O CONHECIMENTO MATEMÁTICO DO PROFESSOR: FORMAÇÃO NA LICENCIATURA E PRÁTICA DOCENTE NA ESCOLA BÁSICA

PLINIO CAVALCANTI MOREIRA

PLINIO CAVALCANTI MOREIRA

O CONHECIMENTO MATEMÁTICO DO PROFESSOR: FORMAÇÃO NA LICENCIATURA E PRÁTICA DOCENTE NA ESCOLA BÁSICA

Tese apresentada ao Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação Conhecimento e Inclusão Social da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientadora: Maria Manuela Martins Soares David

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE EDUCAÇÃO
2004

Comissão Julgadora:

Maria Manuela Martins Soares David (orientadora)

Dario Fiorentini

Antônio Vicente Marafioti Garnica

Márcio Gomes Soares

Maria da Conceição Ferreira Reis Fonseca

Arnaldo de Moura Vaz

Suplentes:

Ana Maria Caldeira Salgueiro

Márcia Maria Fusaro Pinto

Para Maria da Glória Cavalcanti Moreira (in memoriam)

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Manuela pelo trabalho de orientação, sempre marcado pelo respeito, pela sensibilidade e pelo diálogo.

Aos membros da banca do exame de qualificação, Dario Fiorentini, Márcio Gomes Soares e Maria da Conceição Ferreira Reis Fonseca, pelas críticas, sugestões e indicações bibliográficas, que muito ajudaram na finalização do trabalho.

A todas as pessoas que contribuíram, cada um a seu modo, para tornar este trabalho melhor. De modo especial agradeço a Helena Noronha Cury, Maria Laura Magalhães Gomes, Maria Luiza Ramos, Helder Rodrigues, Cristina de Castro Frade, Vivaldo Rezende Filho. A Cristina, Rubens, Elisa e Aninha agradeço pelo fino trato durante os meses em que redigia a versão final.

Aos alunos do curso de licenciatura em matemática com os quais tenho aprendido bastante ao longo desses anos de trabalho na UFMG. Agradeço especialmente àqueles que concordaram em responder o questionário e participar das entrevistas e aos professores que prestaram informações sobre as disciplinas do curso.

Aos colegas da lista eletrônica da SBEM, pela troca de informações, pelos favores atendidos e pelas discussões que me ensinaram muito sobre formação de professores.

A Eliana Farias Soares (in memoriam) e Maria Cristina Costa Ferreira, parceiras nas primeiras idéias que acabaram por se transformar em projeto de doutorado.

Aos meus filhos Francisco e Alexandre, agradeço pela forma tão amorosa com que me *atrapalharam* durante a elaboração deste trabalho.

Dedico esse trabalho a Lelena, meu amor.

SUMÁRIO

RESUMO

Neste trabalho examinamos o processo de formação no curso de licenciatura em matemática, analisando as relações entre os conhecimentos matemáticos veiculados nesse processo e as questões que se colocam na prática docente escolar. O curso de licenciatura tomado como referência na pesquisa foi o diurno da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e o estudo restringiu-se ao tema *Números*. As fontes e os instrumentos foram: questionários e entrevistas, documentos do curso de licenciatura da UFMG, livros didáticos escolares, textos utilizados como referências básicas nas disciplinas do curso, a literatura de pesquisa em educação matemática.

Partindo de uma perspectiva teórica em que se distingue a matemática escolar da matemática científica ou acadêmica, descrevemos o conhecimento sobre os números veiculado no curso e o confrontamos com as questões que a literatura de pesquisa indica como envolvidas na prática do professor de matemática da escola básica. As análises dos dados convergem para a conclusão geral de que *o conhecimento matemático é trabalhado no processo de formação a partir da perspectiva e dos valores da matemática acadêmica, ignorando-se importantes questões escolares que não se ajustam a essa perspectiva e a esses valores*. A implicação imediata do trabalho para o processo de formação de professores refere-se à necessidade de um redimensionamento da formação matemática de modo a equacionar adequadamente os papéis da matemática escolar e da matemática científica nesse processo.

INTRODUÇÃO

A problemática geral referente à formação de professores para a escola básica comporta, hoje, um espectro amplo de questões. Essas questões variam, de forma não linear, desde as relações intersubjetivas dentro da sala de aula até as relações sociedade-escola e os condicionantes sociais, econômicos, políticos e culturais da educação escolar. Ainda dentro desse espectro, podemos citar a questão da natureza dos saberes profissionais docentes, as relações entre as teorias de aprendizagem e os processos de ensino, o impacto das inovações tecnológicas na prática do professor, o problema da violência na escola e o trabalho docente em ambiente multicultural. Enfim, pode-se dizer que todas as questões relativas ao processo de educação escolar acabam configurando temáticas de interesse para o campo da formação de professores.

