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} u_k(\eta), \quad (4.87)$$

$$\psi_k(x, \eta) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} v_k(\eta), \quad (4.88)$$

onde os operadores a_k , a_k^\dagger , b_k e b_k^\dagger satisfazem as relações de comutação $[a_k, a_{k'}^\dagger] = [b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$, e u_k e v_k são soluções das equações

$$u_k''(\eta) + k^2 u_k(\eta) = 0, \quad (4.89)$$

$$v_k''(\eta) + (k^2 + a^2(\eta)m^2)v_k(\eta) = 0. \quad (4.90)$$

Neste cenário em que o espaço-tempo possui regiões assintóticas estacionárias, as soluções da equação (4.89) nas regiões assintóticas são equivalentes, ou seja,

$$u_k^{\text{in}} = u_k^{\text{out}} = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}}. \quad (4.91)$$

Observe que no caso particular do espaço-tempo com duas dimensões a teoria do campo escalar sem massa é conformalmente invariante. Portanto, as soluções da equação (4.90) nas regiões assintóticas são

$$v_k^{\text{in}} = \frac{e^{-i\omega_k^{\text{in}}\eta}}{\sqrt{2\omega_k^{\text{in}}}}, \quad \text{região-in}, \quad (4.92)$$

$$v_k^{\text{out}} = \frac{e^{-i\omega_k^{\text{out}}\eta}}{\sqrt{2\omega_k^{\text{out}}}}, \quad \text{região-out}. \quad (4.93)$$

Estas soluções assintóticas estão relacionadas via uma transformação de Bogoliubov

$$v_k^{\text{in}}(\eta) = \alpha_k v_k^{\text{out}}(\eta) + \beta_{-k} v_k^{\text{out}*}(\eta), \quad (4.94)$$

onde os coeficientes de Bogoliubov α_k e β_k são dados em (4.62) e satisfazem a condição de normalização $|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1$.

Agora, vamos supor que o sistema composto ϕ e ψ no passado distante, está no estado estado de vácuo inicial $|0_k^\phi 0_p^\psi\rangle_{\text{in}}$. Este estado de vácuo é aniquilado pelos operadores a_k e b_p , onde denotamos o vácuo para o campo ϕ por $|0_k^\phi\rangle_{\text{in}}$ e para o campo ψ por $|0_p^\psi\rangle_{\text{in}}$. Assim, a criação de partículas devido à interação mútua pode ser calculada aplicando o esquema da matrix- S na representação de interação. Para a ordem $\lambda_{\phi\psi}$, a matrix- S é

$$S = 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_I d\eta = 1 - i\lambda_{\phi\psi} \int d^2x \sqrt{-g} \phi \psi. \quad (4.95)$$

Note que para a primeira ordem em teoria de perturbação a interação mútua pode produzir partículas em pares (14), onde a amplitude de probabilidade é dada por

$$\begin{aligned} {}_{\text{in}}\langle 1_k^\phi; 1_p^\psi | S | 0_k; 0_p \rangle_{\text{in}} &= -2! i \lambda_{\phi\psi} \int d^2x \sqrt{-g} \phi_k^* \psi_p^*, \\ &= \lambda_{\phi\psi} \delta(k+p) A(k, p), \end{aligned} \quad (4.96)$$

com

$$A(k, p) = \frac{-i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta a^2(\eta) u_k^{\text{in}*}(\eta) v_p^{\text{in}*}(\eta). \quad (4.97)$$

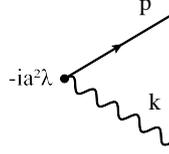


Figura 14: Representação diagramática da criação de um par de partículas do vácuo pela interação mútua, onde p representa as partículas massivas do campo ϕ e k representa as partículas sem massa do campo ψ .

