



Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Física
Curso de Física

Rafael Antunes Ribeiro

Robustez da fase topológica fracionária ao ruído de fase



Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Física

Curso de Física

Rafael Antunes Ribeiro

Robustez da fase topológica fracionária ao ruído de fase

Dissertação apresentada ao Curso de Física da UFMG,
como requisito parcial para a obtenção do grau de
Mestre em Física.

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua

Belo Horizonte
2015

Aos meus pais, irmão, familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, aos meus pais e irmão pelo amor incondicional, apoio e educação que sempre me deram. Agradeço também os apoios que recebi dos parentes e amigos, especialmente dos queridos amigos Andreij, Rodrigo, Fe, Nathi que me deram suporte nos momentos difíceis.

Sou grato também aos professores Augusto César Lobo e Maria Carolina Nemes que sempre me incentivaram e criaram as condições para o meu ingresso ao mestrado. Sou grato também ao meu orientado Sebastião de Pádua que aceitou orientar-me mesmo em condição adversa, aos professores das disciplinas que cursei e a todos os funcionários do Departamento de Física da UFMG.

Aproveito para agradecer também aos membros da banca pelo tempo despendido na leitura deste trabalho e pelas valiosas sugestões apresentadas.

Por fim, agradeço à Universidade Federal de Minas Gerais e à CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Em 1984, Berry descobriu a chamada *fase geométrica* que surge da estrutura geométrica do espaço de parâmetros do estado quântico e passou a ser uma importante grandeza da Mecânica Quântica. A fase geométrica carrega consigo as propriedades geométricas e topológicas do espaço de parâmetros. Dentre as diversas formas da fase geométrica que se manifestam está a *fase topológica fracionária (FTF)* que surge da decomposição polar do operador evolução do estado quântico e que carrega a dimensão do espaço de Hilbert onde o estado reside. Neste trabalho nós demonstraremos teoricamente que *a FTF é robusta ao ruído de fase* ao inserirmos ruído de fase na proposta experimental “*Fractional topological phase on spatially encoded photonic qudits*” de Khoury e colaboradores (Phys Rev. A, 87: 042 113, 2013), e tratando o problema via formalismo de Mapas de Kraus. Este fato faz da *fase topológica fracionária um candidato realmente confiável à implementação de algoritmos quânticos* em meios que possuem somente ruído de fase.

ABSTRACT

In 1984, Berry discovered the geometric phase arising from the geometric structure of the quantum state parameter space and has become an important quantity in Quantum Mechanics. The geometric phase carries the geometric and topological properties of the parameter space. Among the various forms of geometric phase manifested is the fractional topological phase (FTF) arising from the polar decomposition of the evolution operator of the quantum state and that carries the dimension of the Hilbert space where the state lives. In this work we demonstrate theoretically that the FTF is robust to phase's noise (dephasing) when inserting phase's noise on the experimental proposal "Fractional topological phase on spatially encoded photonic qudits" of Khoury *et al* (Phys Rev. A, 87: 042 113, 2013) and treating the problem via Kraus' maps. This fact makes the fractional topological phase a really reliable candidate for the implementation of quantum algorithms on environments having only phase noise.

Sumário

I - INTRODUÇÃO.....	1
II - DESENVOLVIMENTO	3
1 FUNDAMENTOS SOBRE FASE GEOMÉTRICA	3
1.1 TRANSPORTE PARALELO EM GEOMETRIA	3
1.2 TRANSPORTE PARALELO EM MECÂNICA QUÂNTICA: FASE DE BERRY NO PROCESSO ADIABÁTICA	9
1.3 FASE DE BERRY NO PROCESSO NÃO-ADIABÁTICA	12
1.4 FASE TOPOLÓGICA FRACIONÁRIA	14
2 EXPERIMENTO PARA MEDIR FASE TOPOLÓGICA FRACIONÁRIA.....	18
2.1 INTERFERÊNCIA DE DOIS FÓTONS COM POLARIZAÇÃO CONTROLADA .	18
2.2 RESULTADOS NUMÉRICOS	23
3 FASE TOPOLÓGICA FRACIONÁRIA É ROBUSTA AO RUÍDO DE FASE	27
3.1 OPERADORES QUE IMPLEMENTAM AS FASES DO EXPERIMENTO	28
3.1.1 Mapa para o Ruído de Fase implementado por SLM	29
3.1.2 Mapa para a Fase Topológica Fracionária implementada por SLM e sua composição com o Mapa Ruído de Fase:	31
3.1.3 Mapa para a Fase de Varredura e sua composição com os demais Mapas	32
3.2 FASE TOPOLÓGICA FRACIONÁRIA SOBREVIVE AO RUÍDO DE FASE	35
3.3 RESULTADOS NUMÉRICOS COM RUÍDO	37
III - CONCLUSÃO	42
IV - APÊNDICE.....	43
APÊNDICE A – CURVAS	43
APÊNDICE A1 – CURVAS PLANAS	43

A1.1 – Introdução	43
A1.2 – Teoria Local das Curvas, Fórmula de Frenet	44
A1.3 – Teorema Fundamental das Curvas Planas	46
APÊNDICE A2- CURVAS NO ESPAÇO R^3	48
APÊNDICE B – SUPERFÍCIES	50
APÊNDICE B1- CURVATURAS DE UMA SUPERFÍCIE, GEODÉSICA E ÂNGULO NÃO-HOLONÔMICO	50
APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÕES E JUSTIFICATIVAS	53
APÊNDICE C1 – PROPOSIÇÃO	53
V - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	55

I - INTRODUÇÃO

Em 1984, Berry descobriu que um sistema quântico adquire duas fases distintas ao efetuarmos um movimento adiabático de trajetória fechada no espaço dos parâmetros deste sistema [1, 2, 3]. Uma fase que surge da evolução unitária do sistema quântico, chamada de *fase dinâmica*, já era conhecida anteriormente. A outra, chamada de *fase geométrica*, surge da estrutura geométrica do espaço de parâmetros do estado quântico e passou a ser uma importante grandeza da Mecânica Quântica, sendo aplicada no estudo de diversas áreas da Física, como por exemplo, em Fundamentos da Mecânica Quântica, Física do Estado Sólido, Teoria de Campo, Óptica Quântica e outras áreas [4, 5, 6, 7]. A partir da descoberta de Berry, a *fase geométrica*, conhecida por *fase de Berry* no contexto da Mecânica Quântica, tornou-se objeto de estudo de físico-matemáticos que produziram resultados bastante abstratos e sofisticados [8–11]. Dentre esses resultados, estamos interessados na *Fase Topológica Fracionária (FTF)* que surge da decomposição polar do operador evolução do estado quântico de duas partes e carrega a dimensão do espaço de Hilbert onde o estado reside [12, 11]. Nesta dissertação nós demonstraremos teoricamente que a *FTF é robusta ao ruído de fase* ao inserirmos ruído de fase via *Mapa de Kraus* na proposta experimental de Khoury e colaboradores [12]. Este fato se torna mais relevante por fazer da *fase topológica fracionária um candidato realmente confiável à implementação de algoritmos quânticos* [12, 13, 14, 15, 16]. Esta robustez da *fase geométrica* na presença de ruído já foi prevista na referência [17].

No Capítulo 1 temos, como objetivo, exibir a natureza geométrica da fase de Berry juntamente com os conceitos básicos envolvidos de geometria. Utilizando os conceitos elementares de Geometria Diferencial, mostraremos como surge o qualificativo geométrico-topológico da fase geométrica e vincularemos esta com a fase de Berry. Acreditamos que, a partir destes fundamentos, seja mais fácil o entendimento e aceitação da abstração envolvendo as fases geométricas quânticas, como, por exemplo, a FTF, objeto central dessa dissertação. Ainda nesta revisão, apresentaremos a FTF seguindo principalmente a referência [12]. Sugerimos os Apêndices A, B e as referências bibliográficas [2, 5, 6, 18, 19] para maiores detalhes deste capítulo.

No Capítulo 2 apresentaremos a proposta experimental de Khoury e colaboradores [12], onde eles propõem como medir a FTF a partir de estado puro de qudits, tendo como resultados mais eficientes quando os qudits iniciais estão maximamente emaranhados, embora a FTF também se manifeste nos estados produtos com amplitude muito reduzida do sinal de

contagem de coincidências, como exibiremos nitidamente nos gráficos da implementação computacional do caso particular de qutrits.

Finalmente, no Capítulo 3, demonstraremos que a *fase topológica fracionária sobrevive ao ruído de fase*. Nesta descrição, veremos que o estado inicialmente puro proposto em [12] se torna um estado misto devido à presença de ruído de fase.

II - DESENVOLVIMENTO

1 FUNDAMENTOS SOBRE FASE GEOMÉTRICA

Fase Geométrica é o nome que se dá à fase que surge numa evolução (de um vetor tangente à superfície, por exemplo) sobre uma trajetória contida numa superfície em um espaço vetorial. Embora receba o nome de *fase geométrica*, esta fase surge das *Propriedades Geométricas e Topológicas da Superfície* e do espaço vetorial em que ela reside. Ou seja, a fase geométrica revela informações geométrico-topológicas intrínsecas à estrutura subjacente da superfície e o seu uso em diversos contextos pode atingir elevado grau de abstração que dificulta o entendimento pleno da discussão. Na *Mecânica Quântica*, por exemplo, a fase mais conhecida é a chamada *Fase de Berry*. Temos, como objetivo, apresentar a *Fase Topológica Fracionária (FTF)*, mas é conveniente começarmos a discussão na Geometria Diferencial Clássica para somente então apresentarmos os resultados abstratos da Mecânica Quântica. Este capítulo está dividido em quatro secções, sendo a primeira destinada à introdução da fase geométrica na *Geometria Diferencial*. Na segunda e terceira secção deduzimos a *fase de Berry* nos *processos adiabáticos* e *não-adiabáticos*, respectivamente. Por fim, na quarta secção, apresentamos a *FTF*. As principais referências deste capítulo são [1-5, 12, 13, 18, 20, 21], principalmente [5].

1.1 TRANSPORTE PARALELO EM GEOMETRIA

A fase geométrica clássica surge quando um vetor percorre uma trajetória sobre uma superfície. Sua manifestação torna mais clara no estudo do *transporte paralelo* sobre uma superfície curva. Então este é o nosso ponto de partida neste tópico.

Seja $C(1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1)$ uma curva suave e fechada sobre um plano, uma casca esférica e um cone, como exibido na Figura 1.1 abaixo. Seja ainda um vetor que percorre esta curva mantendo-se constante em relação a normal da curva (*transporte paralelo*), ou seja, mantendo constante o ângulo em relação ao vetor normal à superfície e também não girando em torno deste. Ao concluirmos o transporte paralelo sobre a trajetória fechada nas superfícies observamos na Figura 1.1 que: no caso (a), o vetor final é *Holônomo* ao vetor inicial (permanecem paralelos entre si e por isso podem receber o “mesmo nome”), enquanto que nos casos (b) e (c) tais vetores são *Não-Holônomos*, ou seja, os vetores inicial e final se diferem de um ângulo $\theta(C)$. O ângulo $\theta(C)$ é chamado de fase geométrica e sua existência aponta

propriedades da superfície, tais como curvatura diferente de zero e furos [Apêndice A e B]. Fazemos algumas formalizações a seguir.

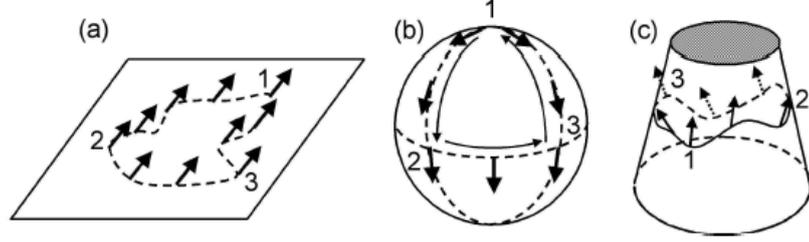


Figura 1.1: Esboço de transporte paralelo em um plano (a), uma esfera (b) e em um cone (c) [5].

Seja $C = \{r(t) / t = 0 \rightarrow T\}$ uma curva fechada caracterizada pelo *Triedro de Frenet* $\{n(t), e^1(t), e^2(t)\}$ tal que $n(t)$ é o *vetor normal à superfície*, $e^1(t)$, o *vetor unitário* e $e^2(t) = n(t) \times e^1(t)$ o *vetor binormal*, como exemplifica a Figura A4 do Apêndice A. A rotação do *plano tangente* (ou *plano retificante* em geometria tridimensional) caracterizado na base $\{e^1(t), e^2(t)\}$ obedece

$$\dot{e}^r(t) = \omega(t) \times e^r(t) \quad (r=1, 2), \quad (1.1)$$

onde o ponto significa derivada temporal, ω o *vetor velocidade angular* e $\dot{e}^r(t) \parallel n(t)$, como previstos pelas *Fórmula de Frenet*, Eq. (A2.19). Para que a condição do transporte paralelo dos vetores $e^r(t)$ seja satisfeita – o Plano Tangente deve permanecer perpendicular ao vetor normal ($e^r \cdot n = 0$) e também não pode haver rotação em torno deste ($\omega \cdot n = 0$) – a velocidade angular tem que ser:

$$\omega = n \times \dot{n}. \quad (1.2)$$

Por fim, a *lei do transporte paralelo* se resume a:

$$\dot{e}^r = (n \times \dot{n}) \times e^r = -(e^r \cdot \dot{n})n \quad (1.3)$$

Note que o transporte paralelo é totalmente caracterizado pelo vetor normal. Tal fato ficará mais evidente quando exibirmos o vínculo entre a Fase Geométrica do transporte paralelo com o *Ângulo Sólido* descrito pelo vetor normal.

Para facilitar o vínculo da lei do transporte paralelo com a Mecânica Quântica, considere o vetor complexo:

$$\varphi(t) = \frac{e^1(t) + ie^2(t)}{\sqrt{2}}, \quad (\varphi^* \cdot \varphi = 1) \quad (1.4)$$

sob o qual a lei do transporte paralelo passa a ser $\varphi^* \cdot \dot{\varphi} = 0$. Definindo um referencial ortogonal $\{n(r), t^1(r), t^2(r)\}$ fixo no ponto r sobre a superfície e o vetor complexo

$$u = \frac{t_1 + it_2}{\sqrt{2}}, \quad (u^* \cdot u = 1) \quad (1.5)$$

ao efetuarmos o transporte paralelo sobre uma trajetória fechada, a relação entre os dois vetores complexos anteriores será dado por

$$\varphi(t) = \exp[-i\theta(t)] u(r(t)), \quad (1.6)$$

onde o ângulo de giro $\theta(t)$ é exatamente o quanto $\{t^1, t^2\}$ deve girar para coincidir com $\{e^1, e^2\}$ após o transporte paralelo. Aplicando a lei do transporte paralelo

$$\varphi^* \cdot \dot{\varphi} = -i\dot{\theta}u^* \cdot u + u^* \cdot \dot{u} = -i\dot{\theta} + u^* \cdot \dot{u} = 0, \quad (1.7)$$

concluimos que a fase geométrica num espaço complexo é determinada por

$$\theta(C) = \text{Im} \oint_C u^* \cdot du = - \oint_C t_2 \cdot dt_1. \quad (1.8)$$

Se escolhermos um sistema de coordenadas (X_1, X_2) e definirmos o campo vetorial $A(r)$ (geralmente chamado de *conexão*) na superfície como

$$A_i(X) \equiv \text{Im} \left[u_j^*(X) \frac{\partial u_j(X)}{\partial X_i} \right], \quad (1.9)$$

onde usamos a *Convenção da Soma de Einstein*¹ sobre índices repetidos, obtemos

$$\theta(C) = \oint_C A(X) \cdot dX, \quad (1.10)$$

que constitui a expressão do ângulo *não-holonômico* $\theta(C)$ para curva bidimensional. A conexão $A(X)$ depende da escolha de $t_1(X)$. Se fizermos uma nova escolha $t'_1(X)$ que difere de $t_1(X)$ por uma rotação $\mu(X)$, podemos efetuar uma transformação de calibre (transformação de gauge)

¹ Sempre que possível, em todas as equações usaremos a chamada *Convenção da Soma de Einstein* que considera o índice repetido em somente um dos lados da igualdade como uma soma sob este índice, também chamado de *índice mudo* por não alterar as propriedades da equação se trocarmos-lo por outro de mesma natureza.

$$u(X) \rightarrow u'(X) \equiv \exp(-i\mu(X)) u(X), \quad (1.11)$$

tal que o novo conector seja

$$A'_i(X) \equiv \text{Im} \left[u_j^{*'}(X) \frac{\partial u_j'(X)}{\partial X_i} \right] = A_i(X) - \frac{\partial \mu(X)}{\partial X_i} \quad (1.12)$$

que, satisfazendo a relação

$$\oint_C \nabla \mu(r) \cdot dr = \oint_C d\mu(r) = 0, \quad (1.13)$$

verificamos que $\mu(r)$ é um invariante sob transformação de calibre.