Com relação à formação de professores de matemática no Brasil, os estudos referem-se também a uma gama diversificada de questões. Fiorentini (2003), na conferência de abertura do I Seminário Nacional de Licenciaturas em Matemática, apresentando *O Estado da Arte da Pesquisa Brasileira sobre Formação de Professores que Ensinam Matemática,* seleciona para descrição e análise 112 dissertações e teses defendidas no Brasil até 2002 e as classifica da seguinte maneira: 59 focalizam a formação inicial, 51 a formação continuada (uma delas foi enquadrada nos dois casos) e as três restantes são classificadas como *outros focos*. No que se refere à formação inicial, os subfocos considerados são:

- programas e cursos (24 trabalhos);
- prática de ensino e estágios supervisionados (12);
- outras disciplinas (6);
- atividades extracurriculares (5);
- formação, pensamento e prática profissional dos formadores (4);
- outros (8)

Este nosso trabalho refere-se à formação inicial do professor de matemática. Tomamos como objeto de estudo a formação matemática na licenciatura e focalizamos, de modo específico, as relações entre os conhecimentos veiculados no processo de formação e os saberes[1] associados às questões que se colocam na prática profissional docente na escola. Um breve histórico do problema abordado, a relevância do estudo feito, uma formulação mais

[1] Diferentemente de alguns autores, utilizamos indistintamente os termos *saberes* e *conhecimentos*, ao longo do texto. Dependendo do contexto, esses termos podem se referir tanto a saberes científicos sistematizados como também a habilidades profissionais específicas, conhecimentos práticos, saber-fazer etc.

precisa das questões de pesquisa e dos objetivos do trabalho e uma descrição sumária dos capítulos que compõem este texto é o que passamos, agora, a apresentar.

Nos estudos sobre as licenciaturas, um dos problemas apontados recorrentemente refere-se à questão da articulação entre a formação específica (i.e. na disciplina que o licenciado vai lecionar), a formação pedagógica e a prática profissional na educação básica (CARVALHO, 1988; BRAGA, 1988; LUDKE, 1994; BERTONI, 1995; LÜDKE; GOULART 1996; DINIZ-PEREIRA, 2000). De fato, essa questão tem atravessado toda a história das licenciaturas no Brasil.

Quando se iniciaram esses cursos no país, no final da década 1930-40, eles se constituíam de três anos de formação específica (bacharelado) e mais um ano para a formação pedagógica (DINIZ-PEREIRA, 2000). O saber considerado relevante para a formação profissional do professor era, fundamentalmente, o conhecimento disciplinar específico. O que hoje é denominado formação pedagógica era, de fato, reduzido à didática e esta, por sua vez, reduzida a um conjunto de técnicas úteis para a transmissão do saber adquirido nos três anos iniciais. Por isso, costuma-se referir a esse modelo de formação do professor como "3+1" ou "bacharelado + didática".

A partir da década de 70, no bojo de uma intensa discussão sobre o papel social e político da educação e, em particular, da escolarização, começam a se configurar mudanças estruturais nos cursos de licenciatura. Entre os vários modelos, propostas, tendências e concepções em debate — as licenciaturas curtas e a formação polivalente, o tecnicismo metodológico e a formação "conteudista" etc. (HAMBURGER, 1983; DINIZ-PEREIRA, 2000) — destaca-se a perspectiva teórica segundo a qual o processo de formação do professor deveria se desenvolver de maneira mais integrada, em que o conhecimento disciplinar específico não constituísse mais o fundamento único ao qual se devessem agregar métodos apropriados de "transmissão". Ao lado da preparação para a instrução numa determinada disciplina, apontava-se a necessidade de aprofundar a formação do professor dando ênfase à dimensão de educador, reconhecida como o fundamento da prática docente escolar (BRZEZINSKI, 1996).

