Universidade Federal de Minas Gerais

Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas

Programa de Pós-graduação em História

Dissertação de mestrado

Debates na historiografia da matemática e a história do surgimento do cálculo infinitesimal segundo Carl Boyer

Orientador: Prof. Dr. Bernardo Jefferson de Oliveira

Aluno: Dilhermando Ferreira Campos

Belo Horizonte, agosto de 2006.

Banca examinadora

Prof. Dr. Bernardo Jefferson Oliveira (Orientador)

Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. Mauro Lúcio Leitão Condé

Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Minas Gerais

Prof. Dr. Antonio Zumpano

Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais

À meus pais,

pelo incondicional apoio.

Resumo

Neste texto apresentamos inicialmente as discussões entre internalistas e externalistas na história da ciência e os reflexos deste debate na historiografia da matemática. Analisamos um artigo da pesquisadora Joan Richards em que ela tenta explicar a predominância de abordagens internalistas na história da matemática. Contestamos, através de uma análise dos debates filosóficos em torno dos fundamentos da matemática ocorridos no início do século XX, o argumento principal de Richards que diz que os historiadores da matemática privilegiariam a história interna por sua postura fundacionista diante do conhecimento. No segundo capítulo, apresentamos a nova historiografia da ciência surgida nos anos 60 do século XX e os impactos dessas abordagens na história da matemática. No último capítulo, apresentamos uma história do surgimento do cálculo infinitesimal, elaborada em 1939 por Carl Boyer, e finalizamos com uma crítica a este texto clássico da história da matemática com base nas propostas historiográficas apresentadas nos dois primeiros capítulos.

Abstract

In this text we initially presented the discussions between internalists and externalists in the history of the science and the reflexes of this debate in the historiography of the mathematics. We analyzed an article of researcher Joan Richards in that she tries to explain the predominance of approaches internalists in the history of the mathematics. We objected, through an analysis of the philosophical debates around the foundations of the mathematics happened in the beginning of the century XX, the main argument of Richards that says that the historians of the mathematics would privilege the history interns for his fundationist posture of the knowledge. In the second chapter, we presented the new historiography of the science appeared in the 60's of the century XX and the impacts of this approaches in the history of the mathematics. In the last chapter, we presented a history of the appearance of the infinitesimal calculus, elaborated in 1939 by Carl Boyer, and we concluded with a critic to this classic text of the history of the mathematics with base in the historiographical proposals presented in the first two chapters.

Agradecimentos

Agradeço meus pais, Sr. Dorvalino Campos Júnior e D. Wilma da Cunha, meus irmãos, Eduardo e Grizielle, minha namorada, Paula de Carvalho Souza, os amigos Leonardo de Souza, Luiz Lacerda Abrahão, Gustavo Rocha e René Bittencourt, os professores Mauro Condé, Bernardo Jefferson e Antônio Zumpano, todos os professores e colegas participantes do Grupo *Scientia*, o Departamento de História da UFMG e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior do Ministério da Educação – CAPES.

Índice

Introdução

Este texto que ora apresentamos, tem origem em uma pesquisa de graduação para o Programa de Aprimoramento Discente em História da Ciência. Na época, propúnhamos pesquisar os aspectos culturais da Europa pós-renascentista, que foram influentes no desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Neste projeto, a principal dificuldade encontrada para sua concretização, foi conseguir livros de história da matemática que tratassem destas influências do meio social no desenvolvimento da matemática. Este fato nos causou um certo estranhamento, já que na historiografia de outras ciências este tipo de abordagem não é incomum.

Ao iniciarmos um estudo em história da ciência, um fator que chama a atenção é a pluralidade de abordagens existentes nesta área, tratando a ciência e sua história das mais diferentes perspectivas. De descrições de experimentos e elaboração de teorias às análises sociológicas e antropológicas da ciência, é possível se conseguir diversas explicações e abordagens para um mesmo acontecimento científico. No entanto, quando tomamos os textos sobre história da matemática, o que percebemos é uma grande predominância de estudos que trabalham apenas o desenvolvimento das idéias matemáticas. No caso do surgimento do cálculo, não foi diferente, encontramos apenas livros que tratam o tema sobre o ponto de vista do desenvolvimento conceitual. Propomos então, em um projeto de pesquisa para o mestrado, buscar, fora dos textos sobre história da matemática, os condicionantes socioculturais que permitiram a criação do cálculo infinitesimal no século XVI.

Ao longo dessa pesquisa, percebemos como é difícil sustentar qualquer tipo posicionamento nas discussões historiográficas da ciência. Dos historiadores que optam por uma abordagem internalista, aos que têm uma perspectiva antropológica da história da ciência, normalmente, todos possuem bons argumentos para justificar seu enfoque em determinados aspectos da ciência em sua história.

A partir desta constatação, as hipóteses guiaram esta pesquisa, inicialmente baseadas na idéia de que o desenvolvendo do cálculo sofreu influências de aspectos culturais, poderiam perfeitamente ser recusadas por uma pesquisa que visasse demonstrar algo em sentido contrário. Defendíamos que o surgimento do cálculo infinitesimal no século XVII estava diretamente ligado a condicionantes culturais daquela época. Esta tese estava apoiada em duas hipóteses principais. A primeira era que, apesar dos gregos antigos terem desenvolvido todo um aparato teórico para a invenção do cálculo naquela época, essa ferramenta matemática só foi criada, ou só pode ser criada, no século XVII. A segunda, era o fato do cálculo ter sido desenvolvido quase simultaneamente por dois pensadores de forma independente, o que poderia indicar que as condicionantes culturais da Europa pós-renascentista possibilitaram o desenvolvimento desta ferramenta matemática naquele período e não na Grécia antiga.

Se esses fatos não são suficientes para se comprovar a idéia de que surgimento do cálculo foi influenciado por questões extrateóricas, pelo menos pareciam um bom ponto de partida para uma pesquisa que proponha examinar essa relação. Entretanto, não há como negar também que se poderia construir uma argumentação que mostrasse que o surgimento do cálculo foi apenas uma conseqüência teórica do desenvolvimento da matemática.

Uma das razões dos gregos não terem desenvolvido o cálculo pode estar no fato deles não possuírem ferramentas essenciais, como as notações algébricas que facilitaram a manipulação de teorias através das fórmulas matemáticas e a geometria analítica de Descartes, que tornaram possível o desenvolvimento do cálculo no século XVII. Quando observamos a forma como os gregos manipulavam sua matemática, vemos que eles não usavam fórmulas, tudo era dado em termos de proporções. Como se pode ver nos *Elementos* de Euclides, os fatos geométricos não eram expressos numericamente como hoje.

> *(...) enquanto para nós a área de um triângulo é dada por uma fórmula exprimindo metade do produto da base pela altura, para Euclides a área de um triângulo é metade da área do paralelogramo que se obtém com a junção de dois triângulos iguais ao triângulo dado; a área do paralelogramo é igual à área de um retângulo de mesma base e mesma altura, e assim por diante. Para nós, hoje, a área de um círculo é* πr^2*, mas para Arquimedes (287-212 a.C.), que viveu algumas décadas depois de Euclides, a área do círculo é igual à área de um triângulo de base igual ao comprimento da circunferência e altura igual ao raio do círculo. Para nós o volume da esfera é* $4\pi r^3/3$*, enquanto o que Arquimedes nos diz é que o volume da esfera está para o volume do cilindro circular reto a ela circunscrito, assim como 2 está para 3.* (ÁVILA, 2001: 2)

Já a hipótese baseada no fato do cálculo ter sido desenvolvido por Newton e Leibniz na mesma época, pode perfeitamente ser interpretada não como um indício da influência cultural no desenvolvimento da matemática, mas como indicação de que a matemática possui uma autonomia de aspectos externos a ela. Um exemplo disto pode surgir de uma observação mais atenta da biografia desses dois pensadores.

Leibniz foi um homem que viveu intensamente a sua época, pensou e escreveu sobre quase todos os temas filosóficos e políticos do seu tempo, viajou praticamente por toda a Europa e freqüentou os mais refinados ambientes das cortes européias, da Inglaterra à Rússia. Se ele tivesse criado sozinho o cálculo seria difícil argumentar contra quem defendesse que Leibniz foi muito influenciado pelas mudanças culturais que ocorriam naquele período.

Contudo, quando analisamos a biografia de Newton, podemos concluir o oposto. Newton era um indivíduo taciturno, introspectivo, não se casou, não tinha amigos, não gostava de divulgar seus pensamentos. Passou boa parte de sua vida trancado em seu escritório, pesquisando, principalmente, alquimia e minúcias bíblicas. “Ao que parece não tinha nenhum ouvido para música, referia-se a esculturas como ‘bonecos de pedra’ e encarava a poesia como uma ‘espécie de disparate inábil’.” (BRENNAN, 2003: 55) Quanto a sua formação acadêmica

> *Como milhares de outros bacharelandos, Newton começou sua educação superior mergulhando em Aristóteles e Platão. Naquela altura, o movimento hoje conhecido como a ‘revolução científica’ estava bem avançado e muitas das obras fundamentais para a ciência moderna haviam sido lançadas. (...) No tocante ao que se ensinava nas universidades da Europa, porém, era como se todas essas novas idéias não tivessem sido expressas. Os currículos em Cambridge e nos demais lugares eram solidamente baseados no aristotelismo, a antiga teoria geocêntrica do universo, e numa visão mais qualitativa que quantitativa da natureza.* (BRENNAN, 2003: 32)

É claro que apenas uma comparação biográfica seria um argumento um pouco leviano para tentar se justificar o grau de influência de aspectos externos no desenvolvimento da matemática. Mas não seria de todo equivocado utilizar essas considerações apresentadas acima, para se iniciar uma reflexão sobre se há ou não uma autonomia da matemática em relação ao meio cultural em que surgem suas teorias. Uma comparação de aspectos biográficos, como foi apresentada, poderia promover questionamentos como, quais foram as influências culturais sofridas por um idiossincrático pensador como Newton? O que ele possuiria a mais que os pensadores gregos, além de sua enorme genialidade, não seriam ferramentas matemáticas fundamentais que possibilitaram a ele sistematizar suas observações e desenvolver o cálculo? As diferenças na vida de

Newton e Leibniz não poderiam também ser um indício de que os fatores culturais não tiveram importância no desenvolvimento dessa teoria?

Esses questionamentos poderiam suscitar uma pesquisa que se propusesse discutir se a criação do cálculo pode ser tomada como uma indicação, tanto de que o desenvolvimento da matemática está intrinsecamente ligado à aspectos culturais, quanto do contrário, de que a matemática possui autonomia destas questões. Talvez nas ciências naturais não seja mais possível se pensar em um desenvolvimento desvinculado de influências culturais, mas ocorreria o mesmo com a matemática? Quem sabe este não seria um tipo de saber, senão totalmente autônomo, como queriam os platonistas, ao menos um conhecimento que, pelo seu grau de abstração, preserve um certo distanciamento dos influxos históricos?

Uma pesquisa que se proponha a responder a estas perguntas, ou em estabelecer realmente vínculos entre o contexto histórico da Inglaterra e Alemanha do final do século XVI e início do XVII e o surgimento do cálculo, resultaria, sem dúvida em um trabalho muito interessante, mas demasiado complexo. Persistindo neste tema, poderíamos correr o risco de apenas repetir jargões da história a partir de sínteses de textos que tratem daquela época, e fazer ligações, não muito claras, destes com o surgimento do cálculo.

Um outro lugar comum que quisemos evitar ao alterar o foco da pesquisa, e que nos parece ser muito presente nos estudos em história da ciência, é afirmar que o desenvolvimento da ciência é influenciado por fatores culturais, ou sociais, ou melhor ainda, socioculturais. O problema é que nem sempre essas assertivas da história da ciência vêm acompanhadas de uma apresentação sobre o que é de fato um “fator cultural”. A vontade ou apoio de um governante no desenvolvimento de uma pesquisa cientifica? Uma alteração nos conceitos teológicos? A junção da ciência com a tecnologia? Uma mudança na concepção de mundo? E aqui poderia entrar uma infinidade de eventos que poderiam ser classificados, de uma forma geral, de fatores culturais. Somente uma pesquisa mais refinada, em que se apresente e defina detalhadamente o que se entende por "fator cultural", baseando-se em estudos e teorias metodológicas da história e da sociologia, seria capaz de vincular de forma coerente uma mudança teórica com uma mudança "cultural". Do contrário a pesquisa pode-se tornar um conjunto de afirmações vazias e obscuras.

Depois de perceber essas limitações do projeto inicial, decidimos então mudar o foco da pesquisa e estudar como essas questões metodológicas da história da ciência são trabalhadas no interior da história da matemática. Portanto, de um projeto que propunha pesquisar as condicionantes culturais da Europa pós-renascentista que motivaram e possibilitaram o desenvolvimento do cálculo, nosso trabalho se converteu em um estudo, que julgamos menos pretensioso, mas também importante, de historiografia da matemática.

No capítulo I, analisaremos as discussões entre historiadores internalistas e externalistas na história da ciência e as influências destes debates na história da matemática. Neste capítulo, apresentaremos teses defendidas por estas duas correntes historiográficas e analisaremos mais detalhadamente um artigo que trata sobre esta questão na historiografia da matemática. Neste artigo, Joan Richards afirma que o debate entre internlistas e externalistas é a grande questão que move a historiografia da matemática. Ela defende que um dos motivos da preferência dos historiadores da matemática pela história interna advém do fato destes historiadores terem uma postura fundacionista diante da matemática. Nos deteremos neste argumento, e mostraremos o problema desta afirmação ao analisarmos essa postura fundacionista frente à própria história *interna* do pensamento matemático. Este fato seria um ponto de fraqueza do argumento de Richards.

No capítulo II, mostraremos como as teorias vindas com a nova historiografia da ciência promoveram debates e mudanças na historiografia da matemática. Das teorias de Imre Lakatos, ao debate entre Michael Crowe e Joseph Dauben acerca da existência de revoluções na história da matemática, tentaremos mostrar como a perspectiva diante do conhecimento trazida, ou sistematizada, pela nova historiografia da ciência, moveu discussões historiográficas da matemática e promoveu, diante da falha dos programas fundacionistas, uma reflexão epistemológica dentro desta disciplina.

No último capítulo, aproveitando as reflexões feitas sobre a história do cálculo infinitesimal no início desta pesquisa, apresentaremos uma história do surgimento do cálculo publicada por Carl Boyer, em 1939. Explicitaremos suas teses a analisaremos sua abordagem a partir das discussões historiográficas vistas nos dois capítulos iniciais. A escolha desse texto se deu por se tratar de um dos primeiros trabalhos que abordam o desenvolvimento do cálculo desde seus primórdios na Grécia antiga, além da importância desse autor para a história da matemática.

CAPÍTULO I

Os debates internalismo-externalismo na história da ciência e suas influências na história da matemática

Desde o início do período moderno, a ciência veio, paulatinamente, se consolidando como um meio privilegiado de saber. A perspectiva de firmá-la como atividade superior de produção do conhecimento atingiu seu ápice ao longo do século XIX.

O crescente sucesso da ciência em dar explicações aos fenômenos físicos e a junção cada vez maior entre ciência e tecnologia vinham mudando de forma veloz a vida da sociedade. A expectativa era de que o conhecimento científico, através de seu rigoroso método de pesquisa, seria capaz de dar respostas a qualquer tipo de problema, seja ele vindo das ciências naturais ou das humanidades. A visão mais corrente era de que a ciência estaria alicerçada em bases tidas como puramente racionais e promoveria um desenvolvimento linear e cumulativo do conhecimento.

Porém, todo esse entusiasmo diante do conhecimento científico foi enfraquecido com o surgimento de novas teorias que abalaram os fundamentos da ciência. No final da terceira década do século XX, praticamente todos os pressupostos que embasavam a ciência moderna, em especial a concepção de mundo cartesiano-newtoniana, haviam sido contestados.

O surgimento das geometrias não-euclidianas, da teoria da relatividade e da mecânica quântica, trouxe uma nova perspectiva diante da natureza. Noções que fundamentavam a ciência newtoniana como tempo e espaço absolutos, átomos tidos como blocos sólidos e indestrutíveis, a visão de uma causalidade unicamente mecânica dos fenômenos físicos, além da possibilidade de uma observação objetiva da natureza, foram, de certa forma, descartadas.

Pelo papel central que a ciência ocupou na produção do conhecimento na modernidade, essas mudanças teóricas não só estremeceram os pilares do conhecimento científico, mas lançaram questionamentos à própria idéia de razão que guiou o pensamento ocidental desde a Antigüidade clássica.

A possibilidade de um conhecimento seguro, capaz de construir teorias universais, absolutas e necessárias, que sempre foi ambicionada pelos defensores da ciência, se tornava cada vez mais difícil. A impressão era de que a confiabilidade cognitiva dada pelo método científico poderia ser apenas uma ilusão temporária.

É claro que, se por um lado era contestada a legitimidade da ciência como uma fonte segura de conhecimento, por outro assistia-se a um progresso tecnológico cada vez mais acentuado, impulsionado pela junção da ciência com a técnica. Se a objetividade das teorias científicas era questionada de forma contundente, as teorias surgidas a partir da nova física, continuavam sujeitas a uma comprovação por meio de rigorosos testes, como era característico do dito método científico. Diante disto, a grande questão que se apresentava nos primeiros embates sobre os fundamentos da ciência, não era no sentido de reconhecer as limitações do modelo científico em dar explicações e guiar o processo de construção do conhecimento. O grande desafio, era o de encontrar uma forma de restabelecer o *status* epistemológico do conhecimento científico diante das novas teorias e questionamentos que surgiam. E foi esta a tarefa que moveu os principais trabalhos filosóficos da ciência na primeira metade do século XX.

É neste contexto filosófico que a história da ciência veio se consolidando como um campo autônomo de pesquisa, em torno de discussões a respeito, principalmente, da origem da ciência moderna. A concepção mais corrente era de que ao longo dos séculos XVI e XVII ocorreu uma grande mudança na visão de mundo, provocando uma reestruturação do conhecimento, que causou o que ficou conhecida como *revolução científica*. Este evento representou uma ruptura com o pensamento medieval e o surgimento de um novo modelo de produção do conhecimento. Esta interpretação rivaliza com outras concepções do surgimento da ciência, como por exemplo, de que o estabelecimento desta forma de conhecimento não foi nada mais que uma continuidade de idéias que vinham amadurecendo já há alguns séculos antes do período moderno.

Caracterizando a ciência pelos mais diferentes aspectos, tanto os historiadores que defendiam a idéia de uma revolução científica, quanto os que percebiam a ciência moderna como uma continuidade de idéias vindas do passado, tentaram explicar o crescente sucesso da ciência ao longo dos séculos e compreender como se processava seu desenvolvimento histórico.

Adepto de uma visão revolucionária do surgimento da ciência, Alexandre Koyré (1882-1964) talvez tenha sido o principal nome ligado a esses primeiros passos da pesquisa histórica do conhecimento científico. O maior mérito de Koyré e outros historiadores da época, foi se opor à perspectiva positivista do desenvolvimento científico, que concebia a história da ciência como o registro de uma acumulação progressiva de fatos e de teorias.

Ao enfocarem características distintas na tentativa de se compreender melhor o empreendimento científico, os historiadores da ciência iniciaram, nos anos 30 do século XX, uma frutífera discussão que provocou o surgimento de duas perspectivas antagônicas no debate sobre os elementos que movem o desenvolvimento da ciência ao longo da história.

De um lado estavam os historiadores que defendiam que a ciência era uma esfera autônoma em relação a fatores socioculturais que a circundavam. Deste modo, para entendermos seu desenvolvimento, deveríamos tentar compreender aspectos como a cadeia de raciocínio elaborada pelos pensadores na descoberta, ou demonstração, de suas teorias, os instrumentos e conceitos utilizados, os experimentos realizados pelos cientistas e demais fatores que poderíamos qualificar como internos à discussão científica. Por este motivo, esse tipo de abordagem dada à história da ciência ficou conhecida como internalista.

Do outro lado do debate, estavam os historiadores que tinham uma perspectiva externalista da ciência. Para estes, o desenvolvimento da ciência e seu estabelecimento como principal instituição produtora do conhecimento, estava diretamente subordinado à contingências culturais, econômicas e sociais de uma determinada época. Portanto, para compreendermos o desenvolvimento das teorias científicas, deveríamos mostrar as relações entre a descoberta de uma teoria e as demandas culturais e técnicas que sofriam os cientistas, o ambiente social e econômico em que estavam inseridos, acontecimentos políticos, formação de instituições de pesquisa etc. Porém, é necessário ressaltar que, mesmo não considerando os fatores internos à ciência como motor principal de seu desenvolvimento, os historiadores externalistas reconheciam uma certa autonomia da racionalidade científica em relação aos influxos socioculturais.

No que tange à história da matemática, quando analisamos sua historiografia, verificamos que esta parece não ter acompanhado as mudanças de rumo da pesquisa em história da ciência, da forma como ocorreu na história das demais ciências. Debates como internalismo-externalismo e as novas perspectivas surgidas com a nova historiografia das ciências, que discutiremos no próximo capítulo, influenciaram a pesquisa em história da matemática, mas não parece ter trazido tantos desdobramentos como ocorrido na pesquisa histórica de outras ciências.

Apesar de intrigante, essa particularidade da história da matemática não tem sido muito tratada pelos historiadores desta disciplina, que por sinal se detêm muito pouco em discussões sobre suas abordagens. Há poucos artigos que tratem explicitamente das características da história da matemática. (KJELDSEN, 2004: 11) Dos artigos encontrados, alguns poucos fazem uma análise dessa historiografia e levantam hipóteses que tentam explicar suas principais características.

Quando analisamos a historiografia da matemática, observamos que há uma grande predominância de textos que tratam a história da matemática apenas do ponto de vista interno, ou seja, trabalhos que descrevem o desenvolvimento de idéias matemáticas sem maiores referências ao contexto histórico ou aspectos sociológicos.

Moritz Epple nos mostra que são raros os trabalhos que se propõe analisar o desenvolvimento do conhecimento matemático a partir de aspectos externos à matemática. Para Epple, essa escassez de textos que abordem a matemática de um ponto de vista social, ou cultural, seria um indício de que o debate internalismo-externalismo ainda não foi, até hoje, superado, e na verdade, nem aprofundado, dentro da história da matemática. (EPPLE apud KJELSEN, 2000: 14)

Em seu artigo "The history of mathematics and l'esprit humain: a critical reappraisal" (1995), Joan L. Richards diz que "that the division between these two camps [internalism / externalism] is not only *a* but *the* critical problem in the history of mathematics". (RICHARDS, 1995: 124) Para ela, a preferência pela história interna por parte dos historiadores da matemática se daria pelo fato de a grande maioria destes serem matemáticos. Isto seria um problema pelo fato destes matemáticos que se dedicam à história desta disciplina, muitas vezes, não perceberem diferenças entre a matemática atual e a matemática do passado, no que diz respeito à método, objetivos e fatores que motivam seu desenvolvimento. Além disso, como argumenta Richards, a postura filosófica fundacionista destes pensadores em relação à matemática, seria uma fator importante para explicar o fato dos historiadores da matemática privilegiarem a abordagem internalista na história da matemática. Essa postura filosófica dos matemáticos seria também um dos grandes empecilhos para a superação de debates como internalista-externalista na história da matemática. (RICHARDS, 1995: 127)

Por ser uma das poucas pesquisadoras que trabalhou e levantou hipóteses que tentassem explicar essas características específicas da história da matemática, achamos pertinente nos determos neste argumento de Richards, para explicar a predominância de textos internalistas na história da matemática.