Uma forma invariante sob transformação de calibre, e mais intuitiva de expressar o ângulo não-holonômico, pode ser obtida transformando a *Integral de Caminho* em *Integral de Superfície* por meio da aplicação do *Teorema de Stokes*. Entretanto, é necessário dividir a integral em duas partes quando a superfície apresenta furos, pois o Teorema de Stokes considera toda a área interna à trajetória fechada, isto é,

$$\theta(C) = \oint_{C=\partial S} A(X) \cdot dX + \sum_i N_i(C) \theta(C_i) \quad \therefore \quad \theta(C_i) \equiv \oint_{C_i} A(X) \cdot dX \quad (1.14)$$

onde N_i é o número de voltas em torno do respectivo furo definido pelo círculo C_i (para $N_i > 0$ sentido anti-horário e $N_i < 0$ sentido horário). Muitas vezes, as superfícies são classificadas topologicamente como *simplesmente conexas* (não possui furo) ou *não simplesmente conexas* (possui buracos) e a equivalência topológica entre as superfícies se dá pelo número de furos e a dimensão da superfície. Exemplificaremos este aspecto com a Figura 1.2 abaixo. Seja Σ uma Superfície com dois furos limitados pelos contornos C_1 e C_2 (áreas sombreadas). Aplicando o teorema de Stokes em C que delimita S contido em Σ , temos

$$\theta(C) = \iint_S B(X) dX_1 dX_2 + \sum_i N_i(C) \theta(C_i) \quad \therefore \quad (1.15)$$

$$B(X) \equiv \left(\frac{\partial A_2}{\partial X_1} - \frac{\partial A_1}{\partial X_2} \right) = \text{Im} \left[\frac{\partial u^*}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial X_2} - \frac{\partial u^*}{\partial X_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial X_1} \right].$$

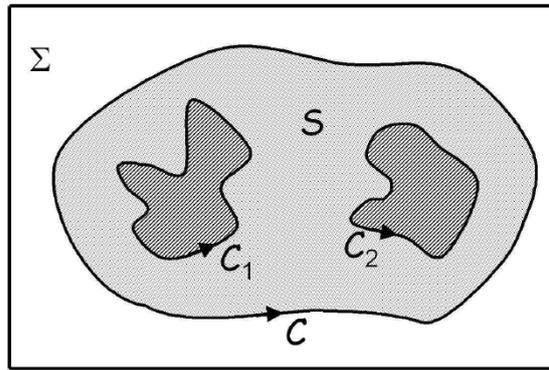


Figura 1.2: Σ é um exemplo de superfície não simplesmente conectado com 2 furos (áreas sombreadas), limitados pelos contornos C_1 e C_2 [5].

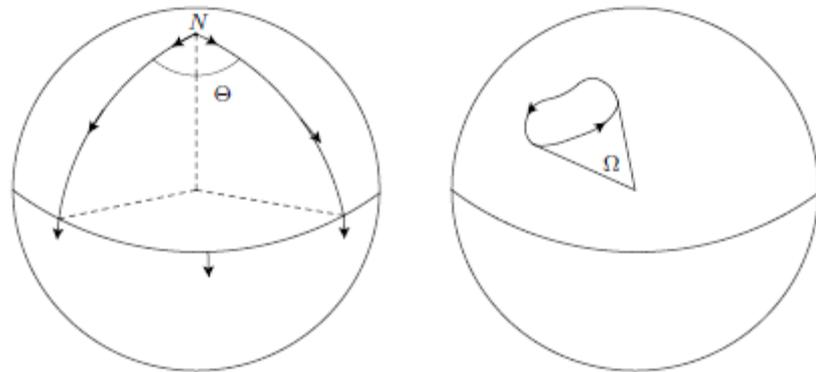


Figura 1.3: A figura da esquerda ilustra o *ângulo não-holonômico* associado ao *transporte paralelo* numa *trajetória fechada*. A figura da direita ilustra o *ângulo sólido* de uma *trajetória fechada* sobre a superfície da esfera [22].

A Eq. (1.15) constitui a expressão do *ângulo não-holonômico* $\theta(C)$ para curva tridimensional. Lembrando que o campo $B(X)$ normal à superfície é um invariante, o seu significado geométrico decorre da sua relação com a *curvatura de Gauss* K no ponto X , isto é,

$$B(X)dX_1dX_2 = KdS = \frac{dS}{R_1(X)R_2(X)} \quad (1.16)$$

em que $R_1(X)$ e $R_2(X)$ são os raios principais de curvatura no ponto X [Apêndice B]. No caso da esfera, esta relação pode ser facilmente verificada pelo cálculo explícito, substituindo (X_1, X_2) pelos ângulos esféricos habituais (θ, φ) . Uma vez que a curvatura gaussiana K está relacionada ao *ângulo sólido* Ω (Figura 1.3) descrito pelo vetor normal, podemos escrever

$$B = \frac{d^2\Omega}{dX_1 dX_2} \quad (1.17)$$

e, finalmente, das Eq.(1.15–17) obtemos o vínculo da fase geométrica com o ângulo sólido descrito pelo vetor normal em um transporte paralelo

$$\theta(C) - \sum_i N_i(C)\theta(C_i) = \iint_S \frac{d^2\Omega}{dX_1 dX_2} dX_1 dX_2 = \iint_S d^2\Omega = \Omega(S), \quad (1.18)$$

ou ainda, conforme Eq. (1.14)

$$\theta(C) = \Omega(S) + \sum_i N_i(C)\theta(C_i) \quad \therefore \quad \theta(C_i) \equiv \oint_{C_i} A(X) \cdot dX. \quad (1.19)$$

Note que a fase acima nos diz que o ângulo sólido dá o caráter geométrico da superfície circundada por C enquanto o caráter topológico é dado pelo somatório que contabiliza os furos e pelo número de coordenadas da superfície.

A associação do ângulo não-holonômico do transporte paralelo com o ângulo sólido é mais geral que possa parecer à primeira vista, ou seja, não se restringe ao caso da esfera S^2 . Se lembrarmos de que a lei do transporte paralelo sobre a trajetória C em Σ é totalmente caracterizada pelo vetor normal à superfície

$$\dot{e}^r(t) = (n \times \dot{n}) \times e^r = -(e^r \cdot \dot{n})n, \quad (1.20)$$

e que, localmente, toda superfície regular Σ pode ser associada à uma esfera S^2 unitária por meio de uma parametrização chamada *aplicação normal de Gauss*, então podemos fazer uso do transporte paralelo sobre a esfera em vez de estudamos o transporte paralelo diretamente em Σ . Esse resultado é interessante porque conhecemos bem as propriedades da casca esférica, como, por exemplo, o vínculo da fase geométrica (ângulo não-holonômico) com o ângulo sólido quando a trajetória fechada é constituída por somente *grandes círculos*, meridianos e paralela equatorial.

Como exemplos destes resultados, vamos analisar o plano, a esfera e o cone da Figura 1.1. O plano, por exemplo, apresenta ângulo não-holonômico zero, pois tanto a parte geométrica (ângulo sólido) quanto a parte topológica (furos) são zeros. Na esfera, a curvatura de Gauss é diferente de zero ($K \neq 0$), então o ângulo não-holonômico é descrito pelo ângulo sólido, naturalmente. Já para o cone $K = 0$ em toda parte da superfície, de modo que o ângulo

não-holonômico é de fato uma propriedade topológica do circuito C , sendo dada pelo número de voltas na trajetória C em torno do cone multiplicado pelo ângulo sólido de cone [5, 6].

1.2 TRANSPORTE PARALELO EM MECÂNICA QUÂNTICA: FASE DE BERRY NO PROCESSO ADIABÁTICO

O *Teorema Adiabático Quântico* afirma que se o sistema quântico é inicialmente autoestado não-degenerado do Hamiltoniano, em uma evolução adiabática (evolução muito lenta comparada ao tempo natural de vibração do sistema) este sistema permanece sendo autoestado do Hamiltoniano em toda a evolução temporal [3, 20]. No entanto, o estado adquire uma fase composta de duas partes:

- (i) *Fase Dinâmica*: tem origem no fato de um estado estacionário sofrer evolução temporal unitária;
- (ii) *Fase Geométrica*: está relacionada com as propriedades Geométrica e Topológica do *Espaço de Parâmetro* do Hamiltoniano.

Na Mecânica Quântica, a fase geométrica também recebe o nome de Fase de Berry, em homenagem a M. Berry que a descobriu neste contexto. Vejamos, a seguir, algumas das argumentações de Berry [2].

Considere um sistema quântico cuja evolução temporal seja descrita por um Hamiltoniano dependente de um conjunto de parâmetros externos (R_1, R_2, \dots) , que controlamos como um vetor \mathbf{R} que traça uma curva sobre uma superfície em algum *espaço de parâmetros* abstrato semelhante à curva $\alpha(s)$ apresentado nos apêndices. Para cada valor \mathbf{R} dos parâmetros externos, o Hamiltoniano $H(\mathbf{R})$ tem autovalores $E_n(\mathbf{R})$ e autovetores $|n(\mathbf{R})\rangle$ que, a menos de uma fase arbitrária, satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo, ou seja,

$$H(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = E_n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle. \quad (1.21)$$

Para descrevermos uma trajetória fechada $C \equiv \{\mathbf{R}(t), t = 0 \rightarrow T \mid \mathbf{R}(0) = \mathbf{R}(T)\}$ no espaço de parâmetros de tal modo que a evolução de $|n(\mathbf{R})\rangle$ (não-degenerado) não sofra transição e permaneça não-degenerado, é necessário que a evolução temporal satisfaça a condição adiabática ²

² Veja uma discussão desta condição nas referências [3, 20, 21].

$$\hbar |\langle m|\dot{H}|n\rangle| \ll |E_m - E_n|^2 \quad (\forall m \neq n). \quad (1.22)$$

Sob essa condição, Berry fez a seguinte pergunta:

Qual será a fase do estado a após evolução adiabática sobre a trajetória fechada C do espaço de parâmetros?

Tal pergunta parece sem importância quando lembramos que o valor esperado de um observável A ($\langle A \rangle = \langle \psi|A|\psi \rangle$) não depende de uma fase global de $|\psi\rangle$, entretanto, Berry mostrou que essa fase é uma grandeza de grande importância na física [6, 7].

A evolução temporal do estado quântico $|\psi(t=0)\rangle = |n(\mathbf{R}(t=0))\rangle$, inicialmente autoestado de energia, dado pela equação de Schrodinger dependente do tempo

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle, \quad (1.23)$$

nos remete a

$$|\psi(t)\rangle \equiv \exp(-i\delta_n) |\varphi_n(t)\rangle \quad \because \quad \delta_n = \frac{1}{\hbar} \int_0^t dt' E_n(\mathbf{R}(t')) \quad (1.24)$$

onde δ_n é a *fase dinâmica* e $|\varphi_n(t)\rangle$ é um estado normalizado que chamaremos de auxiliar, cuja fase dinâmica inicialmente zero. Partindo de $i\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$ e fazendo o produto interno com $\langle\psi(t)|$, onde $\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = E_n(t)$ e $\langle\varphi_n|\varphi_n\rangle = 1$, encontramos o análogo quântico da *lei do transporte paralelo* ao considerarmos a Eq.(1.7) como um produto interno:

$$0 = \langle\psi(t)| \left(H(\mathbf{R}(t)) - i\hbar \frac{d}{dt} \right) |\psi(t)\rangle = \langle\varphi_n(t)|\dot{\varphi}_n(t)\rangle. \quad (1.25)$$

Consideremos o estado auxiliar como

$$|\varphi_n(t)\rangle \equiv \exp(-i\gamma_n) |n(\mathbf{R})\rangle, \quad (1.26)$$

onde a fase γ_n é o ângulo não-holonômico semelhante a θ da esfera na Figura 1.3. Aplicando a lei do transporte paralelo da Eq. (1.25) em Eq. (1.26)

$$\langle\varphi_n(t)|\dot{\varphi}_n(t)\rangle = -i\dot{\gamma}_n \langle\varphi_n(t)|\varphi_n(t)\rangle + \langle n(\mathbf{R})|\dot{n}(\mathbf{R})\rangle = 0, \quad (1.27)$$

segue de

$$\dot{\gamma}_n = i\langle n|\dot{n}\rangle = \text{Im} \left\langle n(\mathbf{R}(t)) \left| \frac{d}{dt} n(\mathbf{R}(t)) \right. \right\rangle \quad (1.28)$$

$$d\gamma_n \equiv \text{Im} \left\langle n(\mathbf{R}) \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \right. \right\rangle \cdot d\mathbf{R}$$

que uma trajetória fechada C no espaço de parâmetro abstrato nos fornece a chamada *fase de Berry*

$$\gamma_n(C) \equiv \text{Im} \left[\oint_C \langle n(\mathbf{R}) | \partial_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle \cdot d\mathbf{R} \right] \quad (1.29)$$

a qual, fazendo uso do conector

$$A_n(\mathbf{R}) \equiv -\text{Im}[\langle n(\mathbf{R}) | \partial_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R}) \rangle] \quad (1.30)$$

podemos escrever

$$\gamma_n(C) \equiv \oint_C A_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} \quad (1.31)$$

que constitui o análogo ângulo não-holonômico $\theta(C)$ do espaço de parâmetro clássico expresso em Eq.(1.19). Se fizermos uma nova escolha de fase ao definirmos o autoestado de energia

$$|n(\mathbf{R})\rangle' \equiv \exp(-i\mu(\mathbf{R})) |n(\mathbf{R})\rangle \quad (1.32)$$

a partir do novo conector

$$A_n^{(\mathbf{R})} = A_n(\mathbf{R}) - \partial_{\mathbf{R}}\mu(\mathbf{R}), \quad (1.33)$$

verificamos que a fase de Berry $\gamma_n(C)$ é invariante sob transformação de calibre.

Usando o teorema de Stokes para superfície com possíveis furos e uma parametrização (R_1, R_2) para a superfície S definida por caminho C , podemos escrever a fase de Berry como

$$\gamma_n(C) = \iint_S B^n(\mathbf{R}) dR_1 dR_2 + \sum_i N_i(C) \gamma_n(C_i), \quad (1.34)$$

onde N_i é o número de voltas em torno do furo definido pelo caminho C_i e

$$\begin{aligned} B^n(\mathbf{R}) &\equiv (\partial_{R_1} A_2^n - \partial_{R_2} A_1^n) \\ &= \text{Im}[\langle \partial_{R_1} n(\mathbf{R}) | \partial_{R_2} n(\mathbf{R}) \rangle - \langle \partial_{R_2} n(\mathbf{R}) | \partial_{R_1} n(\mathbf{R}) \rangle] \end{aligned} \quad (1.35)$$

é a chamada *curvatura de Berry*, em analogia à curvatura do espaço de parâmetros apresentado nos Apêndices A e B. No caso em que o espaço de parâmetros é tridimensional, podemos usar a linguagem familiar de cálculo vetorial, como na eletrodinâmica, obtendo

$$\begin{aligned} \gamma_n(C) &= \iint_S \mathbf{B}^n(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{n} \, dS + \sum_i N_i(C) \gamma_n(C_i), \\ \mathbf{B}^n(\mathbf{R}) &\equiv \nabla \times \mathbf{A}^n = \text{Im}[\langle \nabla n(\mathbf{R}) | \times | \nabla n(\mathbf{R}) \rangle] \\ &= \text{Im} \sum_{m \neq n} [\langle \nabla n(\mathbf{R}) | m(\mathbf{R}) \rangle \times \langle m(\mathbf{R}) | \nabla n(\mathbf{R}) \rangle], \end{aligned} \quad (1.36)$$

ou ainda, fazendo uso da relação³

$$\langle m | \nabla n \rangle = \frac{\langle m | \nabla H | n \rangle}{E_n - E_m}, \quad (1.37)$$

obtemos

$$\mathbf{B}^n(\mathbf{R}) \equiv \text{Im} \sum_{m \neq n} \frac{[\langle n(\mathbf{R}) | \nabla H(\mathbf{R}) | m(\mathbf{R}) \rangle \times \langle m(\mathbf{R}) | \nabla H(\mathbf{R}) | n(\mathbf{R}) \rangle]}{(E_n(\mathbf{R}) - E_m(\mathbf{R}))^2}. \quad (1.38)$$

Como a notação sugere, o vetor curvatura de Berry \mathbf{B}^n desempenha o papel de um *campo magnético* no espaço de parâmetros, cujo *vetor potencial* associado é o conector $\mathbf{A}_n(\mathbf{R})$. Um exemplo que faz uso da teoria descrita acima é o *Efeito Bohm-Aharonov* [4, 21].

1.3 FASE DE BERRY NO PROCESSO NÃO-ADIABÁTICO

Na abordagem anterior vimos que Berry fez uso do Teorema Adiabático para deduzir a Fase Geométrica Quântica, porém esta restrição não é necessária para a manifestação desta fase. Nesta secção, apresentaremos uma descrição da fase geométrica cuja trajetória cíclica de um estado quântico qualquer é governada por operador hamiltoniano arbitrariamente dependente do tempo. Vejamos as principais argumentações de Aharonov-Anandan [1, 21].

