

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Estatística

Marco Antonio Ticse Aucahuasi

Sobre o Modelo de Percolação de Grau Restrito

Belo Horizonte
2025

Marco Antonio Ticse Aucahuasi

Sobre o Modelo de Percolação de Grau Restrito

Versão Final

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Estatística.

Orientador: Roger William Câmara Silva
Coorientador: Diogo Carlos dos Santos

Belo Horizonte
2025

2025, Marco Antonio Ticse Aucahuasi.
Todos os direitos reservados

Ticse Aucahuasi, Marco Antonio.

T557s Sobre o modelo de percolação de grau restrito [recurso eletrônico] / Marco Antonio Ticse Aucahuasi. Belo Horizonte – 2025.

1 recurso online (57 f. il., color.) : pdf.

Orientador: Roger William Câmara Silva

Coorientador: Diogo Carlos dos Santos

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística.

Referências: f. 50-55.

1. Estatística – Teses. 2. Percolação (Física estatística) – Teses. 3. Função de conectividade – Teses. 4. Teorema da unicidade – Teses. I. Silva, Roger William Câmara. II. Santos, Diogo Carlos dos. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística. IV. Título.

CDU 519.2(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA




FOLHA DE APROVAÇÃO

Sobre o modelo de percolação de grau restrito


MARCO ANTONIO TICSE AUCAHUASI

Tese submetida à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ESTATÍSTICA, como requisito para obtenção do grau de Doutor em ESTATÍSTICA, área de concentração ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE.


Aprovada em 01 de agosto de 2025, pela banca constituída pelos membros:

Documento assinado digitalmente
 **ROGER WILLIAM CAMARA SILVA**
Data: 06/08/2025 12:52:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Roger William Câmara Silva - Orientador (DEST/UFMG)

Documento assinado digitalmente
 **DIOGO CARLOS DOS SANTOS**
Data: 05/08/2025 09:27:07-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Diogo Carlos dos Santos – Coorientador (IM/UFAL)

Documento assinado digitalmente
 **ALAN ANDERSON DA SILVA PEREIRA**
Data: 05/08/2025 08:14:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Alan Anderson da Silva Pereira (IM/UFAL)

Documento assinado digitalmente
 **PAULO CUPERTINO DE LIMA**
Data: 06/08/2025 09:56:58-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Paulo Cupertino de Lima (DMAT/UFMG)

Documento assinado digitalmente
 **WEBERSON DA SILVA ARCANJO**
Data: 06/08/2025 10:46:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Weberson da Silva Arcanjo (DMA/UFG)

Documento assinado digitalmente
 **CHARLES SOUZA DO AMARAL**
Data: 05/08/2025 08:22:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Charles Souza do Amaral (CEFET MG)

Belo Horizonte, 1 de agosto de 2025.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder a força e a serenidade necessárias para concluir esta fase acadêmica e por iluminar meu caminho nos momentos incertos, oferecendo-me sempre uma luz norteadora. Aos meus pais, Vidal Ticse e Mary Aucahuasi, pelo amor incondicional e pela força que, mesmo à distância, sempre me sustentaram nos períodos de maior pressão e estresse. Obrigado por estarem sempre comigo e pelas inúmeras ligações a qualquer hora do dia, que me deram ânimo para seguir em frente.

Aos meus orientadores, Roger Silva e Diogo dos Santos, pela oportunidade de desenvolver este trabalho, pelos conhecimentos transmitidos e conselhos, pelas puxadas de orelha nos momentos em que precisei despertar e, sobretudo, pela paciência que tiveram comigo durante todo este tempo, permitindo que este trabalho se tornasse possível. Também agradeço aos membros da banca examinadora — Paulo Cupertino, Alan Pereira, Charles do Amaral e Weberson da Silva Arcanjo — pelas críticas construtivas e valiosas sugestões. Estendo ainda meus agradecimentos aos professores Rémy Sanchis, Bhalchandra Digambar e Jesus Victoria Flores, cujo apoio no início desta etapa acadêmica foi essencial para que eu pudesse dar os primeiros passos com segurança e motivação.

À minha companheira, Ana Oliveira, pelo tempo compartilhado, pelo suporte constante e pela compreensão nos momentos difíceis, pois, apesar das minhas longas horas de trabalho e da falta de tempo, esteve sempre ao meu lado com um sorriso que me fortalecia.

Aos meus amigos — Arturo, Miguel, Eduardo e Julio — por me acompanharem nesta etapa importante da minha vida. Aos amigos da sala percolativa — Carlos, Javier, Daniel, Uriel e Sérgio — pelas discussões de dúvidas ou simplesmente pela escuta dos meus problemas do dia a dia. Um agradecimento especial aos percoleros Matheus e Otávio, pela grande ajuda ao longo do processo percolativo.

Aos funcionários do Departamento de Estatística da UFMG, em especial à secretária Rogéria e ao Gideão, pelo apoio e atenção sempre prestados. Por fim, agradeço à FAPEMIG pelo suporte financeiro.

"Don't give up"
(Unknown)

Resumo

Nesta tese, estudamos o Modelo de Percolação de Grau Restrito em Ambiente Aleatório sobre a rede quadrada \mathbb{L}^2 . Nesse modelo, cada sítio v recebe uma restrição aleatória $\kappa_v \in \{0, 1, 2, 3\}$, de forma independente, segundo uma distribuição ρ . Cada elo e tenta abrir-se em um tempo aleatório $U_e \sim U(0, 1)$, sendo a abertura permitida apenas se, nesse instante, ambos os sítios incidentes tiverem grau estritamente menor que suas respectivas restrições. Inicialmente, revisamos resultados conhecidos sobre a estrutura do modelo. Em seguida, apresentamos avanços no caso bidimensional: provamos a unicidade quase certa do aglomerado aberto infinito na fase supercrítica, estabelecemos a positividade da função de conectividade e demonstramos um Teorema Central do Limite para a densidade de elos abertos. Além disso, para dimensões superiores e sob restrições determinísticas, mostramos que a probabilidade de eventos locais é diferenciável em relação ao tempo e estabelecemos uma formulação adaptada da fórmula de Russo.

Palavras-chave: percolação de grau restrito; unicidade; função de conectividade; TCL; fórmula de Russo.

Abstract

This thesis investigates the Constrained-Degree Percolation Model in a Random Environment (CDPRE) on the square lattice \mathbb{L}^2 . In this model, each site v is assigned an independent random degree constraint $\kappa_v \in \{0, 1, 2, 3\}$, according to a probability distribution ρ . Each edge e attempts to open at a random time $U_e \sim U(0, 1)$, and the opening is allowed only if, at that time, both of its endpoints have degrees strictly smaller than their respective constraints. We begin by reviewing known results regarding the structure of the model. Then, we present new contributions in the two-dimensional setting: we prove the almost sure uniqueness of the infinite open cluster in the supercritical phase, establish the positivity of the connectivity function and derive a Central Limit Theorem for the density of open edges. Furthermore, for higher dimensions and under deterministic constraints, we show that the probability of local events is differentiable with respect to time and we establish an adapted formulation of Russo's formula.

Keywords: constrained-degree percolation; uniqueness; connectivity function; CLT; Russo's formula.

Sumário

1	Introdução	9
2	Modelos de percolação	11
2.1	Percolação de Bernoulli	12
2.2	Percolação de Grau Restrito	14
2.2.1	Trabalhos relacionados	18
3	Resultados e demonstrações	21
3.1	Unicidade do aglomerado	21
3.2	Função de Conectividade	25
3.3	Teorema Central do Limite	28
3.4	Diferenciabilidade de $\mathbb{P}_t(A)$	34
3.5	Fórmula de Russo	44
4	Possíveis problemas futuros	48
	Referências	50
	Apêndice A Resultados úteis	56

Capítulo 1

Introdução

Modelos de percolação em redes regulares têm sido amplamente utilizados para descrever processos de propagação e difusão em diferentes contextos, ecológicos, epidemiológicos, químicos e sociais [9, 10, 39, 41, 47, 67, 68]. Um exemplo clássico é o processo de percolação de Bernoulli, em que os elos (ou sítios) são abertos com probabilidade p de forma independente, sendo o foco da análise determinar se existe uma componente conexa infinita de elos (ou sítios) abertos. No entanto, há contextos em que tal hipótese de independência entre as variáveis associadas às conexões não se aplica [4, 37, 46]. Em tais situações, surgem modelos de percolação dependente, nos quais o estado de um elo (ou sítio) pode influenciar o de seus vizinhos [30, 32, 36, 57]. Isso ocorre, por exemplo, na propagação de epidemias em redes de contato social, em que a infecção de um indivíduo aumenta a chance de transmissão para os vizinhos, ou a infraestrutura da internet, onde cada modem tem um número máximo de conexões simultâneas permitidas, o que limita a conexão, mesmo quando o canal está disponível [62].

Esse tipo de limitação e dependência motivou o estudo do Modelo de Percolação de Grau Restrito (PGR) [14] e sua generalização natural em ambiente aleatório, o Modelo de Percolação de Grau Restrito Aleatório (PGRA) [56]. Para entender brevemente esses modelos, consideramos os processos definidos sobre a rede quadrada $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{E}^2)$, em que os sítios correspondem aos pontos do plano e os elos conectam pares de sítios vizinhos. A cada elo e é atribuído um tempo aleatório $U_e \in [0, 1]$, comumente chamado de relógio, que indica o instante em que ele tentará se abrir. Dependendo do modelo, cada sítio v possui uma restrição de grau k_v determinística, no caso do PGR, ou aleatória κ_v , no caso do PGRA. Neste último, as restrições κ_v são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com valores em $\{0, 1, 2, 3\}$, segundo uma distribuição de probabilidade $\rho = (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$. A dinâmica do processo consiste em permitir a abertura de um elo $e = \langle u, v \rangle$ no instante U_e apenas se, nesse momento, ambos os sítios u e v tiverem graus estritamente menores que seus limites k_u e k_v (ou κ_u e κ_v), respectivamente. Uma vez aberto, o elo permanecerá aberto para sempre. Ressaltamos que esse processo será definido formalmente na Seção 2.2.

Com o propósito de estudar a natureza dos modelos mencionados, esta tese

busca apresentar de maneira didática e tão detalhada quanto possível, alguns resultados considerados relevantes no âmbito da teoria da percolação. Entende-se que esta teoria é particularmente cativante para matemáticos e probabilistas, pois, embora muitos de seus problemas possuam formulações simples, suas soluções costumam exigir argumentos matemáticos sofisticados e não triviais.

Centrando-nos no modelo PGRA, seja $\theta(\rho, t)$ a probabilidade de que a origem esteja conectada ao infinito no tempo t , isto é, de pertencer a um aglomerado aberto infinito. Como primeiro resultado, na Seção 3.1 mostramos que, se $\theta(\rho, t) > 0$ para algum valor de t , então, com probabilidade 1, existe exatamente uma única componente conexa infinita formada por elos abertos em \mathbb{L}^2 . Esse resultado assegura uma estrutura global de conectividade no modelo, mesmo sob restrições locais de grau.

Uma consequência natural da unicidade do aglomerado infinito é o estudo do comportamento da *função de conectividade* $\tau_{\rho,t}(x, y)$, que representa a probabilidade de que os sítios x e y estejam conectados por um caminho composto exclusivamente por elos abertos. Na Seção 3.2, mostramos que, a existência de uma componente infinita implica que $\tau_{\rho,t}(x, y)$ não tende a zero quando $\|x - y\|_1$ tende ao infinito. Mais precisamente, espera-se a existência de uma constante $c(\rho, t) > 0$ tal que a probabilidade de conexão entre quaisquer dois sítios em \mathbb{L}^2 seja limitada inferiormente por $c(\rho, t)$, o que evidencia uma estrutura de conectividade global no modelo.

Na Seção 3.3, investigamos a distribuição do número de elos abertos na caixa $B(n) = [-n, n]^2$ com $n \geq 2$ centrada na origem. Seguindo a abordagem do modelo PGRA, provamos que, para valores pequenos de t , a densidade de elos abertos nessa região, devidamente normalizada, converge para uma distribuição normal, quando n tende a infinito. Essa convergência evidencia uma regularidade estatística no número de elos abertos e sugere a presença de propriedades ergódicas no modelo.

No que diz respeito ao modelo PGR na rede \mathbb{L}^d com $d \geq 2$, mostramos na Seção 3.4 que, para um evento local A , a função $t \mapsto \mathbb{P}_t(A)$, que representa a probabilidade de ocorrência de A no instante t , é diferenciável em relação a esse parâmetro. Com base nessa propriedade, estabelecemos na Seção 3.5 uma versão adaptada da Fórmula de Russo para o caso específico em que a restrição de grau é $k_v = 3$ para todo $v \in \mathbb{Z}^2$. Nessa formulação, demonstramos que a derivada de $\mathbb{P}_t(A)$ pode ser expressa, sob certas condições, como a soma das probabilidades de que determinados elos individuais influenciem diretamente a ocorrência de A . Dessa forma, recupera-se, no contexto com restrições de grau, uma analogia com um dos resultados clássicos da teoria da percolação.

Em síntese, esses resultados evidenciam a complexidade dos modelos PGR e PGRA, cujos comportamentos são fortemente influenciados pelas restrições — sejam elas determinísticas ou aleatórias —, bem como pelas dependências estruturais introduzidas pelos parâmetros que regem a dinâmica do processo.

Capítulo 2

Modelos de percolação

A teoria da percolação é um ramo da probabilidade que investiga a formação de estruturas conectadas em sistemas compostos por elementos aleatórios. Seu problema central consiste em compreender sob quais condições, a partir de regras locais de conexão, surge uma componente infinita capaz de conectar grandes regiões do sistema. Esse fenômeno reflete a transição entre uma fase em que apenas pequenos aglomerados finitos estão presentes e outra em que surge uma estrutura globalmente conectada. Esta teoria fornece ferramentas valiosas para a compreensão de fenômenos em diversas áreas, como física e estatística [65, 66], biologia e epidemiologia [9, 42, 47, 68], redes de comunicação [15, 18, 27], entre outras.

Destacamos o processo de percolação clássico ou modelo canônico de Bernoulli, no qual os elos ou sítios da rede, por exemplo \mathbb{L}^2 , são abertos com probabilidade p e fechados com probabilidade $1 - p$, de forma independente. No entanto, em muitos cenários reais, a hipótese de independência entre os elementos não é válida. Buscando modelar fenômenos mais complexos e realistas, surgem extensões do modelo clássico que relaxam tal hipótese, dando origem aos chamados *modelos de percolação dependente*, nos quais o estado (aberto ou fechado) de um elo ou sítio depende dos estados dos seus vizinhos na rede [30, 32, 36, 38, 50, 57]. Esses modelos incorporam correlações locais ou estruturais que influenciam diretamente a formação dos aglomerados. A modelagem com dependência é particularmente relevante em contextos nos quais as interações refletem restrições físicas, limitações operacionais ou dependências funcionais, como na física estatística e no estudo de redes complexas [4, 37, 46].

Para proporcionar um panorama mais claro sobre essa teoria, na Seção 2.1 fazemos uma breve introdução às definições padrões e anunciaremos alguns resultados fundamentais no contexto da percolação clássica [22, 25, 31]. Na seção seguinte, discutiremos os modelos de percolação dependente, direcionando nosso foco à descrição dos modelos que constituem este trabalho: o Modelo de Percolação de Grau Restrito e a sua versão em ambiente aleatório.

2.1 Percolação de Bernoulli

O modelo clássico, originalmente desenvolvido para analisar o fluxo de fluidos em meios porosos [8], considera uma *rede hipercúbica d -dimensional*, denotada por $((\mathcal{V}(\mathbb{Z}^d), \mathcal{E}(\mathbb{Z}^d)))$, com $d \geq 1$, onde $\mathcal{V}(\mathbb{Z}^d) := \mathcal{V}^d$ é o conjunto de sítios da rede, e $\mathcal{E}(\mathbb{Z}^d) := \mathcal{E}^d = \{\{x, y\} \subset \mathcal{V}^d : \|x - y\|_1 = 1\}$ é o conjunto de elos, isto é, pares de sítios vizinhos segundo a norma ℓ_1 . Com um leve abuso de notação, às vezes denota-se essa rede simplesmente por \mathbb{Z}^d . Vale destacar que é comum também referir-se à rede regular como \mathbb{L}^d , especialmente quando tratamos de exemplos específicos, como a rede quadrada bidimensional \mathbb{L}^2 .

Focando na percolação de elos, associamos a cada elo da rede \mathbb{Z}^d uma variável aleatória $\omega(e)$, para todo $e \in \mathcal{E}^d$, onde tais variáveis são independentes e seguem a mesma lei de Bernoulli:

$$\mu_e(\omega(e) = 1) = p \quad \text{e} \quad \mu_e(\omega(e) = 0) = 1 - p,$$

com $p \in [0, 1]$. Dizemos que o elo e está *aberto* se $\omega(e) = 1$ e *fechado* caso contrário, independentemente dos demais. Esse processo define um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$, onde $\Omega = \{0, 1\}^{\mathcal{E}^d}$ é o espaço de configurações, cujos elementos são denotados por ω , \mathcal{F} é a σ -álgebra gerada pelos eventos cilíndricos (isto é, que dependem de elos em subconjuntos finitos de \mathcal{E}^d) e $\mathbb{P}_p := \prod_{e \in \mathcal{E}^d} \mu_e$ é a medida produto associada.

Um *caminho* em \mathbb{Z}^d é uma sequência alternada $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$ de sítios $x_i \in \mathcal{V}^d$ e elos $e_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle \in \mathcal{E}^d$ para $n \geq 1$ e $i = 0, 1, \dots, n-1$, onde todos os sítios são distintos, ou seja, o caminho é auto-evitante. Dizemos que um caminho é *aberto* em $\omega \in \Omega$ se $\omega(e_i) = 1, \forall i = 0, 1, \dots, n-1$. Denotamos o evento em que dois sítios x e y estão conectados por um caminho aberto como $\{x \longleftrightarrow y\}$.

