

Luiz Paulo da Cruz Scarp

Desenvolvimento de um simulador de mercado artificial com  
opções financeiras para a interação de agentes externos

Belo Horizonte  
Setembro de 2015

Luiz Paulo da Cruz Scarp

Desenvolvimento de um simulador de mercado artificial com opções  
financeiras para a interação de agentes externos

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia de Produção da  
UFMG como parte dos pré-requisitos para ob-  
tenção do título de Mestre em Engenharia de  
Produção

Universidade Federal de Minas Gerais

Escola de Engenharia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção

Orientador: Anderson Laécio Galindo Trindade

Belo Horizonte

Setembro de 2015

S286d

Scarp, Luiz Paulo da Cruz.  
Desenvolvimento de um simulador de mercado artificial com opções  
financeiras para a interação de agentes externos [manuscrito] / Luiz Paulo  
da Cruz Scarp. – 2015.  
95 f., enc.: il.

Orientador: Anderson Laércio Galindo Trindade.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais,  
Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 92-95.

Bibliografia: f. 87-91.

1. Engenharia de produção - Teses. 2. Mercado de opções - Teses.  
I. Trindade, Anderson Laércio Galindo. II. Universidade Federal de Minas  
Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 658.5(043)



## FOLHA DE APROVAÇÃO

### **Desenvolvimento de um simulador de mercado artificial com opções financeiras para a interação de agentes externos**

### **LUIZ PAULO DA CRUZ SCARP**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, como requisito para obtenção do grau de Mestre em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, área de concentração PESQUISA OPERACIONAL E ENGENHARIA DE MANUFATURA, linha de pesquisa Modelagem

Aprovada em 18 de setembro de 2015, pela banca constituída pelos membros:

  
Prof(a). Anderson Laécio Galindo Trindade - Orientador  
UFMG

  
Prof(a). Marcelo Azevedo Costa  
UFMG

  
Prof(a). Roberto da Costa Quinino  
UFMG

Belo Horizonte, 18 de setembro de 2015.

# Agradecimentos

À minha família, pelo carinho e apoio.

Aos meus amigos do Ladec (e agregados), por todos os momentos de trabalho e lazer.

Aos meus amigos de república, pelo companheirismo.

Aos professores Anderson Trindade, Leonardo Santiago e Marcelo Costa, por todo o conhecimento compartilhado.

Ao professor Alexandre Navarro da Silva, da UFV, por ter despertado em mim o interesse pela pesquisa.

Aos meus ex-tutorandos de Cálculo I, por terem despertado em mim o gosto pelo ensino.

*“Na verdade não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse, mas a aquisição, não o estado, mas o ato de chegar lá, que fornece o maior prazer.”*  
*(Carl Friedrich Gauss)*

# Resumo

O uso de ferramentas computacionais no ensino vem se tornando cada vez mais frequente, havendo uma demanda crescente por produtos tecnológicos de apoio à educação. Nesse contexto, a partir do mercado artificial de ações de [Ferreira \(2014\)](#), buscou-se desenvolver um mercado artificial de opções que servisse de base para um simulador educacional de mercado financeiro, onde os usuários pudessem interagir com agentes artificiais e aprender sobre os mecanismos de funcionamento dos mercados de ações e opções. Para tanto, optou-se pelo uso da modelagem baseada em agentes, já que ela permite a construção de um simulador interativo que replique o mercado real, com o usuário assumindo o papel de um dos agentes. Esse tipo de modelagem possibilita ainda a construção de uma série temporal de preços de forma mais fidedigna que a obtida pelas abordagens clássicas, sendo ela gerada pela interação dos agentes no mercado, e não por uma equação explicitamente programada. Além disso, o mercado financeiro possui uma representação natural de agentes autônomos que interagem entre si, ou seja, a definição do agente como uma pessoa que negocia no mercado é intuitiva. Vale ressaltar que a aplicação do simulador não se limita à questão educacional. Além de auxiliar o aprendizado no que diz respeito ao entendimento dos mercados de ações e opções, o modelo proposto pode ser útil na análise de diferentes cenários e avaliação de consequências de políticas de regulação do mercado, funcionando como um laboratório eletrônico para pesquisas. Nos experimentos realizados com o mercado artificial implementado, conseguiu-se replicar as características teoricamente esperadas de uma opção, bem como aquelas observadas empiricamente em mercados de ações e opções, mostrando-se uma boa representação dos mercados reais. Por fim, foi implementada uma versão adaptada da interface *on-line* proposta por [Ferreira \(2014\)](#) para o uso do simulador, permitindo que seus usuários realizem negociações com os agentes artificiais do modelo e com os demais usuários.

**Palavras-chaves:** Mercado de opções; Mercados artificiais; Simulação por agentes.

# Abstract

The use of computational tools in teaching activities is becoming increasingly common, which is causing the demand for technological products to support education to grow. In this sense, starting from the artificial stock market of [Ferreira \(2014\)](#), this research aimed to develop an artificial options market to be used in a financial market simulator, in which users can interact with artificial agents and learn about the mechanisms of stock and options markets. This was accomplished by means of agent-based modeling, a technique which allows the construction of an interactive simulator of the real markets. In this simulator, the real user plays the role of one of the market's agents. Artificial markets developed with agent-based modeling are more capable to reproduce realistic price series than classical approaches, because the prices are generated by the interaction of market's agents, not by an explicitly programmed equation. Furthermore, the financial market has a natural representation as consisting of interacting autonomous agents, i.e., the definition of an agent as an investor is intuitive. Even though the main purpose of this simulator is to deal with educational issues, it can also be applied as an electronic laboratory to analyze economic policies and regulations on the market. The implemented artificial market was able to replicate the theoretically expected behavior of an option, as well as stylized facts of stock markets and options markets. Therefore, it was shown to be a close representation of real markets. Lastly, it was implemented an adapted version of the online interface proposed by [Ferreira \(2014\)](#), in which users can trade with artificial agents and another users.

**Key-words:** Options market; Artificial markets; Agent-based simulation.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Lucro do investidor A (posição <i>long</i> em opção de compra) em função do preço da ação na data de vencimento. . . . .	24
Figura 2 – Lucro do investidor B (posição <i>short</i> em opção de compra) em função do preço da ação na data de vencimento. . . . .	25
Figura 3 – <i>Payoff</i> da posição <i>long</i> em opção de compra europeia. . . . .	26
Figura 4 – <i>Payoff</i> da posição <i>short</i> em opção de compra europeia. . . . .	26
Figura 5 – <i>Payoff</i> da posição <i>long</i> em opção de venda europeia. . . . .	26
Figura 6 – <i>Payoff</i> da posição <i>short</i> em opção de venda europeia. . . . .	27
Figura 7 – Padrão de lucros de um <i>butterfly spread</i> . . . . .	30
Figura 8 – Padrão de lucros de um <i>butterfly spread</i> que caracteriza uma oportunidade de arbitragem. . . . .	30
Figura 9 – Volatilidade implícita em função do preço de exercício para opções com vencimento nos instante $T_1$ e $T_2$ , onde $T_2 > T_1$ . . . . .	33
Figura 10 – Volume médio de negociação diária referente a opções sobre futuros do índice S&P500 com tempo até o vencimento de 2 a 6 semanas. . . . .	35
Figura 11 – Volume médio de negociação diária referente a opções sobre futuros do índice S&P500 com tempo até o vencimento de 13 a 26 semanas. . . . .	35
Figura 12 – Desvio-padrão das volatilidades implícitas diárias do índice S&P500 em função da <i>moneyness</i> e do tempo até o vencimento. . . . .	36
Figura 13 – Representação de um passo de tempo do mercado artificial, equivalente a um dia de negociação. . . . .	63
Figura 14 – <i>Home broker</i> da interface do simulador <i>on-line</i> . . . . .	64
Figura 15 – Interação entre as partes do simulador e a linguagem processada em cada uma delas. . . . .	65
Figura 16 – Preço médio da ação 1 para cada passo de tempo em 200 replicações do modelo. . . . .	67
Figura 17 – Preço médio da ação 2 para cada passo de tempo em 200 replicações do modelo. . . . .	68
Figura 18 – Médias de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com opções (losangos brancos) e sem opções (triângulos brancos). . . . .	68
Figura 19 – Quantis 5% de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com opções (losangos brancos) e sem opções (triângulos brancos). . . . .	69
Figura 20 – Médias de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 2 no mercado de ações do modelo com opções (losangos brancos) e sem opções (triângulos brancos). . . . .	69
Figura 21 – Quantis 5% de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 2 no mercado de ações do modelo com opções (losangos brancos) e sem opções (triângulos brancos). . . . .	70

Figura 22 – Preço médio de algumas opções de compra da ação 1 para cada passo de tempo em 200 replicações do modelo. . . . .	71
Figura 23 – Preço médio de algumas opções de venda da ação 2 para cada passo de tempo em 200 replicações do modelo. . . . .	71
Figura 24 – Volatilidade implícita da ação 1 em função da medida <i>moneyness</i> ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento. . . . .	72
Figura 25 – Volatilidade implícita da ação 2 em função da medida <i>moneyness</i> ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento. . . . .	72
Figura 26 – Médias de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com $k = 2$ (losangos brancos) e $k = 1$ (triângulos brancos). . . . .	73
Figura 27 – Quantis 5% de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com $k = 2$ (losangos brancos) e $k = 1$ (triângulos brancos). . . . .	74
Figura 28 – Preço médio de algumas opções de compra da ação 1 para cada passo de tempo em 200 replicações do modelo com $\mu_Y = 1$ . . . . .	74
Figura 29 – Volatilidade implícita da ação 1 em função da medida <i>moneyness</i> ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com $J_i$ determinado aleatoriamente entre 21 e 42. . . . .	75
Figura 30 – Quantis 5% de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com $\gamma = 0$ (losangos brancos) e $\gamma = 0,3$ (triângulos brancos). . . . .	76
Figura 31 – Médias de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com $\gamma = 0$ (losangos brancos) e $\gamma = 0,2$ (triângulos brancos). . . . .	76
Figura 32 – Quantis 5% de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com $\gamma = 0$ (losangos brancos) e $\gamma = 0,2$ (triângulos brancos). . . . .	77
Figura 33 – Médias de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 2 no mercado de ações do modelo com $\gamma = 0$ (losangos brancos) e $\gamma = 0,2$ (triângulos brancos). . . . .	77
Figura 34 – Quantis 5% de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 2 no mercado de ações do modelo com $\gamma = 0$ (losangos brancos) e $\gamma = 0,2$ (triângulos brancos). . . . .	78
Figura 35 – Preço médio de algumas opções de compra da ação 1 para cada passo de tempo em 200 replicações do modelo com $\gamma = 0,2$ . . . . .	78
Figura 36 – Volatilidade implícita da ação 1 em função da medida <i>moneyness</i> ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com $\gamma = 0,2$ . . . . .	79
Figura 37 – Volatilidade implícita da ação 2 em função da medida <i>moneyness</i> ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com $\gamma = 0,2$ . . . . .	80
Figura 38 – Volatilidade implícita da ação 1 em função da medida <i>moneyness</i> ( $X/S_t$ ), utilizando a mesma escala para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com $\gamma = 0,2$ . . . . .	81

Figura 39 – Volatilidade implícita da ação 2 em função da medida <i>moneyness</i> ( $X/S_t$ ), utilizando a mesma escala para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com $\gamma = 0,2$ . . . . .	81
Figura 40 – Volume médio de negociação diária das opções sobre a ação 1 em função da medida <i>moneyness</i> ( $X/S_t$ ), no modelo com $\gamma = 0,2$ . . . . .	82
Figura 41 – Volume médio de negociação diária das opções sobre a ação 2 em função da medida <i>moneyness</i> ( $X/S_t$ ), no modelo com $\gamma = 0,2$ . . . . .	83
Figura 42 – Desvio-padrão da volatilidade implícita da ação 1 em função da medida <i>moneyness</i> ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com $\gamma = 0,2$ . . . . .	83
Figura 43 – Desvio-padrão da volatilidade implícita da ação 2 em função da medida <i>moneyness</i> ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com $\gamma = 0,2$ . . . . .	84
Figura 44 – Densidade de probabilidade de uma variável aleatória normal (linha preta) e de uma variável aleatória com caudas pesadas (linha cinza). . . . .	93
Figura 45 – Série de retornos que apresenta agrupamento de volatilidade, destacando-se alguns períodos de grande amplitude dos retornos (retângulos tracejados) e intervalos de menores flutuações (retângulos contínuos). . . . .	94

# Lista de tabelas

Tabela 1	– <i>Payoffs</i> de um <i>butterfly spread</i> . . . . .	29
Tabela 2	– Exemplo de livro de ordens. . . . .	38
Tabela 3	– Intervalos dos preços de exercício para <i>calls</i> americanas e <i>puts</i> europeias. . .	40
Tabela 4	– Codificação das séries: significado da quinta letra. . . . .	41
Tabela 5	– Parâmetros utilizados nas simulações do mercado de opções. . . . .	66
Tabela 6	– Assimetria da volatilidade implícita das ações 1 e 2 para diversos tempos até o vencimento, no modelo com $\gamma = 0,2$ . . . . .	80

# Lista de Algoritmos

1	Procedimento de negociação de uma ordem de compra do modelo de Ferreira (2014). Fonte: Adaptado de Ferreira (2014). . . . .	48
2	Procedimento de negociação de uma ordem de venda do modelo de Ferreira (2014). Fonte: Adaptado de Ferreira (2014). . . . .	49

# Lista de abreviaturas e siglas

ATM	<i>At the money</i>
BM&FBovespa	Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo
GARCH	<i>Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>
GASM	<i>Genoa Artificial Stock Market</i>
ITM	<i>In the money</i>
NYSE	<i>New York Stock Exchange</i>
OTM	<i>Out of the money</i>
SFI-ASM	<i>Santa Fe Institute Artificial Stock Market</i>
S&P500	<i>Standard and Poor's 500</i>

# Lista de símbolos

$A_{i,t}$	Total de ações que o agente $i$ possui no instante $t$
$A_{i,t}^*$	Total de ações que o agente $i$ teria no instante de tempo $t$ se todas as suas opções fossem exercidas naquele momento
$a_{i,t}^{(b)}$	Quantidade demandada de ações pelo agente $i$ no período de tempo $t$
$a_{i,t}^{(s)}$	Quantidade de ações ofertadas pelo agente $i$ no período de tempo $t$
$b_{i,t}$	Preço máximo que o agente $i$ aceita pagar por ações no período $t$
$b_{i,t}^{(o)}$	Preço máximo que o agente $i$ aceita pagar por opções no período $t$
$C_{i,t}$	Total de dinheiro que o agente $i$ possui no instante $t$
$C_{i,t}^*$	Total de dinheiro que o agente $i$ teria no instante de tempo $t$ se todas as suas opções fossem exercidas naquele momento
$C_{i,t}^{(o)}$	Montante de dinheiro que o agente $i$ deseja investir em determinada opção no instante $t$
$c$	Preço de uma opção de compra ( <i>call</i> ) praticado no mercado
$c_{x\%}$	Preço praticado no mercado para uma opção de compra ( <i>call</i> ) $x\%$ OTM
$\tilde{c}_t$	Preço de uma opção de compra ( <i>call</i> ), no instante $t$ , calculado pelas equações de Black-Scholes
$D_t$	Demanda total do mercado por uma ação no instante de tempo $t$
$d_t$	Dividendo pago pela ação no período $t$
$d^{(1)}$	Valor calculado nas equações de Black-Scholes
$d^{(2)}$	Valor calculado nas equações de Black-Scholes
$f$	Função que determina a demanda total de ações do mercado para cada preço possível
$G_t$	Oferta total do mercado por uma ação no instante de tempo $t$
$g$	Função que determina a oferta total de ações do mercado para cada preço possível
$J_i$	Janela de tempo utilizada pelo agente $i$ para estimar a volatilidade da ação
$k$	Constante que multiplica o desvio-padrão da variável aleatória normal $Y$ do GASM

$M_{i,t}^{(c)}$	Quantidade máxima de opções de compra que o agente $i$ pode comprar no instante $t$
$M_{i,t}^{(p)}$	Quantidade máxima de opções de venda que o agente $i$ pode comprar no instante $t$
$m$	<i>Log-moneyness</i> , valor que mensura o quanto uma opção de compra está “fora do dinheiro” (OTM)
$N^{(b)}$	Número de ordens registradas no livro que são compatíveis com a ordem lançada pelo agente
$N^{(o)}$	Número de séries de opções em negociação referentes a uma mesma ação
$O_{i,t}$	Posição do agente $i$ no mercado de opções no instante $t$ , sendo que valores positivos representam uma posição <i>long</i> e valores negativos se referem a posições <i>short</i>
$o_{i,t}^{(b)}$	Quantidade demandada de opções pelo agente $i$ no período de tempo $t$
$o_{i,t}^{(s)}$	Quantidade de opções ofertadas pelo agente $i$ no período de tempo $t$
$P^{(a)}$	Probabilidade de cada par de agentes se agrupar em um passo de tempo no GASM
$P^{(c)}$	Probabilidade de ocorrer comportamento em grupo em um passo de tempo no GASM
$P^{(o)}$	Probabilidade de cada agente negociar no mercado de opções em um passo de tempo
$p$	Preço de uma opção de venda ( <i>put</i> ) praticado no mercado
$p_{x\%}$	Preço praticado no mercado para uma opção de venda ( <i>put</i> ) $x\%$ OTM
$\tilde{p}$	Preço de uma opção de venda ( <i>put</i> ) calculado pelas equações de Black-Scholes
$Q_n^{(b)}$	Quantidade da $n$ -ésima ordem de melhor preço registrada no livro, entre aquelas compatíveis com a ordem lançada pelo agente
$Q^{(o)}$	Quantidade da ordem lançada pelo agente
$r$	Taxa de juros livre de risco
$ret_t$	Retorno logarítmico da ação no período $t$
$\mathbf{S}_t$	Vetor cujos elementos $S_{i,t}$ representam o preço de cada um dos $i$ ativos de um portfólio no instante $t$
$S_t$	Preço da ação no instante de tempo $t$
$S^{(f)}$	Valor fundamental da ação

$S^*$	Preço que minimiza a diferença entre oferta e demanda em um dado período
$s_{i,t}$	Preço mínimo pelo qual o agente $i$ aceita vender suas ações no período $t$
$s_{i,t}^{(o)}$	Preço mínimo pelo qual o agente $i$ aceita vender suas opções no período $t$
$T$	Instante de tempo em que se dá o vencimento de uma opção
$\Delta T$	Tempo restante até a expiração da opção
$u_{i,t}$	Realização da variável aleatória uniforme $U \sim U(0,1)$ para o agente $i$ no período $t$
$u_{i,t}^*$	Realização da variável aleatória uniforme $U^* \sim U(0,\lambda)$ para o agente $i$ no período $t$
$V_n^{(b)}$	Preço da $n$ -ésima ordem de melhor preço registrada no livro, entre aquelas compatíveis com a ordem lançada pelo agente
$V^{(o)}$	Preço da ordem lançada pelo agente
$W$	Variável aleatória que segue um Movimento Browniano padrão
$X$	Preço de exercício da opção
$y_{i,t}$	Realização da variável aleatória normal $Y \sim N(\mu_Y, [k \sigma_{ret}(J_i)]^2)$ para o agente $i$ no período $t$
$z_{i,t}$	Realização da variável aleatória normal padrão $Z \sim N(0,1)$ para o agente $i$ no período $t$
$\alpha$	Parâmetro utilizado na determinação do preço limite de cada agente no modelo de <a href="#">Yang e Sun (2013)</a> , sendo que o índice sobrescrito faz referência ao tipo do agente
$\beta$	Fração de incremento periódico no montante total de dinheiro do mercado
$\gamma$	Constante que controla a influência do preço anterior na formação do novo preço da ação e do preço de Black-Scholes na formação do novo preço da opção
$\delta$	Parâmetro que define os preços de exercício das séries lançadas
$\eta$	Constante utilizada no mecanismo de formação de preço do SFI-ASM
$\theta_t$	Vetor em que cada elemento $\theta_{i,t}$ representa o número de unidades do ativo $i$ presentes em um portfólio no instante de tempo $t$
$\lambda$	Fração máxima de seu dinheiro que um agente pode comprometer com opções
$\mu$	Rentabilidade da ação
$\mu_Y$	Média da variável aleatória normal $Y$ utilizada no GASM

$\sigma$	Volatilidade da ação
$\sigma_{ret}$	Estimativa da volatilidade da ação, calculada por meio do desvio-padrão dos últimos retornos logarítmicos, para uma dada janela temporal
$\sigma_{i,t}^{(BS)}$	Volatilidade que o agente $i$ utiliza no instante $t$ para estimar o valor de uma opção com as equações de Black-Scholes
$\hat{\sigma}_t$	Volatilidade implícita de uma ação no período $t$
$\Phi$	Função de distribuição de probabilidade acumulada referente a uma distribuição normal padrão

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	20
2	O MERCADO DE OPÇÕES . . . . .	22
2.1	Conceitos fundamentais . . . . .	22
2.2	Arbitragem . . . . .	28
2.3	Fatos estilizados . . . . .	30
2.3.1	Volatilidade implícita e o modelo de Black-Scholes . . . . .	31
2.3.2	Smiles de volatilidade . . . . .	33
2.3.3	Assimetria da volatilidade implícita . . . . .	34
2.3.4	Diferença de liquidez . . . . .	34
2.3.5	Dinâmica da volatilidade implícita . . . . .	36
2.4	Funcionamento do mercado . . . . .	36
2.4.1	Mecanismo de negociação . . . . .	37
2.4.2	Garantias e demais regulamentações . . . . .	38
2.4.3	Séries autorizadas . . . . .	39
3	MERCADOS ARTIFICIAIS . . . . .	42
3.1	Simulação baseada em agentes . . . . .	42
3.2	Mercados artificiais de ações . . . . .	43
3.2.1	O mercado artificial de ações de Santa Fe . . . . .	43
3.2.2	O mercado artificial de ações de Genoa . . . . .	44
3.2.3	O mercado artificial de ações de Ferreira (2014) . . . . .	47
3.3	Mercados artificiais de opções . . . . .	50
3.3.1	O modelo de Ecce, Marchesi e Setzu (2008) . . . . .	51
3.3.2	O modelo de Qiu et al. (2012) . . . . .	53
3.3.3	O modelo de Yang e Sun (2013) . . . . .	55
3.3.4	O mercado de futuros de Xu et al. (2014): um caso análogo . . . . .	57
4	O SIMULADOR PROPOSTO . . . . .	59
4.1	O mercado artificial . . . . .	59
4.2	A interface do usuário . . . . .	63
5	SIMULAÇÕES REALIZADAS . . . . .	66
5.1	Simulações iniciais . . . . .	66
5.2	Alterando parâmetros do modelo . . . . .	73
5.3	O parâmetro gama . . . . .	75
6	CONCLUSÃO . . . . .	85

	REFERÊNCIAS . . . . .	87
	APÊNDICES	92
	APÊNDICE A – FATOS ESTILIZADOS DE AÇÕES . . . . .	93
A.1	Caudas pesadas . . . . .	93
A.2	Agrupamento de volatilidade . . . . .	94
A.3	Correlação entre volume e volatilidade . . . . .	95

# 1 Introdução

Nos últimos anos, uma série de aplicações de simulação na educação vêm sendo discutidas na literatura científica, geralmente apresentando bons resultados. Essas aplicações englobam diversas áreas do conhecimento, como engenharia, arquitetura, gestão, medicina, física e matemática (DESHPANDE; HUANG, 2011). Estudos em que foram desenvolvidos simuladores para auxiliar atividades de ensino incluem os de Zhu, Xie e Levinson (2011), Pasin e Giroux (2011), Oztekin, Temurtas e Gulbag (2010), Chang et al. (2009) e Towbin, Paterson e Chang (2008).

Buscando representar os sistemas estudados da maneira mais realista possível, esses simuladores aumentam a eficácia do ensino de várias formas (STOFFA, 2004). O uso de simuladores faz com que os estudantes se tornem mais motivados (CHANG et al., 2009) e empenhados (ZHU; XIE; LEVINSON, 2011), incorporando certa diversão no processo de aprendizagem. Eles possibilitam um processo de aprendizagem mais interativo, seguindo a filosofia amplamente aceita de “aprender fazendo” (*learning by doing*), além de facilitar o entendimento de sistemas como um todo (DESHPANDE; HUANG, 2011).

Há ainda vantagens de natureza técnica ao se utilizar a simulação no ensino. Pasin e Giroux (2011) destacam o fato do aluno ser introduzido a um universo virtual que possibilita uma prática segura, podendo o mesmo cometer erros ou tomar decisões ruins sem sofrer as consequências do mundo real. Outras vantagens são a possibilidade de se controlar o tempo do simulador (OZTEKIN; TEMURTAS; GULBAG, 2010) e de receber *feedback* imediato, de forma que o estudante observa os desdobramentos de suas decisões (DESHPANDE; HUANG, 2011).

A Bolsa de Valores, Mercadorias e Futuros de São Paulo (BM&FBovespa) vem utilizando esse tipo de ferramenta para ajudar as pessoas que querem iniciar investimentos no mercado de ações – ativos que dão a seu titular o direito sobre parte dos lucros distribuídos por determinada empresa (CVITANIĆ; ZAPATERO, 2004) – a entenderem como funcionam as negociações, disponibilizando os simuladores *online* Folhainvest e UOL Invest (BM&FBOVESPA, 2015h). Porém, os simuladores disponíveis apresentam uma série de limitações. Eles utilizam como base os preços do mercado real, com um atraso de 15 minutos, de forma que não existe um mecanismo de formação de preço realista que relacione os volumes demandados e ofertados pelos participantes do mercado e os preços pelos quais as ações serão negociadas. Conseqüentemente, não existe a possibilidade do usuário avançar o tempo, tornando inviável a análise de diferentes estratégias de longo prazo, devido à demora em receber *feedback*. Além disso, o horário de funcionamento dos simuladores é restrito ao horário do mercado, de forma que os mesmos não podem ser utilizados em cursos ministrados no início da manhã ou durante a noite.

Essas limitações foram tratadas por Ferreira (2014), por meio do desenvolvimento de um mercado artificial de ações que inclui uma interface para interação de usuários externos. O simulador desenvolvido atua de forma independente do mercado real, permitindo maior flexibilidade em sua aplicação para fins pedagógicos, além de possuir um mecanismo de negociação mais realista. Todavia, o simulador continua limitado à negociação de ações, não dando a

oportunidade de seus usuários conhecerem os outros mercados da bolsa, como o de opções – contratos que dão a seu titular um direito de compra ou venda e a seu lançador uma potencial obrigação futura.

As pesquisas em mercados artificiais de opções ainda são recentes, sendo o primeiro modelo contendo agentes heterogêneos – investidores que atuam de forma autônoma e independente – desenvolvido por [Ecca, Marchesi e Setzu \(2008\)](#). Contudo, nenhum dos modelos observados na literatura representa de forma fidedigna a maneira como ocorrem as negociações no mercado de opções brasileiro. Nesse contexto, existe uma demanda ainda não atendida por um simulador adequado para cursos que tratam do mercado de opções e outros segmentos da BM&FBovespa.

Além de aplicações pedagógicas, tal simulador poderia ser utilizado como um laboratório eletrônico para experimentos envolvendo o mercado de opções. Um mercado artificial de opções pode ser utilizado para analisar o impacto de regulamentações da bolsa, como os limites de posição e outros aspectos ainda controversos. Uma série de especialistas, como [Farmer e Foley \(2009\)](#) e [Buchanan \(2009\)](#), apontam a necessidade de novos modelos para o melhor entendimento da economia, principalmente do setor financeiro.

Assim, este trabalho foi conduzido com o objetivo de desenvolver um mercado artificial de opções a ser incorporado no simulador educacional proposto por [Ferreira \(2014\)](#), tomando como base seu mercado artificial de ações. Especificamente, pretendeu-se:

- (i) Desenvolver um mercado artificial de opções que representasse de forma realista o mercado brasileiro, tomando como base o mercado artificial de ações de [Ferreira \(2014\)](#);
- (ii) Realizar os devidos testes de validação no modelo proposto;
- (iii) Implementar a interface *on-line* do simulador proposto por [Ferreira \(2014\)](#).

O texto está estruturado em seis capítulos, sendo esta introdução o primeiro deles. O segundo capítulo trata do mercado de opções, apresentando os conceitos básicos necessários ao entendimento deste trabalho, enquanto que o capítulo três trata especificamente dos mercados artificiais desenvolvidos computacionalmente. Os dois capítulos seguintes apresentam o simulador proposto e os resultados de experimentos realizados. Por fim, são apontadas as conclusões e pesquisas futuras.

## 2 O Mercado de Opções

Este capítulo apresenta os fundamentos do mercado de opções necessários ao desenvolvimento do trabalho. Encontra-se dividido em quatro seções, as quais tratam, respectivamente, dos conceitos básicos, da definição de arbitragem, das características observadas empiricamente nos mercados reais e das regras de funcionamento do mercado real.

### 2.1 Conceitos fundamentais

As definições apresentadas nesta seção são de uso comum no mercado, não havendo divergência entre diferentes obras da literatura. Desse modo, a seção na sua totalidade foi baseada no texto de Hull (2005).

Basicamente, opções podem ser classificadas em opções de compra (também conhecidas como *call*) e opções de venda (*put*). Uma opção de compra concede ao indivíduo que a possui o direito de comprar determinado ativo até certa data (ou em uma data específica) por um preço preestabelecido. A opção de venda funciona de forma análoga à opção de compra, porém garante a seu titular o direito de vender certo ativo.

O ativo ao qual uma opção se refere é chamado ativo subjacente ou ativo-objeto, o qual pode ser, por exemplo, uma ação, um índice de ações ou uma moeda estrangeira. Assim, um contrato de opção é chamado de derivativo, já que seu valor deriva do valor de um ativo. Neste trabalho lidamos especificamente com opções sobre ações, ou seja, aquelas que possuem uma ação como ativo subjacente.

A data especificada no contrato é chamada de data de vencimento (ou data de expiração, exercício ou maturidade), enquanto que o preço do ativo acordado é conhecido como preço de exercício (*strike price*). Outra especificação importante em um contrato de opção é o tamanho do contrato, ou seja, a que quantidade do ativo subjacente ele se refere.

Os tipos mais comuns de opções (sejam elas *calls* ou *puts*) são as americanas e europeias. Na opção americana, o direito de compra ou venda pode ser exercido em qualquer momento até a sua data de expiração. Por outro lado, uma opção europeia pode ser exercida apenas na data de vencimento estabelecida no contrato.

Um indivíduo que opera no mercado de opções pode assumir duas posições distintas em um contrato: *long* ou *short*. Uma posição *long* significa uma posição comprada (aquele que comprou uma opção), enquanto que a posição *short* se refere à posição vendida (aquele que vendeu – ou lançou – uma opção). O negociador que assume uma posição *long* paga um valor determinado (conhecido como prêmio ou preço da opção) ao lançador da opção e ganha o direito de exercê-la. De maneira análoga, quem assume uma posição *short* recebe o prêmio da opção e fica sujeito a obrigações futuras.

A fim de melhor ilustrar o conceito de uma opção financeira, consideremos o seguinte

exemplo. O investidor A compra, por R\$ 100,00, uma opção de compra (*call*) europeia do investidor B, referente a 100 ações da Petrobras, com preço de exercício de R\$ 15,00 e vencimento em dois meses a partir de hoje. Ao fim dos dois meses, chegando-se na data de vencimento, o investidor A terá o direito de comprar 100 ações da Petrobras do investidor B, pagando R\$ 15,00 por cada uma. Existem três situações possíveis no vencimento da opção, dependendo do preço em que a ação se encontrar naquele momento:

- (i) Na data de vencimento, o preço de uma ação da Petrobras chegou a R\$ 18,00 – Nesse caso, o investidor A tem o direito de comprar ações da empresa por um preço menor do que o praticado no mercado. Logo, ele irá exercer esse direito, comprando 100 ações da Petrobras por R\$ 15,00 cada. Como ele pode vendê-las no mercado a R\$ 18,00, essa operação lhe garante um ganho de  $(18 - 15)100 = \text{R\$ } 300,00$  que, descontando o investimento inicial de R\$ 100,00 no contrato, corresponde a um lucro de R\$ 200,00. O investidor B, por outro lado, tem um prejuízo de R\$ 200,00, por ter sido obrigado a vender suas ações abaixo do preço de mercado. De forma geral, o investidor A exerceria a opção e obteria lucro para qualquer preço da ação na data de vencimento acima de R\$ 16,00, que corresponde ao preço de exercício da *call* (R\$ 15,00) adicionado ao prêmio pago por ação do contrato ( $\text{R\$ } 100,00/100 = \text{R\$ } 1,00$ ).
- (ii) Na data de vencimento, o preço de uma ação era de R\$ 15,50 – Novamente, o investidor A irá exercer seu direito de compra, já que o preço de exercício da opção se encontra abaixo do preço de mercado da ação. Porém, nesse caso, ele obterá um ganho de  $(15,50 - 15)100 = \text{R\$ } 50,00$ , insuficiente para cobrir seu gasto inicial de R\$ 100,00. Assim, mesmo tendo exercido a opção, o investidor A terá um prejuízo de R\$ 50,00, correspondente ao lucro do investidor B. Para qualquer valor da ação no vencimento entre R\$ 15,00 e R\$ 16,00, o investidor A exerceria seu direito de compra, porém continuaria tendo prejuízo. Todavia, o exercício da opção lhe permite recuperar parte do dinheiro investido inicialmente no contrato.
- (iii) Na data de vencimento, uma ação da Petrobras estava cotada a R\$ 13,00 – Nesse caso, o investidor A não exercerá a opção, já que ele pode comprar ações no mercado por um preço menor que o fixado em contrato. Assim, os R\$ 100,00 investidos na opção serão totalmente perdidos, garantindo ao investidor B um lucro igual ao prêmio recebido pela venda da opção. Esse cenário se repetiria para qualquer preço da ação na data de vencimento menor que o preço de exercício da opção, ou seja, menor que R\$ 15,00. Em situações como essa, costuma-se dizer que a opção “virou pó”.