A hipótese de Richards quanto à postura fundacionista dos historiadores da matemática causa um certo estranhamento quando observamos as discussões filosóficas sobre os fundamentos da matemática, que desencadearam na impossibilidade de concretização dos programas fundacionistas propostos no fim do século XIX e primeira metade do XX.

Se ao pesquisador em matemática foi possível continuar seus trabalhos indiferente a essas discussões filosóficas, ao pesquisador em história da matemática isso não parece provável. Se é a postura fundacionista do historiador da matemática que o faz privilegiar a história interna em seus trabalhos, a observação do desenvolvimento das idéias filosóficas da matemática, mesmo ponto de vista "interno", nos leva a ver a impossibilidade de concretização das teorias fundacionistas nas bases em que, até hoje, foram propostas. Isso, ao nosso ver, enfraquece o argumento de Richards para explicar a predominância de abordagens internalistas na história da matemática.

Analisemos a partir de agora, uma descrição desses debates e idéias filosóficas que provocaram, ou pelo menos parecem ter provocado, profundas mudanças no modo como concebemos o conhecimento matemático e em seguida voltaremos a discussão dos argumentos de Richards.

No caso das ciências naturais, as novas teorias da física e da química surgidas nos séculos XIX e XX, pareciam permitir uma outra fundamentação da física em bases diferentes, e menos pretensiosas, do que as da física clássica. Nas ciências humanas, essa falta de fundamentos sólidos da ciência talvez tivesse um caráter mais benéfico do que danoso, no sentido de libertar a pesquisa no campo das humanidades das amarras do rigor científico herdado das ciências naturais. Entretanto, no caso específico da matemática, a crise de fundamentos tinha implicações profundas.

A matemática, até fins do século XIX, ainda estava alicerçada em fundamentos erigidos pelos gregos antigos. O método dedutivo criado por eles guiaria os pensadores através de um caminho seguro rumo ao encontro das verdades absolutas fornecidas pela matemática. A extrema preocupação com o rigor nas demonstrações de proposições, que era uma das principais características da matemática grega, fez com que este campo do saber acabasse se tornando uma ciência paradigmática no pensamento ocidental. Ao longo dos séculos, vários pensadores tentaram elaborar um modelo para a ciência a partir do método matemático, que seria capaz de garantir a produção de verdades universais através do conhecimento científico. A coesão no raciocínio conseguido pelo método matemático e a construção de verdades universais, sempre foram almejadas por outros campos do conhecimento. Por isso, a crise nos fundamentos da matemática tinha conseqüências tão indesejáveis.

Os pilares da matemática clássica se tornaram frágeis diante dos novos desafios a que eram submetidos. Alguns eventos como por exemplo, os distúrbios causados pelos frágeis fundamentos dados ao cálculo infinitesimal em sua criação, os inúmeros paradoxos surgidos na teoria dos conjuntos e o aparecimento das geometrias não-euclidianas, expuseram a limitação da lógica antiga em estruturar o raciocínio e mostraram a ineficiência do modelo clássico em dar respostas aos problemas surgidos dentro da matemática na modernidade. Esses fatos abalaram a confiança que os pensadores até então tinham no método matemático, o que exigiu uma reestruturação de seus fundamentos.

Na tentativa de solucionar, ou contornar, esses problemas, assim como nas outras ciências, surgiram algumas propostas de reestruturação das bases deste campo do conhecimento. Uma destas tentativas foi a proposta que ficou conhecida como logicista.

Historicamente, a matemática e a lógica se desenvolveram de forma independente. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foi um dos primeiros a relacionar essas duas disciplinas. Afirmava que as proposições matemáticas seriam verdadeiras, porque negá-las seria impossível logicamente. Segundo Leibniz as proposições, inclusive as matemáticas, seriam redutíveis à proposições da forma sujeito-predicado, que ele chamou de “proposições idênticas”. Estas seriam proposições analíticas, ou seja, o sujeito já conteria a informação dada pelo predicado, que, para Leibniz, poderia ser explicitado por um número finito de passos. Ao fazer essa associação entre duas disciplinas, matemática e lógica, que se desenvolviam separadas até então, Leibniz antecipou posicionamentos do movimento logicista moderno, ao conceber a matemática pura como parte da lógica.

Desde que foi sistematizada por Aristóteles (384-322 a.C.) a lógica clássica permaneceu praticamente intocada até o século XIX, quando os problemas observados dentro da matemática naquela época expuseram suas limitações para esse novo papel que lhe estava sendo dada: fundamentar a matemática. Para esse fim, a lógica clássica ganhou uma nova roupagem e função nas mãos de pensadores como Gottlob Frege (1848-1925), Alfred North Whitehead (1861-1947), Bertrand Russell (1872-1970) e Rudolf Carnap (1891-1970).

Frege ampliou a representação simbólica do raciocínio dedutivo e, na tentativa de tornar a lógica mais precisa e confiável, tentou depurar suas bases especificando quais leis fundamentais da lógica seriam aceitáveis como premissas. Além disso, apontou quais métodos de inferência poderiam ser utilizados, definindo as regras para se deduzir teoremas a partir das hipóteses e dos teoremas já demonstrados. Todas as mudanças dentro da lógica não visavam outra coisa senão um controle maior do raciocínio matemático. O objetivo dos logicistas era depurar a lógica para restabelecer a certeza nas demonstrações matemáticas. Como para essa corrente de pensamento a matemática é dedutível da lógica, pensava-se que se tivéssemos como remeter às leis gerais da lógica todos os passos de uma demonstração matemática, teríamos a garantia de um raciocínio totalmente coerente, que nos levaria a conclusões indubitáveis.

O modo logicista de explicar a matemática fez um enorme sucesso, sobretudo entre os matemáticos, pois trouxe a possibilidade de se contornar os problemas internos que vinham aparecendo neste campo do conhecimento, além de restabelecer o *status* que historicamente a matemática adquiriu. A antiga pretensão dos matemáticos de construir um conhecimento que estabelecesse verdades inquestionáveis, parecia novamente possível. Entretanto, a aspiração de se solucionar todos os problemas da matemática fundamentando-a em uma lógica mais refinada, não obteve êxito total, pois deixou algumas lacunas que continuavam provocando problemas à matemática e que abriam espaço para os críticos do movimento logicista.

Como nos mostra Stephan Körner em seu livro *Uma introdução à filosofia da matemática* (1985), um ponto questionável no programa logicista é que, apesar desses pensadores ambicionarem reduzir a matemática à lógica, eles parecem não ter se preocupado muito em delimitar o campo de ação desta disciplina. Além disso, eles assumiram a posição clássica de dividir o conhecimento em empírico e não-empírico, mas não foram capazes de indicar com clareza a distinção que faziam entre as proposições da matemática pura, que seriam *a priori* ou não-empíricas, e as proposições da matemática aplicada, que seriam *a posteriori* ou empíricas. Isso trouxe muitos problemas ao tentarem definir o conceito de infinito atual, além de tornar incoerente a avaliação dos logicistas frente aos ramos da matemática aplicada.

Um outro problema do programa logicista era quanto à natureza dos axiomas matemáticos. Ao desenvolver uma teoria, o matemático define seus conceitos, explicando-os através de outros conceitos já definidos, e demonstra as propriedades de tais conceitos. Ou seja, argumenta usando as regras da lógica, a partir de proposições já demonstradas anteriormente. A essas proposições demonstradas dá-se o nome de teoremas. Na definição de um conceito ou na demonstração de uma proposição, o matemático tem que se basear em outros conceitos definidos anteriormente, ou em proposições previamente demonstradas. Contudo, não é possível um retrocesso *ad infinitum* aos conceitos e proposições primeiras. Portanto, para solucionar esse problema, ele aceita alguns conceitos sem definição (denominados conceitos primitivos) e proposições sem demonstração (chamadas axiomas) e, a partir daí, define e demonstra todos os outros conceitos e proposições. O conhecimento matemático estaria então alicerçado sob bases puramente hipotéticas, ou seja, ainda estaria ligado à uma intuição empírica. Como os logicistas queriam deduzir a matemática a partir de princípios lógicos, a menos que pudessem mostrar que as premissas nas quais a matemática está fundada são de fato princípios lógicos, o programa não se efetivaria.

A todos esses problemas apontados dentro do método logicista, se somavam as críticas das escolas de pensamento que julgavam demasiado pretensiosas as tentativas de se obter verdades absolutas, mesmo na matemática. Para essas novas correntes era impossível se imaginar um tipo de conhecimento puro, totalmente abstrato, que não tivesse a mínima relação com o mundo empírico. Esse tipo de posicionamento, evidentemente, diminuía o alcance da matemática pura e a jogava junto às outras ciências. Era o início do reconhecimento dos limites do método matemático.

Na modernidade, os debates entre filósofos empiristas e racionalistas na tentativa de explicar os fundamentos do conhecimento, criaram duas perspectivas antagônicas que, por alguns séculos, guiaram os modos de se tentar compreender as ciências. A possibilidade da matemática era um dos principais temas desses debates. Para os racionalistas, como Leibniz, por exemplo, a matemática seria um tipo de conhecimento analítico, dado *a priori* pelas propriedades essenciais da razão: os princípios de identidade e de não-contradição. Os empiristas concordavam quanto ao fato da matemática ser um conhecimento analítico, mais diziam que esse era um tipo de conhecimento vazio, que não trazia informações novas àquilo que já se sabia. Para esses filósofos um conhecimento realmente efetivo deveria ser sintético, ou seja, o predicado das proposições deveria trazer informações que não estivessem implícitas no sujeito, além de ser também *a posteriori* – fundado na experiência.

Immanuel Kant (1724-1804) trouxe uma nova perspectiva a esse debate, procurando romper com a dicotomia racionalismo-empirismo para se entender o conhecimento. Assumido a mesma noção anterior de proposição analítica, Kant inovou ao propor uma distinção nas proposições sintéticas, que seriam de dois tipos: as empíricas, ou *a posteriori*, e as não-empíricas, ou *a priori*. Para este pensador, através de nossas noções perceptuais espaço-temporais, seria possível para o homem saber algo a respeito de um objeto, independentemente do contato com esse objeto. Situar algo no espaço e no tempo seria condição necessária da nossa possibilidade de experiência objetiva. Assim sendo, uma proposição sintética *a posteriori* dependeria da nossa percepção sensorial e, por isso, teria um caráter contingente e singular. As proposições sintéticas *a priori* seriam possíveis, pois descreveriam objetos no espaço e no tempo, que são categorias permanentes e imutáveis da percepção independentes de nossas impressões sensoriais, sendo então proposições necessárias e universais.

Para Kant, o conhecimento obtido pela matemática não se limitava em explicitar algo que já se sabia através de procedimentos lógicos. A matemática, para ele, produzia um conhecimento efetivo. Na visão kantiana, o conhecimento matemático ao mesmo tempo em que era *a priori*, também analisava fenômenos, ou seja, os enunciados da matemática seriam justamente juízos sintéticos *a priori*. As proposições da matemática seriam uma síntese entre uma intuição pura (não-empírica) e a experiência (antes do contato com o objeto). Era esta intuição pura que tornava a matemática possível e juntava sujeito e predicado em uma proposição.

Um ponto importante a ser observado é quanto ao papel da lógica na matemática. A posição kantiana quanto ao caráter lógico das deduções matemáticas era idêntica à dos racionalistas. No entanto, para ele, os axiomas e teoremas não eram, eles mesmos, princípios lógicos. Segundo Kant, eles descreveriam a estrutura de categorias da percepção – espaço e tempo. Portanto, elementos não pertencentes à lógica estavam intuitivamente presentes por traz de todo pensamento. Assim, enquanto para Leibniz a matemática poderia ser explicada e fundamentada através das relações lógicas entre proposições e conceitos, para Kant a possibilidade da matemática era explicada pela percepção.

Essa afirmação quanto à natureza do conhecimento matemático, lançou as bases para a formulação de duas importantes escolas de pensamento que visavam solucionar os problemas internos da matemática, que seriam a formalista e a intuicionista. Uma diferença entre essas duas escolas, e que acabou se tornando substancial no desenvolvimento posterior da filosofia da matemática, é quanto aos objetivos finais de seus programas. Os intuicionistas reconheciam os limites do método matemático, não tendo por objetivo tornar possível as ambições absolutistas da matemática clássica. Os formalistas, como os logicistas, queriam resguardar as verdades matemáticas, construindo um método capaz de continuar oferecendo proposições verdadeiras, eternas e universais.

Pensadores como John von Neumann (1903-1957) e Haskell Brooks Curry (1900-1982) foram alguns dos proponentes do programa formalista, mas o principal nome ligado à essa corrente foi mesmo o de David Hilbert (1862-1943). Estes pensadores propunham a união do método logicista ao método axiomático, na tentativa de oferecer bases sólidas à matemática.

Para os formalistas, a matemática se restringia à descrição de objetos concretos e às relações lógicas entre tais descrições. Dado isso, na visão desses pensadores, o principal objetivo do programa formalista seria resguardar o sistema de proposições matemáticas de possíveis inconsistências. A noção de consistência é então um conceito fundamental para se entender as teses do movimento formalista. Um sistema de proposições é internamente consistente, quando desse sistema não é possível se deduzir uma proposição que seja verdadeira e falsa ao mesmo tempo, ou seja, não é possível se deduzir uma proposição e sua negação tal que ambas sejam simultaneamente verdadeiras. Esses pensadores acreditavam que as antinomias surgiam pela inconsistência entre as hipóteses que fundamentavam a matemática.

Como dito antes, para os formalistas a matemática descrevia objetos concretos. Assim, com essa concepção de matemática, ficava afastado os inúmeros problemas que a noção de infinito atual causava, já que o conceito de infinito atual não descreve nenhum objeto concreto. Porém, o programa formalista reconhecia que as noções de infinito faziam parte da matemática e não poderiam ser simplesmente excluídas. Para abarcar a matemática infinitista, Hilbert lançou mão das idéias de Georg Cantor (1845-1918) e sua matemática transfinita.

Cantor tentou resolver os problemas de manipulação de conjuntos infinitos, com a idéia de cardinalidade. Para esse pensador, todo conjunto cujos elementos podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números inteiros positivos, ou seja, com os números naturais, é dito enumerável, e tem a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais. Cantor, comparando conjuntos com o dos naturais, criou meios para manipular essas quantidades infinitas introduzindo uma nova notação capaz de tornar a noção de infinito mais palpável aos matemáticos. Contudo, ao incorporar a matemática transfinita em seu corpo teórico, a tarefa do programa formalista se tornou mais difícil, pois eles deveriam agora provar a consistência de um sistema formado pelas matemática finita, que trabalhava com noções concretas, e a matemática transfinita, com suas noções ideais. Não admitiam a suposição de conjuntos infinitos, mais utilizavam símbolos para representar essas entidades. Tentava-se justificar uma matemática abstrata, que abarcava totalidades infinitas, mediante uma prova finitista de consistência. Apesar dos problemas que isso gerou, esse posicionamento mostrava a resistência dos pensadores formalistas em abrir mão do caráter universal das proposições matemáticas, que não poderiam ser finitas, pois deveriam ser válidas para um número ilimitado de objetos. Uma outra recusa por parte desses pensadores era em dispensar o princípio do terceiro excluído, que protegeria a matemática de paradoxos, não permitindo que uma proposição fosse verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Para contornar os problemas surgidos por estas características do programa formalista, alguns pensadores tentaram, para garantir a consistência do sistema, regular a criação de fórmulas que representassem objetos perceptuais e suas manipulações simbólicas. Para assegurar a eficiência e coerência do método, o formalismo seria objeto de estudo do que ficou conhecido como metamatemática. Esta disciplina cuidaria de estabelecer as regras da manipulação simbólica dos enunciados matemáticos, ou seja, à metamatemática caberia o papel de proteger o sistema da inconsistência. Entretanto, para salvaguardar os antigos anseios da matemática de coerência e universalidade, a teoria formalista ia para uns, se sofisticando, para outros, ficando cada vez mais complicada.

Os críticos dessas idéias alegavam que, ao assumir esse papel de tradutor de objetos perceptíveis para fórmulas abstratas, as teorias formalistas não conseguiam dar uma base empírica aos enunciados da matemática pura. O formalismo teria convertido a matemática em um jogo vazio de análise de simples marcas no papel e manipulação de fórmulas que limitava a atividade matemática ao cumprimento de regras artificiais. Nesse sentido, as críticas feitas às pretensões do programa logicista, que se recusava a reconhecer os limites do método matemático, também podem ser estendidas a alguns aspectos do programa formalista. Para esses críticos, ao tentar fundar uma matemática totalmente livre de contradições e comprometida com a construção de proposições universais e necessárias, Hilbert e seus discípulos acabaram se perdendo nas abstrações de seu próprio método.

Não obstante todas estas críticas e dificuldades que os pensadores encontraram em enquadrar a matemática em seu modelo teórico, o mais duro golpe nas pretensões absolutistas dos programas logicista e formalista ainda estava por vir. Como dissemos, um dos maiores desafios do programa formalista era garantir a consistência interna do sistema de proposições matemáticas. Para os logicistas, este também era um grande problema, mas eles achavam que conseguiriam garantir isto através de um aprimoramento da lógica. Para conseguir a certeza da consistência, os matemáticos deveriam demonstrar a completude das teorias matemáticas, ou seja, provar o fato de que dentro destas teorias, todo enunciado verdadeiro é demonstrável. Desde Euclides (325-265 a.C.) este sempre foi um pressuposto do trabalho matemático. No entanto, a tentativa de uma formulação definitiva da matemática proposta por formalistas e logicistas, exigia uma demonstração formal da completude das teorias. Mas, em 1931, aconteceu algo inesperado.

Em um artigo intitulado "Sobre as proposições formalmente indecidíveis dos *Principia* Mathematica e sistemas semelhantes", um então jovem e desconhecido matemático chamado Kurt Gödel (1906-1978), finalmente conseguiu dar uma resposta categórica ao Problema da Completude. Isto foi inesperado não pelo fato de alguém ter conseguido "resolver" essa questão, mas pela conclusão a que Gödel chegou. Ele demonstrou, ao contrário de todas expectativas, que as teorias da matemática não são completas. Isso quer dizer que, independentemente do conjunto de axiomas, a matemática sempre conterá proposições indemonstráveis! Gödel ainda provou que o surgimento de paradoxos dentro da matemática, como os inúmeros que apareciam dentro da teoria dos conjuntos na sua época, é inevitável. Para manter a consistência do sistema deveríamos excluir a proposição, ou sua negação, que gera o paradoxo e não tentar reformular a matemática a fim de evitá-lo. Essas proposições excluídas passarão a ser consideradas "indecidíveis" e servirão para mostrar as limitações do sistema, que não terá como julgar se são verdadeiras ou falsas as afirmações trazidas pelos paradoxos.

Com isso, o Teorema da Incompletude de Gödel não inviabilizou apenas a conclusão dos programas logicista e formalista. Tornou muito mais difícil a elaboração de qualquer outro movimento que ambicionasse construir um conhecimento matemático que fosse totalmente coerente e capaz de fornecer verdades eternas e universais.

Como dissemos anteriormente, mesmo com a falha dos programas fundacionistas, ou demais conseqüências dessas questões filosóficas apresentadas, é concebível que o pesquisador em matemática continue a fazer seus trabalhos, alheio a essas discussões epistemológicas. O que fica difícil de compreender é como um pesquisador em história da matemática pode não levar estes fatos em consideração quando faz suas pesquisas.

Essas discussões filosóficas em relação aos fundamentos do conhecimento, moveram os mais importantes filósofos do século XX e têm implicações profundas nas teorias epistemológicas mais recentes. Por esse motivo seria difícil sustentar que os historiadores da matemática não têm conhecimento dessa crise do fundacionismo.

É provável também que haja historiadores da matemática que tenham uma visão anti-fundacionista do conhecimento, mas que optem, por qualquer outro motivo, por fazer uma história da matemática de um ponto de vista que privilegie os aspectos internos. Não podemos negar essa possibilidade. Porém, lembremos que o argumento de Richards é que há uma predominância de textos internalistas na historiografia da matemática porque essa história é feita principalmente por matemáticos que, por terem uma postura fundacionista do conhecimento, consideram como fatos relevantes em suas pesquisas históricas apenas fatores internos ao discurso matemático. E é esse argumento que parece improvável, depois de considerarmos essa história das idéias da filosofia da matemática apresentadas até aqui.

Poder-se-ia defender que essa história apresentada não é interpretada apenas da forma como foi exposta – com a falência dos programas fundacionistas. E é certo que haja outras leituras e interpretações que sejam, até certo ponto, coerentes. Entretanto, seria difícil crer que a grande maioria dos historiadores da matemática tenham se detido nessas discussões filosóficas e questionado suas conclusões, para justificar sua postura fundacionista e sua preferência pela história interna.

O que explicaria então a predominância de abordagens internalistas na história da matemática? Poderíamos argumentar que a matemática possui características próprias e que os problemas que movem o seu desenvolvimento são lançados e solucionados no interior da própria matemática. Pelo grau de abstração de suas teorias, a matemática apresentaria uma certa independência do meio cultural em que está inserida e, por isso, a abordagem interna de sua história seria capaz de explicar seu desenvolvimento, registrar fielmente os eventos estudados e ainda contribuir para discussões epistemológicas.

Entretanto, apenas afirmar que a matemática é uma ciência abstrata e que por isso não sofre influências externas, seria um argumento vazio, se não vier acompanhado de uma minuciosa análise e exposição dessas particularidades, que nos leve a concluir que a história interna é satisfatória para se tratar a matemática. Além disso, uma pesquisa como essa, para sustentar tal argumento, deve inevitavelmente passar por uma reflexão sobre a natureza do conhecimento matemático e o modo como se dá seu desenvolvimento histórico.

Quanto ao desenvolvimento histórico da matemática, a história da ciência com seus dois enfoques principais, internalista e externalista, talvez não fosse capaz de fornecer teorias que abarcassem de forma satisfatória algumas características do desenvolvimento matemático. Na verdade o que se observava era que nenhum dos dois enfoques conseguiam retratar com um pouco mais de precisão alguns aspectos notadamente influentes no desenvolvimento do conhecimento.

No caso da história das ciências naturais, ficava cada vez mais perceptível que se a ciência era uma atividade humana inserida em um determinado período histórico, ela era também formada por experiências, demonstrações e teorias. Mudanças econômicas alteravam suas demandas tecnológicas e seu financiamento. Discussões internas originadas em experiências e demonstrações, lançavam novas questões aos cientistas. Redirecionamentos teológicos traziam novas demandas e provocavam mudanças na concepção de mundo de uma época. Ou seja, tanto fatores internos à discussão científica, como aspectos extrateóricos, permeavam e influenciavam o desenvolvimento da ciência.