Dado $\omega \in \Omega$, consideramos o subgrafo aleatório de \mathbb{Z}^d composto pelo conjunto \mathcal{V}^d e pelo conjunto dos elos abertos em ω . As componentes conexas desse subgrafo são chamadas de *aglomerados abertos* em ω . Denotamos por $C_x := C_x(\omega)$ o aglomerado aberto de ω que contém o sítio x . Denotamos por $\{x \longleftrightarrow \infty\}$ o evento em que o aglomerado C_x possui um número infinito de sítios. Em particular, denotamos por C_0 (ou simplesmente C) o aglomerado que contém a origem.

Como estamos interessados em investigar a ocorrência de aglomerados infinitos, ou seja, o evento $\{\omega \in \Omega : |C| = \infty\}$, introduzimos a função de probabilidade de percolação, $\theta^d : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$\theta^d(p) = \mathbb{P}_p(0 \longleftrightarrow \infty).$$

A função $\theta^d(p)$ é não decrescente em p e satisfaz $\theta^d(0) = 0$ e $\theta^d(1) = 1$. Essas propriedades indicam a existência de uma transição de fase, caracterizada por um valor

crítico $p_c = p_c(d)$, chamado de *ponto crítico*, que separa dois regimes distintos:

$$\theta^d(p) \begin{cases} = 0, & \text{se } p < p_c, \\ > 0, & \text{se } p > p_c. \end{cases}$$

Portanto, para $p < p_c$ quase certamente todos os aglomerados são finitos, enquanto que para $p > p_c$ existe, com probabilidade positiva, um aglomerado aberto infinito. Esse aglomerado infinito é único quase certamente, conforme demonstrado em [11]. Formalmente, definimos o ponto crítico como:

$$p_c(d) = \sup\{p \in [0, 1] : \theta^d(p) = 0\}.$$

Algumas vezes, $p_c(d)$ também é denotado por $p_c(\mathbb{Z}^d)$. Uma das questões centrais na teoria da percolação é determinar se $\theta^d(p_c) = 0$ ou não, além de estudar as propriedades do sistema no entorno do p_c . Vale destacar que Harris [33] demonstrou que $\theta^2(\frac{1}{2}) = 0$, o que implica que $p_c(\mathbb{Z}^2) \geq \frac{1}{2}$. Anos depois, Kesten [43] provou que $p_c(\mathbb{Z}^2) \leq \frac{1}{2}$. Por sua vez, para dimensões suficientemente altas, especificamente para $d \geq 11$, Fitzner e Van der Hofstad [24] demonstraram que $\theta^d(p_c) = 0$, ou seja, em p_c não existe aglomerado infinito. No entanto, o comportamento do modelo no ponto crítico permanece como um problema em aberto para $3 \leq d \leq 10$.

Uma vez entendido o comportamento do modelo em termos da existência e formação de aglomerados infinitos é natural perguntar como certos eventos relacionados à conectividade reagem às variações de p . Nesse contexto, surgem ferramentas matemáticas que permitem estimar essas probabilidades: a Desigualdade de FKG (Fortuin-Kasteleyn-Ginibre) e a Fórmula de Russo. Não obstante, para apresentá-las adequadamente, é necessário introduzir algumas definições e noções preliminares, como os conceitos de *evento crescente* e de *elo pivotal*, no espaço de configurações.

Considere uma configuração ω de elos abertos e fechados. Dados $\omega, \omega' \in \Omega$, diremos que $\omega' \geq \omega$ se $\omega'(e) \geq \omega(e)$, para todo $e \in \mathcal{E}^d$. Um evento A é dito crescente se, sempre que $\omega \in A$ e $\omega' \geq \omega$ então $\omega' \in A$. Intuitivamente, um evento é crescente se a abertura de mais elos não pode desfazer a ocorrência de A . Com essa definição, a Desigualdade de FKG [26] assegura que, se dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$ são ambos crescentes, então

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A) \mathbb{P}_p(B). \quad (2.1)$$

Além dos eventos crescentes, introduzimos a noção de *elo pivotal* para entender como a probabilidade de um evento varia com p . Seja A um evento (não necessariamente crescente). Dizemos que um elo e é *pivotal* para o par (A, ω) se

$$\mathbb{1}_A(\omega) \neq \mathbb{1}_A(\omega'),$$

onde ω' é a configuração que coincide com ω em todos os elos, exceto em e e $\omega'(e) = 1 - \omega(e)$. Em palavras, um elo é *pivotal* se a ocorrência ou não de A depende exclusivamente do estado desse elo. No caso de eventos crescentes, um elo e é pivotal se

e somente se A não ocorre quando e está fechado, mas passa a ocorrer quando e está aberto. Nesse contexto, a Fórmula de Russo [55] expressa como pequenas variações na probabilidade p afetam a probabilidade de ocorrência de eventos crescentes. Mais precisamente, se A depende de um número finito de elos $F \subset \mathcal{E}^d$, então

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) = \sum_{e \in F} \mathbb{P}_p(e \text{ é pivotal para } A). \quad (2.2)$$

Vale a pena mencionar que, a diferenciabilidade da função $\mathbb{P}_p(A)$ em relação a p decorre diretamente da estrutura do modelo de percolação de Bernoulli, pois $\mathbb{P}_p(A)$ é uma função polinomial em p , com grau no máximo igual ao número de elos em F .

Embora o modelo de percolação de Bernoulli tenha uma base teórica sólida, ele enfrenta limitações em contextos onde a hipótese de independência entre os estados dos elos ou sítios não é válida. Esse cenário motiva o desenvolvimento dos chamados *modelos de percolação dependente* (veja [38]), nos quais as conexões estão sujeitas a restrições ou interações locais. Dentro dessa classe, destacam-se o *Modelo de Percolação de Grau Restrito* e sua extensão em ambiente aleatório, que serão apresentados a seguir.

2.2 Percolação de Grau Restrito

Diversos sistemas podem ser representados por redes em que cada sítio limita o número de conexões que pode manter simultaneamente. Por exemplo, em uma rede de encanamentos, cada junção suporta um número máximo de canos, e a construção da rede deve obedecer a esse limite. De forma análoga, em sistemas biológicos como uma floresta, as árvores podem estabelecer conexões naturais como a propagação de fungos, onde o número de conexões permitido varia aleatoriamente, respeitando uma capacidade máxima local. Esse tipo de modelagem reflete a complexidade dos sistemas nos quais as conexões estão sujeitas a restrições e aleatoriedade.

A partir dessa motivação, surge o Modelo de Percolação de Grau Restrito (PGR), introduzido em [14, 62]. Trata-se de uma variação do modelo clássico, na qual a abertura de um elo só é permitida se, no instante em que tenta se ativar, ambos os sítios que ele conecta apresentarem grau (isto é, número de elos vizinhos abertos) estritamente inferior a um limite fixado de conexões permitido por sítio.

A seguir, introduziremos o modelo PGR sobre a rede hipercúbica $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}^d)$. Fixa-se uma sequência $k = (k_v)_{v \in \mathbb{Z}^d}$ de inteiros satisfazendo $k_v \leq 2d$ para todo $v \in \mathbb{Z}^d$, representando o limite máximo de conexões que cada sítio v pode suportar. Além disso, considera-se uma sequência $U = (U_e)_{e \in \mathcal{E}^d}$ de variáveis aleatórias *i.i.d.* com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.

Dessa forma, definimos o modelo no espaço de probabilidade $([0, 1]^{\mathcal{E}^d}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, onde \mathcal{F} é a σ -álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos de $[0, 1]^{\mathcal{E}^d}$ e \mathbb{P} é a medida produto de Lebesgue. O modelo é um processo de percolação em tempo contínuo com dependência de longo alcance, definido da seguinte maneira:

- No instante inicial $t = 0$, todos os elos estão fechados;
- Cada elo $e = \langle u, v \rangle$, tenta se abrir no tempo U_e , se nesse momento, ambos os sítios u e v tiverem graus estritamente menores que um parâmetro fixo $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2d\}$. Isto é,

$$\deg(u, U_e) < k_u \quad \text{e} \quad \deg(v, U_e) < k_v,$$

onde $\deg(v, t)$ denota o número de elos abertos incidentes em v no tempo t ;

- Uma vez aberto, o elo permanece aberto.

A sequência $U = (U_e)_{e \in \mathcal{E}^d}$ é denominada *coleção de relógios*, e \mathbb{P} é a correspondente medida produto sobre $[0, 1]^{\mathcal{E}^d}$. Dada uma coleção de relógios U , a configuração temporal de percolação no instante $t \in [0, 1]$ é denotada por $\omega_t^{d,k}(U) \in \{0, 1\}^{\mathcal{E}^d}$, onde $\omega_t^{d,k}(U, e) = 1$ significa que o elo e está aberto no tempo t , e $\omega_t^{d,k}(U, e) = 0$ indica que está fechado. Quando não houver risco de ambiguidade, omitiremos os superíndices e escreveremos apenas $\omega_t(U)$ ou $\omega_t(U, e)$. Note que a variável aleatória $\omega_t^{d,k}(U, e)$, onde $e = \langle u, v \rangle$, pode ser expressa como o produto de três funções indicadoras:

$$\omega_t^{d,k}(U, e) = \mathbb{1}_{\{U_e < t\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\deg(u, U_e) < k_u\}} \cdot \mathbb{1}_{\{\deg(v, U_e) < k_v\}}.$$

Ou seja, o elo e se abre no tempo t se seu relógio $U_e < t$ e, no instante U_e , ambos os sítios u e v tiverem grau estritamente menor que seus respectivos limites k_u e k_v .

A construção de Harris, vide [34], garante que o modelo está bem definido para todo $t \in [0, 1]$. O subgrafo induzido por ω_t é denotado por \mathbb{G}_t , cujos componentes conexas são chamados de *aglomerados abertos*. Dizemos que dois sítios, u e v , estão conectados em ω_t (denotado por $u \longleftrightarrow v$) se pertencem ao mesmo aglomerado aberto de \mathbb{G}_t . Um sítio v está conectado ao infinito (denotado por $v \longleftrightarrow \infty$) se o aglomerado que o contém possui tamanho infinito.

Analogamente ao modelo clássico, define-se a função que associa a probabilidade de a origem pertencer a um aglomerado aberto infinito no tempo t , denotada por $\theta^{d,k}(t)$, como

$$\theta^{d,k}(t) = \mathbb{P}(0 \longleftrightarrow \infty \text{ no tempo } t).$$

É claro que a função $\theta^{d,k}(t)$ é não decrescente, o que permite definir o ponto crítico do modelo como

$$t_c^{d,k} = \sup\{t \in [0, 1] : \theta^{d,k}(t) = 0\}.$$

Para simplificar a notação, quando for necessário, omitiremos os superíndices e escreveremos simplesmente $\theta(t)$ e t_c , respectivamente.

Exemplo 2.1. Considere uma caixa $B(2)$ na qual associamos a cada elo um valor aleatório entre 0 e 1, representando o tempo em que ele tenta se abrir. Com uma restrição de grau $k = 2$ uniforme, um elo só pode ser ativado se, no instante em que seu relógio toca, ambos os sítios incidentes ainda tiverem menos de duas conexões abertas (Figura (a)). Se, por outro lado, ado-

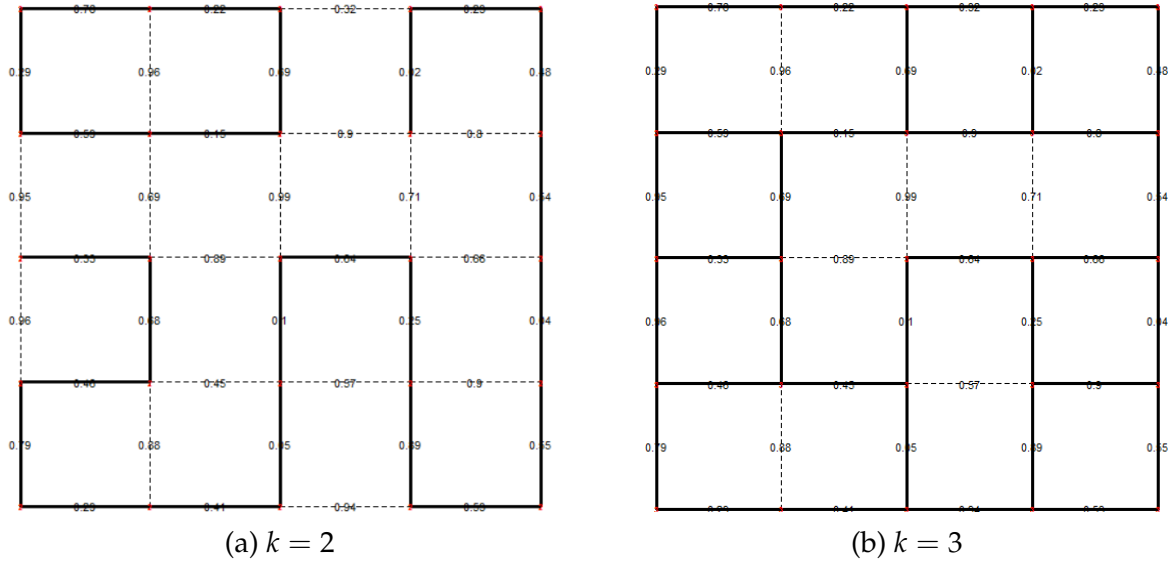


Figura 2.1: Configuração com k em $t = 1$

tarmos uma restrição maior, como $k = 3$, os sítios passam a tolerar mais conexões simultâneas. Nesse caso, uma maior quantidade de elos pode ser abertos, resultando uma rede mais conectada (Figura (b)).

Um aspecto central no comportamento do modelo PGR é que, para todo $k \leq 2d$, o tempo crítico t_c é sempre maior ou igual ao tempo crítico da percolação Bernoulli na mesma rede. A igualdade ocorre apenas no caso extremo $k = 2d$, quando o modelo recupera a independência como o caso clássico. Isso significa que a ocorrência de percolação no PGR implica a ocorrência no modelo Bernoulli, mas a recíproca não é verdadeira.

Como é natural na teoria da percolação, o modelo PGR foi estendido para um ambiente aleatório [56]. Nesse modelo, chamado Modelo de Percolação com Grau Restrito Aleatório (PGRA), cada sítio da rede recebe aleatoriamente uma restrição de grau, de acordo com uma distribuição pré-estabelecida. A dinâmica é a mesma do modelo determinístico: um elo tenta se abrir no instante indicado por seu relógio, mas isso só ocorre se, nesse momento, ambos os sítios que ele conecta tiverem graus estritamente menores que suas respectivas restrições aleatórias.

Introduzimos o modelo PGRA sobre a rede hipercúbica \mathbb{L}^d . Para isso, considere uma sequência de variáveis aleatórias $\kappa = \{\kappa_v\}_{v \in \mathbb{Z}^d}$, onde cada κ_v representa a

restrição de grau associada ao sítio v , assumindo valores em $\{0, 1, \dots, 2d - 1\}$ de forma *i.i.d.*, com $\mathbb{P}_\rho(\kappa_v = j) = \rho_j$. Aqui, $\rho = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{2d-1})$ é uma distribuição de probabilidade, e a correspondente medida produto sobre $\{0, 1, \dots, 2d - 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ é denotada por \mathbb{P}_ρ .

Considera-se também uma coleção de relógios $U = \{U_e\}_{e \in \mathcal{E}^d}$, onde cada U_e são variáveis aleatórias *i.i.d.* com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$, sendo independentes da sequência κ . A configuração de percolação temporal no instante $t \in [0, 1]$ é dada por

$$\begin{aligned} \omega_t: \{0, 1, \dots, 2d - 1\}^{\mathbb{Z}^d} \times [0, 1]^{\mathcal{E}^d} &\longrightarrow \{0, 1\}^{\mathcal{E}^d} \\ (\kappa, U) &\longmapsto \omega_t(\kappa, U) \end{aligned}$$

onde $\omega_t(\kappa, U)$ representa a configuração dos elos no tempo t . Para cada κ , a dinâmica do processo é definida de maneira análoga à do modelo PGR. Além disso, denotamos por $\omega_{t,e}$ a configuração que indica o estado do elo e no instante t , sendo $\omega_{t,e} = 1$ se e está aberto e $\omega_{t,e} = 0$ caso contrário.