As Figuras 1 e 2 apresentam, respectivamente, o lucro dos investidores A e B em função do preço da ação na data de vencimento, sendo que valores negativos de lucro indicam que aquele investidor obteve prejuízo na negociação. Em ambas, os pontos (i), (ii) e (iii) indicam as três situações descritas no exemplo acima. Na Figura 1, a faixa vermelha indica os valores de preço da ação para os quais o investidor A não exerce a opção, obtendo o maior prejuízo possível; a amarela indica os preços em que o mesmo exerce a opção mas ainda assim obtém um prejuízo intermediário; enquanto que a faixa verde destaca os cenários em que ele exerce a opção e aufer

algum lucro. Vale notar que, para o investidor A, que assumiu uma posição *long* na opção de compra, é vantajoso que o preço da ação na data de vencimento seja o maior possível, já que ele tem o direito de comprar ações por um preço fixo, determinado no contrato.

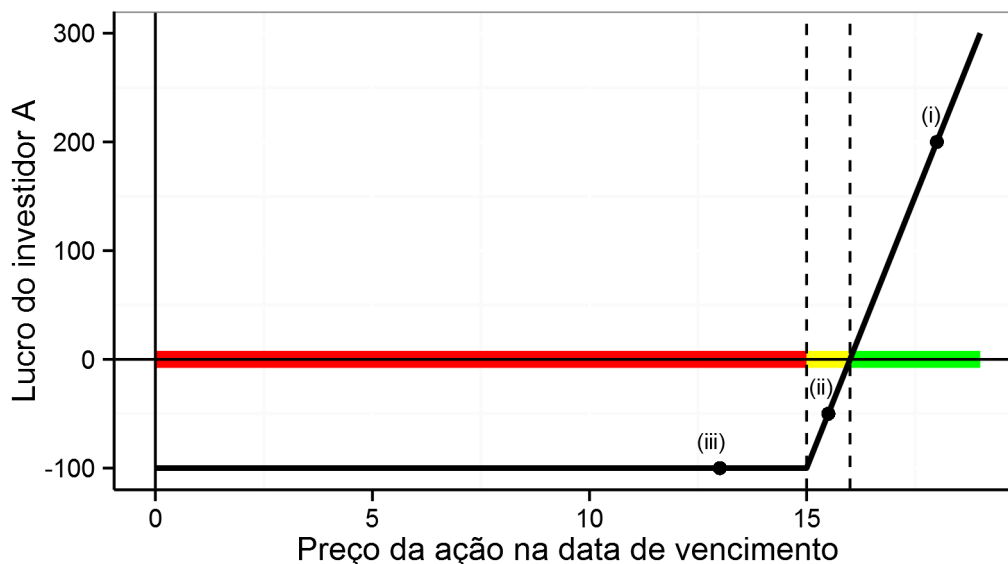


Figura 1 – Lucro do investidor A (posição *long* em opção de compra) em função do preço da ação na data de vencimento.

Fonte: O autor

De forma análoga, na Figura 2, a faixa vermelha indica os valores de preço da ação na data de vencimento para os quais o investidor B é exercido e obtém prejuízo; a faixa amarela se refere às situações em que ele é exercido, porém ainda consegue obter lucros intermediários; enquanto que a faixa verde indica o intervalo de preços da ação para os quais o investidor B não é exercido, sendo o valor recebido pelo prêmio da opção totalmente convertido em lucro. Nesse caso, em que o investidor assumiu uma posição *short* em opção de compra, é interessante que o preço da ação na data de vencimento esteja baixo, de preferência menor que o preço de exercício da opção, para que o investidor não seja obrigado a vender ações abaixo do preço praticado pelo mercado.

No caso de uma negociação de opção de venda (*put*), o investidor que comprou a opção, ou seja, assumiu uma posição *long*, se beneficiaria da queda do preço da ação. Como ele teria o direito de vender ações pelo preço de exercício, caso o preço das ações na data de vencimento se encontrasse abaixo desse valor, o investidor poderia vender ações acima do preço de mercado. Por outro lado, o indivíduo que assume uma posição *short* em opção de venda espera que o preço da ação suba, para que ele não tenha que comprar ações por um preço maior do que o encontrado no mercado.

Observa-se que, para cada uma das possíveis posições, o comprador e o vendedor da opção terão resultados que dependerão do preço do ativo subjacente. Esse resultado – ou valor final da opção – é chamado de *payoff*. O *payoff* de uma posição diz respeito apenas ao ganho

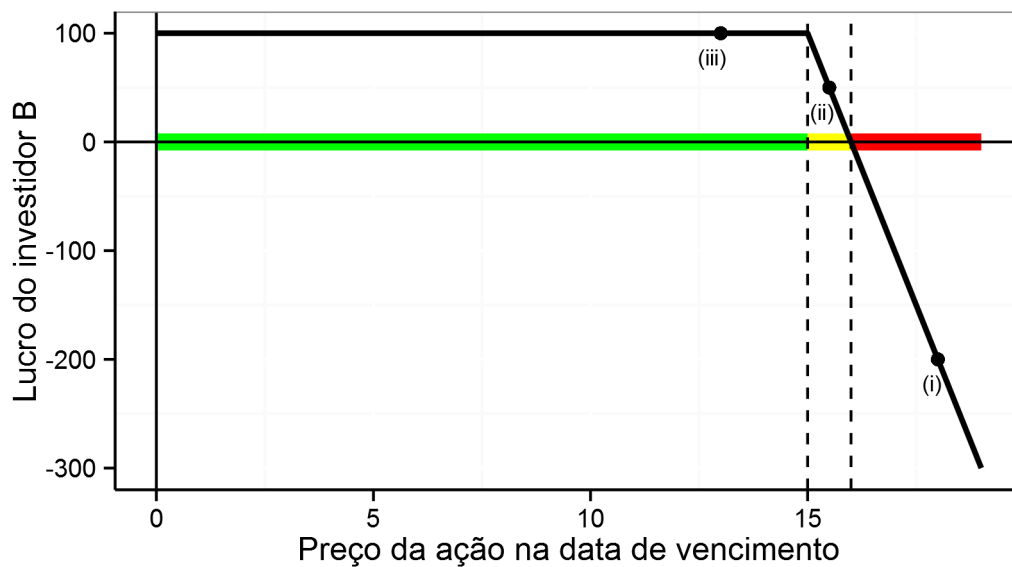


Figura 2 – Lucro do investidor B (posição *short* em opção de compra) em função do preço da ação na data de vencimento.

Fonte: O autor

ou perda que pode ser causado pelo exercício da opção, não incluindo o valor inicialmente pago ou recebido pelo contrato, ou seja, o prêmio. Em outras palavras, podemos decompor o lucro em duas parcelas: o investimento ou ganho inicial com o prêmio da opção e o *payoff*, resultado obtido na data de vencimento. Dessa forma, para que o investidor que assumiu uma posição *long* tenha lucro, é necessário que seu *payoff* seja maior que o valor inicialmente investido na opção. Por outro lado, o indivíduo que assumiu a posição *short* pode obter lucro mesmo com um *payoff* negativo, desde que a soma de seu *payoff* com o prêmio recebido na venda da opção seja positiva.

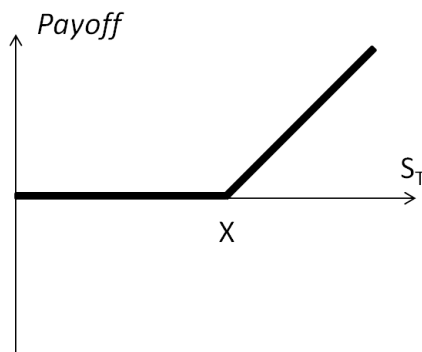
A seguir, são apresentados os *payoffs* das quatro posições possíveis em opções europeias, os quais são determinados pelas equações 2.1 a 2.4, sendo  $S_T$  o preço da ação (ativo subjacente da opção) na data de vencimento e  $X$  o preço de exercício (*strike*) da opção. As Figuras 3 a 6 apresentam a variação do *payoff* de acordo com  $S_T$ .

- *Payoff* da posição *long* em opção de compra europeia, ou seja, referente à compra de uma opção de compra (Figura 3):

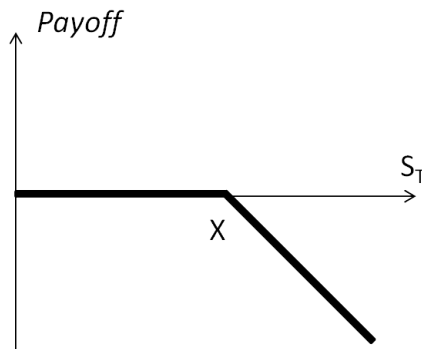
$$\max(S_T - X, 0) \quad (2.1)$$

- *Payoff* da posição *short* em opção de compra europeia, ou seja, referente à venda de uma opção de compra (Figura 4):

$$-\max(S_T - X, 0) = \min(X - S_T, 0) \quad (2.2)$$

Figura 3 – *Payoff* da posição *long* em opção de compra europeia.

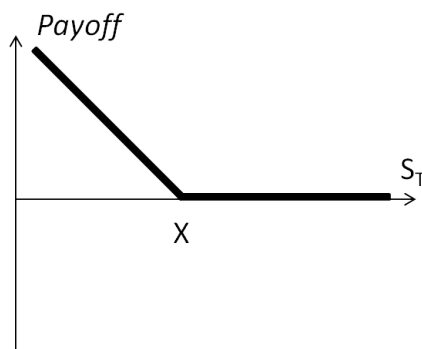
Fonte: Hull (2005, p. 206)

Figura 4 – *Payoff* da posição *short* em opção de compra europeia.

Fonte: Hull (2005, p. 206)

- *Payoff* da posição *long* em opção de venda europeia, ou seja, referente à compra de uma opção de venda (Figura 5):

$$\max(X - S_T, 0) \quad (2.3)$$

Figura 5 – *Payoff* da posição *long* em opção de venda europeia.

Fonte: Hull (2005, p. 206)

- *Payoff* da posição *short* em opção de venda europeia, ou seja, referente à venda de uma opção de venda (Figura 6):

$$-\max(X - S_T, 0) = \min(S_T - X, 0) \quad (2.4)$$

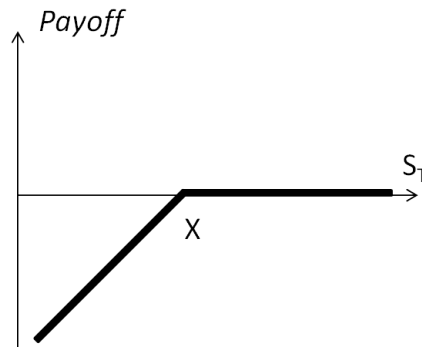


Figura 6 – *Payoff* da posição *short* em opção de venda europeia.

Fonte: Hull (2005, p. 206)

Por fim, outros termos comumente utilizados no mercado de opções são:

- *ITM (In the money)* – Uma opção ITM é aquela que oferece algum ganho para seu titular caso seja exercida, ou seja, uma *call* (opção de compra) com  $X < S$  ou uma *put* (opção de venda) com  $X > S$ , onde  $S$  é o preço da ação no instante atual.
- *ATM (At the money)* – Se refere à opção que não oferece ganhos nem perdas caso seja exercida (*call* ou *put* com  $X = S$ ).
- *OTM (Out of the money)* – Opção OTM é aquele que acarretaria alguma perda para seu titular caso fosse exercida (*call* com  $X > S$  ou *put* com  $X < S$ ). Na prática, os titulares de opções não as exercem caso se encontrem OTM, já que eles possuem o direito, e não a obrigação, de exercê-las.
- *Valor intrínseco* – É análogo ao *payoff* da posição *long* naquela opção, porém utilizando-se o preço atual da ação. Ou seja, é definido como o ganho que seria obtido se a opção fosse exercida nesse instante, caso ela esteja ITM, ou zero, caso contrário. Assim, para uma opção de compra, o valor intrínseco é dado por  $\max(S - X, 0)$ , enquanto que para uma opção de venda é calculado por  $\max(X - S, 0)$ .
- *Valor tempo* – Valor que a opção possui em decorrência do tempo restante até sua data de vencimento. É a parcela do valor total (preço) da opção que excede seu valor intrínseco.
- *Classe* – Conjunto de todas as *call* ou *put* referentes a um ativo.
- *Série* – Conjunto de todas as opções de uma classe que possuem a mesma data de vencimento e o mesmo preço de exercício.

## 2.2 Arbitragem

Um conceito presente na descrição de diversos modelos matemáticos de mercados financeiros é o de arbitragem. Dessa forma, o seu pleno entendimento é essencial para a compreensão do funcionamento desses modelos e a implementação computacional dos mesmos.

Hull (2005) define arbitragem como uma “estratégia de negociação que tira proveito da distorção entre os preços de dois ou mais títulos”. Ou seja, é uma estratégia que garante lucro ao seu praticante por, por exemplo, comprar um ativo por um preço menor que seu valor real ou vendê-lo por um valor maior do que aquele pelo qual consegue-se comprá-lo no mercado.

Glasserman (2003) trata o conceito de arbitragem com maior formalidade matemática. Definindo um portfólio como o conjunto de diversos ativos que um indivíduo possui, o mesmo pode ser caracterizado por um vetor  $\boldsymbol{\theta}_t$  onde cada elemento  $\theta_{i,t}$  representa o número de unidades do ativo  $i$  presentes no portfólio no instante de tempo  $t$ . Sendo  $\mathbf{S}_t$  o vetor cujos elementos  $S_{i,t}$  representam o preço de cada um dos  $i$  ativos do portfólio no instante  $t$ , pode-se definir o valor total do portfólio como  $\boldsymbol{\theta}_t^\top \mathbf{S}_t$ .

Considerando que toda variação de valor do portfólio se dá pela variação do preço dos ativos que o constituem – ou seja, não é acrescentado ou retirado dinheiro do mesmo –, Glasserman (2003) denomina arbitragem como qualquer estratégia de negociação para a qual uma das condições seguintes é satisfeita, para algum valor fixo de  $t$ , sendo  $P(\cdot)$  a probabilidade de determinado evento ocorrer:

$$(i) \quad \boldsymbol{\theta}_0^\top \mathbf{S}_0 < 0 \quad \text{e} \quad P(\boldsymbol{\theta}_t^\top \mathbf{S}_t \geq 0) = 1$$

$$(ii) \quad \boldsymbol{\theta}_0^\top \mathbf{S}_0 = 0, \quad P(\boldsymbol{\theta}_t^\top \mathbf{S}_t \geq 0) = 1 \quad \text{e} \quad P(\boldsymbol{\theta}_t^\top \mathbf{S}_t > 0) > 0$$

No caso descrito em (i), é feito um investimento inicial negativo – ou seja, é montado um portfólio que exige um gasto inicial – que, no período  $t$ , se torna uma riqueza não-negativa com probabilidade 1. Já em (ii), um investimento inicial nulo se torna uma riqueza positiva com probabilidade maior que zero, sendo que não existe a possibilidade de se terminar com uma riqueza negativa. Cada um desses casos descreve uma oportunidade de se obter lucro sem risco, o que caracteriza a arbitragem.

Um exemplo de arbitragem no mercado de opções se dá quando a paridade *put-call* é violada, conforme discutido por Hull (2005). A ideia de paridade *put-call* pode ser derivada por meio de dois portfólios, o primeiro constituído por uma *call* europeia e um montante  $Xe^{-rT}$  em dinheiro e o segundo por uma *put* europeia e uma ação. Nesse caso,  $X$  é o preço de exercício e  $T$  é a data de vencimento de ambas opções,  $r$  representa a taxa de juros livre de risco e a ação do segundo portfólio é aquela que serve de ativo subjacente da *call* e da *put* referidas anteriormente.

Temos que, no instante  $T$ , o *payoff* da *call* será  $\max(S_T - X, 0)$ , enquanto o montante em dinheiro aumentará para  $Xe^{-rT}e^{rT} = X$ , de maneira que o valor total do portfólio será  $\max(S_T, X)$ . De forma análoga, para o segundo portfólio, tem-se um *payoff* de  $\max(X - S_T, 0)$  para a *put* e um preço  $S_T$  para a ação, totalizando  $\max(X, S_T)$ . Ou seja, ambos portfólios possuem o mesmo valor na data de expiração das opções. Assim, define-se a paridade *put-call*

pela equação 2.5, onde  $c$  e  $p$  representam, respectivamente, o preço da *call* e da *put* presentes nos portfólios (HULL, 2005).

$$c + Xe^{-rT} = p + S_0 \quad (2.5)$$

Caso a equação 2.5 não seja satisfeita, significa que um dos portfólios está supervalorizado em relação ao outro. Assim, surge uma oportunidade de arbitragem, que consiste em comprar o portfólio que estiver subvalorizado e vender aquele que estiver supervalorizado.

Qiu et al. (2012) apresentam um caso diferente de arbitragem no mercado de opções, envolvendo a estratégia *butterfly spread*. Um *butterfly spread* pode ser criado pela venda de duas opções de compra com preço de exercício  $X_2$ , próximo do preço atual da ação, e compra de uma *call* com preço de exercício  $X_1$  e outra com *strike*  $X_3$ , onde  $X_1 < X_2 < X_3$  e  $X_2 - X_1 = X_3 - X_2$  (HULL, 2005). Todas as opções envolvidas nessa estratégia possuem a mesma data de vencimento e se referem a um mesmo ativo. A Tabela 1 apresenta o *payoff* dessa estratégia para as diferentes situações possíveis.

Tabela 1 – *Payoffs* de um *butterfly spread*.

Intervalo de preços da ação	<i>Payoff</i> da primeira posição <i>long</i> em <i>call</i>	<i>Payoff</i> da segunda posição <i>long</i> em <i>call</i>	<i>Payoff</i> das posições <i>short</i> em <i>calls</i>	<i>Payoff</i> total*
$S_T < X_1$	0	0	0	0
$X_1 < S_T < X_2$	$S_T - X_1$	0	0	$S_T - X_1$
$X_2 < S_T < X_3$	$S_T - X_1$	0	$-2(S_T - X_2)$	$X_3 - S_T$
$S_T > X_3$	$S_T - X_1$	$S_T - X_3$	$-2(S_T - X_2)$	0

Fonte: Hull (2005)

Nota: \* Esses *payoffs* são calculados utilizando-se a relação  $X_2 = 0,5(X_1 + X_3)$ .

De acordo com Hull (2005), em geral, essa estratégia requer um pequeno investimento inicial, gerando lucros para o indivíduo que a utiliza de acordo com a Figura 7. Sendo  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  os prêmios das *calls* com preço de exercício  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , respectivamente, a Figura 7 reflete o caso em que  $2c_2 < c_1 + c_3$ . Nessa situação, essa estratégia de investimento só irá gerar lucro se os movimentos no preço da ação forem pequenos, ou seja, se o preço continuar próximo de  $X_2$ .

Porém, quando  $2c_2 \geq c_1 + c_3$ , surge uma oportunidade de arbitragem, como apontado por Qiu et al. (2012). Nesse caso, não é necessário investimento inicial, já que a receita com as opções vendidas será maior ou igual ao custo das duas opções compradas. Além disso, existe uma probabilidade positiva de haver lucro e não existe a possibilidade de prejuízo. A Figura 8 ilustra uma situação desse tipo, onde  $2c_2 > c_1 + c_3$  (caso particular em que se verifica a desigualdade restrita), de forma que o portfólio gera lucro para qualquer preço da ação no dia de vencimento das opções.

De maneira análoga, um *butterfly spread* pode ser construído com opções de venda, por meio da venda de duas *puts* com preço de exercício  $X_2$  e compra de uma *put* com *strike*  $X_1$  e outra com preço de exercício  $X_3$ , sendo  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  definidos como no caso anterior (HULL,

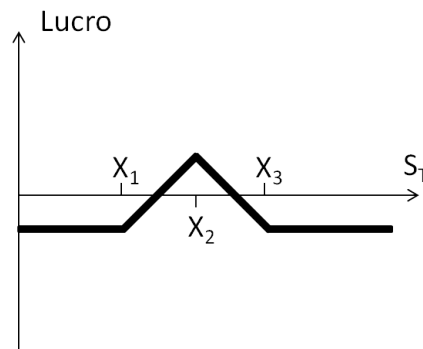


Figura 7 – Padrão de lucros de um *butterfly spread*.

Fonte: Hull (2005, p. 258)

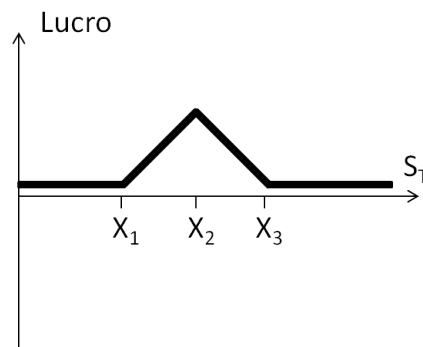


Figura 8 – Padrão de lucros de um *butterfly spread* que caracteriza uma oportunidade de arbitragem.

Fonte: O autor

2005). Os *payoffs* e o lucro dessa estratégia seguem o mesmo padrão daquela realizada com opções de compra, também havendo oportunidade de arbitragem quando  $2p_2 \geq p_1 + p_3$ , onde  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  representam, respectivamente, os prêmios das *puts* com preço de exercício  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  (QIU et al., 2012).

### 2.3 Fatos estilizados

Fato estilizado é um termo utilizado em economia para designar uma característica observada empiricamente tida como essencial para um modelo que busca representar aquela realidade (ZHOU et al., 2011). Maslov (2000) enfatiza esta definição ao afirmar que qualquer modelo de mercado de ativos deve apresentar certas características empíricas para que seja considerado bem sucedido.

Segundo Cont (2001), no contexto dos mercados financeiros – como os de ações e opções –, fatos estilizados são propriedades estatísticas não-triviais observadas nas variações aleatórias dos preços e volumes em diversos mercados e em diferentes períodos de tempo. Apesar de esses fatos serem geralmente formulados em termos de propriedades qualitativas, eles não são facilmente

reproduzidos por qualquer modelo estocástico.

No caso específico deste trabalho, pode parecer exagero buscar a replicação de tais características de certa complexidade estatística, já que as mesmas dificilmente seriam percebidas por um usuário que está no início de seu aprendizado sobre mercados de ações e opções. Contudo, um modelo que consiga representar de forma mais adequada o mercado real, pode ainda ser utilizada na avaliação de estratégias de investimento e do impacto de regulações no mercado financeiro. A necessidade de novos modelos para o melhor entendimento da economia, principalmente do setor financeiro, é destacada por uma série de autores, como [Farmer e Foley \(2009\)](#) e [Buchanan \(2009\)](#).

Esta seção apresenta os fatos estilizados de mercados de opções mais comumente discutidos na literatura: a presença de *smiles* de volatilidade e de assimetria na volatilidade implícita, a diferença de liquidez entre opções com diferentes preços de exercício e o comportamento dinâmico da volatilidade implícita. Porém, antes de uma análise aprofundada a respeito dessas características, se faz necessária a exposição do conceito de volatilidade implícita e do modelo de Black-Scholes, a partir do qual ela é calculada.

### 2.3.1 Volatilidade implícita e o modelo de Black-Scholes

O modelo de Black-Scholes ([BLACK; SCHOLES, 1973](#)), desenvolvido com base no conceito de ausência de arbitragem de [Merton \(1973\)](#) – e, por isso, também conhecido como modelo de Black-Scholes-Merton – é um modelo clássico de precificação de opções europeias. Basicamente, os valores de opções europeias de compra e de venda são determinados a partir das seguintes pressuposições ([HULL, 2002](#)):

- O preço da ação segue um Movimento Browniano Geométrico com parâmetros de rentabilidade e volatilidade constantes;
- É permitida a venda a descoberto, ou seja, a venda de um ativo ou derivativo que o indivíduo não possui;
- Não há custos de transação ou outras taxas;
- Todos os ativos ou derivativos são perfeitamente divisíveis;
- Não há distribuição de dividendos, ou seja, distribuição de lucros para os acionistas, durante a vida do derivativo;
- Não há oportunidades de arbitragem, ou seja, de se obter lucros por distorções nos preços do mercado;
- As negociações são realizadas de forma contínua;
- A taxa de juros livre de risco é constante.

O Movimento Browniano Geométrico que descreve o comportamento do preço da ação é apresentado na equação 2.6, onde  $S_i$  é o preço da ação no tempo  $i$ ,  $\mu$  é a rentabilidade da ação,  $\sigma$

é a volatilidade do preço da ação e  $W_t$  é a variável aleatória de índice  $t$  definida pelo Movimento Browniano padrão  $W$  (GLASSERMAN, 2003).

$$S_t = S_0 \exp [(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t] \quad (2.6)$$

Ainda de acordo com Glasserman (2003), entende-se por um Movimento Browniano padrão definido no intervalo  $[0, T]$  um processo estocástico  $\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$  que apresenta as seguintes propriedades:

- $W_0 = 0$ ;
- A aplicação  $t \mapsto W_t$  é uma função contínua em  $[0, T]$ ;
- Os incrementos  $\{W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}\}$  são independentes para todo  $k$  e  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq T$ ;
- Os incrementos  $(W_t - W_s)$  apresentam distribuição de probabilidade normal com média zero e variância  $t - s$ , ou seja,  $(W_t - W_s) \sim N(0, t - s)$  para todo  $t$  e  $s$  com  $0 \leq s < t \leq T$ .

Dadas essas condições, os preços de uma *call* ( $\tilde{c}$ ) e de uma *put* ( $\tilde{p}$ ) com preço de exercício  $X$  e tempo até o vencimento  $\Delta T$  são estimados, respectivamente, de acordo com as equações 2.7 e 2.8. Nessas equações,  $\Phi$  é a função de distribuição de probabilidade acumulada referente a uma distribuição normal padrão e  $r$  é a taxa de juros livre de risco. Os valores  $d^{(1)}$  e  $d^{(2)}$  são obtidos a partir das equações 2.9 e 2.10 (HULL, 2002).

$$\tilde{c} = S_0 \Phi(d^{(1)}) - X e^{-r\Delta T} \Phi(d^{(2)}) \quad (2.7)$$

$$\tilde{p} = X e^{-r\Delta T} \Phi(-d^{(2)}) - S_0 \Phi(-d^{(1)}) \quad (2.8)$$

$$d^{(1)} = \frac{\ln(S_0/X) + (r + \sigma^2/2)\Delta T}{\sigma\sqrt{\Delta T}} \quad (2.9)$$

$$d^{(2)} = \frac{\ln(S_0/X) + (r - \sigma^2/2)\Delta T}{\sigma\sqrt{\Delta T}} = d^{(1)} - \sigma\sqrt{\Delta T} \quad (2.10)$$

Hull (2002) destaca que a volatilidade ( $\sigma$ ) é o único parâmetro que não pode ser observado diretamente no mercado real. Inicialmente introduzido por Latane e Rendleman (1976), o conceito de volatilidade implícita se refere ao valor do parâmetro de volatilidade que, quando utilizado nas fórmulas de precificação de Black-Scholes, retorna o preço real – aquele praticado no mercado – de uma opção. Ou seja, sendo  $\tilde{c}(\sigma)$  o preço de uma *call* determinado pelo modelo de Black-Scholes, em função da volatilidade  $\sigma$  utilizada, e  $c$  o preço de mercado dessa opção, a volatilidade implícita

$\hat{\sigma}$  é aquela que satisfaz a equação 2.11 (FENGLER, 2012). A definição é válida de forma análoga para opções de venda.

$$\tilde{c}(\hat{\sigma}) - c = 0 \quad (2.11)$$

### 2.3.2 Smiles de volatilidade

Como o modelo de Black-Scholes assume que a volatilidade da ação é constante, era de se esperar que a volatilidade implícita para opções com diferentes preços de exercício fosse a mesma. Porém, isso não é o que ocorre na realidade, como observado por Hull (2002), Suzuki, Shimokawa e Misawa (2009), Fenger (2012) e Kawakubo, Izumi e Yoshimura (2014).

Para uma data de vencimento fixa, a curva de volatilidade implícita em função do preço de exercício da opção possui um formato similar a um sorriso – ou seja, é uma função convexa –, característica que é conhecida como *smile* de volatilidade. Essa curva se assemelha à letra “U” para opções próximas do seu vencimento, se tornando mais achatada para aquelas com maior tempo até sua expiração (FENGLER, 2012). A Figura 9 ilustra esse comportamento, apresentando a volatilidade implícita em função do preço de exercício para opções com vencimento no instante  $T_1$ , na esquerda, e a curva de volatilidade implícita para opções sobre o mesmo ativo, porém com vencimento em  $T_2$ , na direita, onde  $T_2 > T_1$ .

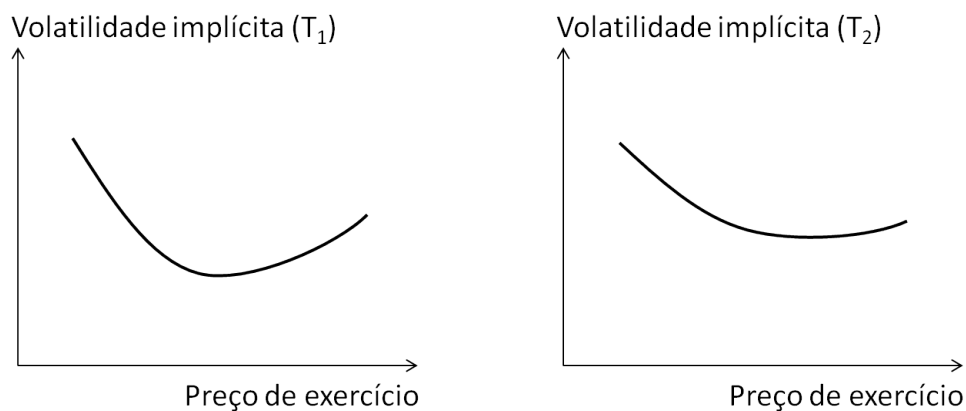


Figura 9 – Volatilidade implícita em função do preço de exercício para opções com vencimento nos instantes  $T_1$  e  $T_2$ , onde  $T_2 > T_1$ .

Fonte: O autor

Vários autores, em vez de definirem a curva de volatilidade implícita em função do preço de exercício, a representam em função de uma medida chamada *moneyness*, que mensura o quanto uma opção de compra está “fora do dinheiro”. Na literatura são encontradas diferentes definições dessa medida, porém todas similares e com a mesma interpretação. Cont e Fonseca (2002), por exemplo, definem a métrica *moneyness* no instante de tempo  $t$  como  $X/S_t$ . Por outro lado, Fenger, Härdle e Villa (2003) utilizam o cálculo  $X/S_t e^{r\Delta T}$ , projetando o valor da ação na data de vencimento com base na taxa de juros livre de risco  $r$ , enquanto Suzuki, Shimokawa e

Misawa (2009) adotam a medida  $(X - S_t)/S_t = (X/S_t) - 1$ . Neste trabalho, optou-se por utilizar a definição de *moneyness* adotada por Cont e Fonseca (2002), ou seja,  $X/S_t$ .

### 2.3.3 Assimetria da volatilidade implícita

Além da convexidade, outra característica da curva de volatilidade implícita apontada por diversos estudos é sua assimetria. Hull (2002) afirma que a volatilidade implícita de opções sobre ações – sejam elas *calls* ou *puts* – diminui ao passo que o preço de exercício aumenta. Ou seja, ela é uma função predominantemente decrescente.

Fengler (2012) utiliza a inclinação da curva de  $\hat{\sigma}^2$  – onde  $\hat{\sigma}$  é a volatilidade implícita – no ponto em que o preço da ação se iguala ao preço de exercício da opção para avaliar a simetria de  $\hat{\sigma}$  em função do preço de exercício. Segundo Fengler (2012), opções sobre ações apresentam valores negativos para essa medida de simetria. A equação 2.12 descreve matematicamente esse conceito, sendo  $m$  a *log-moneyness*, definida por  $\ln(X/S_t)$ , de forma que  $m = 0$  para *calls* ou *puts* ATM, para as quais  $X = S_t$ .

$$\left. \frac{\partial \hat{\sigma}^2}{\partial m} \right|_{m=0} < 0 \quad (2.12)$$

Outra medida utilizada para quantificar essa característica é o chamado *skewness premium*, apresentado por Bates (1991). O *skewness premium* é definido como o desvio percentual entre o preço de uma opção de compra  $x\%$  OTM – ou seja, com preço de exercício  $x\%$  acima do preço da ação – e o preço de uma opção de venda  $x\%$  OTM – nesse caso, aquela que possui preço de exercício  $x\%$  abaixo do preço atual da ação. O valor de  $x$  deve ser positivo e, em geral, não é muito alto, já que os preços de exercício de opções não costumam ser demasiadamente distantes do preço da ação subjacente. A equação 2.13 ilustra como essa medida pode ser calculada, onde  $c_{x\%}$  e  $p_{x\%}$  são, respectivamente, os preços reais de uma *call* e de uma *put*  $x\%$  OTM.

$$\text{skewness premium} = \frac{c_{x\%}}{p_{x\%}} - 1 \quad (2.13)$$

A princípio, pode-se ter a impressão de que a medida proposta por Bates (1991) não diz respeito à simetria da curva de volatilidade implícita. Porém, no modelo de precificação de Black-Scholes, quanto maior a volatilidade utilizada, maior será o preço calculado para a opção. Ou seja, um *skewness premium* negativo indica que a volatilidade implícita é maior para opções com preços de exercício menores.