Inserindo as funções assintóticas (4.91) e (4.92) em $A(k, p)$, obtemos

$$\begin{aligned} A(k, p) &= \frac{-i}{2\pi\sqrt{k\omega_p}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta a^2(\eta) e^{-i(k+\omega_p)\eta}, \\ &= \frac{\pi(1+\epsilon)\delta(k+\omega_p)}{\sqrt{k\omega_p}} + \frac{\epsilon}{\sqrt{2k\omega_p\rho}} \frac{1}{k+\omega_p} \frac{\pi}{\sinh(\frac{\pi}{2\rho}(k+\omega_p))}, \end{aligned} \quad (4.98)$$

onde a integral em η tem sido calculada de maneira similar a (4.73). Novamente, o primeiro termo proporcional à função delta não contribui. Assim, temos

$$A(k, p) = \frac{\epsilon}{\sqrt{2k\omega_p\rho}} \frac{1}{k+\omega_p} \frac{\pi}{\sinh(\frac{\pi}{2\rho}(k+\omega_p))}. \quad (4.99)$$

Assim, o estado inicial do sistema total em ordem $\lambda_{\phi\psi}$ é dado por

$$|\Psi\rangle = N[|0_k^\phi; 0_p^\psi\rangle_{\text{in}} + \frac{1}{2!} \int dk dp_{\text{in}} \langle 1_k^\phi; 1_p^\psi | S | 0_k; 0_p \rangle_{\text{in}} |1_k^\phi; 1_p^\psi\rangle_{\text{in}} + \dots],$$

onde $2!$ é o fator de simetria e N é a constante de normalização

$$N^{-2} = 1 + \frac{1}{2!} \int dk dp_{\text{in}} |\langle 1_k^\phi; 1_p^\psi | S | 0_k; 0_p \rangle_{\text{in}}|^2. \quad (4.100)$$

Percebe-se que (4.100) é um genuíno estado emaranhado descrito pelo espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\phi \otimes \mathcal{H}_\psi$. Isso significa que a interação mútua gera um sistema quântico bipartido formado pelos campos ϕ e ψ .

Considere que o estado de vácuo $|0_p^\psi\rangle_{\text{in}}$ no passado assintótico corresponde a um estado comprimido de dois modos do ponto de vista de um observador inercial no futuro assintótico

$$|0_p^\psi\rangle_{\text{in}} = \sqrt{1-\gamma_p} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_p^n |n_p^\psi, n_{-p}^\psi\rangle, \quad (4.101)$$

onde $\gamma_p = \left| \frac{\beta_p}{\alpha_p} \right|^2$. Desde que estamos trabalhando com um único modo, vamos fixar o índice de frequência k . Similarmente, o estado e uma partícula $|1_p^\psi\rangle_{\text{in}}$ evolui como

$$|1_p^\psi\rangle_{\text{in}} = (1 - \gamma_p) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_p^n \sqrt{n+1} |n+1_p^\psi, n_{-p}^\psi\rangle. \quad (4.102)$$

No entanto, note que pelo fato do campo ϕ não possui massa $m = 0$ a invariância conforme é preservada e como consequência temos que os estados de vácuos das regiões assintóticas são equivalentes, isto é, $|0_k^\phi\rangle_{\text{in}} = |0_k^\phi\rangle$.

Usando as equações (4.101) e (4.102), podemos reescrever a equação (4.100) em termos dos modos da região-out para o campo ψ

$$|\Psi\rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} [\sqrt{1 - \gamma_p} \gamma_p^n |0_k^\phi; n_p^\psi, n_{-p}^\psi\rangle + \lambda_{\phi\psi} \int dp A(p, -p) (1 - \gamma_p) \gamma_p^n \sqrt{n+1} |1_k^\phi; n+1_p^\psi, n_{-p}^\psi\rangle + \dots],$$

Este estado nos permite construir a matriz de densidade de todo o estado tripartido $\hat{\rho}_{k,p,-p}^{\phi\psi} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, onde inclui os modos de ambos os campos. Uma vez que um observador inercial na região-out não tem acesso aos modos $-p$, o estado $\hat{\rho}_{k,p,-p}^{\phi\psi}$ será projetado em um estado misto, tomando o traço sobre todos os estados com modos $-p$