Mesmo sendo difícil encontrarmos abordagens exclusivamente internalistas, ou externalistas, ao se posicionarem neste debate se aproximando mais ou menos de um desses extremos, os historiadores da ciência acabavam deixando muitas lacunas em suas reconstruções históricas, além de criar teorias não muito satisfatórias na tentativa de explicar o desenvolvimento histórico da ciência. Todos esses problemas indicavam o esgotamento dessa discussão e a necessidade de se assumir novas posturas diante da história da ciência.

Desde a década de 30 do século XX, o estudo histórico da ciência vinha lançando um outro olhar sobre o trabalho científico. Diferentemente do que acreditavam os historiadores do passado, muitos dos cientistas, entre eles matemáticos, estavam pouco compromissados em suas pesquisas com questões como rigor, método ou objetivos da ciência. Às vezes motivadas por questões teológicas, ou guiadas por tradições com pouca credibilidade nos meios científicos, como, por exemplo, a alquimia, a criação de várias teorias que fundamentavam a ciência moderna, muitas vezes não tinham se originado de processos puramente racionais de demonstrações empíricas e deduções lógicas como se acreditava.

Com tudo isso, ficava cada vez mais difícil criar critérios que permitissem aos historiadores da ciência definirem seu objeto de pesquisa, ou seja, estabelecer critérios que delimitassem com precisão o que é do que não é científico. No entanto, apesar dos historiadores internalistas e externalistas discordarem quanto ao foco de seus estudos históricos do conhecimento científico, ambas abordagens concebiam a ciência como um tipo de saber diferenciado, ou seja, seria perfeitamente possível ao historiador demarcar o que era de fato científico, do que eram saberes ligados a outras tradições de conhecimento, ou especulações baseadas em supertições, sem um fundamento racional.

Ao longo da década de 60, veio se consolidando uma nova postura diante do conhecimento que lançou uma nova luz sobre esses problemas da história da ciência, sobre a matemática e sobre as questões epistemológicas não respondidas satisfatoriamente até então. É sobre isto que trabalharemos no próximo capítulo.

CAPÍTULO II

A nova historiografia das ciências e a história da matemática

Ao longo da década de 60, foi se consolidando uma nova historiografia da ciência que buscava superar este debate internalismo-externalismo a partir de uma outra perspectiva. O nome mais conhecido ligado a essa nova abordagem historiográfica é, sem dúvida, o de Thomas S. Kuhn (1922-1996). Outros grandes historiadores da ciência contemporâneos de Kuhn, como Paul Feyerabend (1924-1994), por exemplo, também foram muito importantes nesta mudança de rumo ocorrida na historiografia da ciência. Entretanto, o livro *A estrutura das revoluções científicas*, lançado por Kuhn em 1962, é tomado, de um modo geral, como um marco desta nova historiografia.

Foi ao estudar a organização institucional da ciência e as comunidades científicas, que Kuhn chegou a algumas conclusões a respeito do desenvolvimento da ciência. Analisando mais minuciosamente o modo como se dava a legitimação, ou refutação, de algumas teorias ao longo da história, este pensador percebeu que os fatores que levavam a substituição de uma teoria por outra não eram motivados apenas pelo aparecimento de novos fatos, experimentos e conjecturas. Algumas vezes, os mecanismos ligados aos jogos de poder no meio científico também desempenhavam um papel importante nas mudanças teóricas. Esta constatação, evidentemente, se contrapõe à visão de uma ciência concebida e guiada internamente por uma racionalidade imune aos determinantes sociológicos.

Mesmo alterando consideravelmente suas teorias durante sua vida, o nome de Thomas Kuhn ficou muito ligado ás idéias apresentadas em *A estrutura das revoluções científicas*. Tomemos então alguns aspectos desta teoria que nos interessa aqui. Para Kuhn, a ciência se desenvolveria por revoluções científicas. Ao longo do desenvolvimento de uma determinada ciência, há fases em que várias propostas teóricas conflitantes tentam dar explicações a algum tipo de fenômeno ou respostas a problemas que afligiriam os cientistas. A ciência passaria a existir de fato, quando houvesse um certo consenso na comunidade científica, que resultaria no estabelecimento de alguma dessas teorias como a mais adequada. Essa teoria seria o que Thomas Kuhn chamou de paradigma. O estabelecimento de um novo paradigma, em substituição ao antigo, seria o momento em que ocorre uma revolução científica. O paradigma vigente teria o papel de um "dogma" que guiaria os cientistas em seus trabalhos, promovendo uma concentração de esforços em torno de uma idéia, o que ocasionaria o progresso da ciência. Com o tempo, novos fatos não explicados pelo paradigma vigente apareceriam, provocando um novo debate sobre a validade deste paradigma e seus fundamentos. Novos paradigmas seriam propostos, até que um novo seria aceito como o mais apropriado. Essa seria para Kuhn a estrutura, ou modo, como se daria uma revolução científica.

Até aqui, portanto, não há nada nesta teoria que altere a concepção de ciência e de racionalidade herdada das escolas anteriores. Porém, é ao se deter neste processo de mudança de paradigma, é ao avaliar de perto os mecanismos institucionais que validam ou refutam uma teoria, que Thomas Kuhn levanta dúvidas quanto à idéia de que a atividade científica seria algo totalmente racional e que estaria imune a fatores extra-científicos em seus processos internos de criação e demonstração de teorias. Essa análise mostrou a importância dos mecanismos institucionalizados no controle e padronização do conhecimento científico, que atenderiam aos jogos de poder estabelecidos dentro de uma comunidade científica, o que acabaria por definir, ou pelo menos influenciar bastante, as mudanças teóricas ocorridas na ciência.

A explicitação dessas características intrínsecas ao desenvolvimento da ciência alterou significativamente o modo como concebemos o conhecimento científico. Mesmo nas abordagens externalistas, em que eram levantados os fatores extra-científicos que motivavam o desenvolvimento da ciência, o aspecto racional que caracterizava o conhecimento científico na criação de suas teorias e experimentos, não era questionado. Kuhn traz uma nova perspectiva, pois mostra como o empreendimento científico, é, antes de tudo, um empreendimento humano, permeado por todos os tipos de valores e demais aspectos que caracterizam as práticas culturais de uma sociedade. Assim, para compreendermos a ciência, deveríamos entender melhor o desenvolvimento histórico e funcionamento interno das práticas científicas e seus mecanismos institucionais. Seria de interesse do historiador da ciência não apenas os procedimentos experimentais e desencadeamentos lógicos, mas todos os mecanismos que influiriam no desenvolvimento e estabelecimento de uma teoria. Aspectos exteriores à ciência, como mudanças culturais, que redefinam valores e objetivos de uma sociedade, ou mecanismos de propaganda e coerção que instituíram uma teoria como verdadeira em uma determinada época, passariam a ser objetos de análise por parte dos historiadores.

Ao mostrar como a formulação e legitimação de uma teoria são frutos de uma relação inseparável de fatores internos e externos atuantes em todo o processo científico, Thomas Kuhn deu suporte ao surgimento de toda uma nova historiografia da ciência. As teorias kuhnianas impulsionaram a visão de que a ciência seria uma manifestação cultural que teria características próprias, mas que não estaria em uma posição epistemológica superior a de outras tradições, como a religião e a arte, por exemplo. Essa nova postura permitiu uma aproximação maior da história da ciência com outras disciplinas, como a sociologia e antropologia do conhecimento, que vinham se atualizando e trazendo novas perspectivas ao debate historiográfico da ciência.

Essas novas ferramentas de análise histórica e social da ciência, mostraram, através de uma outra ótica, um conturbado processo no desenvolvimento de teorias, e expuseram, de forma mais vigorosa, a interdependência do que era tido como racionalidade científica e aspectos socioculturais. Para esta análise histórica do conhecimento, os historiadores tentaram desenvolver modelos que explicassem o modo como se dava o desenvolvimento da ciência, além de criar teorias metodológicas que guiassem os historiadores da ciência em seus estudos e reconstruções históricas.

Radicalizando as teorias kuhnianas sobre o papel de aspectos extra-teóricos no desenvolvimento da ciência, ao longo dos anos 70, veio se forjando uma nova perspectiva metodológica que ficou conhecida como socioconstrutivista. Tomando algumas idéias defendidas pelos filósofos convencionalistas, essa nova abordagem defendia, diferentemente da visão de Kuhn, que os fatores ligados aos jogos de poder institucionalizados no meio científico, não seriam apenas um dentre inúmeros outros fatores que influenciavam o desenvolvimento da ciência, mas seria este o que definiria de fato o que era ou não era considerado como verdade. Neste sentido, o que fazia de uma teoria verdadeira, era sua aceitação como tal. E essa aceitação estaria mais ligada a fatores sociológicos, como os jogos de poder nas comunidades científicas, do que a base factual, demonstrações experimentais ou deduções lógicas, que justificassem uma determinada teoria. Os aspectos tidos como internos ao discurso científico teriam sua relevância, mas o que definiria de fato a melhor teoria, seria essa aceitação que estaria sujeita a questões políticas, econômicas, culturais, interesses institucionais, além de interesses pessoais, vaidades e outros aspectos psicológicos dos cientistas. Assim, as teorias científicas não seriam descobertas de ordens, ou leis, intrínsecas à natureza através de rigorosos métodos de pesquisa e procedimentos racionais, mas seriam parte de um conhecimento socialmente construído e estabelecido, como qualquer outro aspecto da cultura humana. O método e instrumentalização da ciência seriam alguns dos muitos aspectos de ligação de uma comunidade científica. Auxiliariam na elaboração de teorias, mas não seriam o fator decisivo na imposição de uma idéia dentro do meio científico.

Dentre estas novas teorias que visavam explicar a natureza do conhecimento científico, uma das mais importantes foi sistematizada e apresenta por David Bloor, no que ficou conhecido como Programa Forte da sociologia do conhecimento. Bloor apresentou os princípios que baseariam este programa e que deveriam guiar a pesquisa em sociologia do conhecimento. O primeiro seria a causalidade, ou seja, procurar e apresentar a causas que produziram uma determinada crença. O segundo princípio diz que as pesquisas em sociologia do conhecimento devem ser imparciais em tratar crenças tidas como verdadeiras e crenças tidas como falsas, procurando desvendar tanto os fatores que fizeram de uma teoria válida, quanto os que fizeram de uma teoria inválida. Além disso, a pesquisa sociológica deve ser simétrica no estilo de explicação, ou seja, as mesmas causas podem explicar tanto as teorias verdadeiras, quanto as falsas. O último, a reflexibilidade, permite a aplicação destes princípios à própria sociologia enquanto conhecimento.

No que tange a história da ciência, estas idéias apresentadas pelo socioconstrutivismo contribuíram ao lançar um novo olhar sobre a ciência e sua história, o que permitiu complementar as reconstruções históricas ao enfocar alguns aspectos específicos da história da ciência. A análise de controvérsias científicas, por exemplo, passou a ter uma atenção especial por esses historiadores, dada a importância desses eventos para demonstração de suas teses. O processo de institucionalização de práticas científicas teriam também o mesmo papel e consistindo também em um dos focos destes historiadores.

Além disso, os princípios de imparcialidade e simetria apresentados por Bloor, deram subsídio ao surgimento de outras novas abordagens do conhecimento científico, como por exemplo, o estudo da ciência do ponto de vista antropológico. Esta linha etnográfica defende que para compreendermos o empreendimento científico, deveríamos utilizar ferramentas teóricas vindas da antropologia, para analisar as comunidades científicas como se tivéssemos estudando o conjunto de crenças de uma tribo indígena, por exemplo.

Todas essas linhas de pesquisa trouxeram uma nova visão sobre a natureza do conhecimento científico e provocaram significativas mudanças nos rumos da história da ciência. Como o desenvolvimento científico e o processos de validação de teorias seriam historicamente construídos, conhecer a história da ciência se tornou fundamental para a compreensão do próprio conhecimento.

Uma outra questão levantada pela nova história da ciência foi quanto a pluralidade das ciências, que se oporia a uma idéia de monismo teorético que caracterizaria todas as disciplinas científicas. Cada ciência possuiria suas particularidades e, deste modo, fazia necessário que o estudo da *história da ciência* passasse a ser o estudo da *história das ciências*. Porém, essa postura pluralista parece não ter sido assimilada por todos os pensadores ligados a essa nova historiografia da ciência. Aliás, as discussões historiográficas e mudanças ocorridas na história da ciência foram feitas predominantemente a partir de reflexões sobre a história de alguma ciência natural. As teorias que buscavam explicar o modo como se dava o desenvolvimento da ciência, além das discussões metodológicas e epistemológicas surgidas com essa nova historiografia, foram inicialmente criadas a partir da análise histórica de alguma ciência natural, principalmente a física.

Negligenciada pelos debates historiográficos da ciência, os estudos históricos da matemática acabaram não assimilando muitas das mudanças ocorridas na historiografia de outras ciências. Enquanto debates como internalismo-externalismo já haviam sido, de certa forma, superados, essa discussão, como nos mostra Epple e Richards, ainda move os debates historiográficos da matemática até hoje. Estas discussões entre internalistas e externalistas, e mesmo as novas perspectivas trazidas pela nova historiografia das ciência, influenciaram a pesquisa em história da matemática, mas não a alteraram com a mesma intensidade que ocorreu na pesquisa histórica de outras ciências.

Entretanto, alguns trabalhos surgidos na historiografia da matemática começaram, aos poucos, a trazer novas abordagens e questionamentos à história desta disciplina. Desde as primeiras décadas do século XX, com a crise do fundacionismo, surgiam teorias que questionavam a idéia de que o desenvolvimento da matemática possuiria uma independência em relação ao meio sócio-cultural em que estava inserida, além de levantarem dúvidas quanto ao caráter universal da matemática. Apesar dos historiadores da matemática de um modo geral, privilegiarem, até hoje, uma abordagem interna e manterem uma postura fundacionista do conhecimento, esta crise de fundamentos, além das teorias surgidas com a nova historiografia das ciências, contribuíram para o surgimento de outras formas de conceber a matemática e sua história.

Já na década de 40, estudos antropológicos traziam a perspectiva da matemática como um produto sócio-cultural. Em 1948, o historiador e matemático holandês Dirk Jan

Struik (1894-2000) publica o livro *Uma história concisa da matemática* no qual tenta perceber a influência que as forças sociais e institucionais na pesquisa em matemática. Neste período, o interesse nesta ligação entre matemática e o meio cultural começa aumentar entre os pesquisadores. Numa conferência nos Estados Unidos, ocorrida em 1950, o topólogo americano Raymond Louis Wilder, faz suas primeiras observações sobre esta relação entre matemática e cultura. Wilder desenvolveu esta idéia ao longo dos anos, publicando, em 1980, um importante livro intitulado *Mathematics as a cultural system*. Neste livro, a partir de um ponto de vista antropológico, Wilder descreve os dois tipos de influências culturais, que, segundo ele, moldariam no desenvolvimento da matemática. O primeiro tipo de influência seria dado pelas interações sociais entre os elementos de um grupo, que criariam demandas e construiriam respostas a problemas matemáticos levantados no interior do próprio grupo. O segundo tipo de influência, está ligada à herança cultural transmitida pelos elementos do grupo. Esta herança cultural seria usada na tentativa de solucionar os problemas matemáticos específicos de cada cultura.

Em sentido contrário, em 1953, Morris Kline (1908-1992) em seu *Mathematics in the western culture*, discute as influências exercidas pela matemática na cultura no Ocidente. Kline oferece uma análise da influência da matemática no desenvolvimento não só da filosofia, mas também da religião, das artes e vários outros aspectos da sociedade ocidental. Entretanto, apesar de reconhecer que seria exagero atribuir à matemática o papel de principal elemento formador e unificador da cultura ocidental, o trabalho de Kline deixa de fora de suas considerações as influências das matemáticas não-ocidentais na construção deste campo do saber e, em conseqüência, na construção da cultural ocidental.

Apesar de importantes, as abordagens propostas com estes trabalhos ainda não permitiam uma assimilação sistemática pela história da matemática das inovações surgidas com a nova historiografia das ciências. Como dito anteriormente, na história da ciência o esgotamento do debate internalismo-externalismo levou ao surgimento de uma nova abordagem historiográfica da ciência, mas a maioria dos pensadores ligados a essas novas idéias produziram seus trabalhos, principalmente, a partir da análise histórica de algumas ciências naturais. No entanto, já na década de 60, alguns poucos pensadores e correntes historiográficas começaram a transformar, mesmo que de forma distinta, ou mais demorada, esta realidade. Um dos primeiros pensadores ligados a essa nova historiografia que tomou a matemática como seu foco de estudo, foi o matemático, historiador e filósofo da ciência, Imre Lakatos (1922-1974). Por dar um papel central à história da ciência em suas teorias epistemológicas, por tomar a matemática como sua ciência paradigmática e por discutir questões metodológicas relativas à história da ciência, Lakatos contribuiu enormemente para o desenvolvimento da história da matemática.

Em seu livro *Proofs and refutations*, publicado em 1976, Lakatos tentou criar um modelo para o desenvolvimento da matemática a partir da história "informal" do teorema dos poliedros de Euler, que diz que o número de vértices de qualquer poliedro, menos o números de arestas, mais o número de faces é sempre igual a constante dois.[1] Baseado em sua tese de doutoramento de 1961, este livro apresenta a primeira teoria que busca explicar o desenvolvimento histórico da matemática, a partir de aspectos da própria história da matemática, e não de teorias que surgiram da análise histórica de outros campos da ciência.

Segundo Lakatos, as primeiras versões de teoremas seriam conjecturas que os matemáticos tentariam estabelecer dando provas, ou refutar através de contra-exemplos. Se conseguisse escapar dos contra-exemplos, a conjectura poderia ser justificada por uma

[1] Apesar de Euler ter acreditado que demonstrou a generalidade desta teoria, mais tarde verificou-se que alguns poliedros não possuem esta propriedade.

prova, que, apesar de validar a teoria em um dado momento, não seria capaz de garantir a inexistência de lemas ocultos em seu enunciado, ou seja, não seria capaz de assegurar a inexistência de hipóteses escondidas não consideradas no processo de justificação. Deste modo, as provas seriam falíveis, já que não era possível garantir que todas as hipóteses ocultas foram encontradas. A prova teria um caráter provisório e cumpriria a função de melhorar cada vez mais a conjectura ao explicitar novos lemas ocultos em seu enunciado.

Através de seus estudos históricos, Lakatos contestou a visão de filósofos da ciência, sobretudo da matemática, que concebiam a idéia de uma racionalidade que seria fixa, universal e imune aos influxos históricos. Sem abrir mão da idéia de razão, Lakatos defendia a visão de uma racionalidade que seria historicamente construída, e que, por variar ao longo do tempo, deveria ser tomada como parâmetro apenas para uma época determinada. Para se compreender então a ciência, era necessário se fazer o que Lakatos chamou de "reconstrução racional" de sua história, que seria uma história interna do conhecimento científico, mas que poderia ser ampliada indefinidamente. O historiador deveria, antes de tudo, definir o que ele entende por racionalidade no período em que está estudando. Isso lhe permitiria demarcar o limite entre as questões racionais, internas às discussões científicas de acordo com o que ele definiu como racionalidade, das questões irracionais, que seriam externas à ciência. Essas reconstruções racionais nunca seriam definitivas, pois poderiam ser melhoradas com a formulação de uma nova teoria da racionalidade que abarcasse novos fatos históricos e características antes refutadas e absorvidas apenas pela história externa.

Com essa teoria, Lakatos provocou importantes mudanças na filosofia da matemática, criando o que poderia ser chamada de uma postura "quasi-empírica" diante do conhecimento matemático. De um modo geral, isso significa dizer que matemática é o que os matemáticos fazem e têm feito, com todas as imperfeições inerentes em qualquer atividade ou criação humana. Por esse motivo, não pode ser vista de forma isolada de sua história e suas aplicações. Conceitos e provas nunca podem ser considerados finalizados, ou perfeitos, e a busca por certezas e fundamentos sólidos é rejeitada. O quasi-empirismo trouxe a idéia de um conhecimento matemático reconhecidamente falível, corrigível e sem fundamentos seguros.

Como podemos ver, apesar de se prender a alguns conceitos um pouco gastos na discussão histórica e filosófica da ciência, como a possibilidade de demarcação entre o que é, e o que não é, científico, além da idéia de delimitar com precisão o campo de atuação a história interna e externa, Lakatos deu grandes contribuições para a historiografia da ciência, especialmente da matemática. Apontou soluções a questões que afligiam a matemática, sua filosofia e história a muito tempo, como, por exemplo, sobre a natureza do conhecimento matemático, sobre o modo como se dava seu desenvolvimento histórico e discussões metodológicas para história da matemática e demais ciências.

Uma contribuição em particular deste pensador nos interessa muito, por sua influência nas discussões historiográficas da matemática que se seguiram. Em seus estudos históricos, ao mostrar a importância de se conhecer a chamada matemática informal, ou seja, aquele conhecimento matemático que não é aceito como válido em uma determinada época, Lakatos deu um passo decisivo para construção de uma nova história e filosofia da matemática. Seria esta história informal que mostraria ao historiador da matemática o processo de provas e refutações que move a construção da matemática ao longo da história. Assim sendo, o conhecimento da matemática informal passou a ter uma grande importância, já que seu produto seria fonte da matemática formal, e sua prática, origem quasi-empírica da matemática, além de ser fonte da história da matemática. (ERNEST, 1995: 36)

Uma corrente de pensamento que utilizou o quasi-empirismo para formular suas teses históricas e filosóficas da matemática foi o socioconstrutivismo. Assim como aplicaram suas teses ao estudo do conhecimento científico, os socioconstrutivistas também analisaram profundamente a natureza da matemática. Aliás, para demonstrar as teses do programa forte, Bloor analisou especificamente características do desenvolvimento das teorias matemáticas ao longo da história. Demonstrar que o caráter independente que a matemática parece ter de questões ligadas ao contexto social é uma mera convenção, seria um argumento mais forte em favor das teses de Bloor, do que se utilizasse como exemplo uma ciência natural. Por este motivo, Bloor se empenhou em mostrar que conhecimento matemático válido seria apenas aquele que é socialmente aceito em uma determinada época. O que fazia, por exemplo, uma determinada prova ser suficiente para validar uma teoria, ou o que imprimiria uma necessidade lógica de certos passos nas demonstrações, seriam convenções socialmente estabelecidas e não fatores ligados a uma estrutura lógica totalmente abstrata e sempre válida. Isso significa dizer que objetividade na matemática pode ser entendida em termos de aceitação social, ou seja, para compreendermos a matemática devemos levar em consideração os processos sociais que levam a justificação do conhecimento matemático em uma determinada época.

Nesse sentido, além de David Bloor (1976), os trabalhos de Thomas Tymoczko (1998), Paul Ernest (1995) e Donald Mackenzie (1999), nos mostram como o conhecimento da história da matemática se torna fundamental, já que o desenvolvimento das teorias matemáticas estaria intrinsecamente ligado à sua história. O socioconstrutivismo contribuiu com a história da matemática, pois para sustentar suas teses filosóficas e mostrar a origem quasi-empírica desta disciplina, acabou lançando uma nova luz sobre o surgimento de várias teorias matemáticas, em que mostravam o vínculo entre o aparecimento de uma teoria, sua relação com a natureza e com o contexto social que a legitimou. Assim como na pesquisa histórica de outras ciências, o estudo de controvérsias dentro da matemática e o processo de institucionalização de procedimentos lógicos, passou a ocupar, depois do socioconstrutivismo, um lugar de destaque na análise da história da matemática. Isto contribuiu para uma complementação da história desta disciplina com aspectos antes não considerados, além de aproximar as discussões metodológicas da história da matemática e da história de outras ciências.