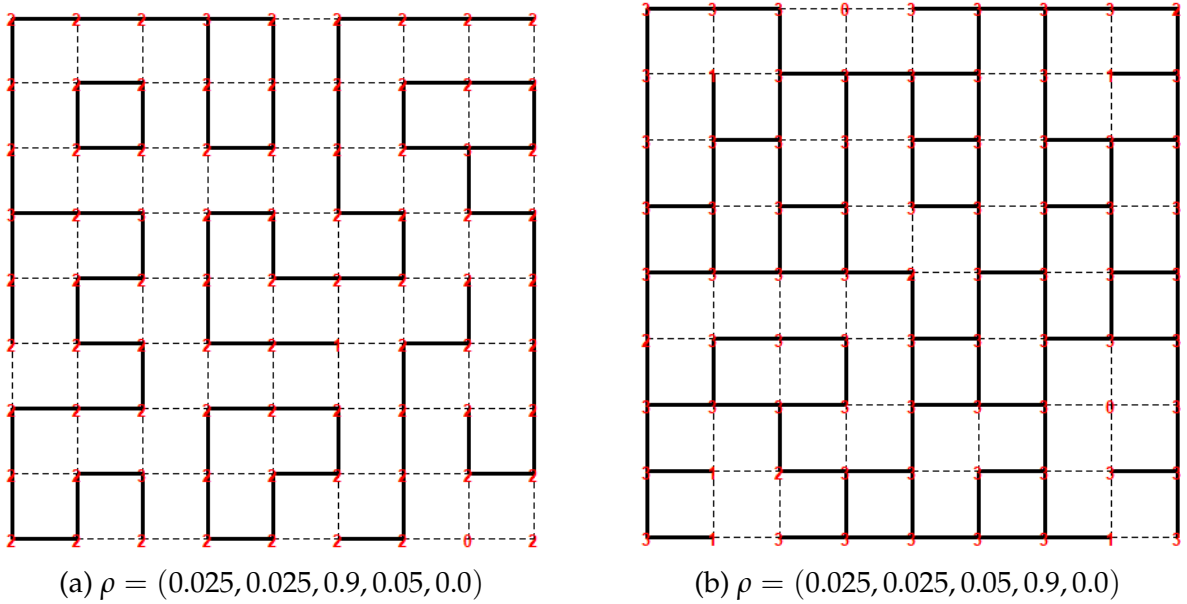


Figura 2.2: Configuração com ρ em $t = 1$

Por fim, o processo de percolação descrito é governado pela lei:

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(A) = (\mathbb{P}_\rho \times \mathbb{P})((\kappa, U) : \omega_t(\kappa, U) \in A),$$

para todo evento $A \subset \{0, 1\}^{\mathcal{E}^d}$, onde \mathbb{P} é a medida produto de Lebesgue sobre $[0, 1]^{\mathcal{E}^d}$. Denotemos a função que associa a probabilidade da origem pertencer a um aglomerado aberto infinito no tempo t e o ponto crítico, respectivamente por $\theta(\rho, t)$ e $t_c(\rho)$, ou seja,

$$\theta(\rho, t) = \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \infty) \quad \text{e} \quad t_c(\rho) = \sup\{t \in [0, 1] : \theta(\rho, t) = 0\}.$$

A estrutura dos modelos PGR e PGRA apresenta características particulares. Em primeiro lugar, ambos os modelos são invariantes por translações, isto é, a distribuição da configuração não muda ao transladar o sistema sobre a rede \mathbb{Z}^d . No entanto, os modelos exibem dependências de longo alcance: o estado de um elo pode influenciar outros elos arbitrariamente distantes, o que dificulta as análises dos mesmos. Um reflexo dessa característica é o fato de que a desigualdade de FKG não vale nesse contexto (veja Exemplo 2.2), eliminando uma ferramenta fundamental na análise de eventos crescentes.

Exemplo 2.2. *A desigualdade FKG não é válida no modelo PGR. De fato, considere o seguinte exemplo na rede \mathbb{L}^2 com restrição $k_v = 3$ para todo $v \in \mathbb{Z}^2$. Seja V um sítio com vizinhos v_1, v_2, v_3, v_4 . Defina os eventos crescentes:*

$$A := \{\langle V, v_1 \rangle, \langle V, v_2 \rangle, \langle V, v_3 \rangle \text{ abertos}\} \quad e \quad B := \{\langle V, v_4 \rangle \text{ aberto}\}.$$

Sob tais eventos e com restrição $k_v = 3$, temos que:

$$\mathbb{P}_t(A \cap B) = 0,$$

pois a abertura simultânea dos 4 elos infringiria a restrição. Por outro lado, individualmente:

$$\mathbb{P}_t(A) > 0 \quad e \quad \mathbb{P}_t(B) > 0 \quad \implies \quad \mathbb{P}_t(A)\mathbb{P}_t(B) > 0.$$

Portanto, neste caso:

$$\mathbb{P}_t(A \cap B) = 0 < \mathbb{P}_t(A)\mathbb{P}_t(B),$$

mostrando que a desigualdade FKG não se cumpre para o modelo PGR.

A formação de componentes conexas nos modelos PGR e PGRA pode ser severamente limitada para valores baixos de k , e o comportamento do sistema na fase supercrítica torna-se menos previsível em comparação ao modelo clássico. Esses aspectos realçam os desafios técnicos e teóricos que cercam a análise desses modelos dependentes.

2.2.1 Trabalhos relacionados

O modelo PGR foi apresentado e estudado na tese de doutorado de R. Teodoro [62]. Nesse trabalho, demonstrou-se que, na rede hipercúbica \mathbb{L}^d , com restrição $k_v = 2d - 1$ para todo $v \in \mathbb{Z}^d$ e $d \geq 2$, existe quase certamente um aglomerado aberto infinito no tempo $t = 1$. Anos depois, na tese de D. dos Santos [19], foi demonstrada a

existência de uma transição de fase para o modelo na rede quadrada \mathbb{L}^2 e também em árvores regulares d -árias com $d \geq 2$. Posteriormente, S. Urban [63] também investigou o comportamento do modelo em árvores regulares, estabelecendo limites superior e inferior para o tempo crítico.

Esses avanços foram consolidados posteriormente em [14], onde se obteve, entre outros resultados, que a transição de fase para a rede \mathbb{L}^2 ocorre em um intervalo não trivial de tempos, com $\frac{1}{2} \leq t_c^{2,3} < 1$. Além disso, foi provado que, para $k_v = 2$ para todo $v \in \mathbb{Z}^d$ e $d \geq 2$, tem-se $\theta(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$, ou seja, não ocorre percolação. Também foi estabelecida a unicidade, quase certamente, do aglomerado aberto infinito no caso em que $k = 3$ na rede quadrada \mathbb{L}^2 .

Em relação a dimensões superiores, simulações numéricas realizadas em [16] estimaram os valores de $t_c^{d,3}$ para casos não triviais e evidenciaram a ocorrência de uma transição de fase para $d = 2, 3$ e 4 , além de observarem a monotonicidade da função $\theta(t)$. Por sua vez, em [35], foram obtidos avanços teóricos sobre a transição de fase. O principal resultado foi a obtenção de cotas superiores para o tempo crítico $t_c^{d,k}$, válidas para todo $d \geq 3$ e para valores grandes de k . Em particular, demonstrou-se que $t_c^{3,5} \leq 0,62$, além de estabelecer-se que $t_c^{d,k} \leq \frac{C}{d}$, para todo $d > \frac{k}{2}$, onde $C = 1,7$.

Em [17], analisou-se numericamente a distribuição da densidade de elos abertos em \mathbb{L}^2 para diferentes valores de k . Os resultados sugerem que, quando $n \rightarrow \infty$, a função de distribuição da densidade de elos converge para uma distribuição normal, indicando a validade do Teorema Central do Limite nesse contexto.

No que se refere ao modelo PGRA, [56], logo após sua formulação, se estabeleceram resultados fundamentais sobre seu comportamento estrutural. Em particular, demonstraram que, na rede \mathbb{L}^2 e sob restrições suficientemente permissivas (ou seja, quando ρ_3 estiver suficientemente próximo de 1), ocorre percolação com probabilidade positiva para todo tempo t suficientemente próximo de 1 (veja o Teorema 2.3).

Teorema 2.3. *Considere o modelo de percolação com grau restrito em \mathbb{L}^2 , com $\rho = (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$. Existe uma constante $\eta > 0$ tal que, para todo $(\rho_3, t) \in (1 - \eta, 1]^2$, temos*

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \infty) > 0.$$

Para obter esse resultado, os autores mostraram que as correlações entre eventos locais decaem exponencialmente com a distância (veja o Teorema 2.4). A fim de enunciar este teorema, introduzimos algumas notações. Seja $K \subset \mathcal{E}^d$ finito. Diz-se que um evento A vive em K se sua ocorrência depende apenas da configuração restrita aos elos em K . Denota-se por \mathcal{H}_K o conjunto de todos os eventos que vivem em K . Assim, se $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, então $A \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}(\Lambda)}$ quando A depende apenas dos elos com extremidades em Λ . Além disso, considera-se $\delta(\Lambda_1, \Lambda_2) = \inf\{\delta(u, v); u \in \Lambda_1, v \in \Lambda_2\}$, onde $\delta(u, v)$ representa a distancia entre $u, v \in \mathbb{Z}^2$.

Teorema 2.4 (Decaimento das correlações). *Sejam Λ_1 e Λ_2 subconjuntos finitos e disjuntos de \mathbb{Z}^d . Suponha que $A_1 \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}(\Lambda_1)}$ e $A_2 \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}(\Lambda_2)}$. Existe uma constante $\psi(d) > 0$ tal que*

$$|\mathbb{P}_{\rho,t}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}_{\rho,t}(A_1)\mathbb{P}_{\rho,t}(A_2)| \leq C(d) (|\partial\Lambda_1| + |\partial\Lambda_2|) e^{-\psi(d)\delta(\Lambda_1,\Lambda_2)},$$

para uma constante $C(d) > 0$ e todos os $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{2d-1})$ e $t \in [0, 1]$.

Uma simples consequência do teorema acima é a seguinte: considere os subconjuntos disjuntos Λ_1 e Λ_2 de \mathbb{Z}^d , com $|\partial\Lambda_1| < \infty$ e $|\partial\Lambda_2| = \infty$, e $\delta = \delta(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Supondo que $A_i \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}(\Lambda_i)}$ para $i \in \{1, 2\}$, então vale que:

$$|\mathbb{P}_{\rho,t}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}_{\rho,t}(A_1)\mathbb{P}_{\rho,t}(A_2)| \leq C(d) (|\partial\Lambda_1| + |\partial B_\delta(\Lambda_1)|) e^{-\psi\delta(\Lambda_1,\Lambda_2)}, \quad (2.3)$$

para todo $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_{2d-1})$ e $t \in [0, 1]$. Aqui, $B_\delta(\Lambda_1)$ representa o conjunto dos sítios $x \in \mathbb{Z}^d$ cuja distância até Λ_1 é menor que δ . Por último, no mesmo trabalho, foi estabelecido que, para qualquer evento local A , a função $\mathbb{P}_{\rho,t}(A)$ é contínua em relação aos parâmetros (ρ, t) , garantindo estabilidade em relação a pequenas variações nos dados do modelo.

Embora os resultados estruturais e analíticos tenham sido formalizados em [56], evidências numéricas do comportamento crítico do modelo PGRA já haviam sido identificadas anteriormente em [28]. Por meio de simulações na rede \mathbb{L}^2 , os autores observaram que, quando $\rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{2}$, o tempo crítico satisfaz aproximadamente $t_c(\rho) \approx 0,7283$. Por outro lado, no caso em que $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{3}$, foi constatada a ausência de percolação.

Por fim, em [20], os autores obtêm o decaimento exponencial do raio do aglomerado aberto na origem para todos os tempos em que o tamanho esperado desse aglomerado é finito. Como o modelo PGRA é dominado pela percolação de Bernoulli, tal resultado só é relevante se o supremo de todos os valores de t para os quais o tamanho esperado do aglomerado na origem é finito for maior que $\frac{1}{2}$. Para demonstrar esse fato, foi estabelecida a existência de uma transição de fase abrupta em um modelo intermediário, cuja análise exigiu, entre outras ferramentas, uma versão adaptada da fórmula de Russo.

Após a formulação e a apresentação teórica dos avanços estabelecidos na literatura sobre os modelos PGR e PGRA, passamos a enunciar e demonstrar os principais resultados obtidos nesta tese.

Capítulo 3

Resultados e demonstrações

3.1 Unicidade do aglomerado

Um dos resultados fundamentais da teoria da percolação na rede \mathbb{L}^d ($d \geq 2$) é o teorema da unicidade do aglomerado infinito na fase supercrítica. Especificamente, quando $p > p_c$, existe quase certamente um único aglomerado infinito de elos abertos. Em outras palavras, apesar da possível formação de numerosos aglomerados finitos, apenas uma componente infinita pode surgir.

Este resultado tem sido demonstrado em diversos contextos, tanto para modelos independentes quanto para modelos com dependência. Por exemplo, em [29], os autores estenderam o teorema de Burton e Keane [11] para modelos de percolação dependente em grafos aleatórios com elos de longo alcance sobre \mathbb{Z}^d e $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}$, descartando a possibilidade de múltiplos aglomerados infinitos por meio de argumentos baseados em geometria e propriedades de estacionariedade.

Nessa mesma linha, [61] investiga a unicidade do aglomerado infinito no modelo de entrelaçamentos aleatórios sobre \mathbb{Z}^d , para $d \geq 3$. Para contornar a ausência da condição de energia finita, essencial no argumento clássico de Burton e Keane, o autor desenvolveu uma abordagem alternativa baseada na manipulação dos trajetos dos entrelaçamentos, de modo a unir componentes infinitas, explorando a estrutura geométrica do modelo.

Por sua vez, [5] analisa a unicidade das componentes infinitas em modelos de percolação definidos no produto cartesiano $G \times \mathbb{Z}$, onde G é um grafo conexo arbitrário. Diferentemente do caso clássico em \mathbb{Z}^d , os autores mostraram que certas propriedades estruturais do grafo G podem levar à não unicidade do aglomerado infinito, mesmo em regimes críticos.

Diante da relevância desses resultados no entendimento das propriedades de conectividade em modelos de percolação, tanto independentes quanto dependentes, nos dedicamos a estabelecer o teorema de unicidade para o modelo PGRA sobre \mathbb{L}^2 .

Para isso, inicialmente vamos considerar o seguinte evento

$$\mathcal{D}_k = \{\text{existem exatamente } k \text{ aglomerados infinitos abertos}\}.$$

Como a medida $\mathbb{P}_{\rho,t}$ é invariante por translações na rede e, além disso, é ergódica, e como o próprio evento \mathcal{D}_k também é invariante por translações (para cada $k = 0, 1, \dots, \infty$), então:

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{D}_k) \in \{0, 1\},$$

isto é, o evento \mathcal{D}_k ocorre quase certamente, ou ele simplesmente nunca acontece.

Teorema 3.1 (Unicidade). *Considere o modelo de percolação de grau-restrito sobre \mathbb{L}^2 com $\rho = (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$ e $\rho_3 > 0$. Se $\mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \infty) = \theta(\rho, t) > 0$, então*

$$\mathbb{P}_{\rho,t} \left(\left(\bigcup_{k=2}^{\infty} \mathcal{D}_k \right) \cup \mathcal{D}_{\infty} \right) = 0.$$

Portanto, o aglomerado infinito aberto é único, quase certamente.

Esse resultado diz o seguinte: se há uma probabilidade positiva de existir um aglomerado infinito — isto é, se $\theta(\rho, t) > 0$ — então, esse aglomerado infinito será único com probabilidade 1. Em outras palavras, não haverá dois, três ou infinitos aglomerados infinitos coexistindo.

Nossa demonstração do Teorema 3.1 se inspira na prova da unicidade do aglomerado infinito no modelo PGR com $k_v = 3$ para todo $v \in \mathbb{Z}^2$ (veja [56]). A verdade é que a estrutura geral do argumento é essencialmente a mesma — porém, há uma sutileza importante no nosso caso. Precisamos garantir que, com probabilidade positiva, em algum instante t , além da ocorrência de uma certa configuração especial dentro de uma caixa grande, todos os sítios de um certo tipo tenham, simultaneamente, suas restrições fixadas em exatamente três (veja Lema 3.2). Esse detalhe é essencial para que o mecanismo de conexão e expansão das componentes abertas funcione como esperamos.

O lema seguinte é fundamental para a nossa análise. Ele se apoia no conceito de *número de extremos* (ou *ends*) de um grafo \mathcal{G} , que, intuitivamente, mede quantas direções infinitas o grafo pode ter. Formalmente, esse número é definido como o supremo do número de componentes infinitas do grafo $\mathcal{G} \setminus K$, quando retiramos conjuntos finitos K de sítios de \mathcal{G} .

Lema 3.2. *Se $\mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{D}_k) = 1$ para algum $k = 3, 4, \dots, \infty$, então, para todo n suficientemente grande, o aglomerado aberto contido na caixa $B(n)$ possui, com probabilidade positiva, ao menos três extremos.*

Demonstração do Lema 3.2. Considere o seguinte evento

$$\mathcal{A}_n^t = \{\text{pelo menos três aglomerados abertos infinitos em } \omega_t \text{ intersectam } B(n)\}. \quad (3.1)$$

Para $\ell = n - 1, n, n + 1$, e $e = \langle x, y \rangle \in \mathcal{E}^2$, escrevemos

$$\mathcal{O}_{n,\ell} = \{e \in \mathcal{E}^2: x \in \partial B(n) \text{ e } y \in \partial B(\ell)\},$$

$$I_n = \{e \in \mathcal{O}_{n,n}: e \cap \{(n, n), (-n, n), (-n, -n), (n, -n)\} \neq \emptyset\},$$

$$\mathcal{O}_n = \{e \in \mathcal{O}_{n,n+1}: e \cap \{(n, n), (-n, n), (-n, -n), (n, -n)\} \neq \emptyset\}.$$

Seja \mathcal{B}_n^t o evento em que *todos os elos de I_n estão abertas no instante t* . É importante notar que existe uma constante positiva $c = c(\rho, t)$ tal que

$$\inf_{n \geq 1} \mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{B}_n^t) > c(\rho, t).$$

Além disso, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{A}_n^t) = 1,$$

segue que, para n suficientemente grande, a probabilidade de ocorrerem simultaneamente os eventos \mathcal{A}_n^t e \mathcal{B}_n^t é pelo menos $c(\rho, t)$, ou seja,

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{A}_n^t \cap \mathcal{B}_n^t) \geq c(\rho, t).$$

Para todo subconjunto $A \subset \mathcal{O}_{n,n+1}$, definimos

$$\mathcal{C}_{n,A}^t = \{\omega_t(e) = 1 \text{ se } e \in A, \omega_t(e) = 0 \text{ se } e \in \mathcal{O}_{n,n+1} \cap A^c\}.$$

Em outras palavras, $\mathcal{C}_{n,A}^t$ representa a configuração em que os elos de A estão abertos no tempo t , enquanto os demais em $\mathcal{O}_{n,n+1}$ permanecem fechados. E agora vem um ponto crucial: como a família $\{\mathcal{C}_{n,A}^t\}_{A \subset \mathcal{O}_{n,n+1}}$ forma uma partição de $[0, 1]^{\mathcal{E}^2}$ (cobre todo o espaço de configurações possíveis) então, necessariamente, existe algum subconjunto $A \subset \mathcal{O}_{n,n+1}$ tal que

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{A}_n^t \cap \mathcal{B}_n^t \cap \mathcal{C}_{n,A}^t) > 0, \quad (3.2)$$

ou seja, essa configuração específica ocorre com probabilidade positiva. Para simplificar a notação, passamos a escrever

$$\mathcal{H}_{n,A}^t := \mathcal{A}_n^t \cap \mathcal{B}_n^t \cap \mathcal{C}_{n,A}^t.$$

Seja $\delta \in (0, 1)$ e consideremos $\mathcal{U}_{n,\delta}$ como o conjunto dos relógios U tais que $U_e \in (\delta, 1 - \delta]$, para todo $e \in \mathcal{O}_{n,n+1}$. A partir da Equação (3.2), e do fato de que $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{U}_{n,\delta}) = 1$, conseguimos escolher um valor de $\delta < t$ suficientemente pequeno tal que

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{H}_{n,A}^t \cap \mathcal{U}_{n,\delta}) > 0. \quad (3.3)$$

Ou seja, há uma probabilidade positiva de observarmos simultaneamente os três eventos que compõem $\mathcal{H}_{n,A}^t$, além de termos os relógios bem comportados — todos convenientemente afastados dos extremos 0 e 1.