$$\hat{\rho}_k^{\phi\psi} = \text{Tr}_{-p}[\hat{\rho}_{k,p,-p}^{\phi\psi}] = (1 - \gamma_k) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_k^n \hat{\rho}_n^{\phi\psi}, \quad (4.103)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_n^{\phi\psi} &= |0_k^\phi; n_k^\psi\rangle\langle 0_k^\phi; n_k^\psi| \\ &+ \lambda_{\phi\psi} A(k) \sqrt{1 - \gamma_k} \sqrt{n+1} |1_k^\phi; n+1_k^\psi\rangle\langle 0_k^\phi; n_k^\psi| \\ &+ \lambda_{\phi\psi} A^*(k) \sqrt{1 - \gamma_k} \sqrt{n+1} |0_k^\phi; n_k^\psi\rangle\langle 1_k^\phi; n+1_k^\psi| \\ &+ \lambda_{\phi\psi}^2 |A(k)|^2 (1 - \gamma_k) (n+1) |1_k^\phi; n+1_k^\psi\rangle\langle 1_k^\phi; n+1_k^\psi| \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (4.104)$$

Agora, vamos calcular o emaranhamento entre os modos dos campos ϕ e ψ usando a medida de negatividade logarítmica definida em (2.26) no capítulo 2, onde a matriz transposta parcial é obtida fazendo a permutação $|n_k^\phi; n_k^\psi\rangle\langle m_k^\phi; m_k^\psi| \rightarrow |m_k^\phi; n_k^\psi\rangle\langle n_k^\phi; m_k^\psi|$

$$\hat{\rho}_k^{\phi\psi\text{T}} = (1 - \gamma_k) \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_k^n \hat{\rho}_n^{\phi\psi\text{T}}, \quad (4.105)$$

com

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_n^{\phi\psi\Gamma} &= |0_k^\phi; n_k^\psi\rangle\langle 0_k^\phi; n_k^\psi| \\
&+ \lambda_{\phi\psi} A(k) \sqrt{1 - \gamma_k} \sqrt{n + 1} |0_k^\phi; n + 1_k^\psi\rangle\langle 1_k^\phi; n_k^\psi| \\
&+ \lambda_{\phi\psi} A^*(k) \sqrt{1 - \gamma_k} \sqrt{n + 1} |1_k^\phi; n_k^\psi\rangle\langle 0_k^\phi; n + 1_k^\psi| \\
&+ \lambda_{\phi\psi}^2 |A(k)|^2 (1 - \gamma_k) (n + 1) |1_k^\phi; n + 1_k^\psi\rangle\langle 1_k^\phi; n + 1_k^\psi| \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{4.106}$$

Note que essa matrix tem dimensão infinita, no entanto ele também tem uma estrutura diagonal que permite uma diagonalização bloco por bloco. Em particular, considere a matrix densidade no setor $(n, n + 1)$, onde cada bloco tem a forma

$$\hat{\rho}_n^{\phi\psi\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\phi\psi}^2 |A(k)|^2 (k)n(1 - \gamma_k)\gamma_k^{-1} & \lambda_{\phi\psi} A(k) \sqrt{1 - \gamma_k} \sqrt{n + 1} & 0 \\ 0 & \lambda_{\phi\psi} A^*(k) \sqrt{1 - \gamma_k} \sqrt{n + 1} & \gamma_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\phi\psi}^2 |A(k)|^2 (1 - \gamma_k) (n + 1) \end{pmatrix},$$

onde temos usado a base $\{|0_k^\phi; n_k^\psi\rangle, |0_k^\phi; n + 1_k^\psi\rangle, |1_k^\phi; n_k^\psi\rangle, |1_k^\phi; n + 1_k^\psi\rangle\}$. Note que os autovalores correspondentes à primeira e última entradas diagonais da matriz são sempre positivos. Dessa forma, vamos simplesmente diagonalizar a matriz

$$\hat{\rho}_n^{\phi\psi\Gamma} = \begin{pmatrix} \lambda_{\phi\psi}^2 |A(k)|^2 \frac{(1 - \gamma_k)n}{\gamma_k} & \lambda_{\phi\psi} A(k) \sqrt{1 - \gamma_k} \sqrt{n + 1} \\ \lambda_{\phi\psi} A^*(k) \sqrt{1 - \gamma_k} \sqrt{n + 1} & \gamma_k \end{pmatrix}$$