Um outro campo de pesquisa, também surgido na década de 70, foi a etnomatemática. Apesar de também se basear nas teorias de Lakatos e defender teses muito semelhantes as dos socioconstrutivistas, a etnomatemática ganhou importância nos últimos anos por sua ligação com a educação matemática. Com a falha do programa da matemática moderna[2], começaram a surgir várias teorias que buscavam construir novos pilares à educação matemática. A etnomatemática é o resultado do amadurecimento de algumas idéias que foram surgindo nos primeiros anos da década de 70. Em 1976, o professor brasileiro Ubiratan D'Ambrósio lança em um seminário internacional de educação matemática ocorrido em Karlsruhe, na Alemanha, a idéia de se considerar as origens culturais da matemática como fonte para a educação matemática. Em 1977, o termo etnomatemática é apresentado pela primeira vez por D'Ambrósio, em outro congresso

[2] Em 1959, aconteceu a Conferência Internacional em Royaumont, onde se estabeleceram as bases do Movimento da matemática moderna. As principais orientações dessa proposta partiram do grupo francês Bourbaki, que concebiam a matemática de uma forma axiomática e unificada sob a teoria dos conjuntos, as estruturas e a lógica matemática. Essa nova tendência de ensino, também denominada formalismo moderno ou formalismo pedagógico-estrutural, apresentava um grau de abstração elevado e um maior rigor lógico, o que produziu, além de um maior distanciamento no ensino entre a matemática pura e aplicada, a formulação de um currículo comum e de uma visão única da matemática, alvo de muitas críticas, sobretudo na década de 70.

internacional, este ocorrido em Denver, Estados Unidos, sendo de fato consolidado para designar essa nova perspectiva da educação matemática, em um congresso na Autrália, em 1984. Em 1985, D'Ambrósio lança o livro *Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics*, onde sistematiza suas idéias, apresentando o Programa Etnomatemática. A partir de então, as pesquisas em etnomatemática se espalharam pelo mundo, e vêm se desenvolvendo de forma cada vez mais intensa nos últimos anos. Em 1998 aconteceu o primeiro congresso internacional em etnomatemática em Granada na Espanha.

A etnomatemática defende que cada cultura constrói um processo próprio de leitura do mundo. Assim, a matemática seria então um produto cultural. A partir desta idéia, também defendida pelos idealizadores do Programa Forte, os estudos etnográficos devem ser levados a focar a geração, organização e difusão do conhecimento em uma comunidade. É ao analisar este processo de difusão do conhecimento que deve surgir uma teoria educacional que respeite as especificidades de um meio cultural. Neste sentido, a história da matemática adquire um papel importante também na formulação de teorias educacionais.

Este aspecto educacional atribuído à história da matemática trouxe contribuições às trabalhos elaborados nesta área, pois estabeleceu de forma mais sistemática as pesquisas em antropologia da matemática. Este fato, além de ajudar a consolidar a visão da matemática como um corpo de conhecimento dinâmico e resultante das interações sócio-culturais de uma comunidade, ainda ampliou as possibilidades de pesquisa em história da matemática ao multiplicar seu objeto de pesquisa, instituindo o estudo da história das matemáticas em contraposição à história da matemática ocidental. Este passo foi muito importante para se tentar modificar a tendência ao eurocentrismo no ensino da matemática e nos estudos de sua história.

Diferentemente do que havia ocorrido nas primeiras décadas do século XX, os estudos em história da matemática passaram, a partir dos anos 70, a ocupar um papel mais importante nas reflexões metodológicas da história da ciência. Este fato permitiu um intercâmbio maior de teorias criadas para o estudo da história da matemática e da ciência o que motivou alguns interessantes debates entre os historiadores da matemática. Uma dessas discussões se deu em torno de questionamentos sobre se haveria ou não revoluções na história da matemática. Em 1975, Michael Crowe apresentou um artigo em que mostrava algumas regularidades que ocorriam na história da matemática, as quais foram sistematizadas em dez "leis" que, segundo ele, apontariam o modo como se davam mudanças na história da matemática. Na última, e mais polêmica, dessas leis, Crowe afirma que na matemática nunca houve um evento que caracterizasse uma revolução. Fazendo uma analogia com as revoluções políticas, Crowe afirma que para caracterizar uma revolução, "algum ente existente anteriormente (seja ele rei, constituição ou teoria) deveria ser derrubado e irrevogavelmente rejeitado". (GILLIES, 1992: 19) Segundo este autor, esse processo ocorreu em alguns momentos na história da ciência, como por exemplo, as mudanças na astronomia ocasionadas pelo confronto entre as teorias de Ptolomeu e Copérnico. Porém, no caso da matemática, Crowe usa o exemplo do surgimento das geometrias não-euclidianas para sustentar sua tese de que na matemática nunca aconteceu um evento que pudesse ser chamado de revolução. Segundo ele, o surgimento destas geometrias não caracterizaria uma revolução na matemática, pois após seu desenvolvimento a geometria euclidiana não foi rejeitada, e continuou existindo e convivendo com as demais geometrias que surgiram.

Em 1984, Joseph Dauben, publica um texto em que contesta essa postura diante da história da matemática. Assim como Crowe, Dauben concorda que velhas teorias matemáticas não foram rejeitadas como ocorreu com a física aristotélica, ou a teoria do flogisto. Porém, para ele, alguns eventos na história da matemática, alteraram fundamentalmente esta disciplina e podem ser considerados revolucionários, mesmo que teorias antigas não tenham sido "irrevogavelmente rejeitadas". Para Dauben, uma revolução poderia ser vista como uma série de descontinuidades que acarretassem em uma ruptura definitiva com o passado e inviabilizasse qualquer tentativa de restabelecer a ordem anterior. Também fazendo uma analogia com revoluções políticas, Dauben usa o exemplo da revolução Gloriosa inglesa, quando o poder monárquico continuou a existir após o período revolucionário, mas perdeu consideravelmente sua força. Para ele, o mesmo ocorria com teorias matemáticas que, mesmo após uma inovação que exigisse uma reformulação nos fundamentos, a antiga teoria poderia continuar a existir, mas seria relegada a uma posição inferior após a reformulação.

O livro *Revolutions in mathematics*, organizado por Donald Gillies e publicado em 1992, mostra todo este debate ocorrido entre historiadores da matemática na tentativa de criar um modelo para o desenvolvimento matemático ao longo da história. Além de reunir os principais artigos que foram publicados ao longo dos anos sobre o tema das revoluções na matemática, o livro ainda traz alguns textos dos principais nomes envolvidos nesses debates, onde eles acrescentam argumentos a suas teses, ou reformulam algumas idéias que mudaram com o passar dos anos.

O aspecto mais importante deste debate é mesmo o fato de pesquisadores da história da matemática terem se mobilizado para discutir não só a natureza do conhecimento matemático, mas para apresentarem algumas regularidades percebidas nas mudanças ocorridas na matemática ao longo do tempo e tentarem encontrar um modelo que explique esse desenvolvimento a partir de exemplos da própria história da matemática. Esse fato, sem dúvida, ajudou a trazer a história da matemática para mais perto das discussões teóricas e indagações da atual história da ciência.

Neste sentido, um dos artigos que mais chama a atenção no livro de Gillies, publicado originalmente em 1976, se chama "T. S. Kuhn's theories and mathematics: a discussion paper on the 'new historiography' of mathematics". De autoria de Herbert Mehrtens, este artigo discute a inadequação da aplicação de algumas teorias e conceitos kuhnianos para o estudo da história da matemática.

Mehrtens argumenta que o grau de relação entre matemática e o mundo empírico é menor do que nas ciências naturais e, por isso, a maior parte dos problemas a serem tratados pela matemática são determinados no interior desta própria disciplina. Apesar de ser favorável a uma abordagem sociológica da matemática, sobretudo no que diz respeito ao estudo da comunidade científica formada pelos matemáticos, conceitos como revolução e crise, por exemplo, são totalmente rejeitados para se entender o desenvolvimento histórico da matemática. (GILLIES, 1992)

No livro organizado por Gillies, no apêndice de seu texto, Mehrtens reformula algumas de suas idéias e chega a aceitar a possibilidade de revoluções na matemática. Para Mehrtens, isso depende unicamente da definição de revolução assumida pelo historiador ao fazer seus estudos históricos da matemática.

Este debate sobre revoluções na matemática foi a mais bem sucedida tentativa de aproximar as discussões da história da matemática das teorias apresentadas pelos pensadores ligados à nova historiografia da ciência. Contudo, como nos mostrou Richards, todos estes esforços em alterar os rumos da pesquisa em história da matemática com as novas linhas de pesquisa neste campo, não foram suficientes, dado que, segundo ela, até hoje há uma predominância dos textos que tratam a matemática apenas de um ponto de vista interno. Isto traz um problema pois, mesmo que estudos sobre a história das idéias matemáticas tenham uma grande validade para a história da ciência, o que todas as discussões historiográficas mais recentes mostram é que sozinha, a história das idéias é insuficiente para uma compreensão mais ampla do empreendimento científico.

Diante disso, uma hipótese que poderia ser levantada é que talvez a matemática possua de fato características que realmente permitem que esta disciplina se desenvolva sem uma influência direta de questões extrateóricas. Por isso, registrando o desenvolvimento das idéias, a história da matemática estaria considerando os fatores que realmente são relevantes na descobertas das teorias. Porém, sustentar essa idéia se torna um pouco difícil dado a quase ausência de textos que discutam uma metodologia para a elaboração da história da matemática e que proponham algo que, ao mesmo tempo respeite as particularidades do conhecimento matemático, mas que também introduza na pesquisa histórica da matemática, ou que rejeite de forma consistente, as novas perspectivas e métodos advindos das atuais discussões historiográficas de outras ciências.

A ausência desta bibliografia que analise a própria história da matemática dificulta a verificação dos argumentos de Richards, de que até hoje não foi superada na história da matemática os debates internalismo-externalismo havendo por isso um amplo predomínio da história das idéias dentro da historiografia da matemática.

O que a constatação destas características da história da matemática e os debates historiográficos, apresentados até aqui, nos permitem é lançar um olhar mais minucioso sobre abordagens de alguns eventos da história das ciências. A consciência de que um relato observado, antes de trazer uma exposição dos fatos tal qual aconteceram, está alicerçado em pressupostos e concepções sobre a ciência e a sociedade, possibilita que comecemos a suprir a carência de análises críticas dos textos de história da matemática, o que, no futuro pode contribuir para uma percepção mais apurada das características da pesquisa em história da matemática.

Então, a partir de todas estas idéias apresentadas até aqui, no próximo capítulo analisaremos um texto clássico da história da matemática, mais precisamente sobre a história do surgimento do cálculo infinitesimal. Se trata do livro *The history of the calculus and its conceptual development*, do conhecido historiador da matemática Carl Boyer.

Além da importância deste texto para a historiografia da matemática, o escolhemos por tratar do controverso surgimento do cálculo no século XVII. Um texto clássico que trata de um tema tão quisto às pesquisas mais recentes em história da ciência: as controvérsias científicas. Vejamos, então no próximo capítulo, como Boyer, em 1939, construiu sua abordagem deste evento.

CAPÍTULO III

Uma história do surgimento do cálculo infinitesimal: Carl B. Boyer (1939)

É difícil delimitar a importância do cálculo infinitesimal para o pensamento moderno. Criado na segunda metade do século XVII por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), essa teoria possibilitou uma descrição mais precisa de fenômenos físicos a partir da linguagem matemática, o que permitiu ao homem quantificar, prever e transformar seu mundo através de uma intervenção mais precisa na natureza. A necessidade de matematização para compreensão e controle de processos naturais que o então método experimental impunha, exigiu dos matemáticos do período pós-renascentista europeu a criação de uma ferramenta teórica que possibilitasse uma mensuração dos fenômenos observados. Neste sentido, o cálculo talvez seja o mais influente instrumento teórico de investigação científica que a matemática já produziu.

O surgimento do cálculo infinitesimal é um assunto que provoca um interesse especial entre os historiadores da ciência, não só pela importância adquirida por esta teoria, mas pelas controvérsias que circundam o seu desenvolvimento. O cálculo surge em um período em que o modelo de matemática herdado da Antigüidade vinha sofrendo questionamentos e modificações. O século XVII registra uma grande efervescência na produção matemática, quando inúmeras novas teorias vinham surgindo, às vezes ao mesmo tempo em lugares diferentes. E é exatamente este tipo de controvérsia, quanto à prioridade na invenção, que caracteriza o surgimento do cálculo e que lança muitas questões sobre a análise histórica do desenvolvimento da ciência, sendo que este evento explicado de diferentes maneiras. Neste último capítulo, pretendemos analisar uma história deste evento publicada em 1939 por Carl Benjamin Boyer (1906-1976) e fazermos uma análise deste texto considerando as discussões historiográficas apresentadas nos capítulos anteriores.

Mais conhecido pelo seu clássico manual *História da matemática*, de 1968, Boyer foi um dos primeiros historiadores da matemática a apresentar o desenvolvimento das idéias do cálculo desde a Antigüidade até sua rigorosa fundamentação ocorrida no século XIX. No prefácio de seu livro sobre a história do cálculo, Boyer diz que em sua época já havia muitos livros que tratavam sobre o tema. O que faltaria seria "a satisfactory critical account of the filiation of the fundamental ideas of the subject from their incipiency in antiquity to the final formulation of these in the precise concepts familiar to every student of the elements of modern mathematical analysis." (BOYER, 1959) Este livro é resultado dos estudos de Boyer feitos na Columbia University, onde obteve o título de Ph.D. em história intelectual. Publicado em 1939, sob o título de *Concepts of the calculus*, foi reeditado em 1959 com o título *The history of the calculus and its conceptual development*, que será a edição utilizada neste trabalho.

Carl Boyer é um historiador da matemática que iniciou suas pesquisas em um período em que os estudos sobre história da matemática ainda eram incipientes e reflexões que analisavam formas distintas de se fazer esta história praticamente não existiam. Nestes primeiros passos do estudo sistemático da história da matemática, o foco principal da reconstrução histórica eram as idéias matemáticas. Entender como estas idéias se desenvolveram, como foram propostas ou aplicadas, era o objetivo principal dos primeiros historiadores desta disciplina.

Neste capítulo portanto faremos uma síntese do texto de Boyer, até o surgimento do cálculo com Newton e Leibniz, tentando apresentar sua visão deste evento e suas principais teses para explicá-lo. Além disso, avaliaremos esta história do surgimento do cálculo proposta por Boyer à luz destas novas teorias historiográficas apresentadas anteriormente.

Antes de iniciar a apresentação da história do surgimento do cálculo, é necessário explicar melhor o que é o cálculo. Basicamente, o cálculo é uma ferramenta matemática para investigar fenômenos que não possuem uma variação constante, e se divide em duas partes: o cálculo diferencial e o cálculo integral. O desenvolvimento da diferenciação, também conhecida como derivada ou taxa de variação, foi motivado pela tentativa de se resolver problemas relacionados à determinação de tangentes à curvas dadas, questões sobre máximos e mínimos de funções e, principalmente, para o cálculo de taxas com as quais uma grandeza varia em relação à outra. A idéia de integração é bem anterior à de diferenciação, originando-se com processos somatórios para o cálculo de áreas, volumes e comprimentos de curvas. Estes problemas de determinação de tangentes e áreas foram estudados separadamente por muitos séculos, até serem ligados pelo *teorema fundamental do cálculo*, que uniu estes dois conceitos em uma única teoria.

Uma idéia importante ligada ao desenvolvimento do cálculo é a noção de quantidades infinitamente pequenas. Muitas das idéias que originaram o cálculo, foram causadas pelas discussões filosóficas a respeito da relação entre considerações de quantidades infinitamente pequenas e conceitos de espaço e tempo, sobre a natureza de entes contínuos e a possibilidade de sua divisão infinita. Daí o nome cálculo infinitesimal.

Esta noção de infinitésimos e os problemas lógicos provocados por ela, seguiram o desenvolvimento do cálculo até o século XIX. Neste período houve uma restruturação das bases do cálculo, que substituiu as quantidades infinitamente pequenas, pelos conceitos de número e limite. Embora a idéia de infinitésimos ainda tenha continuado parcialmente implícita no cálculo moderno, sua nova fundamentação eliminou a necessidade de qualquer menção à esta idéia no raciocínio matemático. (BARON, 1985: 4) Esta seria portanto a diferença principal entre o cálculo infinitesimal, surgido no século XVII com Newton e Leibniz, e o que estamos chamando de cálculo moderno.

Esclarecido estes conceitos com os quais trabalha o cálculo, apresentaremos a partir daqui os principais pontos da história do surgimento do cálculo segundo Carl Boyer. Este livro que utilizaremos é também um bom manual de história de filosofia, relatando praticamente todos os pensadores que contribuíram para o desenvolvimento de alguma idéia que auxiliou, mesmo que de forma indireta, à formulação do cálculo. Porém, neste capítulo, omitiremos alguns nomes e apresentaremos, de forma mais concisa, as teorias que permitam compreender melhor as teses levantadas por Boyer para justificar o surgimento do cálculo. Toda a síntese da história do surgimento do cálculo apresentada a partir daqui, será feita, mesmo quando não indicada, com base no livro de Boyer. Para facilitar a leitura, optamos por só remeter diretamente à Boyer os pontos onde ele explicita suas teses para explicar o surgimento do cálculo. Mas vale ressaltar mais uma vez que, mesmo quando não indicado esta síntese tenta seguir e apresentar a história do surgimento do cálculo na visão do autor em questão.

A história do cálculo de Carl Boyer se inicia na Antigüidade, apresentando-se alguns aspectos da matemática pré-helênica desenvolvida no Egito e na Babilônia. Apesar de terem chegado a importantes resultados, o processo empírico empregado na investigação matemática não possibilitou aos matemáticos egípcios e babilônicos o desenvolvimento de um método sistemático de generalizações e abstrações capaz de fornecer regras gerais que guiassem suas pesquisas e construções matemáticas. Além desta dificuldade de abstrair e generalizar resultados obtidos para um caso em particular, a prova que validava uma determinada regra na matemática egípcia e babilônica era feita através de testes em casos concretos. Não havia uma percepção da estrutura lógica da matemática. Por esses motivos, apesar dos matemáticos egípicios e babilônicos terem desenvolvido métodos para o cálculo áreas e volumes de várias formas geométricas, a questão dos infinitésimos, ou de partições infinitamente pequenas, que impulsionaram o desenvolvimento do cálculo, não apareceu como um problema a ser considerado naquela época. Aliás, não há pesquisa com infinitésimos antes da civilização grega.

Sabe-se que a matemática egípcia e babilônica exerceu uma certa influência nos primeiros trabalhos da matemática grega, entretanto a produção do conhecimento na Grécia antiga ganhou uma outra conotação. O pensamento desenvolvido pelos gregos tinha como característica privilegiar o raciocínio puro, com o mínimo apelo aos sentidos. A matemática abstrata, afastada de suas aplicações a problemas práticos, foi adquirindo cada vez mais importância no sistema filosófico grego, pois possuía em sua lógica interna, um meio de se chegar, através da dedução, a um conhecimento considerado seguro e indubitável.

Este processo tem origem no período clássico da história grega, iniciado no século VI a.C., quando surgiu, na geometria demonstrativa, o emprego do raciocínio dedutivo em matemática. Creditada à Tales de Mileto (626-545 a.C.), a idéia era que o pensamento matemático deveria partir de premissas tomadas como verdadeiras, por serem consideradas evidentes. Para que fosse aceita como válida, uma teoria matemática deveria ser deduzida logicamente dessas proposições primitivas. Essa nova perspectiva, potencializou a pesquisa em matemática e imprimiu sobre esta disciplina características que alteraram todo o seu desenvolvimento posterior.

Para completar este processo de abstração da matemática iniciado por Tales, a escola pitagórica tentou dar um fundamento sólido a esta disciplina. Tomando o número como a unidade básica do mundo, os pitagóricos queriam desvendar a estrutura elementar do universo, buscando por princípios gerais que expusessem os elementos criadores da harmonia universal. A geometria foi considerada por eles como imanente à natureza. Os sólidos geométricos regulares eram identificados com as diferentes substâncias existentes no mundo.

Essa concepção de unidade entre natureza e geometria, fez com que os pitagóricos depositassem um grande interesse no estudo da matemática e introduzissem algumas inovações neste ramo do conhecimento. Como dito, os números, e entenda-se aqui números inteiros, eram para eles os elementos últimos do universo. Assim, a aritmética assumiria o papel de unificadora da natureza e de fundamento do pensamento matemático.

Para os pitagóricos todas as grandezas poderiam ser associadas a um número inteiro, ou a uma razão entre dois números inteiros. A partir desta idéia, estes pensadores desenvolveram um importante método, que nos interessa especialmente aqui, para mensuração de figuras geométricas através de comparações com outras figuras. Considerando-se um segmento qualquer como unidade, uma reta poderia ser comparada com este segmento, de modo a ser vista como formada por um número definido dessas unidades, ou seja, algum submúltiplo deste segmento unitário estaria contido um dado número inteiro de vezes na reta que se deseja medir. O segmento e a reta seriam assim grandezas comensuráveis. No caso de áreas, ou volumes, o raciocínio é análogo, tomando-se uma área, ou volume, como unidade para comparação. Com isso, é possível se construir uma razão entre grandezas geométricas e dizer quantas vezes um determinado comprimento, área, ou volume, é maior, ou menor, que outro. Apesar de simples, essa idéia encontrou inúmeras complicações em ser aplicada, quando os filósofos se deparam, então, com o problema da incomensurabilidade.

Para os pitagóricos, não haveria nenhuma restrição em aplicar seu procedimento de mensuração de grandezas. A universalidade do método seria dada pela concepção de que o mundo estaria estruturado por números inteiros. No entanto, o grande problema da concepção matemática pitagórica se deu ao tentarem, por exemplo, comparar a diagonal de um quadrado em relação ao seu lado. Analisando este processo, conclui-se que a diagonal não pode ser comparada com o lado do quadrado, pois não é possível representar esta comparação por uma razão formada por dois números inteiros, ou seja, o lado do quadrado não está contido um número inteiro de vezes na diagonal. Na terminologia atual, diríamos que o comprimento da diagonal de um quadrado seria representado por um número irracional. Este fato, fez ruir a crença de que o universo poderia ser descrito em sua totalidade pelos números inteiros, já que este sistema numérico se mostrou insuficiente para lidar com as grandezas geométricas.

Esta falha em dar uma resposta satisfatória ao problema das grandezas incomensuráveis, teve um significativo impacto no desenvolvimento posterior da matemática. A tentativa de unir a aritmética, que trabalhava com entes discretos, com a geometria, formada por quantidades tidas como contínuas, fez surgirem entre os pensadores gregos duas perspectivas antagônicas na tentativa de explicar a natureza dos elementos matemáticos. Intensos debates foram travados, sendo mais aceita ao final a visão de que a matemática seria formada por entes contínuos. Essa postura fez com que a matemática grega, especialmente a geometria, fosse adquirindo cada vez mais um caráter unicamente qualitativo.