### 2.3.4 Diferença de liquidez

Nos mercados reais, em geral, opções OTM são mais líquidas que opções ITM. Analisando dados empíricos de opções sobre futuros do índice S&P500 (*Standard and Poor's 500*) – o qual sintetiza o valor das ações de 500 grandes empresas americanas –, Ederington e Guan (2002) observaram que o volume médio de negociações diárias de opções OTM é maior que o das ITM. Além disso, apontaram em seu estudo que, para os contratos mais próximos de seu vencimento, o volume de negociação é maior para as opções OTM que estão mais perto de se tornar ATM,

ou seja, aquelas com preço de exercício próximo do preço atual do ativo subjacente. As Figuras 10 e 11 apresentam os dados discutidos por Ederington e Guan (2002).

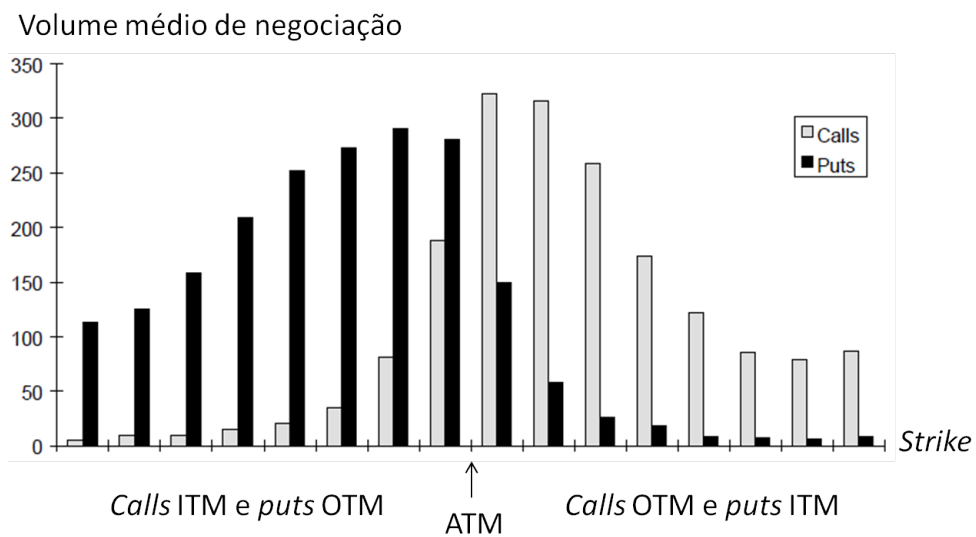


Figura 10 – Volume médio de negociação diária referente a opções sobre futuros do índice S&P500 com tempo até o vencimento de 2 a 6 semanas.

Fonte: Adaptada de Ederington e Guan (2002)

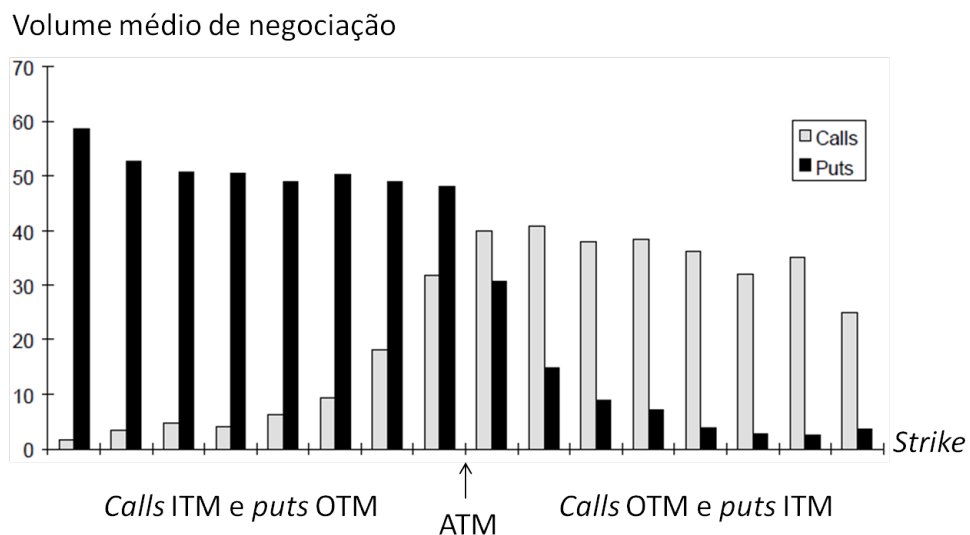


Figura 11 – Volume médio de negociação diária referente a opções sobre futuros do índice S&P500 com tempo até o vencimento de 13 a 26 semanas.

Fonte: Adaptada de Ederington e Guan (2002)

Qiu et al. (2012) afirmam que essa diferença pode ser explicada pelo fato das opções OTM serem mais baratas e, conseqüentemente, permitirem maior alavancagem. Dessa forma, os autores estendem o fato estilizado de diferença de liquidez a opções sobre qualquer tipo de ativo, incluindo ações, apesar do estudo de Ederington e Guan (2002) ter sido realizado exclusivamente

com opções sobre um índice.

### 2.3.5 Dinâmica da volatilidade implícita

Além das características estáticas discutidas nas seções 2.3.2 e 2.3.3, devem ser avaliados os aspectos dinâmicos da volatilidade implícita, ou seja, aqueles que dizem respeito à sua evolução temporal. Essas características incluem, por exemplo, a dispersão dos valores observados de volatilidade implícita ao longo do tempo.

Nesse contexto, [Cont e Fonseca \(2002\)](#) afirmam que o desvio-padrão da volatilidade implícita é maior para *calls* ITM e *puts* OTM ( $moneyness < 1$ ) que para opções de ambos os tipos ATM ( $moneyness = 0$ ). Ou seja, a volatilidade implícita é mais volátil – possui desvio-padrão maior – se  $X < S_t$ , comparado ao caso em que  $X = S_t$ . A Figura 12 apresenta os dados empíricos analisados por [Cont e Fonseca \(2002\)](#) para que chegassem a essa conclusão.

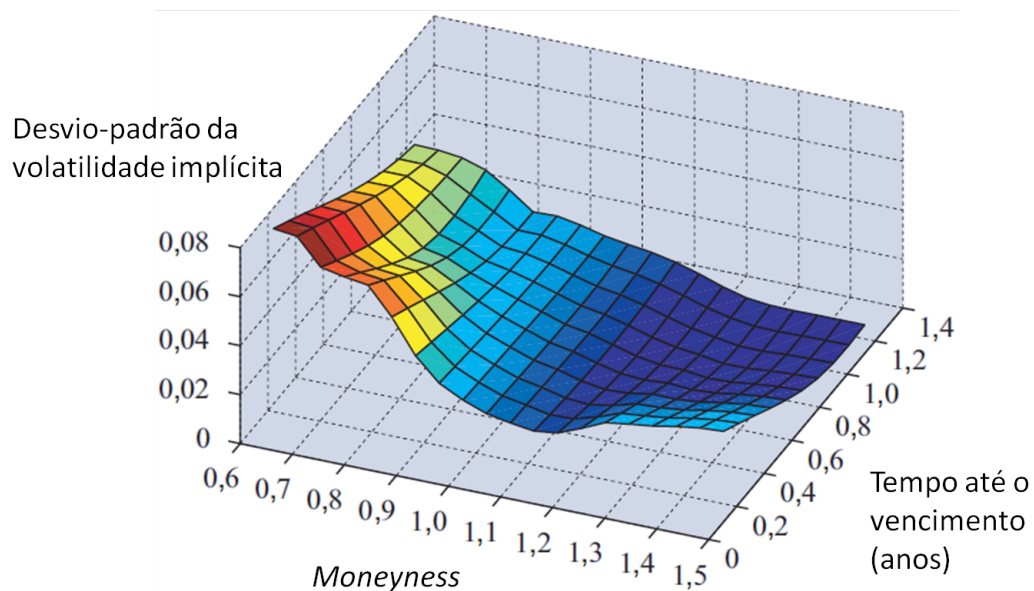


Figura 12 – Desvio-padrão das volatilidades implícitas diárias do índice S&P500 em função da *moneyness* e do tempo até o vencimento.

Fonte: Adaptada de [Cont e Fonseca \(2002\)](#)

## 2.4 Funcionamento do mercado

Na presente seção, são apresentadas as regras e mecanismos que regem a negociação de opções financeiras no mercado brasileiro. O conhecimento dessas características se mostra fundamental para a construção de um simulador que represente o mercado financeiro brasileiro de forma fidedigna. A princípio, apresenta-se a forma como as negociações são conduzidas, seguida de algumas regulamentações que incidem sobre as negociações e criação de novas séries. As referências aqui utilizadas são documentos publicados pela BM&FBovespa.

### 2.4.1 Mecanismo de negociação

Atualmente, as negociações de ações e opções sobre ações da BM&FBovespa são realizadas diariamente por meio de pregão eletrônico, com exceção de sábados, domingos e feriados (BM&FBOVESPA, 2013b). O funcionamento regular do pregão ocorre das 10h às 16h55 (BM&FBOVESPA, 2014c).

As negociação acontecem por meio de ordens de compra e venda registradas no sistema eletrônico de negociação. Essas ordens consistem em solicitações de um indivíduo para que sua corretora, a qual funciona como intermediária entre ele e a bolsa de valores, compre ou venda ativos em seu nome, de acordo com as condições especificadas. Os tipos de ordem existentes são (BM&FBOVESPA, 2013b):

- *Ordem a mercado* – especifica somente a quantidade e as características dos ativos ou contratos a serem comprados ou vendidos, devendo ser executada no momento em que for recebida pelo melhor preço disponível;
- *Ordem limitada* – além da quantidade, especifica o preço limite que o indivíduo aceita pagar ou receber, sendo executada somente por preço igual a esse ou melhor;
- *Ordem administrada* – semelhante à ordem a mercado, porém o momento de sua execução fica a critério da corretora;
- *Ordem discricionária* – ordem emitida por um administrador de carteira de títulos ou por alguém que represente mais de um indivíduo, sendo os ativos e preços atribuídos a seus clientes após a execução da ordem;
- *Ordem de financiamento* – constitui-se de uma ordem de compra ou venda de um ativo ou direito em um mercado, conjuntamente com uma ordem inversa (de venda ou compra, respectivamente) do mesmo ativo ou direito, no mesmo ou em outro mercado, ambos administrados pela BM&FBovespa;
- *Ordem stop* – ordem que será executada caso o preço pelo qual ocorreu a última negociação do ativo ou direito em questão ultrapasse certo valor;
- *Ordem casada* – ordem que será executada mediante a execução de outra ordem do indivíduo, podendo ser emitida com ou sem um preço limite.

As ordens que não forem executadas imediatamente após sua emissão são registradas no livro de ordens, o qual exibe todas as ordens ainda válidas e suas respectivas características, como preços e quantidades. Elas são exibidas de acordo com o princípio de prioridade do melhor preço – maior preço de compra e menor preço de venda –, não havendo negócio a outros valores até que as ordens de melhores preços sejam atendidas ou canceladas. Em caso de preços iguais, tem prioridade a ordem que foi emitida primeiro (BM&FBOVESPA, 2013b). A Tabela 2 apresenta um exemplo de livro de ordens. Em geral, os investidores têm acesso ao livro de ordens por meio de um *home broker*, ferramenta de acesso aos mercados da BM&FBovespa oferecida pela

Tabela 2 – Exemplo de livro de ordens.

Compra			Venda		
Ordem	Quantidade	Preço	Preço	Quantidade	Ordem
1	5000	10,58	11,03	7000	1
2	4000	10,58	11,03	2000	2
3	3000	10,57	11,05	1000	3
4	4000	10,54			4

Fonte: Adaptada de [BM&FBOVESPA \(2014d\)](#)

maioria das corretoras, pela qual o indivíduo pode consultar os livros e emitir ordens pela internet ([BM&FBOVESPA, 2015a](#)).

A cada negociação realizada no mercado de opções, as posições de ambos os indivíduos são atualizadas e registradas, sendo ela a de titular (posição *long*) ou lançador (posição *short*). Na data de vencimento de um contrato, não se admite a abertura de novas posições sobre o mesmo, sendo apenas admitido o encerramento de posições abertas anteriormente ([BM&FBOVESPA, 2013b](#)).

Quanto às quantidades solicitadas por cada ordem, as ações são negociadas em lotes-padrão, geralmente compostos por 100 ações ([BM&FBOVESPA, 2015e](#)), e de forma fracionada em mercados distintos. Analogamente, opções sobre ações são negociadas de acordo com o lote-padrão referente a seu ativo subjacente ([BM&FBOVESPA, 2013b](#)). Já em relação aos preços, assim como no mercado de ações, a variação mínima de apregoação do mercado de opções sobre ações é de R\$ 0,01 ([BM&FBOVESPA, 2014a](#)). Ou seja, todo preço de negociação deve ser um múltiplo de R\$ 0,01.

O exercício das opções pode ser realizado das 10h às 13h no dia de vencimento do contrato e das 10h às 16h em dias anteriores, caso se trate de uma opção americana ([BM&FBOVESPA, 2014c](#)). Além disso, opções americanas não podem ser exercidas na data de aquisição do contrato, ficando o titular na obrigação de aguardar pelo menos o próximo dia de negociação para exercer seu direito de compra ou venda. O ato de exercício de uma opção implica a operação de compra ou venda do ativo subjacente ao preço de exercício, sendo essa demanda atendida por um indivíduo sorteado entre aqueles de posição lançadora no contrato referido ([BM&FBOVESPA, 2013b](#)).

Alguns ativos ou derivativos contam ainda com formadores de mercado, também conhecidos como *market makers*. A atividade de formador de mercado é exercida por pessoas jurídicas cadastradas na BM&FBovespa para esse fim, tendo o objetivo de fornecer maior liquidez ao mercado. Essa liquidez é alcançada pelo fato dos *market makers* terem o dever de lançar certa quantidade de ofertas de compra e venda do ativo ou derivativo em questão, respeitando um intervalo (*spread*) máximo entre seus preços de compra e de venda. Tanto a quantidade mínima quanto o *spread* máximo dos formadores de mercado são determinados pela bolsa ([BM&FBOVESPA, 2014b](#)).

#### 2.4.2 Garantias e demais regulamentações

A fim de manter o mercado de opções justo e ordenado, a BM&FBovespa pode solicitar a qualquer momento que seus participantes forneçam garantias ([BM&FBOVESPA, 2013b](#)). Esse

tipo de garantia é exigido dos indivíduos que assumem posições lançadoras, ou seja, aqueles que possuem uma potencial obrigação futura. Em geral, é exigido um depósito, também chamado de margem, correspondente a um percentual do valor dos ativos-objeto aos quais o contrato em questão se refere. A margem média atualmente exigida pela BM&FBovespa é de 56%, variando entre 16% e 80% de acordo com o ativo-objeto do contrato (BM&FBOVESPA, 2015b). Esse mecanismo possibilita o lançamento de opções a descoberto, operação que consiste em assumir uma posição lançadora (*short*) sem possuir os ativos necessários para cumprir com o exercício da opção naquele momento.

Outros valores cobrados na realização de negociações nos mercados de ações e opções sobre ações da BM&FBovespa são as corretagens, taxas e emolumentos. A corretagem é um valor que o cliente paga à corretora para cada operação registrada na bolsa, sendo esse valor definido pela própria corretora. Já as taxas e emolumentos são pagos à BM&FBovespa, sendo calculados por um percentual que incide sobre o prêmio da opção, no momento da compra ou venda, e sobre o preço de exercício, caso o contrato seja exercido. No mercado de ações, as taxas e emolumentos são cobrados apenas no momento da negociação, com base no preço do ativo (BM&FBOVESPA, 2013b). No presente momento, esses encargos de responsabilidade da bolsa variam entre 0,0015% a 0,1340%, a depender da situação (BM&FBOVESPA, 2015d).

Ainda no intuito de manter o bom funcionamento do mercado de opções, a BM&FBovespa determina limites de posições para cada série e conjunto de séries. A posição de cada investidor em uma série específica não pode exceder 2% da totalidade de ações em circulação que servem como ativo-objeto da série, ao passo que a soma de suas posições nas diversas séries referentes àquele ativo não devem ultrapassar 4% do total de ações. De forma análoga, para o mercado como um todo, esses limites são de 20% e 40%, respectivamente. Ou seja, o total de posições no mercado de opções não pode ser superior a 40% da quantidade do ativo-objeto em circulação no mercado de ações, sendo que para cada série existe um limite de 20% (BM&FBOVESPA, 2015b).

Por fim, a bolsa realiza ajustes nos contratos de opções devido a distribuição de dividendos – pagamento em dinheiro aos acionistas – e bonificações (*splits*) – emissão de novas ações para os acionistas. No caso de distribuição de proventos em dinheiro, o valor do dividendo líquido pago por ação é deduzido do preço de exercício dos contratos que possuem aquela ação como ativo-subjacente. Já no caso de bonificação, tanto o preço de exercício quanto a quantidade de ações a que o contrato se refere são ajustados proporcionalmente ao percentual do provento (BM&FBOVESPA, 2013a).

### 2.4.3 Séries autorizadas

A BM&FBovespa estabelece alguns critérios para a abertura de novas séries, definindo quais tipos de contratos, ativos-objeto, datas de vencimento e preços de exercícios são aceitáveis. É autorizada a abertura de séries de opções de compra americanas ou europeias e opções de venda europeias, referentes a ações listadas na carteira teórica IBrX-100 (BM&FBOVESPA, 2014c). Essa carteira é composta por 100 ações selecionadas entre aquelas com maior número de negócios e volume financeiro na bolsa (BM&FBOVESPA, 2015f).

Quanto à data de vencimento, são permitidas séries com exercício na terceira segunda-

feira de todos em meses, com um prazo de vencimento máximo de 24 meses a partir da data corrente (BM&FBOVESPA, 2014c). Caso esse dia se trate de um feriado em determinado mês, a data de vencimento desse mês será o dia subsequente. O mês de fevereiro caracteriza uma exceção, podendo ter o vencimento das opções em sua segunda segunda-feira, dependendo das datas do Carnaval (BM&FBOVESPA, 2015c).

Além disso, os preços de exercício das séries devem respeitar o intervalo mínimo estabelecido pela BM&FBovespa. A distância entre o *strike* de duas séries deve ser um múltiplo do intervalo-padrão, o qual é definido em função do preço de exercício, de acordo com a Tabela 3. No caso de *calls* europeias, o intervalo-padrão equivale a 50% do intervalo entre preços de exercício das *calls* americanas (BM&FBOVESPA, 2013a).

Tabela 3 – Intervalos dos preços de exercício para *calls* americanas e *puts* europeias.

Preço de exercício da opção (R\$)	Intervalo-padrão de preços de exercício (R\$)
De 1,00 a 4,99	0,10
De 5,00 a 9,99	0,20
De 10,00 a 49,99	0,50
De 50,00 a 99,99	1,00
De 100,00 a 199,99	2,00
De 200,00 a 999,99	10,00
De 1.000,00 a 2.999,99	50,00
De 3.000,00 a 9.999,99	100,00
Acima de 10.000,00	1.000,00

Fonte: BM&FBOVESPA (2013a)

Cada série autorizada possui um código próprio para ser utilizado nas negociações. Essa codificação é feita com cinco letras seguidas de um número de um ou dois dígitos. As quatro primeiras letras correspondem ao código da empresa – o mesmo utilizado no mercado de ações –, enquanto a última define o tipo e o mês de vencimento do contrato, conforme a Tabela 4. Por fim, o número diferencia as diversas séries que possuem o mesmo tipo e mês de vencimento, identificando características do contrato como preço de exercício e ano de vencimento (BM&FBOVESPA, 2014c).

Para exemplificar, considere a opção PETRL9, que trata-se de uma série atualmente em negociação na BM&FBovespa. Ela refere-se à uma opção de compra (pois a quinta letra é L, que encontra-se no intervalo de A-L) referente a ações da Petrobras (sigla PETR), com vencimento no mês de dezembro (informação específica da letra L). O número ao fim desta opção a diferencia das outras séries que compartilham das mesmas características citadas anteriormente e, nesse caso, indica que se trata de uma opção americana, referente a ações preferenciais, com preço de exercício R\$ 9,00 e vencimento no ano de 2015.

Deve-se ressaltar que nem sempre o preço de exercício coincide com o número da série. A série atual PETRT41, por exemplo, consiste em uma opção de venda (T) sobre ações ordinárias da Petrobras (PETR), com preço de exercício igual a R\$ 11,50 e vencimento em 17/08/2015. Ou seja,

Tabela 4 – Codificação das séries: significado da quinta letra.

<b>Mês de vencimento</b>	<b><i>Call</i></b>	<b><i>Put</i></b>
Janeiro	A	M
Fevereiro	B	N
Março	C	O
Abril	D	P
Maiο	E	Q
Junho	F	R
Julho	G	S
Agosto	H	T
Setembro	I	U
Outubro	J	V
Novembro	K	W
Dezembro	L	X

Fonte: [BM&FBOVESPA \(2014c\)](#)

não existe um significado direto para o número da série, devendo o mesmo ser consultado na base de dados da BM&FBovespa para que se saiba as características do contrato ([BM&FBOVESPA, 2015g](#)).

## 3 Mercados Artificiais

O presente capítulo trata de mercados financeiros artificiais, ou seja, modelos computacionais que buscam replicar o comportamento do mercado real. A primeira seção aborda a simulação baseada em agentes, método utilizado no desenvolvimento do simulador de mercado de opções proposto neste trabalho. Em seguida, são analisados os principais mercados artificiais de ações modelados por meio de agentes da literatura, além do modelo de [Ferreira \(2014\)](#), que foi utilizado como base para este trabalho. Por fim, é feito um levantamento bibliográfico mais aprofundado a respeito dos modelos de mercados de opções já desenvolvidos.

### 3.1 Simulação baseada em agentes

A simulação baseada em agentes é uma abordagem relativamente nova, a qual vem crescendo consideravelmente nos últimos anos. De um modo geral, a estrutura desse tipo de modelagem inclui a definição de agentes, bem como seu comportamento e seus atributos, e do ambiente em que eles se relacionam ([MACAL; NORTH, 2010](#)).

[Macal e North \(2010\)](#) definem um agente como um indivíduo social, que interage com os demais agentes de alguma forma, e autônomo, tomando decisões de acordo com regras próprias. Esse indivíduo é caracterizado por seu estado – um conjunto de atributos, como dinheiro, ativos que possui, etc. –, que varia ao longo do tempo, e pelas regras que guiam seu comportamento. Além disso, os agentes de um modelo podem ser heterogêneos e suas regras de comportamento podem se adaptar de acordo com os eventos que os mesmos observam. Por outro lado, o ambiente descreve onde os agentes interagem e restringe suas ações – como o mercado financeiro e suas regras de operação, por exemplo.

Ainda de acordo com [Macal e North \(2010\)](#), vantagens de se aplicar a simulação por agentes incluem gerar *insights* sobre processos ou comportamentos sociais, informar tomadores de decisão ou criadores de políticas e criar “laboratórios eletrônicos” para auxiliar pesquisas. As áreas de aplicação são diversas, como finanças, saúde, gestão de cadeias de suprimento e análise do comportamento de consumidores.

[Buchanan \(2009\)](#) afirma que modelos baseados em agentes apresentam um potencial promissor de representar características do mercado financeiro – e da economia de maneira geral – que os modelos tradicionais não conseguem capturar. Tal fato faz com que esses modelos possam ser úteis na prevenção de *crashes* de bolsas de valores e crises econômicas. [Farmer e Foley \(2009\)](#) também argumentam a favor da simulação baseada em agentes, sugerindo sua utilização como auxílio na avaliação de políticas econômicas. Entre outras vantagens, destacam sua maior capacidade de lidar com complexidades como operações em mercados de derivativos e consequências de alavancagem.

Apesar de não citarem a modelagem baseada em agentes, [Cont e Fonseca \(2002\)](#) também reforçam o seu potencial como meio para a construção de um mercado artificial de opções. Os

autores argumentam que a falta de capacidade de vários modelos em representar o comportamento dinâmico dos preços de opções não se dá por uma simples falha na especificação do processo estocástico que irá determinar o preço do ativo subjacente. A razão apontada por [Cont e Fonseca \(2002\)](#) para esse fracasso é mais profunda. Segundo eles, os mercados de opções têm se tornado cada vez mais autônomos, sendo seus preços fortemente dependentes da oferta e demanda internas do próprio mercado de opções, em vez de dependerem exclusivamente dos movimento de preço do ativo subjacente. Assim, uma abordagem por agentes com demandas e ofertas individuais pode possibilitar uma melhor representação dessa realidade.

No mais, a simulação por agentes permite a construção de um simulador interativo que replique o mercado real, com o usuário assumindo o papel de um dos agentes. Esse tipo de modelagem possibilita a construção de uma série temporal de preços de forma mais fidedigna, gerada pela interação dos agentes no mercado, e não por uma equação explicitamente programada. Além disso, o mercado financeiro possui uma representação natural de agentes autônomos que interagem entre si, ou seja, a definição do agente como uma pessoa que negocia no mercado é intuitiva. Dessa forma, ela se mostra a forma de modelagem ideal para o simulador proposto.

## 3.2 Mercados artificiais de ações

Para que seja desenvolvido um mercado artificial de opções, é necessário que haja um mecanismo de negociação e formação de preços do seu ativo subjacente. Esta seção se insere nesse contexto, apresentando mercados artificiais de ações baseados em agentes que possam atender a esse aspecto do modelo proposto.

### 3.2.1 O mercado artificial de ações de Santa Fe

[Palmer et al. \(1994\)](#) desenvolveram um dos trabalhos pioneiros na modelagem de mercados de ações por meio de agentes, referido na literatura como SFI-ASM (*Santa Fe Institute Artificial Stock Market*). Esse modelo consiste em um mercado artificial onde é negociada uma única ação, a qual paga dividendos periodicamente. O dinheiro não investido em ações rende uma taxa de juros fixa. O número de agentes é fixo, podendo variar entre as simulações, e os passos de tempo são discretos.

A cada período de tempo, cada agente pode lançar uma ordem de compra de uma ação, uma ordem de venda de uma ação ou não lançar ordem alguma. Os autores afirmam que, desde que se considere um intervalo pequeno entre dois períodos de tempo, essa restrição não é problemática. O preço de negociação é então determinado, em cada período, de acordo com o excesso de demanda, como definido na equação 3.1. Os termos  $D_t$  e  $G_t$  se referem, respectivamente, à demanda e à oferta total do mercado no período  $t$ , enquanto  $\eta$  é uma constante suficientemente pequena para que  $\eta(D_t - G_t) \ll 1$ . A equação 3.1 reflete o fato de que o preço da ação deve subir se a demanda for maior que a oferta e cair caso contrário.

$$S_{t+1} = S_t[1 + \eta(D_t - G_t)] \quad (3.1)$$

Se em um determinado período  $t$  tivermos  $D_t = G_t$ , todas as ordens lançadas são satisfeitas. Por outro lado, se  $D_t > G_t$ , apenas uma fração de  $G_t/D_t$  de cada ordem de compra é satisfeita. Para que esse mecanismo de negociação funcione, as ações são consideradas infinitamente divisíveis. Analogamente, no caso em que  $G_t > D_t$ , uma fração de  $D_t/G_t$  das quantidades ofertadas são de fato negociadas. Apesar de simples de ser implementada, essa forma de efetuar as negociações não é realista, como apontado por [Palmer et al. \(1994\)](#).

Concluindo a descrição do mercado, tem-se que os dividendos pagos pela ação são determinados de forma exógena, por meio de um processo estocástico independente das ações tomadas pelos agentes.

Quanto ao comportamento dos agentes, observa-se que não há interação direta entre os mesmos, como troca de informações ou tomada de decisão em grupo. Eles fazem suas escolhas apenas com base nas informações observadas no passado e, em alguns casos, guiados por fatores aleatórios independentes de outras variáveis do modelo.

Basicamente, os agentes agem de acordo com um conjunto próprio de regras de decisão, sendo que existe um sistema de classificação que compara o desempenho dessas regras. Dessa forma, regras consideradas ruins são substituídas por novas regras, criadas por meio de um algoritmo genético a partir daquelas que apresentaram melhor desempenho. Ou seja, no início de uma simulação, os agente possuem pouco conhecimento e regras de decisão fracas. Ao passo em que observam o sucesso ou falha dessas regras, as mesmas são melhoradas ou descartadas, num processo contínuo de aprendizado e adaptação.

Experimentos realizados por [Palmer et al. \(1994\)](#) mostram que não existe uma estratégia ótima para todos os momentos desse mercado artificial. Um agente com bom desempenho que é retirado do mercado e reinserido após certo tempo, em geral, passa a apresentar um desempenho ruim. Observa-se também que alguns ficam muito mais ricos que os outros, porém, no longo prazo, a identidade dos agentes mais ricos não se mantém.

Em sua conclusão, os autores afirmam que o modelo consegue reproduzir as principais características dos mercados reais, citando o comportamento dinâmico do mercado e a ausência de equilíbrio. O preço da ação apresenta subidas e quedas bruscas que podem ser interpretadas como bolhas ou *crashes*, respectivamente. Além disso, observa-se longos períodos de relativa tranquilidade no mercado, intercalados com períodos de grande volume de negociações.

### 3.2.2 O mercado artificial de ações de Genoa

O mercado artificial de ações conhecido como GASM (*Genoa Artificial Stock Market*) foi publicado inicialmente por [Raberto et al. \(2001\)](#). Esse modelo consiste em um mercado povoado por um número fixo de agentes que negociam uma única ação. Cada agente recebe a mesma quantidade inicial de dinheiro e ações, sendo que o montante total de ambos no mercado não muda ao longo do tempo. Além disso, o tempo evolui em passos discretos.

A cada passo de tempo, cada um dos agentes lança uma ordem de compra com probabilidade 0,5 ou um ordem de venda com igual probabilidade. Em caso de venda, a quantidade de ações ofertadas será uma fração aleatória do total de ações que o agente possui, definida por uma

distribuição de probabilidade uniforme. Como se considera a ação indivisível, toma-se apenas a parte inteira do valor calculado. A equação 3.2 apresenta esse cálculo, onde  $a_{i,t}^{(s)}$  representa a quantidade de ações ofertadas pelo agente  $i$  no período de tempo  $t$ ,  $u_{i,t}$  é uma realização da variável aleatória  $U \sim U(0,1)$  e  $A_{i,t}$  corresponde ao total de ações que o agente  $i$  possui no instante  $t$ .

$$a_{i,t}^{(s)} = \lfloor u_{i,t} A_{i,t} \rfloor \quad (3.2)$$

Juntamente com a quantidade ofertada, é determinado um preço limite, que expressa o valor mínimo pelo qual o agente  $i$  aceita vender suas ações no período  $t$ . Para tanto, é utilizada uma variável aleatória normal de média  $\mu_Y$  e desvio-padrão  $k \sigma_{ret}(J_i)$ , onde  $\mu_Y$  e  $k$  são constantes,  $\sigma_{ret}(J_i)$  é o desvio-padrão dos últimos  $J_i$  retornos logarítmicos da ação e  $J_i$  é a janela de tempo utilizada pelo agente  $i$  para essa estimativa de volatilidade da ação. A equação 3.3 demonstra como são calculados os retornos logarítmicos ( $ret$ ), onde  $S_t$  é o preço da ação no instante  $t$ . Em seu modelo, Raberto et al. (2001) decidiram fixar os parâmetros  $\mu_Y$ ,  $k$  e  $J_i$  em 1,01, 3,5 e 20, respectivamente, para todos os agentes.

$$ret_t = \ln \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \quad (3.3)$$

Dessa forma, o preço limite de venda, denominado  $s_{i,t}$ , é determinado pela equação 3.4, onde  $y_{i,t}$  é uma realização da variável aleatória  $Y \sim N(\mu_Y, [k \sigma_{ret}(J_i)]^2)$ .

$$s_{i,t} = \frac{S_{t-1}}{y_{i,t}} \quad (3.4)$$

No caso de compra, a quantidade demandada  $a_{i,t}^{(b)}$  e o preço máximo  $b_{i,t}$  que o agente  $i$  aceita pagar no tempo  $t$  são calculados de forma análoga. O preço limite é obtido pela equação 3.5, onde  $y_{i,t}$  é uma realização da variável aleatória  $Y \sim N(\mu_Y, [k \sigma_{ret}(J_i)]^2)$ . Já o valor de  $a_{i,t}^{(b)}$  é determinado de acordo com a equação 3.6, onde  $u_{i,t}$  é uma realização da variável aleatória  $U \sim U(0,1)$  e  $C_{i,t}$  é o total de dinheiro que o agente  $i$  possui no instante  $t$ .

$$b_{i,t} = y_{i,t} S_{t-1} \quad (3.5)$$

$$a_{i,t}^{(b)} = \left\lfloor \frac{u_{i,t} C_{i,t}}{b_{i,t}} \right\rfloor \quad (3.6)$$

Vale notar que, como a média de  $Y$  é maior que 1, um agente que quer comprar ações provavelmente aceitará pagar mais que o preço do período anterior, enquanto os ofertantes tendem a aceitar menos que  $S_{t-1}$ . Essa característica do cálculo dos preços limite aumenta a chance de negociações serem executadas.