De fato, observa-se uma modificação gradual na estruturação dos cursos de licenciatura ao longo dos anos 70 e 80, de modo que a formação pedagógica não se limita mais à apresentação de técnicas de ensino, passando a incluir disciplinas como sociologia da educação, política educacional e outras, além de abordar questões como a organização do trabalho no interior da prática escolar etc. O licenciado, por sua vez, é reconhecido também como o professor *de...* (matemática, história etc.), o que leva a reafirmar a importância da formação na área específica, algumas vezes chamada de "*formação de conteúdo*". Esta permanece a cargo dos especialistas (isto é, matemáticos, historiadores etc.) e envolve disciplinas planejadas e lecionadas por esses profissionais (CARVALHO, 1988). Contudo, mantém-se o problema da integração com a prática docente escolar. Na busca de alternativas para a sua solução, criam-se na década de 80 as chamadas disciplinas integradoras (BRAGA, 1988). Constitui-se, assim, um novo modelo.

Algumas perguntas se colocam, no entanto, em relação a esse modelo: como é entendida, conceitualmente, a *integração* que fica a cargo das disciplinas integradoras? Qual seria, exatamente, o papel dessas disciplinas no processo concreto de articulação da formação com a prática? Em que medida se produz uma real ruptura com o modelo "3+1" e uma efetiva superação da fórmula "bacharelado + didática"?

A análise dessas questões mostra-se relevante, uma vez que o problema continua, ainda hoje, sob intenso debate. Há um reconhecimento, bastante generalizado na literatura, de que a introdução de um elenco de disciplinas integradoras — seguida de várias ampliações, que incluem disciplinas como Laboratório de Ensino, Instrumentação para o Ensino etc. — não mostrou os resultados esperados. Diniz-Pereira, num estudo sobre as licenciaturas no Brasil, afirma que as análises continuam apontando "*a necessidade de superar algumas dicotomias e desarticulações existentes nesses cursos*". E destaca o "*complexo problema da dicotomia teoria-prática, refletido [...] na desvinculação das disciplinas de conteúdo e pedagógicas e no distanciamento existente entre a formação acadêmica e as questões colocadas pela prática docente na escola*". (DINIZ-PEREIRA, 2000, p. 57).

Em 1989, o Documento Final do IV Encontro Nacional da Comissão Nacional de Reformulação dos Cursos de Formação do Educador (CONARCFE) posicionava-se da seguinte maneira em relação à questão da formação específica nos cursos de bacharelado e licenciatura e ao lugar das disciplinas integradoras na grade curricular das licenciaturas: "[...] *no que se refere ao domínio do conhecimento específico não há diferenciação entre os dois profissionais*" [bacharel e licenciado, esclarecimento nosso]. (CONARCFE, 1989, apud SOUZA et al., 1995, p. 42). A diferenciação, de acordo com o documento, se daria nos seguintes termos: "*o licenciando, no ensino de um determinado conteúdo, necessita não só deste conteúdo, mas também da formação pedagógica (geral e associada a este conteúdo)*". (Ibid., p. 42). E mais "[...] *as disciplinas de conteúdo específico são as mesmas para o Bacharelado e para a Licenciatura. Somente após haver um relativo domínio das questões dos conteúdos específicos e pedagógicos são introduzidas as disciplinas integradoras*." (Ibid., p. 42).

Observe-se a preponderância de uma visão que considera a "formação de conteúdo" como um bloco autônomo dentro do processo geral de formação do professor. Em particular, no que se refere aos conteúdos específicos a formação do licenciado não deve distinguir-se daquela oferecida ao bacharel. Percebe-se, assim, que a questão da integração com a prática docente na escola não chega a se colocar como uma problemática a ser considerada no interior do processo de formação específica na licenciatura. Essa maneira de entender a "integração" abre espaço para que se mantenha, na prática, uma variante do antigo modelo "3+1", prevalecendo ainda, em essência, a idéia de que o fazer do professor consiste fundamentalmente em transmitir um determinado conteúdo disciplinar utilizando, para isso, as ciências da educação. Tal concepção de prática docente vai se refletir também na pesquisa sobre a formação. Fiorentini e seus colaboradores, que vêm estudando e descrevendo, desde 2000, a pesquisa brasileira sobre formação de professores de matemática, analisaram 89 dissertações de mestrado e teses de doutorado sobre o tema, defendidas entre 1970 e 2000, separando-as em dois grupos bem demarcados: os trabalhos realizados nas décadas de 70 e 80 — em que, segundo os autores, o conceito de formação subjacente era fundamentalmente o de treinamento — e os trabalhos realizados nos anos 90, em que *"supera-se o termo treinamento"* e *"inicia-se uma nova etapa na pesquisa sobre formação de professores"*. (FERREIRA et al., 2000, p.265).