Além da limitação da teoria das proporções apresentada pelos pitagóricos, que não podia ser aplicada a todos segmentos geométricos, contribuiu para esta mudança de perspectiva da natureza dos entes geométricos, os problemas lógicos provocados pela proposta dos filósofos atomistas para interpretação deste tema.

A natureza discreta dos entes com os quais trabalha a aritmética, ou seja, os números, serviu, aos pitagóricos, como analogia para tentar explicar os objetos geométricos. Os atomistas, apesar de também conceberem a matemática como formada por entidades discretas, partiam de suas reflexões quanto à natureza do mundo físico, para explicar a matemática. Segundo o pensamento atomista, o universo era constituído de partículas indivisíveis, denominadas átomos. Essa noção aplicada à geometria, acarretava na existência desses elementos indivisíveis na formação dos objetos matemáticos. Esta perspectiva atômica da matemática, que trazia a possibilidade de se considerar, por exemplo, as figuras geométricas como constituídas de partes indivisíveis, teve, desde seu início, inúmeros opositores. Explicitar paradoxos lógicos a partir dessa noção de indivisíveis na matemática foi uma forma muito explorada pelas correntes filosóficas contrárias às idéias atomistas.

Um conhecido paradoxo é apresentado, propondo que imaginemos um cone “fatiado” em várias seções planas, de espessura “atômica”, paralelas à base. Como a espessura de cada “fatia” é muito pequena, podemos considera-las como tendo o formato de cilindros muito “finos”. Para formamos o cone, cada seção, ou cada “fatia” dessas, devem ter diâmetros diferentes, pois do contrário, sua junção formaria um cilindro, o que contradiz a hipótese. Porém, como estas seções, ou “fatias”, têm a forma de um cilindro que possui uma espessura, mesmo que muito pequena, quando as unimos, formamos um cone, mas com uma superfície cheia de irregularidades. Isto leva então a uma conclusão absurda, já que quando imaginamos uma figura geométrica, no caso um cone, não a concebemos como formada por pequenos degraus, mas como uma figura contínua. Assim, a concepção atomista entra em conflito com uma idéia mais facilmente aceita, baseada na noção de continuidade, que é, sem dúvida, intuitivamente mais clara.

O pensamento atomista se sustentava sobre noções, defendidas pelos pitagóricos, de um mundo de multiplicidade em permanente mudança. Essas idéias encontraram uma forte oposição por parte da escola de Eléia, que se contrapunha à visão de um "mobilismo universal", defendendo noções de permanência e unidade como base para seu pensamento. Neste sentido, a escola eleática apresentou os mais conhecidos argumentos contra as teorias sustentadas pelo pensamento pitagórico. Zenão (c. 450 a.C.) foi um membro desta escola que teve seu nome associado à formulação de quatro conhecidos paradoxos que influenciaram muito nos rumos seguidos posteriormente pela matemática grega. Dialeticamente, Zenão partia das premissas que sustentavam o pensamento de seus oponentes e as reduzia ao absurdo. A principal idéia combatida era possibilidade de se pensar espaço e tempo como constituídos de pontos e instantes.

Nos dois primeiros paradoxos, conhecidos como *dicotomia* e *Aquiles*, Zenão mostra que o movimento é impossível sob a hipótese de uma divisibilidade infinita do espaço. No paradoxo de *Aquiles*, por exemplo, é proposto que imaginemos uma corrida entre o herói Aquiles e uma tartaruga que larga um pouco à frente na disputa. Iniciada a corrida, quando Aquiles chegar a posição inicial da tartaruga, ela, por mais lentamente que se locomova, terá avançado um pouco em relação a sua posição inicial. Quando Aquiles chegar a esta última posição da tartaruga, ela já terá avançado mais um pouco. Continuando o processo indefinidamente concluímos que Aquiles, por mais rápido que corra, nunca alcançará a tartaruga.

Nos outros dois paradoxos, o da *flecha* e do *estádio*, Zenão admite, sob a hipótese contrária, que a subdivisão do tempo e espaço termina em porções indivisíveis. No argumento da flecha, é proposto que, se o tempo é composto de instantes indivisíveis, então uma flecha lançada está sempre parada, visto que em cada instante ela se encontra em uma determinada posição fixa.

Embora estes argumentos de Zenão possuam rigor lógico, suas conseqüências, evidentemente, não são observadas na prática. Esta é a razão pela qual esses paradoxos geraram tanto desconforto aos defensores das concepções pitagóricas. Aliada ao problema da incomensurabilidade, que expunha a fragilidade do pensamento pitagórico frente à simples propriedades de comparação de segmentos, esses paradoxos elaborados por Zenão contribuíram para o abandono da aritmética como fundamento do pensamento matemático grego e a adoção, cada vez maior da geometria, que possibilitava uma representação dos objetos matemáticos através de elementos contínuos. Ocorreu então no pensamento grego uma cisão entre aritmética, que continuava a ser discreta, e a geometria, que trabalhava com a idéia de grandezas contínuas, sem relação direta com números e tratada por métodos geométricos. Era o fim da tentativa de se explicar os contínuos em termos de discretos. Para Boyer este seria um dos grandes empecilhos para o desenvolvimento do cálculo na Grécia, pois é "imposible satisfactorily to interpret the world of nature and the realm of geometry (...) without superimposing upon them framework of discrete multiplicity; without ordering, by means of number, the heterogeneity of impressions received by the senses; and without at every point comparing nonidentical elements." Além disso, a "inability of Greek mathematics to answer in a clear manner the paradoxes of Zeno made it necessary for them to forego the attempt to give the phenomena of motion and variability a quantitative explanation." (BOYER, 1959: 26 e 25)

Nesta nova perspectiva da matemática, os pensadores gregos ainda almejavam desenvolver um método que permitisse uma subdivisão contínua do espaço, mas sem a perda do rigor lógico. Como o método de comparação de segmentos apresentado era limitado, e a visão dos atomistas de se considerar a existência dos indivisíveis levava à inúmeros paradoxos, Eudoxo (408-355 a.C.), propôs solucionar cada um desses problemas, seguindo caminhos diferentes dos conceitos de limite e número que foram usados para contornar estes mesmos problemas na modernidade.

Como a teoria das proporções criada pelos pitagóricos não podia ser aplicada a todos os segmentos, Eudoxo redefiniu com mais precisão a noção de razão, construindo uma regra mais geral para o sistema de proporções. Evitando a discussão sobre a natureza dos números irracionais, Eudoxo encontrou uma maneira eficiente de definir a igualdade entre duas razões, sem romper com os conceitos que caracterizavam a matemática grega em sua época, pelo seguinte enunciado que conhecemos através dos *Elementos* de Euclides (325-265 a.C.)

> *Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order.* (EUCLIDES apud BOYER, 1959: 31)

Com esta definição, Eudoxo estabeleceu as condições necessárias para que tenhamos uma igualdade entre razões, afastando os problemas que o sistema de proporções proposto pelos pitagóricos apresentava, já que não limitava a validade apenas às grandezas comensuráveis. A engenhosidade deste método de Eudoxo foi tal que, no século XIX de nossa era, o matemático francês R. Dedekind (1831-1916) se inspirou nesta idéia para dar uma resposta ao problema do contínuo que ainda carecia de uma resposta satisfatória até aquela época.

Contornado o problema que a comparação de grandezas incomensuráveis causava ao sistema de proporções dos pitagóricos, faltava ultrapassar a barreira de criação de um método geral para mensuração de figuras geométricas através da comparação entre seus comprimentos, áreas ou volumes. No caso da área de figuras planas, os gregos já haviam trabalhado bastante em uma operação conhecida como quadratura, que consiste em transformar a área de um polígono, em um quadrado de área equivalente. Com este método é possível calcular a área de uma figura poligonal, já que a área do quadrado poderia ser facilmente encontrada. O desafio consistia em se conseguir transformar uma área qualquer, em um quadrado de área equivalente.

Os gregos se detiveram com muito interesse neste processo, conseguindo calcular até mesmo a área de alguns tipos de lúnulas, que são figuras limitadas por dois arcos circulares de raios diferentes. O que eles não conseguiam era um método geral que permitisse comparar figuras quaisquer, sejam elas curvilíneas ou não.

Para possibilitar a comparação entre figuras curvas e figuras poligonais, Eudoxo traz a seguinte proposição, que afirma que dadas duas grandezas de mesma espécie

> *if from the greater there be subtracted a magnitude greater than its half, and from that which is left a magnitude greater its half, and if this process be repeated continually, there will be left some magnitude which will be less than the lesser magnitude set out.* (EUCLIDES apud BOYER, 1959: 33)

Eudoxo afasta então a idéia de divisibilidade infinita, excluindo o infinitesimal das demonstrações em geometria, ao postular que processos somatórios, que em princípio parecem infinitos, têm fim. Com esta proposição, que ficou conhecida como *princípio de* *exaustão*, ou *axioma de Arquimedes*, por ter sido muito utilizado por este pensador, foi possível se construir um rigoroso método de comparação entre figuras geométricas.

Para poder comparar, por exemplo, áreas de círculos com áreas de polígonos, Eudoxo utilizou uma idéia lançada por Antifon, o sofista, (c. 430 a.C.) de inscrever um polígono regular em um círculo e ir, sucessivamente, dobrando o número de lados do polígono. O *princípio de exaustão* nos permite interromper este processo em um momento e intuitivamente aceitar que, com esse procedimento, a área do polígono se torne igual à do círculo. Porém, esta idéia intuitiva necessita, evidentemente, ser deduzida logicamente para que seja validada. Com este fim, Eudoxo formulou o *método de exaustão* para imprimir rigor dedutivo a qualquer comparação de áreas que utilize o axioma por ele proposto.

O *método de exaustão* consiste em um hábil artifício lógico, que dá ao matemático uma rigorosa garantia da validade de sua mensuração. Utilizemos mais uma vez o exemplo de comparar a área de um círculo com a de um polígono inscrito dobrando sucessivamente seu número de lados. Como, pelo *princípio de exaustão*, assumimos que o processo de multiplicação dos lados do polígono em um momento tem fim, quais seriam então os tamanhos possíveis para a área do círculo em relação à área do polígono? Logicamente, só podem ocorrer três situações: a área do círculo ser ou maior, ou menor, ou igual à do polígono. Para provar a igualdade entre as áreas, a idéia de Eudoxo é que, primeiramente, tentemos demonstrar que a área do círculo é maior, ou menor, que a área do polígono. Supondo qualquer destas duas situações, chegamos a uma contradição lógica, o que nos leva a concluir, pelo duplo absurdo na demonstração, que as áreas do círculo e do polígono são exatamente iguais.

Com este artifício lógico, Eudoxo conseguiu, com grande sucesso, manter o rigor demonstrativo exigido pela matemática grega, em demonstrações que utilizam a noção intuitivamente clara, mas logicamente complicada, de partições infinitas. Pelo método de exaustão, processos que parecem infinitos, se “exaurem”, permitindo aos matemáticos darem um próximo passo na construção de teorias, antes impossibilitadas por questões lógicas. Porém, apesar de ter sido usado até o período moderno para efeito de especulação na pesquisa matemática, o *método de exaustão* não resolveu totalmente o problema da mensuração de figuras geométricas, já que consiste de um procedimento de demonstração de fórmulas, não de descoberta. Além disso, por toda a história da matemática, muito pensadores relutaram em tomar o *princípio de exaustão* como evidente, já que aceitá-lo equivale a assumir, por exemplo, que a área do polígono inscrito é tão próxima da do circulo quanto se queira, sempre sendo possível se conseguir uma aproximação maior entre o valor das duas áreas. A quantidade restante depois das inúmeras subdivisões é tão pequena quanto se deseje, mas não chega nunca a zero. Por isso, a utilização do método de exaustão, apesar de ter possibilitado o desenvolvimento de várias teorias matemáticas importantes, ainda dava margem a alguns questionamentos quanto a precisão e validade de seus resultados.

Mesmo parecendo resolver o problema da mensuração de áreas de curvas, Boyer não aceita que o método de exaustão seja um algoritmo do que seria futuramente chamado de cálculo. Apesar de reconhecer que o método de exaustão seria “the Greek equivalent of our integration”, para ele, além dos gregos nunca terem guiado seu pensamento em direção à construção de uma operação específica com uma notação própria, “they did not formulate the principle of the method as a general proposition”. (BOYER, 1959: 18 e 36) O método grego, embora equivalente em muitos aspectos ao cálculo diferencial e integral, não permite uma passagem para o limite como no cálculo, pois o método de exaustão é inteiramente geométrico, “for there was at the time no knowledge of an arithmetical continuum.”

(BOYER, 1959: 35) Esta seria, para ele, a principal diferença do método de exaustão para o cálculo moderno: a fundamentação na geometria. Este fato traz a necessidade de uma visualização geométrica dos conceitos do cálculo. Já a passagem para uma base aritmética, dispensaria, segundo ele, esta relação tão próxima com experiência sensível.

Como vimos, o método de exaustão é uma teoria capaz de proporcionar rigorosas demonstrações. No entanto, não possibilita a descoberta de novas fórmulas. Uma maneira de solucionar este problema foi apresentada por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) com seu *método de equilíbrio*.

Além da matemática, Arquimedes foi um pensador que se dedicou ao estudo da física, desenvolvendo muitos trabalhos ligados à hidrostática e a mecânica. Talvez este seu interesse em ciências naturais, o tenham possibilitado utilizar na matemática conceitos da cinemática, como o de movimento, e da mecânica, como o de equilíbrio de pesos em uma balança, utilizado em seu método.

O método de equilíbrio consiste em considerar os sólidos geométricos como sendo formados por inúmeras "fatias" de espessura atômica. Essas "fatias" devem ser mentalmente penduradas nas extremidades de uma alavanca dada, de forma a estabelecer equilíbrio e poderem ser comparadas proporcionalmente com uma "fatia" de mesma dimensão de um sólido cujo volume já seja conhecido. Se, na comparação, as "fatias" correspondentes dos dois sólidos puderem ser expressas por uma proporção, a relação entre os dois volumes pode ser expressa por uma razão.[3] Para o resultado ser válido, faltava apenas demonstra-lo pelo método de exaustão.

Com seu método de equilíbrio, Arquimedes conseguiu criar um meio capaz de fornecer fórmulas de várias áreas e volumes de figuras geométricas, combinando assim o

[3] Note-se que se os sólidos possuírem volumes iguais, a razão de comparação entre as "fatias" será igual a um.

rigor exigido pela geometria euclidiana, com as considerações sobre partições infinitamente pequenas dos atomistas. Dessa forma, a matemática grega chegou a vários resultados muito próximos aos alcançados, de forma distinta, através do cálculo integral, no século XVII.

Neste sentido, é interessante observar a idéia de Arquimedes para determinar o volume do segmento cortado de um parabolóide de revolução. Esta figura, também conhecida por conóide paraboloidal, é obtida "girando-se" uma parábola em torno do seu eixo principal. Primeiramente, é proposto que circunscrevamos o sólido de revolução com um cilindro circular que tenha o mesmo eixo do parabolóide. Divide-se então este eixo em n partes iguais, e passa-se pelos pontos de divisão, planos paralelos à base, que cortam o parabolóide em diversas secções circulares. Em seguida, construímos troncos cilíndricos inscritos e circunscritos a estas secções. Unindo estes troncos cilíndricos, obtemos uma figura inscrita e outra circunscrita ao parabolóide. O volume do parabolóide seria obtido pela diferença entre os volumes da figura inscrita e circunscrita, que pode ser diminuída aumentando-se as divisões prefixadas no eixo. Utilizando o princípio de exaustão, que permite interromper o processo em um determinado ponto, a partir de comparações com o cilindro inicial, Arquimedes conclui que o volume deste é duas vezes o volume do segmento parabolóide.

Mais interessante que o resultado é o procedimento seguido neste raciocínio, que é quase idêntico à integração. Apesar de todas diferenças entre os conceitos utilizados na matemática grega e na moderna, é impressionante observar como Arquimedes esteve muito próximo do desenvolvimento do cálculo integral.

Além disso, este pensador também deu contribuições no desenvolvimento de conceitos que importantes para o cálculo diferencial. Uma característica da geometria grega é o fato dela ser essencialmente estática. Em poucos momentos, a questão do movimento foi problematizada. Uma importante exceção ocorreu quando Arquimedes estudou as propriedades de uma curva que ficou conhecida como *espiral de Arquimedes*. A espiral é obtida imaginando-se o desenho traçado por um ponto que se move uniformemente ao longo do raio de um círculo, enquanto este gira uniformemente em torno de seu centro. Em seus estudos sobre esta curva, Arquimedes parece ter encontrado as tangentes à espiral, através de considerações cinemáticas que são muito semelhantes às utilizadas pelo cálculo diferencial.

Entretanto, a despeito dos procedimentos de Arquimedes serem considerados como uma antecipação do cálculo diferencial e integral, Boyer faz algumas ressalvas. Para ele, que os métodos gregos e do cálculo de fato são "interrelated, and in consequence they lead to identical results; but the points of view are distinctly different". A integral definida em matemática é estabelecida como o limite de uma seqüência infinita e não como a soma de um número infinito de pontos, linhas ou superfícies. "The definite integral requires for its correct formulation an appreciation of notions of variability and functionality (...)". (BOYER, 1959: 55) Além disso, Arquimedes não percebeu a relação existente entre os problemas do cálculo diferencial e do integral, que na modernidade foram unidos pelo teorema fundamental do cálculo. Deste modo, para Boyer, mesmo reconhecendo que os problemas e métodos de Arquimedes provavelmente forneceram um forte incentivo para o desenvolvimento da integração e diferenciação, seriam incorreto imputar a Arquimedes a criação destas teorias. Para Boyer, estas noções não fizeram parte da matemática grega.

Essa questão da necessidade de se diferenciar os fundamentos e resultados da matemática grega das concepções modernas é constantemente tratada no livro. A diferença mais relevante seria a escolha feita pelos pensadores gregos ao longo do desenvolvimento de sua matemática, por fundamenta-la em bases geométricas. Para o desenvolvimento e fundamentação do cálculo seria imprescindível a passagem a uma base aritmética, como foi gradualmente ocorrendo no pensamento matemático. Boyer faz questão de ressaltar ao longo de seu texto, que esta concepção da aritmética como fundamento para a matemática seria muito semelhante à visão que os pitagóricos sobre o tema. Como mostrado anteriormente, estas mudanças ocorreram de forma paulatina dentro da filosofia grega, resultando em um abandono da aritmética como fundamento da matemática. Este processo se acentuou consideravelmente com a difusão das idéias da escola platônica, pelos trabalhos de pensadores como Eudoxo e Euclides.

Todas essas características da matemática grega, ao mesmo tempo que dificultavam o desenvolvimento dos conceitos do cálculo, por afastar considerações a respeito de infinitésimos e velocidade na matemática, deram contribuições essenciais ao levantarem discussões sobre o tema da continuidade e tentarem solucionar o problema que a idéia de infinitesimais causava. Para Boyer, essas questões só aparecem como um problema a ser considerado dentro da filosofia grega.

Na matemática hindu, por exemplo, que quase simultaneamente às criações gregas, deu importantes contribuições ao desenvolvimento posterior desta disciplina, não havia uma distinção entre números racionais e irracionais. Além do mais, diferentemente do que ocorria na matemática grega, a aritmética hindu não possuía uma representação geométrica. Estes dois fatores permitiam uma grande liberdade na manipulação de grandezas, o que resultou, pela possibilidade de se considerar uma raiz irracional como número, em importantes contribuições da matemática hindu no desenvolvimento da álgebra. Esta possibilidade de tratar indiscriminadamente as grandezas irracionais como números, o que não teria sentido na matemática grega, também permitia aos matemáticos hindus trabalharem, sem problemas, com o que mais tarde foi denominado número π . Assim, não havia uma diferenciação no estudo das figuras curvilíneas e retilíneas, mensuradas em termos de números, o que possibilitava, por exemplo, a comparação entre áreas de um quadrado e de um círculo. A partir desta forma de conceber a matemática, os matemáticos hindus chegaram a vários resultados inéditos, construindo teorias importantes para o desenvolvimento da matemática ocidental, absorvidas mais tarde pelos matemáticos renascentistas. Destas contribuições, uma que merece ser destacada, é a notação numérica, usada até hoje. Esta forma de representar os algarismos criada pelos hindus, chegou à Europa através dos árabes e simplificaram enormemente a representação dos números.

Quanto aos árabes, a matemática desenvolvida por estes sofreu fortes influências dos gregos e hindus. Além de aprimorar a álgebra e divulgarem a notação numérica hindu, os árabes deram uma importante contribuição à matemática ao traduzirem muitas das obras gregas para o árabe, preservando assim este conhecimento que mais tarde foi reintroduzido na Europa.

Com o declínio do mundo clássico, boa parte do conhecimento grego se perdeu, ou se dispersou. As obras de Arquimedes, por exemplo, ficaram desconhecidas do mundo ocidental até o século XVI. Durante a Idade Média as principais contribuições para a criação do cálculo vieram, além dos pensadores árabes e hindus que desenvolveram significativamente a álgebra nesta época, dos filósofos escolásticos e suas discussões sobre a questão do *continuum*. Quando no século XVI as obras de Arquimedes ressurgiram na Europa, os estudos de suas teorias foi guiado por muitas idéias e tradições surgidas no período medieval.

Na Europa medieval, o trabalho em matemática se limitou por muitos séculos a apenas reproduzir alguns tópicos da matemática grega. Nos séculos XII e XIII começaram a aparecer traduções em latim de trabalhos gregos. Estes textos traduzidos não causaram muito entusiasmo aos filósofos daquela época, que se interessavam principalmente por teologia e metafísica. Dos livros gregos egressos do passado, os que causaram maior impacto foram as várias obras de Aristóteles desconhecidas até então e que passaram a ser o centro das intensas discussões entre os filósofos escolásticos.

No século XIV, no que diz respeito às questões que permeiam o desenvolvimento do cálculo, se considerarmos de uma forma mais ampla as especulações em torno da matemática teórica, neste período da Idade Média surgiram algumas contribuições relevantes. A idéia de indivisíveis foi muito trabalhada durante o período, havendo pensadores que defendiam, semelhantemente a alguns filósofos gregos, que o tempo seria composto de instantes indivisíveis. Outros, como fez Thomas Bradwardine (1290-1349), argumentavam que a doutrina dos indivisíveis era totalmente inconsistente. Para ele, as grandezas contínuas, embora contendo um número infinito de indivisíveis, não eram formadas por esses átomos matemáticos, mas compostas de um número infinito de contínuos de mesma espécie. O infinitesimal tinha para ele, como para Aristóteles, uma existência potencial. O fato é que, vários debates foram travados sobre o assunto, mas, como ocorreu na Grécia antiga, não houve uma posição definitiva sobre o tema.