Observa-se ainda que o preço limite que os agentes aceitam pagar ou receber pelas ações depende da volatilidade dos preços anteriores, estimada pelo termo  $\sigma_{ret}(J_i)$ . Isso reflete o fato de

que, em mercados mais voláteis, a incerteza dos agentes em relação ao valor de mercado da ação é maior que em mercados mais estáveis.

Além disso, os valores de  $u_{i,t}$  e  $y_{i,t}$  são gerados independentemente para cada agente  $i$  e passo de tempo  $t$ . Dessa forma, os agentes apresentam comportamento heterogêneo, condicionado à volatilidade dos preços anteriores e à limitação de seus recursos (ações e dinheiro).

Quanto ao mecanismo de formação de preços do mercado, Raberto et al. (2001) optaram por um balanceamento entre oferta e demanda. O preço  $S^*$  pelo qual as ações serão negociadas em certo período é determinado pelo encontro das curvas de oferta e demanda, as quais são construídas a partir das quantidades ofertadas e demandadas e dos preços limite de cada agente.

A princípio, são definidas as funções  $f$  e  $g$  como sendo a demanda e a oferta de ações para cada preço possível, respectivamente. Ou seja,  $f(S)$  representa o número de ações para o qual existe demanda a um preço limite maior ou igual a  $S$ , enquanto  $g(S)$  é o número de ações ofertadas a um preço limite menor ou igual a  $S$ . Como  $f(S)$  e  $g(S)$  são funções degrau, em geral  $f(S) \neq g(S) \forall S$ . Assim,  $S^*$  é determinado de forma a minimizar  $|f(S) - g(S)|$ , sendo que o total de ações negociadas será  $\min[f(S^*), g(S^*)]$ .

Em seguida, as ordens incompatíveis com  $S^*$  são descartadas e o excesso de demanda ou oferta  $|f(S) - g(S)|$  é reduzido das ordens restantes de forma aleatória. Após a determinação de  $S^*$  e o balanceamento de oferta e demanda, as transações são realizadas e o montante de dinheiro e ações dos agentes são atualizados. Como esse processo depende da existência de um preço anterior, o preço inicial é determinado de forma exógena, como um dos parâmetros da simulação.

O GASM conta ainda com uma forma de propagação de opinião entre os agentes, a qual ocorre por meio de um grafo aleatória baseado no trabalho de Cont e Bouchaud (2000). A cada passo de tempo, cada par de agentes irá se unir em um mesmo grupo com probabilidade  $P^{(a)}$ , de forma que esses grupos vão sendo progressivamente formados, crescem e, eventualmente, se fundem. Em cada um dos períodos simulados, ocorrerá comportamento em grupo com probabilidade  $P^{(c)}$ . Nesse caso, um dos grupos existentes é selecionado aleatoriamente e todos os agentes pertencentes a ele agirão em conjunto, comprando ou vendendo. No fim do período, o grupo que for ativado será desfeito.

Os resultados apresentados por Raberto et al. (2001) se referem a simulações de 10.000 passos de tempo com 100 agentes no mercado, onde cada um deles recebeu inicialmente 300 ações e 30.000 em dinheiro. Utilizou-se um preço inicial igual a 100, correspondente à razão entre o total de dinheiro e o total de ações do mercado. Além disso, as probabilidades  $P^{(a)}$  e  $P^{(c)}$ , referentes ao mecanismo de propagação de opinião entre os agentes, foram fixadas em 0,0002 e 0,1, respectivamente.

Os autores afirmam que esse modelo apresenta os fatos estilizados de ações referentes à presença de caudas pesadas na distribuição de probabilidade dos retornos e agrupamento de volatilidade, definido pela existência de autocorrelação nos retornos absolutos – para uma descrição mais detalhada dessas características, ver Apêndice A. Porém, ressaltam que o agrupamento de volatilidade tende a desaparecer caso se utilize um número maior de agentes na simulação.

Por fim, vale notar que o fato dos recursos do mercado serem constantes faz com que

o preço da ação siga um processo de reversão à média. Por exemplo, se o valor agregado das ações do mercado exceder o montante total de dinheiro, haverá um desequilíbrio entre oferta e demanda que tenderá a levar o preço para um valor menor.

Raberto e Cincotti (2005) apresentaram uma nova versão do GASM, em que o mecanismo de formação de preços foi alterado. Reconhecendo que a forma como os preços eram determinados anteriormente era pouco realista, os autores implementaram um livro de ordens em seu novo modelo, mecanismo amplamente adotado pelas bolsas de valores em todo o mundo. Nesse novo modelo, os agentes emitem ordens a mercado ou registram ordens limitadas de compra ou venda no livro, sendo as negociações realizadas pelo preço registrado quando o interesse de um agente é compatível com uma ordem lançada. Em um estudo onde foram comparados diversos mercados artificiais de ações que continham um livro de ordens, Slanina (2008) aponta o modelo de Raberto e Cincotti (2005) como um dos mais promissores para desenvolvimento futuro.

### 3.2.3 O mercado artificial de ações de Ferreira (2014)

Baseado no GASM, modelo de Raberto et al. (2001), Ferreira (2014) desenvolveu um mercado artificial de ações que representa de forma mais fidedigna o que ocorre na realidade. O modelo foi adaptado para trabalhar com mais de uma ação, além de possuir um livro de ordens, mecanismo de formação de preços utilizado na BM&FBovespa e em diversas outras bolsas do mundo.

Nesse mecanismo de negociação, caso o agente queira comprar ações por um preço maior ou igual aos das ordens de venda registradas no livro, ou vender ações por um preço menor ou igual aos preços de compra disponíveis no livro de ordens, sua ordem será executada imediatamente, como uma ordem a mercado (descrita na seção 2.4.1). Se o agente não encontrar nenhuma ordem compatível com o preço pelo qual ele deseja realizar a negociação, sua ordem será registrada no livro como uma ordem limitada (também descrita na seção 2.4.1), ficando disponível para consulta dos próximos agentes que desejarem comprar ou vender ações. A dinâmica do livro de ordens é descrita nos algoritmos 1 (para o lançamento de ordens de compra) e 2 (quando do lançamento de uma ordem de venda), sendo  $Q^{(o)}$  e  $V^{(o)}$ , respectivamente, a quantidade e o preço da ordem lançada pelo agente;  $Q_n^{(b)}$  e  $V_n^{(b)}$  a quantidade e o preço da  $n$ -ésima ordem de melhor preço registrada no livro, entre aquelas compatíveis com a ordem lançada pelo agente; e  $N^{(b)}$  o número de ordens registradas no livro que são compatíveis com a ordem lançada pelo agente.

A forma como os agentes determinam se irão comprar ou vender ações, bem como o preço e quantidade de ações que desejam negociar, é similar à do GASM. Porém, como o modelo de Ferreira (2014) admite mais de uma ação, há ainda uma etapa de distribuição do capital a ser investido entre as diferentes ações que o agente deseja comprar. Esse processo é feito por meio da geração de um valor aleatório entre 0 e 1, seguindo uma distribuição de probabilidade uniforme, para cada uma das ações do mercado, os quais são utilizados como pesos para ponderar a fração do capital que o agente investirá em cada ação.

Ainda em relação ao comportamento dos agentes, existe a possibilidade de selecionar aleatoriamente alguns deles e torná-los temporariamente inativos. Para tanto, existem parâmetros no modelo que definem a fração do total de agentes que estará ativa – ou seja, que emitirá

```

Entrada: Ordem de compra do agente para  $Q^{(o)}$  ações ao preço máximo  $V^{(o)}$ 
1 se Há ordens de venda no livro de ordens (book) com preço  $V^{(b)} \leq V^{(o)}$  então
2    $N^{(b)} \leftarrow$  Número de ordens de venda no livro de ordens com preço  $V^{(b)} \leq V^{(o)}$ 
3    $n \leftarrow 0$ 
4   enquanto ( $n < N^{(b)}$ ) e ( $Q^{(o)} > 0$ ) faça
5      $n \leftarrow n + 1$ 
6     Selecciona a  $n$ -ésima ordem de venda com menor preço e sua respectiva quantidade
       ( $V_n^{(b)}; Q_n^{(b)}$ )
7     se  $Q_n^{(b)} \leq Q^{(o)}$  então
8        $Q^{(o)} \leftarrow (Q^{(o)} - Q_n^{(b)})$ 
9        $Q_n^{(b)} \leftarrow 0$ 
10      A  $n$ -ésima ordem de venda do livro de ordens está completa e é finalizada
11      A quantidade da ordem de compra do agente é atualizada
12    senão
13       $Q_n^{(b)} \leftarrow (Q_n^{(b)} - Q^{(o)})$ 
14       $Q^{(o)} \leftarrow 0$ 
15      A ordem de compra do agente está completa e é finalizada
16      A  $n$ -ésima ordem de venda do livro de ordens é atualizada
17    fim se
18  fim enqto
19  se  $Q^{(o)} > 0$  então
20    A ordem de compra do agente é registrada como uma ordem limitada no livro de ordens,
    com preço  $V^{(o)}$  e quantidade  $Q^{(o)}$ 
21  fim se
22 senão
23  A ordem de compra do agente é registrada como uma ordem limitada no livro de ordens, com
    preço  $V^{(o)}$  e quantidade  $Q^{(o)}$ 
24 fim se

```

**Algoritmo 1:** Procedimento de negociação de uma ordem de compra do modelo de [Ferreira \(2014\)](#). Fonte: Adaptado de [Ferreira \(2014\)](#).

ordens de compra ou venda – a cada período e o intervalo de tempo até que um novo sorteio seja realizado, sendo o primeiro sorteio feito no início da simulação. Além disso, o modelo de [Ferreira \(2014\)](#) não inclui o mecanismo de agrupamento de agentes presente no GASM, de forma que não há comportamento em grupo.

Outra alteração realizada no GASM por [Ferreira \(2014\)](#) diz respeito à distribuição inicial das ações entre os agentes. Enquanto no GASM cada agente recebe a mesma quantidade inicial de ações, no modelo de [Ferreira \(2014\)](#) o montante de ações é distribuído aleatoriamente entre os agentes. Isso é feito seguindo a mesma lógica da distribuição do capital que o agente deseja investir em cada ação, ou seja, são gerados valores aleatórios que definem os pesos que irão ponderar essa distribuição.

Em seus experimentos, [Ferreira \(2014\)](#) realizou 200 simulações de 2.520 passos de tempo, equivalentes a 2.520 dias de negociação ou 10 anos. As simulações foram conduzidas com 200 agentes e duas ações diferentes no mercado, daqui em diante chamadas de ações 1 e 2. Cada agente recebeu um capital inicial de 50.000 e o montante total de ações distribuído entre eles foi de 20.000 ações 1 e 100.000 ações 2, uma média de 100 ações 1 e 500 ações 2 para cada agente. O preço e volatilidade inicial da ação 1 foram fixados em 250 e 0,02, respectivamente, enquanto os

```

Entrada: Ordem de venda do agente para  $Q^{(o)}$  ações ao preço mínimo  $V^{(o)}$ 
1 se Há ordens de compra no livro de ordens (book) com preço  $V^{(b)} \geq V^{(o)}$  então
2    $N^{(b)} \leftarrow$  Número de ordens de compra no livro de ordens com preço  $V^{(b)} \geq V^{(o)}$ 
3    $n \leftarrow 0$ 
4   enquanto ( $n < N^{(b)}$ ) e ( $Q^{(o)} > 0$ ) faça
5      $n \leftarrow n + 1$ 
6     Selecciona a  $n$ -ésima ordem de compra com maior preço e sua respectiva quantidade
       ( $V_n^{(b)}; Q_n^{(b)}$ )
7     se  $Q_n^{(b)} \leq Q^{(o)}$  então
8        $Q^{(o)} \leftarrow (Q^{(o)} - Q_n^{(b)})$ 
9        $Q_n^{(b)} \leftarrow 0$ 
10      A  $n$ -ésima ordem de compra do livro de ordens está completa e é finalizada
11      A ordem de venda do agente é atualizada
12    senão
13       $Q_n^{(b)} \leftarrow (Q_n^{(b)} - Q^{(o)})$ 
14       $Q^{(o)} \leftarrow 0$ 
15      A ordem de venda do agente está completa e é finalizada
16      A  $n$ -ésima ordem de compra do livro de ordens é atualizada
17    fim se
18  fim enqto
19  se  $Q^{(o)} > 0$  então
20    A ordem de venda do agente é registrada como uma ordem limitada no livro de ordens, com
    preço  $V^{(o)}$  e quantidade  $Q^{(o)}$ 
21  fim se
22 senão
23   A ordem de venda do agente é registrada como uma ordem limitada no livro de ordens, com
   preço  $V^{(o)}$  e quantidade  $Q^{(o)}$ 
24 fim se

```

**Algoritmo 2:** Procedimento de negociação de uma ordem de venda do modelo de [Ferreira \(2014\)](#). Fonte: Adaptado de [Ferreira \(2014\)](#).

parâmetros da ação 2 foram 50 e 0,01. Vale notar que o preço inicial de cada ação corresponde à razão entre a metade do capital total dos agentes e a quantidade total daquela ação no mercado, de forma que o valor agregado inicial de todas as ações do mercado é igual ao montante total de capital existente.

Em relação aos parâmetros de comportamento dos agentes, a variável aleatória  $Y \sim N(\mu_Y, [k \sigma_{ret}(J_i)]^2)$  do GASM foi utilizada com os parâmetros  $\mu_Y$  e  $k$  iguais a 1,01 e 2, respectivamente. Além disso, a janela de tempo  $J_i$  que cada agente utiliza no cálculo da volatilidade das ações foi determinada aleatoriamente como um número inteiro entre 5 e 21, com igual probabilidade para cada valor. Já a probabilidade de compra de cada agente foi mantida em 0,5, assim como no GASM.

A fim de avaliar seu modelo, [Ferreira \(2014\)](#) verificou a ocorrência dos fatos estilizados de ações de caudas pesadas, agrupamento de volatilidade (*volatility clustering*) e correlação entre volume e volatilidade (mais detalhes a respeito desses fatos estilizados podem ser encontrados no Apêndice A). Segundo o autor, seu mercado artificial apresenta uma frequência de ocorrência razoável dos fatos estilizados citados, apesar de ainda não atingir os padrões verificados em ações da NYSE (*New York Stock Exchange*), o que sugere a necessidade de maior estudo dos parâmetros

do simulador. Além disso, ao comparar as séries de preço de seu modelo com séries reais das ações PETR4 (Petrobras) e VALE5 (Vale), [Ferreira \(2014\)](#) concluiu que seu mercado artificial é muito mais volátil que o mercado real, apresentando séries de preço com maior oscilação.

Por fim, [Ferreira \(2014\)](#) construiu seu mercado artificial de forma que ele já pudesse ser utilizado em um simulador interativo, contendo os elementos necessários para a interação de agentes externos. Os passos de tempo, referentes a um dia de negociação, são indexados em datas reais, sendo ainda registrado o horário em que cada ordem foi lançada pelos agentes. Isso possibilita a divisão de um passo de tempo em subpassos menores, permitindo ao usuário consultar o livro de ordens e realizar negociações em diferentes momentos de um mesmo dia. Além disso, a velocidade da simulação pode ser controlada, determinando-se quanto tempo deve durar cada dia de negociação (e cada subpasso de tempo) dentro do simulador. Dessa forma, ele se mostra o modelo ideal para servir de base a este trabalho.

### 3.3 Mercados artificiais de opções

Embora modelos matemáticos voltados à precificação de opções financeiras já existam há bastante tempo – como o modelo de Black-Scholes –, o desenvolvimento de mercados artificiais de opções baseados em agentes ainda é recente. Nesta seção é apresentado um levantamento dos mercados artificiais de opções elaborados e publicados nos últimos anos, ou seja, o estado da arte.

[Ecca, Marchesi e Setzu \(2008\)](#) realizaram o primeiro estudo por meio de um mercado artificial de opções com base em agentes heterogêneos. Anteriormente, estudos que envolveram opções financeiras e mercados artificiais tinham outro escopo. [Jefferies et al. \(2001\)](#) utilizaram um mercado artificial de ações baseado em agentes para gerar séries de preços de um ativo e, a partir daí, analisar portfólios envolvendo o ativo simulado e opções referentes ao mesmo – não existe um mercado artificial de opções nesse caso. Outro exemplo é o trabalho de [Buraschi e Jiltsov \(2006\)](#), onde foi modelado um mercado de opções em equilíbrio por meio de equações diferenciais estocásticas.

Mais recentemente, trabalhos similares ao de [Jefferies et al. \(2001\)](#) foram desenvolvidos por [Suzuki, Shimokawa e Misawa \(2009\)](#) e [Liu, Zhang e Xu \(2014\)](#). Ambos utilizaram mercados artificiais de ações para gerar séries de preços e, em seguida, precificaram opções pelo método de Monte Carlo – ou seja, calculando o valor esperado do *payoff* da opção por meio de várias séries simuladas de preços da ação.

Mercados artificiais de opções posteriores ao desenvolvido por [Ecca, Marchesi e Setzu \(2008\)](#) incluem os de [Frijns, Lehnert e Zwinkels \(2010\)](#), [Qiu et al. \(2012\)](#) e [Yang e Sun \(2013\)](#). [Frijns, Lehnert e Zwinkels \(2010\)](#) apresentaram um modelo GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) onde os retornos do ativo subjacente são determinados por meio de um ruído com distribuição normal, enquanto nos demais trabalhos os preços são formados de maneira endógena pela interação entre os agentes.

As seções seguintes descrevem os mercados artificiais de opções de [Ecca, Marchesi e Setzu \(2008\)](#), [Qiu et al. \(2012\)](#) e [Yang e Sun \(2013\)](#). Por fim, é analisado o mercado artificial de futuros de [Xu et al. \(2014\)](#), por se tratar de um modelo análogo ao pretendido neste trabalho.

### 3.3.1 O modelo de [Ecça, Marchesi e Setzu \(2008\)](#)

O estudo pioneiro realizado por [Ecça, Marchesi e Setzu \(2008\)](#) teve como objetivo analisar a interação entre o mercado de opções e o mercado de ações subjacente. Para tanto, tomaram como base uma versão adaptada do GASM ([RABERTO et al., 2001](#)) e acrescentaram um mercado de opções. As diferenças entre o mercado artificial de ações utilizado e o GASM são quatro:

- *A quantidade inicial de dinheiro e ações de cada agente não é a mesma* – Os agentes são divididos em 20 grupos, de forma que todos do mesmo grupo tenham a mesma riqueza inicial e o mais rico tenha 20 vezes a riqueza do mais pobre.
- *Os agentes não operam em todos os passos de tempo* – Cada agente opera em um determinado passo de tempo com uma probabilidade de 10%, sendo que um passo de tempo representa um dia de negociação.
- *O montante total de dinheiro não é constante* – Existe um banco que pode receber dinheiro dos agentes ou emitir moeda, de forma que o total de dinheiro em posse dos agentes pode aumentar ou diminuir ao longo do tempo.
- *Existem diferentes tipos de agentes* – Fazem parte do mercado de ações agentes dos tipos R (*random*), F (*fundamentalist*), M (*momentum*) e C (*contrarian*). Os primeiros são exatamente como os do GASM. Os agentes F acreditam que a ação tenha um valor fundamental  $S^{(f)}$ , dado pela razão entre o total de dinheiro e o total de ações em posse dos agentes do mercado. Definindo  $S_t$  como o preço atual da ação, eles compram ações quando  $S_t < S^{(f)}$  e, caso contrário, vendem, sendo que a quantidade de ações demandada ou ofertada por eles é proporcional à distância entre  $S_t$  e  $S^{(f)}$ . Em caso de compra, o preço máximo que aceitam pagar é  $\min\{S^{(f)}; 1,2S_t\}$  e, em caso de venda, o preço mínimo admitido por esses agentes é  $\max\{S^{(f)}; 0,8S_t\}$ .

Os últimos dois tipos de agentes atuam de forma similar. Os M acreditam que o último movimento de preço vai se repetir, portanto compram quando o preço sobe e vendem quando o mesmo cai. O volume que estão dispostos a negociar é determinado de forma aleatória, assim como os agentes R. Além disso, o preço limite que aceitam pagar ou receber é determinado por uma extrapolação linear dos últimos preços, sendo o número de períodos considerados nessa extrapolação diferente para cada agente e extraído de uma distribuição uniforme discreta entre 2 e 10. Por fim, os agentes C atuam de forma análoga aos M, com a diferença de que acreditam que o próximo movimento do preço será no sentido inverso do último. Esses agentes extrapolam o preço invertendo a tendência dos últimos períodos, usando o mais recente como pivô.

O mercado de opções presente no modelo de [Ecça, Marchesi e Setzu \(2008\)](#) possui um funcionamento bem simplificado. É negociada apenas uma opção europeia, sendo que cada contrato (seja *call* ou *put*) se refere a cinco ações. Enquanto todos os agentes operam no mercado de ações, apenas uma fração fixa dos mesmos atua no mercado de opções.

Em seu modelo, existe um banco central que lança opções no mercado de acordo com a demanda dos agentes. Esse banco começa com dinheiro e quantidade de ações iguais a zero,

porém é dotado de riqueza ilimitada – seus montantes de dinheiro e ações podem assumir valores negativos. A operação dos agentes no mercado de opções se limita a comprar contratos e exercê-los.

As características dos contratos lançados pelo banco são definidas da seguinte maneira:

- *Preço de exercício* – As opções lançadas podem ter três diferentes preços de exercício:  $S_t - \delta$ ,  $S_t$  ou  $S_t + \delta$ . O valor de  $\delta$  é determinado de acordo com a equação 3.7.

$$\delta = \begin{cases} 1,5 & \text{se } S_t < 25 \\ 3 & \text{se } 25 < S_t < 200 \\ 6 & \text{se } S_t > 200 \end{cases} \quad (3.7)$$

- *Data de vencimento* – O vencimento das opções se dá na terceira sexta-feira de cada mês. Considerando meses de 20 dias, os dias de vencimento são 15, 35, 55 e assim por diante. Se a data atual for anterior à data de vencimento do mês corrente, o banco pode lançar opções com vencimento para o mês atual ou para os meses cujos índices sejam iguais ao do atual mais 1, 3 ou 6. Caso contrário, podem ser lançadas opções cujo mês de vencimento possua índice igual ao atual mais 1, 2, 3 ou 6.
- *Prêmio* – O prêmio das opções lançadas é determinado pelo modelo de precificação de Black-Scholes. A volatilidade é estimada com base nos últimos 50 passos de tempo e é utilizada taxa de juros nula. O valor obtido para o prêmio é então multiplicado por um fator de correção, o qual depende do tempo restante até a expiração da opção ( $\Delta T$ ) e varia entre 0,75 (para  $\Delta T \approx 120$ ) e 0,96 (para  $\Delta T \approx 10$ ). Esse fator de correção foi determinado empiricamente pelos autores por meio de várias simulações.

Ao ser alcançada a data de vencimento, uma opção será exercida apenas se ela estiver ITM. No ato do exercício da opção, o agente negocia as ações com o banco pelo preço previamente estabelecido ou, caso ele não possua dinheiro suficiente, recebe do banco a diferença entre o preço atual da ação e o preço de exercício. Se ao final de um período de negociação a quantidade de ações do banco for diferente de zero, ele lançará uma ordem no mercado para manter uma posição nula, ao preço de  $1,02S_t$  em caso de compra ou  $0,98S_t$  em caso de venda.

Por outro lado, caso a opção se encontre OTM ou ATM, o agente tentará comprar (no caso de *call*) ou vender (no caso de *put*) ações pelo preço atual do mercado. A quantidade desejada será a mesma de seus contratos de opções, sendo reduzida se ele não possuir dinheiro ou ações suficientes para tanto.

Os agentes que operam no mercado de opções podem adotar uma das três diferentes estratégias:

- *Independent options* – Comprar opções de compra ou venda aleatoriamente, independentemente do que está acontecendo no mercado da ação subjacente.

- *Straddles* – No passo de tempo em que operar no mercado de ações, comprar simultaneamente uma *put* e uma *call*, ambas ATM e com a mesma data de vencimento, apostando em uma grande mudança no preço da ação.
- *Protective put and call* – Comprar opções no período em que operar no mercado de ações, a fim de se proteger de perdas substanciais. A estratégia consiste em comprar opções de venda com preço de exercício  $S_t - \delta$  quando se emite uma ordem de compra no mercado de ações. Analogamente, quando se lança uma ordem de venda de ações, comprar opções de compra com preço de exercício  $S_t + \delta$ . A data de expiração das opções compradas será sempre de três meses a partir do mês atual.

Durante um passo de tempo  $t$ , um determinado agente  $i$  pode comprar no máximo  $M_{i,t}^{(c)}$  opções de compra ou  $M_{i,t}^{(p)}$  opções de venda. Esses valores limite são calculados de acordo com as equações 3.8 e 3.9, onde  $C_{i,t}^*$  e  $A_{i,t}^*$  são, respectivamente, o total de dinheiro e de ações que o agente  $i$  teria no instante de tempo  $t$  se todas as suas opções fossem exercidas naquele momento;  $X$  e  $c$  representam o preço de exercício e o prêmio da *call* a ser comprada; e  $p$  é o prêmio da *put* a ser comprada. A finalidade dessas restrições é garantir que os agentes façam operações dentro da limitação de seus recursos.

$$M_{i,t}^{(c)} = \left\lfloor \frac{C_{i,t}^*}{5(c + X)} \right\rfloor \quad (3.8)$$

$$M_{i,t}^{(p)} = \min \left\{ \left\lfloor \frac{A_{i,t}^*}{5} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{C_{i,t}^*}{5p} \right\rfloor \right\} \quad (3.9)$$

Caso o agente em questão utilize a estratégia *independent options*, a quantidade de contratos que ele irá comprar será dada por um valor aleatório entre 1 e  $M_{i,t}^{(c)}$  (para opções de compra) ou entre 1 e  $M_{i,t}^{(p)}$  (para opções de venda). Os outros dois tipos de agentes compram contratos referentes ao mesmo número de ações da ordem que emitiram no mercado de ações, desde que esse valor esteja dentro do limite de contratos que podem negociar.

Ecça, Marchesi e Setzu (2008) realizaram simulações de vários cenários distintos com 400 agentes e 4000 passos de tempo – aproximadamente 16 anos. Alterações nos cenários simulados incluíram os tipos de agentes presentes, a divisão de agentes entre as estratégias adotadas, a fração deles que opera no mercado de opções e o fator de correção utilizado no cálculo do prêmio das opções. Além disso, foram testadas situações em que, a cada dez passos de tempo, o dinheiro de todos os agentes aumentava ou diminuía uma fração igual a  $\beta$ , com igual probabilidade – os valores utilizados para  $\beta$  foram 0,03 e 0,05. Em todos os casos foram observados, na série de preços de ações, os fatos estilizados de caudas pesadas dos retornos e, em certa medida, de agrupamento de volatilidade (*volatility clustering*). Porém, os autores não analisaram a ocorrência de fatos estilizados de mercados de opções em seu modelo.

### 3.3.2 O modelo de Qiu et al. (2012)

Qiu et al. (2012) desenvolveram um mercado artificial de opções em que um número fixo de agentes negocia opções europeias de compra e venda referentes a um único ativo subjacente.

São negociadas opções com diferentes preços de exercício, porém todas possuem o mesmo valor de tempo até o vencimento ( $\Delta T$ ), o qual é mantido fixo ao longo da simulação. Dessa forma, as opções nunca chegam a expirar e a quantidade de contratos existentes no mercado se mantém constante. Além disso, taxas de juros, dividendos, custos de transação e impostos não são considerados nesse modelo.

Esse mercado artificial é povoado por dois tipos de agentes: especuladores e arbitradores. Qiu et al. (2012) justificam a escolha desses dois grupos por eles serem responsáveis pela maioria das negociações de opções nos mercados reais. Os especuladores apostam em movimentos futuros de preço, tomando decisões com base em suas expectativas a respeito do valor da ação na data de vencimento da opção. Além disso, agentes desse tipo podem ser influenciados por informações recebidas ao longo do tempo de simulação. Por outro lado, os arbitradores buscam obter lucros sem risco por meio de disparidades nos preços do mercado.

O preço pelo qual as opções serão negociadas é definido de acordo com o excesso de demanda dos agentes. Nesse sentido, existe um *market maker* que faz o balanço entre a oferta e a demanda total dos agentes do mercado e determina o preço de negociação de cada um dos contratos.

Em seus experimentos, Qiu et al. (2012) realizaram simulações com três modelos diferentes, sendo cada novo modelo uma versão incrementada do anterior. O primeiro, chamado pelos autores de modelo S, possui apenas agentes especuladores, cada um possuindo sua própria expectativa a respeito do preço futuro da ação. Nesse modelo, a cada passo de tempo, os agentes estimam o lucro potencial em negociar cada uma das opções de acordo com suas respectivas crenças em relação ao preço futuro do ativo subjacente. Assim, a quantidade de opções que cada especulador desejará comprar ou vender será proporcional ao lucro que ele espera obter com aquela negociação.

No modelo seguinte, denominado SA, são acrescentados agentes arbitradores. Os arbitradores observam os preços das opções e negociam aquelas que violam as relações de ausência de arbitragem referentes à paridade *put-call* e ao *butterfly spread*, discutidas na seção 2.2. Dessa forma, caso haja alguma oportunidade de arbitragem, os arbitradores irão comprar portfólios subvalorizados e vender aqueles supervalorizados. As quantidades demandadas ou ofertadas por esses agentes serão proporcionais à intensidade com que as relações de ausência de arbitragem são violadas.

Por fim, os autores apresentam o modelo SAL, no qual a demanda e a oferta dos especuladores dependem do preço do exercício da opção, a fim de se obter a diferença de liquidez discutida na seção 2.3.4. Nesse modelo, a demanda e a oferta por *calls* são funções crescentes do preço de exercício, pois quanto maior o *strike*, mais “fora do dinheiro” a *call* está. Analogamente, a demanda e a oferta por *puts* são funções decrescentes do preço de exercício. Vale ressaltar que essa diferença não se aplica aos agentes arbitradores, já que os mesmos negociam portfólios fixos de acordo com as oportunidades de arbitragem que identificam.

Após a conclusão das simulações, Qiu et al. (2012) analisaram o formato das curvas de volatilidade em função da medida *moneyness* ( $X/S_t$ ) para cada um dos modelos. No modelo completo (SAL), os autores observaram um *smile* de volatilidade similar ao observado nos

mercados reais de opções sobre ações, o que não foi verificado nos demais modelos.

O modelo SAL apresenta ainda o fato estilizado de diferença de liquidez, sendo os volumes de negociação obtidos em suas simulações similares aos da Figura 10 (seção 2.3.4). Além disso, observou-se que no modelo completo a volatilidade implícita é mais volátil para opções com menor valor para a medida *moneyness*, o que está de acordo com o comportamento dinâmico da volatilidade implícita observado empiricamente, ilustrado na Figura 12 (seção 2.3.5).

Por fim, no intuito de verificar a robustez dos resultados obtidos, Qiu et al. (2012) realizaram uma análise de sensibilidade no modelo SAL, variando diversos parâmetros de entrada. Segundo os autores, a análise de sensibilidade conduzida indica que os resultados do modelo são robustos e confiáveis.

### 3.3.3 O modelo de Yang e Sun (2013)

O modelo desenvolvido por Yang e Sun (2013) inclui um mercado artificial de ações, onde é negociado apenas um ativo, e um mercado artificial de opções, onde são negociados contratos referentes a essa ação. Nesse modelo, os dois mercados não são sincronizados, de forma que, a cada passo de tempo, primeiro ocorrem as negociações da ação e, em seguida, das opções. O trabalho desenvolvido por eles teve como foco a interação entre esses dois mercados, havendo um fluxo de informação – referentes a preços e volumes negociados – bidirecional entre ambos.

O mercado artificial de ações utilizado teve como base o SFI-ASM (PALMER et al., 1994), no qual foram realizadas duas alterações. A primeira diz respeito aos dividendos da ação, que em vez de serem gerados por um processo estocástico estacionário, são obtidos por meio de um processo de Poisson composto, ou seja, um processo estocástico com saltos. Yang e Sun (2013) afirmam que esse tipo de processo representa melhor o pagamento de dividendos dos mercados reais.