Os autovalores da matriz são

$$\nu_{\pm} = \frac{(1 - \gamma_k)\gamma_k^n}{2} \left[\frac{\lambda_{\phi\psi}^2 A^2(k)n(1 - \gamma_k)}{\gamma_k} \pm \sqrt{Z_n} \right], \tag{4.107}$$

com

$$Z_n = \left(\frac{\lambda_{\phi\psi}^2 A^2(k)n(1 - \gamma_k)}{\gamma_k} \right)^2 + 4\lambda_{\phi\psi}^2 A^2(k)(1 - \gamma_k).$$

Observe que os autovalores dependem dos valores de $\lambda_{\phi\psi}$, ϵ e ρ . Em particular, Para $\lambda_{\phi\psi}$, ϵ e ρ finitos, um dos autovalores é sempre negativo. Somente no limite $\epsilon, \rho \rightarrow \infty$ o autovalor negativo será zero ($\nu \rightarrow 0$). Segue-se que a negatividade logarítmica é dada por

$$E_{\mathcal{N}} = \log_2 \left[1 + \lambda_{\phi\psi}^2 A^2 + \gamma_k + \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \gamma_k)\gamma_k^n \sqrt{Z_n} \right]. \tag{4.108}$$

Por uma análise numérica desta expressão, resumida na figura (15), nossa primeira observação é que o emaranhamento gerado pela interação mútua entre os campos ϕ e ψ tende a degradar durante o período de expansão do espaço-tempo. Podemos observar também que

para um $\lambda_{\phi\psi}$ fixo, o grau de emaranhamento aumenta até alcançar um valor máximo para $\rho = \rho_{max}$ e decresce para $\rho > \rho_{max}$. Além disso, é importante notar que o valor máximo da negatividade logarítmica é amplificado quando a constante de acoplamento aumenta. Isso deve-se ao fato de que a interação mútua destrói a simetria conforme da teoria, e consequentemente amplifica a geração de partículas pela expansão do espaço-tempo.

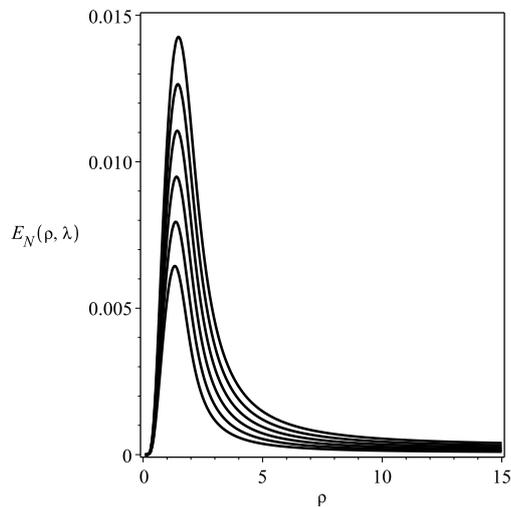


Figura 15: A negatividade logarítmica como função de ρ para diferentes constantes de acoplamentos $0.0005 \leq \lambda_{\phi\psi} < 0.001$ com $k = m = 1$ e $\epsilon = 40$, onde os picos espectrais mais elevados correspondem a acoplamentos fortes.

Observe que os efeitos da degradação, contrariando a produção de emaranhamento pela interação, é dominante no regime de expansão rápida, de modo que uma diminuição do grau de emaranhamento entre os campos é esperada no futuro distante. Entretanto, no limite de expansões suave $\frac{\rho}{\omega_k} \ll 1$ o emaranhamento entre os campos quânticos gerado no início do universo pode sobreviver o período de expansão do espaço-tempo devido à coerência induzida pela interação. Isso sugere que durante o período de expansão cósmica, a contribuição da interação é muito importante para a sobrevivência das correlações quânticas e que extensões mais realistas das idéias exploradas aqui podem levar a efeitos observáveis interessantes. Desde que, recentes pesquisas tem mostrado que um estado inicialmente emaranhado entre dois campos escalares livres no espaço-tempo de Sitter, universo inflacionário, pode afetar observáveis cosmológicos, como o espectro de flutuação e outras funções de correlação do inflaton [91, 92].