Uma das direções para a qual aponta essa nova etapa é a da análise do processo de formação específica dentro das licenciaturas. Lüdke (1994), nas conclusões de um estudo encomendado pelo Conselho de Reitores das Universidades Brasileiras (CRUB), em que analisa a literatura sobre a formação de professores no Brasil e examina algumas experiências inovadoras nas licenciaturas, indica a necessidade de se repensar o processo de formação inicial do professor da escola básica e as formas de articulação entre conteúdo, pedagogia e prática docente, a partir do papel fundamental da formação específica. Ela diz:

> [...] já é tempo de se alterar a direção do eixo que vem norteando a licenciatura, fazendo-o centrar-se claramente no lado das áreas específicas. A pesquisa realizada, assim como o conhecimento acumulado pela literatura, e a vivência da problemática da área permitem que se afirme este primado. A competência básica de todo e qualquer professor é o domínio do conteúdo específico. Enquanto as unidades específicas não assumirem, como responsabilidade própria, a formação de professores, muito pouco poderão fazer as unidades de educação. Isso não implica, entretanto, que não haja uma importante contribuição da área pedagógica, cuja continuidade deve ser assegurada, mas numa articulação epistemológica diferente com as outras áreas, não numa simples relação temporal de sucessão. Deve-se partir do conteúdo específico, para trabalhar-se a dimensão pedagógica em íntima relação com ele**.** (LÜDKE, 1994, p. 9)

Ainda que se possa considerar um leque de referenciais e de pressupostos essencialmente distintos, de acordo com os quais é possível caminhar na direção indicada por Lüdke — "*partir do conteúdo específico para trabalhar-se a dimensão pedagógica em íntima* *relação com ele*" — o fato a ser destacado é que a formação disciplinar específica começa a ser objeto de atenção nos estudos sobre a licenciatura.

A partir dos anos 90 desenvolvem-se no Brasil vários trabalhos sobre os cursos de licenciatura em matemática, incluindo dissertações e teses, em que se aborda a formação matemática, sem que se a tome, entretanto, como objeto específico de estudo.

Uma primeira referência importante é o documento *Diretrizes Para a Licenciatura (DPL)*, publicado em 1991 por um grupo de professores do Instituto de Geografia e Ciências Exatas (IGCE) da Universidade Estadual Paulista (UNESP) de Rio Claro. Em 1995, retomando algumas questões abordadas no DPL, Souza et al. reafirmam uma das idéias centrais do documento:

> O DPL caracteriza a metodologia do ensino tradicional vigente como adequada ao Bacharelado e argumenta em favor de metodologias alternativas que seriam mais adequadas à Licenciatura. [...] não se trata de oferecer ao licenciando uma disciplina de conteúdo pedagógico com metodologia específica da Licenciatura, para que ele a compare com outra de conteúdo matemático com metodologia do Bacharelado. Trata-se de oferecer-lhe a oportunidade de comparar metodologias distintas em disciplinas de mesmo objetivo, principalmente as de conteúdo matemático. (SOUZA et al., 1995, p. 49)

Embora, a nosso ver, essa análise ainda se apoie numa concepção dicotomizada das relações conteúdo-método, ela apresenta uma mudança de foco importante, na medida em que traz o debate para o campo da formação matemática na licenciatura e levanta a questão da especificidade dessa formação, tendo em vista as particularidades de cada um dos campos profissionais em que vão atuar o bacharel e o licenciado.

A licenciatura da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), após a reformulação curricular de 1987, foi analisada por Zaidan (1993) em sua dissertação de mestrado. Após traçar um perfil do corpo discente, analisar a estrutura curricular e entrevistar professores do curso, a autora, numa de suas considerações finais, afirma:

> O estudo do currículo e as falas dos professores entrevistados configuram uma visão que se apresenta claramente dominante no Departamento de Matemática: para ser professor é preciso ter o conteúdo matemático; a formação pedagógica é secundária, é complemento e, para muitos, mero instrumental. (ZAIDAN, 1993, p. 166)

Tanus (1995), em sua dissertação de mestrado, estuda três cursos de licenciatura em matemática: o da UNESP de Rio Claro, o da UNESP de Bauru e o da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Esses cursos haviam sido reestruturados a fim de incorporar elementos inovadores, apontados em pesquisas sobre a formação de professores. O estudo teve como foco as relações entre as práticas vigentes nos novos processos de formação e as concepções teóricas que orientaram as reestruturações. As conclusões gerais são no sentido de que persiste um distanciamento problemático entre teoria e prática. Particularmente em relação à articulação entre formação pedagógica, formação matemática e prática docente, avaliam-se, de um modo geral, como limitadas e insuficientes as medidas implementadas.