Seja u o vetor unitário com a norma $\|\cdot\|_1$. Quando $e = \langle x, x + u \rangle \in \mathcal{O}_{n,n+1} \setminus \mathcal{O}_n$, denotamos por $e^o = \langle x, x - u \rangle$ o *elo oposto a e*; isto é, o elo e apontando na direção contrária. Além disso, se $B \subset \mathcal{O}_{n,n+1} \setminus \mathcal{O}_n$, definimos $B^o = \{e^o : e \in B\}$ como o conjunto dos elos opostos aos de B .

Por fim, escrevemos $A^f = (\mathcal{O}_{n,n+1} \setminus A)^o \cup \mathcal{O}_{n,n}$. Esse conjunto A^f será particularmente útil, pois combina os elos internos da caixa com aqueles que são complementares (e opostos) aos de A . Seja

$$\mathcal{F}_{n,A,\delta} = \left\{ \kappa \in \{0,1,2,3\}^{B(n)}, U \in [0,1]^{B(n)} : \kappa_v = 3 \text{ para todo } v \in \partial B(n) \cup \partial B(n-1), \right. \\ \left. U_e \leq \delta \text{ para todo } e \in A^f, \quad U_e \geq 1 - \delta \text{ para todo } e \in B(n) \setminus A^f \right\}.$$

Podemos pensar nesse conjunto $\mathcal{F}_{n,A,\delta}$ em que todas as restrições de grau (as κ_v) nas bordas de $B(n)$ e de $B(n-1)$ estão fixadas em 3 — ou seja, os vértices nessas regiões querem exatamente três conexões; e quanto aos relógios U_e , alguns tocam antes de δ em A^f , e o resto tocou acima de $1 - \delta$. Com isso, conseguimos deduzir com precisão quais elos vão estar abertos e quais não.

Assim, dados $V \subset \mathbb{Z}^2$ e $F \subset \mathcal{E}^2$, denotamos por $\Pi_{V \times F}$ a projeção canônica de $\{0,1,2,3\}^{\mathbb{Z}^2} \times [0,1]^{\mathcal{E}^2}$ em $\{0,1,2,3\}^V \times [0,1]^F$. Escrevemos $G_n = B(n)^c \times B(n)^c$ e notamos que, como $\rho_3 > 0$, a Equação (3.3) implica que

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{F}_{n,A,\delta} \times \Pi_{G_n}(\mathcal{H}_{n,A}^t \cap \mathcal{U}_{n,\delta})) = \mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{F}_{n,A,\delta}) \mathbb{P}_{\rho,t}(\Pi_{G_n}(\mathcal{H}_{n,A}^t \cap \mathcal{U}_{n,\delta})) > 0. \quad (3.4)$$

Se $\omega_t \in \mathcal{F}_{n,A,\delta} \times \Pi_{G_n}(\mathcal{H}_{n,A}^t \cap \mathcal{U}_{n,\delta})$, então todos os elos de $\mathcal{O}_{n,n}$ estão abertos em ω_t e pelo menos três aglomerados abertos infinitos intersectam $B(n)$ em ω_t . Isso conclui a prova. \square

Demonstração do Teorema 3.1. Suponha que $\mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{D}_k) = 1$ para algum $k = 3, 4, \dots, \infty$. Então, pelo Lema 3.2, valem as hipóteses do Lema 7.7 de [48]: existe (em um espaço de probabilidade grande) uma floresta aleatória $\mathfrak{F} \subset \omega_t$ tal que:

- (a) a distribuição do par (ω_t, \mathfrak{F}) é invariante por translações;
- (b) o conjunto das florestas \mathfrak{F} que possuem uma componente com pelo menos três extremidades tem probabilidade positiva.

Seja \mathbb{Q}_t a distribuição do par (ω_t, \mathfrak{F}) e \mathbb{E}_t a respectiva esperança. Seja X o conjunto de trifurcações da floresta \mathfrak{F} , ou seja, $x \in X$ se o fechamento de todos os elos incidentes a x divide a componente conexa de x em pelo menos três componentes infinitos. Pelo item

(b), tem-se que $\mathbb{Q}_t(v \in X) > 0$ para algum $v \in \mathbb{Z}^2$. Pela invariância por translações, segue que

$$\mathbb{E}_t[|X \cap B(n)|] = |B(n)|\mathbb{Q}_t(0 \in X).$$

Por outro lado, o argumento de Burton e Keane (veja [11]) fornece que

$$|B(n) \cap X| \leq |\partial B(n)|.$$

As duas expressões acima implicam a existência de uma constante $c > 0$ tal que

$$|\partial B(n)| \geq \mathbb{E}_t[|B(n) \cap X|] = c|B(n)|,$$

para todo n suficientemente grande, o que é uma contradição.

Resta mostrar que $\mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{D}_2) = 0$, o que decorre imediatamente de (3.4), alterando-se a definição de \mathcal{A}_n^t em (3.1) para

$$\mathcal{A}_n^t = \{\text{exatamente dois aglomerados infinitos em } \omega_t \text{ intersectam } B(n)\}.$$

De fato, a ocorrência de $\mathcal{F}_{n,A,\delta} \times \Pi_{G_n}(\mathcal{H}_{n,A}^t \cap \mathcal{U}_{n,\delta})$ obriga todas os elos de $\partial B(n)$ a estarem abertos, fundindo os dois aglomerados infinitos. □

3.2 Função de Conectividade

De acordo com Grimmett [31], a função de conectividade τ_p é definida como a probabilidade de que dois (ou mais) sítios em \mathbb{L}^d pertençam ao mesmo aglomerado aberto em um processo de percolação. Esse conceito desempenha um papel central na análise da estrutura de conectividade de redes estocásticas e aparece de forma recorrente em diversas áreas aplicadas. Por exemplo, na teoria de redes de comunicação [59, 64], na geometria estocástica [54], em sistemas multiagente [6] e também em problemas relacionados à engenharia de reservatórios [60].

Em diversos processos de percolação estudaram-se o comportamento da função τ_p para diferentes estruturas. Dentre eles, destacam-se os modelos de percolação de longo alcance [1], modelos baseados em processos de Poisson de multiescala e percolação de Mandelbrot [12, 49], além de generalizações do modelo de percolação AB [40], entre outros. Esses estudos refletem a importância da função de conectividade como ferramenta fundamental para compreender fenômenos de transição de fase e formação de estruturas complexas em sistemas aleatórios.

No contexto do modelo PGRA, a função de conectividade entre dois sítios x e y é representada por

$$\tau_{\rho,t}(x, y) = \mathbb{P}_{\rho,t}(x \longleftrightarrow y). \quad (3.5)$$

Um aspecto interessante da função τ_p é que, como o evento $\{x \longleftrightarrow y\}$ é invariante por translações, vale a relação $\tau_p(x, y) = \tau_p(0, y - x)$. Essa propriedade simplifica o estudo da conectividade entre dois pontos arbitrários em \mathbb{L}^d , pois permite reduzir o problema à análise da conectividade entre 0 e $y - x$. Com essa simplificação, enunciaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.3 (Função de Conectividade). *Dado o modelo PGRA sobre a rede \mathbb{L}^2 com $\rho = (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$ e $\theta = \theta(\rho, t) > 0$. Existe $c(\rho, t) > 0$ tal que*

$$\tau_{\rho,t}(x, y) \geq c(\rho, t),$$

para todo $x, y \in \mathbb{Z}^2$

Demonstração. Iniciamos o estudo da função de conectividade analisando o comportamento de $\tau_{\rho,t}(x, y)$ quando os sítios x e y estão próximos ou distantes entre si. Como a medida $\mathbb{P}_{\rho,t}$ é invariante por translações, segue que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}^2$,

$$\tau_{\rho,t}(x, y) := \mathbb{P}_{\rho,t}(x \longleftrightarrow y) = \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow y - x) = \tau_{\rho,t}(0, z).$$

Assim, sem perda de generalidade, basta estudarmos a função $\tau_{\rho,t}(0, z)$ para $z \in \mathbb{Z}^2$. Pelo Teorema 3.1, $\theta(\rho, t) > 0$,

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow z) \geq \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \infty, z \longleftrightarrow \infty). \quad (3.6)$$

Seja $B(n)$ a caixa centrada na origem. Para evitar ambiguidades, denotaremos essa caixa por B_n e, de modo geral, escreveremos $B_n(\cdot)$ para indicar a caixa centrada em (\cdot) . Observe que,

$$\{0 \longleftrightarrow \infty, z \longleftrightarrow \infty\} \subset \{0 \longleftrightarrow \partial B_n, z \longleftrightarrow \partial B_n(z)\}$$

e que a diferença dos dois conjuntos acima é dada por

$$\{0 \longleftrightarrow \partial B_n, z \longleftrightarrow \partial B_n(z), |C| < \infty\} \cup \{0 \longleftrightarrow \partial B_n, z \longleftrightarrow \partial B_n(z), |C_z| < \infty\}. \quad (3.7)$$

Logo, usamos a (3.7) e invariância por translações, e obtemos

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \partial B_n, z \longleftrightarrow \partial B_n(z)) - \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \infty, z \longleftrightarrow \infty) \\ & \leq \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \partial B_n, z \longleftrightarrow \partial B_n(z), |C| < \infty) \\ & \quad + \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \partial B_n, z \longleftrightarrow \partial B_n(z), |C_z| < \infty) \\ & = 2 \cdot \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \partial B_n, z \longleftrightarrow \partial B_n(z), |C| < \infty) \\ & \leq 2 \cdot \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \partial B_n, |C| < \infty). \end{aligned}$$

O resultado segue visto que os eventos $\{0 \longleftrightarrow \partial B_n, |C| < \infty\}$ decresce para o vazio quando $n \rightarrow \infty$. De fato, temos que

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \infty, z \longleftrightarrow \infty) \geq \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \partial B_n, z \longleftrightarrow \partial B_n(z)) - 2 \cdot \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \partial B_n, |C| < \infty).$$

Então, existe R suficientemente grande, que não depende de z , de modo que,

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \partial B_R, |C| < \infty) < \frac{\theta^2}{4}.$$

Logo,

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \infty, z \longleftrightarrow \infty) > \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \partial B_R, z \longleftrightarrow \partial B_R(z)) - \frac{\theta^2}{2}. \quad (3.8)$$

Portanto, de (3.6), podemos escrever que

$$\begin{aligned} \tau_{\rho,t}(0, z) &\geq \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \infty, z \longleftrightarrow \infty) \\ &> \mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \partial B_R, z \longleftrightarrow \partial B_R(z)) - \frac{\theta^2}{2}. \end{aligned}$$

Para simplificar a notação, denotamos o evento $\{(\cdot) \longleftrightarrow \partial B_n(\cdot)\}$ por $\mathcal{A}_{(\cdot),n}$. Pelo Teorema 2.4, existem constantes $\psi_1(d) > 0$ e $\psi_2(d) > 0$, que dependem da dimensão d da rede, tais que:

$$|\mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{A}_{0,R} \cap \mathcal{A}_{z,R}) - \mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{A}_{0,R}) \mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{A}_{z,R})| \leq \psi_1(d) \cdot R \cdot e^{-\psi_2(d)\delta(B_R, B_R(z))}, \quad (3.9)$$

ou equivalentemente usando invariância por translações

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{A}_{0,R} \cap \mathcal{A}_{z,R}) &\geq \mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{A}_{0,R}) \mathbb{P}_{\rho,t}(\mathcal{A}_{z,R}) - \psi_1(d) \cdot R \cdot e^{-\psi_2(d)\delta(B_R, B_R(z))} \\ &\geq (\mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \partial B_R))^2 - \psi_1(d) \cdot R \cdot e^{-\psi_2(d)\delta(B_R, B_R(z))} \\ &\geq \theta^2 - \psi_1(d) \cdot R \cdot e^{-\psi_2(d)\delta(B_R, B_R(z))}. \end{aligned}$$

Para concluir, se 0 e z estão suficientemente distantes de modo que,

$$e^{-\psi_2(d)\delta(B_R, B_R(z))} < \frac{\theta^2}{4 \cdot \psi_1(d) \cdot R}, \quad (3.10)$$

segue-se, em (3.8), que,

$$\tau_{\rho,t}(0, z) > \frac{\theta^2}{4}.$$

Como $z = y - x$, conforme estabelecido no início da demonstração, então

$$\tau_{\rho,t}(x, y) \geq c(\rho, t), \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{Z}^2.$$

□

Antes de passar ao resultado seguinte, vale destacar que argumentos similares aos apresentados nesta seção — sobre a unicidade do aglomerado infinito e o comportamento função de conectividade — foram desenvolvidos para o modelo PGR em dimensões superiores, conforme mostrado no artigo [2]. Os resultados aqui obtidos dizem respeito ao modelo PGRA em \mathbb{L}^2 .

3.3 Teorema Central do Limite

O Teorema Central do Limite (TCL) descreve o comportamento assintótico de somas ou médias de variáveis aleatórias, afirmando que, sob condições adequadas, essas somas seguem uma distribuição normal quando o número de variáveis cresce indefinidamente. No contexto da percolação, o TCL surge naturalmente quando se analisa o comportamento de quantidades agregadas, como o número total de elos abertos em uma caixa finita $B(n)$, quando $n \rightarrow \infty$, sendo relevante compreender como essas quantidades flutuam em torno de sua média (Seção 11.6, página 309 de [31]).

No modelo clássico de percolação de Bernoulli, a independência entre os elos permite que o TCL seja estabelecido de forma relativamente direta a funcionais aditivos locais. Por exemplo, em [45] estabelece-se um TCL para o tempo de primeira passagem num processo de percolação, sob regímenes críticos, em \mathbb{Z}^2 , com condições específicas sobre a distribuição dos tempos associados aos elos. De forma análoga, em [53] demonstram que, diversos funcionais de grafos geométricos — como o número de sítios, o total de elos ou o número de componentes conexas — satisfazem o TCL quando o número de sítios ou o volume da região observada tende ao infinito. Além disso, outros trabalhos fazem uso de técnicas baseadas em martingales para demonstrar resultados do tipo TCL, como discutido em [52, 58].

Ao introduzirmos dependências e restrições estruturais no sistema, como ocorre nos modelos PGR e PGRA, a demonstração do TCL deixa de ser imediato. Trabalhos como [28] e [17] investigam, por meio de simulações computacionais, propriedades críticas em modelos de percolação com restrição e adsorção aleatória. Em [28], embora o foco não seja diretamente o TCL, a análise de propriedades críticas, como o tamanho médio dos aglomerados, envolve implicitamente médias de variáveis aleatórias, refletindo comportamentos compatíveis com fenômenos do TCL. Em [17], os autores verificam numericamente que a distribuição da densidade de elos abertos converge para uma distribuição normal, confirmando a validade do TCL.

Apesar da dependência estrutural imposta pelo modelo, mostraremos que a distribuição da densidade de elos abertos dentro de uma caixa $B(n)$, centrada na origem, converge para uma distribuição normal quando $n \rightarrow \infty$. Para isso, enunciamos o TCL associado ao modelo PGRA, no qual analisamos o comportamento assintótico da soma das variáveis aleatórias $\omega_t(e)$, para t suficientemente pequeno, sendo e um elo contido em uma caixa $B(n)$. Sejam

$$\mu(\rho, t) = \mathbb{E}_{\rho, t}[\omega_t(e)] \quad \text{e} \quad \sigma^2(\rho, t) = \sum_{e \in \mathcal{E}^2} \text{Cov}_{\rho, t}(\omega_t(f), \omega_t(e)),$$

que representam a esperança em relação à medida do produto $\mathbb{P}_{\rho, t}$ e variância como

a soma das covariâncias entre um elo fixo $f \in \mathcal{E}^2$ e todos os demais elos da rede \mathbb{L}^2 , respectivamente.

Teorema 3.4 (Teorema Central do limite). *Se $\rho_0 > 0$, então,*

$$\frac{\sum_{e \in B(n)} (\omega_t(e) - \mu(\rho, t))}{\sigma(\rho, t) \sqrt{|B(n)|}} \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty,$$

para todo t suficientemente pequeno.