Além disso, nesse modelo, as informações referentes a preços e volumes de negociação das opções influenciam a tomada de decisão dos agentes no mercado de ações. Assim, se o preço de uma *call* ou seu volume de negociação aumentar por períodos consecutivos, será criada uma expectativa positiva em relação ao mercado de ações. Por outro lado, movimentos nas *puts* têm efeito contrário.

No mercado de opções, os agentes negociam *calls* e *puts* europeias referentes a uma única ação. O tempo até o vencimento de uma nova série é de 60 dias, equivalente a 60 passos de tempo do modelo ou, aproximadamente, 3 meses de negociação. O preço de exercício de uma série lançada no período  $t$  é definido como  $S_t + \delta$ , no caso de uma opção de compra, ou  $S_t - \delta$ , caso seja uma opção de venda, onde o parâmetro  $\delta$  pode depender de  $S_t$  ou ser constante.

Yang e Sun (2013) definem três tipos de negociadores de opções: aleatórios, *hedgers* e especuladores. Os aleatórios representam os *noise traders* dos mercados reais, aqueles que tomam decisões irracionais e irregulares. Agentes desse tipo decidem se vão comprar ou vender opções, bem como as séries e quantidades que irão negociar, de forma aleatória.

Já os *hedgers* compram *puts* ou vendem *calls* para travar os riscos do mercado. Esses agentes ajustam suas posições no mercado de opções a cada período, de forma a manter a soma

de seus contratos – ou seja, a quantidade de ações que eles têm direito ou potencial obrigação de vender – igual à soma de suas ações, a menos que não possuam dinheiro suficiente para pagar os prêmios ou as margens das opções.

Por fim, os especuladores agem de forma oposta aos *hedgers*, comprando *calls* ou vendendo *puts*. Eles também mantêm a soma de seus contratos – que, nesse caso, representa a quantidade de ações que eles têm direito ou potencial obrigação de comprar – igual a seu total de ações, o que potencializa seus eventuais lucros ou prejuízos.

Quanto à forma de negociação dos contratos, existe um *market maker* que determina os prêmios de cada *call* e *put*, as quais são negociadas simultaneamente. Antes das negociações serem realizadas, cada agente decide sua demanda ou oferta para cada contrato e o preço pelo qual está disposto a negociar aquela opção. Esse preço é definido pelas equações de Black-Scholes, onde cada agente estima a volatilidade da ação de acordo com seu tipo, conforme a equação 3.10. Na equação 3.10, para cada agente  $i$  e período  $t$ ,  $\sigma_{i,t}^{(BS)}$  representa a volatilidade que aquele agente utilizará para estimar o valor da opção com as equações de Black-Scholes,  $\hat{\sigma}_{t-1}$  é a volatilidade implícita calculada com o preço da opção no período anterior,  $\sigma_{ret}(60)$  é o desvio-padrão dos últimos 60 retornos da ação,  $z_{i,t}$  é uma realização da variável aleatória normal padrão  $Z \sim N(0, 1)$  e  $\alpha^{(s)}$ ,  $\alpha^{(h)}$  e  $\alpha^{(r)}$  são constantes tal que  $\alpha^{(e)} > \alpha^{(a)} > \alpha^{(h)}$ .

$$\sigma_{i,t}^{(BS)} = \begin{cases} \hat{\sigma}_{t-1} + \alpha^{(e)} z_{i,t} & \text{especulador} \\ \sigma_{ret}(60) + \alpha^{(h)} z_{i,t} & \text{hedger} \\ (\sigma_{ret}(60) + \hat{\sigma}_{t-1})/2 + \alpha^{(a)} z_{i,t} & \text{aleatório} \end{cases} \quad (3.10)$$

Após cada agente informar sua demanda ou oferta e seu preço limite, o *market maker* determina o preço de negociação de cada contrato. Essa escolha é feita de forma a minimizar a diferença entre a oferta e a demanda total do mercado, de maneira similar ao mecanismo de formação de preços do mercado artificial de ações de Raberto et al. (2001).

O modelo de Yang e Sun (2013) também conta com um sistema de pagamentos de margens, possibilitando que os agentes lancem opções a descoberto. Ao assumir uma posição *short*, o agente deve realizar um depósito em sua conta margem, a qual é atualizada a cada passo de tempo antes de ocorrerem as negociações no mercado de opções. Se houver menos dinheiro na conta margem do agente do que o exigido, ele será obrigado a realizar um depósito. Caso ele não tenha dinheiro suficientes para cobrir a margem, seus contratos serão executados antes do prazo. Por outro lado, se a conta margem de um agente possuir mais dinheiro que o necessário, o mesmo pode retirar o montante extra. O valor que o agente deve manter depositado em sua conta margem é calculado como um percentual do valor total das ações referentes à posição *short* que o mesmo assumiu.

Finalmente, na data de vencimento de cada série, as opções que estiverem ITM serão exercidas. A liquidação das posições é feita de forma financeira, pelo pagamento ou recebimento do *payoff* da opção, sem que haja negociação do ativo subjacente.

Yang e Sun (2013) realizaram simulações de seu modelo com 200 agentes, parâmetro de cálculo dos preços de exercícios  $\delta = 1,5$  e percentual de cálculo das margens igual a 20%, sendo

cada contrato equivalente a uma ação. Além disso, as negociações de opções foram iniciadas apenas no período 10.000, para que o mercado de ações já se encontrasse estável quando a negociação dos contratos tivesse início.

Tanto nos períodos em que a simulação foi conduzida apenas com o mercado de ações, quanto naqueles em que ambos mercados estiveram presentes, foram observados os fatos estilizados de mercados de ações de caudas pesadas na distribuição dos retornos e agrupamento de volatilidade. Vale ressaltar que, pelo fato do modelo incluir pagamento de dividendos, o cálculo dos retornos foi realizado de maneira diferente da usual, de acordo com a equação 3.11, onde  $d_t$  é o dividendo pago no período  $t$ . Os fatos estilizados de opções não foram analisados pelos autores.

$$ret_t = \ln \left( \frac{S_t + d_t}{S_{t-1}} \right) \quad (3.11)$$

### 3.3.4 O mercado de futuros de Xu et al. (2014): um caso análogo

Um contrato futuro é um acordo de negociação onde são previamente determinados o ativo a ser negociado, o preço e a data da transação (HULL, 2005). Basicamente, é um derivativo similar aos contratos de opções, porém as duas partes ficam na obrigação de cumprir com a negociação e não é pago um prêmio pelo contrato. O modelo descrito nesta seção não inclui um mercado de opções, mas apresenta um mercado artificial de derivativos análogo ao que se propõe neste trabalho.

Xu et al. (2014) criaram um modelo computacional baseado em agentes para representar o mercado chinês de ações e de contratos futuros sobre índices de ações. Os autores afirmam que a motivação desse trabalho consiste em desenvolver um modelo para analisar as interações entre os dois mercados, além de testar novas configurações para ambos e estratégias de investimento.

No modelo existem dois mercados, um mercado de ações onde são negociados cinco ativos diferentes e um mercado de futuros onde é negociado um tipo de contrato futuro sobre um índice baseado nas cinco ações. As negociações são realizadas por meio de um livro de ordens, o qual pode receber ordens a mercado ou limitadas. Da mesma forma que no mercado chinês, as ordens limitadas não executadas são descartadas ao fim do dia. A fim de simplificação, não existem custos de transação.

Agentes que operam no mercado de futuros devem realizar depósitos em suas contas margem, as quais são atualizadas no final de cada dia de negociação. No caso de um agente não ter como cumprir com o pagamento das margens devidas, suas posições nos contratos futuros serão fechadas gradativamente no dia seguinte, até que ele consiga manter a margem exigida para sua nova posição.

O modelo de Xu et al. (2014) inclui ainda um mecanismo de renovação dos agentes. Quando a riqueza de um dos agentes se torna inferior a um limite preestabelecido, o mesmo é considerado falido e deixa o mercado. Em seguida, um novo agente, com as mesmas configurações iniciais – dinheiro, ações e contratos futuros – do anterior, o substitui. Esse limite é determinado pelo valor de 100 ações ou de um contrato futuro, dependendo do mercado em que o agente negocia. Vale notar que esse processo funciona como um mecanismo de criação de dinheiro e

ativos, podendo influenciar as séries de preços e volumes negociados de ambos os mercados.

Quanto ao comportamento dos agentes, Xu et al. (2014) definem quatro tipos: informado, desinformado, *noise trader* e arbitrador. Os três primeiros atuam em apenas um mercado, negociando somente uma das ações ou atuando no mercado de futuros. Agentes informados são aqueles que possuem alguma informação a respeito do valor futuro das ações, utilizando-a para decidir os preços e quantidades que desejam negociar. Já os desinformados dispõem apenas das informações referentes aos valores passados e atuais, fazendo uso da série histórica de preços para estimar o valor futuro. Por outro lado, os *noise traders* lançam ordens de forma aleatória, sem levar em conta informação alguma. Caso sejam alocados no mercado de ações, a ação que cada um desses agentes irá negociar é determinada de forma aleatória no início da simulação. Sua carteira inicial também é determinada aleatoriamente, dentro do intervalo de 300 e 1500 ações, sendo seu capital inicial igual ao valor do seu montante de ações. Porém, se forem direcionados eu mercado de futuros, receberão inicialmente 3 milhões em dinheiro. Para fins de comparação, o valor inicial das cinco ações são, respectivamente, 10, 20, 30, 40 e 50 unidades monetárias.

Por fim, os agentes arbitradores negociam nos dois mercados, podendo comprar ou vender contratos futuros e qualquer uma das cinco ações. Esses agentes observam continuamente os preços dos contratos e o valor do índice sobre as ações, em busca de alguma distorção nos preços que possibilite a obtenção de lucros sem risco. Cada arbitrador é dotado de uma riqueza inicial de 10 milhões de unidades monetárias.

As simulações são realizadas com passos de tempo que representam cinco segundos de tempo real, podendo ser lançadas algumas ou nenhuma ordem nesse intervalo. O tempo entre emissões de ordens dos agentes que atuam em apenas um mercado segue uma distribuição exponencial, de forma que o número de ordens lançadas em um passo de tempo segue uma distribuição de Poisson. Caso um desses agentes tente lançar uma ordem enquanto existir outro registro do mesmo no livro, a ordem limitada já existente será cancelada imediatamente antes do lançamento da nova ordem.

Os experimentos de Xu et al. (2014) foram conduzidos com 54.758 passos de tempo, representando 19 dias de negociação. Determinando os parâmetros do modelo de acordo com a realidade do mercado chinês, a taxa de juros anual foi fixada em 8%, o tamanho mínimo das ordens lançadas no mercado de ações em 100 unidades, o incremento mínimo nos preços lançados no livro de ordens do mercado de ações em 0,01 e no de futuros em 0,2 unidades monetárias. Além disso, o depósito de margem exigido dos agentes que negociam no mercado de futuros é de 18%. Por fim, foi estipulado que os agentes que negociam no mercado de futuros podem comprometer um máximo de 60% das suas riquezas em seus contratos, enquanto que para os arbitradores essa razão é determinada aleatoriamente entre 10% e 20%.

Com base nos resultados obtidos em seus experimentos, Xu et al. (2014) concluem que seu modelo é estável e consegue reproduzir as principais características dos mercados chineses de ações e de futuros sobre índices de ações. Como próximos passos, eles apontam a inclusão de um mercado de opções no modelo.

## 4 O Simulador Proposto

O simulador proposto neste trabalho é apresentado no presente capítulo, sendo o mesmo dividido em duas seções. A primeira apresenta o modelo desenvolvido para o mercado artificial de ações e opções, tomando como base o mercado artificial de ações de [Ferreira \(2014\)](#). Já a segunda seção trata da interface criada para os usuários do simulador, a qual simula um ambiente de negociação real, possibilitando o uso do mercado artificial para fins didáticos e o seu funcionamento *on-line*.

### 4.1 O mercado artificial

O mercado artificial desenvolvido neste trabalho consiste em uma adaptação e expansão do modelo de [Ferreira \(2014\)](#), o qual foi utilizado como base para o mercado artificial das ações que serviram de ativo subjacente para as opções simuladas. Assim como no modelo de [Ferreira \(2014\)](#), cada passo de tempo do mercado artificial aqui proposto representa um dia de negociação e corresponde a uma data do calendário, sendo que não há negociação aos sábados e domingos. Dessa forma, o número de dias de negociação por mês não é constante, nem mesmo a quantidade de dias de negociação em um ano.

A única adaptação realizada diz respeito à determinação dos preços pelos quais os agentes estão dispostos a negociar as ações, que no modelo de [Ferreira \(2014\)](#) é feita por meio das equações 3.4 e 3.5 do GASM. Por outro lado, no modelo proposto neste trabalho, os preços pelos quais o agente  $i$  estará disposto a vender ( $s_{i,t}$ ) ou comprar ( $b_{i,t}$ ) determinada ação no dia  $t$ , são determinados, respectivamente, pelas equações 4.1 e 4.2, sendo  $S_{t-1}$  o preço de fechamento daquela ação no dia anterior,  $y_{i,t}$  uma realização da variável aleatória  $Y \sim N(\mu_Y, [k \sigma_{ret}(J_i)]^2)$ , presente no GASM (descrita em detalhes na seção 3.2.2), e  $\gamma$  uma constante entre 0 e 1.

$$s_{i,t} = \gamma S_{t-1} + (1 - \gamma) \frac{S_{t-1}}{y_{i,t}} \quad (4.1)$$

$$b_{i,t} = \gamma S_{t-1} + (1 - \gamma) y_{i,t} S_{t-1} \quad (4.2)$$

A inclusão da constante  $\gamma$  possibilita um maior controle sobre a volatilidade do mercado, a qual [Ferreira \(2014\)](#) aponta como uma das deficiências de seu modelo por assumir valores muito superiores aos observados nos mercados reais. Por exemplo, se  $\gamma = 0$ , as equações 4.1 e 4.2 se tornam idênticas às equações 3.4 e 3.5, utilizadas por [Raberto et al. \(2001\)](#) e [Ferreira \(2014\)](#). Porém, caso seja utilizado  $\gamma = 1$ , os agentes sempre negociarão ações ao mesmo preço de fechamento do dia anterior, não havendo qualquer oscilação nos preços e, conseqüentemente, tornando a volatilidade do mercado nula. Ou seja, quanto maior o valor utilizado para a constante  $\gamma$ , menos volátil se tornará o mercado, o que possibilita realizar ajustes no modelo para torná-lo mais semelhante ao mercado que se pretende simular. Essa adaptação foi inspirada no mercado artificial de ações de Santa Fe (apresentado na seção 3.2.1), o qual também inclui uma constante

que controla a influência do preço anterior na formação do novo preço da ação, como pode ser visto na equação 3.1.

A expansão realizada no modelo de Ferreira (2014) corresponde à incorporação de um mercado artificial de opções. Nesse mercado, podem ser negociadas diversas séries de *calls* (opções de compra) e *puts* (opções de venda) europeias, com diferentes datas de vencimento, preços de exercício e ativos subjacentes. Um parâmetro do modelo define quais ações serão ativos subjacentes de opções, permitindo que possam ser utilizadas todas as ações ou apenas algumas delas no mercado de opções. Vale ressaltar que, como o lote-padrão do modelo de Ferreira (2014) é de uma ação, os contratos negociados no mercado de opções também são unitários.

Os vencimentos ocorrem a cada mês, sendo o número de diferentes datas de vencimento simultâneas um parâmetro do modelo. Por exemplo, caso o número de vencimentos seja definido como três, serão negociadas séries com vencimentos nos próximos três meses. Já os preços de exercício são calculados de forma a torná-los o mais próximos possíveis do último preço de fechamento da ação subjacente, tomando como base dois parâmetros: o número de diferentes preços de exercício e a distância entre preços de exercício, definida como uma porcentagem do último preço de fechamento da ação subjacente. Caso esses parâmetros sejam 3 e 5%, respectivamente, será lançada uma série ATM, uma com preço de exercício 5% acima do último preço de fechamento da ação e outra 5% abaixo. Por outro lado, caso os valores dos parâmetros sejam de, respectivamente, 2 e 5%, será lançada uma série com preço de exercício 2,5% acima do último preço de fechamento da ação e outra 2,5% abaixo. Com base nas características de cada série, são criados códigos de identificação para cada uma delas, seguindo o padrão da BM&FBovespa, apresentado na seção 2.4.3.

O mecanismo de formação de preços das opções é o mesmo utilizado na formação de preços das ações por Ferreira (2014), ou seja, o livro de ordens. A negociação de opções ocorre da mesma maneira que a negociação de ações descrita pelos algoritmos 1 e 2, apresentados na seção 3.2.3.

Em relação ao comportamento dos agentes no mercado de opções, foi utilizado como base o comportamento dos mesmos no mercado de ações, com algumas adaptações. Em um dado passo de tempo, cada agente opera no mercado de opções com uma probabilidade  $P^{(o)}$ , refletindo o fato de que o número de investidores nos mercados de opções é menor que nos mercados de ações. Os agentes selecionados para realizar negociações com opções irão comprar ou vender de forma aleatória, com igual probabilidade, assim como acontece no mercado de ações. Além disso, o mercado de opções também não conta com um mecanismo de propagação de opinião entre os agentes.

O cálculo dos preços limite de venda e de compra é similar ao apresentado nas equações 4.1 e 4.2, utilizando, porém, o preço atual da opção determinado pelas equações de Black-Scholes em vez do preço observado no período anterior. Essa medida faz com que os agentes considerem o tempo até o vencimento e o preço de exercício dos contratos em suas decisões. As equações 4.3 e 4.4 ilustram esses cálculos para *calls* (opções de compra), sendo  $s_{i,t}^{(o)}$  e  $b_{i,t}^{(o)}$ , respectivamente, o preço limite de venda e de compra de determinada opção para o agente  $i$  no período de tempo  $t$ ,  $\tilde{c}_t$  o preço daquela *call* no instante  $t$ , calculado pelas equações de Black-Scholes (equação 2.7),

$y_{i,t}$  uma realização da variável aleatória  $Y \sim N(\mu_Y, [k \sigma_{ret}(J_i)]^2)$  do GASM e  $\gamma$  uma constante entre 0 e 1.

$$s_{i,t}^{(o)} = \gamma \tilde{c}_t + (1 - \gamma) \frac{\tilde{c}_t}{y_{i,t}} \quad (4.3)$$

$$b_{i,t}^{(o)} = \gamma \tilde{c}_t + (1 - \gamma) y_{i,t} \tilde{c}_t \quad (4.4)$$

No caso de opções de venda (*puts*), os preços são determinado de forma análoga, de acordo com as equações 4.5 e 4.6, sendo  $\tilde{p}_t$  o preço da *put* no instante  $t$ , calculado pelas equações de Black-Scholes (equação 2.8).

$$s_{i,t}^{(o)} = \gamma \tilde{p}_t + (1 - \gamma) \frac{\tilde{p}_t}{y_{i,t}} \quad (4.5)$$

$$b_{i,t}^{(o)} = \gamma \tilde{p}_t + (1 - \gamma) y_{i,t} \tilde{p}_t \quad (4.6)$$

Vale notar que, no mercado artificial de opções, a constante  $\gamma$  não controla a influência do preço anterior da opção, mas sim do preço determinado pelas equações de Black-Scholes, na formação do novo preço. De toda forma, um aumento no valor de  $\gamma$  torna os preços de compra e venda de cada agente mais similares entre si, também deixando o mercado menos volátil. Além disso, o modelo não considera a variação de valor do dinheiro ao longo do tempo, utilizando-se taxa de juros nula nas equações de Black-Scholes.

Concluindo a descrição do comportamento dos agentes, as quantidades demandadas e ofertadas pelos mesmos seguem a mesma lógica do modelo de Ferreira (2014) para ações, sendo determinadas com base na realização de uma variável aleatória uniforme e em sua riqueza atual. As equações 4.7 e 4.8 definem o cálculo dessas quantidades, sendo  $o_{i,t}^{(s)}$  e  $o_{i,t}^{(b)}$ , respectivamente, a quantidade demandada e ofertada de determinada opção pelo agente  $i$  no período de tempo  $t$ ;  $u_{i,t}^*$  uma realização da variável aleatória uniforme  $U^* \sim U(0, \lambda)$ , com  $0 < \lambda \leq 1$ ;  $O_{i,t}$  a posição do agente  $i$  naquela opção no instante  $t$ ;  $A_{i,t}$  a quantidade de ações que servem de ativo subjacente para aquela opção que o agente  $i$  possui no instante  $t$ ;  $N^{(o)}$  o número de séries em negociação que possuem a mesma ação subjacente;  $C_{i,t}^{(o)}$  o capital que o agente  $i$  deseja investir naquela opção no instante  $t$ ; e  $S_{t-1}$  o último preço de fechamento da ação subjacente àquela opção.

$$o_{i,t}^{(s)} = \left[ u_{i,t}^* \max \left\{ O_{i,t} + \frac{A_{i,t}}{N^{(o)}} + \frac{C_{i,t}^{(o)}}{S_{t-1}}, 0 \right\} \right] \quad (4.7)$$

$$o_{i,t}^{(b)} = \left[ \frac{u_{i,t}^* C_{i,t}^{(o)}}{\max\{b_{i,t}^{(o)}; 0,01\}} \right] \quad (4.8)$$

A distribuição do capital total do agente entre as diferentes séries negociadas – ou seja, o cálculo de  $C_{i,t}^{(o)}$  – é feita da mesma forma que a distribuição do capital entre as diferentes ações que o agente deseja comprar no mercado de ações de Ferreira (2014). A variável  $O_{i,t}$  assume

valores positivos em caso de posições *long* e negativos para posições *short*. Já a constante  $\lambda$  é utilizada para limitar a fração de recursos que um agente pode comprometer com opções, a fim de evitar que o mesmo assuma mais obrigações futuras do que possa cumprir.

Enquanto que no mercado de ações um agente vende uma fração aleatória de suas ações, no lançamento de contratos de opções são também consideradas a posição atual do agente, que representa seus futuros direitos ou obrigações, e a quantidade de ações que ele conseguiria comprar com parte de seu dinheiro (equação 4.7). Analogamente, a equação 4.8 se assemelha à determinação das quantidades de compra no mercado de ações, apenas acrescentando-se um limite mínimo para o denominador pois, diferentemente do valor das ações no modelo de [Ferreira \(2014\)](#), o valor de uma opção pode se tornar muito próximo de zero.

Ao lançar uma ordem limitada no livro de ordens, o agente se compromete a realizar uma negociação caso apareça um indivíduo com interesse compatível. A fim de evitar que o agente que lançou a ordem comprometa seus recursos em outra negociação, ele terá o dinheiro ou as ações necessários para realizar a negociação temporariamente bloqueados, até que a ordem seja executada ou o dia de negociação chegue ao fim. Ao término de um dia de negociação, além da devolução do capital e ações bloqueados dos agentes, ocorre a reinicialização do livro de ordens, sendo apagadas todas as ordens limitadas que não chegaram a ser executadas.

O exercício das opções ocorre no início dos dias de vencimento dos contratos, antes de ocorrerem as negociações daquele dia, tomando como base o último preço de fechamento da ação subjacente. Para fins de simplificação, a liquidação dos contratos ocorre apenas de forma financeira, assim como no modelo de [Yang e Sun \(2013\)](#). Ou seja, não há transferência de ações no ato do exercício, apenas o pagamento ou recebimento do *payoff* que cabe a cada agente. Logo após o exercício, são lançadas novas séries, com novas datas de vencimento e preços de exercício, para repor aquelas que venceram. Dessa forma, o número de diferentes séries em negociação no mercado permanece constante ao longo do tempo.

No intuito de garantir que o agente terá dinheiro suficiente para cumprir com suas obrigações, é exigido o depósito de margens de garantia de todos aqueles que assumirem uma posição *short*. A margem exigida desses agentes é determinada pela soma do valor absoluto do *payoff* de suas posições *short*, calculado com base no último preço de fechamento das ações subjacentes. Ou seja, a margem que um agente deve manter depositada corresponde ao valor que ele deveria pagar caso fosse exercido naquele instante. A atualização das contas margem dos agentes é feita no final de cada dia de negociação, de acordo com as novas posição dos agentes e os novos preços de fechamento das ações. Caso um agente não possua dinheiro suficiente para pagar a margem devida, o mesmo deve vender ações no próximo pregão para suprir essa falta e fica temporariamente proibido de negociar opções. Por fim, ao chegar o dia de vencimento de alguma série, caso aquela opção esteja ITM, os agentes em posição *short* são exercidos e parte do dinheiro de suas contas margem, referente ao *payoff* de suas posição naquela opção, é transferido para os agentes que estavam em posição *long*.

A Figura 13 apresenta a dinâmica de um passo de tempo do mercado artificial, correspondente a um dia de negociação. Assim como no modelo de [Ferreira \(2014\)](#), cada ordem dos agentes é acompanhada de um horário, de forma que as mesmas são lançadas e executadas em

ordem cronológica. Isso permite a divisão da etapa de negociação de ações e opções em uma sequência de subpassos, possibilitando que usuários do simulador consultem o livro de ordens e realizem negociações em diferentes momentos de um mesmo dia de negociação.

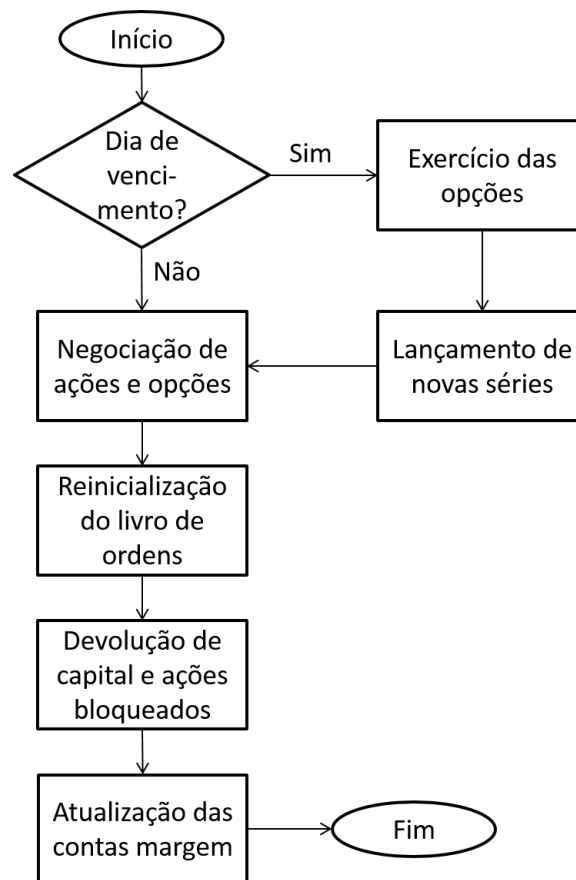


Figura 13 – Representação de um passo de tempo do mercado artificial, equivalente a um dia de negociação.

Fonte: O autor

## 4.2 A interface do usuário

Além do mercado artificial apresentado na seção anterior, foi implementada a interface *online* proposta por Ferreira (2014), porém não implementada pelo autor, com algumas adaptações, incluindo um sistema de autenticação dos usuários. Para tanto, foram utilizadas as linguagens HTML, CSS, PHP e Javascript, além de SQL para o banco de dados. Nesse ambiente, o usuário do simulador pode observar os livros de ordens, o último negócio realizado de cada ativo, os ativos que possui e as ordens que emitiu, além de gráficos com as últimas cotações do ativo selecionado, incluindo preços de abertura, mínimo, máximo e fechamento. A Figura 14 mostra o *home broker* do simulador, onde são observados os livros de ordens de dois ativos e um gráfico das cotações de um deles.

As ordens lançadas pelo usuário na interface são gravadas em um banco de dados MySQL. O mercado artificial, implementado em R, fica em execução no servidor sem que o usuário veja,

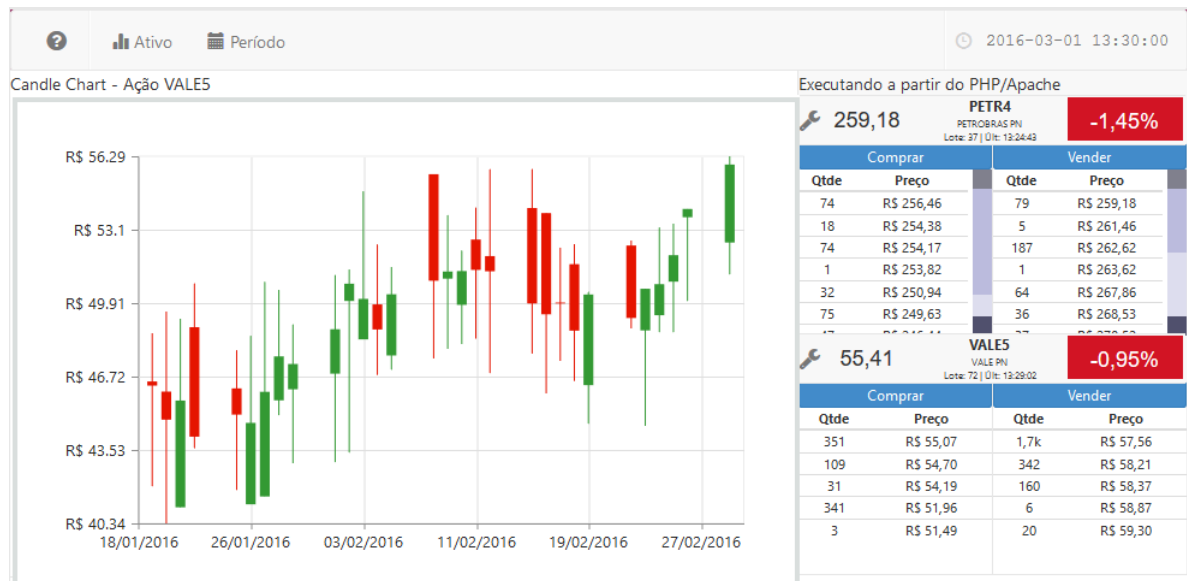


Figura 14 – Home broker da interface do simulador *on-line*.

Fonte: O autor

capturando as ordens dos usuários e atualizando o banco de dados conforme as negociações são processadas no modelo. Por fim, o navegador do usuário faz requisições periódicas ao servidor para atualizar algumas informações do simulador, como os livros de ordens, utilizando AJAX (*Asynchronous Javascript and XML*), uma forma de tornar a página mais dinâmica por meio de requisições assíncronas ao servidor. A Figura 15 apresenta a interação entre as diferentes partes do simulador e as linguagens processadas em cada uma.

Além disso, o simulador conta com um breve tutorial, o qual tem por finalidade explicar os diferentes componentes da interface para usuários ainda não familiarizados com a mesma.

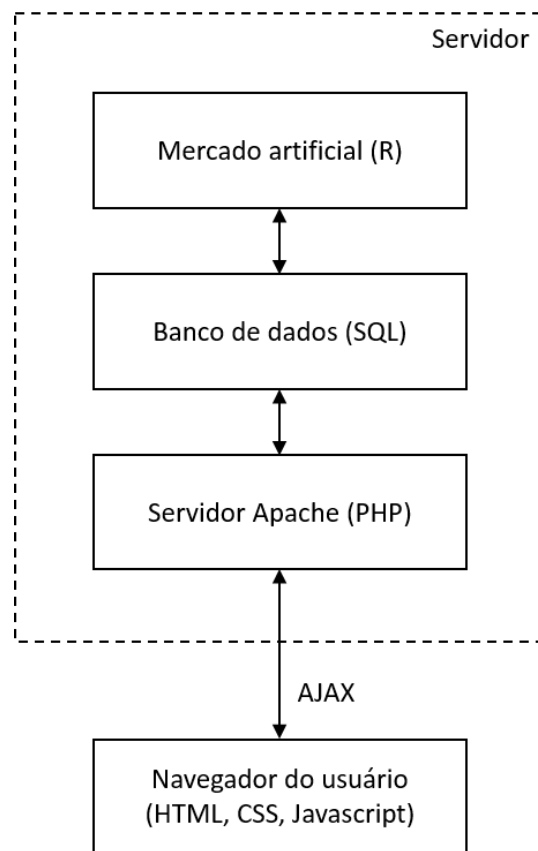


Figura 15 – Interação entre as partes do simulador e a linguagem processada em cada uma delas.

Fonte: O autor

## 5 Simulações Realizadas

Este capítulo apresenta os experimentos conduzidos com o mercado artificial de ações e opções descrito no capítulo 4, o qual é avaliado de acordo com características observadas em cotações reais de ações da NYSE (*New York Stock Exchange*), além do comportamento teoricamente e empiricamente esperado de uma opção. As séries de preços aqui discutidas, tanto do mercado artificial quanto de mercados reais, dizem respeito a preços de fechamento das ações e a opções, ou seja, o último preço negociado em determinado dia. Todos os modelos aqui simulados foram implementados na linguagem R.

### 5.1 Simulações iniciais

A princípio foram realizados experimentos com os mesmos parâmetros do modelo de [Ferreira \(2014\)](#), como número de agentes igual a 200, utilizando-se  $\gamma = 0$ , a fim de replicar o comportamento dos agentes de seu modelo no mercado de ações. Em relação ao mercado de opções, os parâmetros utilizados são apresentados na Tabela 5. Vale ressaltar que, caso o dia 15 de determinado mês seja um sábado ou domingo, o exercício ocorrerá na segunda-feira seguinte. Além disso, como o modelo conta com dois tipos de opções (*calls* e *puts* europeias), duas ações que servem de ativo subjacente para os contratos e três datas de vencimento e preços de exercício distintos, existem 36 séries sendo negociadas simultaneamente.