A discussão medieval sobre a questão de indivisíveis, divisões infinitas e da própria natureza do infinito, eram baseadas na diferenciação aristotélica entre infinito real e potencial. No entanto, essa questão, influenciada pela visão cristã de um Deus infinito, tomou uma outra conotação entre os escolásticos. A esse respeito, uma interessante consideração foi elaborada por Richard Suiseth (c. 1350). Conhecido como o Calculator, este pensador relacionou a noção de infinito com a de uma soma infinita de termos, ao contrário da maioria dos filósofos que consideravam o infinito como uma magnitude. Este posicionamento de Suiseth é muito semelhante, embora sob uma outra perspectiva, da noção atual com a qual se trabalha o infinito.

Apesar de parecer que na Idade Média o desenvolvimento da matemática se deu apenas no campo das descobertas práticas e nas aplicações da matemática, neste período apareceu uma importante teoria sobre o movimento, que mais tarde contribuiu na elaboração do conceito de derivada. Apesar de tomado mais em termos filosóficos que matemáticos, o estudo do movimento quantitativamente, levou a uma aceitação do conceito de variação na matemática. Heráclito, Demócrito e Aristóteles fizeram algumas considerações metafísicas qualitativas em relação à noção de movimento, mas a idéia de representar variações constantes por quantidades geométricas, ou estudá-la em termos de discretude de número, nunca foi utilizada na matemática grega. A matemática grega privilegiava o estudo da forma e não da variabilidade.

No século XIII começou a surgir uma reação contra essa concepção da matemática grega, que, no início do século XIV, resultou na elaboração da idéia de *impetus*. Esta teoria, se contrapunha à visão de movimento aristotélica, que defendia que um corpo em movimento só permanece em movimento se houver uma força externa impelindo-o ao movimento. Para os defensores da teoria do *impetus*, um corpo em movimento, uma vez em movimento, continua a se mover por uma tendência interna possuída pelo próprio corpo que se move.

Essa nova doutrina, além de ter sido um prenúncio às teorias em dinâmica que Galileu apresentaria mais tarde, foi muito importante para tornar aceitável a noção de velocidade instantânea na matemática. Naquele período, este conceito de velocidade instantânea não estava relacionado a nenhuma definição precisa de taxa de variação instantânea, mas estava ligado á idéia de *latitude das formas*, que era o estudo da variabilidade das qualidades.

A palavra *forma* se referia neste contexto a qualquer qualidade que admitisse variação e que envolvesse a intuitiva idéia de intensidade, isto é, noções como velocidade, aceleração, densidade, temperatura etc. Em Aristóteles este era um conceito unicamente qualitativo. A estudo da latitude das formas seria a observação do ritmo ao qual uma forma adquiria ou perdia uma determinada qualidade. Os filósofos escolásticos já vinham a um bom tempo discutindo a possibilidade de quantificar esta variação das formas, resultando no primeiro esforço de fazer quantitativa a idéia de variabilidade.

Faltava a esses pensadores, no entanto, uma linguagem mais apropriada para expressar as conclusões tiradas desta teoria. Alguns pensadores se dedicaram com afinco ao estudo das latitudes das formas chegando a resultados muito importantes para o desenvolvimento do cálculo. Calculator, por exemplo, propôs que soluções a problemas de latitudes das formas, poderiam ser expressos em termos de somas infinitas que tendiam a uma quantidade. No entanto, esses pensadores encontravam dificuldades em apresentar suas conclusões em argumentos verbais típicos da filosofia.

Esse problema começou a ser contornado de forma muito perspicaz pelo filósofo Nicole Oresme (1323-1382). Para expressar suas considerações sobre a latitude das formas, Oresme teve uma idéia que foi extremamente importante no desenvolvimento do cálculo. Utilizando uma representação gráfica, no estudo da velocidade, por exemplo, ele marcou pontos ao longo de uma reta horizontal representando instantes de tempo, e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta horizontal um segmento de reta, cujo comprimento representava a velocidade em cada instante. Oresme percebeu que unindo as extremidades dos segmentos de reta, se obtinha uma reta. E mais ainda: se o movimento analisado (uniformemente acelerado) partisse do repouso, formaríamos na representação gráfica um triângulo retângulo, cuja área seria igual à distância percorrida. Este método de Oresme inaugurou, mesmo que através de um diagrama geométrico, o que chamamos hoje de representação gráfica de uma função, que, no caso específico, seria um gráfico velocidade x tempo representando o movimento de um corpo. O sucesso do método de representação gráfica de Oresme, que se assemelha muito à idéia básica do cálculo, fez com este pensador ficasse conhecido e fosse bem divulgado até a época de Galileu. O que faltava a Oresme para obter uma teoria estruturada que desse conta de uma análise quantitativa precisa da latitude das formas, era uma teoria que permitisse manipular seu gráfico de forma precisa e que se utilizasse um simbolismo mais conciso, como o da álgebra, para expressar suas conclusões.

Neste sentido, é importante ressaltar o grande interesse que a álgebra hindu-arábica provocou nos matemáticos italianos durante o Renascimento. Os matemáticos hindus e árabes não distinguiam claramente entre números racionais e irracionais. Por este motivo, ao adotarem a álgebra hindu-arábica, os matemáticos passaram a empregar, mesmo que com algumas ressalvas, as razões irracionais, além das quantidades negativas, presentes na matemática hindu. Estas generalizações do conceito de números, que seriam inconcebíveis para matemática grega, foram muito importantes para o aprimoramento dos procedimentos algébricos ligados ao cálculo.

Desde a Grécia antiga, letras já eram usadas como símbolos para representar quantidades na matemática. No século XIII, este procedimento foi utilizado constantemente por Jordanus Nemorarius (c. 1225) Porém, a inexistência de uma regra que estabelecesse um modo de distinguir as grandezas conhecidas, das que deveriam ser encontradas, impedia uma generalização de teorias por meio do simbolismo algébrico. Uma solução a este problema foi proposta pelo matemático francês François Viète (1540-1603) que sugeriu o uso de consoantes para representar quantidades conhecidas e vogais para aquelas desconhecidas. Com essa idéia simples, Viète deu o primeiro passo para a construção de uma álgebra que possibilitasse uma generalização e manipulação consistente de resultados matemáticos. O aprimoramento deste simbolismo e dos algoritmos algébricos, ocorrido após Viète, foi essencial para o desenvolvimento do cálculo, pois além de possibilitar o progresso da geometria analítica, permitiu que conceitos como variabilidade e funcionalidade entrassem no pensamento algébrico.

Todas as inovações teóricas surgidas na Idade média contribuíram para a mudança de rumo ocorrida na matemática após o período renascentista. Aliado a isto, a redescoberta de várias obras do período clássico no século XVI, provocou uma mudança de perspectiva na pesquisa em matemática, que acabou promovendo um rompimento, ocorrido de forma gradual, com alguns conceitos do pensamento aristotélico que serviram de base à matemática durante o período medieval. Destes autores ressurgidos da Antigüidade, talvez o que tenha contribuído mais a esta mudança de rumo na matemática na modernidade, tenha sido Arquimedes. Um dos pontos das teorias arquimedianas que mais chamou a atenção dos matemáticos do século XVI não foi propriamente suas pesquisas em matemática, mas no tratamento matemático que este pensador deu a problemas físicos, sobretudo em suas pesquisas no campo da hidrostática.

Neste contexto de questionamentos ao modelo matemático herdado do período medieval, talvez o primeiro a promover significantes modificações para o desenvolvimento das idéias básicas do cálculo, tenha sido o engenheiro flamengo Simon Stevin (1548-1620). Pelo caráter prático de suas pesquisas, Stevin não se prendeu muito em questões filosóficas, ou à exigências de rigor demonstrativo na matemática. Para calcular a área de alguma figura curva, Stevin utilizava o método de Arquimedes de inscrever uma figura poligonal e ir, sucessivamente, aumentando o número de lados deste polígono, até fazer, pelo axioma de exaustão, a área da figura inscrita igual à da curva. A diferença era que Arquimedes só considerava válido seu resultado se conseguisse prova-lo pelo formal *reductio ad absurdum*, através do duplo absurdo conseguido comparando-se a área da curva com uma figura inscrita e outra circunscrita a ela. Stevin dispensava este procedimento, omitindo em suas demonstrações uma das figuras aproximadas usadas por Arquimedes. Estes procedimentos de Stevin, em substituição ao método de exaustão, permitiam resultados mais rápidos na matemática, sendo o primeiro passo para construção do conceito de limite, ocorrida mais tarde. (BOYER, 1959: 104)

Encorajado por Stevin, Luca Valério (1552-1618) foi outro matemático que também tentou modificar a estrutura da demonstração de Arquimedes. Valério tentou generalizar o método arquimediano propondo a criação de princípios que permitissem dispensar a dupla redução ao absurdo na demonstração de resultados. No entanto, os trabalhos de Valério, e mesmo os de Stevin, falharam em conseguir alterar com sucesso o procedimento de Arquimedes. Aos poucos, embora se mantivesse a validade do método de exaustão, a redução nas demonstrações foi sendo substituída por uma passagem direta ao que hoje chamamos de limite.

Nesta mesma época, dois importantes pensadores que abandonaram o método demonstrativo utilizado por Arquimedes, foram Galileu Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630). Para seus cálculos matemáticos, Galileu não via problemas em utilizar a noção de quantidades infinitamente pequenas para fazer passagens diretas ao limite de subdivisões infinitas, sem seguir os procedimentos arquimedianos. As pesquisas em dinâmica feitas por Galileu foram extremamente importantes para o desenvolvimento do cálculo. Galileu, também se baseando na suposição de que a área sob a curva velocidade-tempo representa a distância percorrida, completou e deu precisão matemática às idéias lançadas anteriormente por Oresme, afirmando que a distância percorrida varia com o quadrado do tempo gasto no percurso. Apesar de implicitamente Galileu ter feitos considerações sobre infinitesimais em seus estudos sobre o movimento, o que faltou a este pensador para chegar às idéias básicas do cálculo, foi a criação de uma base teórica que lhe permitisse fazer uma ligação objetiva entre estas considerações matemáticas de quantidades infinitamente pequenas e os movimentos dos corpos.

Já os estudos de Kepler no campo da astronomia o levaram a uma teoria que relacionava órbitas de planetas com áreas de uma seção cônica. Por este motivo, os procedimentos arquimedianos se tornavam um entrave às teorias de Kepler, já que o rigor lógico muitas vezes dificultava, ou pelo menos tornava mais demorado, a validação de seus resultados. Para contornar esta situação, Kepler usou a idéia dos indivisíveis. Considerando as áreas de figuras planas como constituídas de inúmeras retas, e os volumes de figuras no espaço constituídas de inúmeros planos, sem utilizar a passagem direta ao "limite" proposta por Stevin e Valério, Kepler conseguiu chegar a resultados importantes para suas teorias, os quais se acreditava que nem Arquimedes havia conseguido, como por exemplo, o cálculo da área de uma elipse.

Estas idéias matemáticas de Kepler foram sistematicamente desenvolvidas no livro *Geometria indivisibilibus continuorum*, de autoria do aluno de Galileu, Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Partindo da idéia da existência de elementos indivisíveis na matemática, Cavalieri criou um importante método para encontrar áreas e volumes de figuras geométricas, que seria muito semelhante às idéias básicas do cálculo integral. Seu procedimento está baseado na seguinte proposição, que ficou conhecida como *teorema de*

Cavalieri: “If two solids have equal altitudes, and if sections made by planes parallel to the bases and at equal distances from them are always in a given ratio, then the volumes of the solids are also in this ratio.” (BOYER, 1959: 118)

É interessante notar que mesmo sem conhecer o *método de equilíbrio* de Arquimedes, que só reapareceu no século XX, Cavalieri apresentou considerações muito semelhantes à do matemático grego para o cálculo de áreas e volumes. O que diferenciava os procedimentos de Cavalieri, dos de Arquimedes, era uma menor preocupação com as deficiências lógicas do método dos indivisíveis. Cavalieri se satisfazia com os resultados obtidos pelo seu procedimento, dispensando até mesmo demonstrações pela simplificação do método de Arquimedes feita por Valério. Esta falta de preocupação com o rigor, fez com que os matemáticos de sua época tivessem muita cautela em aceitar seus procedimentos como válidos nas demonstrações. Cavalieri iniciou a elaboração de formas de se trabalhar com infinitesimais, mas esta teoria só foi concluída através da regra algébrica geral formulada por Newton e Leibniz, que se tornou a base do cálculo integral. Porém, Cavalieri não parece ter tomado consciência da contribuição de suas idéias à formulação do cálculo. Para ele, seu processo seria apenas uma forma de se evitar o método de exaustão na demonstração de fórmulas.

O século XVII foi um período de grande produção na matemática européia, impulsionada por um intenso intercâmbio intelectual entre os pensadores. O método dos indivisíveis havia se espalhado e foi usado por matemáticos de diversas nacionalidades. Muitos destes haviam trabalhado em problemas similares aos que levaram à formulação do cálculo. Esta interação entre os matemáticos colaborou para que várias novas idéias e teorias importantes surgissem em diferentes pontos da Europa, muitas vezes ao mesmo tempo. Somado a isso, o fato de alguns pensadores não publicarem seus trabalhos, ou o fazerem muito tardiamente, torna difícil o estabelecimento de prioridades nas descobertas feitas neste período.

Por este motivo, este século também é marcado por várias disputas e controvérsias, com mútuas acusações de plágio. Boyer descreve estes processos, tentando, em alguns momentos, levantar hipóteses que indiquem quem tinha razão na contenda. Como vimos no capítulo anterior, as controvérsias científicas são eventos muito ricos ao historiador para perceber características da ciência, que seriam evidenciadas nestes momentos. Neste trabalho, escolhemos o surgimento do cálculo como nosso foco, justamente pelas inúmeras controvérsias que fizeram parte de seu desenvolvimento. No entanto, não nos parece que Boyer extrai destas controvérsias muitas reflexões a respeito de aspectos da ciência, fora do seu desenvolvimento teórico. Por este motivo, continuaremos a apresentar os principais pontos da história do cálculo segundo Boyer e no final do capítulo analisaremos melhor esta questão do tratamento das controvérsias no texto deste autor.

Um outro ponto a ser considerado, e que é várias vezes lembrado por Boyer ao longo de sua reconstrução da produção matemática deste período em que surge o cálculo, é que mesmo obtendo resultados similares aos do cálculo, a base conceitual usada pela maioria dos pensadores do século XVII que precederam Newton e Leibniz, na maioria das vezes, se diferencie das idéias que fundamentaram o cálculo infinitesimal. Boyer adverte para o fato de que muitas vezes a "tradução" dos resultados obtidos de forma diferente da do cálculo para a linguagem algébrica atual, não é muito precisa, já que a notação moderna traz implícita uma grande quantidade de conceitos não considerados em épocas anteriores, como velocidade instantânea por exemplo. (BOYER, 1959: 128) Por isso, ao tomarmos uma teoria desenvolvida antes do cálculo, é importante analisarmos a base conceitual na qual o matemático estava fundamentando seu pensamento.

O período que separa a criação do método dos indivisíveis da sistematização do cálculo ainda viu o surgimento e aprimoramento de muitas idéias importantes para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Além de Cavalieri, outro discípulo de Galileu que deu contribuições importantes ao desenvolvimento do cálculo foi Evangelista Torricelli (1608-1647). Utilizando de forma mais efetiva o método dos indivisíveis, Torricelli testou a eficácia desta idéia, confrontando-a com os procedimentos de Arquimedes. Um interessante exercício elaborado por este pensador, foi apresentado em seu livro *De dimensione parabolae* onde são oferecidas vinte e uma demonstrações diferentes da quadratura da parábola, usando para isso o método de exaustão e dos indivisíveis, mais ou menos em igual número. Além de explorar os limites do método dos indivisíveis, este trabalho mostra como os matemáticos desta época se empenharam na tentativa de modificar os procedimentos de demonstração de Arquimedes, que, por seu rigor lógico, barrava o desenvolvimento de algumas teorias. No entanto, é importante ressaltar que Torricelli não aceitava o uso direto do método dos indivisíveis, sempre verificando a validade de suas teorias pelo método de exaustão, ou pela versão simplificada criada por Valério.

Através destes procedimentos ligados à matemática clássica, Torricelli chegou a vários resultados semelhantes aos obtidos posteriormente pelo cálculo integral. Encontrou, por exemplo, o volume de um sólido determinado pela revolução de uma curva sobre sua assíntota[4], embora intuitivamente uma figura como esta ser concebida como tendo um volume de dimensão infinita. Na verdade, apesar desta demonstração de Torricelli ter ficado mais conhecida, Fermat e Roberval, e mesmo Oresme, já haviam chegado a ela.

[4] Uma reta da qual certas curvas se aproximam indefinidamente, mas sem nunca tocá-la.

Apesar de tentar guiar seu raciocínio matemático pelas concepções geométricas da matemática antiga, o pensamento de Torricelli sofreu influências de algumas idéias utilizadas pelos matemáticos de seu tempo. Uma de suas principais contribuições ao cálculo diferencial, foram seus estudos para determinação de tangentes à curvas. Para definir uma tangente, Torricelli utilizava a antiga definição estática de uma reta que toca a curva em apenas um ponto. No entanto, assim como Arquimedes, Galileu, Descartes e alguns contemporâneos seus, Torricelli teve que utilizar um método cinemático que possibilitava uma análise da composição de movimentos dos pontos de uma curva. Por exemplo, um ponto sobre uma parábola poderia ser interpretado como se se afastasse com uma velocidade idêntica do foco e da diretriz desta curva.[5] A tangente a essa curva seria a bissetriz do ângulo entre duas retas que tivessem a mesma direção destes dois movimentos do ponto analisado. Esta idéia, também reivindicada por Roberval, foi muito importante ao desenvolvimento do cálculo diferencial, pois ao utilizar essa noção dinâmica de tangentes, influenciou Newton na elaboração do seu cálculo fluxonal, que também se baseava na idéia do estudo do movimento de um ponto a partir da decomposição da velocidade em um dado momento em componentes perpendiculares entre si.

Esta idéia de decompor as velocidades de um dado movimento é utilizada pela filosofia aristotélica, na qual é denominada princípio do paralelogramo das velocidades virtuais. O objetivo do seu uso na filosofia antiga seria o de contornar o problema da velocidade instantânea, muito ligada à considerações infinitesimais. Na modernidade vários pensadores, como Stevin e Galileu, utilizaram esta idéia em seus estudos sobre o movimento. Ao incorporar estas idéias ao método de tangentes, Torricelli trouxe a noção de

[5] Uma parábola é uma curva definida como o conjunto dos pontos no plano eqüidistantes de uma reta fixa (diretriz) e de um ponto fixo (foco) não pertencente à reta diretriz.

velocidade instantânea à matemática. Porém, a base geométrica de seu processo não permitia trabalhar as tangentes em termos de limite, como feito no cálculo. Além disso, Torricelli parece não ter considerado suas idéias como um novo tipo de teoria matemática, o que talvez explique porque ele não tentou estabelecer sobre seus métodos um procedimento que seguisse uma regra geral aplicável a todas as curvas. Sua preocupação maior era em analisar a noção de indivisíveis e o método de Cavalieri, mas sempre sob um ponto de vista geométrico.

Ao mesmo tempo em que Torricelli fazia seus estudos, em diversos outros pontos da Europa essa discussão sobre infinitésimos também gerava bons frutos. Pode-se destacar aqui três matemáticos franceses que se notabilizaram por seus estudos sobre o tema: Roberval, Pascal e Fermat. Enquanto, Cavalieri e Torricelli procederam em bases puramente geométricas, envolvidos no método de exaustão e no método dos indivisíveis, estes matemáticos franceses combinaram seus interesses na geometria de Arquimedes, com um interesse pela a teoria dos números. Segundo Boyer, "the almost simultaneous appearance of these procedures indicates how widespread was the tendency toward infinitesimal considerations during the early seventeenth century." (BOYER, 1959: 141)

Apesar de não ter formulado explicitamente o conceito de limite, Giles Persone de Roberval (1602-1675) deu passos importantes no desenvolvimento do cálculo, utilizando procedimentos semelhantes aos encontrados no cálculo atual. Ele deu a seus trabalhos no campo dos indivisíveis uma interpretação aritmética e obteve vários resultados através de somas de séries infinitas. Este método contrasta fortemente com as idéias de Cavalieri que caracterizava os indivisíveis geometricamente. Como conseqüência, Roberval foi levado a fazer uma associação entre números e magnitudes geométricas, " wich resembles strongly that of the pythagoreans (...)". (BOYER, 1959:143) Roberval considerava um segmento de reta como formado por um infinito número de pequenas retas, representadas por pontos, os quais podem ser feitos corresponder com inteiros positivos. Estas idéias se assemelham às considerações aritméticas dadas por Stevin meio século antes, e de modo similar por Wallis alguns anos depois de Roberval.

O que podemos perceber, é que todos estes novos procedimentos parecem representar esforços na criação da idéia de limite. No entanto, como dito, Roberval obscurece um pouco esta noção em seus trabalhos ao lidar com suas concepções de indivisíveis. Ao invés de levar suas conclusões ao limite da seqüência aritmética envolvida, ele ainda recorria, mesmo que implicitamente, como fez a maioria de seus contemporâneos, à intuição geométrica.

Estas idéias tiveram forte influência nos trabalhos de Blaise Pascal (1623-1662), cujo pai foi amigo de Roberval. Na matemática, os dois principais interesses de Pascal eram a geometria e a teoria dos números. Assim como já haviam feito Cavalieri, Torricelli e Roberval, Blaise Pascal também enunciou o teorema do que hoje chamaríamos de integral de uma função potência. A diferença é que Pascal demonstrou seu resultado, não através da geometria clássica, como seus antecessores, mas através de um ponto de vista aritmético, utilizando para isto, suas análises de números representados de forma triangular. Pascal desenvolveu um método aritmético geral para determinar qualquer inteiro a partir de uma progressão infinita de números e observou que este resultado poderia ser aplicado para determinação de áreas curvilíneas.

O que chama a atenção nestes procedimentos de Pascal, é a omissão de termos de dimensão muito pequena em sua análise da seqüência numérica. Essa possibilidade de se desconsiderar estes termos, seria fruto da associação entre geometria e aritmética, que justificaria a omissão de certos elementos de grau diminuto. A justificação aritmética para supressão destes termos, como se vê nos trabalhos de Roberval e Pascal, para Boyer "has been characterized as the basic principle of the differential calculus." (BOYER, 1959: 150) Este tipo de procedimento também é observado em Leibniz e Newton em seus trabalhos utilizando o cálculo infinitesimal.

Em resposta a seus contemporâneos que o criticaram pela omissão dos termos infinitamente pequenos, e argumentavam que isto constituía uma violação do senso comum, Pascal deu uma explicação religiosa. O infinitamente grande e o infinitamente pequeno, diz Pascal, seriam mistérios – algo o qual a natureza tem proposto ao homem, não para entender, mas para admirar.

É necessário ressaltar, que os trabalhos de Pascal não consideram os pontos de vista algébrico e analítico de seus procedimentos, o que pode ter sido responsável, não apenas pela sua inabilidade em definir o conceito central e unificador do cálculo integral (que é do limite de uma soma), mas também pela sua falha em reconhecer a natureza inversa do problema das quadraturas e tangentes. Pascal esteve muito próximo de descobrir o significado da determinação de tangentes e quadraturas e, se assim tivesse feito, ele teria antecipado um ponto crucial para o desenvolvimento do cálculo.