Para demonstrar tal resultado, inicialmente precisamos formalizar algumas definições preliminares. Dizemos que um evento A *vive* em um conjunto $\Gamma \subset \mathbb{L}^2$ se a ocorrência de A pode ser determinada exclusivamente observando o estado dos elos dentro de Γ . Denotamos por \mathcal{H}_Γ o conjunto dos eventos que vivem em Γ , isto é,

$$\mathcal{H}_\Gamma = \{A : A \text{ vive em } \Gamma\}. \quad (3.11)$$

Além disso, consideramos o coeficiente de mistura definido por

$$\alpha_{k,l}(n) := \sup \left\{ |\mathbb{P}_{\rho,t}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}_{\rho,t}(A_1)\mathbb{P}_{\rho,t}(A_2)| : \right. \\ \left. A_i \in \mathcal{H}_{\Lambda_i}, |\Lambda_1| \leq k, |\Lambda_2| \leq l, \delta(\Lambda_1, \Lambda_2) \geq n \right\}, \quad (3.12)$$

onde $\delta(x, y)$ denota a distância entre os sítios $x, y \in \mathbb{Z}^d$ e $\delta(\Lambda_1, \Lambda_2) = \inf\{\delta(x, y) : x \in \Lambda_1, y \in \Lambda_2\}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $k, l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

A fim de estabelecer o TCL, baseamo-nos na versão simplificada do resultado principal apresentado em [7], que fornece uma prova do TCL para campos aleatórios estacionários sob condições de dependência fraca. A seguir, enunciaremos tal resultado:

Teorema 3.5 (Bolthausen, 1982). *Seja $\{X_e\}_{e \in \mathcal{E}^d}$ uma família de variáveis aleatórias estacionárias e limitadas, definidas sobre \mathbb{Z}^d , com média $\mu = \mathbb{E}(X_e)$ e $\alpha_{k,l}(n)$ definido em (3.12). Suponha que:*

$$(a) \sum_{m \geq 1} m^{d-1} \alpha_{k,l}(m) < \infty, \text{ para } k + l \leq 4;$$

$$(b) \alpha_{1,\infty}(m) = o(m^{-d}).$$

Se para qualquer $f \in \mathcal{E}^d$ fixo, tivéramos que

$$\sigma^2 = \sum_{e \in \mathcal{E}^d} \text{Cov}(X_f, X_e) > 0,$$

então, vale que

$$\frac{\sum_{e \in B(n)} (X_e - \mu)}{\sigma \sqrt{|B(n)|}} \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Para aplicar o Teorema 3.5, mostramos que dada uma configuração do processo $\{\omega_t(e)\}_{e \in \mathcal{E}^2}$, ela satisfaz todas as hipóteses exigidas. De fato, a condição (a) é garantida pelo Teorema 2.4, que assegura a existência de constantes $\psi_1 = \psi_1(d)$ e $\psi_2 = \psi_2(d)$, tais que

$$\alpha_{k,l}(m) \leq \psi_1(|\Lambda_1| + |\Lambda_2|) \exp(-\psi_2 m) \leq 4\psi_1 \exp(-\psi_2 m)$$

para todo $m \geq 1$ e $k + l \leq 4$. Segue imediatamente que

$$\sum_{m \geq 1} m^{d-1} \alpha_{k,l}(m) \leq \sum_{m \geq 1} m^{d-1} (4\psi_1 \exp(-\psi_2 m)) = 4\psi_1 \sum_{m \geq 1} m^{d-1} \exp(-\psi_2 m) < \infty.$$

Para mostrar a condição (b), precisamos mostrar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{1,\infty}(m)}{m^{-d}} = 0.$$

De fato, pela consequência (2.3) do Teorema 2.4, vale que

$$\alpha_{1,\infty}(m) \leq \psi_1(1 + m^{d-1}) \exp(-\psi_2 m).$$

Logo,

$$\frac{\alpha_{1,\infty}(m)}{m^{-d}} \leq \frac{\psi_1(1 + m^{d-1}) \exp(-\psi_2 m)}{m^{-d}} = \frac{\psi_1 \exp(-\psi_2 m)}{m^{-d}} + \frac{\psi_1 m^{d-1} \exp(-\psi_2 m)}{m^{-d}}.$$

Aqui, a parte polinomial do numerador cresce, mas o termo exponencial $\exp(-\psi_2 m)$ decai muito mais rápido, quando $m \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\alpha_{1,\infty}(m) = o(m^{-d}).$$

Resta verificar que a soma das covariâncias é estritamente positiva. Isto segue do lema seguinte.

Lema 3.6. *Se $\rho_0 > 0$, então, para t suficientemente pequeno, temos*

$$\sigma^2(\rho, t) = \sum_{e \in \mathcal{E}^2} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)) > 0, \quad \text{para qualquer } e \in \mathcal{E}^2.$$

Demonstração do Lema 3.6. Fixemos um elo $f = \langle x, y \rangle \in \mathcal{E}^2$. Então

$$\begin{aligned} \sigma^2(\rho, t) &= \sum_{e \in \mathcal{E}^2} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)) \\ &= \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(f)) + \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}^2 \\ e \neq f}} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)) \\ &= \text{Var}(\omega_t(f)) + \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}^2 \\ e \neq f}} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Note que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\omega_t(f)) &= \mathbb{E}_{\rho,t}(\omega_t(f))^2 - (\mathbb{E}_{\rho,t}(\omega_t(f)))^2 \\ &= \mathbb{P}_{\rho,t}(\omega_t(f) = 1) - \mathbb{P}_{\rho,t}(\omega_t(f) = 1)^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para que o elo f esteja aberto no instante t , é suficiente que $U_f \leq t$, $\kappa_x > 0$, $\kappa_y > 0$, e que $U_e > t$ para todo elo e incidente a x ou y . Por outro lado, se f está aberto no instante t , então é necessário que $U_f < t$, $\kappa_x > 0$ e $\kappa_y > 0$. Essas considerações nos conduzem à seguinte desigualdade:

$$t(1 - \rho_0)^2(1 - t)^6 \leq \mathbb{P}_{\rho,t}(\omega_t(f) = 1) \leq t(1 - \rho_0)^2.$$

Logo, de (3.14) obtemos que,

$$t(1 - \rho_0)^2(1 - t)^6 - o(t) \leq \text{Var}(\omega_t(e)) \leq t(1 - \rho_0)^2 - o(t), \quad \text{quando } t \rightarrow 0.$$

Portanto,

$$\text{Var}(\omega_t(f)) = t(1 - \rho_0)^2 - o(t), \quad \text{quando } t \rightarrow 0.$$

Tendo em vista (3.13), temos que

$$\sigma^2(\rho, t) = t(1 - \rho_0)^2 + o(t) + \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}^2 \\ e \neq f}} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)), \quad \text{quando } t \rightarrow 0.$$

Para calcular o somatório, para todo $\ell \in \mathbb{N}$ vale que,

$$\sigma^2(t) = t(1 - \rho_0)^2 + o(t) + \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}^2 \\ e \neq f \\ \delta(e,f) \leq \ell}} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)) + \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}^2 \\ e \neq f \\ \delta(e,f) > \ell}} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)). \quad (3.15)$$

Analogamente, a covariância entre dois elos quaisquer $e, f \in \mathcal{E}^2$ satisfaz

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\omega_t(f), \omega_t(e)) &= \mathbb{P}_{\rho,t}(\omega_t(f) = 1, \omega_t(e) = 1) - \mathbb{P}_{\rho,t}(\omega_t(f) = 1)\mathbb{P}_{\rho,t}(\omega_t(e) = 1) \\ &\leq t^2(1 - \rho_0)^2, \end{aligned}$$

o que implica que $\text{Cov}(\omega_t(f), \omega_t(e)) \leq t^2$. Por outro lado, também é válido que $\text{Cov}(\omega_t(f), \omega_t(e)) \geq -t^2$, e portanto,

$$\text{Cov}(\omega_t(f), \omega_t(e)) = o(t), \quad \text{quando } t \rightarrow 0.$$

Logo, do primeiro somatório finito em (3.15),

$$\sigma^2(t) = t(1 - \rho_0)^2 + o(t) + o(t) + \sum_{\substack{e \in \mathcal{E}^2 \\ e \neq f \\ \delta(e,f) > \ell}} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)), \quad \text{quando } t \rightarrow 0. \quad (3.16)$$

Mostraremos que, para algum $\ell > 0$,

$$\sum_{\substack{e \in \mathcal{E}^2 \\ e \neq f \\ \delta(e,f) > \ell}} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)) = o(t), \quad \text{quando } t \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

Sem perda de generalidade, dado os elos $e_i = \langle x_i, y_i \rangle$, com $i = 1, 2$, seja $\Gamma_i = \{x_i, y_i\}$, denotemos por $K_t(\Gamma_i)$ o conjunto de sítios conectados a Γ_i por um caminho de elos cujos relógios tocam antes do tempo t . Suponha que $\delta(\Gamma_1, \Gamma_2) = n$ e defina

$$\Xi_i = \{U \in [0, 1]^{\mathcal{E}^d} : K_t(\Gamma_i) \subset B_{\frac{n}{4}}(\Gamma_i)\}.$$

Desta forma, obtemos que

$$|\text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(e_1), \omega_t(e_2))| = |\mathbb{P}_{\rho,t}(\omega_t(e_1) = 1, \omega_t(e_2) = 1) - \mathbb{P}_{\rho,t}(\omega_t(e_1) = 1)\mathbb{P}_{\rho,t}(\omega_t(e_2) = 1)|.$$

Com base em um argumento de cálculo, análogo ao utilizado na demonstração do Teorema 2.4 em [56], vale que

$$|\text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(e_1), \omega_t(e_2))| \leq 2 (\mathbb{P}_{\rho,t}(\Xi_1^c) + \mathbb{P}_{\rho,t}(\Xi_2^c)). \quad (3.18)$$

Se o evento Ξ_i^c ocorre, então, passando por cada um dos sítios x_i e y_i , deve existir um caminho de tamanho ao menos $\frac{n}{4}$ formado por elos cujos relógios tocam antes do tempo t . Note que, podemos obter a cota

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(\Xi_i^c) \leq 2 \cdot (3)^{\frac{n}{4}} \cdot t^{\frac{n}{4}} = 2 \cdot (3t)^{\frac{n}{4}}, \quad \text{para } d = 2. \quad (3.19)$$

De (3.18) e (3.19), temos

$$|\text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(e_1), \omega_t(e_2))| \leq 8 \cdot (3t)^{\frac{n}{4}}.$$

Desta maneira, para $e, f \in \mathcal{E}^2$,

$$\sum_{\substack{e \in \mathcal{E}^2 \\ e \neq f \\ \delta(e,f) > \ell}} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)) \leq \sum_{r=\ell+1}^{\infty} 8 \cdot N_r \cdot (3t)^{\frac{r}{4}},$$

onde $N_r := \#\{e \in \mathcal{E}^2 : \delta(e, f) = r\}$. Em \mathbb{L}^2 , o número de elos com distância r é da ordem r . Logo, existe $C > 0$ tal que $N_r \leq C \cdot r$. Em particular, para $t < \frac{1}{3}$ suficientemente pequeno,

$$\sum_{r=\ell+1}^{\infty} 8 C r (3t)^{\frac{r}{4}} = 8C \frac{(3t)^{\frac{\ell+1}{4}} \left((\ell+1)(1 - (3t)^{\frac{1}{4}}) + (3t)^{\frac{1}{4}} \right)}{(1 - (3t)^{\frac{1}{4}})^2}.$$

Reescrevendo, temos que

$$\sum_{\substack{e \in \mathcal{E}^2 \\ e \neq f \\ \delta(e,f) > \ell}} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)) \leq \frac{8 C \ell (3t)^{\frac{\ell+1}{4}}}{(1 - (3t)^{\frac{1}{4}})^2}.$$

Para determinar (3.17), note que, para um $t < 1$ suficientemente pequeno com $\ell > 4$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\sum_{\substack{e \in \mathcal{E}^2 \\ e \neq f \\ \delta(e,f) > \ell}} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)) \right) \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{8 C \ell (3t)^{\frac{\ell+1}{4}}}{(1 - (3t)^{\frac{1}{4}})^2} \right) = 0.$$

Assim, obtemos da Igualdade (3.16)

$$\sigma^2(\rho, t) = (1 - \rho_0)^2 t + o(t), \quad \text{quando } t \rightarrow 0.$$

Para concluir a prova do lema, da última igualdade, fazemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sigma^2(\rho, t)}{t} = (1 - \rho_0)^2.$$

Dado um $\epsilon = \frac{(1 - \rho_0)^2}{2}$, existe $\delta > 0$, tal que para todo $t \in (0, \delta)$, temos que

$$\left| \frac{\sigma^2(\rho, t)}{t} - (1 - \rho_0)^2 \right| < \frac{(1 - \rho_0)^2}{2},$$

o que é equivalente a escrever,

$$(1 - \rho_0)^2 - \frac{(1 - \rho_0)^2}{2} < \frac{\sigma^2(\rho, t)}{t} \implies \frac{\sigma^2(\rho, t)}{t} > \frac{(1 - \rho_0)^2}{2}$$

Portanto, visto que $\rho_0 > 0$, com $t > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$\sigma^2(\rho, t) = \sum_{e \in \mathcal{E}^2} \text{Cov}_{\rho,t}(\omega_t(f), \omega_t(e)) > 0.$$

□

Após verificar que o processo $\{\omega_t(e)\}_{e \in \mathcal{E}^2}$ satisfaz todas as condições do Teorema 3.5, concluímos que a distribuição da densidade de elos abertos dentro da caixa $B(n)$, centrada na origem, converge para uma distribuição normal quando $n \rightarrow \infty$, concluindo a demonstração do Teorema 3.4.

Vale a pena ressaltar que a generalização para dimensões superiores do resultado referente ao Teorema Central do Limite para o modelo PGRA surge de forma natural, seguindo argumentos análogos aos apresentados nesta subseção. Essa abordagem está sendo desenvolvida em um artigo em preparação [21].

3.4 Diferenciabilidade de $\mathbb{P}_t(A)$

Centrados no estudo do modelo PGR sobre \mathbb{L}^d , mostraremos que, dado um evento A que depende de um número finito de elos em \mathcal{E}^d , a probabilidade de ocorrência de A é uma função diferenciável em relação ao parâmetro t . Entretanto, um dos principais desafios dessa análise é a presença de dependências de todas as ordens no modelo. Para contornar essa dificuldade, concentraremos nossa atenção na estrutura do *aglomerado decrescente de um elo*, conceito que será formalizado a seguir.

Definição 3.7 (Caminho decrescente). Dado uma configuração de relógios $U \in [0, 1]^{\mathcal{E}^d}$ e dois elos $e, f \in \mathcal{E}^d$, dizemos que e é maior que f (com respeito a U) se $U(e) > U(f)$. Um caminho auto-evitante P , composto pelos elos e_0, e_1, \dots, e_n , é chamado de caminho decrescente se, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, o elo e_{i-1} é maior que e_i .

Definição 3.8 (Aglomerado decrescente). Sejam $\Lambda \subset \mathcal{E}^d$, $e \in \mathcal{E}^d(\Lambda)$ e $U \in [0, 1]^{\mathcal{E}^d}$. Definimos o *aglomerado decrescente* em Λ do elo e sob U como o conjunto $\mathcal{C}_e^\Lambda(U)$ de elos $f \in \Lambda$ para os quais existe um caminho decrescente, inteiramente contido em Λ , que conecta e a f .

Por conveniência, assumimos que e pertence ao seu próprio aglomerado decrescente. Quando $\Lambda = \mathcal{E}^d$, omitimos Λ na notação e escrevemos simplesmente $\mathcal{C}_e(U)$. Além disso, para $\Gamma \subset \mathcal{E}^d$, definimos

$$\mathcal{C}_\Gamma(U) = \bigcup_{e \in \Gamma} \mathcal{C}_e(U). \quad (3.20)$$

Ressaltamos que o aglomerado decrescente depende das variáveis $U \in [0, 1]^{\mathcal{E}^d}$ associadas aos elos e não dos seus estados. Com essas definições, estabelecemos o seguinte resultado:

Teorema 3.9 (Diferenciabilidade). *Se A é um evento local, então $\mathbb{P}_t(A)$ é uma função diferenciável em t no intervalo $[0, 1]$.*

Demonstração. Suponha que o evento A vive em $\Gamma \subset \mathcal{E}^d$. A partir de (3.20), para $t \in [0, 1]$ e $e \in \Gamma$, definimos

$$\mathcal{C}_{t,e} = \begin{cases} \mathcal{C}_e, & \text{se } U_e \leq t, \\ \{e\}, & \text{se } U_e > t. \end{cases}$$

Além disso, definimos

$$\mathcal{C}_t = \bigcup_{e \in \Gamma} \mathcal{C}_{t,e}.$$

Denotamos por $\delta(u, v)$ a distância no grafo entre os vértices $u, v \in \mathbb{Z}^d$. Dados $\Gamma, \tilde{\Gamma} \subset \mathbb{Z}^d$, definimos $\delta(\Gamma, \tilde{\Gamma}) = \inf\{\delta(x, y) : x \in \Gamma, y \in \tilde{\Gamma}\}$ e escrevemos $B_r(\Gamma) = \{x \in \mathbb{Z}^d :$

$\delta(x, \Gamma) \leq r$ para denotar a bola de raio r centrada em Γ . Além disso, para $r \in \mathbb{N}$, definimos o evento de relógios limitado a uma bola de raio r ,

$$\Xi_{\Lambda, t, r} = \left\{ U \in [0, 1]^{\mathcal{E}^d} : \mathcal{C}_t \subset B_r(\Lambda) \right\}.$$

Podemos estimar a probabilidade de $\Xi_{\Lambda, t, r}^c$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Xi_{\Lambda, t, r}^c) &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{e \in \Gamma} \left\{ U : \text{Existe um caminho decrescente de tamanho pelo menos } r \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \text{que começa em } e, U_e \leq t \right\} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{e \in \Gamma} \bigcup_{\ell=r} \left\{ U : \text{Existe um caminho decrescente de tamanho } \ell \text{ que começa} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \text{em } e, U_e \leq t \right\} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{e \in \Gamma} \bigcup_{\ell=r} \bigcup_{\gamma: |\gamma|=\ell} \left\{ U : \gamma \text{ é caminho decrescente de tamanho } \ell \text{ que começa} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \text{em } e, U_e \leq t \right\} \right) \\ &\leq \sum_{e \in \Gamma} \sum_{\ell=r} \sum_{\gamma: |\gamma|=\ell} \mathbb{P} \left(U : \gamma \text{ é caminho decrescente de tamanho } \ell \text{ que começa} \right. \\ &\quad \left. \text{em } e, U_e \leq t \right) \\ &\leq \sum_{e \in \Gamma} \sum_{\ell=r} \sum_{\gamma: |\gamma|=\ell} \frac{t^\ell}{\ell!}. \end{aligned}$$