Tabela 5 – Parâmetros utilizados nas simulações do mercado de opções.

Parâmetro	Valor
Ações que terão opções	Todas (ações 1 e 2)
Número de vencimentos	3
Número de preços de exercício	3
Distância entre preços de exercício (fração do último preço de fechamento da ação)	0,05
Probabilidade de cada agente negociar opções ( $P^{(o)}$ )	0,2
Fração máxima de seu capital que um agente pode comprometer com opções ( $\lambda$ )	0,2
Data inicial do simulador	15/01/2015
Dia de vencimento a cada mês	15

Fonte: O autor

Assim como nos experimentos de [Ferreira \(2014\)](#), foram realizadas 200 simulações de 1260 passos de tempo, equivalentes a 5 anos. A condução de experimentos nesse horizonte de tempo permite a comparação dos resultados com aqueles apresentados por [Scarp, Ferreira e Trindade \(2014\)](#) para ações da NYSE.

As Figuras 16 e 17 apresentam, respectivamente, o preço médio das ações 1 e 2 nas 200

replicações para cada passo de tempo. Observa-se que o modelo se encontra instável até certo ponto, sendo o preço das ações dependente do preço inicial estipulado para cada ação – 250 e 50, respectivamente. Para contornar esse problema, foram realizadas novas simulações com um período de *warm-up* de 200 passos de tempo, identificado pela linha tracejada nas Figuras 16 e 17, de forma que fossem utilizados os últimos 5 anos de negociação do total de 1460 passos de tempo de cada simulação. Esse período de *warm-up* foi utilizado em todas as simulações apresentadas ao longo deste capítulo.

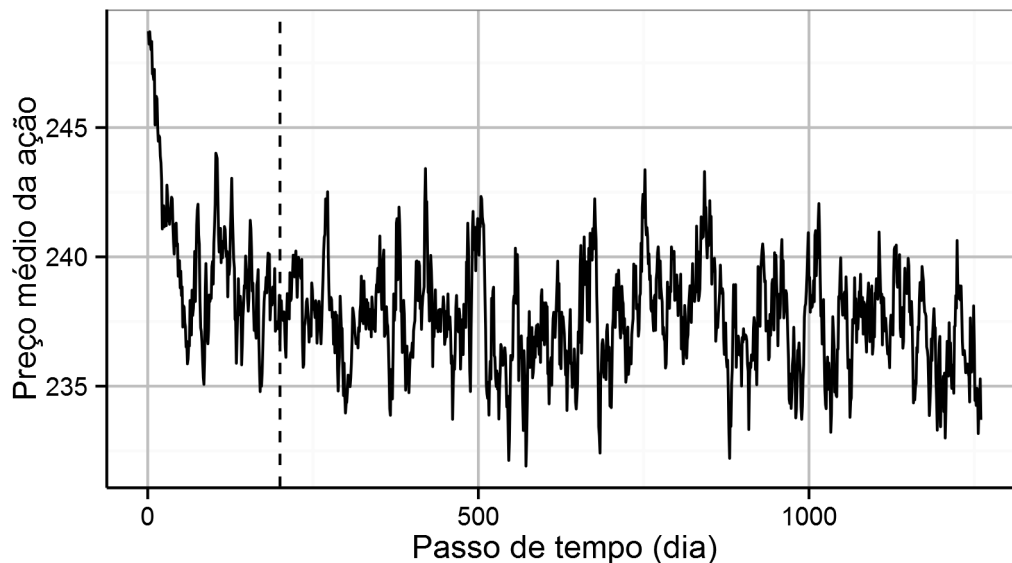


Figura 16 – Preço médio da ação 1 para cada passo de tempo em 200 replicações do modelo.

Fonte: O autor

Porém, uma simples análise visual das séries de preços médios não é suficiente para determinar se o mercado de ações do modelo consiste em uma boa representação do mercado real. No intuito de verificar se a introdução do mercado de opções compromete de alguma forma a qualidade do mercado artificial de ações, foram realizados os devidos testes referentes à ocorrência de fatos estilizados de ações, utilizando o mesmo método de [Scarp, Ferreira e Trindade \(2014\)](#).

O método consiste em retirar amostras de diferentes tamanhos das séries simuladas de 5 anos, comparando os resultados obtidos em um mercado artificial com aqueles de cotações reais observadas em ações da NYSE. Os tamanhos de amostra utilizados nos testes correspondem a 3 e 6 meses, 1, 2 e 3 anos, além da série completa de 5 anos. São retiradas 500 amostras de cada tamanho em cada uma das replicações do modelo, a partir das quais é estimada a frequência de ocorrência dos fatos estilizados por meio de testes de hipóteses com um nível de significância de 5%. Os fatos estilizados de ações analisados são a presença de caudas pesadas na distribuição dos retornos, de autocorrelação no módulo dos retornos – o chamado agrupamento de volatilidade – e de correlação entre o volume de ações negociadas e a volatilidade de seu preço. Mais detalhes a respeito desses fatos estilizados podem ser encontrados no Apêndice A.

A Figura 18 apresenta as médias de ocorrência dos fatos estilizados da ação 1 nas 200

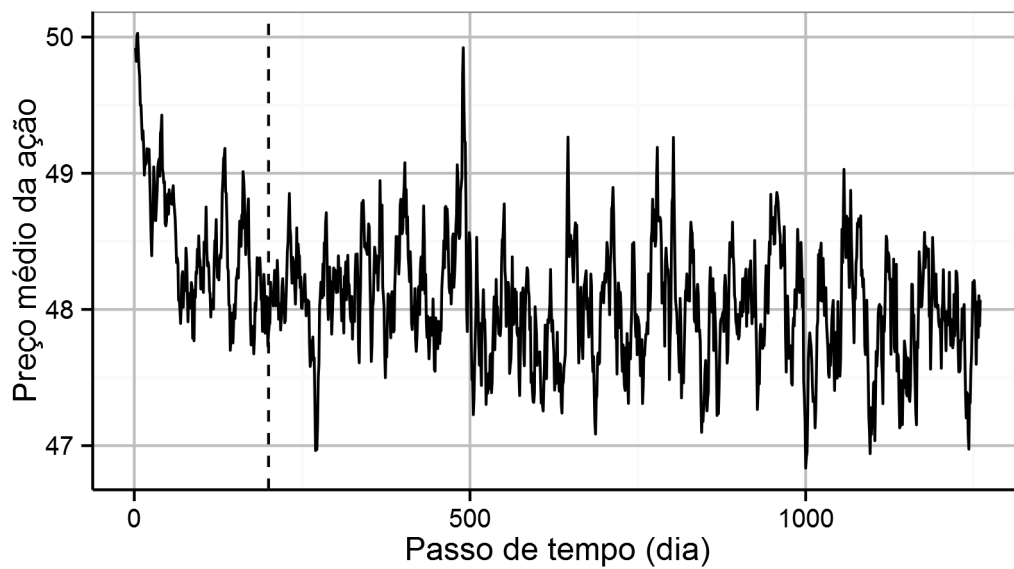


Figura 17 – Preço médio da ação 2 para cada passo de tempo em 200 replicações do modelo.

Fonte: O autor

simulações realizadas do modelo com opções (losangos brancos) e sem opções (triângulos brancos), bem como o observado empiricamente nas ações da NYSE (círculos pretos). Já na Figura 19, em vez da média das replicações, são apresentados os quantis 5%. As frequências de ocorrência dos fatos estilizados nas ações da NYSE também foram retiradas do trabalho de [Scarp, Ferreira e Trindade \(2014\)](#). As Figuras 20 e 21 apresentam esses mesmos resultados para a ação 2.

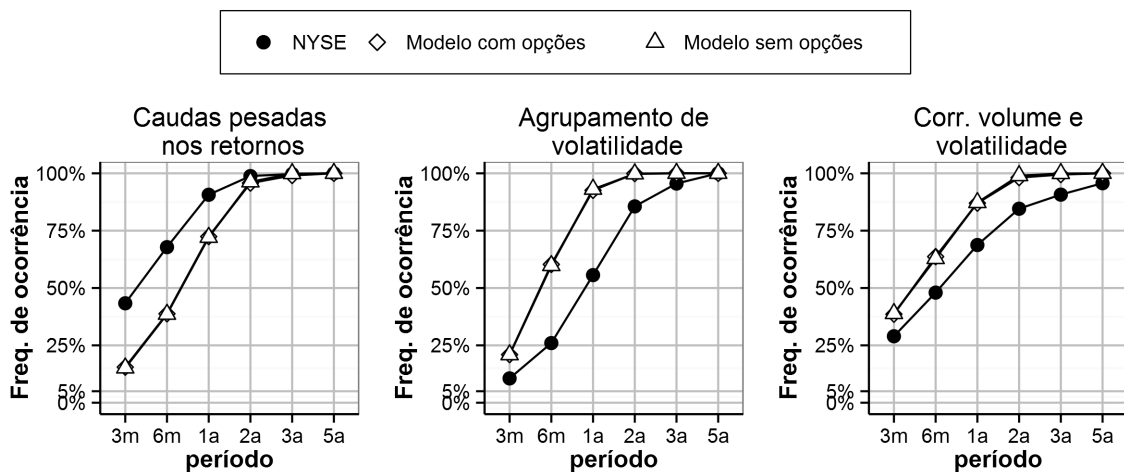


Figura 18 – Médias de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com opções (losangos brancos) e sem opções (triângulos brancos).

Fonte: O autor

Nas Figuras 18 a 21, observa-se que os resultados obtidos nas simulações com e sem

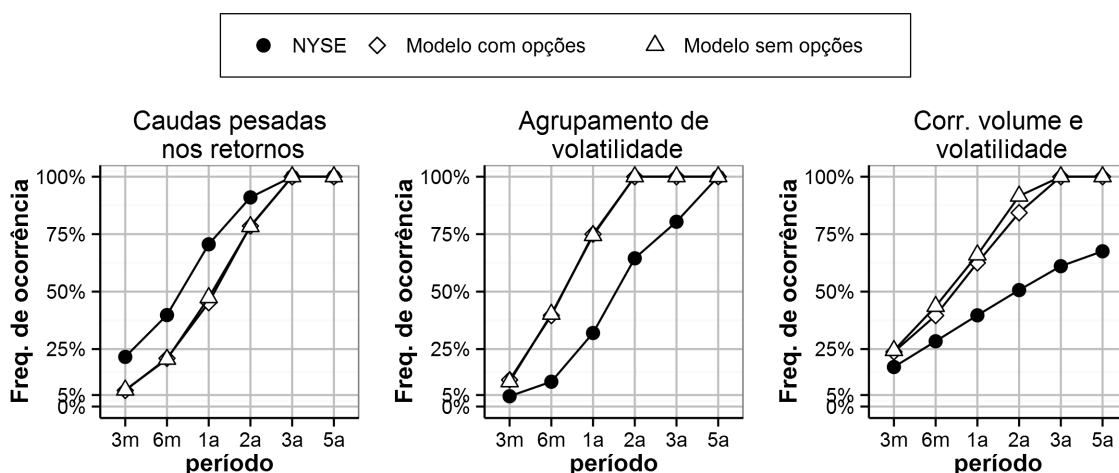


Figura 19 – Quantis 5% de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com opções (losangos brancos) e sem opções (triângulos brancos).

Fonte: O autor

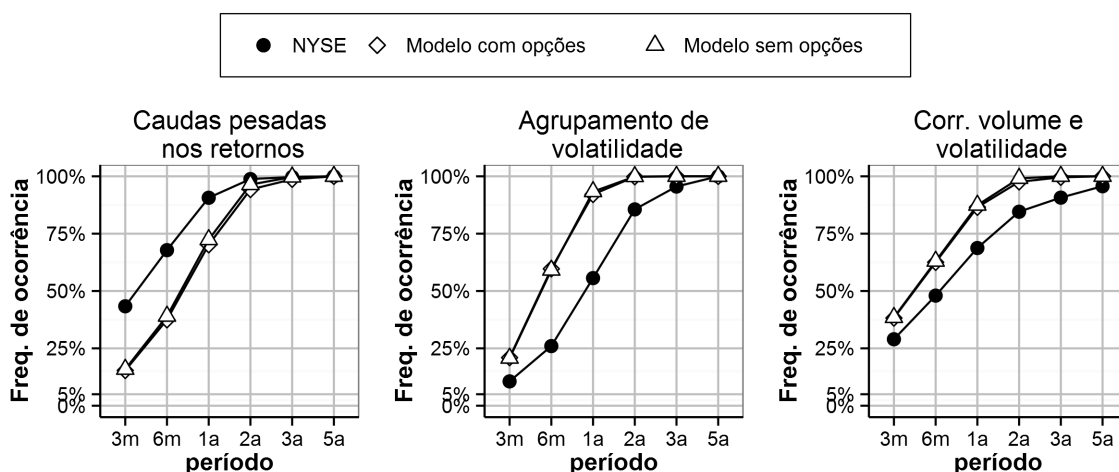


Figura 20 – Médias de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 2 no mercado de ações do modelo com opções (losangos brancos) e sem opções (triângulos brancos).

Fonte: O autor

opções são praticamente iguais. Além disso, ambos fornecem uma boa representação dos mercados de ações reais em relação à frequência de ocorrência de fatos estilizados. Ou seja, a introdução do mercado artificial de opções não compromete a capacidade do mercado artificial de ações de representar a realidade de forma fidedigna.

Quanto às características do próprio mercado artificial de opções, os resultados apresentados pelo modelo proposto estão de acordo com aquilo que se espera de uma opção. Segundo Hull (2005), desde que o preço do ativo-subjacente se mantenha constante, o valor de uma opção tende

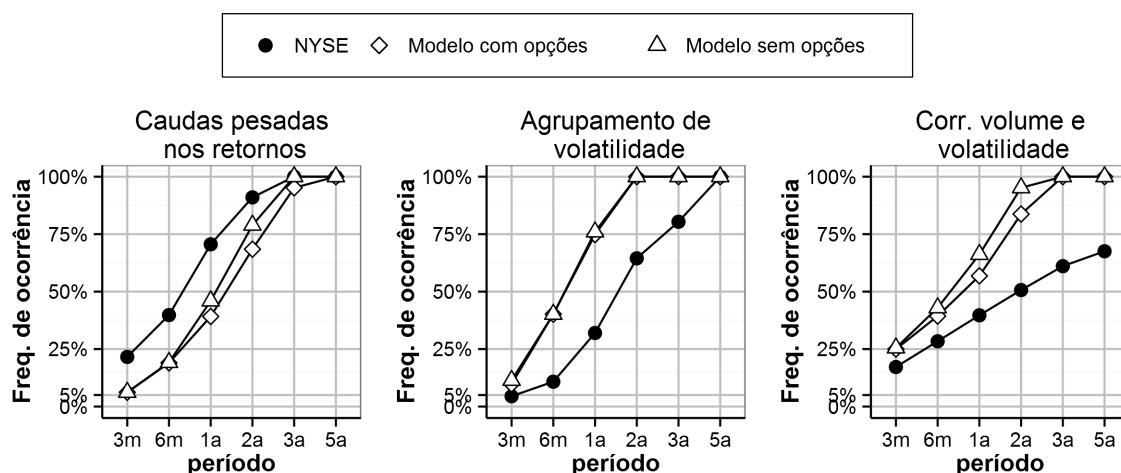


Figura 21 – Quantis 5% de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 2 no mercado de ações do modelo com opções (losangos brancos) e sem opções (triângulos brancos).

Fonte: O autor

a diminuir à medida em que sua data de vencimento se aproxima. Isso ocorre pois, enquanto o valor intrínseco da opção não se altera, devido ao preço constante, ela perde seu “valor tempo”, já que as expectativas de aumento em seu *payoff* diminuem com prazos menores até o vencimento. As opções do modelo implementado apresentam esse comportamento, conforme mostrado nas Figuras 22 e 23, nas quais constam os preços médios de negociação de algumas opções de compra da ação 1 de venda da ação 2, respectivamente, para cada passo de tempo das 200 simulações realizadas. As mudanças bruscas nos preços médios apresentados correspondem ao vencimento de uma opção e o subsequente lançamento de uma nova série para substituí-la. Vale notar que, apesar do preço das ações não ser constante, seus preços médios se mantêm oscilando dentro de certo intervalo (Figuras 16 e 17), de forma que esse comportamento descrito por Hull (2005) é observado apenas nos preços médios das opções.

Em relação às características observadas empiricamente nos mercados de opções, ou seja, os fatos estilizados, as Figuras 24 e 25 apresentam a volatilidade implícita das ações 1 e 2, respectivamente, em função da medida *moneyness*, para diversos valores de tempo até o vencimento. Foi utilizada a razão entre preço de exercício e preço do ativo subjacente no cálculo medida *moneyness*, enquanto que os valores apresentados para a volatilidade implícita correspondem a médias calculadas com os dados de todas as replicações do modelo.

Observa-se, nas Figuras 24 e 25, a presença de altos valores de *moneyness*, com um comportamento irregular da volatilidade implícita que foge dos padrões dos *smiles* de volatilidade discutidos na seção 2.3.2. A volatilidade implícita das ações assume valores dessa grandeza devido à alta volatilidade do mercado artificial de ações, a qual Ferreira (2014) afirma ser muito superior à observada nos mercados reais. Dessa forma, foram realizados novos experimentos, alterando alguns parâmetros do modelo, a fim de se reduzir a volatilidade do mercado de ações.

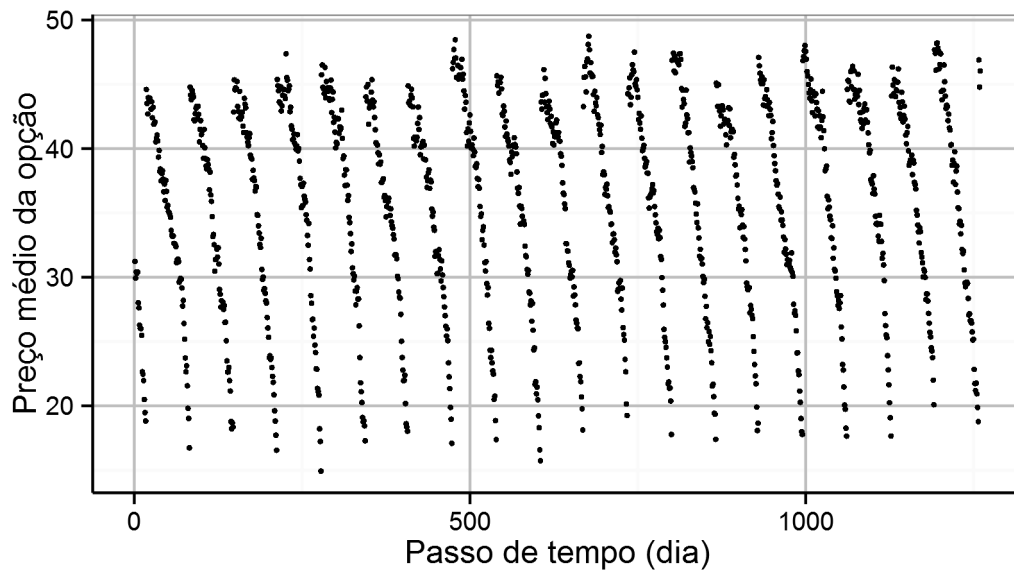


Figura 22 – Preço médio de algumas opções de compra da ação 1 para cada passo de tempo em 200 replicações do modelo.

Fonte: O autor

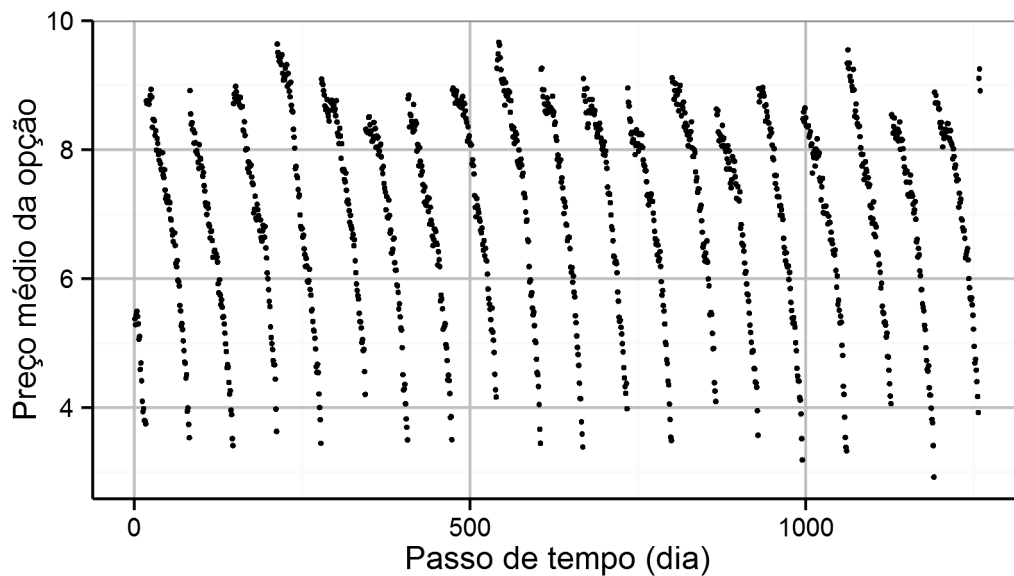


Figura 23 – Preço médio de algumas opções de venda da ação 2 para cada passo de tempo em 200 replicações do modelo.

Fonte: O autor

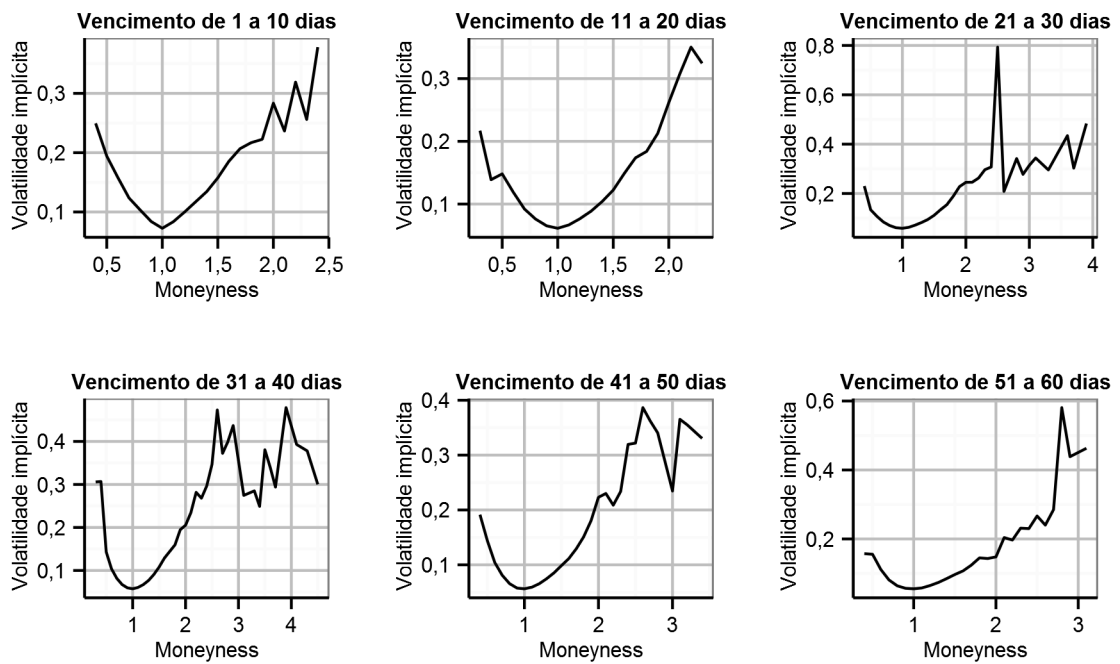


Figura 24 – Volatilidade implícita da ação 1 em função da medida *moneyness* ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento.

Fonte: O autor

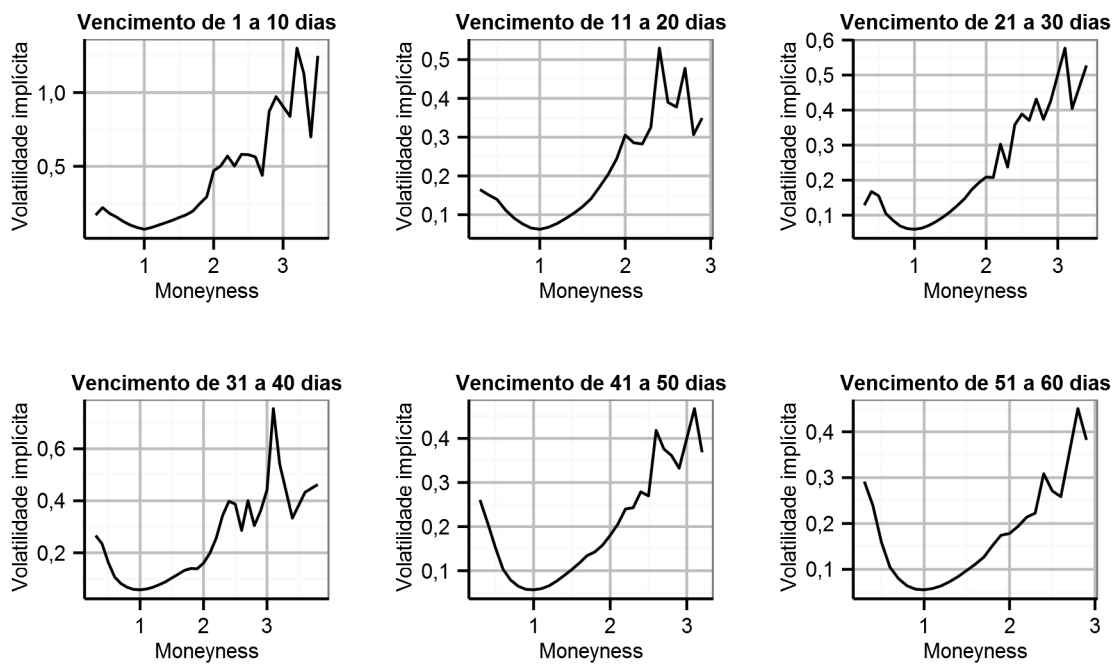


Figura 25 – Volatilidade implícita da ação 2 em função da medida *moneyness* ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento.

Fonte: O autor

## 5.2 Alterando parâmetros do modelo

No intuito de reduzir a volatilidade do mercado artificial de ações, foram realizados experimentos com diferentes valores para os parâmetros que afetam a formação de preços das ações, ou seja, os parâmetros  $k$ ,  $\mu_Y$  e  $J_i$  da variável aleatória normal  $Y \sim N(\mu_Y, [k \sigma_{ret}(J_i)]^2)$ . Como a variável aleatória  $Y$  também é utilizada na formação de preços das opções, estas alterações afetam ambos os mercados.

A princípio, foi reduzido o parâmetro  $k$ , o que reduziria a variância da variável aleatória  $Y$  e, conseqüentemente, tornaria os preços determinados pelos agentes mais uniformes. Porém, apesar de tornar o mercado menos volátil, observou-se que essa alteração prejudica a ocorrência dos fatos estilizados de ações de caudas pesadas e agrupamento de volatilidade. As Figuras 26 e 27 apresentam, respectivamente, a média e o quantil 5% da frequência de ocorrência de fatos estilizados da ação 1, comparando simulações com  $k = 1$ , as simulações iniciais ( $k = 2$ ) e os resultados observados nas ações da NYSE.

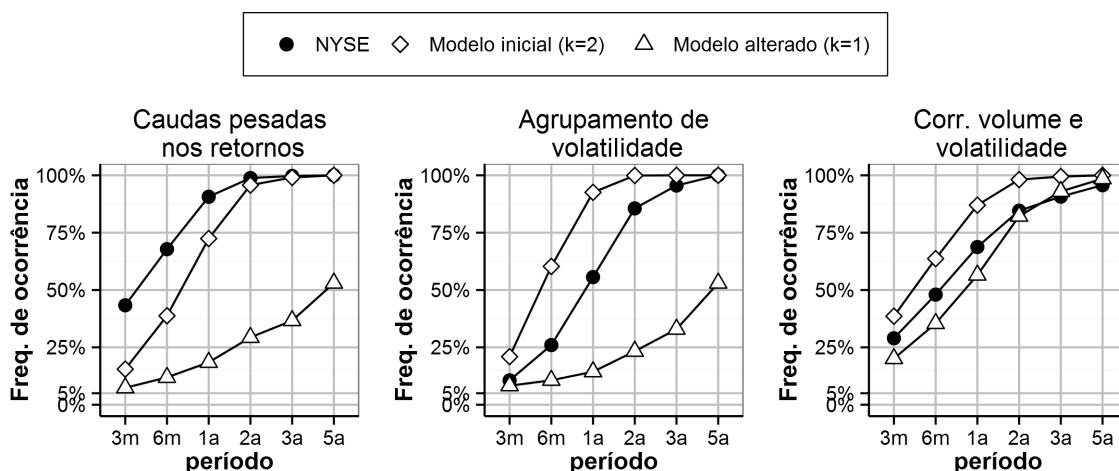


Figura 26 – Médias de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com  $k = 2$  (losangos brancos) e  $k = 1$  (triângulos brancos).

Fonte: O autor

Em seguida, retornando o parâmetro  $k$  para seu valor original, foi reduzido o parâmetro  $\mu_Y$ , cujo valor original era de 1,01, na expectativa de tornar os preços das ordens dos agentes mais similares entre si com a média de  $Y$  mais próxima de 1. Nesse novo experimento também não foram obtidos os resultados desejados, sendo que a série de preços do modelo passou a apresentar um comportamento incompatível com o que se espera de uma opção. A Figura 28 mostra os preços médios de algumas opções de compra da ação 1 nas 200 simulações realizadas com  $\mu_Y = 1$ , os quais deixaram de seguir o padrão descrito por Hull (2005) e observado no experimento inicial (Figura 22).

Por fim, foram realizados experimentos com novos valores para a janela de tempo utilizada pelos agente na estimativa da volatilidade das ações ( $J_i$ ), mantendo os demais parâmetros do

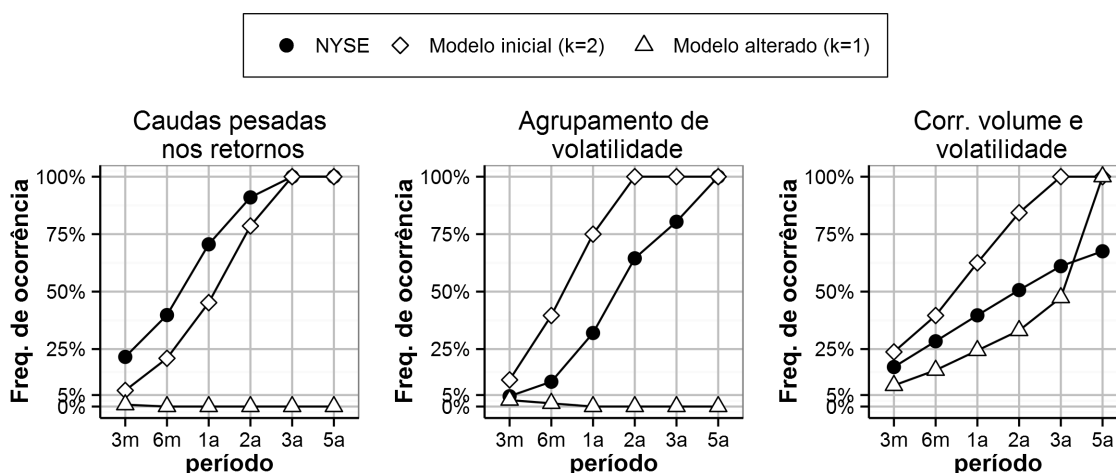


Figura 27 – Quantis 5% de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com  $k = 2$  (losangos brancos) e  $k = 1$  (triângulos brancos).

Fonte: O autor

modelo com seus valores originais. Na configuração inicial do modelo, cada agente recebia um valor aleatório para  $J_i$  entre 5 e 21 dias, correspondentes a uma semana e um mês de negociação, respectivamente. Já nos novos experimentos, optou-se por aumentar esse horizonte de tempo a fim de evitar que variações pontuais no preço – por exemplo, uma alta variação em apenas um dia – causasse um impacto grande na variância de  $Y$  e, conseqüentemente, na volatilidade do

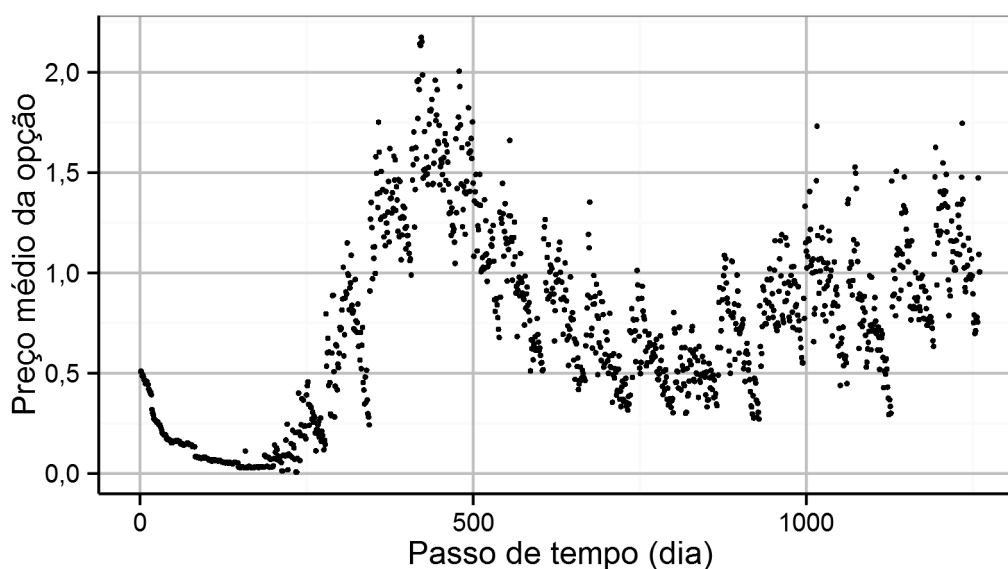


Figura 28 – Preço médio de algumas opções de compra da ação 1 para cada passo de tempo em 200 replicações do modelo com  $\mu_Y = 1$ .