Capítulo 5

Considerações Finais

A principal proposta da informação quântica relativística é desenvolver uma teoria da informação quântica que seja compatível com a estrutura relativística do espaço-tempo. Recentemente, tem havido uma série de estudos nessa área por Ivette Fuentes e colaboradores [35, 36, 93] mostrando que a gravidade e movimentos não-inerciais podem servir para melhorar protocolos de informação quântica. Essa tese de doutorado visa dar uma contribuição para tal desenvolvimento.

Neste trabalho estudamos a quantização dos campos escalares e fermiônicos num espaço-tempo em expansão (espaço-tempo Robertson-Walker) com duas regiões estacionárias, uma no passado distante e outra no futuro assintótico. Exploramos uma aproximação perturbativa para calcular os coeficientes de Bogoliubov, com o objetivo de quantificar os efeitos do acoplamento não-mínimo sobre a criação de partículas. Encontramos que o acoplamento não-mínimo do campo escalar com a gravidade pode simular a geração de partículas pelo campo fermiônico no espaço-tempo em expansão. Neste caso, existe um modo privilegiado que é mais sensível aos parâmetros de expansão. Isso sugere que fixando o parâmetro ϵ a informação sobre ρ está codificada na curva espectral do número médio de partículas. Assim, conclui-se que existe uma diferença substancial entre a física dos dois tipos de acoplamento, em outras palavras, o acoplamento não-mínimo guarda mais informação sobre a estrutura do espaço-tempo em expansão quando comparado com o acoplamento mínimo.

Examinamos um protocolo de teletransporte quântico num espaço-tempo em expansão, onde dois observadores comóveis, Alice e Bob, compartilham um estado maximalmente emaranhado no passado distante e no futuro assintótico desejam teletransportar um qubit. Encontramos que a medida de fidelidade sofre uma redução devido à expansão do espaço-tempo. Do ponto de vista operacional, isso significa que o emaranhado do estado compartilhado, canal quântico, degrada durante o período de expansão do espaço-tempo. Além disso, en-

contamos também que quando ρ é grande a fidelidade para o caso fermiônico satura para um valor fixo. Esse resultado reflete o fato que o princípio de exclusão de Pauli limita o setor de excitação para campos fermiônicos. Já para o caso bosônico na condição de acoplamento mínimo ($\xi = 0$) a fidelidade assume valores próximos de zero. Esses resultados sugerem que o emaranhamento entre modos fermiônicos são menos afetados pela expansão cósmica e Bob pode completar o protocolo com menor probabilidade de erro que no caso bosônico.

Ao analisar o campo bosônico acoplado conformemente, vimos que a redução da fidelidade é bem menor que o caso de acoplamento mínimo e qualitativamente semelhante ao caso fermiônico. Isso sugere que o acoplamento não-mínimo do campo com a gravidade significativamente contribui para minimizar os efeitos da expansão do espaço-tempo sobre o protocolo do teletransporte quântico entre dois observadores inerciais.

Investigamos também como uma auto-interação afeta a quantidade de informações codificadas no emaranhamento gerado entre os modos de um campo escalar depois do período de expansão. Para quantificar tal efeito calculamos a entropia de von Neumann e a covariância dos operadores números em primeira ordem na constante de acoplamento. Verificamos que na presença de uma auto-interação há um aumento na quantidade de emaranhamento gerado entre os modos de momentos opostos de um campo escalar. Este aumento no emaranhamento é resultado do efeito combinado da expansão do espaço-tempo, através das transformações de Bogoliubov, e da auto-interação gerando um acoplamento não trivial entre os modos do campo escalar. O ponto principal dessa discussão é que essa amplificação favorece a codificação da informação sobre a expansão do espaço-tempo no emaranhamento gerado depois da expansão.

Além disso, estudamos os efeitos da expansão do espaço-tempo sobre interação entre os modos de um campo escalar sem massa ϕ e de um campo escalar massivo ψ . Este campos esclares interagem mutuamente e formam um sistema quântico bipartido. Neste caso, observamos que os efeitos da degradação, contrariando a produção de emaranhamento pela interação, é dominante no regime de expansão rápida, de modo que uma diminuição do emaranhamento é esperada acontecer no futuro distante. Entretanto, no limite de expansão suave $\frac{\rho}{\omega_k} \ll 1$ o emaranhamento entre os campos quânticos gerado no início do universo pode sobreviver depois do período de expansão.