Considere que um estado quântico $|\psi\rangle$ governado pela equação de Schrödinger, cujo operador hamiltoniano dependa arbitrariamente do tempo,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (1.39)$$

³ Veja uma discussão desta relação nas referencias [3, 20, 21].

descreva um movimento cíclico num tempo T tal que ao final do processo ele difira de uma fase do estado inicial

$$|\psi(T)\rangle = \exp(i\phi) |\psi(0)\rangle. \quad (1.40)$$

Se definirmos um estado auxiliar

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle \equiv \exp(-i\varphi(t)) |\psi(t)\rangle \quad (1.41)$$

que descreve o movimento fechado tal que

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(T)\rangle &= |\tilde{\psi}(0)\rangle \\ |\tilde{\psi}(T)\rangle &= \exp(-i\varphi(T)) |\psi(T)\rangle \\ |\tilde{\psi}(T)\rangle &= \exp(-i\varphi(T)) \exp(i\phi) |\psi(0)\rangle, \end{aligned} \quad (1.42)$$

ao conectarmos Eq.(1.42) com Eq.(1.41) veremos que ϕ consiste de uma parte dinâmica e outra geométrica. De fato, aplicando a equação de Schrödinger na Eq. (1.41)

$$\frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle = -i\dot{\varphi}(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} \exp(-i\varphi(t)) H |\psi(t)\rangle; \quad (1.43)$$

aplicando $\langle \tilde{\psi} |$ e usando novamente Eq. (1.41), encontramos

$$\dot{\varphi} = i \langle \tilde{\psi} | \frac{d}{dt} | \tilde{\psi} \rangle - \frac{1}{\hbar} \langle \psi | H | \psi \rangle. \quad (1.44)$$

Integrando a Eq.(1.44) no período do ciclo, obtemos

$$\varphi(T) - \varphi(0) = i \oint_0^T dt' \langle \tilde{\psi} | \frac{d}{dt'} | \tilde{\psi} \rangle - \frac{1}{\hbar} \oint_0^T dt' \langle \psi | H | \psi \rangle \equiv \text{arg} \langle \psi(0) | \psi(T) \rangle, \quad (1.45)$$

donde, ao definirmos

$$\phi \equiv \varphi(T) - \varphi(0), \quad (1.46)$$

verificamos que a Eq. (1.41) se reduz à Eq. (1.42)

$$|\tilde{\psi}(T)\rangle = |\tilde{\psi}(0)\rangle = \exp(-i\varphi(0)) |\psi(0)\rangle \quad (1.47)$$

como esperávamos. Logo a fase ϕ da Eq. (1.40) possui uma parte dinâmica (integral do Operados Hamiltoniano dependente arbitrariamente do tempo) e outra geométrica exibidas na Eq. (1.45). Por fim, ao anularmos a parte dinâmica por meio de uma soma na Eq. (1.45) e fazendo uso da Equação de Schrödinger Eq. (1.39), obtemos a *fórmula geral da fase geométrica* que um estado adquire numa evolução temporal

$$\gamma_g = \arg\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle + i \int_0^t dt' \langle\psi(t')|\dot{\psi}(t')\rangle. \quad (1.48)$$

Note que essa expressão geral se assemelha à Eq. (1.28) da descrição adiabática de Berry quando a mantemos na forma da Eq. (1.45)

$$\gamma_g = \text{Im} \left[\int_0^t dt' \left\langle \tilde{\psi} \left| \frac{d}{dt'} \right| \tilde{\psi} \right\rangle \right]. \quad (1.49)$$

1.4 FASE TOPOLÓGICA FRACIONÁRIA

A *decomposição polar*⁴ de um operador linear A que atua num espaço vetorial V nos diz que A pode ser descrito como produto matricial entre uma transformação unitária U e operadores positivos J e K segundo

$$A = UJ = KU \quad (1.50)$$

tal que os operadores positivos satisfaçam $J \equiv \sqrt{A^\dagger A}$ e $K \equiv \sqrt{AA^\dagger}$ e, caso A seja inversível, então U é unívoco [13]. Se aplicarmos a decomposição polar na evolução cíclica de um sistema fechado bipartido, veremos que a Fase Geométrica se divide em duas partes: uma parte fracionária dependente da dimensão do espaço de Hilbert que reside o estado; e outra relativa a I – Concorrência. Vejamos a abordagem da Referência [12].

Considere duas partículas S e I⁵ representados por $|m\rangle$ e $|n\rangle$ em um estado puro de dois qudits⁶ na *notação de soma de Einstein*

$$|\psi\rangle = \alpha_{mn} |mn\rangle \quad (m, n = 1, 2, \dots, d). \quad (1.51)$$

Podemos representar este estado numa matriz α de dimensão $d \times d$ e elementos α_{mn} , cuja *evolução unitária local* U_S e U_I transforma a matriz de coeficientes da seguinte forma

$$\alpha' = U_S \alpha U_I^T. \quad (1.52)$$

⁴ O nome da *decomposição polar* vem da forma polar de números complexos. Ou seja, a multiplicação de números complexos do R^2 (z^*v) representados matricialmente, pode ser descrito pela multiplicação de uma matriz A que contém as coordenadas de z pela matriz coluno que contém as coordenadas de v ($z^*v = A^*v$). Agora, se z estiver na sua forma polar $z = re^{i\theta}$, a forma polar da matriz A será $A=GR$, onde R é a matriz de rotação usual de vetores e G é a matriz diagonal positiva semidefinida, cujo autos-valores degenerado são r . G será positiva definida se sempre tivermos $z \neq 0$ [31].

⁵ As partículas S e I, eventualmente, serão chamadas de Sgnal e Idler, respectivamente, devido à nomenclatura das partículas na conversão paramétrica descendente usada no experimento estudado neste trabalho.

⁶ Qudit é um estado quântico de d níveis.

Verificamos tal fato se aplicarmos a evolução individual das partículas S e I,

$$U_S|m\rangle = |m'\rangle\langle m'|U_S|m\rangle = (U_S)_{m'm}|m'\rangle$$

$$U_I|n\rangle = |n'\rangle\langle n'|U_I|n\rangle = (U_I)_{n'n}|n'\rangle$$

na Eq. (1.51)

$$|\psi'\rangle = (U_S)_{m'm}\alpha_{mn}(U_I)_{n'n}|m'n'\rangle = (U_S)_{m'm}\alpha_{mn}(U_I^T)_{nn'}|m'n'\rangle.$$

Agora, com a notação matricial α a norma do estado passa a ser $\langle\psi|\psi\rangle = \text{Tr}[\alpha^\dagger\alpha] = 1$ e o produto interno $\langle\phi|\psi\rangle = \text{Tr}[\beta^\dagger\alpha]$, onde β é a matriz $d \times d$ dos coeficientes de $|\phi\rangle$. Estas matrizes possuem inversa, logo podemos aplicar a decomposição polar

$$\alpha = e^{i\phi}QS \quad (1.53)$$

onde Q é uma matriz hermitiana positiva definida e $S \in SU(d)$, que é o grupo dos operadores unitários especiais de dimensão $d \times d$ [12]. Usando as relações $U_S = \sqrt[d]{\det U_S} \bar{U}_S$ e $U_I = \sqrt[d]{\det U_I} \bar{U}_I$, onde \bar{U}_S e \bar{U}_I são operações unitárias locais pertencentes ao $SU(d)$, podemos reescrever a Eq. (1.52) como

$$\alpha' = e^{i\phi'}Q'S', \quad (1.54)$$

onde $e^{i\phi'} = e^{i\phi} \sqrt[d]{\det U_S \det U_I}$, $Q' = U_S Q \bar{U}_S^\dagger$ e $S' = \bar{U}_S S \bar{U}_I^T$. Desta forma, identificamos a transformação em três setores distintos: uma transformação em $U(1)$ $\phi \rightarrow \phi'$, outra transformação fechada no espaço das matrizes hermitianas positivas definidas $Q \rightarrow Q'$ e a última transformação fechada em $SU(d)$ $S \rightarrow S'$. Como as raízes de um número complexo possuem múltiplos valores, é preciso ter cuidado ao definir as quantidades acima. Para operações unitárias variando no tempo, podemos supor que qualquer uma das raízes possíveis esteja ocupada no tempo inicial e os valores subsequentes devem formar uma evolução contínua como uma função do tempo tal que $\phi(t)$ seja uma função suave, diferenciável em toda parte.

Vamos definir uma evolução cíclica em que o estado final seja fisicamente equivalente ao estado inicial após o intervalo T , isto é, eles estão relacionados apenas por um fator de fase global

$$\alpha(T) = e^{i\theta}\alpha(0). \quad (1.55)$$

Aplicando a decomposição polar Eq. (1.52) em ambos os lados da Eq. (1.55) vemos que a fase θ possui três componentes, um de cada setor da matriz de coeficientes:

$$e^{i\phi(T)}Q(T)S(T) = e^{i\theta}e^{i\phi(0)}Q(0)S(0) \quad (1.56)$$

$$\theta = (\Delta\phi + \gamma_q + \gamma_s).$$

Primeiro identificamos uma evolução da fase trivial $\phi(T) = \phi(0) + \Delta\phi$ no setor $U(1)$. No setor das matrizes hermitianas positivas, se escrevermos $Q(T) = e^{i\gamma_q}Q(0)$, as condições de hermiticidade impõem que $\gamma_q = 0$. Finalmente, no setor $SU(d)$ temos $S(T) = e^{i\gamma_s}S(0)$; contudo, usando as propriedades do determinante $\det S(T) = e^{id\gamma_s}\det S(0)$ e o fato de ambas matrizes $S(T)$ e $S(0)$ pertencerem à $SU(d)$, obtemos a *fase fracionária*

$$\gamma_s = \frac{2n\pi}{d} \quad (n = 1, 2, \dots, d-1). \quad (1.57)$$

Note que apenas valores de fase fracionária surgem do setor $SU(d)$ e que a natureza desta fase é puramente topológica ao manifestar a dimensão do Espaço de Hilbert do estado sem qualquer condição ligada à trajetória fechada ou à curvatura do espaço.

Nós podemos também usar a decomposição polar para investigar a Fase Dinâmica que aparece explicitamente na Eq. (1.48) da *forma geral da fase geométrica* que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \gamma_g &= \arg\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle + i \int_0^t dt' \langle\psi(t')|\dot{\psi}(t')\rangle \\ &= \arg \text{Tr}[\alpha^\dagger(0)\alpha(t)] + i \int_0^t dt' \text{Tr}[\alpha^\dagger(t')\dot{\alpha}(t')] \end{aligned} \quad (1.58)$$

onde, usando a derivada da Eq. (1.53)

$$\dot{\alpha}(t) = i\dot{\phi}\alpha(t) + e^{i\phi}[Q\dot{(t)}S(t) + Q(t)\dot{S}(t)] \quad (1.59)$$

juntamente com a normalização $\langle\psi|\psi\rangle = \text{Tr}[\alpha^\dagger(t)\alpha(t)] = 1$, vemos que o primeiro termo da integral $(-\Delta\phi)$ anulará com a fase global trivial de θ , restando somente a parte geométrica (γ_s). Então, empregando a relação

$$\alpha^\dagger(t) = e^{-i\phi(t)}S^\dagger(t)Q^\dagger(t) \quad (1.60)$$

e a propriedade cíclica do traço, obtemos

$$\gamma_g = \frac{2n\pi}{d} + i \int_0^T dt \text{Tr}[Q(t)\dot{Q}(t)] + i \int_0^t dt \text{Tr}[Q^2(t)\dot{S}(t)S^\dagger(t)] \quad (1.61)$$

onde a primeira integral será zero ao percebermos que $\text{Tr}[Q(t)\dot{Q}(t)] = 0$, fato consequente da condição de normalização $\text{Tr}[Q^2(t)] = 1$. A última integral pode ser escrita como

$$\gamma_g = \frac{2n\pi}{d} - \frac{1}{2} \sqrt{C_m^2 - C^2} \oint \hat{\mathbf{q}} \cdot d\mathbf{x} \quad (1.62)$$

onde $\hat{\mathbf{q}}$ é um vetor unitário do subsistema na representação ⁷ $\rho_S = \text{Tr}_I(\rho) = \rho_S = \frac{1}{d} (I + \hat{\mathbf{q}} \cdot \vec{X})$ advindo de $Q^2(t)$; $d\mathbf{x}$ o vetor deslocamento infinitesimal em \mathbb{R}^{d^2-1} advindo de $\dot{S}(t)S^\dagger(t)$; e C é a *I-Concorrência* de um estado puro de dois-qudit tal que C_m corresponde ao valor para o caso do emaranhamento máximo. Note que este resultado nos diz que a fase geométrica é composta por uma contribuição fracionária e uma contribuição integral que depende da história da evolução do estado quântico em uma evolução fechada, parametrizada nos setores Hermitiano e $SU(d)$ da decomposição polar. Essa contribuição integral é ponderada pelo emaranhamento e desaparece para estados maximamente emaranhados, para os quais apenas os valores fracionários da fase geométrica não se anulam [12, 23].

⁷ $\{I, X_1, \dots, X_{d^2-1}\}$ é o conjunto das matrizes geradoras do subsistema bipartido, tal que todas as matrizes X_i possuem traço nulo. A evolução do estado pelo mapa completamente positivo $\Lambda(\rho_S) = p_i M_i \rho_S M_i^\dagger, p_i M_i^\dagger M_i \leq I$, produzirá um novo estado $\Lambda(\rho_S) = \frac{1}{d} [I + A \vec{q} \cdot \vec{X}]$, onde a matriz A é caracterizada pelo mapa e \vec{q} caracteriza o estado.

2 EXPERIMENTO PARA MEDIR FASE TOPOLÓGICA FRACIONÁRIA

A Fase Topológica Fracionária apresentada no capítulo anterior manifesta a dimensão do Espaço de Hilbert que contém o estado do sistema envolvido. Neste capítulo, dividido em dois tópicos, apresentaremos um resumo da proposta por Khoury e colaboradores para medir a *fase topológica fracionária (FTF)* [12]. Na primeira secção apresentaremos a proposta experimental e na segunda secção daremos um exemplo numérico que esclarece como proceder junto às medidas experimentais para obter a *FTF* a partir de gráficos. Finalizaremos este capítulo com equações e gráficos que nos mostram claramente que a *FTF* se manifesta tanto para estado maximamente emaranhado quanto para estado produto, embora com visibilidade muito reduzida para estado produto.

2.1 INTERFERÊNCIA DE DOIS FÓTONS COM POLARIZAÇÃO USADA COMO GRAU DE LIBERDADE AUXILIAR

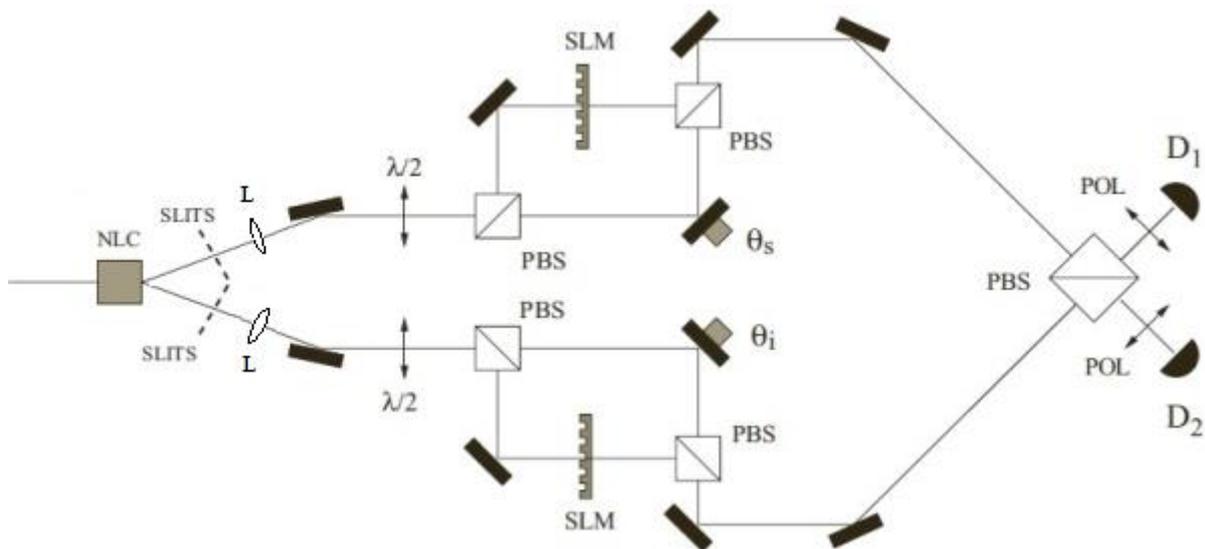


Figura 2.1: Proposta experimental: NLC, cristal não-linear; $\lambda/2$, placa de meia onda; L, lente; PBS, divisor de feixe por polarização; SLM, modulador espacial de luz; POL, polarizador; θ_j ($j = i, s$), fases de caminho adicionadas pelos espelhos acoplados aos PZTs; e D_l ($l = 1, 2$) detectores de único-fóton [12].⁸

⁸ “NLC (nonlinear crystal), PBS (Polarizing Beam Splitter), SLM (Spatial Light Modulator), POL (Polarizer) and PZT (piezoelectric transducer)”.

Considere o esquema da Figura 2.1. Um feixe de laser incide no cristal não linear (*NLC*) gerando, através de conversão paramétrica descendente [24], dois feixes não colineares de fótons emaranhados, ambos (*signal* e *idler*) com polarização horizontal. Os fótons gerados passam por duas fendas múltiplas idênticas com número de fendas iguais a d (*SLITS*) gerando o estado [12]

$$|\psi_0\rangle = \alpha_{mn} |mH, nH\rangle; (m, n = 0, 1, \dots, d - 1), \quad (2.1)$$

onde α_{mn} é a amplitude de probabilidade de se obter um fóton signal passando pela fenda m e um fóton idler passando pela n . Após as fendas, uma placa de meia onda $\lambda/2$ gira de 45° a polarização dos fótons, e o estado de fótons nas variáveis de caminho e polarização passam a ter todas as combinações de *polarização vertical (V) e horizontal (H)* [12]

$$|\psi_1\rangle = \frac{\alpha_{mn}}{2} [|mH, nH\rangle + |mH, nV\rangle + |mV, nH\rangle + |mV, nV\rangle]. \quad (2.2)$$

Então, cada fóton passa por uma porta unitária controlada por polarização composta por um interferômetro Mach-Zehnder com um divisor de feixes polarizador (PBS) de entrada e saída e um modulador espacial de luz (SLM) inserido no braço de polarização vertical. As operações unitárias implementadas pelos SLMs sobre os fótons signal e idler, U_S e U_I respectivamente, atuam sobre o caminho das componentes com polarização vertical dos qudits espaciais. A implementação das operações unitárias requer que a imagem das fendas seja projetada nos SLMs, já que os caminhos dos fótons definidos pelas fendas é que definem os “dits” quânticos. Isso é feito colocando uma lente após as fendas (*SLITS*), que se posicionam no foco destas, para que a imagem seja projetada no infinito, tal que os caminhos fiquem bem definidos paralelamente sem que haja interferência entre estes, evitando assim o aparecimento de franjas de interferência como ocorre no *experimento dupla fenda de Young*. As operações unitárias realizadas pelo SLM atuam sobre os caminhos dos fótons. Após as portas controladas, o estado de dois fótons se torna [12]

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha_{mn}}{2} [e^{i(\theta_s + \theta_i)} |mH, nH\rangle + e^{i\theta_s} U_I |mH, nV\rangle + e^{i\theta_i} U_S |mV, nH\rangle + U_S U_I |mV, nV\rangle], \quad (2.3)$$

onde θ_s e θ_i são fases longitudinais adicionadas à componente de polarização horizontal do signal e do idler quando eles atravessam os interferômetros Mach-Zehnder. Estas fases são implementadas por um deslocador de fase inserido no interferômetro, que fornece uma fase

relativa entre as polarizações H e V. Neste ponto fizemos a evolução do estado até antes do último PBS (a direita da Figura 2.1). Na sequência desenvolveremos a evolução dos operadores campo elétrico signal e idler dos detectores até este ponto para calcularmos a contagem de coincidência. Optamos por estes desenvolvimentos por acreditar que os resultados lógicos se tornem mais intuitivos, como discutiremos após Eq. (2.8).