Ao analisar as grades curriculares dos cursos de licenciatura em matemática em 19 instituições brasileiras, Faria (1996) refere-se, em dissertação de mestrado, a três grupos de disciplinas oferecidas por esses cursos: as de *conteúdo,* as *pedagógicas* e as *mistas*. Após constatar que, em média, 72% das disciplinas dos cursos são de conteúdo, enquanto 14% são pedagógicas e 14% mistas (apenas três casos se afastam significativamente dessa média), o autor comenta:

> Analisando um pouco mais os currículos [...] pudemos observar que ao incluírem as disciplinas mistas, os cursos de licenciatura tentaram superar o "esquema três mais um" [...]. Mas, devido à estrutura departamental [...] a troca de informações e de conhecimentos ainda é muito precária. Este fato impede que as disciplinas "mistas" sejam realmente eficazes na formação do professor de matemática. (FARIA, 1996, p. 77, aspas no original)

Vera Carneiro, em sua tese de doutorado, analisa as circunstâncias e a trama de relações políticas, institucionais e intersubjetivas que permitiram a implementação de mudanças progressivas no curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). A autora afirma que o currículo vigente — reformulado em 1993 — *"tem Educação Matemática como eixo de integração, articula teoria e prática e parte do aluno que se tem e na direção do professor que se deseja"* (CARNEIRO, 2000, p. 91). Mas ressalta que *" [...] persistem, no curso, disciplinas exclusivamente "de conteúdo", com concepção absolutista e tradicional, com avaliação conservadora e rígida, resultados não negociáveis e altos índices de reprovação"* (Ibid., p. 92, aspas no original).

Garnica e Martins (1999) analisam as avaliações que ex-alunos e professores da licenciatura da UNESP de Bauru fizeram do projeto pedagógico do curso. As conclusões, no que se refere especificamente à formação matemática, apontam certas divergências entre o que propõe o projeto pedagógico avaliado e as concepções dos formadores (professores da licenciatura) e dos licenciados. "*A idéia do conteúdo ser necessário e suficiente para a formação do professor de matemática esteve implícita na maioria dos depoimentos [...] muitos professores acreditam na formação do professor de Matemática, independentemente dos métodos utilizados para isso"* (GARNICA; MARTINS, 1999, p. 65). Tais concepções, segundo os autores, acabam por justificar *"a prática hegemônica da instrução objetivando, unicamente, a excelência no conteúdo"* (Ibid., p. 65).

Garnica e Fernandes (2002) analisam as concepções de professores de matemática de cursos de licenciatura de três instituições públicas do Maranhão a respeito do processo de formação do professor da escola básica. Entrevistas com 9 professores dessas licenciaturas foram realizadas e a análise dos dados levou à elaboração de uma "doutrina" que, segundo os autores, sintetiza e organiza o discurso fragmentado que emergiu das falas:

> Uma leitura acurada desta doutrina nos leva a afirmar que o principal valor instituído por ela é a competência de conteúdos matemáticos. [...] Nessa concepção, a capacitação pedagógica reduz-se à capacidade de "passar em frente", "transmitir", "retransmitir" o conteúdo matemático. (GARNICA; FERNANDES, 2002, p. 92)

Táboas (1993) realiza, em tese de doutorado, um estudo histórico-cultural da noção de número, da ampliação dos campos numéricos e dos sistemas de numeração e propõe que a história cultural dos números seja parte do tratamento do tema na licenciatura e que possa servir de modelo para a utilização da história da matemática em outros temas do currículo da formação do professor.

Garnica (1996), num artigo em que sintetiza seu estudo de doutorado, identifica e discute dois tipos de visão a respeito do papel da prova rigorosa na formação do professor: uma visão caracterizada como *técnica* e outra como *crítica*. A partir de entrevistas com professores-pesquisadores matemáticos e educadores matemáticos, o autor conclui que ambas as visões atribuem importância ao papel da prova rigorosa na formação do professor, mas apresentam diferentes leituras dos elementos fundamentais envolvidos na demonstração matemática, especialmente a noção de verdade e a idéia de rigor.