Pierre de Fermat (1601-1665) foi outro matemático francês que muito contribuiu para o desenvolvimento do cálculo. Conhecedor dos métodos algébricos de Viète, que permitiam, dentre outras coisas, solucionar problemas geométricos reduzindo-os à resolução de equações algébricas, Fermat desenvolveu uma geometria analítica, na mesma época em que Descartes preparava seu famoso *La géométrie*. O trabalho de Fermat trouxe contribuições mais efetivas do que a solução algébrica de problemas propostas por Viète, ou a representação gráfica de variáveis de Oresme, pois associava a cada curva estudada, uma equação que descrevia todas as propriedades da curva. E esta é a idéia básica da geometria analítica.

O que vimos até agora, é que quase todas as teorias apresentadas relacionavam suas considerações sobre quantidades, à entes geométricos. Magnitudes infinitamente pequenas foram relacionadas a retas, ou superfícies, infinitesimais, mas não a números infinitesimais. Apesar de alguns matemáticos terem feito essa relação, os infinitesimais numéricos se popularizaram pelos trabalhos de Fermat, que foi quem aplicou esta idéia de um modo muito semelhante ao utilizado no cálculo moderno.

Ao considerar a equação das curvas estudas, Fermat desenvolveu seu *método para achar máximos e mínimos*, que consistia encontrar estes valores máximos e mínimos através da análise de um ponto da curva em relação a um ponto muito próximo. A distância entre estes dois pontos, que ele denominou de E, era feita tão pequena, que no final de seus cálculo ele a considerava igual a zero, obtendo as coordenadas das abscissas dos pontos de máximo e mínimo da equação. Esta consideração é muito semelhante ao processo atual de determinação da reta tangente a uma curva, através do conceito de limite, no qual o símbolo E é substituído por Δx. Por estas idéias, alguns pensadores, como Laplace por exemplo, consideravam Fermat o descobridor do cálculo diferencial. No entanto, como lembra Boyer, a "modern analysis makes use of the concept of the limit, as the change Δx *approaches* zero. Fermat, however, seems to have interpreted the operation as one in which E vanishes in the sense of actually *being* zero." (BOYER, 1959: 156) Portanto, apesar dos argumentos de Fermat serem freqüentemente considerados em termos de limite, talvez pelo fato de não trabalhar com a idéia de função, não tenha considerado seu E como uma variável aproximando de zero.

Quanto ao cálculo integral, percebe-se em suas soluções apresentadas a problemas de quadraturas, aspectos essenciais da integral definida. Fermat, como alguns antecessores seus, utilizava a idéia de subdividir a área sob uma curva em pequenos elementos de área retangular. A diferença dos procedimentos de Fermat estava, além da descrição da curva de forma analítica através de uma equação, na tentativa de expressar a área sob a curva pela soma destes retângulos de área infinitesimais, através do que poderíamos chamar de limite desta soma. Poderia se dizer que Fermat foi muito próximo da noção de integral, só não reconhecendo a operação com significado que tem hoje. Mas como ressalta Boyer, o "procedure was for him, as it has been for all his predecessors simply that of finding a quadrature – of answering a specific geometrical question." (BOYER, 1959: 162)

Fermat também esteve muito próximo do teorema fundamental do cálculo. Em certo sentido, ele percebeu a relação inversa que ligava a determinação das tangentes e a área sob as curvas, mas não conseguiu generalizar seus resultados obtidos neste sentido. Talvez sua tentativa de dar respostas a problemas geométricos, não o tenha permitido ver toda a dinâmica dos conceitos que envolvem o cálculo infinitesimal.

Os trabalhos de Fermat impulsionaram o desenvolvimento de diversos métodos infinitesimais surgidos antes do aparecimento do cálculo. Mas o matemático que de fato provocou uma mudança de visão em relação à matemática foi René Descartes (1596-1650), não apenas pelas teorias que criou, mas também por tê-las feito conhecidas de seus contemporâneos. Apesar de todas as inovações que trouxe à matemática, Fermat não publicava seus trabalhos. Este fato acabou fazendo com que suas invenções não fossem tão conhecidas, o que, se tivesse ocorrido, talvez acelerasse o desenvolvimento do cálculo. Seus procedimentos, apesar de terem sidos bem aceitos por alguns matemáticos, sofreram também diversas críticas, que fizeram Fermat se envolver em algumas contendas em defesas de suas idéias e na prioridade da invenção de diversas teorias. E uma das principais rixas foi com Descartes.

Os trabalhos de Descartes na área de matemática eram apenas uma parte pequena de suas teorias filosóficas. O livro *La géométrie* foi apresentado como um dos três apêndices de seu *Discours de la méthode*. Por isso, ele acabou não participando do desenvolvimento dos métodos para se trabalhar com infinitesimais, que acabaram originando o cálculo, um pouco mais tarde.

Mas pela projeção que suas teorias, não só matemáticas, tiveram em seu tempo, as idéias matemáticas de Descartes se espalharam e foram muito influentes sobre os trabalhos de vários pensadores, em especial, de Newton. Sua geometria analítica era menos prática que outras propostas, como a de Fermat, por exemplo, já que não trabalhava com eixos coordenados perpendiculares, o que facilita enormemente os cálculos. Porém, a divulgação desta nova concepção geométrica através dos trabalhos de Descartes, trouxe a possibilidade de matematização do espaço, ambicionada desde Galileu, e deu aos matemáticos uma ferramenta essencial para o desenvolvimento de novas teorias, como o cálculo. Seus procedimentos acabaram se tornando uma apologia da álgebra no pensamento matemático, dando significado às operações algébricas por meio de interpretações geométricas.

Sua rixa com Fermat se deu em torno dos métodos de ambos, para determinação de tangentes à curvas. Esta disputa produziu bons frutos à matemática, já que os dois pensadores, para responder às críticas recebidas, se detiveram e aprimoram suas teorias. O método de Descartes é puramente algébrico, não envolvendo nenhum conceito de limite ou infinitesimal. E este é, para Boyer, o principal motivo para incompreensão mútua entre Descartes e Fermat. Como este último estava pensando em infinitesimais, não conseguiu perceber que seu método tinha relação com o método algébrico de Descartes. Já Descartes, apesar de estabelecer através de seus procedimentos algébricos uma noção próxima da idéia de limite, acreditava que tinha dispensado o conceito de quantidades infinitamente pequenas em seus cálculos. Porém, como lembra Boyer, se

> *Descartes in his geometry had thought in terms of continuous variables rather than of a correspondence between symbols which represented lines in a geometrical diagram, he might have been led to interpret his tangent method in terms of limits, and so have given a different direction to the anticipations fo the calculus.* (BOYER, 1959: 167)

O fato é que os dois métodos eram equivalentes, mas nem Descartes, nem Fermat, perceberam isto.

Na tentativa de estabelecer uma noção mais clara sobre a idéia de limite, vários pensadores deram contribuições importantes ao desenvolvimento do cálculo. Talvez o primeiro a tentar dar respostas e esta questão tenha sido Gregório de St. Vincent (1584-1667). Como vimos, na matemática grega os problemas que levaram à necessidade de se utilizar a idéia de limite foram contornados pelo método de exaustão. Porém, este procedimento levava a uma possibilidade de divisão infinita, o que sempre gerou controvérsias quanto a sua precisão, já que sempre é possível se conseguir uma aproximação maior através da diferença entre a figura inscrita e circunscrita a uma curva. Gregório de St. Vincent foi o primeiro a propor que uma série infinita poderia definir uma magnitude que seria o limite da série. Este tipo de consideração representava um esforço por parte de diversos pensadores em desvincular a aritmética de sua representação geométrica, herdada da matemática grega. Neste sentido, a mais importante contribuição foi dada por John Wallis (1616-1703) que, em seus trabalhos, procurou libertar a aritmética da geometria. Wallis foi quem mais se aproximou do conceito de limite antes de Newton. Apesar deste conceito ter sido usado implicitamente por outros, a visão aritmética de Wallis lhe permitiu construir uma teoria sobre o assunto, apresentada em seu livro *Arithmetica infinitorum*, publicado em 1655.

Estranhamente, a principal inspiração de Wallis são os métodos de Cavalieri, cujo trabalho é basicamente geométrico. Abstraindo seus conceitos da geometria dos indivisíveis, Wallis deu um tratamento mais rigoroso às quantidades infinitamente pequenas, do que nos trabalhos de Fermat. Wallis introduziu o símbolo ∞ para designar uma quantidade infinitamente grande, e substituiu o E de Fermat, por $\frac{1}{\infty}$, que seria o infinitamente pequeno, ou como ele denominava, *non-quanta*.

Suas considerações contribuíram para introduzir na matemática um novo conceito de infinito, diferente daquele herdado da filosofia aristotélica e medieval. A diferença entre o pensamento de Wallis e de seus antecessores, é que este matemático partiu de considerações aritméticas relacionadas a somas infinitas e séries que convergiam a um número, para depois aplicar suas teorias a problemas de quadraturas e cubaturas.

Uma outra inovação dos trabalhos de Wallis foi a extensão de suas teorias aritméticas sobre o que nós hoje denominamos números irracionais, rompendo com a idéia pitagórica de que magnitudes irracionais não são números. Todas estas características do pensamento de Wallis mostram uma "declaration of the independence of arithmetic from geometry, a freedom which was necessary for the latter elaboration of the limit concept". (BOYER, 1959: 173)

Depois de um século de inovações e indefinições, o cálculo pôde ser estabelecido sobre bases aritméticas, ao invés dos conceitos geométricos que dominavam a matemática. O trabalho de Wallis foi uma tentativa de efetuar tal aritmetização. Para isto, Wallis teve que se contrapor às idéias de James Gregory (1638-1675) que concebia a passagem ao limite como uma operação aritmética independente. O limite para ele era uma grandeza incomensurável. Enquanto Roberval e Wallis tinham sido levados à sua aritmetização através do método dos indivisíveis, Gregory preferiu empregar o método indireto dos antigos em suas teorias. Apesar de não fazer referências a Fermat, seu método de determinar tangentes de curvas é praticamente igual ao do matemático francês, apenas substituindo o E por o – uma mudança de notação depois adotada por Newton.

Este tipo de trabalho analítico e aritmético de Fermat, Wallis e Gregory, que representou a tendência a qual levou ao cálculo, encontrou quase imediata oposição, já que o espírito da época era geométrico. Tal aritmetização encontrou particular oposição por parte do filósofo Thomas Hobbes (1588-1679) e o matemático e teólogo Isaac Barrow (1630-1677). Hobbes criticava a utilização da álgebra na geometria e fez várias análises sobre a questão da velocidade, contrárias às teorias de Galileu. Barrow se opunha a aritmetização proposta por Wallis, e propunha uma volta a visão euclidiana para solucionar problemas envolvendo quadraturas e velocidades. Para ele números não tinham existência real, só fazendo sentido tais conceitos se estivessem ligados a quantidades geométricas. Embora não aceitasse a álgebra dos italianos, ele considerava as possibilidades oferecidas pela concepção do movimento de um ponto "desenhando" uma curva. A partir desta possibilidade, Barrow utilizou suas concepções geométricas, associadas à idéia dos indivisíveis de Cavalieri, e conseguiu estabelecer uma relação entre o cálculo de quadraturas e a determinação de tangentes, ou seja, esteve próximo do teorema fundamental do cálculo.

Todos estas novas teorias surgiram em um espaço de tempo relativamente curto. Para Boyer, este

> *almost simultaneous appearance of such rules and formulas indicates that shortly after the middle of the seventeenth century infinitesimal considerations were so widely employed and had developed to such a point that, given a suitable notation, a unifying analytic algorithm was almost bound to follow.* (BOYER, 1959: 186)

O que faltava para o estabelecimento do cálculo seria "someone to organize the views, methods, and discoveries involved in the infinitesimal analysis into a new subject characterized by a distinctive method of procedure." Os dois matemáticos que conseguiram sistematizar estas idéias desenvolvidas por seus antecessores e apresentar algoritmos que permitissem uma generalização destes conceitos foram Newton e Leibniz, a quem, como diz Boyer, "the traditional view (...) ascribes the invention of the calculus". (BOYER, 1959: 187)

Newton ingressou no Trinity College em 1661, onde conheceu, fora do seu currículo acadêmico, as obras de Kepler, Descartes e Wallis. Depois de 1663, Newton passou a assistir as aulas de Isaac Barrow, com quem se inteirou das discussões matemáticas de seu tempo, vindo a conhecer mais tarde as teorias de Galileu e Fermat. Suas primeiras descobertas importantes no campo da matemática, datam de 1665 e estão ligadas ao seu teorema binomial e ao estudos das séries numéricas. Assim como Gregory, na mesma época, Newton tinha criado um método para expressar funções em termos de séries infinitas.

Apesar dos coeficientes binomiais para potências inteiras já serem conhecidos há vários séculos, a falta de uma notação exponencial, que foi introduzida por Descartes, dificultava a transição das regras de sucessão para os coeficientes dos termos binomiais elevados a uma potência inteira para um potência fracionária. Wallis foi responsável por divulgar o uso dos expoentes fracionários, mas foi Newton, utilizando seu método de séries infinitas, quem criou um procedimento para desenvolvimento de termos binomiais elevados a qualquer potência. Sua descoberta foi publicada, com os devidos créditos, no livro *Álgebra* de Wallis, em 1685.

Newton teve a idéia para seu teorema binomial analisando o trabalho de Wallis para determinação da área sob curvas, sujas ordenadas são da forma $(1+x^2)^n$. Este fato foi importante, pois mostrou a Newton que era possível trabalhar com séries infinitas de forma semelhante à usada para expressões polinomiais finitas, ou seja, o que ele tinha descoberto, e que era muito mais significativo que seu teorema binomial, era que a análise de séries infinitas poderia ser feita pelas regras gerais da álgebra de quantidades finitas. As séries infinitas não deviam, portanto, serem consideradas como formas de aproximação de valores, mas como uma outra forma de descrever funções representadas por elas. Assim, diferentemente do que ocorreu na Antigüidade, quando os processos infinitos eram evitados, estes tipos de considerações passaram a fazer parte do corpo matemático.

Apesar destas novas concepções lançadas por Newton irem contra as noções geométricas de sua época, uma das figuras mais importantes em sua formação foi seu professor Isaac Barrow, que era um defensor da geometria clássica como base do pensamento matemático. Como mostrado anteriormente, Barrow conseguiu, a partir do modelo clássico de matemática e da geometria dos indivisíveis, resultados muito próximo aos obtidos posteriormente com o cálculo. Segundo Boyer, o que o impossibilitou de dar o próximo passo no desenvolvimento do cálculo, foi sua relutância em abrir mão dos conceitos geométricos herdados da Antigüidade. Em princípio, Newton também compartilhava de tal perspectiva diante da matemática. Porém, seu livre uso da álgebra e da utilização de uma variedade de algoritmos e notações, o fizeram desenvolver os conceitos do cálculo, a partir de alguns procedimentos idênticos aos de Barrow, diferentes apenas na notação e interpretação. Newton utilizava alguns conceitos físicos para descrever suas idéias matemáticas. As curvas eram analisadas, assim como fazia Barrow, como se fossem resultadas por um ponto que se movia. Porém, Newton ia além em suas analogias físicas. As quantidades infinitamente pequenas, eram para ele intervalos de tempo muito pequenos. Para encontrar a inclinação da reta tangente à curva em algum ponto, ou melhor, em alguma posição deste ponto imaginário que desenha a curva, Newton considerava o deslocamento deste ponto em um intervalo de tempo muito pequeno e determinava como ocorria a variação destas "posições" no intervalo. Ou seja, em um intervalo, considerando-se a curva em relação a um plano coordenado, um pequeno incremento em relação à posição analisada, poderia ser interpretado como uma pequena variação do ponto em relação ao eixo x e uma pequena variação em relação ao eixo y. Fazendo este incremento "desaparecer" ao fim dos cálculos, a razão dada pela taxa de variação instantânea de x e y seria a inclinação da reta tangente.

Algebricamente, o procedimento de Newton consistia em substituir as incógnitas da equação que as relacionava, pelas próprias incógnitas adicionadas de seus respectivos incrementos, obtendo-se assim uma relação implícita entre estas variáveis. Manipulando algebricamente, muitas vezes utilizando seu teorema binomial, conseguia-se, depois de excluir os termos que ainda tivessem relação com os incrementos, uma razão entre as taxas de variação de cada eixo, ou de cada incógnita, que seria justamente a inclinação da reta tangente à curva.

Como dito anteriormente, através de suas considerações sobre séries infinitas, Newton conseguiu encontrar diversas fórmulas algébricas que forneciam a área sob curvas dadas. A partir destas fórmulas, que estabeleciam uma relação explícita com a área da curva, Newton utilizou seus procedimentos de substituir as incógnitas das fórmulas, pelas incógnitas adicionadas de um pequeno incremento. Manipulando algebricamente a equação e desconsiderando no final os termos que ainda tivessem relacionados com estes incrementos, Newton percebeu que obtinha novamente a equação da curva, a qual ele tinha obtido uma fórmula para a área que ela delimitava. Generalizando este resultado, Newton estabeleceu pela primeira vez que o procedimento para o cálculo da área sob uma curva seria justamente o inverso do procedimento para se encontrar a inclinação da reta tangente a esta curva. Esta relação entre estes dois procedimentos é o que chamamos de Teorema Fundamental do Cálculo.

Apesar deste resultado ter sido conhecido por Barrow e Gregory, e talvez também por Torricelli e Fermat, foi Newton quem conseguiu mostrar a relação inversa do cálculo da área e da inclinação da reta através de sua análise de séries infinitas, e por isso foi considerado o inventor do cálculo.

Ao sistematizar suas descobertas, Newton introduziu o conceito de *fluentes*, que o fez chamar o que conhecemos por cálculo infinitesimal, de *método das fluxões*. Ao analisar a curva, ele considerou x e y como quantidades que fluem, ou fluentes, e suas respectivas taxas de variação ou incrementos, de fluxos.

Newton desenvolveu seu método de séries infinitas e o cálculo entre 1665 e 1666, e escreveu um manuscrito intitulado *De analysi* que circulou entre poucas pessoas, mas não publicou suas descobertas. A primeira exposição do cálculo impressa apareceu em 1687, no livro *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Além do cálculo, neste livro são apresentadas as idéias principais da física newtoniana e suas teorias sobre astronomia. Quanto à apresentação do cálculo, Newton acrescenta o que ele chamou de *método da primeira e última razões de quantidades*, que é uma tentativa de definir, a partir da representação por séries infinitas, o limite de uma função.

Neste livro, Newton também apresenta alguns algoritmos para diferenciação e integração. Denominando um acréscimo infinitamente pequeno e um termo da equação por "momento" de um *genitum*, e manipulando seus cálculos através de uma complexa notação, Newton introduziu um algoritmo geral para o cálculo aplicável a todas as funções, mas de difícil compreensão e manipulação. Neste sentido, o cálculo desenvolvido por Leibniz deu importantes contribuições para divulgação e estabelecimento desta nova teoria.

Hoje em dia é aceito que Newton desenvolveu seu cálculo dez anos antes de Leibniz, mas a descoberta de Leibniz foi feita de forma independente da de Newton. Além disso, Leibniz publicou primeiro sua teoria, em 1684.

Na primeira edição dos *Principia*, Newton reconheceu que Leibniz tinha desenvolvido um método semelhante ao seu, mas na edições posteriores de seu livro, após a acirrada disputa que foi estabelecida para se apurar qual dos dois matemáticos havia criado o cálculo, Newton retirou de seu livro qualquer referência a Leibniz.

Nascido em Leipzig, Leibniz estudou na universidade de sua cidade natal teologia, direito, filosofia e matemática. Obteve o doutorado em direito na Universidade de Altdorf em Nuremberg e em seguida entrou para o serviço diplomático. Em 1672, em uma visita à Paris, conheceu os tratados matemáticos de Pascal. No ano seguinte, seu trabalho diplomático o levou a Londres, onde adquiriu um exemplar das *Lectiones geometricae* de Isaac Barrow e tornou-se membro da Royal Society. É esta visita de Leibniz a Londres que serviu mais tarde a Newton como indício de que Leibniz tinha tido acesso à seu manuscrito *De analysi* antes do desenvolvimento de seu cálculo, o que provaria o plágio de suas idéias por parte do pensador alemão.

Em 1676, Leibniz voltou novamente a Londres, e foi nestes anos entre as duas visitas que seu cálculo tomou forma. Assim como Newton, o estudo das séries infinitas desempenhou um papel importante nos primeiros trabalhos de Leibniz. As obras de Pascal e suas análises infinitesimais, foram muito influentes no pensamento de Leibniz.

Ao ler um tratado de Pascal que analisava valores de senos de ângulos num quarto de círculo, e a utilização desta idéia por Barrow para encontrar tangentes a curvas, Leibniz percebeu que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abcissas, quando estas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma das ordenadas que seriam as bases de retângulos infinitamente finos que formava a área da curva.

Reduzindo o problema do cálculo da área sob uma curva à adição de uma seqüência de ordenadas eqüidistantes, sendo que, quanto menores forem feitas a distância entre cada ordenada, melhor será a aproximação da área, Leibniz conseguiu diversos resultados aplicando suas teorias sobre séries infinitas. A diferença entre estas ordenadas consecutivas na seqüência dariam uma aproximação do declive das tangentes à curva. Se a distância entre cada ordenada fosse feita infinitamente pequena, as aproximações se tornariam exatas.

A relação entre o cálculo de áreas através de adição de seqüências, que corresponderiam à quadratura de curvas, e a determinação de tangentes através diferenças entre os termos da seqüência, indicaram a Leibniz a natureza inversa das duas operações. A conclusão mais importante a que Leibniz chegou ao avaliar seus procedimentos foi a generalidade de suas idéias, já que tais procedimentos poderiam ser utilizados em qualquer tipo de funções, para encontrar a área sob a curva e as retas tangentes a ela.

Uma preocupação de Leibniz em todos seus trabalhos matemáticos, e que acabou gerando uma contribuição significativa ao cálculo, era quanto à importância de se desenvolver uma notação adequada para expressar as teorias matemáticas. As notações criadas por Leibniz para expressar suas idéias quanto ao cálculo, facilitaram muito a compreensão e divulgação desta teoria, e foram de tal forma bem escolhidas, que até hoje são utilizadas nos livros de cálculo.

Para designar as diferenças menores possíveis (diferenciais) em x e y ele usou os símbolos dx e dy. Para expressar a soma das ordenadas sob a curva, ele utilizava o símbolo $\int y\,dx$ sendo $\int$ uma letra s estendida indicando soma. O método para achar as tangentes ele chamou de *calculus differentialis* e os procedimentos para encontrar as quadraturas chamou de *calculus summatorius* ou *calculus integralis*, que são os nomes dados a tais procedimentos até hoje.

Porém, há que se lembrar que os métodos desenvolvidos por Newton e Leibniz, apesar de possibilitarem uma aplicação geral do cálculo, trouxeram à matemática algumas inconsistências, que foram contornadas alguns séculos depois, através de um aprimoramento dos conceitos de derivada e integral. Por este motivo, não seria correto afirmar que as idéias subjacentes ao cálculo moderno, também foram criadas por Newton e Leibniz, já que estas noções só foram elaboradas duzentos anos depois da criação do cálculo infinitesimal.