Os *operadores campo elétrico* do signal e idler de frequência positiva podem ser escritos como [12]

$$\begin{aligned} E_S^+ &= E_{SH}^+ \hat{e}_H + E_{SV}^+ \hat{e}_V \\ E_I^+ &= E_{IH}^+ \hat{e}_H + E_{IV}^+ \hat{e}_V, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde \hat{e}_μ ($\mu = H, V$) são vetores unitários de polarização vertical (V) e horizontal (H) tal que cada componente é expandida em termos dos modos de transmissão do campo elétrico da luz

$$\begin{aligned} E_{S\mu}^+ &= a_{p\mu} \eta_p(\mathbf{r}_S) \\ E_{I\nu}^+ &= b_{q\nu} \eta_q(\mathbf{r}_I) \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $a_{p\mu}$ ($b_{q\nu}$) é o *operador aniquilação de fótons no modo de fenda* η_p (η_q), sendo este último a projeção do estado de fenda sobre o autovetor $|x\rangle$ do operador posição $\eta_m(\mathbf{r}) = \langle x|m\rangle$. As funções modos de fenda satisfazem a condição de ortogonalidade

$$\int d^2\mathbf{r} \eta_m^*(\mathbf{r}) \eta_n(\mathbf{r}) = \delta_{mn} \quad (2.6)$$

e os operadores $a_{p\mu}$ e $b_{q\nu}$ atuam de forma análoga aos operador aniquilação para *estados de Fock*

$$a_{p\mu} b_{q\nu} |m\sigma, n\epsilon\rangle = \delta_{pm} \delta_{\mu\sigma} \delta_{qn} \delta_{\nu\epsilon} |vac\rangle, \quad (2.7)$$

onde $|vac\rangle$ é o estado de vácuo e $|m\sigma, n\epsilon\rangle$ é um estado de fenda de dois fótons correspondente a um fóton signal passando através da fenda m com polarização σ e um fóton idler passando através da fenda n com polarização ϵ . Para maior compreensão, poderíamos escrever na forma não usual

$$a_{p\mu} b_{q\nu} |1m\sigma, 1n\epsilon\rangle = \delta_{pm} \delta_{\mu\sigma} \delta_{qn} \delta_{\nu\epsilon} |0m\sigma, 0n\epsilon\rangle, \quad (2.8)$$

onde agora os números (0 e 1) significariam os modos de ocupação de Fock. A funcionalidade destes operadores junto ao estado que possui todas as polarizações e caminhos possíveis só é garantida pelos polarizadores à 45° que apagam as informações de polarização dos fótons signal e idler quando estes saem do PBS final, ou seja, o PBS final seleciona somente as componentes

$|mH, nH\rangle$ e $|mV, nV\rangle$ para contribuírem nas contagens de coincidência nos dois detectores, o que corresponde a marcar o caminho do sinal e idler nos Mach-Zehnder e, assim, destruindo a distinguibilidade na superposição das componentes vertical e horizontal dos fótons que carregam as informações da FTF. Então, os polarizadores garantem que os fótons adquiram a mesma polarização quando chegam nos detectores, o que os torna indistinguíveis quanto aos percursos dos fótons nos Mach-Zehnder. Isso é equivalente a usarmos os operadores campo elétrico junto ao PBS na base correta garantida pelo polarizador a 45° para medirmos a informação da FTF. Logo, os detectores 1 e 2 são definidos pelos *operadores de campos* [12]

$$\begin{aligned} E_1^+ &= (iE_{SV}^+ + E_{IH}^+)/\sqrt{2} \\ E_2^+ &= (E_{SH}^+ + iE_{IV}^+)/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

e a *contagem de coincidências* por

$$C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \psi_2 | E_1^- E_2^- E_2^+ E_1^+ | \psi_2 \rangle = ||E_2^+ E_1^+ | \psi_2 \rangle ||^2, \quad (2.10)$$

onde $E_j^- = (E_j^+)^\dagger$ e $j = 1, 2$. Multiplicando os operadores da Eq. (2.9) e substituindo a Eq.(2.5) na Eq.(2.9) obtemos

$$E_2^+ E_1^+ = [E_{SH}^+ E_{IH}^+ - E_{SV}^+ E_{IV}^+ + i(E_{SH}^+ E_{SV}^+ + E_{IV}^+ E_{IH}^+)]/2, \quad (2.11)$$

onde percebemos que os termos imaginários possuem dois operadores aniquilação em sequência atuando no mesmo fóton, o que torna nulo as componente $|mH, nV\rangle$ e $|mV, nH\rangle$ conforme a Eq. (2.7). A contagem de coincidência do estado Eq.(2.3) se reduz então à função

$$C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{16} ||e^{i\theta} \alpha_{mn} E_{SH}^+ E_{IH}^+ |mH, nH\rangle + \alpha'_{mn} E_{SV}^+ E_{IV}^+ |mV, nV\rangle ||^2, \quad (2.12)$$

onde $\theta = \theta_s + \theta_l - \pi$ garante que os dois termos do lado direito da Eq.(2.12) tenham sinais opostos, conforme o sinal negativo na Eq.(2.11). O coeficiente α'_{mn} resulta da transformação unitária no estado de dois-qudits [12]

$$U_S U_I \alpha_{mn} |mV, nV\rangle = \alpha'_{mn} |mV, nV\rangle. \quad (2.13)$$

Utilizando a Eq.(2.5) em Eq.(2.12), obtemos a expressão que nos permite descrever o *padrão de interferência* dos dois fótons

$$C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{16} |\eta_m(\mathbf{r}_1) \eta_n(\mathbf{r}_2) (e^{i\theta} \alpha_{mn} + \alpha'_{mn})|^2. \quad (2.14)$$

Estamos interessados apenas na fase adquirida pelos qudits quando eles evoluem sob a ação das portas unitárias U_S e U_I . Como os diferentes modos de fenda são ortonormais entre si podemos integrar espacialmente a contagem de coincidência eliminando a interferência espacial entre os diferentes modos de fendas, obtendo somente a interferência do grau de liberdade longitudinal. Isso corresponde a um detector com abertura grande, insensível aos detalhes da estrutura espacial dos caminhos dos fótons. Contudo, a dimensão do espaço de Hilbert se manifesta nos coeficientes do estado de dois qudits presentes na função das coincidências integrada. Com o uso da propriedade da Eq. (2.6), obtemos de Eq.(2.14) [12]

$$C \equiv \int d^2\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{m,n=0}^{d-1} \frac{1}{16} |e^{i\theta} \alpha_{mn} + \alpha'_{mn}|^2. \quad (2.15)$$

Discorreremos sobre alguns detalhes desta integração no subtópico 3.3. *Fase Topológica sobrevive ao Ruído de Fase.*

Note que a polarização foi usada como um grau de liberdade subsidiário para fornecer dois caminhos à evolução dos qudits espaciais. De fato, a interferência descrita pela Eq. (2.15) pode ser pensada como resultado da superposição entre o estado de dois qudits inicial $|\varphi_0\rangle = \alpha_{mn}|mn\rangle$ e o estado evoluído $|\varphi\rangle = U_S U_I |\varphi_0\rangle$

$$C = \frac{1}{16} \| e^{i\theta} |\varphi_0\rangle + |\varphi\rangle \|^2 = \frac{1 + |\langle \varphi_0 | \varphi \rangle| \cos(\theta - \gamma)}{8} \quad (2.16)$$

onde $\langle \varphi_0 | \varphi \rangle = |\langle \varphi_0 | \varphi \rangle| e^{i\gamma}$. A visibilidade das franjas de interferência é o valor absoluto da superposição dos estados $\langle \varphi_0 | \varphi \rangle$, enquanto a fase da interferência é o argumento da superposição. Para uma evolução cíclica $|\varphi\rangle = e^{i\gamma} |\varphi_0\rangle$, a interferência recupera a visibilidade máxima com as franjas deslocadas de γ . Desta forma a Fase Topológica Fracionária pode ser implementada variando continuamente as operações unitárias de acordo com a dependência temporal do parâmetro local, ajustado pelo SLMs do Signal e Idler, respectivamente. Apresentaremos exemplos numéricos no próximo tópico para melhor entendimento dos resultados apresentados acima. Estes exemplos numéricos estarão normalizados para facilitar a interpretação, ou seja, as contagens em coincidência oscilarão entre zero e um.

2.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Considere dois fótons no estado de *qutrits* ($d = 3$) sob a ação de operações unitárias diagonais [12]

$$U_S = \text{diag}[e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, e^{i\phi_3}] \quad \therefore \quad U_I = \text{diag}[e^{i\chi_1}, e^{i\chi_2}, e^{i\chi_3}] \quad (2.17)$$

onde ϕ_n e χ_n são fatores de fase introduzidos pelos SLMs nos estados de caminho dos fótons. Para garantir que nenhuma fase trivial seja adicionada pelas operações, vamos impor que $\sum_n \phi_n = \sum_n \chi_n = 0$; em outras palavras, estamos restringindo as operações de evoluções unitárias dos dois qutrits, $SU(3) \otimes SU(3)$, de modo que a trajetória do estado se feche completamente ao final da evolução sem que este adquira fases globais não mensuráveis. Conforme Eq. (1.52), os coeficientes das matrizes evoluem segundo $\alpha' = U_S \alpha V_I^T$. Então temos que

$$\alpha'_{mn} = e^{i(\phi_m + \chi_n)} \alpha_{mn} \quad (2.18)$$

e a contagem de coincidências Eq. (2.15) normalizada (para oscilar de zero a um) se torna

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{4} \sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 |e^{i\theta} + e^{i(\phi_m + \chi_n)}|^2 \\ &= \sum_{m,n} |\alpha_{mn}|^2 \sin^2 \left[\frac{(\phi_m + \chi_n) - (\theta_s + \theta_l)}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde lembramos que $\theta = \theta_s + \theta_l - \pi$ (Eq. (2.12)). Em princípio, as operações locais implementadas pelos dois SLMs podem ser independentes e totalmente diferentes, porém, consideremos tais evoluções cíclicas efetuadas por [12]

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \chi_1 = \frac{\pi}{3} \left[2t - (2t - 1)H\left(t - \frac{1}{2}\right) \right], \\ \phi_2 &= \chi_2 = -\frac{2\pi}{3} t, \\ \phi_3 &= \chi_3 = \frac{\pi}{3} (2t - 1)H\left(t - \frac{1}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde t é um parâmetro real $t \in [0, 1]$, e $H(t)$ é a função de *Heaviside*

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

tal que usando os parâmetro $t=0$, $t=1/2$ e $t=1$, as equações Eq. (2.20) se reduzem aos respectivamente valores do quadro abaixo:

	$t=0$	$t=1/2$	$t=1$
$\phi_1 = \chi_1$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$\phi_2 = \chi_2$	0	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$
$\phi_3 = \chi_3$	0	0	$\frac{\pi}{3}$

(2.22)

A Eq. (2.20) descreve uma evolução contínua da fase em cada componente do qudit, correspondendo a uma operação local $SU(d=3)$ aplicada independentemente em cada qudit, entretanto, basta as fases particulares da Eq. (2.22) para traçarmos gráficos de três pontos da evolução unitária de onde extraímos a Fase Topológica Fracionária. Sob essa operação $SU(3) \otimes SU(3)$, vamos comparar o *estado maximamente emaranhado*

$$|\varphi_e\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle) \quad \therefore \quad \alpha_{mn} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (2.23)$$

com o *estado produto* possuindo a mesma distribuição de população de um qudit

$$|\varphi_p\rangle = \frac{1}{3}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle) \quad \therefore \quad \alpha_{mn} = \frac{1}{3}. \quad (2.24)$$

Substituindo Eq. (2.22) em Eq. (2.19) juntamente com o estado emaranhado Eq.(2.23) ou o estado produto Eq.(2.24), teremos duas contagens de coincidências, uma para cada estado, em cada parâmetro $t=0$, $t=1/2$ e $t=1$. Podemos efetuar estes cálculos manualmente, usar as propriedades trigonométricas para simplificar as equações e posteriormente traçar os gráficos ou efetuarmos os cálculos por meio de pacotes computacionais (GrafEq, GeoGebra entre outros), como faremos. Redefinindo Implementando a Eq. (2.19) com as operações locais Eq. (2.20) para os parâmetros $t=0$, $t=1/2$ e $t=1$ na s Eq. (2.22), na qual redefinindo $\theta = \theta_s + \theta_t$, obtemos as seguintes equações para os seus respectivos parâmetros t ,

	$t=0$	$t=1/2$	$t=1$
C_{me}	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{Cos}(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{Cos}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$
C_p	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{Cos}(\theta)$	$\frac{1}{2} - \frac{2\text{Cos}(\theta)}{9}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{18}\text{Cos}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$

(2.25)

onde C_{me} e C_p correspondem à contagem de coincidência do estado emaranhado e estado produto, respectivamente. Usando propriedades trigonométricas notamos que em $t=0$ ambos “oscilam” com $\sin^2(\theta/2)$, contudo, o comportamento nos demais instantes parametrizados são consideravelmente diferentes para estados emaranhado e produto, principalmente quando comparamos $C_{me}(1/2)$ e $C_p(1/2)$. Para o *estado emaranhado*, Figura (2.2), as franjas de interferência desaparecem completamente quando $t = 1/2$ e o estado emaranhado de dois qubits se torna ortogonal ao estado inicial, como podemos constatar nitidamente na Eq.(2.16). Ao final do processo de evolução, as franjas reaparecem com um deslocamento de *fase topológica fracionário* igual a $2\pi/3$, adquiridas do termos $2\pi/d$ ($d=3$) que aparece em Eq.(1.62), atingindo novamente a máxima visibilidade em $t = 1$.

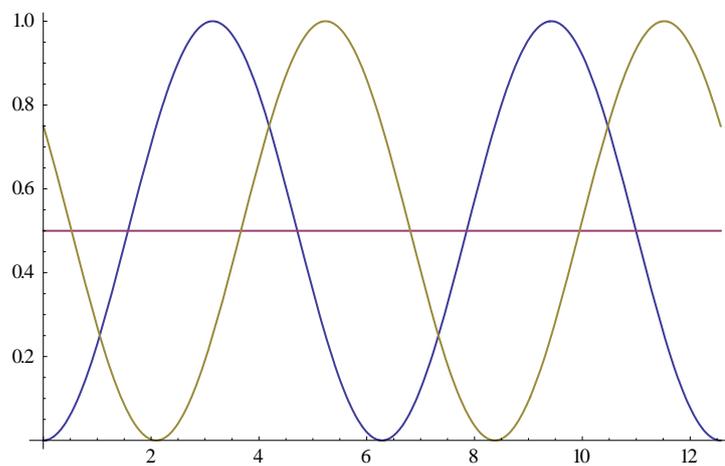


Figura 2.2: Contagem de coincidências na saída do interferômetro da Fig.(2.1) para *estado maximamente emaranhado* de dois qubits em função de $\theta(rad)$, dado pela Eq.(2.25) para três valores de t : $t=0$ (linha azul, $C_{me}\{0\}$), $t=1/2$ (linha roxa, $C_{me}\{1/2\}$) e $t=1$ (linha marrom, $C_{me}\{1\}$).

Em contrapartida ao estado maximamente emaranhado, o *estado produto* exibe comportamento diferente durante a evolução como vemos na Figura (2.3). A franja não desaparece no instante $t=1/2$ e a visibilidade máxima não é recuperada em $t=1$, mas a defasagem é a mesma entre o parâmetro inicial e final, como nos mostra Eq.(2.25).

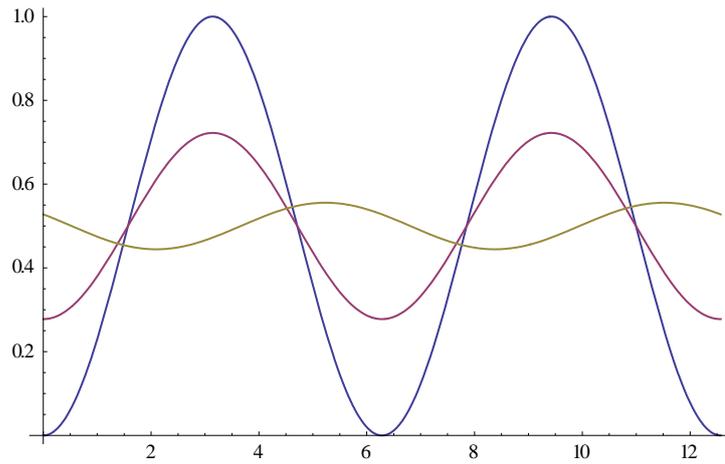


Figura 2.3: Contagem de coincidências na saída do interferômetro da Fig.(2.1) para *estado produto* de dois qutrits em função de $\theta(rad)$, dada pela Eq.(2.25) para três valores de t : $t=0$ (linha azul, $C_p\{0\}$), $t=1/2$ (linha roxa, $C_p\{1/2\}$) e $t=1$ (linha marrom, $C_p\{1\}$).

Sobrepondo os gráficos do *estado maximamente emaranhado* e do *estado produto* notamos que a *fase topológica fracionária* se manifesta em ambos estados, porém com amplitude muito reduzida no estado produto.

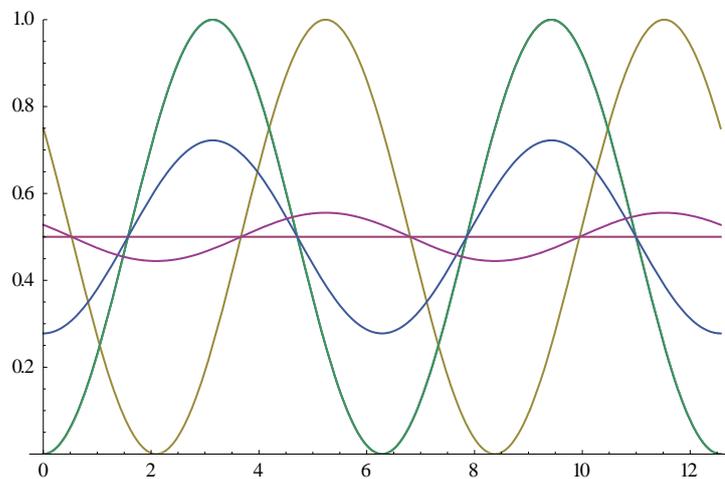


Figura 2.4: Comparação das contagens em função de $\theta(rad)$ para o *estado maximamente emaranhado* de dois qutrits [Figura (2.2)] e para o *estado produto* qutrits [Figura (2.3)] para as operações descritas em Eq.(2.25).