Nossos resultados mostram que durante o período de expansão cósmica, a contribuição da interação é muito importante para a sobrevivência das correlações quânticas e que extensões mais realistas das idéias exploradas aqui podem levar a efeitos observáveis interessantes. Desde que, recentemente tem sido mostrado que um estado inicialmente emaranhado entre dois campos escalares livres no espaço-tempo de Sitter podem afetar observáveis cos-

mológicos, por exemplo, as funções de correlação do inflaton [91, 92]. Isso é muito interessante, já é sabido que o emaranhamento e a coerência quântica são extremamente frágeis a dinâmica do espaço-tempo.

Outro aspecto importante deste problema que merece uma exploração mais aprofundada está relacionado com a natureza da interação. Uma via possível para pesquisas futuras nesta linha é estudar o efeito de outros tipos de interações, por exemplo, interação fraca responsável pelo decaimento radioativo, interação de Yukawa ($g\phi\psi\bar{\psi}$), espalhamento pion-proton ($g\phi^2\psi\bar{\psi}$), interação eletromagnética e outros processos interagentes.

Apêndice **A**

Apêndice A

Nesse apêndice será apresentada uma lista de publicações associadas e não associadas à esta dissertação.

A.1 Trabalhos publicados associados à tese

- Helder Alexander, Gustavo de Souza, Paul Mansfield and Marcos Sampaio, *Alice and Bob in an expanding spacetime*, EPL **111** (2015) 60001.
- Helder Alexander, Gustavo de Souza, Paul Mansfield, I. G. da Paz and Marcos Sampaio, *Entanglement of self-interacting scalar fields in an expanding spacetime*, EPL **115** (2016) 10006.
- Helder Alexander, I. G. da Paz and Marcos Sampaio, *Entanglement between two scalar fields in an expanding spacetime*, Mod. Phys. Lett. A **32** (2017) 1750104.

A.2 Trabalhos publicados não associados à tese

- Irismar da Paz, Carlos Vieira, Robert Ducharme, Luis Cabral, Helder Alexander and Marcos Sampaio, *Gouy phase in non-classical paths in triple-slit interference experiment*, Phys. Rev. A **93** (2016) 033621.
- Oziel de Araujo, Helder Alexander, Marcos Sampaio and Irismar da Paz, *Nonlocal single particle correlations and EPR state in the double-slit experiment*. Submetido (2017). arXiv:1702.06617.

- Ricardo Faleiro, Rafael Pavão, Helder Alexander, Brigitte Hiller, Alex Blin and Marcos Sampaio, *Momentum correlations of scattered particles in quantum field theory: one-loop entanglement generation*. Submetido (2016). arXiv:1607.01715.

Referências

- 1 N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Spaces*. Cambridge University Press (1982).
- 2 L. E. Parker and D. J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime*. Cambridge University Press (2009).
- 3 V. F. Mukhanov and S. Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, Cambridge University Press (2007).
- 4 R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole*. University of Chicago Press (1994).
- 5 L. Parker, *Phys. Rev.* **183**, 1057 (1975).
- 6 S. W. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974).
- 7 S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- 8 W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).
- 9 S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* **7**, 2850 (1973).
- 10 P. C. W. Davies, *Journal of Phys. A* **8**, 609 (1975).
- 11 W. G. Unruh, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1351 (1981).
- 12 M. S. Turner, *Nature* **297**, 379 (1982).
- 13 P. C. W. Davies, *Chaos* **11**, 539 (2001).
- 14 D. A. T. Vanzella and G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 151301 (2001).
- 15 G. Taubes, *Science* **285**, 512 (1999).
- 16 I. Fuentes-Schuller and R. B. Mann, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 120404 (2005).
- 17 L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4643 (2000).
- 18 P. D. Nation, M. P. Blencowe, A. J. Rimberg and E. Buks, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 087004 (2009).