O que apresentamos até aqui é uma síntese da história do surgimento do cálculo a partir do livro de Boyer. Este livro ainda possui mais dois capítulo, onde é apresentado o desenvolvimento do cálculo até fins do século XIX, mas encerraremos aqui nossa exposição, já que desejamos focar nossa atenção na descrição do surgimento do cálculo. A partir das discussões historiográficas apresentadas nos capítulos anteriores, avaliemos algumas características desta história do cálculo de Boyer.

Considerando as correntes da historiografia da ciência apresentadas anteriormente, ao analisarmos esta história do surgimento do cálculo de Carl Boyer, uma característica que fica evidente é que se trata de uma história das idéias. Como vemos no livro *Writing the history of mathematics: its historical development*, organizado por Joseph W. Dauben e Christoph J. Scriba, "Boyer was primarily an internalist historian of mathematics. His focus was usually on mathematics rather than mathematicians. (...) his publications 'largely omitted' biographical details 'because often they have little bearing upon the growth of concepts'." (DAUBEN & SCRIBA, 2002: 381)

Devemos ter cuidado ao incluir um autor em uma ou outra corrente historiográfica. Em primeiro lugar, como dito no início do capítulo I, há de se diferenciar a história da ciência cujos trabalhos começaram a ganhar forma nas primeiras décadas do século XX, da história da ciência elaborada até fins do século XIX. Ambos tratam em seus estudos históricos do mesmo objeto, ou seja, as idéias científicas. Porém, a antiga historiografia da ciência muitas vezes costuma retratar o desenvolvimento de teorias, apenas como *insight* de um grande nome da ciência, que, dada sua genialidade, desenvolveria esta teoria em qualquer contexto histórico e cultural, se lhe fossem dadas a mesma bagagem teórica. Além disso, as contribuições de outros pensadores do passado que podem ter desenvolvido, mesmo que com outras motivações, idéias importantes que ajudaram o grande cientista descobridor, são desconsideradas.

Como vimos, a história da matemática de Boyer não se encaixa neste tipo de abordagem. O surgimento do cálculo, como mostrado por ele, apesar de ser focado apenas em grandes nomes da ciência, foi fruto de intensos esforços por parte dos matemáticos europeus do século XVII e a sistematização do cálculo feita por Newton e Leibniz, esteve próxima de ter sido efetuada por diversos outros pensadores. Na conclusão de seu livro, Boyer faz uma crítica à abordagens históricas que não levam em consideração estes aspectos e ressalta como a história do cálculo é um exemplo de acontecimento que mostra a necessidade de dar uma abordagem mais ampla á história da ciência.

> *There is a strong temptation on the part of professional mathematicians and scientists to seek always to ascribe great discoveries and inventions to single individuals. Such ascription serves a didactic end in centering attention upon certain fundamental aspects of the subjects, much as the history of events is conveniently divided into epochs for exposition. There is in such attributions and divisions, however, the serious danger that too great a significance will be attached to them. Rarely – perhaps never – is a single mathematician or scientist entitled to receive the full credit for an 'innovation,' nor does any one age deserve to be called the 'renaissance'of an aspect of culture. Back of any discovery or invention there is invariably to be found an evolutionary development of ideas making its geniture possible. The history of the calculus furnishes a remarkably apt illustration of this fact.* (BOYER, 1959: 299)

Além disso, o que o texto de Boyer mostra é que, diferentemente de Koyré, sua concepção quanto ao surgimento da ciência moderna, é claramente continuísta, ou seja, a formulação do pensamento científico no período pós-renascentista europeu, foi fruto da continuidade de idéias vindas do passado, não só da Antigüidade clássica, mas também de idéias que foram amadurecidas ao longo de vários séculos durante a Idade Média.

Esta característica do trabalho de Boyer também é ressalta por Dauben e Scriba, ao mostrarem como

> *in evaluating the importance of history of mathematics for individual mathematicians and their work, Boyer emphasized (...) the value of knowing the past: 'Perhaps nowhere does one find a better example of the value of historical knowledge for mathematicians than in the case of Fermat, for it is safe to say that, had he not been intimately acquainted with the geometry of Apollonius and Viète, he would not have invented analytic geometry.* (DAUBEN & SCRIBA, 2002: 381)

Como dito, em sua história do cálculo, Boyer credita aos pensadores medievais muitos avanços em relação à filosofia grega, tendo libertado o pensamento de algumas teorias que dificultavam discussões sobre temas importantes ao cálculo. Podemos ver um exemplo disso, quanto a questão de considerações sobre o infinito.

> *In discussions of indivisibles, the question of infinite division and the nature of the infinite arose, of necessity. In fact, the medieval philosophers discussed the question more from the point of view of infinite divisibility and infinite aggregates than from that of infinitely great magnitudes. Aristotle, it will be recalled, had distinguished two kinds of infinity – the potential and the actual. (...) The Aristotelian distinction, (...) was continued by the Scholastic philosophers, although with modifications resulting, perhaps, from the fact that Christianity recognized an infinite God.* (BOYER, 1959: 68)

Este trecho também mostra como é imprecisa a divisão entre abordagens internalistas e externalistas. Assim como observamos em diversos pontos da obra de Koyré, nesta passagem acima, Boyer está mostrando a influência de uma reorientação teológica, ou melhor, de um aspecto cultural da Europa medieval, na elaboração de conceitos matemáticos. Em outra parte, quando mostra as teorias do engenheiro Stevin, já na modernidade, relaciona seu pensamento e o desenvolvimento de suas teorias à necessidade de aplicação da matemática na solução de problemas práticos. Sobre o desenvolvimento da álgebra na Itália, ressalta a importância da localização geográfica e política do Império Bizantino para o intercâmbio do conhecimento entre árabes e europeus. Ou seja, não nos parece adequado qualificar o trabalho de Boyer, e mesmo o de Koyré, apenas como internalista. É claro que, como os aspectos culturais que moldam a visão de mundo dos pensadores, influenciam e motivam a criação e formatação de teorias, não são apresentadas, nem consideradas diretamente no livro, poderíamos talvez usar o termo "história das idéias". Como afirmam Dauben e Scriba, "Boyer regarded his work as of potencial use to students and scholars alike, but above all, he regarded it as a contribution to the history of thought." (DAUBEN & SCRIBA, 2002: 278)

Um dos argumentos de Joan Richads para explicar a preferência dos matemáticos pela história interna, além da postura fundacionista diante do conhecimento, seria o fato dos matemáticos “não perceberem diferenças entre a matemática atual e a matemática do passado, no que diz respeito à método, objetivos e fatores que motivam seu desenvolvimento.” Porém, Boyer não parece se encaixar de forma tão positiva nesta idéia. Em uma passagem de seu livro, quando explica alguns resultados conseguidos por Torricelli, podemos ver que Boyer tem consciência desta questão levantada por Richards.

> *The demonstration offered by Torricelli is in manner of Archimedes – purely geometrical and employing the method of exhaustion. (...) This result is equivalent to the analytic statement that if the curve is* $x^m y^n = k$*, then the ratio of the areas* EDCF *and* DCBG *is* $\frac{n}{m}$*. The determination of this ratio is in a general sense equivalent to the evaluation of what would now be written as* $\int_a^b x^{-\frac{m}{n}} dx$*. In such a representation of the problem in terms of modern symbolism, however, there is a strong temptation to read into the author's work the concepts which are called to mind by the newer notation. One must not attribute to Torricelli any such algebraic notion as that implied by the modern integral sign. (...) The danger in interpreting Torricelli's work in terms of modern notations and ideas is apparent in an evaluation of his work on tangents. (...) Torricelli's proof is based, not on the modern idea of tangent as the limit of a variable secant, but upon the ancient static definition: a line touching the curve at only one point.* (BOYER, 1959: 128-129)

No entanto, apesar de parecer não cair neste equívoco de não perceber as diferenças entre a matemática do passado e do presente, como alerta Richards, ao lermos o texto de Boyer não podemos deixar de perceber uma visão presenteísta, ou seja, uma concepção de que as teorias do passado devem necessariamente desencadear na forma atual da matemática. Podemos notar isto quando fala, por exemplo, como Calculator considerou, discordando do aristotelismo, o infinito como uma agregação de termos, ao invés de uma magnitude, encaminhando seu pensamento em direção a “a change of view which led to the final formulation of the calculus in the nineteenth century.” Ou quando apresenta como

Stevin modificou o método de exaustão: “The procedures substituted by Stevin for the method of exhaustion constituted a marked step toward the limit concept.” Já Torricelli, quando utiliza a idéia de mudanças instantâneas, empregando “the limit concept, represents a marked advance over the stultifying definition of the tangent given by the ancient geometers. (BOYER, 1959: 70, 104 e 132)

Um outro ponto que notamos, é que sempre quando é apresentada alguma teoria que não está embasada nas concepções atuais do cálculo, a impressão que se tem lendo o texto de Boyer é que esta teoria, ou as teorias de um pensador, estavam fadadas ao insucesso, a serem suplantadas. Como dissemos, uma das teses de Boyer é que seria imprescindível à elaboração e conclusão do cálculo, a adoção de uma perspectiva aritmética da geometria. Assim, pensadores que não tivessem esta perspectiva poderiam ir próximo, mas não ultrapassariam uma barreira que impediria o desenvolvimento do cálculo. Se o matemático encaminhasse suas teorias na direção que Boyer julga mais correta, mesmo que não chegasse ao fim, ele estaria antecipando resultados que seriam mais tarde abarcados pelo cálculo. Para ele os gregos, por exemplo, nunca desenvolveriam o cálculo com suas concepções matemáticas.

Além disto, notamos em diversos pontos do texto um julgamento das teorias e perspectivas do passado, a partir das concepções atuais matemática e do conhecimento de um modo geral. Podemos perceber isto quando são discutidos, por exemplo, os paradoxos de Zenão. Como vimos, apesar de mostrar como estas idéias tinham implicações mais profundas no pensamento grego do que teriam no pensamento atual, Boyer afirma que os gregos não tiveram habilidade suficiente para dar uma resposta satisfatória aos paradoxos, como nós *facilmente* conseguimos através dos conceitos do cálculo diferencial.

Levando em consideração as teorias dos socioconstrutivistas em relação à história da ciência, não podemos deixar de comentar mais dois pontos da abordagem de Boyer. A primeira são as conclusões que este autor tira das controvérsias que circundam o surgimento do cálculo. A segunda, seria a questão da visão eurocêntrica da história da matemática.

Como dito no Capítulo II, as controvérsias científicas seriam um dos principais objetos de estudo dos historiadores socioconstrutivistas, já que para eles, nestes períodos ficariam mais latentes os jogos de poder que permeiam a prática científica. O surgimento do cálculo está entre as mais acirradas disputas da história do meio científico, envolvendo comunidades de cientistas de diversos países e deixando seqüelas no trabalho intelectual na Inglaterra que foram sentidas por mais um século depois do fim da querela. Porém, este, definitivamente, não é um aspecto da história do cálculo explorado por Boyer. Como a abordagem deste autor é elaborada de um ponto de vista interno, estas questões exteriores ao embate de idéias, não foram trabalhadas. Boyer relata as disputas, em alguns momentos tentando estabelecer a quem pertence a prioridade da idéia, mesmo quando analisa as teorias surgidas na Grécia antiga. Porém, quando trabalha estas questões, seu julgamento passa pela tentativa de estabelecer quem publicou primeiro, ou em analisar o local geográfico onde viviam as partes em conflito, tentando argumentar se seria possível a alguém acusado de plágio ter tido contato com as teorias do acusador, antes da publicação. Neste ponto, Boyer não vai além disto. Quanto à controvérsia entre Newton e Leibniz, Boyer faz questão de frisar que "inasmuch as we are heremore concerned with ideas than with rules of procedures, we shall not discuss the shamefully bitter controversy as to the priority and independence of the inventions by Newton and Leibniz." (BOYER, 1959: 188)

Na questão do eurocentrismo, ele sem dúvida deixa transparecer que concebe o modelo ocidental de matemática herdado dos gregos, como um tipo de conhecimento superior. Apesar de reconhecer a influência da matemática pré-helênica na elaboração do método dedutivo, Boyer ressalta que eles utilizavam um método empírico de investigação que não permitia generalizações ou abstrações mais elaboradas. Faltou a estes povos "distinguish mathematics from science, namely, its logical nature and the necessity of deductive proofs." Na matemática egípcia, por exemplo, não havia a "conception in their geometry of a triangle as representative of all triangles (...) This lack of freedom and imagination is apparent also in Egyptian arithmetic (...) ". (BOYER, 1959: 14-15) Já pelo tipo de raciocínio desenvolvido na Grécia, Boyer parece ter um entusiasmo maior

> *The human mind was 'discovered' as something different from the surrounding body of nature and capable of discerning similarities in a multiplicity of events, of abstracting these from their settings, generalizing them, and deducing therefrom other relationships consistent with further experience. It is for this reason that we consider mathematical and scientific method as originating with the Helenic race (...)* (BOYER, 1959: 16)

Quando trata das contribuições da matemática hindu ao cálculo, diz que há uma certa "ingenuidade" destes matemáticos em suas pesquisas quanto a alguns aspectos da matemática. Pare ele "the development of the derivative and the integral (...) depend on certain logical subtleties, the significance of which appears to have surpassed the appreciation, or at least to have escaped the interest, of the early Indian mathematicians." Questões como incomensurabilidade, infinitésimos, processo de exaustão, infinito, não foram consideradas pelos matemáticos hindus. Mas, para Boyer, muitas das inovações conseguidas pela matemática hindu não se deram por um desenvolvimento consciente das teorias matemáticas, mas por uma ingenuidade lógica. Teria sido talvez um *incidental advance. (...) These generalizations of the number system and the consequent freedom of arithmetic from geometrical representation were to be essential in the development of the concepts of the calculus, but Hindus could hardly have appreciated the theoretical significance of the change.* (BOYER, 1959: 61)

Considerações finais

Iniciamos o primeiro capítulo mostrando como a história da ciência se firmou, nas primeiras décadas do século XX, como um campo autônomo de estudos. Ao longo dos anos 30, diferentes perspectivas em relação ao desenvolvimento científico acabaram moldando dois tipos de abordagens distintas na história da ciência. Para alguns historiadores, o foco da história da ciência deveria ser os aspectos internos do discurso científico e, por este motivo, este tipo de abordagem ficou conhecida por internalista. Para outros, a história da ciência deveria tentar perceber a influência no desenvolvimento científico de determinantes sociais, culturais, econômicos e demais aspectos externos à ciência. Esta corrente foi denominada externalista.

O debate entre estas duas linhas historiográficas teve importantes desdobramentos na história da ciência, influenciando o desenvolvimento de novas perspectivas diante do conhecimento.

Quando analisamos as mudanças ocorridas na história da ciência, verificamos que a maior parte destes estudos históricos do conhecimento científico, que promoveram importantes mudanças e debates, foi feita a partir da história da alguma ciência natural. As mudanças de rumo ocorridas na historiografia de outras ciências parecem não ter influenciado muito o desenvolvimento da história da matemática. Na história da matemática verifica-se uma grande predominância de textos com abordagens internalistas.

Na tentativa de explicar esta característica da história da matemática, Joan Richards levanta algumas hipóteses. Para ela o fato da maioria dos historiadores desta disciplina serem matemáticos, explicaria o fato de haver uma preferência destes pela história interna. Estes historiadores desconsiderariam as influências de aspectos externos no desenvolvimento desta disciplina, por possuírem uma perspectiva fundacionista diante da matemática.

Nos detemos neste argumento de Richards e mostramos, ao longo do capítulo, como mesmo de um ponto de vista de uma história interna da matemática, podemos ver a falência das propostas fundacionistas. Este fato enfraquece a hipótese de Richards para explicar a predominância de abordagens internalistas na história da matemática, já que seria pouco provável que esses historiadores desta disciplina, que optam pela história interna em suas abordagens, desconheçam tais discussões quanto aos fundamentos da matemática.

No capítulo II, mostramos que os debates internalismo-externalismo desencadearam, ao longo dos anos 60 do século XX, o surgimento de uma nova historiografia da ciência. Estas novas abordagens historiográficas mostraram como as reconstruções dos eventos científicos a partir de uma perspectiva apenas interna, ou externa, eram falhas.

Um outro questionamento levantado pela nova historiografia, e que promoveu importantes debates na história e filosofia da ciência, foi quanto à idéia de racionalidade científica que guiava o pensamento moderno. A noção de uma racionalidade historicamente construída se contrapunha à idéia de uma razão universal e absoluta que fundamentaria a ciência européia.

Esta nova perspectiva gerou inúmeras reflexões epistemológicas na ciência e foi muito importante para a construção de novas linhas de pesquisa dentro da história da matemática. Apesar da maior parte dos textos surgidos com essa nova historiografia terem sido elaborados a partir de análises sobre a história de alguma ciência natural, podemos encontrar alguns importantes autores ligados a essa nova historiografia que utilizaram a matemática como exemplo para suas teorias. Ao longo do segundo capítulo apresentamos algumas dessas teorias, os debates entre os historiadores e as propostas mais recentes na historiografia da matemática.

No último capítulo, apresentamos uma história do surgimento do cálculo infinitesimal feita por Carl Boyer em 1939. Considerando todos esses debates e mudanças ocorridas na historiografia da matemática, e discutidos nos dois primeiros capítulos, fazemos uma crítica ao clássico texto de Boyer, explicitando suas teses para explicar o aparecimento do cálculo e analisando as características principais de sua abordagem.

Acreditamos que ao apresentar as diferentes formas de se conceber o desenvolvimento histórico da matemática, um trabalho como este contribui com um pesquisador em história da matemática por permitir um olhar mais amplo em relação a seu objeto de estudo. A consciência das diferenças entre abordagens torna a leitura de um texto em história da ciência mais crítica. O que antes poderia ser tomado como *a* história de um determinado fato, passa a ser visto como *uma* forma de se contar esta história.

Mas, depois de concluirmos esta pesquisa, algumas perguntas ainda que ficam sem resposta, como, por exemplo, em que medida todas as mudanças ocorridas na historiografia da ciência no último século, e apresentadas neste texto, influenciaram o modo de fazer história da matemática? Ou por que na historiografia da matemática há uma predominância de textos sobre a história da idéias matemáticas?

Como dissemos, os argumentos de Richards não nos pareceram satisfatórios para responder a estas questões. Imaginamos que uma forma de tentar perceber como os debates historiográficos influenciaram na história da matemática seria comparar abordagens dadas a um mesmo evento na história da matemática, mas elaboradas em períodos diferentes. Para uma pesquisa futura, será este o próximo passo desta pesquisa. Poderíamos comparar o texto de Boyer, que foi publicado em 1939, ou seja, antes do aparecimento de boa parte das teorias historiográficas apresentadas neste trabalho, com algumas abordagens mais recentes do surgimento do cálculo. Com isso, tentaríamos perceber se há diferenças entre os textos que indiquem alguma influência dos debates historiográficos ocorridos no período que separa a data das publicações comparadas. Este é o projeto que pretendemos concretizar em um futuro próximo pois, acreditamos que de fato, esta seria uma forma efetiva de tentarmos responder por que na história da matemática há uma predominância de textos que tratam o desenvolvimento matemático apenas do ponto de vista interno.

Referências bibliográficas

ÁVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos. São Paulo: *Revista do Professor de Matemática* 45, 2001.

BARON, M. *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo, volumes 1, 2 e 3*. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.

BERNAL, J. D. *Ciência na história*. Lisboa, Portugal: Livros Horizonte, 1976.

____. *Historia social de la ciencia*. Barcelona: Península, 1976.

BICUDO, I. Platão e a matemática. São Paulo: *Letras Clássicas*, Editora Humanitas FFLCH/USP, número 2, 2002.

BLOOR, D. *Knowledge and Social Imagery*. Chicago: The University of Chicago Press, 1976.

BOURBAKI, N. *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial, 1976.

BOYER, C. *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover, 1959.

____. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRENNAN, R. *Gigantes da Física: uma história da física moderna através de oito biografias*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

COSTA, M. *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios*. São Paulo: Editorial Grijalbo, Editora da Universidade de São Paulo, 1971.

DAUBEN, Joseph W. & SCRIBA Christoph J. *Writing the History of the mathematics: its historical development*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag, 2002.

DYNNIKOV, C. M. S. S. Bibliografia Comentada em História da Matemática. Campinas, SP: Cadernos Cedes, número 40, Papirus, 1996.

ERNEST, P. The philosophy of mathematics. In: *The philosophy of mathematics education*. London: The Falmer Press, 1995.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1997.

FLECK, L. *La génesis y el desarrollo de un hecho científico: Introducción a la teoría del estilo de pensamiento y del colectivo de pensamiento*. Madrid: Alianza Editorial, 1986.

GARGANI, A. (org.) *Crisis de la Razón*. Cidade do México: Ed. Siglo Veintiuno, 1983.

GILLIES, D. (org.) *Revolutions in mathematics*. New York: Oxford University Press, 1992.

HADAMARD, J. *The psychology of invention in the mathematical field*. New York: Dover Publications Inc., 1954.

HEATH, T. *A history of greek mathematics*. New York: Dover, 1981.

KITCHER, P. *The nature of mathematical knowledge*. New York: Oxford University Press, 1984.

KJELDSEN, T. H.; PEDERSEN, S. A. & SONNE-HANSEN, L. M. *New trends in the history and philosophy of mathematics*. Denmark: University Press of Southern Denmark, 2004.

KÖRNER, S. *Uma introdução à filosofia da matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1985.

KOYRÉ, A. *Estudos de história do pensamento científico*. Rio de Janeiro: Ed. Forense Universitária; Brasília: Ed. Universidade de Brasília, 1982.

____. *Do mundo fechado ao universo infinito*. Rio de Janeiro: Ed. Forense Universitária; São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1988.

____. *Estudos de história do pensamento filosófico*. Rio de Janeiro: Ed. Forense Universitária, 1991.

KUHN, T. S. *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo: Editora Perspectiva, 2003.

LAKATOS, I. *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial, 1982.

____. *Mathematics, science and epistemology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

LARVOR, B. *Lakatos: an introduction*. London: Routledge, 1998.

MACKENZIE, D. Slaying the kraken: The sociohistory of a mathematical proof. *Social Studies of Science*, 29, 1999.

PASCAL, G. *O pensamento de Kant*. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 1983.

RICHARDS, J. L. The history of mathematics and *l'esprit human*: A critical reappraisal, *Osiris* 10, 1995.

PORTOCARRERO, V. *Filosofia, história e sociologia das ciências I: abordagens contemporâneas*. Rio de Janeiro: Editora FIOCRUZ, 1994.

STRUIK, D. J. *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1992.

TYMOCZKO, T. (ed.) *New directions in the philosophy of mathematics*. Princeton: Princeton University Press, 1998.

WILDER, R. *Mathematics as a cultural system*. New York: Pergamon Press, 1981.

ZUMPANO, A. Os limites da matemática clássica. Rio de Janeiro: *Ciência Hoje*, vol. 29, número 171, maio, 2001.