3 FASE TOPOLÓGICA FRACIONÁRIA É ROBUSTA AO RUIDO DE FASE

O resultado do capítulo anterior é válido para um sistema quântico fechado, quando o estado permanece puro durante todos os instantes da evolução ao longo do experimento. Como o nosso objetivo é verificar se a *fase topológica fracionária (FTF)* sobrevive à interação com o meio ambiente (ruídos), temos que usar a evolução de *sistema quântico aberto* via matriz densidade, cuja descrição consegue mapear o sistema quântico puro se tornando uma mistura de estados puros [12, 13, 17, 25–28]. Nas primeiras secções deste capítulo construiremos operadores na *notação de Dirac* que colocam fases no estado quântico, como *FTF*, *fase de varredura* do interferômetro (θ_s e θ_i) e *ruído de fase*. Faremos a descrição de cada operador separado para facilitar o entendimento, a começar pelo mais difícil deles que é o ruído de fase, para somente então completarmos o tópico com a composição dos operadores na sequência que implementa o *experimento FTF* com ruído. Na segunda secção calcularemos a contagem de coincidência e finalizaremos com um exemplo numérico na terceira secção, onde verificamos nitidamente a *sobrevivência da fase topológica fracionária na presença de ruído de fase*.

3.1 OPERADORES QUE IMPLEMENTAM AS FASES DO EXPERIMENTO

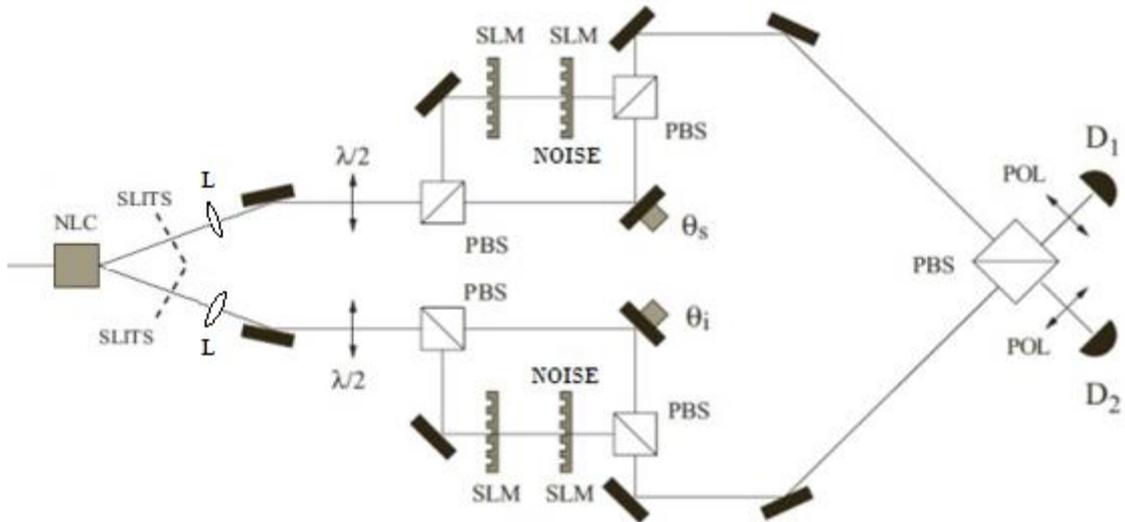


Figura 3.1: Proposta experimental: NLC, cristal não-linear; $\lambda/2$, placa de meio onda; L, lente; PBS, divisor de feixe por polarização; SLM, modulador espacial de luz; POL, polarizador; θ_j ($j = i, s$), fases de caminho adicionadas pelos espelhos acoplados aos PZTs; e D_l ($l = 1, 2$) detectores de único-fóton.⁹

Considere a Figura 3.1 que difere da Figura 2.1 somente no acréscimo dos SLMs que introduzirão ruídos de fase nos estados de caminho transversais dos fótons. Conforme Eq. (2.2), podemos escrever compactamente o estado após as placas de meia onda $\lambda/2$ como

$$|\psi_1\rangle = \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu}}{2} |m\mu, n\nu\rangle, \quad (3.1)$$

$$\alpha_{mn}\alpha^{\mu\nu} = \alpha_{mn}^{\mu\nu} \quad \therefore \quad \alpha^{\mu\nu} = 1 \quad (\mu, \nu = V, H)$$

cuja matriz densidade para o fóton S e I codificados por CAMINHO (m, n) e POLARIZAÇÃO (μ, ν) é

$$\rho^{SI} = \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu} \alpha_{m'n'}^{\mu'\nu'*}}{4} |m\mu, n\nu\rangle \langle m'\mu', n'\nu'|, \quad (3.2)$$

⁹ NLC (nonlinear crystal), PBS (Polarizing Beam Splitter), SLM (Spatial Light Modulator), POL (Polarizer) and PZT (piezoelectric transducer).

a qual não podemos decompor em $\rho^{SI} = \rho^S \otimes \rho^I$ nos casos de fótons emaranhados em estados de caminho¹⁰. A evolução do sistema quântico via matriz densidade se dá por mapas

$$\varepsilon(\rho) = p_i M_i \rho M_i^\dagger \quad \therefore \quad p_i M_i^\dagger M_i = I, \quad (3.3)$$

onde p_i é probabilidade clássica que pondera a mistura numa evolução de interação com o meio externo ao sistema (*sistema quântico aberto*) e os M_i são os chamados operadores de Kraus que podem ter no máximo d^2 operadores, sendo d^2 a dimensão da matriz densidade e um dos operadores a identidade, obrigatoriamente [13, 25]. No caso particular de *sistema quântico fechado* $p_i = 1$ e M_i é uma única evolução unitária, como a evolução temporal de um estado quântico. Para a matriz densidade em questão, estes operadores terão a seguinte estrutura

$$O = (O_{Camin} \otimes O_{Polariz})^{Signal} \otimes (O_{Camin} \otimes O_{Polariz})^{Idler}, \quad (3.4)$$

tal que as condições de atuação (a forma dos operadores) são definidas pelo experimento.

3.1.1 Mapa para o Ruído de Fase implementado por SLM

O ruído de fase, assim como os operadores que levam a FTF, pode ser inserido por um SLM no sistema ópticos. Os moduladores espaciais de luz são controlados externamente por um computador que varia a escala de cinza no display de cristal líquido colocado no caminho dos fótons, variando assim as fases adicionadas a estes.

Seja o operador que chamaremos de *operador de Kraus que aplica ruído condicionado à polarização sob o caminho* de cada fóton¹¹

$$K_{hj}^{SI} = (K_{h\alpha}^S \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|) \otimes (K_{j\beta}^I \otimes |\beta\rangle\langle\beta|), \quad (3.5)$$

onde o K^S e K^I atuam nos espaços dos caminhos e os projetores nos espaços das polarizações dos fótons S e I, respectivamente como os parênteses indicam.¹² Ao aplicarmos o mapa abaixo na matriz densidade do estado puro

¹⁰ Utilizamos índices $\mu\nu$ com índice superior apenas por conveniência, sem nenhuma relação com notação covariante e contravariante. A decomposição $\alpha_{mn}\alpha^{\mu\nu} = \alpha_{mn}^{\mu\nu}$ se deve ao fato de termos graus de liberdade não emaranhados entre si.

¹¹ Isso é factível, pois no experimento da FTF as polarizações de cada fóton estão separadas pelos braços de cada Mach-Zehnder.

¹² Note que existe uma soma nos índices mudos α e β dos produtos tensoriais da Eq. (3.5) – abriremos mão da elegância na notação sempre que acharmos necessário maior transparência para os leitores menos experientes com a notação compacta.

$$\varepsilon_K(\rho^{SI}) = p_{hj} K_{hj}^{SI} \rho^{SI} K_{hj}^{SI\dagger} \quad \therefore \quad p_{hj} K_{hj}^{SI\dagger} K_{hj}^{SI} = I, \quad (3.6)$$

teremos uma mistura ponderada por p_{hj} tal que após a atuação dos projetores efetuamos contrações de alguns índices pelos *deltas de Kronecker*, como $|\alpha\rangle\langle\alpha|\mu\rangle\langle\mu| = |\alpha\rangle\langle\mu|\delta_{\alpha\mu} = |\mu\rangle\langle\mu|$, modificando assim os índices dos operadores que atuam no caminho¹³, obtendo

$$\begin{aligned} \varepsilon_K(\rho^{SI}) &= \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu} \alpha_{m'n'}^{\mu'\nu' *}}{4} p_{hj} [(K_{h\mu}^S |m\rangle) |\mu\rangle \otimes (K_{j\nu}^I |n\rangle) |v\rangle] \\ &\times \left[(\langle m' | K_{h\mu'}^S \rangle^\dagger) \langle \mu' | \otimes (\langle n' | K_{j\nu'}^I \rangle^\dagger) \langle v' | \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde os índices mudos do lado direito da multiplicação do mapa (índices linhas do mapa) são diferentes dos índices do lado esquerdo da multiplicação (índices sem linha). Agora temos que definir que tipo de ruído vamos aplicar ao estado de caminho dos fótons. Aplicaremos um *ruído de fase* [Apêndice C].

O *operador de Kraus de ruído de fase condicionado à polarização* aplicado ao caminho do fóton é

$$K_{q\alpha} = e^{i\pi\delta_p^q \delta_V^q} |p\rangle\langle p|, \quad (3.8)$$

onde o somatório no índice p tem N_f termos (que corresponde ao número de caminhos que cada fóton pode percorrer) e V representa a polarização vertical, conforme o lado do braço do Mach-Zehnder que escolhemos para acrescentar o ruído. Note que este operador vira identidade quando atua nas componentes de polarização horizontal ($\delta_V^H = 0$) e nas verticais ($\delta_V^V = 1$) teremos duas situações, uma em que a fase morre ($\delta_p^{q\neq p} = 0$) e outras em que a componente da base troca de sinal ($\delta_p^p = 1 \Rightarrow e^{i\pi} = -1$). Assim, substituindo o operador ruído de fase no mapa e realizando as contrações dos índices com os deltas de Kronecker, teremos

$$\begin{aligned} \varepsilon_K(\rho^{SI}) &= \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu} \alpha_{m'n'}^{\mu'\nu' *}}{4} |m\mu, n\nu\rangle\langle m'\mu', n'\nu'| \\ &\times p_{hj} e^{i\pi(\delta_m^h \delta_V^\mu + \delta_n^j \delta_V^\nu)} e^{-i\pi(\delta_{m'}^h \delta_V^{\mu'} + \delta_{n'}^j \delta_V^{\nu'})}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

¹³ Note que o correto seria modificarmos os índices do estado em vez de modificarmos os índices dos operadores, entretanto, os operadores com que estamos trabalhando não projetam o estado em um subespaço, de modo que sua atuação só altera os índices mudos do estado, assim permitindo-nos trocar tais índices pelos índices do estado inicial. Isso é equivalente a trocarmos os índices dos operadores como fizemos. Manter os índices do estado facilitará a comparação das matrizes densidades inicial e final.

que é uma mistura de estados puros ponderados por p_{hj} e pelas fases. Note que após a evolução, a base desta nova matriz densidade que atuará os demais operadores é a mesma base da matriz densidade ρ^{SI} . Isso nos dá a liberdade de observarmos a atuação separadamente dos demais operadores para depois juntarmos os resultados numa única composição que, a princípio, respeitará a ordem dos componentes conforme mostramos na Figura (3.1).

3.1.2 Mapa para a Fase Topológica Fracionária implementada por SLM e sua composição com o Mapa Ruído de Fase

As operações unitárias acrescentadas nos caminhos dos fótons implementadas pelos SLMs dos Mach-Zehnder podem ser expressas como matrizes unitárias diagonais

$$\begin{aligned} U_S &= e^{i\phi_p(t_S)} |p\rangle\langle p| \quad \therefore \quad U_S^\dagger U_S = I_S, \\ U_I &= e^{i\chi_q(t_I)} |q\rangle\langle q| \quad \therefore \quad U_I^\dagger U_I = I_I, \end{aligned} \quad (3.10)$$

que, durante a evolução “temporal” parametrizado por t , acrescentam fases ϕ_p e χ_q no espaço vetorial do grau de liberdade de caminho de S e I, respectivamente, conforme a polarização da seguinte forma:

$$T_{HH} = I^S \otimes I^I \quad \therefore \quad T_{HV} = I^S \otimes U^I \quad \therefore \quad T_{VH} = U^S \otimes I^I \quad \therefore \quad T_{VV} = U^S \otimes U^I. \quad (3.11)$$

Estes operadores podem ser escritos compactamente na *notação de Dirac* da mesma maneira que na Eq.(3.8), tal que na forma de Eq.(3.5) temos

$$T = \left(e^{i\phi_p \delta_V^\alpha} |p\rangle\langle p| \otimes |\alpha\rangle\langle \alpha| \right)^S \otimes \left(e^{i\chi_q \delta_V^\beta} |q\rangle\langle q| \otimes |\beta\rangle\langle \beta| \right)^I \quad \therefore \quad T^\dagger T = I, \quad (3.12)$$

onde a função delta de Kronecker transforma o operador de caminho na identidade caso a polarização seja horizontal e acrescenta fases nos caminhos caso a polarização seja vertical. Fazendo uso do mapa mostrado em Eq. (3.3) para evoluir a matriz densidade (Eq. (3.2)) aplicando o *implementador fase topológica*¹⁴ (Eq. (3.12)), obtemos o seguinte estado puro:

¹⁴ Chamamos de *implementador de fase topológica* ao objeto matemático condicionado a polarização que adiciona fase ao caminho dos fótons, tal que esta fase é função contínua que controla o “movimento fechado” no espaço de parâmetro do estado. Este objeto matemático não pode ser classificado quanticamente como operador, já que não possui autovalores no processo de medida.

$$\begin{aligned} \varepsilon_T(\rho^{SI}) &= \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu} \alpha_{m'n'}^{\mu'\nu' *}}{4} |m\mu, n\nu\rangle \langle m'\mu', n'\nu'| \\ &\quad \times e^{i(\phi_m \delta_V^\mu + \chi_n \delta_V^\nu)} e^{-i(\phi_{m'} \delta_V^{\mu'} + \chi_{n'} \delta_V^{\nu'})}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Se aplicarmos o mapa $\varepsilon_K(\rho^{SI})$ na sequência, assim como está na montagem do experimento da Figura 3.1, encontraremos

$$\begin{aligned} \varepsilon_K(\varepsilon_T(\rho^{SI})) &= \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu} \alpha_{m'n'}^{\mu'\nu' *}}{4} |m\mu, n\nu\rangle \langle m'\mu', n'\nu'| \\ &\quad \times p_{hj} e^{i[(\pi \delta_m^h + \phi_m) \delta_V^\mu + (\pi \delta_n^j + \chi_n) \delta_V^\nu]} e^{-i[(\pi \delta_{m'}^h + \phi_{m'}) \delta_V^{\mu'} + (\pi \delta_{n'}^j + \chi_{n'}) \delta_V^{\nu'}]}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Note que, novamente, a base desta nova matriz densidade é a mesma base da matriz densidade ρ^{SI} após a evolução, o que nos dá a liberdade de atuar outro mapa separadamente das demais operações e juntarmos este resultado posteriormente.

Numa primeira análise da Eq. (3.14), nos parece que não importa a ordem de aplicação dos mapas, pois eles comutam entre si. Entretanto, temos que lembra que a implementação da fase topológica no experimento em questão foi definida para estado puro, assim, se o mapa de ruído vier primeiro que a implementação da fase topológica, passaremos a ter um estado misto, o que nos obriga a implementar fase topológica para estado misto.

3.1.3 Mapa para a Fase de Varredura e sua composição com os demais Mapas

As operações de *fases de varredura*¹⁵ (θ_s e θ_t) aplicadas nas componentes de polarização horizontal do fóton quando estes passarem pelo Mach-Zehnder,

$$S_{HH} = S^S \otimes S^I \quad \therefore \quad S_{HV} = S^S \otimes I^I \quad \therefore \quad S_{VH} = I^S \otimes S^I \quad \therefore \quad S_{VV} = I^S \otimes I^I, \quad (3.15)$$

podem ser expressas como

$$S = \left(e^{i\theta_s} \delta_H^\alpha I_{Caminho}^S \otimes |\alpha\rangle \langle \alpha| \right)^S \otimes \left(e^{i\theta_t} \delta_H^\beta I_{Caminho}^I \otimes |\beta\rangle \langle \beta| \right)^I \quad \therefore \quad S^\dagger S = I, \quad (3.16)$$

tal que, ao ser aplicada na matriz densidade inicial ρ^{SI} da Eq. (3.2) através do mapa Eq. (3.3), obtemos

¹⁵ *Sweep operation.*

$$\varepsilon_S(\rho^{SI}) = \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu} \alpha_{m'n'}^{\mu'\nu' *}}{4} e^{i(\theta_s \delta_H^\mu + \theta_I \delta_H^\nu)} e^{-i(\theta_s \delta_H^{\mu'} + \theta_I \delta_H^{\nu'})} |m\mu, n\nu\rangle \langle m'\mu', n'\nu'|, \quad (3.17)$$

que também mantém a base de estado da matriz inalterada em relação à matriz inicial ρ^{SI} .