- 19 B. Horstmann, B. Reznik, S. Fagnocchi and J. I. Cirac, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 250403 (2010).
- 20 T. G. Philbin, C. Kuklewicz, S. Robertson, S. Hill, F. König and U. Leonhardt, *Science* **319**, 1367 (2008).
- 21 G. J. Milburn and P. M. Alsing, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 180404 (2003).
- 22 I. Fuentes-Schuller and R. B. Mann, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 120404 (2005).
- 23 A. Peres and D. R. Terno, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 93 (2004).
- 24 M. Aspelmeyer, H. R. Böhm, T. Gyatso, T. Jennewein, R. Kaltenbaek, M. Lindenthal, G. Molina-Terriza, A. Poppe, K. Resch, M. Taraba, R. Ursin, P. Walther and A. Zeilinger, *Science* **301**, 621 (2003).
- 25 C.-Z. Peng, T. Yang, X.-H. Bao, J. Zhang, X.-M. Jin, F.-Y. Feng, B. Yang, J. Yang, J. Yin, Q. Zhang, N. Li, B.-L. Tian and J.-W. Pan, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 150501 (2005).
- 26 D. E. Bruschi, C. Sabín, A. White, V. Baccetti, D. K. L. Oi and I. Fuentes, *New J. Phys.* **16**, 053041 (2014).
- 27 D. E. Bruschi, T. C. Ralph, I. Fuentes, T. Jennewein and M. Razavi, *Phys. Rev. D* **90**, 045041 (2014).
- 28 D. K. Oi, A. Ling, J. A. Grieve, T. Jennewein, A. N. Dinkelaker and M. Krutzik, *Cont. Phys.* **58**, 25 (2017).
- 29 L. C. Céleri, A. G. S. Landulfo, R. M. Serra and G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. A* **81**, 062130 (2010).
- 30 P. M. Alsing and I. Fuentes, *Classical and Quantum Gravity* **29**, 224001 (2012).
- 31 A. G. S. Landulfo and G. E. A. Matsas, *Phys. Rev. A* **79**, 044103 (2009).
- 32 D. Su and T. C. Ralph, *Phys. Rev. D* **90**, 084022 (2015).
- 33 J. Feng, W. L. Yang, Y. Z. Zhang and H. Fan, *Phys. Lett. A* **719**, 430 (2013).
- 34 M. Ahmadi, D. E. Bruschi, C. Sabín, G. Adesso and I. Fuentes, *Sci. Rep.* **4**, 4996 (2014).
- 35 J. L. Ball, I. Fuentes-Schuller and F. P. Schuller, *Phys. Lett. A* **359**, 550 (2006).
- 36 I. Fuentes, R. B. Mann, E. Martin-Martinez and S. Moradi, *Phys. Rev. D* **82**, 045030 (2010).
- 37 E. Martin-Martinez and N. Menicucci, *Class. Quantum Grav.* **29**, 224003 (2012).
- 38 E. Martín-Martínez and N. C. Menicucci, *Class. Quantum Grav.* **31**, 214001 (2014).
- 39 Hideo Kodama, *Prog. Theor. Phys.* **67**, 1415 (1982).
- 40 B. L. Hu and Henry E. Kardrup, *Phys. Rev. D* **35**, 1776 (1987).
- 41 A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **117**, 175 (1982).

- 42 Alan H. Guth and So-Young Pi, Phys. Rev. Lett. **49**, 1110 (1982).
- 43 C. Kiefer, I. Lohmar, D. Polarski and A. Starobinsky, Class. Quantum Grav. **24**, 1699 (2007).
- 44 C. Kiefer and D. Polarski, Adv. Sci. Lett. **2**, 164 (2009).
- 45 D. Mazur and J. Heyl, Phys. Rev. D **80**, 023523 (2009).
- 46 A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991).
- 47 C. H. Bennett, C. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres and W. K. Wothers, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- 48 D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, Nature **390**, 575 (1997).
- 49 C. H. Bennett and S. J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).
- 50 K. Mattle, H. Weinfurter, P. G. Kwiat, and A. Zeilinger, Phys. Rev. Lett. **76**, 4656 (1996).
- 51 D. Gross, S. T. Flammia and J. Eisert, Phys. Rev. Lett. **102**, 190501 (2009).
- 52 G. Berenti, G. Casati, and G. Strini, *Principles of Quantum Computation, Vol. I: Basic Concepts*. World Scientific, Singapore, (2004).
- 53 J. von Neumann, Mathematical foundations of quantum mechanics, Princeton University Press (1955).
- 54 C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Lalöe, Quantum mechanics, Wiley-Interscience (2006).
- 55 M. A. Nielsen, I. L. Chuang, Quantum computation and quantum information, Cambridge University Press (2000).
- 56 E. Schmidt, Math. Ann. **64**, 433 (1907).
- 57 A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- 58 E. Schrödinger, Naturwissenschaften 23, 807 (1935).
- 59 D. M. Greenberger, M. A. Honre, A. Shimony and A. Zeilinger, Am. J. Phys. **58**, 1131 (1990).
- 60 D. F. Walls and G. J. Milburn, Quantum Optics, Springer-Verlag (1994)
- 61 C. E. Shannon, Bell System Tech. J. **27**, 623 (1948).
- 62 T. M. Cover and J. A. Thomas, Elements of information theory, Wiley-Interscience (2006).
- 63 V. Vedral, Introduction to quantum information science, Oxford University Press (2007).
- 64 R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki and K. Horodecki, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).