Fonte: O autor

mercado. Essa alteração também não se mostrou eficaz na redução da volatilidade das ações, sendo a análise da volatilidade implícita ainda prejudicada pelos altos valores de *moneyness*, conforme pode ser observado na Figura 29, para simulações com  $J_i$  determinado aleatoriamente entre 21 e 42.

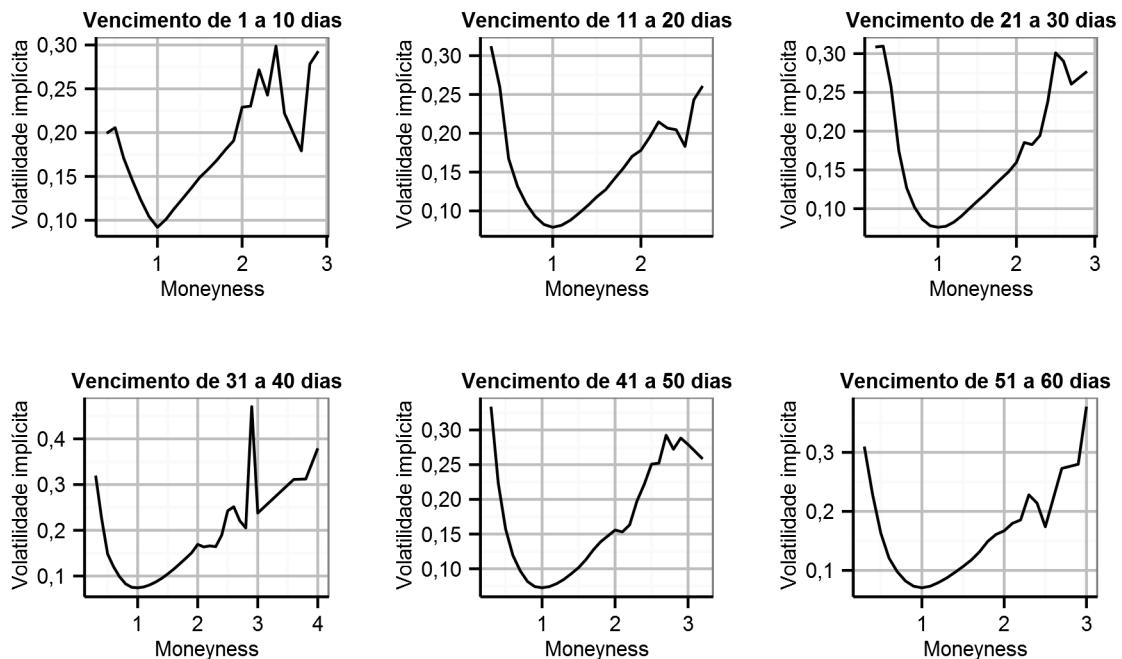


Figura 29 – Volatilidade implícita da ação 1 em função da medida *moneyness* ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com  $J_i$  determinado aleatoriamente entre 21 e 42.

Fonte: O autor

Ao longo desses experimentos, percebeu-se a dificuldade de, pela simples alteração do valor dos parâmetros do modelo de Ferreira (2014), reduzir a volatilidade do mercado artificial sem, contudo, prejudicar sua capacidade de representar a realidade. Dessa forma, optou-se por uma nova abordagem: acrescentar um novo parâmetro capaz de controlar a volatilidade do mercado.

### 5.3 O parâmetro gama

O parâmetro  $\gamma$ , já apresentado na seção 4.1, foi introduzido com a intenção de possibilitar maior controle sobre a volatilidade do mercado artificial. A princípio, foram realizadas 200 simulações com  $\gamma = 0,3$ , mantendo os outros parâmetros como no experimento inicial. Apesar de reduzir a volatilidade do mercado, essa alteração também prejudicou a ocorrência dos fatos estilizados de ações de caudas pesadas e agrupamento de volatilidade, como pode ser visto na Figura 30.

Dessa forma, foram realizadas novas simulações, dessa vez utilizando  $\gamma = 0,2$ , a fim de

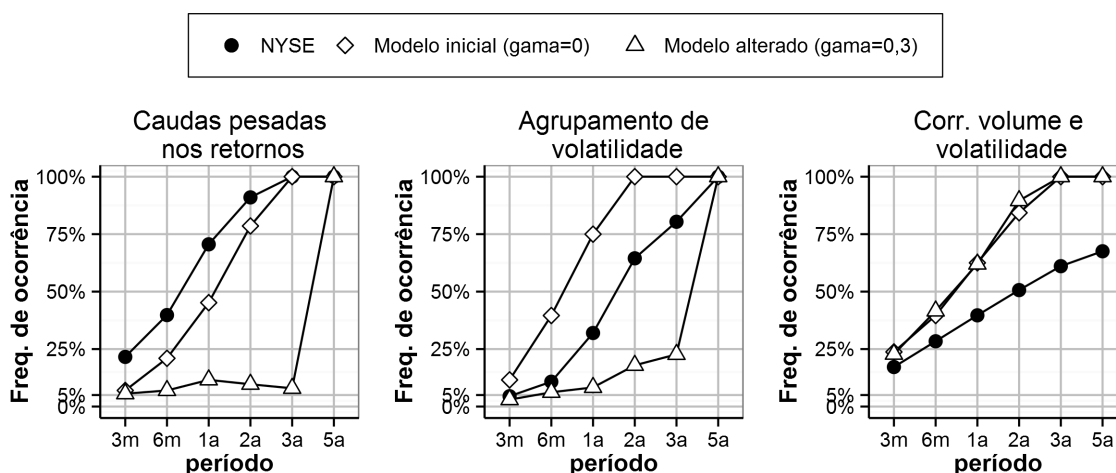


Figura 30 – Quantis 5% de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com  $\gamma = 0$  (losangos brancos) e  $\gamma = 0,3$  (triângulos brancos).

Fonte: O autor

reduzir o impacto desse novo parâmetro na ocorrência dos fatos estilizados de ações. As Figuras 31 a 34 apresentam as médias e quantis 5% das frequências de ocorrência de fatos estilizados das ações 1 e 2 dessa nova configuração do modelo.

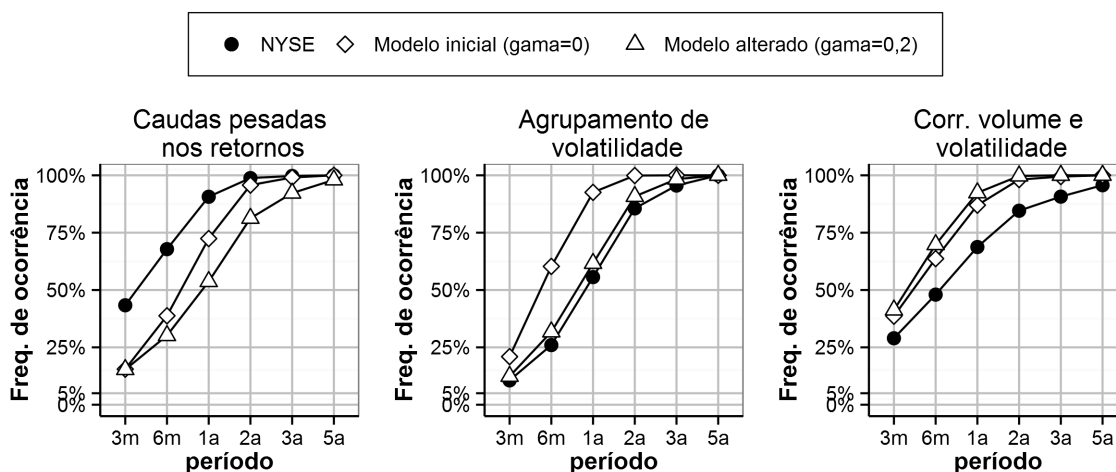


Figura 31 – Médias de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com  $\gamma = 0$  (losangos brancos) e  $\gamma = 0,2$  (triângulos brancos).

Fonte: O autor

Nas Figuras 31 e 33, observa-se que a média da frequência de ocorrência dos fatos estilizados em ambas as ações não sofreu grande impacto pela inclusão do parâmetro  $\gamma = 0,2$ , sendo que em relação ao agrupamento de volatilidade o modelo ficou mais próximo do observado na NYSE. O maior impacto negativo foi observado nos quantis 5% da ocorrência de caudas

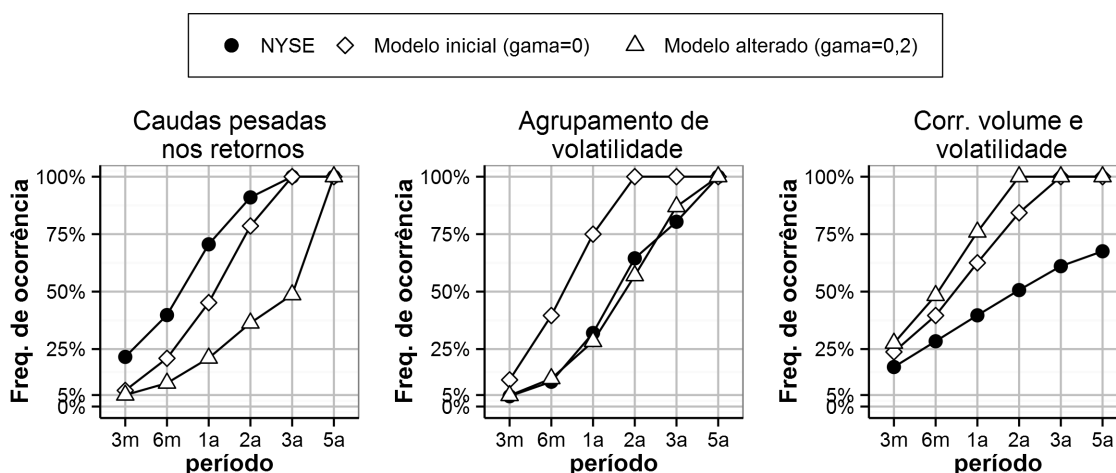


Figura 32 – Quantis 5% de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 1 no mercado de ações do modelo com  $\gamma = 0$  (losangos brancos) e  $\gamma = 0,2$  (triângulos brancos).

Fonte: O autor

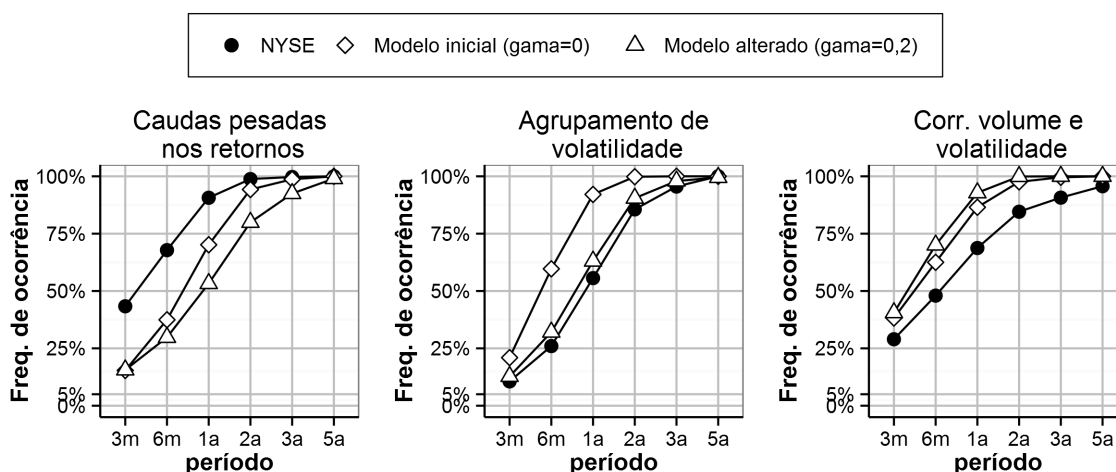


Figura 33 – Médias de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 2 no mercado de ações do modelo com  $\gamma = 0$  (losangos brancos) e  $\gamma = 0,2$  (triângulos brancos).

Fonte: O autor

pesadas (Figuras 32 e 34), os quais, apesar da redução, ainda apresentaram uma frequência razoável, diferente das simulações com  $\gamma = 0,3$  em que a ocorrência foi quase nula (Figura 30). Além disso, para as séries completas de 5 anos, todos os fatos estilizados analisados apresentaram alta frequência de ocorrência.

Quanto ao mercado artificial de opções, observou-se o comportamento esperado para os preços médios, os quais decrescem à medida em que a série se aproxima de seu vencimento. A Figura 35 apresenta o preço médio de algumas opções de compra da ação 1 nas 200 replicações do

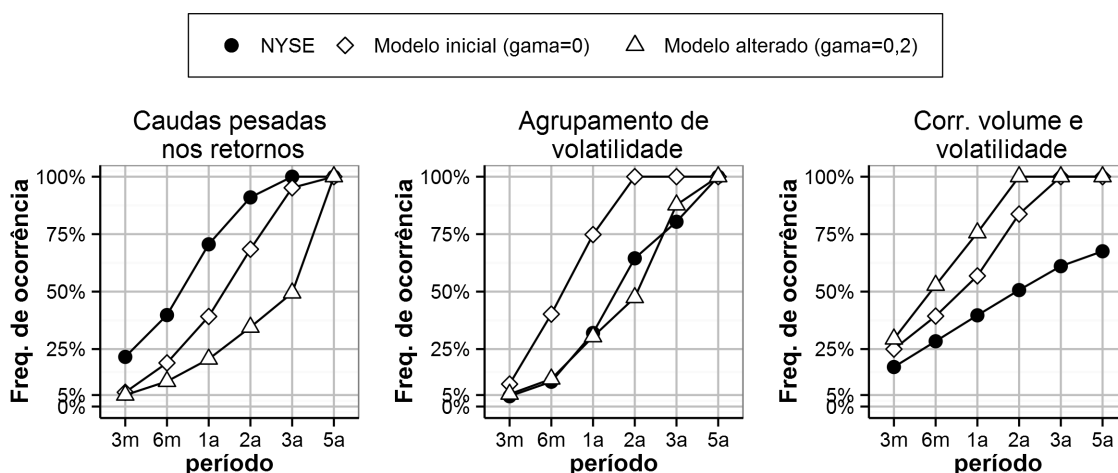


Figura 34 – Quantis 5% de ocorrência de fatos estilizados das ações da NYSE (círculos pretos) e da ação 2 no mercado de ações do modelo com  $\gamma = 0$  (losangos brancos) e  $\gamma = 0,2$  (triângulos brancos).

Fonte: O autor

modelo com  $\gamma = 0,2$ . Vale ressaltar que as mudanças bruscas periódicas no preço médio da opção correspondem ao vencimento da mesma e o lançamento de uma nova série para substituí-la.

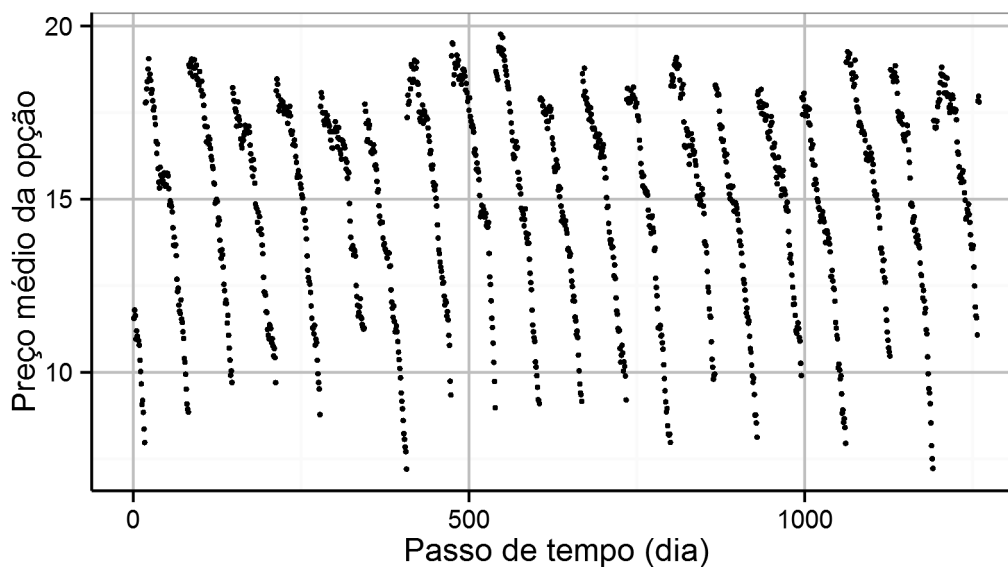


Figura 35 – Preço médio de algumas opções de compra da ação 1 para cada passo de tempo em 200 replicações do modelo com  $\gamma = 0,2$ .

Fonte: O autor

Em relação aos fatos estilizados de opções, discutidos na seção 2.3, observou-se a presença dos chamados *smiles* de volatilidade. As Figuras 36 e 37 apresentam a volatilidade implícita média das ações 1 e 2 nas 200 replicações do modelo, respectivamente, em função da medida

*moneyness*, para diversos tempos até o vencimento dos contratos.

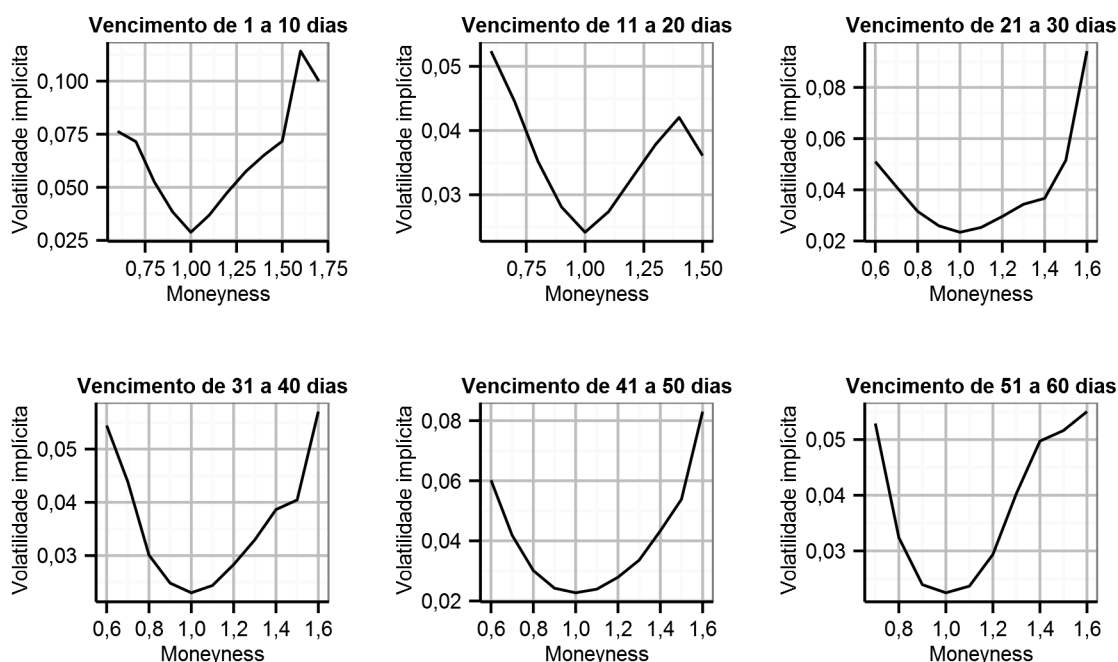


Figura 36 – Volatilidade implícita da ação 1 em função da medida *moneyness* ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com  $\gamma = 0,2$ .

Fonte: O autor

Nessa nova configuração do modelo, já não se observa a ocorrência de valores de *moneyness* demasiadamente altos que venham a causar um comportamento irregular da volatilidade implícita. Por outro lado, nos valores limites de *moneyness* apresentados nas Figuras 36 e 37, em alguns casos a volatilidade implícita não se comporta como uma função convexa. Isso ocorre pois esses valores extremos de *moneyness* são alcançados poucas vezes ao longo das simulações, de forma que a amostra utilizada no cálculo da volatilidade implícita média nesses casos não é suficiente para uma boa estimativa.

Também observou-se o fato estilizado de assimetria da volatilidade implícita, sendo que todas as curvas apresentadas nas Figuras 36 e 37 apresentaram assimetria negativa. Na ausência de uma função contínua em que fosse possível determinar a inclinação da curva no ponto em que a *moneyness* é igual a 1, já que os valores de *moneyness* foram discretizados em intervalos de tamanho 0,1 para os cálculos da volatilidade implícita, foi utilizada como medida de simetria a inclinação da reta que corta a curva nos pontos onde a medida *moneyness* assume os valores 0,9 e 1,1. A Tabela 6 apresenta os valores obtidos nesses cálculos.

A Tabela 6 também fornece informações a respeito do achatamento das curvas de volatilidade implícita nas proximidades de *moneyness* = 1. Verifica-se que, à medida em que o tempo até o vencimento aumenta, o valor absoluto das medidas de simetria diminuem, ou seja, as curvas de volatilidade implícita se tornam mais achatadas, conforme o esperado.

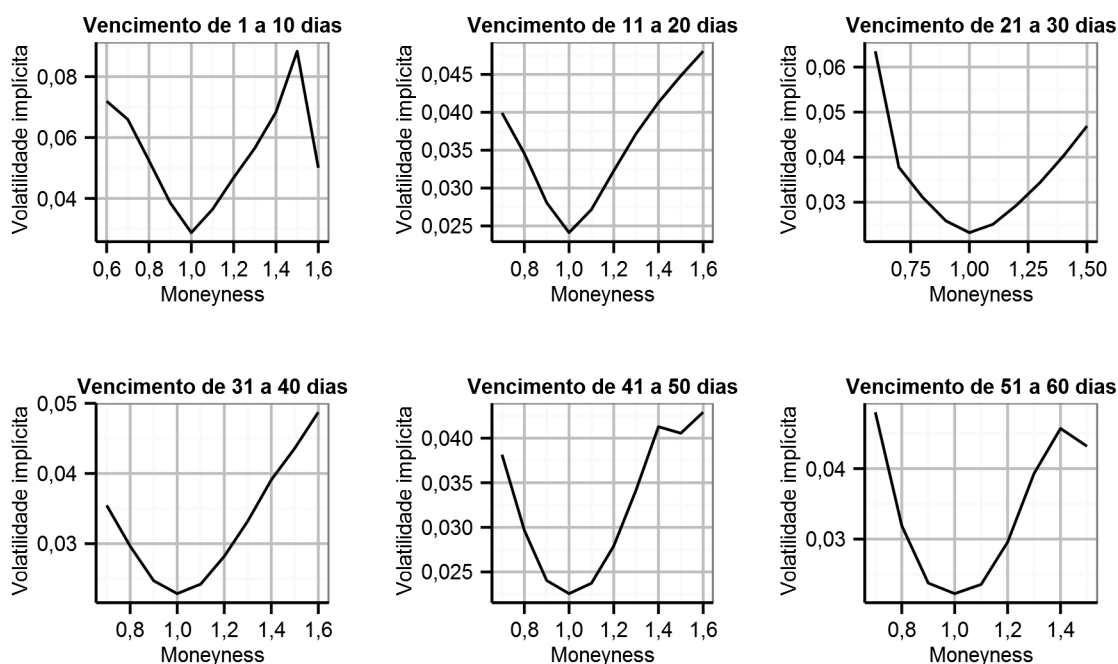


Figura 37 – Volatilidade implícita da ação 2 em função da medida *moneyness* ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com  $\gamma = 0,2$ .

Fonte: O autor

Tabela 6 – Assimetria da volatilidade implícita das ações 1 e 2 para diversos tempos até o vencimento, no modelo com  $\gamma = 0,2$ .

Vencimento (dias)	Ação 1	Ação 2
1 a 10	-0.008359261	-0.01098871
11 a 20	-0.0036388	-0.004549978
21 a 30	-0.003098379	-0.003847059
31 a 40	-0.002228392	-0.00239274
41 a 50	-0.001555028	-0.001535989
51 a 60	-0.001332643	-0.001014476

Fonte: O autor

Além disso, analisando a volatilidade implícita na mesma escala e utilizando os mesmos intervalos de *moneyness* para os diferentes tempos até o vencimento, pode-se observar o achatamento dos *smiles* nas Figuras 38 e 39. Apesar de não ser um achatamento progressivo conforme o aumento do tempo até o vencimento, em ambas as ações nota-se que o *smile* é mais acentuado para as séries com vencimento em até 10 dias do que para as demais.

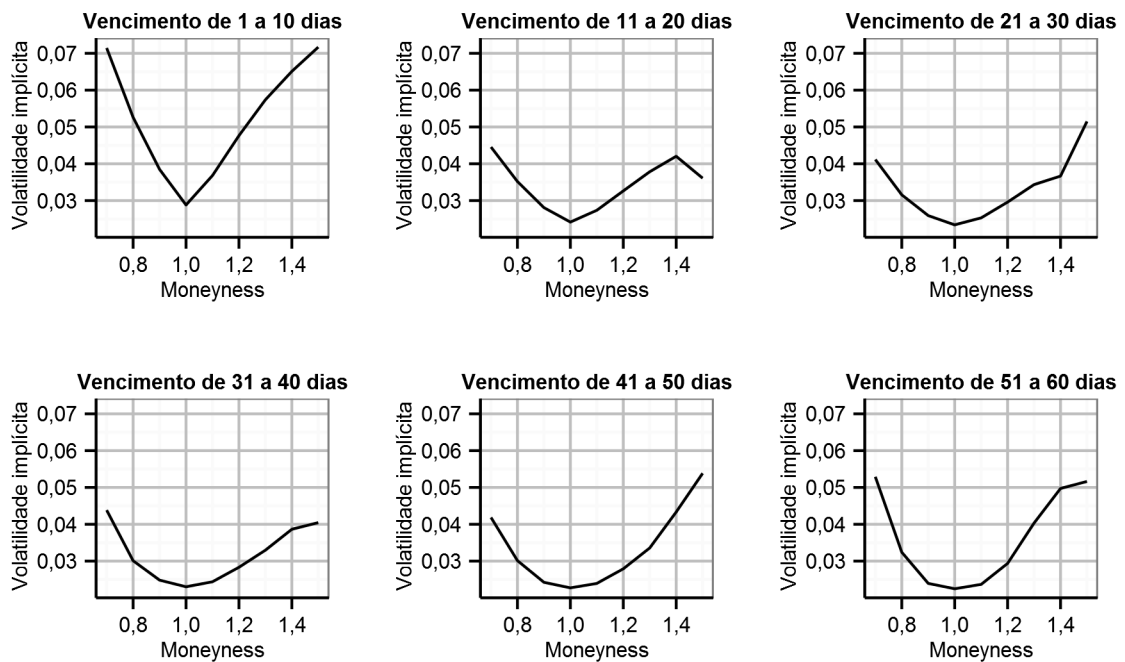


Figura 38 – Volatilidade implícita da ação 1 em função da medida  $moneyness (X/S_t)$ , utilizando a mesma escala para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com  $\gamma = 0,2$ .

Fonte: O autor

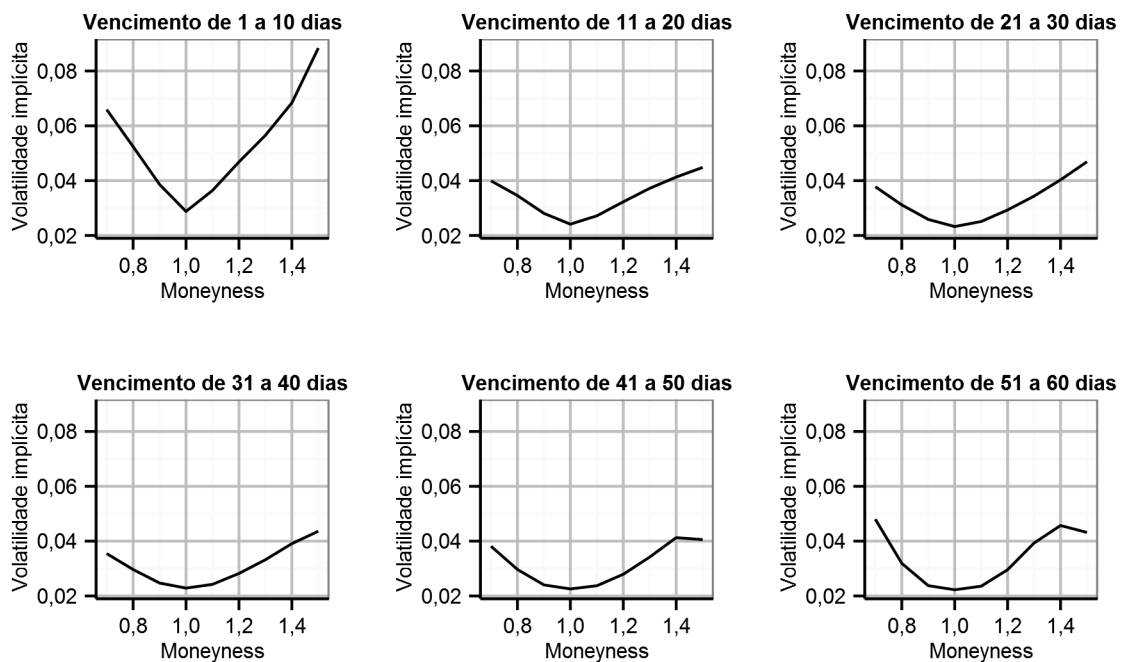


Figura 39 – Volatilidade implícita da ação 2 em função da medida  $moneyness (X/S_t)$ , utilizando a mesma escala para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com  $\gamma = 0,2$ .

Fonte: O autor

Em relação ao fato estilizado de diferença de liquidez, o modelo replica a característica dos mercados reais de apresentar maior volume de negociação em opções OTM que em opções ITM. As Figuras 40 e 41 mostram o volume médio de negociação diária de opções referentes às ações 1 e 2, respectivamente, em função da *moneyness*. Vale ressaltar que, quando *moneyness* < 1, ou seja,  $X < S_t$ , temos *calls* ITM e *puts* OTM. De forma análoga, se *moneyness* > 1 ( $X > S_t$ ), as *calls* se encontram OTM e as *puts* ITM. A única exceção observada quanto a esse comportamento esperado ocorre na Figura 40 onde, para vencimentos de até 20 dias, o volume médio de negociação de *calls* e *puts* é o mesmo para *moneyness* = 1,75. Contudo, em nenhum momento o volume médio de negociação de opções ITM chega a superar o de opções OTM. Além disso, o modelo não replica o padrão para diferentes tempos até o vencimento apresentado na seção 2.3.4.

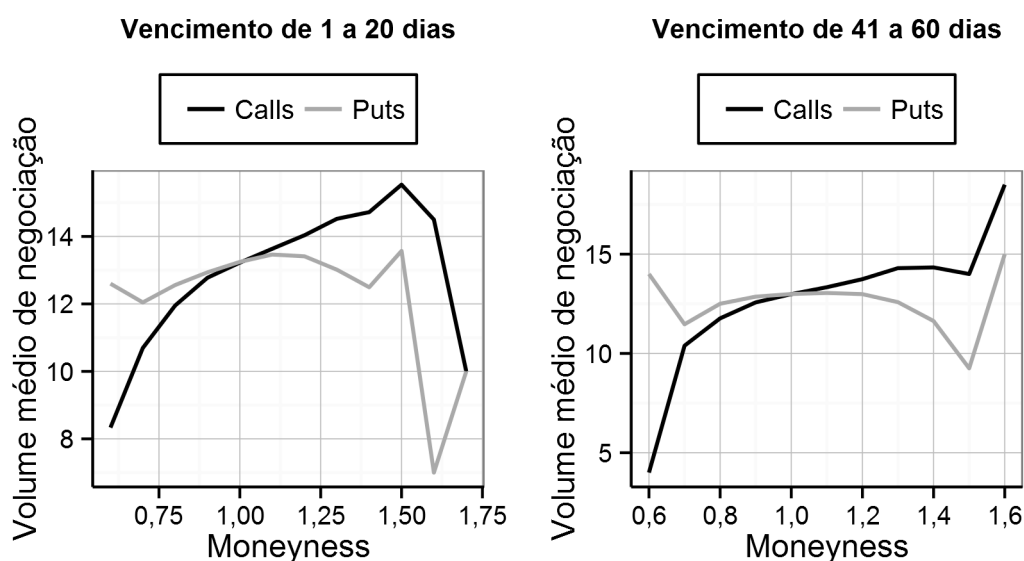


Figura 40 – Volume médio de negociação diária das opções sobre a ação 1 em função da medida *moneyness* ( $X/S_t$ ), no modelo com  $\gamma = 0,2$ .