Finalmente, ao compormos todos os mapas comutáveis do Mach-Zehnder, $\varepsilon = \varepsilon_S \circ \varepsilon_K \circ \varepsilon_T(\rho^{SI})$ (sequência do experimento), temos que a evolução da matriz densidade nos remete a

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho^{SI}) &= \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu} \alpha_{m'n'}^{\mu'\nu' *}}{4} p_{hj} |m\mu, n\nu\rangle \langle m'\mu', n'\nu'| \\ &\times e^{i\{[(\pi\delta_m^h + \phi_m)\delta_V^\mu + \theta_s \delta_H^\mu] + [(\pi\delta_n^j + \chi_n)\delta_V^\nu + \theta_I \delta_H^\nu]\}} \\ &\times e^{-i\{[(\pi\delta_{m'}^h + \phi_{m'})\delta_V^{\mu'} + \theta_s \delta_H^{\mu'}] + [(\pi\delta_{n'}^j + \chi_{n'})\delta_V^{\nu'} + \theta_I \delta_H^{\nu'}]\}}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

a qual, decompondo a *fase total* da evolução em

$$\begin{aligned} F_{mnhj}^{\mu\nu} &= \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu}}{2} e^{i\{[(\pi\delta_m^h + \phi_m)\delta_V^\mu + \theta_s \delta_H^\mu] + [(\pi\delta_n^j + \chi_n)\delta_V^\nu + \theta_I \delta_H^\nu]\}} \\ F_{m'n'hj}^{\mu'\nu' *} &= \frac{\alpha_{m'n'}^{\mu'\nu' *}}{2} e^{-i\{[(\pi\delta_{m'}^h + \phi_{m'})\delta_V^{\mu'} + \theta_s \delta_H^{\mu'}] + [(\pi\delta_{n'}^j + \chi_{n'})\delta_V^{\nu'} + \theta_I \delta_H^{\nu'}]\}}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

e a matriz densidade evoluída da Eq. (3.18), se reduz a

$$\varepsilon(\rho^{SI}) = p_{hj} F_{mnhj}^{\mu\nu} F_{m'n'hj}^{\mu'\nu' *} |m\mu, n\nu\rangle \langle m'\mu', n'\nu'|, \quad (3.20)$$

que é uma mistura de estados puros ponderados pela probabilidade clássica p_{hj} e pela fase total $F_{mnhj}^{\mu\nu} F_{m'n'hj}^{\mu'\nu' *}$. Ainda podemos decompor a fase total em três partes distintas: a parte da amplitude ($\alpha_{mn}^{\mu\nu} \alpha_{m'n'}^{\mu'\nu' *} / 4$); outra responsável pelo sinal positivo ou negativo e a ponderação das componentes da mistura vinda do ruído de fase ($p_{hj} S_{mnhj}^{\mu\nu} S_{m'n'hj}^{\mu'\nu' *}$); e por fim, a última parte composta das fases das operações unitárias e da fase de varredura ($f_{mn}^{\mu\nu} f_{m'n'}^{\mu'\nu' *}$). As duas últimas partes são escritas assim

$$\begin{aligned}
S_{mnhj}^{\mu\nu} &= e^{i\pi(\delta_m^h \delta_V^\mu + \delta_n^j \delta_V^\nu)} = (-1)^{(\delta_m^h \delta_V^\mu + \delta_n^j \delta_V^\nu)}, \\
S_{m'n'hj}^{\mu'v'*} &= e^{-i\pi(\delta_{m'}^h \delta_V^{\mu'} + \delta_{n'}^j \delta_V^{\nu'})} = (-1)^{(\delta_{m'}^h \delta_V^{\mu'} + \delta_{n'}^j \delta_V^{\nu'})}, \\
f_{mn}^{\mu\nu} &= e^{i[(\phi_m \delta_V^\mu + \theta_s \delta_H^\mu) + (\chi_n \delta_V^\nu + \theta_I \delta_H^\nu)]}, \\
f_{m'n'}^{\mu'v'*} &= e^{-i[(\phi_{m'} \delta_V^{\mu'} + \theta_s \delta_H^{\mu'}) + (\chi_{n'} \delta_V^{\nu'} + \theta_I \delta_H^{\nu'})]}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Então, reescrevemos Eq. (3.20) como

$$\varepsilon(\rho^{SI}) = p_{hj} S_{mnhj}^{\mu\nu} S_{m'n'hj}^{\mu'v'*} f_{mn}^{\mu\nu} f_{m'n'}^{\mu'v'*} \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu} \alpha_{m'n'}^{\mu'v'*}}{4} |m\mu, n\nu\rangle \langle m'\mu', n'v'|. \tag{3.22}$$

Esta equação nos diz que o ruído torna o sistema puro em uma mistura ponderada por p_{hj} e que a fase $f_{mn}^{\mu\nu} f_{m'n'}^{\mu'v'*}$ é idêntica, a menos de um sinal, para todas as componentes da soma em h e j da mistura. Com isso, já é possível percebermos aqui a *sobrevivência da fase topológica fracionária sob ruído de fase* quando comparamos Eq.(3.21) com os resultados numéricos gerados da contagem de coincidência Eq.(2.19). Note que se tirarmos o ruído do mapa ($p_{hj} S_{mnhj}^{\mu\nu} S_{m'n'hj}^{\mu'v'*} = 1$), teremos uma matriz densidade de um estado puro

$$\varepsilon(\rho^{SI}) = f_{mn}^{\mu\nu} f_{m'n'}^{\mu'v'*} |m\mu, n\nu\rangle \langle m'\mu', n'v'|, \tag{3.23}$$

tal que o estado correspondente é

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu}}{2} e^{i[(\phi_m \delta_V^\mu + \theta_s \delta_H^\mu) + (\chi_n \delta_V^\nu + \theta_I \delta_H^\nu)]} |m\mu, n\nu\rangle \tag{3.24}$$

cuja expansão da polarização com $\alpha_{mn}^{\mu\nu} = \alpha_{mn}$ para todo $\mu, \nu = H$ e V nos leva a

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{\alpha_{mn}^{\mu\nu}}{2} [e^{i(\theta_s + \theta_I)} |mH, nH\rangle + e^{i(\theta_s + \chi_n)} |mH, nV\rangle + e^{i(\chi_m + \theta_I)} |mV, nH\rangle \\
&\quad + e^{i(\chi_m + \chi_n)} |mV, nV\rangle]
\end{aligned} \tag{3.25}$$

que corresponde exatamente ao estado da Eq. (2.3), como era de se esperar.

3.2 FASE TOPOLÓGICA FRACIONÁRIA SOBREVIVE AO RUÍDO DE FASE

Vimos, nos resultados anteriores, que a matriz densidade carrega consigo a fase topológica fracionária depois da exposição ao ruído de fase que se manifesta claramente na expressão de contagem de coincidência.

A contagem de coincidência calculada pela Eq.(2.10) pode ser reescrita para matriz densidade como

$$C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = Tr[E_2^+ E_1^+(\rho) E_1^- E_2^-], \quad (3.26)$$

onde estes campos obedecem Eq. (2.9) e Eq. (2.5). Aproveitamos o fato de a parte imaginária da Eq. (2.11) ser zero quando aplicamos este operador no estado de dois fótons (signal e idler) no modo de fenda. Assim, podemos utilizar somente parte da Eq. (2.11) que produz resultados não nulos

$$\begin{aligned} E_2^+ E_1^+ F_{mnhj}^{\mu\nu} |m\mu, n\nu\rangle & \quad (3.27) \\ & = (F_{mnhj}^{HH} E_{SH}^+ E_{IH}^+ |mH, nH\rangle - F_{mnhj}^{VV} E_{SV}^+ E_{IV}^+ |mV, nV\rangle)/2. \end{aligned}$$

Utilizando Eq. (2.5) juntamente com Eq. (2.7), percebemos que parte de (3.27) será

$$\begin{aligned} E_2^+ E_1^+ F_{mnhj}^{\mu\nu} |m\mu, n\nu\rangle & = |vac\rangle & (3.28) \\ & \times (F_{mnhj}^{HH} \delta_{pm} \delta_{\mu\sigma} \delta_{qn} \delta_{v\epsilon} \eta_p^2 \eta_q^1 - F_{mnhj}^{VV} \delta_{pm} \delta_{\mu\sigma} \delta_{qn} \delta_{v\epsilon} \eta_q^2 \eta_p^1)/2, \end{aligned}$$

ou ainda Eq. (2.11)

$$E_2^+ E_1^+ F_{mnhj}^{\mu\nu} |m\mu, n\nu\rangle = (F_{mnhj}^{HH} \eta_m^2 \eta_n^1 - F_{mnhj}^{VV} \eta_n^2 \eta_m^1) |vac\rangle/2, \quad (3.29)$$

com a qual podemos completar o cálculo previsto Eq. (3.26), usando na matriz densidade ρ^{SI} , Eq(3.2). A contagem de coincidência é

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) & = p_{hj} \left(F_{mnhj}^{HH} F_{m'n'hj}^{HH*} \eta_m^2 \eta_n^1 \eta_m^{2*} \eta_n^{1*} + F_{mnhj}^{VV} F_{m'n'hj}^{VV*} \eta_n^2 \eta_m^1 \eta_n^{2*} \eta_m^{1*} - \right. & (3.30) \\ & \left. F_{mnhj}^{HH} F_{m'n'hj}^{VV*} \eta_m^2 \eta_n^1 \eta_m^{2*} \eta_n^{1*} - F_{mnhj}^{VV} F_{m'n'hj}^{HH*} \eta_n^2 \eta_m^1 \eta_n^{2*} \eta_m^{1*} \right) / 4. \end{aligned}$$

Se usarmos a ortogonalidade dos modos de fenda na integração espacial da contagem de coincidências (Eq. (2.6)) temos

$$C \equiv \int d^2\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \quad (3.31)$$

$$p_{hj} \left(F_{mnhj}^{HH} F_{m'n'hj}^{HH*} \delta_{mm'} \delta_{nn'} + F_{mnhj}^{VV} F_{m'n'hj}^{VV*} \delta_{nn'} \delta_{mm'} \right. \\ \left. - F_{mnhj}^{HH} F_{m'n'hj}^{VV*} \delta_{mn'} \delta_{nm'} - F_{mnhj}^{VV} F_{m'n'hj}^{HH*} \delta_{nm'} \delta_{mn'} \right) / 4,$$

onde vemos que os deltas de Kronecker permutam os índices dos últimos termos resultando em

$$C = p_{hj} (F_{mnhj}^{HH} F_{mnhj}^{HH*} + F_{mnhj}^{VV} F_{mnhj}^{VV*} - F_{mnhj}^{HH} F_{nmhj}^{VV*} - F_{mnhj}^{VV} F_{nmhj}^{HH*}) / 4 \quad (3.32)$$

Lembrando da Eq. (3.1) que $\alpha_{mn}^{\mu\nu} = \alpha_{mn}$ para $\mu, \nu = H$ e V , usando Eq. (3.19) e Eq. (3.21) podemos reescrever cada termo desta soma da seguinte forma

$$p_{hj} F_{mnhj}^{HH} F_{mnhj}^{HH*} = p_{hj} F_{mnhj}^{VV} F_{mnhj}^{VV*} = \frac{\alpha_{mn} \alpha_{mn}^*}{4} = \frac{1}{4}, \quad (3.33)$$

$$p_{hj} F_{mnhj}^{VV} F_{nmhj}^{HH*} = \frac{\alpha_{mn} \alpha_{nm}^*}{4} p_{hj} f_{mn}^{hj},$$

$$p_{hj} F_{mnhj}^{HH} F_{nmhj}^{VV*} = \frac{\alpha_{mn} \alpha_{nm}^*}{4} p_{hj} f_{nm}^{hj*},$$

tal que Eq. (3.32) fica

$$C = \frac{1}{16} [2 - \alpha_{mn} \alpha_{nm}^* p_{hj} (f_{mn}^{hj} + f_{nm}^{hj*})], \quad (3.34)$$

$$f_{mn}^{hj} \equiv (-1)^{(\delta_m^h + \delta_n^j)} e^{i[(\phi_m + \chi_n) - (\theta_s + \theta_I)],}$$

$$f_{nm}^{hj*} \equiv (-1)^{(\delta_n^h + \delta_m^j)} e^{-i[(\phi_n + \chi_m) - (\theta_s + \theta_I)].}$$

Esta é a *contagem de coincidências geral do estado inicial puro* para o experimento da Figura 3.1. Note que a permutação dos índices m e n induzida pelos deltas de Kronecker durante a integração da contagem de coincidência (Eq. (3.31)) fez com que

$$f_{mn}^{hj*} \neq f_{nm}^{hj*}, \quad (3.35)$$

o que nos impossibilita de reescrever C em termos da função senos e cossenos através da Fórmula de Euler nos casos mais gerais. Dentre os casos particulares, o mais simples é o caso em que $m=n$. Um caso particular do nosso interesse imediato ocorre se retiramos o ruído ($p_{hj} = 1$) e considerarmos válidas permutações de m e n , o que implica em

$$f_{mn}^{hj*} = f_{nm}^{hj*} \Rightarrow (\phi_m + \chi_n) = (\phi_n + \chi_m). \quad (3.36)$$

Então, a contagem de coincidência do estado inicial puro Eq.(3.34) se torna igual ao caso particular da contagem de coincidência Eq. (2.19) calculado a partir do estado de Eq.(2.3), que é igual ao estado (Eq.(3.25)). Vejamos exemplos numéricos da Eq. (3.34) nos casos abordados na secção 2.2 para comparar os resultados com e sem ruído e, principalmente, constatar numericamente que Eq. (3.34) gera resultados idênticos à Eq. (2.19) se retirarmos o ruído.

3.3 RESULTADOS NUMÉRICOS COM RUÍDO

Usando a notação C_{me} e C_{mer} para a contagem de coincidência sem e com ruído calculadas respectivamente por Eq.(2.19) e Eq.(3.34) normalizadas (oscilando entre zero e um), considerando numericamente todas as condições abordadas entre Eq. (2.17) e Eq. (2.22) para o caso de *estado maximamente emaranhado* (Eq. (2.23)), obtemos as seguintes equações para os parâmetros $t=0$, $t=1/2$ e $t=1$:

$\theta = \theta_s + \theta_I$	$t=0$	$t=1/2$	$t=1$
$C_{mer0\%}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{Cos}(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{Cos}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$
$C_{mer25\%}$	$\frac{1}{2} - \frac{25}{72} \text{Cos}(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{25}{72} \text{Cos}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$
$C_{mer50\%}$	$\frac{1}{2} - \frac{2}{9} \text{Cos}(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{2}{9} \text{Cos}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$
$C_{mer100\%}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{18} \text{Cos}(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{18} \text{Cos}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$

(3.37)

sendo C_{me} idêntica à Eq. (2.25) que “oscila” com $\sin^2(\theta/2)$ em $t=0$ ¹⁶. Note que, embora as amplitudes de oscilação caiam bastante (visibilidade), mesmo na presença de ruído máximo as partes oscilatórias destas sequências de equações são idênticas entre C_{me} e C_{mer} nos respectivos tempos, tal que a fase topológica fracionária determinada pela distância entre os picos consecutivos do gráfico das contagens de coincidência também será idêntica, $2\pi/3$. Por fim, as equações de C_{me} e $C_{mer0\%}$ na Eq. (3.37) se igualam se zerarmos o ruído de Eq.(3.34). Na Figura (3.2) estão os gráficos de $C_{me}\{0, 1/2, 1\}$, na Figura (3.3) de $C_{mer100\%}\{0, 1/2, 1\}$ e a sobreposição de todos os gráficos na Figura (3.4)¹⁷. Neste caso 100% de ruído significa que não há mais identidade no mapa de Kraus em tal evolução.

¹⁶ A porcentagem no sub-índice indica a intensidade do ruído que todos os termos do mapa receberam. No caso mais geral, cada termo do mapa pode receber intensidades diferentes.

¹⁷ Temos que $\theta = \theta_s + \theta_I$ porque não incorporamos o sinal negativo da Eq. (3.34) como fizemos na Eq.(2.12).

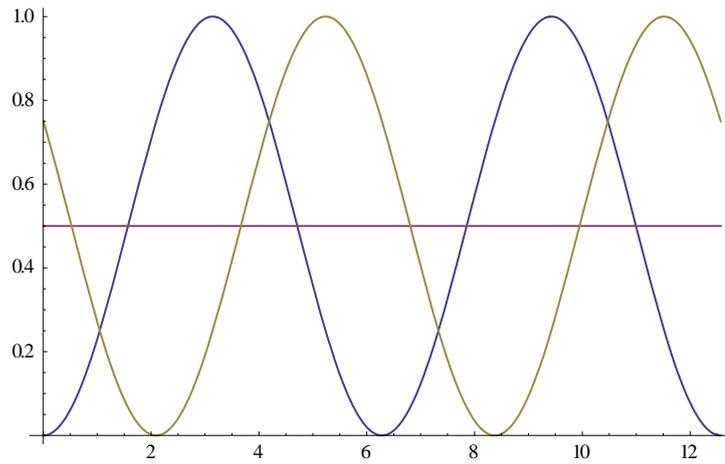


Figura 3.2: Contagem de coincidências na saída do interferômetro da Fig.(3.1) para *estado maximamente emaranhado* de dois qutrits em função de $\theta(rad)$, dado pela Eq.(3.37) para três valores de t : $t=0$ (linha azul, $C_{me}\{0\}$), $t=1/2$ (linha roxa, $C_{me}\{1/2\}$) e $t=1$ (linha marrom, $C_{me}\{1\}$).