Desta forma, da última desigualdade obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Xi_{\Lambda, t, r}^c) &= |\Gamma| \sum_{\ell=r} \sum_{\gamma: |\gamma|=\ell} \frac{t^\ell}{\ell!} \\ &\leq |\Gamma| \sum_{\ell=r} 2(2d)^\ell \frac{t^\ell}{\ell!} \\ &\leq C(\Gamma, d) \frac{2(2dt)^r}{r!}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

com $C = C(\Gamma, d) = |\Gamma|e^{2d}$. A última desigualdade provém do Apêndice (A.1). Além disso,

$$\bigcup_{r=0}^{\infty} \Xi_{\Lambda, t, r} = [0, 1]^{\mathcal{E}^d} \setminus \mathcal{N},$$

com $\mathbb{P}(\mathcal{N}) = 0$. Pela construção de Ξ , temos que $\Xi_{\Lambda,t,1} \subset \Xi_{\Lambda,t,2} \subset \Xi_{\Lambda,t,3} \subset \dots$. Seja

$$\Theta_{t,r} = \begin{cases} \Xi_{\Lambda,t,r} \setminus \Xi_{\Lambda,t,r-1} & \text{se } r \geq 1 \\ \Xi_{\Lambda,t,r} & \text{se } r = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Logo, temos uma união de conjuntos disjuntos tais que, a menos de um conjunto de probabilidade nula, satisfazem

$$\bigcup_{r=0}^{\infty} \Theta_{t,r} = [0,1]^{\mathcal{E}^d} \setminus \mathcal{N}.$$

Visto que $\mathbb{P}_t(A) = \mathbb{P}(U \in [0,1]^{\mathcal{E}^d} : \omega_t(U) \in A)$ e, esperando não haver risco de confusão, escrevemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t(A) &= \mathbb{P}(\omega_t^{-1}(A)) \\ &= \mathbb{P}(\omega_t^{-1}(A) \cap [0,1]^{\mathcal{E}^d}) \\ &= \mathbb{P}\left(\omega_t^{-1}(A) \cap \bigcup_{r=0}^{\infty} \Theta_{t,r}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=0}^{\infty} (\omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r})\right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r}\right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por sua vez, na demonstração do Teorema 2.4 em [56], se estabelece que o evento de relógios $\omega_t^{-1}(A) \cap \Xi_{\Lambda,t,r}$ só depende da coleção de variáveis U_e com $e \in \mathcal{E}^d(B_{r+1}(\Lambda))$, no sentido que, se $U \in \Xi_{\Lambda,t,r}$ e $\tilde{U} \in [0,1]^{\mathcal{E}^d}$ é tal que $U_e = \tilde{U}_e$ para todo $e \in \mathcal{E}^d(\Lambda_{r+1}(\Lambda))$, então $\tilde{U} \in \Xi_{\Lambda,t,r}$. Em nosso contexto, $\omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r}$ também só depende das variáveis U_e com $e \in \mathcal{E}^d(B_{r+1}(\Lambda))$, sendo que,

$$\begin{aligned} \omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r} &= \omega_t^{-1}(A) \cap (\Xi_{\Lambda,t,r} \setminus \Xi_{\Lambda,t,r-1}) \\ &= \omega_t^{-1}(A) \cap (\Xi_{\Lambda,t,r} \cap (\Xi_{\Lambda,t,r-1})^c) \\ &\subset \omega_t^{-1}(A) \cap \Xi_{\Lambda,t,r}. \end{aligned}$$

Seja $|\mathcal{E}^d(B_{r+1}(\Lambda))| = m(r)$, o número de elos na bola de raio $r+1$ contendo Λ em \mathcal{E}^d . Para abreviar, escreveremos $m := m(r)$. Considere o conjunto das ordenações dos elos de $\mathcal{E}^d(B_{r+1}(\Lambda))$, isto é,

$$\mathcal{P}_m = \left\{ \sigma : I_m \longrightarrow \mathcal{E}^d(B_{r+1}(\Lambda)) : \sigma \text{ é uma bijeção} \right\}$$

onde $I_m = \{1, 2, \dots, m\}$. Também considere $I_m^* = I_m \cup \{0\}$. Dada $\sigma \in \mathcal{P}_m$ e $l \in I_m^*$, definimos

$$E_{t,r}^{\sigma,l} = \left\{ U \in [0,1]^{\mathcal{E}^d(B_{r+1}(\Lambda))} : U_{\sigma(1)} < \dots < U_{\sigma(l)} < t < U_{\sigma(l+1)} < \dots < U_{\sigma(m)} \right\}.$$

Provaremos que,

$$\mathbb{P} \left(E_{t,r}^{\sigma,l} \right) = \frac{t^l}{l!} \cdot \frac{(1-t)^{m-l}}{(m-l)!}. \quad (3.24)$$

Para simplificar a notação, denotemos por $U := U \in [0, 1]^{\mathcal{E}^d(B_{r+1}(\Lambda))}$. Note que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(E_{t,r}^{\sigma,l} \right) &= \mathbb{P} \left(U : U_{\sigma(1)} < \cdots < U_{\sigma(l)} < t < U_{\sigma(l+1)} < \cdots < U_{\sigma(m)} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(U : U_{\sigma(1)} < \cdots < U_{\sigma(l)} < t, t < U_{\sigma(l+1)} < \cdots < U_{\sigma(m)} \right) \\ &= \underbrace{\mathbb{P} \left(U : U_{\sigma(1)} < \cdots < U_{\sigma(l)} < t \right)}_{\alpha} \cdot \underbrace{\mathbb{P} \left(U : t < U_{\sigma(l+1)} < \cdots < U_{\sigma(m)} \right)}_{\beta}. \end{aligned}$$

Como $U_{\sigma(1)} < \cdots < U_{\sigma(m)}$ são variáveis aleatórias *i.i.d.* em $[0, 1]$, temos que

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbb{P} \left(U : U_{\sigma(1)} < \cdots < U_{\sigma(l)} < t \right) \\ &= \int_0^t \int_0^{U_{\sigma(1)}} \cdots \int_0^{U_{\sigma(3)}} \int_0^{U_{\sigma(2)}} 1 dU_{\sigma(1)} dU_{\sigma(2)} \cdots dU_{\sigma(l)} \\ &= \int_0^t \int_0^{U_{\sigma(1)}} \cdots \int_0^{U_{\sigma(3)}} \left(U_{\sigma(2)} \right) dU_{\sigma(2)} \cdots dU_{\sigma(l)} \\ &= \int_0^t \int_0^{U_{\sigma(1)}} \cdots \left(\int_0^{U_{\sigma(4)}} \frac{U_{\sigma(3)}^2}{2} \right) dU_{\sigma(3)} \cdots dU_{\sigma(l)} \\ &= \int_0^t \int_0^{U_{\sigma(1)}} \cdots \left(\int_0^{U_{\sigma(5)}} \frac{U_{\sigma(4)}^3}{3 \cdot 2} \right) dU_{\sigma(4)} \cdots dU_{\sigma(l)}. \end{aligned}$$

Integrando sucessivamente, obtemos

$$\alpha = \mathbb{P} \left(U : U_{\sigma(1)} < \cdots < U_{\sigma(l)} < t \right) = \frac{t^l}{l!}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \beta &= \mathbb{P} \left(U : t < U_{\sigma(l+1)} < \cdots < U_{\sigma(m)} \right) \\ &= \int_t^1 \int_{U_{\sigma(l+1)}}^1 \cdots \int_{U_{\sigma(m-1)}}^1 1 dU_{\sigma(m)} \cdots dU_{\sigma(l+1)} \\ &= \int_t^1 \int_{U_{\sigma(l+1)}}^1 \cdots \int_{U_{\sigma(m-2)}}^1 \left(1 - U_{\sigma(m-1)} \right) dU_{\sigma(m-1)} \cdots dU_{\sigma(l+1)} \\ &= \int_t^1 \int_{U_{\sigma(l+1)}}^1 \cdots \int_{U_{\sigma(m-3)}}^1 \left(\frac{(1 - U_{\sigma(m-2)})^2}{2} \right) dU_{\sigma(m-2)} \cdots dU_{\sigma(l+1)} \\ &= \int_t^1 \int_{U_{\sigma(l+1)}}^1 \cdots \int_{U_{\sigma(m-4)}}^1 \left(\frac{(1 - U_{\sigma(m-3)})^3}{3 \cdot 2} \right) dU_{\sigma(m-3)} \cdots dU_{\sigma(l+1)}. \end{aligned}$$

Integrando sucessivamente, obtemos que,

$$\beta = \mathbb{P} \left(U : t < U_{\sigma(l+1)} < \cdots < U_{\sigma(m)} \right) = \frac{(1-t)^{m-l}}{(m-l)!}.$$

Logo, tendo em vista os valores de α e β , obtemos a Igualdade (3.24). No entanto, a menos de um conjunto de probabilidade nula, é válido que,

$$\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathcal{P}_m \\ l \in I_m^*}} E_{t,r}^{\sigma,l} = [0, 1]^{\mathcal{E}^d(B_{r+1}(\Lambda))}, \quad (3.25)$$

onde a união acima é constituída por conjuntos disjuntos. Visto que, $\omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r}$ só depende das variáveis U_e com $e \in \mathcal{E}^d(B_{r+1}(\Lambda))$, da Equação (3.25), segue-se que,

$$\begin{aligned} \omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r} &= \omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r} \cap [0, 1]^{\mathcal{E}^d(B_{r+1}(\Lambda))} \\ &= \omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r} \cap \left(\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathcal{P}_m \\ l \in I_m^*}} E_{t,r}^{\sigma,l} \right) \\ &= \bigcup_{\substack{\sigma \in \mathcal{P}_m \\ l \in I_m^*}} \left\{ \omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r} \cap E_{t,r}^{\sigma,l} \right\}. \end{aligned}$$

Observe que de acordo com a construção de $\Theta_{t,r}$ e $E_{t,r}^{\sigma,l}$, se $\{\omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r} \cap E_{t,r}^{\sigma,l}\} \neq \emptyset$, então temos que $E_{t,r}^{\sigma,l} \subset \omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r}$. Para cada $r \geq 0$, seja

$$S_{t,r}(A) = \left\{ (\sigma, l) \in \mathcal{P}_m \times I_m^* : E_{t,r}^{\sigma,l} \cap \omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r} \neq \emptyset \right\}.$$

Vale ressaltar que é possível que $S_{t,r}$ seja vazio, o que resulta $\mathbb{P}(\omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r}) = 0$. De modo geral, temos que

$$\omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r} = \bigcup_{(\sigma,l) \in S_{t,r}(A)} E_{t,r}^{\sigma,l}.$$

Agora, para cada par (r, l) dado, denote por $S_{t,r}^l(A)$ o conjunto das ordenações para as quais se mantêm a condição de não vazio de $S_{t,r}(A)$, isto é,

$$S_{t,r}^l(A) = \left\{ \sigma \in \mathcal{P}_m : E_{t,r}^{\sigma,l} \cap \omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r} \neq \emptyset \right\}.$$

Assim, na Equação (3.23), temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t(A) &= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}(\omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r}) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P} \left(\bigcup_{(\sigma,l) \in S_{t,r}(A)} \left\{ \omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r} \cap E_{t,r}^{\sigma,l} \right\} \right) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{(\sigma,l) \in S_{t,r}(A)} \mathbb{P}(\omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t,r} \cap E_{t,r}^{\sigma,l}) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{(\sigma,l) \in S_{t,r}(A)} \mathbb{P}(E_{t,r}^{\sigma,l}). \end{aligned}$$

Da Equação (3.24) e da definição de $S_{t,r}^l(A)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t(A) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{(\sigma,l) \in S_{t,r}(A)} \frac{t^l}{l!} \cdot \frac{(1-t)^{m-l}}{(m-l)!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m \sum_{\sigma \in S_{t,r}^l(A)} \frac{t^l}{l!} \cdot \frac{(1-t)^{m-l}}{(m-l)!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m |S_{t,r}^l(A)| \frac{t^l}{l!} \cdot \frac{(1-t)^{m-l}}{(m-l)!}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

A última igualdade provém do fato de que a parte interna do somatório não depende de σ . Afirmamos ainda que $|S_{t,r}^l(A)|$ não depende de t . Para verificar esta afirmação, considere dois tempos quaisquer $t_1 < t_2$, um raio $r \geq 0$ e $l \in \{0, 1, \dots, m\}$, de modo que mostraremos que $S_{t_1,r}^l(A) = S_{t_2,r}^l(A)$. Como é usual, provaremos que $S_{t_1,r}^l(A) \subset S_{t_2,r}^l(A)$, enquanto que a inclusão contrária, $S_{t_2,r}^l(A) \subset S_{t_1,r}^l(A)$, se verifica analogamente. Para a primeira inclusão, tomemos $\sigma \in S_{t_1,r}^l(A)$. Por definição, temos que,

$$\omega_{t_1}^{-1}(A) \cap \Theta_{t_1,r} \cap E_{t_1,r}^{\sigma,l} \neq \emptyset.$$

Fixe $V \in \{\omega_{t_1}^{-1}(A) \cap \Theta_{t_1,r} \cap E_{t_1,r}^{\sigma,l}\}$ e denote $\delta = t_2 - t_1$. Tomando, $W = V + \delta$. Então, será suficiente mostrar que $W \in \{\omega_{t_2}^{-1}(A) \cap \Theta_{t_2,r} \cap E_{t_2,r}^{\sigma,l}\}$ para esse σ dado. Primeiramente, da Definição 3.8, considere que $\mathcal{C}_t(U)$ representa a composição dos aglomerados que contêm Λ em relação à coleção de relógios U até o tempo t . Assim, observemos que,

$$\mathcal{C}_{t_1}(V) = \mathcal{C}_{t_2}(W), \quad (3.27)$$

pois a ordenação σ se mantém igual ao somar δ a cada relógio. Em outras palavras, a ordem em que os relógios precisavam tocar originalmente é preservada, mesmo após a adição de δ a cada um deles. Assim, o comportamento dos relógios em relação à ordenação inicial é mantido, garantindo que a estrutura dos aglomerados em $\mathcal{C}_{t_1}(V)$ seja idêntica à de $\mathcal{C}_{t_2}(W)$. Logo, pode-se verificar que

a) A partir do fato de que $V \in \{\omega_{t_1}^{-1}(A) \cap \Theta_{t_1,r} \cap E_{t_1,r}^{\sigma,l}\}$, temos

$$E_{t_1,r}^{\sigma,l} = \left\{ V : V_{\sigma(1)} < \dots < V_{\sigma(l)} < t_1 < V_{\sigma(l+1)} < \dots < V_{\sigma(m)} \right\}.$$

É claro que a ordenação σ não se altera ao somar δ a cada relógio. Desta forma,

$$E_{t_1+\delta,r}^{\sigma,l} = \left\{ V + \delta : V_{\sigma(1)} + \delta < \dots < t_1 + \delta < \dots < V_{\sigma(m)} + \delta \right\}.$$

Pela forma como W e δ foram definidos, obtemos que $W \in E_{t_2,r}^{\sigma,l}$.

b) Como $V \in \{\omega_{t_1}^{-1}(A) \cap E_{t_1,r}^{\sigma,l}\}$, temos uma coleção de V ordenados. Logo, de a),

$$E_{t_2,r}^{\sigma,l} = \left\{ W : W_{\sigma(1)} < \dots < t_2 < \dots < W_{\sigma(m)} \right\}.$$

Assim, temos uma configuração de relógios W que tocaram até o tempo t_2 e que possibilita a ocorrência do evento A . Segue-se, portanto, que $W \in \omega_{t_2}^{-1}(A)$.

c) A partir de (3.27), se $W \in \mathcal{C}_{t_2}(W)$ e $\mathcal{C}_{t_1}(V) \subset B_r(\Lambda)$, temos

$$\Xi_{\Lambda, t_2, r} = \left\{ W \in [0, 1]^{\mathcal{E}^d} : \mathcal{C}_{t_2}(W) \subset B_r(\Lambda) \right\} \text{ e } \Theta_{t_2, r} = \Xi_{\Lambda, t_2, r} \setminus \Xi_{\Lambda, t_2, r-1}.$$

Logo, $W \in \Theta_{t_2, r}$.

Em suma, de a), b) e c) é válido que $W \in \{\omega_{t_2}^{-1}(A) \cap \Theta_{t_2, r} \cap E_{t_2, r}^{\sigma, l}\}$; isso prova que $\sigma \in S_{t_2, r}^l(A)$. Como foi dito, a inclusão contrária segue de forma análoga subtraindo $(t_2 - t_1)$, concluindo com a igualdade desejada.

Para concluir e verificar que $\mathbb{P}_t(A)$ é diferenciável, utilizaremos o fato de que, sob certas condições, uma série de funções não apenas converge uniformemente, mas também preserva a diferenciabilidade termo a termo. Para isso, da Equação (3.26), escrevemos

$$f_r(t) = \sum_{l=0}^m |S_{t, r}^l(A)| \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot \frac{(1-t)^{m-l}}{(m-l)!}. \quad (3.28)$$

Assim, se cada função f_r é diferenciável em $I = [0, 1]$ e se a série formada por suas derivadas $\sum_{r=1}^{\infty} f_r'$ converge uniformemente nesse intervalo, então a série original $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$ também converge uniformemente para uma função f ; além disso, essa função limite f é diferenciável em I e sua derivada é exatamente a soma termo a termo das derivadas f_r' , ou seja, $f' = \sum_{r=1}^{\infty} f_r'$. Isso garante que, a existência de uma função diferenciável f que coincide com a soma da série $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$ (Bartle and Sherbert, Seção 8.3.4, página 342 de [3]).