Fonte: O autor

Por fim, no intuito de se analisar características relativas à dinâmica da volatilidade implícita, foi calculado o desvio-padrão de seus valores observados para diferentes valores de *moneyness*. O modelo conseguiu replicar a característica dos mercados reais em que o desvio-padrão da volatilidade implícita é maior para *moneyness* < 1 que para *moneyness* = 0, como pode ser observado nas Figuras 42 e 43. Apenas em dois pontos ocorrem comportamentos inesperados, com baixos valores de desvio-padrão para *moneyness* = 0,6, provavelmente por serem valores extremos de *moneyness*, os quais ocorrem com frequência insuficiente para uma boa estimativa do desvio-padrão da volatilidade implícita.

Assim, após analisar diferentes aspectos dos resultados obtidos nos experimentos, a configuração do modelo com  $\gamma = 0,2$  e os demais parâmetros com seus valores iniciais foi a que se mostrou mais adequada. Dessa forma, optou-se por utilizar essa configuração no mercado artificial do simulador proposto.

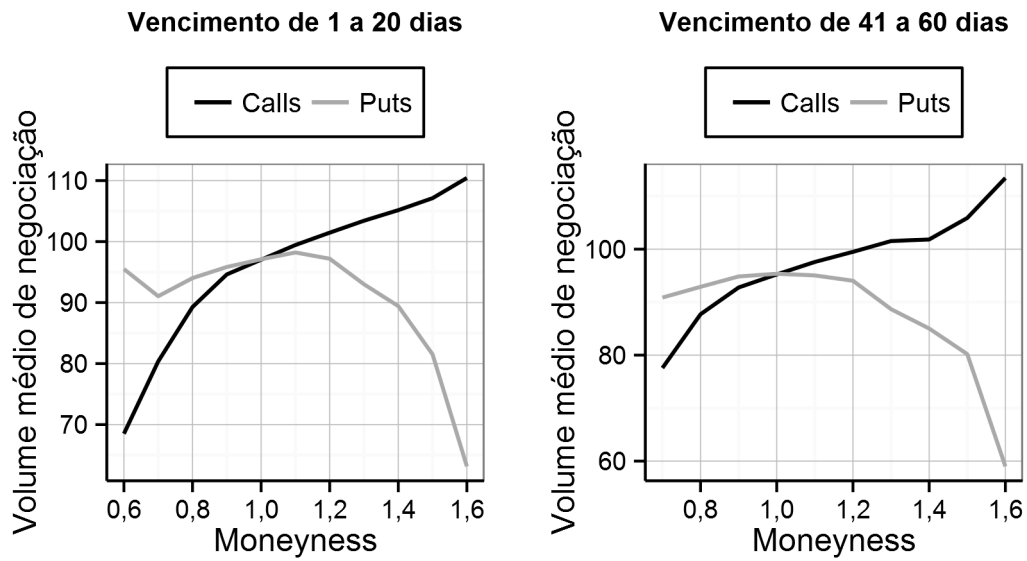


Figura 41 – Volume médio de negociação diária das opções sobre a ação 2 em função da medida *moneyness* ( $X/S_t$ ), no modelo com  $\gamma = 0,2$ .

Fonte: O autor

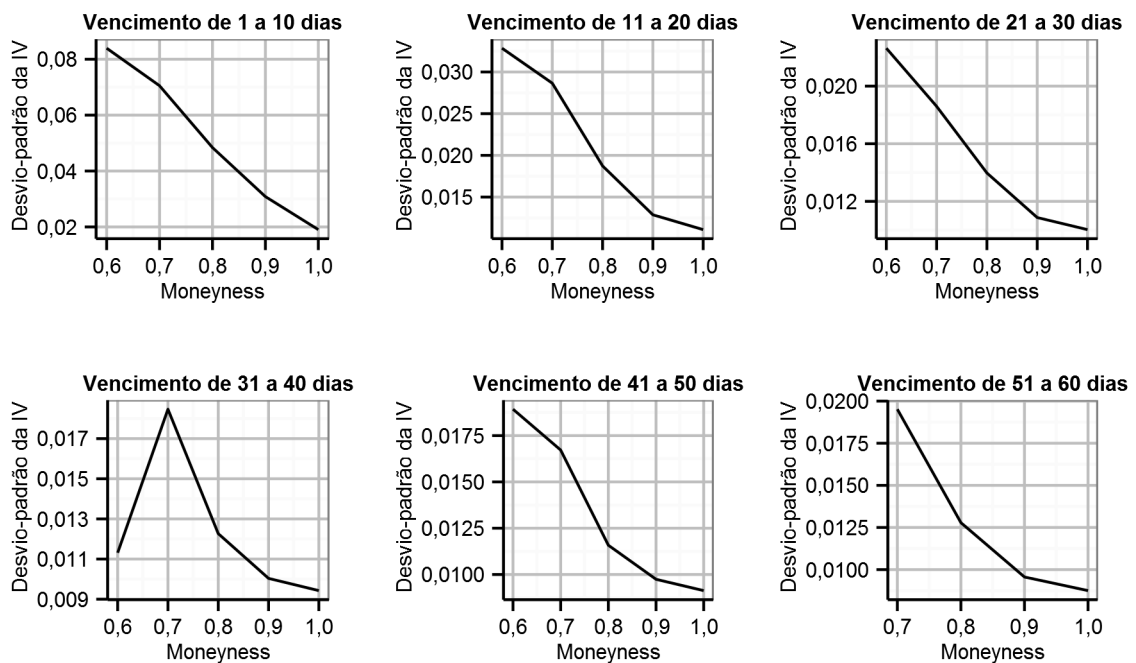


Figura 42 – Desvio-padrão da volatilidade implícita da ação 1 em função da medida *moneyness* ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com  $\gamma = 0,2$ .

Fonte: O autor

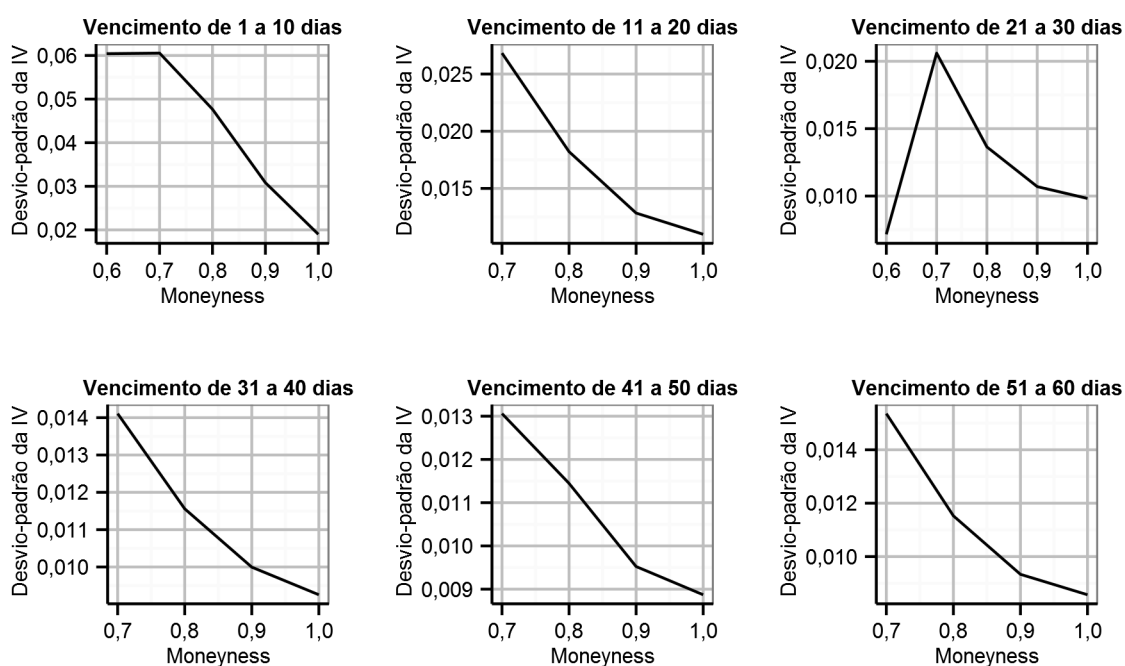


Figura 43 – Desvio-padrão da volatilidade implícita da ação 2 em função da medida *moneyness* ( $X/S_t$ ), para diversos intervalos de tempo até o vencimento, com  $\gamma = 0,2$ .

Fonte: O autor

## 6 Conclusão

Ao longo deste trabalho, foi desenvolvido um mercado artificial de ações e opções por meio de modelagem baseada em agentes, tomando como base o mercado artificial de ações de [Ferreira \(2014\)](#). Esse mercado artificial foi desenvolvido com o intuito de representar da maneira mais realista possível o mercado brasileiro, para que o mesmo pudesse ser utilizado dentro de um simulador para fins educacionais. Assim, foi utilizado o mesmo mecanismo de formação de preços das negociações de ações e opções da BM&FBovespa, o livro de ordens, além de permitir que os agentes pudessem comprar e vender opções de compra e de venda com diferentes ativos subjacentes, preços de exercício e datas de vencimento.

Diversos experimentos foram realizados com o modelo proposto a fim de validá-lo, comparando os resultados obtidos com o comportamento teoricamente esperado de uma opção e com características observadas nos mercados reais – os fatos estilizados. Nas simulações conduzidas, concluiu-se que a configuração ideal do modelo seria com  $\gamma = 0,2$  e os demais parâmetros seguindo a simulação inicial (Tabela 5) e aqueles utilizados por [Ferreira \(2014\)](#) no mercado de ações (seção 3.2.3). Essa configuração conseguiu replicar de forma satisfatória os fatos estilizados de ações e opções alvos deste estudo, se mostrando uma boa representação dos mercados reais.

Além disso, foi implementada a interface *on-line* do simulador, adaptada daquela proposta por [Ferreira \(2014\)](#) em seu trabalho mas não implementada pelo autor. A interface faz uso do mercado artificial desenvolvido e permite a interação de seus usuários como novos agentes desse mercado, consultando os livros de ordens, emitindo suas próprias ordens de compra ou venda e realizando negociações com os agentes artificiais e os demais usuários. Como não possui restrição de horário de funcionamento e pode ser adaptado de acordo com as configurações do mercado artificial implementado, esse simulador apresenta grande potencial para aplicações pedagógicas.

Contudo, o mercado artificial ainda apresenta algumas limitações a serem trabalhadas. Durante os experimentos, não foi possível calcular a volatilidade implícita em todos os passos de tempo no atual modelo. Como o comportamento dos agentes é aleatório, algumas vezes o preço de negociação da opção fica abaixo do valor intrínseco da mesma, de forma que não há um valor de volatilidade que retornará aquele preço de mercado nas equações de Black-Scholes. Ou seja, surge uma oportunidade de arbitragem que não é explorada por nenhum dos agentes. Esse problema pode ser contornado, por exemplo, acrescentando agentes inteligentes que tirem proveito dessas distorções nos preços do mercado. A inserção de novos tipos de agentes pode, inclusive, tornar a experiência proporcionada pelo simulador mais real.

Trabalhos futuros envolvendo o mercado artificial não se limitam a novos tipos de agentes. Outros pontos a serem trabalhados no modelo são a inclusão de opções americanas, pagamento de dividendos das ações, taxa de juros e taxas para emitir ordens de compra e venda, além da exclusão dos feriados do calendário de negociação – no estado atual do modelo são excluídos

apenas os sábados e domingos.

Por fim, o simulador como um todo também pode ser alvo de novas pesquisas. A princípio, devem ser realizados testes com usuários reais para avaliar a interface e suas funcionalidades, a fim de aperfeiçoá-la. Em seguida, será possível testá-lo em atividades pedagógicas e avaliar sua eficácia.

## Referências

- ANSCOMBE, F. J.; GLYNN, W. J. Distribution of the kurtosis statistic  $b_2$  for normal samples. *Biometrika*, Biometrika Trust, v. 70, n. 1, p. 227–234, 1983. Citado na página 94.
- BATES, D. S. The crash of '87: Was it expected? the evidence from options markets. *The journal of finance*, Wiley Online Library, v. 46, n. 3, p. 1009–1044, 1991. Citado na página 34.
- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, JSTOR, v. 81, n. 3, p. 637–654, 1973. Citado na página 31.
- BM&FBOVESPA. *Ofício Circular 080/2013-DP*. 2013. Acessado em: 25/09/2014. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/oficiosComunicados/DownloadOficioComunicado.ashx?numDoc=080-2013&dir=Ofic&depto=DP&idioma=pt-br>>. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- BM&FBOVESPA. *Regulamento de Operações - Segmento Bovespa*. 2013. Acessado em: 24/09/2014. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/regulacao/download/BMFBOVESPA-Regulamento-de-Operacoes-Versao-Completa.pdf>>. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 39.
- BM&FBOVESPA. *Especificação de Contrato do Mercado de Opções - Segmento Bovespa*. 2014. Acessado em: 25/09/2014. Disponível em: <[http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/mercados/download/Especificacoes\\_contratuais\\_Opcoes.pdf](http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/mercados/download/Especificacoes_contratuais_Opcoes.pdf)>. Citado na página 38.
- BM&FBOVESPA. *Formador de Mercado*. 2014. Acessado em: 11/09/2014. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/formador-de-mercado/FormadoresMercado.aspx?Idioma=pt-br>>. Citado na página 38.
- BM&FBOVESPA. *Manual de Procedimentos Operacionais - Segmento Bovespa*. 2014. Acessado em: 24/09/2014. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/regulacao/download/BMFBOVESPA-Manual-de-Procedimentos-Operacionais-Acoes.pdf>>. Citado 5 vezes nas páginas 37, 38, 39, 40 e 41.
- BM&FBOVESPA. *UMDF PUMA Conflated - FIX Market Data Specification*. 2014. Acessado em: 13/01/2015. Disponível em: <[http://www.bmfbovespa.com.br/en-us/services/download/UMDFConflated\\_MarketDataSpecification2.0.5.pdf](http://www.bmfbovespa.com.br/en-us/services/download/UMDFConflated_MarketDataSpecification2.0.5.pdf)>. Citado na página 38.
- BM&FBOVESPA. *Acesso Direto ao Mercado (DMA)*. 2015. Acessado em: 13/01/2015. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/servicos/solucoes-para-negociacao/acesso-direto-ao-mercado-dma/o-que-e.aspx?Idioma=pt-br>>. Citado na página 38.
- BM&FBOVESPA. *Administração de Risco*. 2015. Acessado em: 16/01/2015. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/administracaoRisco/administracaoRisco.aspx?Idioma=pt-br>>. Citado na página 39.
- BM&FBOVESPA. *Calendário do Mercado*. 2015. Acessado em: 20/01/2015. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/regulacao/calendario-do-mercado/calendario-do-mercado.aspx?idioma=pt-br>>. Citado na página 40.
- BM&FBOVESPA. *Custos e tributos*. 2015. Acessado em: 19/01/2015. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/servicos/custos-e-tributos/custos-operacionais/acoes.aspx?Idioma=pt-br>>. Citado na página 39.

- BM&FBOVESPA. *Lotes de negociação*. 2015. Acessado em: 12/01/2015. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/lotes-de-negociacao/LotesNegociacao.aspx?Idioma=pt-br>>. Citado na página 38.
- BM&FBOVESPA. *Índice Brasil 100 - IBrX 100*. 2015. Acessado em: 19/01/2015. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoIndice.aspx?Indice=IBRX&Idioma=pt-BR>>. Citado na página 39.
- BM&FBOVESPA. *Opções*. 2015. Acessado em: 27/01/2015. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/opcoes/opcoes.aspx?Idioma=pt-br>>. Citado na página 41.
- BM&FBOVESPA. *Simuladores*. 2015. Acessado em: 20/01/2015. Disponível em: <<http://www.bmfbovespa.com.br/pt-br/educacional/simuladores/simuladores.aspx?idioma=pt-br>>. Citado na página 20.
- BRANDOUY, O.; CORELLI, A.; VERYZHENKO, I.; WALDECK, R. A re-examination of the “zero is enough” hypothesis in the emergence of financial stylized facts. *Journal of Economic Interaction and Coordination*, Springer, v. 7, n. 2, p. 223–248, 2012. Citado na página 95.
- BUCHANAN, M. Economics: meltdown modelling. *Nature*, v. 460, n. 7256, p. 680–682, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 21, 31 e 42.
- BURASCHI, A.; JILTSOV, A. Model uncertainty and option markets with heterogeneous beliefs. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 61, n. 6, p. 2841–2897, 2006. Citado na página 50.
- CHANG, Y.-C.; CHEN, W.-C.; YANG, Y.-N.; CHAO, H.-C. A flexible web-based simulation game for production and logistics management courses. *Simulation Modelling Practice and Theory*, Elsevier, v. 17, n. 7, p. 1241–1253, 2009. Citado na página 20.
- CONT, R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, Taylor & Francis, v. 1, p. 223–236, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 95.
- CONT, R.; BOUCHAUD, J.-P. Herd behavior and aggregate fluctuations in financial markets. *Macroeconomic dynamics*, Cambridge Univ Press, v. 4, n. 02, p. 170–196, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 95.
- CONT, R.; FONSECA, J. da. Dynamics of implied volatility surfaces. *Quantitative finance*, Taylor & Francis, v. 2, n. 1, p. 45–60, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 33, 34, 36, 42 e 43.
- CVITANIĆ, J.; ZAPATERO, F. *Introduction to the economics and mathematics of financial markets*. [S.l.]: MIT press, 2004. Citado na página 20.
- DANIELSSON, J. *Financial risk forecasting: The theory and practice of forecasting market risk with implementation in R and Matlab*. Chichester: John Wiley & Sons, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 95.
- DESHPANDE, A. A.; HUANG, S. H. Simulation games in engineering education: A state-of-the-art review. *Computer Applications in Engineering Education*, Wiley Online Library, v. 19, n. 3, p. 399–410, 2011. Citado na página 20.
- ECCA, S.; MARCHESI, M.; SETZU, A. Modeling and simulation of an artificial stock option market. *Computational Economics*, Springer, v. 32, n. 1-2, p. 37–53, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 18, 21, 50, 51 e 53.
- EDERINGTON, L. H.; GUAN, W. Why are those options smiling? *The Journal of Derivatives*, Institutional Investor Journals, v. 10, n. 2, p. 9–34, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

- FARMER, J. D.; FOLEY, D. The economy needs agent-based modelling. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 460, n. 7256, p. 685–686, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 21, 31 e 42.
- FENGLER, M. R. Handbook of computational finance. In: \_\_\_\_\_. [S.l.]: Springer, 2012. cap. Option data and modeling BSM implied volatility, p. 117–142. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- FENGLER, M. R.; HÄRDLE, W. K.; VILLA, C. The dynamics of implied volatilities: A common principal components approach. *Review of Derivatives Research*, Springer, v. 6, n. 3, p. 179–202, 2003. Citado na página 33.
- FERREIRA Álvaro L. *Desenvolvimento de um simulador de mercado artificial de ações para a interação de agentes externos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, 2014. Citado 20 vezes nas páginas 6, 7, 12, 18, 20, 21, 42, 47, 48, 49, 50, 59, 60, 61, 62, 63, 66, 70, 75 e 85.
- FRIJNS, B.; LEHNERT, T.; ZWINKELS, R. C. Behavioral heterogeneity in the option market. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, v. 34, n. 11, p. 2273–2287, 2010. Citado na página 50.
- GLASSERMAN, P. *Monte Carlo methods in financial engineering*. New York: Springer, 2003. v. 53. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 32.
- HULL, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*. New Jersey: Prentice Hall, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 31, 32, 33 e 34.
- HULL, J. C. *Fundamentos dos Mercados Futuros e de Opções*. São Paulo: Bolsa de Mercadorias & Futuros, 2005. Citado 10 vezes nas páginas 22, 26, 27, 28, 29, 30, 57, 69, 70 e 73.
- JEFFERIES, P.; HART, M.; HUI, P.; JOHNSON, N. From market games to real-world markets. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 20, n. 4, p. 493–501, 2001. Citado na página 50.
- KAWAKUBO, S.; IZUMI, K.; YOSHIMURA, S. Analysis of an option market dynamics based on a heterogeneous agent model. *Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management*, Wiley Online Library, v. 21, n. 2, p. 105–128, 2014. Citado na página 33.
- KIRCHLER, M.; HUBER, J. Fat tails and volatility clustering in experimental asset markets. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier, v. 31, n. 6, p. 1844–1874, 2007. Citado na página 93.
- KIRCHLER, M.; HUBER, J. An exploration of commonly observed stylized facts with data from experimental asset markets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 388, n. 8, p. 1631–1658, 2009. Citado na página 94.
- LATANE, H. A.; RENDLEMAN, R. J. Standard deviations of stock price ratios implied in option prices. *The Journal of Finance*, Wiley Online Library, v. 31, n. 2, p. 369–381, 1976. Citado na página 32.
- LEVY, H.; LEVY, M.; SOLOMON, S. *Microscopic simulation of financial markets: from investor behavior to market phenomena*. [S.l.]: Academic Press, 2000. Citado na página 95.
- LIU, Y.-F.; ZHANG, W.; XU, H.-C. Collective behavior and options volatility smile: An agent-based explanation. *Economic Modelling*, Elsevier, v. 39, p. 232–239, 2014. Citado na página 50.

- LJUNG, G. M.; BOX, G. E. On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, Biometrika Trust, v. 65, n. 2, p. 297–303, 1978. Citado na página 94.
- MACAL, C. M.; NORTH, M. J. Tutorial on agent-based modelling and simulation. *Journal of Simulation*, Nature Publishing Group, v. 4, n. 3, p. 151–162, 2010. Citado na página 42.
- MASLOV, S. Simple model of a limit order-driven market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 278, n. 3, p. 571–578, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 94.
- MERTON, R. C. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, JSTOR, v. 4, n. 1, p. 141–183, 1973. Citado na página 31.
- NICOLAU, J. *Modelação de séries temporais financeiras*. Coimbra: Almedina, 2012. Citado na página 93.
- OZTEKIN, H.; TEMURTAS, F.; GULBAG, A. Bzk. sau: Implementing a hardware and software-based computer architecture simulator for educational purpose. In: IEEE. *Computer Design and Applications (ICDDA), 2010 International Conference on*. [S.l.], 2010. v. 4, p. V4–90. Citado na página 20.
- PALMER, R.; ARTHUR, W. B.; HOLLAND, J. H.; LEBARON, B.; TAYLER, P. Artificial economic life: a simple model of a stockmarket. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 75, n. 1, p. 264–274, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 55.
- PASIN, F.; GIROUX, H. The impact of a simulation game on operations management education. *Computers & Education*, Elsevier, v. 57, n. 1, p. 1240–1254, 2011. Citado na página 20.
- QIU, G.; KANDHAI, D.; JOHNSON, N.; SLOOT, P. M. Understanding complex dynamics in derivatives finance: why do options markets smile? *Advances in Complex Systems*, World Scientific, v. 15, n. 07, 2012. Citado 8 vezes nas páginas 18, 29, 30, 35, 50, 53, 54 e 55.
- RABERTO, M.; CINCOTTI, S. Modeling and simulation of a double auction artificial financial market. *Physica A: Statistical Mechanics and its applications*, Elsevier, v. 355, n. 1, p. 34–45, 2005. Citado na página 47.
- RABERTO, M.; CINCOTTI, S.; FOCARDI, S. M.; MARCHESI, M. Agent-based simulation of a financial market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 299, n. 1, p. 319–327, 2001. Citado 7 vezes nas páginas 44, 45, 46, 47, 51, 56 e 59.
- SAMANIDOU, E.; ZSCHISCHANG, E.; STAUFFER, D.; LUX, T. Agent-based models of financial markets. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 70, n. 3, p. 409, 2007. Citado na página 94.
- SCARP, L. P. C.; FERREIRA, A. L.; TRINDADE, A. L. G. Avaliação de modelos e mercados artificiais com base na frequência de ocorrência de fatos estilizados. In: *Anais do XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Salvador: [s.n.], 2014. Citado 4 vezes nas páginas 66, 67, 68 e 93.
- SLANINA, F. Critical comparison of several order-book models for stock-market fluctuations. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 61, n. 2, p. 225–240, 2008. Citado na página 47.
- STOFFA, V. Modelling and simulation as a recognizing method in education. *Educational Media International*, Taylor & Francis, v. 41, n. 1, p. 51–58, 2004. Citado na página 20.
- SUZUKI, K.; SHIMOKAWA, T.; MISAWA, T. Agent-based approach to option pricing anomalies. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 13, n. 5, p. 959–972, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 33, 34 e 50.

- TOWBIN, A. J.; PATERSON, B. E.; CHANG, P. J. Computer-based simulator for radiology: an educational tool. *Radiographics*, Radiological Society of North America, v. 28, n. 1, p. 309–316, 2008. Citado na página 20.
- XU, H.-C.; ZHANG, W.; XIONG, X.; ZHOU, W.-X. An agent-based computational model for China's stock market and stock index futures market. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 18, 50, 57 e 58.
- YANG, H.-J.; SUN, G.-P. Study on the stability of an artificial stock option market based on bidirectional conduction. *Entropy*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 15, n. 2, p. 700–720, 2013. Citado 6 vezes nas páginas 16, 18, 50, 55, 56 e 62.
- ZHOU, W.-X.; MU, G.-H.; CHEN, W.; SORNETTE, D. Investment strategies used as spectroscopy of financial markets reveal new stylized facts. *PloS one*, Public Library of Science, v. 6, n. 9, p. e24391, 2011. Citado na página 30.
- ZHU, S.; XIE, F.; LEVINSON, D. Enhancing transportation education through online simulation using an agent-based demand and assignment model. *Journal of Professional Issues in Engineering Education and Practice*, American Society of Civil Engineers, v. 137, n. 1, p. 38–45, 2011. Citado na página 20.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Fatos Estilizados de Ações

Apesar de não se tratar do foco deste trabalho, o estudo dos fatos estilizados de ações se faz necessário para a validação do mercado artificial das ações que servem como ativos subjacentes para as opções simuladas. Este apêndice descreve três dessas características comumente discutidas na literatura: a presença de caudas pesadas na distribuição dos retornos, o agrupamento de volatilidade e a correlação entre volume de negociações e volatilidade. As definições aqui presentes foram extraídas do texto de [Scarp, Ferreira e Trindade \(2014\)](#).

## A.1 Caudas pesadas

A presença de caudas pesadas na distribuição dos retornos é, juntamente com o agrupamento de volatilidade, um dos fatos estilizados mais citados na literatura ([KIRCHLER; HUBER, 2007](#)). Ter caudas pesadas significa que a curtose da distribuição dos retornos é maior que a da distribuição normal, ou seja, eles apresentam uma distribuição leptocúrtica ([NICOLAU, 2012](#)). Na prática, isso implica a ocorrência de valores extremos dos retornos com uma frequência maior do que seria esperado caso eles seguissem uma distribuição normal. A Figura 44 ilustra esse conceito, apresentando a densidade de probabilidade de uma variável aleatória normal (linha preta) e de uma variável aleatória com caudas pesadas (linha cinza), ambas com mesma média e desvio-padrão.

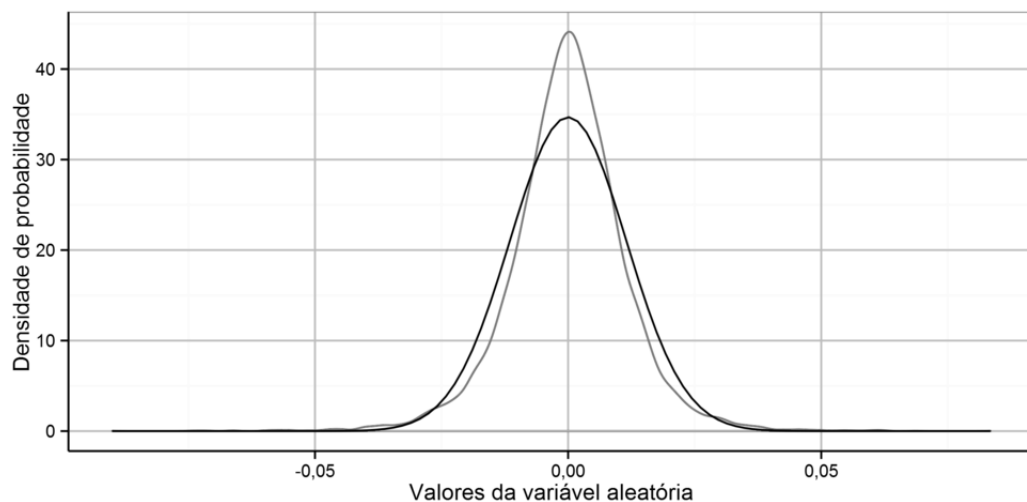


Figura 44 – Densidade de probabilidade de uma variável aleatória normal (linha preta) e de uma variável aleatória com caudas pesadas (linha cinza).

Fonte: O autor

Este fato estilizado pode ser verificado por um teste de hipóteses, confrontando a hipótese nula da distribuição dos retornos apresentarem curtose menor ou igual a 3 – o mesmo valor apresentado por uma distribuição normal – com a hipótese de eles apresentarem um valor de curtose superior a 3. Isso pode ser feito por meio da transformação proposta por [Anscombe e Glynn \(1983\)](#).

## A.2 Agrupamento de volatilidade

O agrupamento de volatilidade é caracterizado pela presença de períodos de grande amplitude dos retornos separados de intervalos de menores flutuações ([MASLOV, 2000](#)). Ou seja, se no dia de hoje o mercado apresentou alta volatilidade, a probabilidade de se observar grandes variações amanhã – sejam elas de alta ou de queda – será maior que a observada em média ([SAMANIDOU et al., 2007](#)). A Figura 45 mostra uma série de retornos que apresenta essa característica, onde podem ser claramente distinguidos alguns períodos de alta volatilidade (retângulos tracejados) e outros de menor variação nos preços (retângulos contínuos).

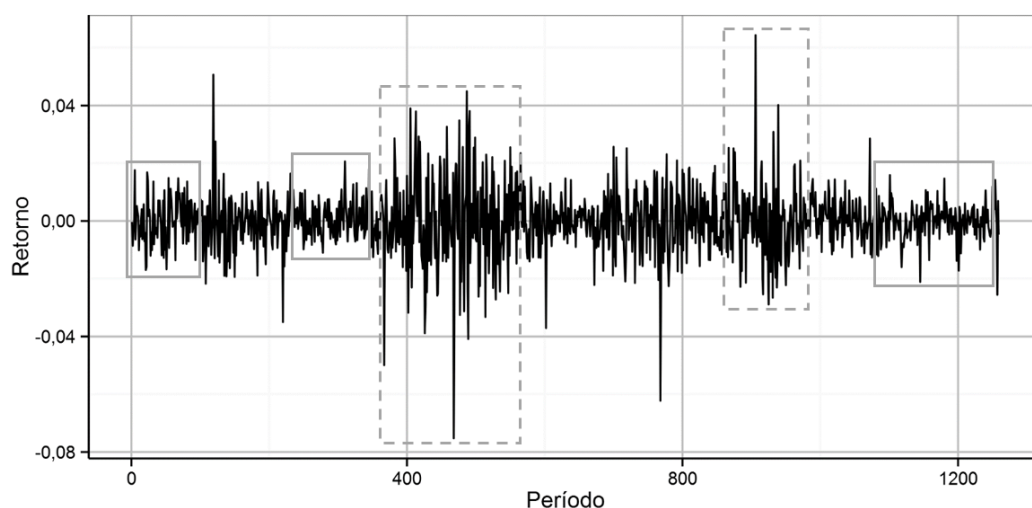


Figura 45 – Série de retornos que apresenta agrupamento de volatilidade, destacando-se alguns períodos de grande amplitude dos retornos (retângulos tracejados) e intervalos de menores flutuações (retângulos contínuos).

Fonte: O autor

Segundo [Kirchler e Huber \(2009\)](#), esta propriedade é geralmente medida pela função de autocorrelação do módulo dos retornos, onde se observa valores significativamente positivos para diversos intervalos de tempo. De acordo com [Daniélsson \(2011\)](#), neste caso pode ser utilizado o teste de Ljung-Box, com base no estudo original apresentado por [Ljung e Box \(1978\)](#), fazendo uso dos retornos diários da ação e variando a janela de tempo do teste em até um mês.

### A.3 Correlação entre volume e volatilidade

A presença de correlação entre o volume de ações negociadas e as medidas de volatilidade de seu preço é citada em uma série de estudos, como os de [Cont e Bouchaud \(2000\)](#), [Cont \(2001\)](#) e [Levy, Levy e Solomon \(2000 apud BRANDOUY et al., 2012\)](#). [Daniélsson \(2011\)](#) sugere que a volatilidade seja estimada pelo desvio padrão dos retornos. Dessa forma, este fato estilizado pode ser quantificado por algum índice de correlação entre os valores de volume e volatilidade, como o coeficiente de correlação de Pearson.