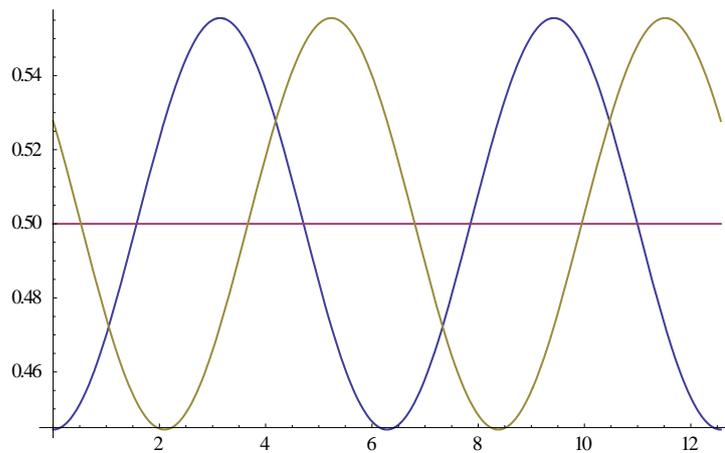


Figura 3.3: Contagem de coincidências na saída do interferômetro da Fig.(3.1) para *estado maximamente emaranhado* de dois qutrits em função de $\theta(rad)$ na *presença de ruído de fase*, dado pela Eq.(3.37) para três valores de t : $t=0$ (linha azul, $C_{mer100\%}\{0\}$), $t=1/2$ (linha roxa, $C_{mer100\%}\{1/2\}$) e $t=1$ (linha marrom, $C_{mer100\%}\{1\}$). Note que a visibilidade do padrão de interferência é menor e não começa no zero da escala gráfica.

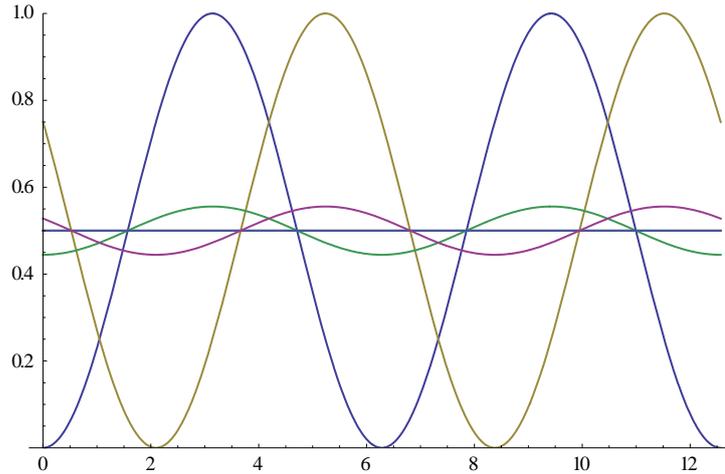


Figura 3.4: Contagem de coincidências em função de $\theta(\text{rad})$ para o *estado maximamente emaranhado* de dois qutrits [Figura (3.2)] e para o *estado produto* qutrits [Figura (3.3)] para as operações descritas em Eq.(3.37).

Para o caso de *estado produto* (Eq. (2.2)), obtemos as seguintes equações para os seguintes valores $t=0$, $t=1/2$ e $t=1$:

$\theta = \theta_s + \theta_l$	$t=0$	$t=1/2$	$t=1$
$C_{pr\ 0\%}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{Cos}(\theta)$	$\frac{1}{2} - \frac{2\text{Cos}(\theta)}{9}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{18}\text{Cos}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$
$C_{pr25\%}$	$\frac{1}{2} - \frac{25}{72}\text{Cos}(\theta)$	$\frac{1}{2} - \frac{25\text{Cos}(\theta)}{162}$	$\frac{1}{2} - \frac{25}{648}\text{Cos}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$
$C_{pr50\%}$	$\frac{1}{2} - \frac{2}{9}\text{Cos}(\theta)$	$\frac{1}{2} - \frac{8\text{Cos}(\theta)}{81}$	$\frac{1}{2} - \frac{2}{81}\text{Cos}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$
$C_{pr100\%}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{18}\text{Cos}(\theta)$	$\frac{1}{2} - \frac{2\text{Cos}(\theta)}{81}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{162}\text{Cos}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$

(3.38)

sendo a primeira idêntica a Eq.(2.25). Novamente, as partes oscilatórias da sequência de equações são idênticas, a *fase topológica fracionária* $2\pi/3$ se manifestará em ambos os casos, as amplitudes de oscilação caem bastante (visibilidade), mesmo na presença de ruído máximo, e se zerarmos o ruído C_p e $C_{pr0\%}$ se igualam.

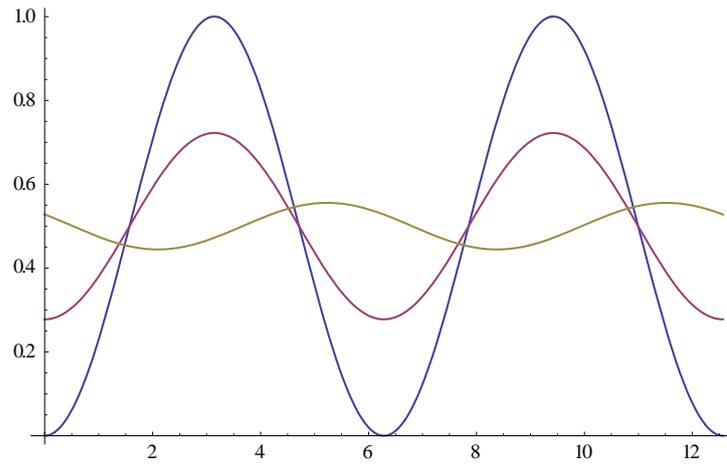


Figura 3.5: Contagem de Coincidências na saída do interferômetro da Fig.(3.1) para *estado produto* de dois qutrits em função de $\theta(rad)$, dada pela Eq.(3.38) para três valores de t : $t=0$ (linha azul, $C_p\{0\}$), $t=1/2$ (linha roxa, $C_p\{1/2\}$) e $t=1$ (linha marrom, $C_p\{1\}$).

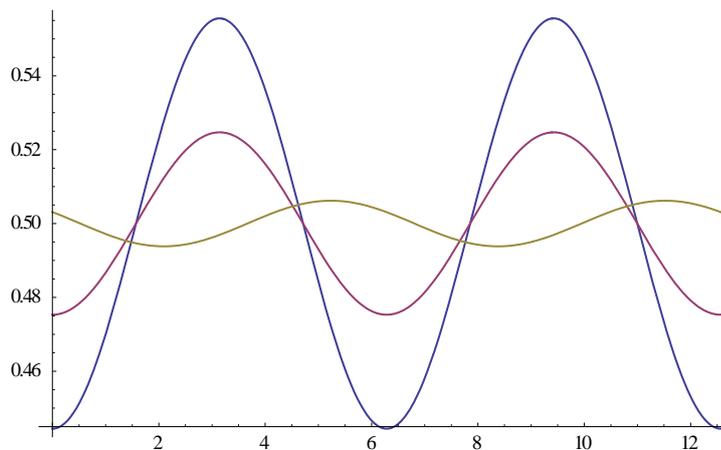


Figura 3.6: Contagem de Coincidências na saída do interferômetro da Fig.(3.1) para *estado produto* de dois qutrits em função de $\theta(rad)$ na *presença de ruído de fase*, dada pela Eq.(3.38) para três valores de t : $t=0$ (linha azul, $C_{pr100\%}\{0\}$), $t=1/2$ (linha roxa, $C_{pr100\%}\{1/2\}$) e $t=1$ (linha marrom, $C_{pr100\%}\{1\}$).

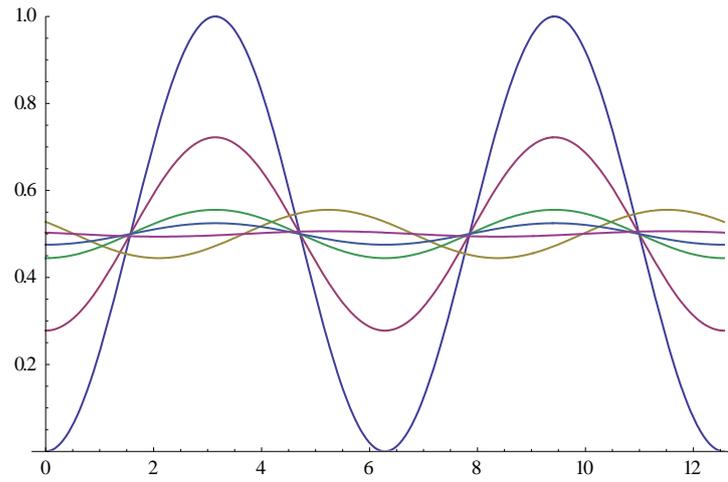


Figura 3.7: Contagem das contagens em função de $\theta(\text{rad})$ para o *Estado Maximamente Emaranhado* de dois qutrits [Figura (3.5)] e para o *Estado Produto* qutrits [Figura (3.6)] para as operações descritas em Eq.(3.38).

III - CONCLUSÃO

Neste trabalho, vimos que a fase topológica fracionária (FTF), que pode ser medida através do interferômetro descrito na referência [12], se manifesta no estado quântico de dois qudits sob uma operação unitária cíclica, sendo o caso ideal para a sua medida o estado maximamente emaranhado e o pior, estado produto, pois neste último a visibilidade da contagem de coincidências diminui drasticamente.

No Capítulo 3 demonstramos que a FTF da proposta experimental [12] é robusta a ruído de fase. Este *fato* nos leva a crer que a *fase topológica fracionária é um candidato realmente confiável à implementação de algoritmos quânticos*. Elementos insensíveis a ruídos são centrais na comunicação quântica, mais especificamente na codificação/decodificação de criptográfica quântica e implementação de algoritmos quânticos, pois tais processos “perturbam” o estado quântico, que se mostra extremamente sensível durante a manipulação experimental.

Nossas perspectivas para os trabalhos futuros com base nesta dissertação são: encontrar algebricamente uma fórmula mais simples para a contagem de coincidência Eq.(3.34); implementar mais exemplos numéricos com novas funções para operação unitária que leva a fases topológicas; incluir na descrição o conceito de fase topológica para estados mistos; desenvolver a teoria para outros tipos de ruídos; desenvolver experimentos ópticos que demonstre tais resultados.

IV - APÊNDICES

APÊNDICE A – CURVAS

Neste apêndice temos como objetivo esclarecer o surgimento da *fase geométrica* (*ângulo não-holonômico*) do *transporte paralelo* de vetores sobre uma superfície curva, bem como o vínculo desta fase com a *curvatura* da superfície. Seguindo este propósito, faremos uma breve abordagem sobre superfície plana e superfície tridimensional para definirmos conceitos como: *Diedro e Triedro de Frenet*, *curvatura*, *torção*, entre outros conceitos de Geometria Diferencial no espaço euclidiano \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . Ao leitor interessado nos pormenores deste assunto sugerimos que consultem a referência [18], de onde retiramos os conceitos apresentados abaixo.

APÊNDICE A1 – CURVAS PLANAS

A1.1 – Introdução

Uma *curva parametrizada diferenciável* do plano é uma aplicação $\alpha(t): I \rightarrow \mathbb{R}^2$ associado a $\alpha(t) = (X(t), Y(t))$ para cada t pertencente a um segmento I contido nos reais, $t \in I \subset \mathbb{R}$, que caracteriza um ponto sobre a curva no plano. As funções $X(t)$ e $Y(t)$ são diferenciáveis de classe C^∞ (diferenciáveis em todas as ordens), sendo t o *parâmetro da curva* α e $\alpha(I)$ o *traço de α* , ou seja, o subconjunto de \mathbb{R}^2 de todos os pontos de $\alpha(t)$ tal que $t \in I$.

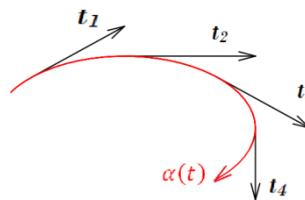


Figura A1: Exemplo de vetores unitários ao longo da curva $\alpha(t)$.

O chamado *vetor tangente a α* em t é obtido pela primeira derivada

$$\alpha'(t) = (X'(t), Y'(t)) \tag{A1.1}$$

e dizemos que $\alpha(t): I \rightarrow R^2$ é *regular* se $\alpha'(t) \neq 0$ para qualquer $t \in I$, como mostra a Figura A1. Deste vetor podemos determinar o vetor unitário por $u = \alpha'(t)/|\alpha'(t)|$ e que caracteriza a reta tangente à α em um determinado ponto $t_0 \in I$:

$$T(r) = \alpha(t_0) + ru(t_0), \quad r \in R. \quad (\text{A1.2})$$

Fixando t_0 e t_1 do intervalo I , calculamos o comprimento de arco da curva α de t_0 a t_1 por

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt, \quad (\text{A1.3})$$

e a partir desse conceito definimos a *função comprimento de arco* da curva α a partir de t_0 por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt. \quad (\text{A1.4})$$

A curva regular $\alpha(t): I \rightarrow R^2$ é dita *parametrizada pelo comprimento de arco* se

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0, \quad (\text{A1.5})$$

com $t_0, t_1 \in I$ e $t_0 \leq t_1$. É evidente que a condição $s'(t) = |\alpha'(t)| = 1$ satisfaz tal definição, mas todas as curvas que não satisfizerem tal condição podem ser reparametrizadas de modo que a curva de traço idêntico seja parametrizada pelo comprimento de arco. É vantajoso trabalhar com curvas parametrizadas pelo comprimento de arco pela facilidade na identificação dos conceitos a serem definidos mais a frente.

A1.2 – Teoria Local das Curvas, Fórmula de Frenet

Seja $\alpha(s) = (X(s), Y(s))$, $s \in I$, uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Para cada $s \in I$, $\alpha'(s)$ é o vetor unitário que denotaremos por

$$t(s) = (X'(s), Y'(s)). \quad (\text{A1.6})$$

Seja $n(s)$ um vetor unitário ortogonal a $t(s)$, também chamado vetor normal à α , tal que a base ortogonal de R^2 formado por $t(s)$ e $n(s)$ tenha a mesma orientação que a base canônica $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ de R^2 . Se escrevermos

$$n(s) = (-Y'(s), X'(s)), \quad (\text{A1.7})$$

veremos que o *produto interno* entre t e n será nulo como definido anteriormente

$$\langle t(s), n(s) \rangle = X'(s)Y'(s) - Y'(s)X'(s) = 0. \quad (\text{A1.8})$$

O vetor normal caracteriza a *reta normal* à α em um determinado ponto $s_0 \in I$:

$$N(r) = \alpha(s_0) + rn(s_0), \quad r \in \mathbb{R}. \quad (\text{A1.9})$$

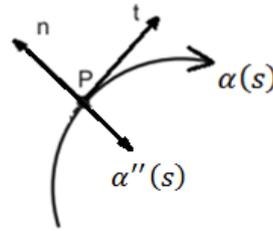


Figura A2: Exemplo de vetores tangente e normal à curva $\alpha(s)$ no ponto P .

Vemos também o vetor $\alpha''(s)$ que aponta para o centro da curva.

O conjunto $\{t(s), n(s)\}$ forma o referencial chamado *Diedro de Frenet* da curva α em s e satisfaz as *Fórmulas de Frenet*:

$$\begin{aligned} t'(s) &= k(s)n(s), \\ n'(s) &= -k(s)t(s), \end{aligned} \quad (\text{A1.10})$$

onde o *produto interno*

$$k(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle \quad (\text{A.11})$$

é a *curvatura* de α em s e $\alpha''(s)$ é também chamado de *vetor curvatura* (veja um exemplo destes vetores na Figura A2). A função $|k(s)| = |\alpha''(s)|$ indica a velocidade com que a reta tangente muda de direção, ou seja, $|k(s)|$ é uma *velocidade angular* como veremos. Se $k(s) \neq 0$, a quantidade $\rho(s) = \frac{1}{|k(s)|}$ é denominada *raio de curvatura* de α em s e o círculo de raio $\rho(s)$ e centro

$$c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s) \quad (\text{A1.12})$$

é denominado *círculo osculador*, sendo $c(s)$ o *centro de curvatura* de α em s (veja um exemplo na Figura A3).

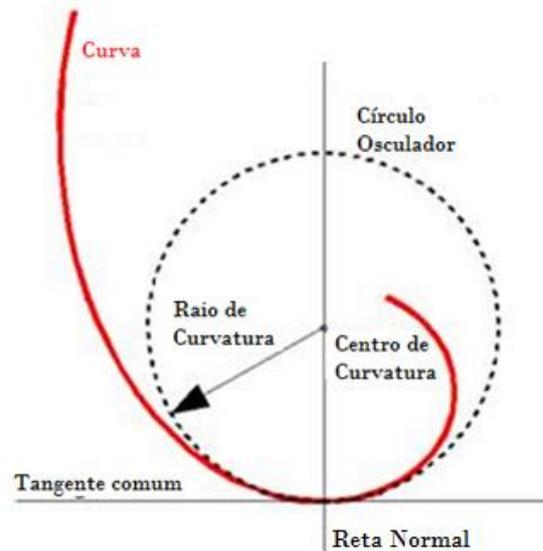


Figura A3: Círculo Osculador de α em um ponto qualquer [29].

A1.3 – Teorema Fundamental das Curvas Planas

O Teorema a seguir mostra que a curvatura define uma curva plana a menos de sua posição no plano. Fazemos uma demonstração simplificada de tal resultado.

Teorema: Dada uma função diferenciável $k(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura é $k(s)$.

Demonstração: Se a curva é parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, $|\alpha'(s)| = 1$, podemos definir

$$|\alpha'(s)| \equiv [\cos^2(\theta(s) + \lambda) + \sin^2(\theta(s) + \lambda)]^{1/2} \quad (\text{A1.13})$$

e assim determinar a curva alfa como

$$\alpha(s) = \left(X_0 + \int \cos(\theta(s) + \lambda) ds, Y_0 + \int \sin(\theta(s) + \lambda) ds \right) \quad (\text{A1.14})$$

Usando o Referencial de Frenet

$$\begin{aligned} \alpha'(s) = t(s) &= (\cos(\theta(s) + \lambda), \sin(\theta(s) + \lambda)) \\ n(s) &= (-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)) \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$

e as Fórmulas de Frenet

$$t'(s) = k(s)n(s) = \alpha''(s) = \theta'(s)(-\sin(\theta(s) + \lambda), \cos(\theta(s) + \lambda)) \quad (\text{A1.16})$$

concluimos a partir dessas últimas equações que

$$\begin{aligned}\theta(s) &= \int_{s_0}^s k(s) ds && \text{(A1.17)} \\ &= \int_{s_0}^s \langle t'(s), n(s) \rangle ds = \int_{s_0}^s \langle \alpha''(s), n(s) \rangle ds\end{aligned}$$

é uma fase geométrica única ao fixarmos as condições iniciais, garantindo assim que $\alpha(s)$ também seja única, conforme nos assegura o teorema de existência e unicidade de Equação Diferencial Ordinária. Se $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ possuem a mesma curvatura, então podemos efetuar um movimento rígido positivo, ou seja, uma rotação R e uma translação T que preservam a orientação da curva, tal que $\alpha(s) = (R \circ T)\beta(s)$. ■

Note de Eq. (A1.17) que $\theta(s)$ é uma fase caracterizada pela função curvatura que por sua vez também caracteriza a curva no plano Eq. (A1.14). Note ainda que a curvatura pode ser interpretada geometricamente como a taxa de variação do ângulo que a reta tangente faz com a horizontal, ou seja, a “velocidade angular” que a reta tangente muda de direção. Este resultado é central para o entendimento de transporte paralelo de vetores tangentes às superfícies. Por fim, observe que poderíamos usar funções complexas como a Fórmula de Euler $e^{i\theta(s)}$ em vez das funções *seno* e *cosenos* para definirmos $|\alpha'(s)|$ na equação Eq. (A1.13).