- 65 Peres, A. Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- 66 R. F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).
- 67 M. Horodecki, P. Horodecki and R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- 68 G. Vidal and R. F. Werner, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
- 69 M. P. Plenio, Phys. Rev. Lett. **95**, 090503 (2005).
- 70 D. Bouwmeester, Jian-Wei Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter and A. Zeilinger, Nature **390**, 575 (1997).
- 71 L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J.M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. A **50**, R895 (1994).
- 72 M. Riebe, H. Haffner, C. F. Roos and W. Hansel, Nature **429**, 734 (2004).
- 73 E. Solano, C. L. Cesar, R. L. de Matos Filho and N. Zagury, Eur. Phys. J. D **13**, 121 (2001).
- 74 L. Steffen, Y. Salathe, M. Oppliger, P. Kurpiers, M. Baur, C. Lang, C. Eichler, G. Puebla-Hellmann, A. Fedorov and A. Wallraff, Nature **500**, 319 (2013).
- 75 R. M. Gomes, W. B. Cardoso, A. T. Avelar and B. Baseia, Phys. Scr. **89**, 025001 (2014).
- 76 X. S. Ma, T. Herbst, T. Scheidl, D. Wang, S. Kropatschek, W. Naylor, B. Wittmann, A. Mech, et al. Nature **489**, 269 (2012).
- 77 S. L. Braunstein, C. A. Fuchs and H. J. Kimble, J. Mod. Opt. **47**, 267 (2000).
- 78 Birrell, N. D. and Ford, L. H. Ann. Phys. **122**, 1 (1979).
- 79 Gibbons, G. W. and Hawking, S. W. Phys. Rev. D **15**, 2738-2751 (1977).
- 80 M. Le Bellac, Quantum and Statistical Field Theory. Oxford University Press (1995).
- 81 N. D. Birrell, Proc. R. Soc. London **123**, 367 (1979).
- 82 H. Alexander, G. Souza, P. Mansfield and M. Sampaio, EPL **111**, 60001 (2015).
- 83 Daniel F. Walls and Gerard J. Milburn, Quantum optics. Springer Science & Business Media, (2007).
- 84 P. D. Nation, J. R. Johansson, M. P. Blencowe, and Franco Nori, Rev. Mod. Phys. **84**, 1 (2012).
- 85 A. Duncan, Phys. Rev. D **17**, 964 (1978).
- 86 D. A. Leahy and W. G. Unruh, Phys. Rev. D **28**, 694 (1983).
- 87 B. L. Hu and Henry E. Kandrup, Phys. Rev. D **35**, 1776 (1987).
- 88 Henry E. Kandrup, Phys. Rev. D **37**, 3505 (1988).

- 89 H. Alexander, G. Souza, P. Mansfield, I. G. Da Paz and M. Sampaio, EPL **115**, 10006 (2016).
- 90 J. Audretsch and P. Spanghel, Phys. Rev. D **33**, 997 (1986).
- 91 A. Albrecht, N. Bolis and R. Holman, JHEP **11**, 093 (2014).
- 92 S. Kanno, EPL **111**, 60007 (2015).
- 93 N. Friis and A. R. Lee, Jorma Louko, Phys.Rev. D **88**, (2013) 064028.