Desta forma, provaremos que tanto a série da sequência $\{f_r(t) : r \geq 1\}$ e $\{f_r'(t) : r \geq 1\}$ são uniformemente convergentes em t . Para isso, utilizamos o teste de M-Weierstrass, que afirma o seguinte: seja $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$ uma série infinita definida sobre o domínio fechado e limitado $[0, 1]$. Suponha que existe uma sequência de constantes não negativas $\{M_r\}$, independentes de t , tais que: a) $|f_r(t)| \leq M_r$ para todo r e para todo t no domínio $[0, 1]$, e, b) a série $\sum_{r=1}^{\infty} M_r$ é convergente. Então, a série $\sum_{r=1}^{\infty} f_r(t)$ é uniformemente e absolutamente convergente no domínio $[0, 1]$. (Pathak, Seção 2.15.3, página 175 de [51]). De fato,

$$\begin{aligned} f_r(t) &= \sum_{l=0}^m |S_{t, r}^l(A)| \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot \frac{(1-t)^{m-l}}{(m-l)!} \\ &= \sum_{(\sigma, l) \in S_{t, r}(A)} \mathbb{P} \left(\omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t, r} \cap E_{t, r}^{\sigma, l} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{\sigma \in \mathcal{P}_m \\ l \in I_m^*}} \left(\omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t, r} \cap E_{t, r}^{\sigma, l} \right) \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\omega_t^{-1}(A) \cap \Theta_{t, r} \right) \end{aligned}$$

Logo, a partir de (3.22), obtemos que,

$$\begin{aligned} f_r(t) &= \mathbb{P} \left(\omega_t^{-1}(A) \cap (\Xi_{\Lambda,t,r} - \Xi_{\Lambda,t,r-1}) \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\omega_t^{-1}(A) \cap (\Xi_{\Lambda,t,r} \cap \Xi_{\Lambda,t,r-1}^c) \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\Xi_{\Lambda,t,r-1}^c \right). \end{aligned}$$

Por sua vez, desde que a probabilidade de $\Xi_{\Lambda,t,r-1}^c$ decaia exponencialmente rápido quando $r \rightarrow \infty$, temos de (3.21) que

$$f_r(t) \leq \mathbb{P}_t(\Xi_{\Lambda,t,r-1}^c) \leq C \cdot \frac{2(2dt)^{r-1}}{(r-1)!},$$

com $C = C(\Gamma, d) = |\Gamma|e^{2d}$. Logo, como $|S_{t,r}^l(A)|$ não depende de t , vale que,

$$\frac{d}{dt}f_r(t) \leq \frac{m}{t} \cdot f_r(t) \leq C \cdot m \cdot \frac{2(2dt)^{r-1}}{(r-1)!},$$

para todo $r \geq 1$ e todo $t \in [0, 1]$. Assim, como m é um polinômio em r , usamos o teste de M-Weierstrass para obter que, a serie $\sum_{r \geq 0} f_r'(t)$ converge uniformemente sobre o intervalo $[0, 1]$. Logo, $\mathbb{P}_t(A)$ é diferenciável em $[0, 1]$. \square

Uma consequência do Teorema 3.9 é que a função $\mathbb{P}_t(A)$ é infinitamente diferenciável no intervalo $(0, 1)$. Esse fato decorre de aplicar novamente o Teste-M de Weierstrass, que garante a convergência uniforme das derivadas de todas as ordens, permitindo assim a troca entre derivação e soma infinita. Para formalizar esse resultado, enunciamos o seguinte lema.

Lema 3.10. *Seja $r \geq 0$ e $t \in (0, 1)$ e sejam $\alpha, \beta \in (0, 1)$ com $\alpha < \beta$ tal que $\alpha \leq t \leq \beta$. Então*

$$f_r^{(k)}(t) \leq \left(\frac{m}{\alpha(1-\beta)} \right)^k f_r(t), \quad \text{para todo } t \in [\alpha, \beta].$$

Demonstração. Inicialmente, a partir da expressão (3.28),

$$f_r(t) = \sum_{l=0}^m |S_{t,r}^l(A)| \cdot \frac{t^l}{l!} \cdot \frac{(1-t)^{m-l}}{(m-l)!},$$

e denotamos:

$$C_l = \frac{|S_{t,r}^l(A)|}{l! \cdot (m-l)!}.$$

Procederemos por indução sobre k . Para $k = 1$, temos:

$$\begin{aligned} f_r^{(1)}(t) &= \sum_{l=0}^m C_l \left(l t^{l-1} (1-t)^{m-l} - (m-l) t^l (1-t)^{m-l-1} \right) \\ &\leq \sum_{l=0}^m C_l \left(l t^{l-1} (1-t)^{m-l} + (m-l) t^l (1-t)^{m-l-1} \right). \end{aligned}$$

Como $l < m$, obtemos:

$$\begin{aligned} f_r^{(1)}(t) &\leq \sum_{l=0}^m C_l \left(m t^{l-1} (1-t)^{m-l} + m t^l (1-t)^{m-l-1} \right) \\ &= \sum_{l=0}^m C_l \cdot m \cdot t^l (1-t)^{m-l} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} \right) \\ &= \left(\frac{m}{t(1-t)} \right) \sum_{l=0}^m C_l \cdot t^l \cdot (1-t)^{m-l} \\ &= \left(\frac{m}{t(1-t)} \right) f_r(t). \end{aligned}$$

Assumamos que a desigualdade,

$$f_r^{(k)}(t) \leq \left(\frac{m}{t(1-t)} \right)^k f_r(t),$$

é válida para um certo $k \geq 1$. Mostraremos que ela continua válida para $k + 1$. Utilizando a regra de Leibniz (veja Apêndice A.2) para derivadas de ordem superior, obtemos,

$$\begin{aligned} f_r^{(k)}(t) &= \sum_{l=0}^m C_l \cdot \frac{d^k}{dt^k} \left(t^l (1-t)^{m-l} \right) \\ &= \sum_{l=0}^m C_l \cdot \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{d^{k-j}}{dt^{k-j}} (t^l) \cdot \frac{d^j}{dt^j} \left((1-t)^{m-l} \right). \end{aligned}$$

Como t^l e $(1-t)^{m-l}$ são monômios, podemos calcular suas derivadas explicitamente. Logo, visto que

$$l(l-1) \cdots (l-(k-j-1)) = \frac{l!}{(l-(k-j))!}'$$

e

$$(m-l) \cdots (m-l-(j-1)) = \frac{(m-l)!}{(m-l-j)!}'$$

obtemos,

$$f_r^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^m C_l \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{l!}{(l-(k-j))!}' t^{l-k+j} \cdot \frac{(m-l)!}{(m-l-j)!}' (1-t)^{m-l-j},$$

com a convenção de que $\frac{l!}{(l-s)!} = 0$ se $s > l$ (Utiliza-se tal convenção para simplificar expressões envolvendo derivadas de monômios, pois a derivada de ordem maior que o grau do monômio é zero). Definamos,

$$L_j := L(m, l, j) = \frac{l!}{(l-(k-j))!}' \cdot \frac{(m-l)!}{(m-l-j)!}'$$

de modo que podemos reescrever,

$$f_r^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^m C_l \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} L_j \cdot t^{l-k+j} (1-t)^{m-l-j}. \quad (3.29)$$

Derivando a expressão acima, temos:

$$f_r^{(k+1)}(t) = \sum_{l=0}^m C_l \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} L_j \cdot \left((l-k+j)t^{l-k+j-1}(1-t)^{m-l-j} - (m-l-j)t^{l-k+j}(1-t)^{m-l-j-1} \right).$$

Como $l-k+j < m$ e $m-l-j < m$, podemos majorar ambos os coeficientes por m . Assim,

$$\begin{aligned} f_r^{(k+1)}(t) &\leq \sum_{l=0}^m C_l \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} L_j \cdot m \cdot \left(t^{l-k+j-1}(1-t)^{m-l-j} + t^{l-k+j}(1-t)^{m-l-j-1} \right) \\ &= \sum_{l=0}^m C_l \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} L_j \cdot m \cdot t^{l-k+j}(1-t)^{m-l-j} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} \right) \\ &= \left(\frac{m}{t(1-t)} \right) \sum_{l=0}^m C_l \cdot \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} L_j \cdot t^{l-k+j}(1-t)^{m-l-j}. \end{aligned}$$

Pela Equação (3.29), segue que,

$$f_r^{(k+1)}(t) \leq \left(\frac{m}{t(1-t)} \right) f_r^{(k)}(t).$$

Aplicando a hipótese de indução, obtemos

$$f_r^{(k+1)}(t) \leq \left(\frac{m}{t(1-t)} \right) \left(\frac{m}{t(1-t)} \right)^k f_r(t) = \left(\frac{m}{t(1-t)} \right)^{k+1} f_r(t).$$

Logo, temos que,

$$f_r^{(k)}(t) \leq \left(\frac{m}{t(1-t)} \right)^k f_r(t),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Finalmente, seja $\alpha, \beta \in (0, 1)$ com $\alpha < \beta$ e $t \in [\alpha, \beta]$. Como $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\alpha}$ e $\frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-\beta}$, então,

$$f_r^{(k)}(t) \leq \left(\frac{m}{\alpha(1-\beta)} \right)^k f_r(t).$$

□

3.5 Fórmula de Russo

Após estabelecermos a diferenciabilidade da função $\mathbb{P}_t(A)$ para eventos locais, surge naturalmente a questão de saber se é possível formular uma versão da Fórmula de Russo no contexto do modelo PGR. No entanto, quando lidamos com modelos que apresentam dependências estruturais, a ausência da independência impede a aplicação direta da fórmula.

Diversos autores enfrentaram desafios semelhantes ao estender a Fórmula de Russo para modelos dependentes. Em [69], por exemplo, foi desenvolvida uma versão da fórmula no contexto de campos de pontos de Poisson, com aplicações em geometria estocástica, como o estudo de células de Voronoi e polígonos aleatórios. De forma análoga, em [23] adaptaram a Fórmula de Russo ao modelo de percolação de Voronoi em \mathbb{R}^d . Já em [13], a fórmula foi estendida para o modelo de entrelaçamentos aleatórios, mediante propriedades de processos de Poisson e introduzindo o conceito de trajetória *plus-pivotal*.

Diante da relevância e das diversas aplicações da Fórmula de Russo em modelos com dependência, propomos aqui uma versão adaptada dessa fórmula para o modelo PGR. Nosso foco será em eventos locais, como o evento A que representa a existência de um caminho aberto conectando a origem ao bordo da caixa $B(n)$, especificamente no caso em que $k_v = 3$ para todo $v \in \mathbb{Z}^2$. Para formalizar essa abordagem, introduziremos algumas definições e ferramentas necessárias a seguir.

Definição 3.11 (Eventos crescentes). *O evento $A \in \mathcal{F}$ é chamado de evento crescente se*

$$\mathbb{1}_A(\omega_t(U)) \leq \mathbb{1}_A(\omega'_t(U)) \quad (3.30)$$

sempre que $\omega_t(U) \leq \omega'_t(U)$.

Seja $A \subset \{0,1\}^{\mathcal{E}^d}$ evento que depende de um número finito de elos $F \subset \mathcal{E}^d$. Dada uma configuração $\omega_t \in \{0,1\}^{\mathcal{E}^d}$ e um elo $e \in \mathcal{E}^d$, é útil definir uma nova configuração $\omega_t^{(e)} \in \{0,1\}^{\mathcal{E}^d}$, trocando o estado de e , ou seja para todo $f \in \mathcal{E}^d$,

$$\omega_t^{(e)}(U) = \begin{cases} \omega_t(U) & \text{se } f \neq e, \\ 1 - \omega_t(U) & \text{se } f = e. \end{cases}$$

Definição 3.12 (Pivotalidade para o modelo PGR). *Dizemos que e é pivotal para A em uma configuração $\omega_t \in \{0,1\}^{\mathcal{E}^d}$ se:*

$$\mathbb{1}_A(\omega_t(U)) \neq \mathbb{1}_A(\omega_t^{(e)}(U)). \quad (3.31)$$

Pela definição anterior, vale mencionar que um elo e é pivotal para o evento A na configuração $\omega_t \in \{0,1\}^{\mathcal{E}^d}$ se, ao considerar $\omega_t(U) \in A$, então $\omega_t^{(e)}(U) \notin A$, ou, alternativamente, se $\omega_t^{(e)}(U) \in A$, então $\omega_t(U) \notin A$. Neste caso, dizemos que e é *pivotal* para $(A, \omega_t(U))$.

Teorema 3.13 (Fórmula de Russo). *Seja $A := \{0 \longleftrightarrow \partial B(n)\}$ e denote $F := \mathcal{E}^2(B(n))$ o conjunto de elos da caixa $B(n)$. Sejam $0 < \alpha < \beta < 1$. Existe $K = K(\alpha, \beta) > 0$ tal que*

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}_t(A) \geq K \cdot \sum_{e \in F} \mathbb{P}_t(e \text{ é pivotal para } A)$$

para todo $t \in [\alpha, \beta]$.

Demonstração. Dado $t \in (0,1)$ e $\delta > 0$, com a condição de que $t + \delta < 1$, usando a definição da distribuição do processo e monotonicidade no tempo, obtemos que,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{t+\delta}(A) - \mathbb{P}_t(A) &= \mathbb{P}(U : \omega_{t+\delta}(U) \in A) - \mathbb{P}(U : \omega_t(U) \in A) \\ &= \mathbb{P}(U : \omega_{t+\delta}(U) \in A, \omega_t(U) \notin A). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Agora, seja $e = \langle u, v \rangle \in F$ e considere os elos $g, h \in \mathcal{E}^2$ distintos de e , que sejam incidentes em u e v , respectivamente. Afirmamos que:

$$\begin{aligned} \{U : \omega_{t+\delta}(U) \in A, \omega_t(U) \notin A\} \supset \\ \{U : e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U)), U_f > t + \delta, U_g > t + \delta, t < U_e \leq t + \delta\}, \end{aligned}$$

onde para cada elo $e \in F$ estamos destacando dois elos f e g incidentes em extremidades distintas de e . Para mostrar tal afirmação, suponha que U pertence ao conjunto da direita. De $U_e > t$ segue que e está fechado na configuração $\omega_t(U)$. Também note que, $U_f > t + \delta$, $U_g > t + \delta$, $t < U_e \leq t + \delta$ e restrição 3, implica que e está aberto na configuração $\omega_{t+\delta}(U)$, donde $\omega_{t+\delta}(U) \geq (\omega_t(U))^e$. Consequência da afirmação anterior, segue-se que

$$\begin{aligned} \{U : \omega_{t+\delta}(U) \in A, \omega_t(U) \notin A\} \supset \bigcup_{e \in F} \{U : e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U)), \\ U_f > t + \delta, U_g > t + \delta, t < U_e \leq t + \delta\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

onde para cada elo $e \in F$ estamos destacando dois elos f e g incidentes em extremidades distintas de e .

É natural se perguntar sobre os relógios dos elos diferentes de e que tocaram nos intervalos $[0, t]$ e $[t + \delta, 1]$, além dos relógios U_f e U_g , claro. Assim, definimos o seguinte conjunto auxiliar de relógios $R_{t,\delta}(e)$, que representa o evento em que nenhum elo em $F - \{e\}$ tocou no intervalo de tempo $(t, t + \delta]$, ou seja,

$$R_{t,\delta}(e) = \{U : U_h \notin (t, t + \delta], \text{ para todo } h \in F - \{e\}\}.$$

Então,

$$\{U: \omega_{t+\delta}(U) \in A, \omega_t(U) \notin A\} \supset \bigcup_{e \in F} \{U: e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U)), \\ U_f > t + \delta, U_g > t + \delta, t < U_e \leq t + \delta, R_{t,\delta}(e)\}.$$

Note que acima temos uma união de eventos dois a dois disjuntos. Uma vez que estamos considerando restrição 3, os eventos $\{e \text{ é pivotal para } A \text{ em } \omega_t, U_f > t + \delta, U_g > t + \delta\}$ e $\{t < U_e \leq t + \delta\}$ são independentes (nenhum elo da rede precisa saber se e está ou não aberto para então poder abrir, pois os elos f e g não estão abertos no tempo t . Muito menos precisam conhecer o tempo do elo e). Bem como são independentes os eventos $\{e \text{ é pivotal para } A \text{ em } \omega_t, U_f > t + \delta, U_g > t + \delta, R_{t,\delta}\}$ e $\{t < U_e \leq t + \delta\}$. Temos de (3.32),

$$\frac{\mathbb{P}_{t+\delta}(A) - \mathbb{P}_t(A)}{\delta} \geq \sum_{e \in F} \mathbb{P}(U: e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U)), \\ U_f > t + \delta, U_g > t + \delta, R_{t,\delta}(e)).$$

A partir do Teorema 3.9, quando $\delta \rightarrow 0$, o lado esquerdo da inequação acima converge para a derivada de $\mathbb{P}_t(A)$. Por sua vez,

$$\{U: e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U)), U_f > t + \delta, U_g > t + \delta, R_{t,\delta}(e)\} \\ \nearrow \{U: e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U)), U_f > t, U_g > t\}.$$

Portanto, tomando limite com δ indo para zero e usando a probabilidade condicional, obtemos que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{P}_t(A) &\geq \sum_{e \in F} \mathbb{P}(U: e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U)), U_f > t, U_g > t) \\ &= \sum_{e \in F} \mathbb{P}(U: e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U))) \\ &\quad \mathbb{P}(U: U_f > t, U_g > t | e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U))). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Para verificar que

$$\mathbb{P}(U: e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U))) > 0,$$

consideramos eventos de interesse, como $A := \{0 \longleftrightarrow \partial B(n)\}$, isto é, o evento em que a origem está conectada ao bordo da caixa $B(n)$ por um caminho aberto. Observamos que qualquer caminho auto-evitante que conecte a origem ao bordo da caixa estará aberto com probabilidade positiva para todo $t > 0$. Assim, é possível exibir uma configuração, dado o evento A , cuja ocorrência tem probabilidade estritamente positiva.