APÊNDICE A2- CURVAS NO ESPAÇO R^3

Para curva tridimensional regular parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha: I \rightarrow R^3$, construímos um referencial ortogonal chamado *Triedro de Frenet*, $\{t(s), n(s), b(s)\}$, em um ponto $\alpha(s) = (X(s), Y(s), Z(s))$ sobre a curva, $s \in I$, efetuando os cálculos

$$t(s) = \alpha'(s) : \text{vetor tangente unitário}, \quad (\text{A2.18})$$

$$n(s) = \alpha''(s)/k(s) : \text{vetor normal},$$

$$b(s) = t(s) \times n(s) : \text{vetor binormal}.$$

O Triedro de Frenet obedece a Fórmula de Frenet:

$$t'(s) = k(s)n(s), \quad (\text{A2.19})$$

$$n'(s) = -k(s)t(s) - \tau(s)b(s),$$

$$b'(s) = \tau(s)n(s),$$

tal que $k(s) = |\alpha''(s)|$ é a *curvatura* e $\tau(s) = \langle b'(s), n(s) \rangle$ é a *torção* de α em s .

Do triedro de Frenet definimos os seguintes planos a partir dos pares de vetores:

$$\{t(s), n(s)\} : \text{plano osculador}, \quad (\text{A2.20})$$

$$\{t(s), b(s)\} : \text{plano retificante (plano tangente)},$$

$$\{n(s), b(s)\} : \text{plano normal}.$$

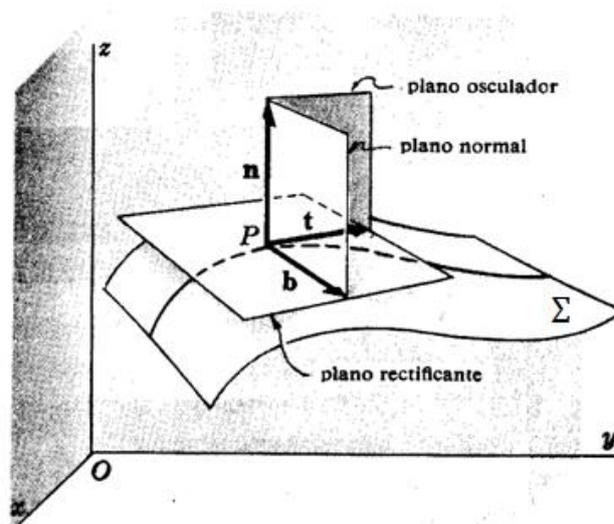


Figura A4: Planos formados pelos pares de vetores do Triedro de Frenet de uma curva sobre a superfície [30].

Na Figura A4 vemos uma superfície Σ que contém uma curva onde tais planos estão esboçados. Geometricamente $k(s)$ mede a velocidade com que o Plano Tangente varia e $\tau(s)$ mede a velocidade com que o Plano Osculador varia ao deslizarmos sobre a curva.

O Teorema Fundamental das Curvas (TFC) no espaço nos afirma que dado uma curvatura e uma torção podemos definir uma curva no espaço a menos de sua posição no espaço. Como essa afirmativa é semelhante ao (TFC) no Plano, vamos apenas enunciar o Teorema para o R^3 e remeter a demonstração para [18].

Teorema: Dada as funções diferenciáveis $k(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in I \subset R$, existe uma curva regular $\alpha(s)$ parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $k(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ é a torção de α em s .

APÊNDICE B – SUPERFÍCIES

APÊNDICE B1- CURVATURAS DE UMA SUPERFÍCIE, GEODÉSICA E ÂNGULO NÃO-HOLONÔMICO

Seja Σ uma superfície como mostra a Figura A4. A cada ponto P de Σ existem duas direções ortogonais, ditas *direções principais*, uma de curvatura máxima (k_{max}) e outra de curvatura mínima (k_{min}) associadas, respectivamente, aos raios de curvaturas mínimo (R_{min}) e máximo (R_{max}). Destas curvaturas definimos duas curvaturas associadas ao ponto P de Σ , que são chamadas de *curvatura de Gauss* (K) e de *curvatura média* (H):

$$K = k_{max} k_{min} = \frac{1}{R_{min} R_{max}} \quad \therefore \quad H = \frac{k_{max} + k_{min}}{2}, \quad (\text{B1.21})$$

sendo K a taxa de variação do plano tangente, que também pode ser medida a partir da taxa de variação do vetor normal quando estão bem definidas as curvas que passam por P nas direções principais. A taxa de variação do vetor tangente associado à direção qualquer, é dada por

$$k(\mu) = k_{max} \cos^2(\mu) + k_{min} \sin^2(\mu), \quad (\text{B1.22})$$

onde μ é o ângulo medido a partir da direção de curvatura máxima.

Do estudo destas duas curvaturas surgem as seguintes definições para os pontos sobre a superfície:

- (i) $K = 0$ e $H = 0$: *planar* (B1.23)
- (ii) $K = 0$ e $H \neq 0$: *parabólico*
- (iii) $K > 0$: *elíptico*
- (iv) $K < 0$: *hiperbólico*

Neste contexto definimos *geodésica* como sendo a *menor distância entre dois pontos*. Percebemos que o *Teorema de Pitágoras* deixa de ser válido em muitos dos casos em que as curvaturas são diferentes de zero e conseqüentemente a regra em que a *soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°* também deixa de ser válido para os triângulos sobre a superfície. Isso ocorre devido ao fato de a *geodésica* entre dois pontos quaisquer não ser mais uma *linha reta* na maioria dos casos, pois, para interligarmos os dois pontos por um segmento de reta, teríamos que furar ou “voar” sobre a superfície em vez de “caminhar” sobre ela. Uma maneira fácil de notarmos esses resultados é desenhar o *triângulo geodésico* sobre diversas

superfícies fazendo uso de uma régua flexível, medir os ângulos internos do triângulo-geodésico e somá-los, como exemplifica a Figura B1 abaixo.

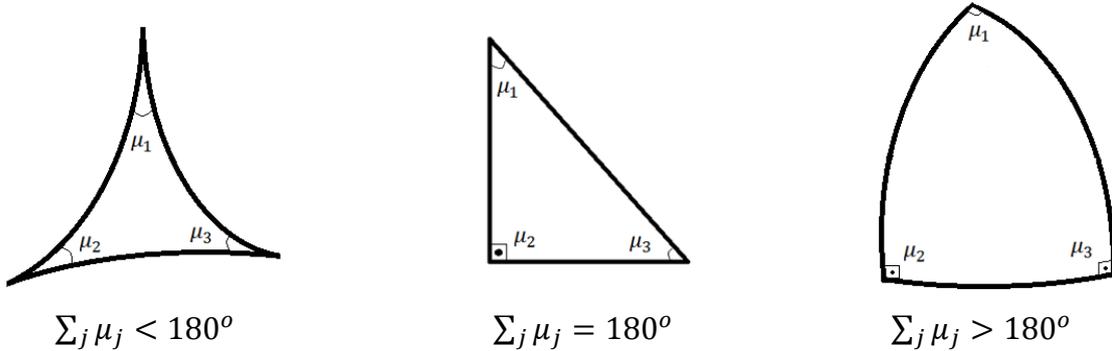


Figura B1: Ilustração de Triângulos-Geodésicos sobre superfícies de curvatura negativa (sela), nula (plano euclidiano) e positiva (esfera) respectivamente da esquerda para a direita.

A integral de superfície da Curvatura de Gauss fornece a quantidade angular desviada dos tradicionais 180° da soma dos ângulos internos ao triângulo euclidiano quando integramos sobre o Triângulo-Geodésico:

$$\sum_j \mu_j = \pi + \iint_{C=\partial\Sigma} K dA. \quad (\text{B1.24})$$

Tal desvio angular é uma manifestação da curvatura e está diretamente conectado com o *ângulo não-holonômico* do *transporte paralelo*¹⁸ sobre a superfície

$$\theta(C) = \iint_{C=\partial\Sigma} K dA. \quad (\text{B1.25})$$

Localmente, toda superfície regular Σ pode ser associada à uma esfera S^2 por meio de uma parametrização chamada *Aplicação Normal de Gauss*. Então, em vez de estudarmos o transporte paralelo diretamente em Σ podemos fazer uso do transporte paralelo sobre a esfera. Esse resultado é interessante porque conhecemos bem as propriedades da casca esférica como, por exemplo, o vínculo da fase geométrica (ângulo não-holonômico) com o ângulo sólido.

¹⁸ Podemos efetuar o transporte paralelo de um vetor tangente à uma curva fechada sobre a superfície se deslizarmos este pela curva mantendo-o constante em relação ao vetor normal à superfície, ou seja, mantendo o ângulo reto com o vetor normal e sem promover giro em torno este. Ao final do processo se existir um ângulo entre o vetor final e inicial dizemos que estes são *não-holônomo*s, caso contrário dizemos que são *holônomo*s (podem receber o “mesmo nome”, ou ainda, que são o mesmo). O ângulo entre o vetor inicial e final é chamado de *ângulo não-holonômico*.

Finalizaremos aqui nossa breve introdução à Geometria Diferencial por acreditar que os objetivos de apresentar o vínculo da curvatura com o ângulo não-holonômico, Eq.(B1.25), foi realizado. Para maiores detalhes sugerimos a bibliografia [18].

APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÕES E JUSTIFICATIVAS

APÊNDICE C1 – PROPOSIÇÃO

O operador de fase condicionado à polarização aplicado ao estado de caminho do fóton $\langle p|$

$$K_{q\alpha} = e^{i\pi\delta_p^q\delta_V^\alpha} |p\rangle\langle p| \quad (\text{C1.26})$$

é um operador de Kraus não normalizado.¹⁹

Demonstração: Para comprovar esta proposição basta mostrarmos que este operador pode satisfazer um mapa completamente positivo, preservando assim o traço por meio de sua propriedade cíclica. Note que o operador da proposição se torna a *Identidade* para a polarização horizontal (parte com somatório na equação abaixo) e se torna o *operador ruído de fase* de um qubit conhecido na literatura [13] para as polarizações verticais

$$\begin{aligned} K_{qH} &= \sum_{p=1}^{N_f} |p\rangle\langle p| \equiv I_q \quad \because \quad I_q^\dagger I_q = N_f I, \\ K_{qV} &= e^{i\pi\delta_p^q} |p\rangle\langle p| \equiv K_q \quad \because \quad K_q^\dagger K_q = N_f I, \end{aligned} \quad (\text{C1.27})$$

onde N_f é o número de caminhos definidos pelas fendas que o fóton passa; O_q são operadores no espaço do grau de liberdade de caminho do fóton e I é a identidade em todo o espaço vetorial de cada fóton. Então, abrindo a soma dos índices mudos e usando Delta de Kronecker podemos escrever o operador como

$$K_{q\alpha} = I_q \delta_H^\alpha + K_q \delta_V^\alpha, \quad (\text{C1.28})$$

tal que

$$K_{q\alpha}^\dagger K_{q\alpha} = K_{qH}^\dagger K_{qH} + K_{qV}^\dagger K_{qV} = I_q^\dagger I_q + K_q^\dagger K_q = 2N_f I. \quad (\text{C1.29})$$

■

Para o estado de dois-fótons temos que a constante de normalização será $(2N_f)^2$ pois

¹⁹ Em todas as equações usaremos a *Convenção da Soma de Einstein*, ou seja, índice repetido em somente um dos lados da igualdade significa que existe um somatório sob este índice repetido, também chamado de *índice mudo* por não alterar as propriedades da equação se trocarmos-los por outro de mesma natureza.

$$(K_{h\alpha}^\dagger K_{h\alpha})^S \otimes (K_{i\beta}^\dagger K_{i\beta})^I = (2N_f)^2 I^S \otimes I^I \quad (\text{C1.30})$$

Entretanto, em vez de usarmos constantes de normalização ao definirmos um Operador de Kraus, podemos definir uma probabilidade clássica p_i que pondera o estado misto resultante do mapa

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{i=0}^R p_i M_i \rho M_i^\dagger \quad \therefore \quad p_i M_i^\dagger M_i = I \quad (\text{C1.31})$$

em que $1 \leq R \leq d^2$, onde d^2 é a dimensão da matriz densidade. Isso nos diz que podemos ter até $d^2 + 1$ operadores, sendo a identidade um dentre eles.

V - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Y. Aharonov and J. Anandan. *Phase change during a cyclic quantum evolution*, *Phys. Rev. Lett.* 58:1593–1596, 1987.
- [2] M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 392:45–57, 1984.
- [3] A. C. Lobo, R. A. Ribeiro, C. A. Ribeiro, and P. R. Dieguez, *Geometry of the adiabatic theorem*. *European Journal of Physics (Print)*, 33:1063–1072, 2012.
- [4] Y. Aharonov and D.Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, *Phys. Rev.*, 115:485–57, 1959.
- [5] P. Bruno, *Berry phase effects in magnetism*,
<http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0506270v1.pdf>
- [6] M. Berry, *Some geometric phase*, *Cours/Lecture Series at CERN*, Geneva, 1993.
- [7] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison Wesley, 2nd ed, 1994.
- [8] D. Chruscinski, A. Jamiolkowski, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, *Progress in mathematical physics*, 2004.
- [9] P. Milman and R. Mosseri, *Topological Phase for Entangled Two-Qubit States*, *Phys. Rev. Lett*, 90:230403, 2003.
- [10] P. Milman, *Phase dynamics of entangled qubits*, *Phys. Rev. A* 73:062118, 2006.
- [11] L. E. Oxman and A. Z. Khoury, *Fractional Topological Phase for Entangled Qudits*, *Phys. Rev. Lett.* 106:240503, 2011.
- [12] A. Z. Khoury, L. E. Oxman, B. Marques, A. Matoso, and S. Pádua, *Fractional topological phase on spatially encoded photonic qudits*. *Phys. Rev. A*, 87:042113, 2013.
- [13] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Computação Quântica e Informação Quântica*, Bookman, 2005.
- [14] J. A. Jones, V. Vedral, A. Ekert, and G. Castagnoli, *Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance*, *Nature (London)* 403: 869, 2000.
- [15] L.-M. Duan, J. I. Cirac, and P. Zoller, *Geometric Manipulation of Trapped Ions for Quantum Computation*, *Science* 292:1695, 2001.
- [16] A. Kitaev, *Fault-tolerant quantum computation by anyons*, *Ann. Phys.*, NY, 303:2 , 2003.
http://www2.imm.dtu.dk/pubdb/views/publication_details.php?id=3274

- [17] A. Carollo, I. Fuentes-Guridi, M. França Santos and V. Vedral, *Geometric Phase in Open Systems*, Phys. Rev. Lett., 90: 16, 2003.
- [18] K. Tenenblat, *Introdução à Geometria Diferencial*, UnB, 1988.
- [19] D. O’Shea, *A Solução de Poincarè – Em busca da forma do Universo*, Record, 2009.
- [20] A. Messiah. *Mecânica Cuântica Vol. II*, Tecnos, 1975.
- [21] Wolfgang P. Schleich, *Quantum Optics in Phase Space*, WILEY-VCH, Verlag Berlin GmbH, Berlin, 2001.
- [22] J. C. Romão, *Sobre Fases em Mecânica Quântica*, Departamento de Física & CFTP, Lisboa, Portugal, acessado em 20/02/2015,
<https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/1692629431484695/BerryPhases.pdf>
- [23] P. Rungta, V. Buzek, C.M. Caves, M. Hillery, and G. J. Milburn, *Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions*, Phys. Rev. A, 64:042315, 2001.
- [24] J. C. Garrison, R. Y. Chiao, *Quantum Optics*, Oxford, 2008.
- [25] R. C. Drumond, *Temas de Álgebra Linear em Mecânica Quântica*, Departamento de Matemática, UFMG, 2014.
<http://www.mat.ufmg.br/site/wp-content/uploads/2014/02/Notas.pdf>
- [26] J. Koch, *The Theory of Open Quantum Systems*,
<http://sites.northwestern.edu/koch/files/2013/03/PHYS450-1.pdf>
- [27] B. M. G. Teixeira, *Modulador espacial de luz para processos quânticos: algoritmo de Deutsch, concentração de emaranhamento e simulação de sistemas quânticos abertos*, Tese de Doutorado, UFMG, 2013.
<http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/handle/1843/BUOS-97VKFM>
- [28] *Open Quantum Systems*, MIT Open Course Ware, 2012,
http://ocw.mit.edu/courses/nuclear-engineering/22-51-quantum-theory-of-radiation-interactions-fall-2012/lecture-notes/MIT22_51F12_Ch8.pdf
- [29] Acessado em 19/20/2015:
<http://matcalculus.wikidot.com/frenet>
- [30] Acessado em 19/20/2015:
<http://www.lasmaticasdemario.com/Geometria/Diferencial/Superficies/Plano.htm>
- [31] W. K. Nicholson, *Algebra Linear*, 2ª Ed. Mc Graw Hill, 2006.
- [32] K. B. Petersen and M. S. Pedersen, *The Matrix Cookbook*, 2012,