Por fim, note que, para todo $t \in (0, 1)$ é válido que,

$$\mathbb{P}(U : e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U)), U_f > t, U_g > t) > 0.$$

A partir do fato que $\mathbb{P}_t(\cdot)$ é contínua para eventos locais, o Teorema de Weierstrass (veja Apêndice A.3) implica que, para quaisquer que sejam $0 < \alpha < \beta < 1$, existe uma constante K tal que,

$$K := \inf_{e \in F, t \in [\alpha, \beta]} \mathbb{P}(U : U_f > t, U_g > t \mid e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U))) > 0. \quad (3.35)$$

Desta forma, a partir desta última equação e da Equação (3.34), temos

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}_t(A) \geq \sum_{e \in F} \mathbb{P}(U : e \text{ é pivotal para } (A, \omega_t(U))) \cdot K.$$

Portanto, para todo $t \in [\alpha, \beta]$, com $0 < \alpha < \beta < 1$, existe uma constante $K = K(\alpha, \beta) > 0$ tal que,

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}_t(A) \geq K \cdot \sum_{e \in F} \mathbb{P}_t(e \text{ é pivotal para } A).$$

□

Capítulo 4

Possíveis problemas futuros

Após os resultados apresentados no Capítulo 3, referentes aos modelos PGR e PGRA definidos sobre a rede hipercúbica \mathbb{L}^d com $d \geq 2$, é natural propor direções para investigações futuras.

Uma possibilidade interessante consiste em adaptar esses modelos a outras estruturas e estudar o comportamento da transição de fase. Por exemplo, em redes triangulares, onde o grau dos vértices difere do caso hipercúbico, a dinâmica de crescimento dos aglomerados pode mudar de forma significativa. Ainda mais, seria relevante estender o modelo para redes irregulares ou aleatórias, nas quais o número de vizinhos de cada sítio varia conforme uma distribuição imposta.

Outra direção promissora está no estudo da função de conectividade truncada. A análise do decaimento da conectividade entre dois sítios distantes — levando em conta a função de conectividade truncada — pode trazer informações assintóticas sobre a estrutura geométrica na fase supercrítica, inicialmente para o modelo com restrições determinísticas.

Embora tenha sido demonstrado que a função $t \mapsto \mathbb{P}_t(A)$ é infinitamente diferenciável para eventos locais no intervalo $(0, 1)$, permanece em aberto o problema clássico da analiticidade — formulado por Kesten (Problema 6, página 383 em [44]). No contexto do modelo PGR, a questão é saber se essa função é analítica em $t \in [0, 1]$:

Problema 4.1. *Se A é um evento local, então $\mathbb{P}_t(A)$ é uma função analítica em t no intervalo $[0, 1]$?*

Por fim, é razoável conjecturar que, com um desenvolvimento técnico mais refinado, possa ser estabelecida uma versão da Fórmula de Russo para qualquer evento crescente. Isso nos leva à seguinte formulação:

Problema 4.2. *Seja A um evento crescente que depende de um número finito de elos $F \subset \mathcal{E}^2$. Dado $0 < \alpha < \beta < 1$, existe uma constante $K = K(\alpha, \beta) > 0$ tal que*

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}_t(A) \asymp K \sum_{e \in F} \mathbb{P}_t(e \text{ é pivotal para } A)?$$

Focando no modelo PGRA, surge uma questão natural relacionada ao papel dos parâmetros ρ_2 e ρ_3 . Seria razoável esperar que, ao aumentar suficientemente ρ_2 (isto

é, mais sítios com grau máximo 2) ou ao reduzir ρ_3 (menos sítios com maior capacidade de conexão), a percolação deixe de ocorrer? (Veja Figura 2.2). Essa questão levanta a possibilidade de que certas distribuições de restrições locais podem impedir a formação de um aglomerado infinito:

Problema 4.3. *Considere o modelo PGRA sobre \mathbb{L}^2 com $\rho = (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3)$. Será que, para $\rho_3 > 0$ suficientemente pequeno, vale que,*

$$\mathbb{P}_{\rho,t}(0 \longleftrightarrow \infty) = 0?.$$

Referências

- [1] M. Aizenman, H. Kesten, and C. M. Newman. Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation. *Comm. Math. Phys.*, 111(4):505–531, 1987.
- [2] Weberson S. Arcanjo, Alan S. Pereira, D. C. dos Santos, Roger W. C. Silva, and Marco Ticse. Constrained-degree percolation on the hypercubic lattice: uniqueness and some of its consequences, 2025.
- [3] Robert Gardner Bartle and Donald R. Sherbert. *Introduction to real analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.
- [4] Amir Bashan, Roni Parshani, and Shlomo Havlin. Percolation in networks composed of connectivity and dependency links. *Phys. Rev. E*, 83:051127, May 2011.
- [5] Itai Benjamini and Gady Kozma. Uniqueness of percolation on products with \mathbb{Z} . *Alea*, 10(1):15–25, 2013.
- [6] Beth Bjorkman, Matthew Hale, Thomas D. Lamkin, Benjamin Robinson, and Craig Thompson. Nonasymptotic connectivity of random graphs and their unions. *IEEE Trans. Control Netw. Syst.*, 8(1):391–399, 2021.
- [7] E. Bolthausen. On the central limit theorem for stationary mixing random fields. *Ann. Probab.*, 10(4):1047–1050, 1982.
- [8] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53:629–641, 1957.
- [9] Nicholas E. Brunk and Reidun Twarock. Percolation theory reveals biophysical properties of virus-like particles. *ACS Nano*, 15(8):12988–12995, 2021. PMID: 34296852.
- [10] Armin Bunde and Wolfgang Dieterich. Percolation in composites. *Journal of electroceramics*, 5(2):81–92, 2000.
- [11] R. M. Burton and M. Keane. Density and uniqueness in percolation. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):501–505, 1989.
- [12] J. T. Chayes, L. Chayes, and R. Durrett. Connectivity properties of Mandelbrot’s percolation process. *Probab. Theory Related Fields*, 77(3):307–324, 1988.

- [13] Diego F. de Bernardini and Serguei Popov. Russo's formula for random interacements. *J. Stat. Phys.*, 160(2):321–335, 2015.
- [14] B. N. B. de Lima, R. Sanchis, D. C. dos Santos, V. Sidoravicius, and R. Teodoro. The constrained-degree percolation model. *Stochastic Process. Appl.*, 130(9):5492–5509, 2020.
- [15] Philippe Deprez, Rajat Subhra Hazra, and Mario V. Wüthrich. Inhomogeneous long-range percolation for real-life network modeling. *Risks*, 3(1):1–23, 2015.
- [16] Charles S. do Amaral, A. P. F. Atman, and Bernardo N. B. de Lima. On the monotonicity of the critical time in the constrained-degree percolation model. *Phys. A*, 561:Paper No. 125291, 7, 2021.
- [17] Charles S. do Amaral and D. C. dos Santos. Density distribution functions of constrained-degree percolation model on the square lattice. *Phys. Lett. A*, 472:Paper No. 128817, 4, 2023.
- [18] Gaogao Dong, Ruijin Du, Lixin Tian, and Runran Liu. Percolation on interacting networks with feedback-dependency links. *Chaos*, 25(1):013101, 10, 2015.
- [19] D. C. dos Santos. *Transição de Fase no Processo de Percolação de Grau Restrito*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2019.
- [20] D. C. dos Santos and Roger W. C. Silva. Exponential decay for constrained-degree percolation. *Journal of Applied Probability*, 62(2):795–807, December 2024.
- [21] D. C. dos Santos, Roger W. C. Silva, and Marco A. Ticse. Central limit theorem for the constrained-degree percolation model on the hypercubic lattice. Manuscrito em preparação, 2025.
- [22] Hugo Duminil-Copin. Introduction to bernoulli percolation. *Lecture notes*, 15, 2018.
- [23] Hugo Duminil-Copin, Aran Raoufi, and Vincent Tassion. Exponential decay of connection probabilities for subcritical Voronoi percolation in \mathbb{R}^d . *Probab. Theory Related Fields*, 173(1-2):479–490, 2019.
- [24] Robert Fitzner and Remco van der Hofstad. Mean-field behavior for nearest-neighbor percolation in $d > 10$. *Electron. J. Probab.*, 22:Paper No. 43, 65, 2017.
- [25] L. R. Fontes. Percolação, um modelo simples (e interessante) para um meio poroso. *Matemática Universitária. Brasil*, 28:1–17, 2000.
- [26] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, and J. Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. Math. Phys.*, 22:89–103, 1971.

- [27] Tao Fu, Yini Chen, Zhen Qin, and Liping Guo. Percolation on shopping and cash-back electronic commerce networks. *Phys. A*, 392(12):2807–2820, 2013.
- [28] A. P. Furlan, D. C. dos Santos, Robert M. Ziff, and Ronald Dickman. Jamming and percolation of dimers in restricted-valence random sequential adsorption. *Phys. Rev. Res.*, 2:043027, Oct 2020.
- [29] Alberto Gandolfi, Michael S Keane, and Charles M Newman. Uniqueness of the infinite component in a random graph with applications to percolation and spin glasses. *Probability Theory and Related Fields*, 92:511–527, 1992.
- [30] D S Gaunt, A J Guttmann, and S G Whittington. Percolation with restricted valence. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 12(1):75, jan 1979.
- [31] Geoffrey Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1999.
- [32] Geoffrey Grimmett and Svante Janson. Random graphs with forbidden vertex degrees. *Random Structures Algorithms*, 37(2):137–175, 2010.
- [33] T. E. Harris. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 56(1):13–20, 1960.
- [34] T.E Harris. Nearest-neighbor markov interaction processes on multidimensional lattices. *Advances in Mathematics*, 9(1):66–89, 1972.
- [35] Ivailo Hartarsky and Bernardo N. B. de Lima. Weakly constrained-degree percolation on the hypercubic lattice. *Stochastic Process. Appl.*, 153:128–144, 2022.
- [36] Alexander E. Holroyd and Zhongyang Li. Constrained percolation in two dimensions. *Ann. Inst. Henri Poincaré D*, 8(3):323–375, 2021.
- [37] K. Hoppe and G. J. Rodgers. Percolation on fitness-dependent networks with heterogeneous resilience. *Phys. Rev. E*, 90:012815, Jul 2014.
- [38] Minghui Hu, Yanan Sun, Dali Wang, Jian-Ping Lv, and Youjin Deng. History-dependent percolation in two dimensions. *Phys. Rev. E*, 102:052121, Nov 2020.
- [39] Géraldine Huth, Annick Lesne, François Munoz, and Estelle Pitard. Correlated percolation models of structured habitat in ecology. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 416:290–308, 2014.
- [40] Srikanth K. Iyer and D. Yogeshwaran. Percolation and connectivity in AB random geometric graphs. *Adv. in Appl. Probab.*, 44(1):21–41, 2012.

- [41] Yasuhiro Kanai, Keiji Abe, and Yoichi Seki. Price percolation model. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 427:226–233, 2015.
- [42] Eben Kenah and James M. Robins. Network-based analysis of stochastic SIR epidemic models with random and proportionate mixing. *J. Theoret. Biol.*, 249(4):706–722, 2007.
- [43] Harry Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$. *Comm. Math. Phys.*, 74(1):41–59, 1980.
- [44] Harry Kesten. *Percolation theory for mathematicians*, volume 2 of *Progress in Probability and Statistics*. Birkhäuser, Boston, MA, 1982.
- [45] Harry Kesten and Yu Zhang. A central limit theorem for “critical” first-passage percolation in two dimensions. *Probab. Theory Related Fields*, 107(2):137–160, 1997.
- [46] Ling-Wei Kong, Ming Li, Run-Ran Liu, and Bing-Hong Wang. Percolation on networks with weak and heterogeneous dependency. *Phys. Rev. E*, 95:032301, Mar 2017.
- [47] Jonathan J. Ludlam, Gavin J. Gibson, Wilfred Otten, and Christopher A. Gilligan. Applications of percolation theory to fungal spread with synergy. *Journal of The Royal Society Interface*, 9(70):949–956, 2012.
- [48] Russell Lyons and Yuval Peres. *Probability on trees and networks*, volume 42 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, New York, 2016.
- [49] M. V. Menshikov, S. Yu. Popov, and M. Vachkovskaia. On the connectivity properties of the complementary set in fractal percolation models. *Probab. Theory Related Fields*, 119(2):176–186, 2001.
- [50] Charles M. Newman. Ising models and dependent percolation. In *Topics in statistical dependence (Somerset, PA, 1987)*, volume 16 of *IMS Lecture Notes Monogr. Ser.*, pages 395–401. Inst. Math. Statist., Hayward, CA, 1990.
- [51] Hemant Kumar Pathak. *Complex analysis and applications*. Springer, Singapore, 2019.
- [52] Mathew D. Penrose. A central limit theorem with applications to percolation, epidemics and Boolean models. *Ann. Probab.*, 29(4):1515–1546, 2001.
- [53] Mathew D. Penrose and J. E. Yukich. Central limit theorems for some graphs in computational geometry. *Ann. Appl. Probab.*, 11(4):1005–1041, 2001.

- [54] Pedro C. Pinto and Moe Z. Win. Percolation and connectivity in the intrinsically secure communications graph. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 58(3):1716–1730, 2012.
- [55] Lucio Russo. On the critical percolation probabilities. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 56(2):229–237, 1981.
- [56] R. Sanchis, D. C. dos Santos, and R. W. C. Silva. Constrained-degree percolation in random environment. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 58(4):1887–1899, 2022.
- [57] Assaf Shapira. Kinetically constrained models with random constraints. *Ann. Appl. Probab.*, 30(2):987–1006, 2020.
- [58] Nobuaki Sugimine and Masato Takei. Remarks on central limit theorems for the number of percolation clusters. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 42(1):101–116, 2006.
- [59] Christian Tanguy. What is the probability of connecting two points? *J. Phys. A*, 40(47):14099–14116, 2007.
- [60] Behnam Tavagh-Mohammadi, Mohsen Masihi, and Mostafa Ganjeh-Ghazvini. Point-to-point connectivity prediction in porous media using percolation theory. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 460:304–313, 2016.
- [61] Augusto Teixeira. On the uniqueness of the infinite cluster of the vacant set of random interlacements. *The Annals of Applied Probability*, 19(1):454 – 466, 2009.
- [62] R. Teodoro. *Constrained-degree Percolation*. PhD thesis, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014.
- [63] Szymon Urban. Constrained-degree percolation on d-ary trees. Master’s thesis, Rijksuniversiteit groningen, 2024.
- [64] Rahul Vaze. Percolation and connectivity on the signal to interference ratio graph. In *2012 Proceedings IEEE INFOCOM*, pages 513–521, 2012.
- [65] Chuanxin Wang, Xinqi Hu, and Gaogao Dong. Exploring the percolation phenomena in quantum networks. *Mathematics*, 12(22), 2024.
- [66] Alex D Washburne, Daniel E Crowley, Daniel J Becker, Kezia R Manlove, Marissa L Childs, and Raina K Plowright. Percolation models of pathogen spillover. *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, 374(1782):20180331, 2019.
- [67] Michael A. Webb, Brett M. Savoie, Zhen-Gang Wang, and Thomas F. Miller III. Chemically specific dynamic bond percolation model for ion transport in polymer electrolytes. *Macromolecules*, 48(19):7346–7358, 2015.

-
- [68] Robert M. Ziff. Percolation and the pandemic. *Phys. A*, 568:Paper No. 125723, 9, 2021.
- [69] S. A. ZUEV. Russo's formula for poisson point fields and its applications. *Discrete Mathematics and Applications*, 3(1):63–74, 1993.

Apêndice A

Resultados úteis

Lema A.1. Para todo número natural $m \geq 0$ e todo número real $x \geq 0$, vale a seguinte desigualdade:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq e^x \cdot \frac{x^m}{m!}.$$

Demonstração. Começamos com a série exponencial:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Isolamos a cauda da série:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^m}{m!} \left(1 + \frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{(m+1)(m+2)} + \dots \right).$$

É claro que para todo número natural $m \geq 0$, cada termo pode ser limitado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 1 < m+1 &\rightarrow \frac{1}{m+1} < \frac{1}{1!} \\ 1 \cdot 2 < (m+1)(m+2) &\rightarrow \frac{1}{(m+1)(m+2)} < \frac{1}{2!} \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 < (m+1)(m+2)(m+3) &\rightarrow \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} < \frac{1}{3!} \\ &\vdots \\ 1 \cdot 2 \cdot \dots < (m+1)(m+2) \dots (m+k) &\rightarrow \frac{1}{(m+1)(m+2) \dots (m+k)} < \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Logo, observamos que para todo $k \geq 1$:

$$\frac{1}{(m+1)(m+2) \dots (m+k)} \leq \frac{1}{k!},$$

pois o denominador do lado esquerdo é maior ou igual a $k!$ (já que $m+1 \geq 1$, $m+2 \geq 2$, etc.). Portanto, podemos majorar:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^m}{m!} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \right) = \frac{x^m}{m!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) = \frac{x^m}{m!} \cdot e^x.$$

Concluimos que:

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq e^x \cdot \frac{x^m}{m!}.$$

□

Teorema A.2 (Regra de Leibniz para derivadas de produtos). *Sejam f e g funções diferenciáveis em um intervalo aberto contendo t , então para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que,*

$$\frac{d^n}{dt^n} [f(t) \cdot g(t)] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) \cdot g^{(n-k)}(t),$$

onde $f^{(k)}$ e $g^{(n-k)}$ denotam as derivadas de ordem k e $n - k$, respectivamente.

Teorema A.3 (Teorema de Weierstrass). *Seja $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e limitado, e seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Defina*

$$M = \sup_{x \in I} f(x) \quad e \quad K = \inf_{x \in I} f(x).$$

Então, existem pontos $p, q \in I$ tais que

$$f(p) = M \quad e \quad f(q) = K.$$