Koga (1998) analisa o papel da disciplina Cálculo Diferencial e Integral no curso de licenciatura em matemática. Em seu trabalho de mestrado, entrevista professores de quatro licenciaturas de universidades estaduais paulistas (UNESP de Rio Claro e de Bauru, UNICAMP, USP) e analisa os projetos pedagógicos dos cursos. No final comenta que, embora considere prematuro exarar uma conclusão definitiva,

> [...] entendemos que enquanto os professores de Cálculo Diferencial e Integral e de Análise Matemática apresentarem a visão de que a última é "o rigor do Cálculo" será difícil os alunos perceberem o que é o pensamento diferencial. Pois, o Cálculo Diferencial e Integral trabalha o domínio geométrico e a Análise Matemática o domínio aritmético. [...] Em outras palavras, o Cálculo Diferencial e Integral não é uma "Análise Matemática aplicada" e a Análise Matemática não é um "Cálculo Diferencial e Integral rigoroso", por mais que os nossos entrevistados acreditem naquilo. (KOGA, 1998, p.116, aspas no original)

Reis (2001), em tese de doutorado, analisa as formas segundo as quais se concebe a tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise nos cursos universitários. Referenciado na literatura especializada e em entrevistas com quatro pesquisadores, todos professores experientes no trabalho com as mencionadas disciplinas (alguns deles autores de livros de Análise), o trabalho discute a importância e o papel da Análise na formação do professor da escola básica, enfatizando aspectos relacionados ao ensino e à aprendizagem dessa disciplina nos cursos de licenciatura em matemática.

Em todos os trabalhos citados acima, a formação matemática nos cursos de licenciatura está, de algum modo, em consideração. Eles contribuem para uma melhor compreensão das dificuldades que se apresentam no decorrer do processo de formação do professor e das possibilidades de inovações nesse processo, seja através do estudo do papel de disciplinas específicas, seja pela análise crítica da estrutura global do curso, ou ainda pela identificação de concepções vigentes entre os formadores e suas relações com valores subjacentes ao desenvolvimento do processo de formação. *Entretanto, nenhum deles, como vimos, focaliza de maneira específica as relações entre os conhecimentos matemáticos veiculados no processo de formação e os conhecimentos matemáticos envolvidos na prática profissional docente na escola básica. Este é o foco do nosso trabalho.*

No plano das resoluções normativas referentes às licenciaturas, também se podem notar indicações importantes de que o problema das relações formação-prática demanda estudos aprofundados. Em 2001, o Conselho Nacional de Educação (CNE) aprova as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica (BRASIL, 2001), em que se faz notar uma certa ênfase no papel da prática: estabelece-se, por exemplo, que 800 horas, dentre as 2800 mínimas do currículo, sejam destinadas à prática de ensino e estágio supervisionado em escolas de Educação Básica. Em fevereiro de 2003, são aprovadas as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura (BRASIL, 2003) e, em abril desse mesmo ano, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) promove o I Seminário Nacional de Licenciatura em Matemática. Observa-se que tanto nas instâncias estatais de regulamentação quanto nas discussões envolvendo a comunidade brasileira de educação matemática, a questão da *integração* com a prática é vista como um aspecto importante do processo de formação do professor.

Desenvolvem-se, também, estudos internacionais comparativos dos processos de formação de professores de matemática, nos quais se discute, de maneira central, a questão da articulação com a prática profissional na escola. Por exemplo, Ball e Comiti (1996) descrevem e analisam diferentes tentativas em quatro países (Alemanha, França, Inglaterra e Estados Unidos) de se aproximar o processo de formação da prática profissional, ressaltando que em todos eles a questão ainda é vista como problemática.

Tudo isso vem reforçar a necessidade de que se aprofundem as análises das formas de se conceber teoricamente e de se implementar institucionalmente a articulação da formação do professor com a prática docente escolar. Esse cenário sugere a relevância de se buscar uma compreensão profunda dos elementos que sustentam a permanência histórica de uma articulação inadequada. Uma direção importante a ser explorada na procura dessa compreensão é a da análise do conhecimento matemático veiculado no processo de formação do professor na licenciatura, situando-o em relação à prática docente escolar. É nessa direção que se desenvolve este estudo.

Quando vigorava o sistema “3+1” na licenciatura, o conhecimento matemático era considerado como um *absoluto epistemológico*, ou seja, um “conteúdo” definido independentemente dos condicionantes do processo real de escolarização básica. O “conteúdo matemático” da formação era estabelecido a partir de referências internas à disciplina e a correspondente concepção do papel do professor era a de “transmissor” desse conhecimento.

A partir da década de 80, uma série de estudos vem mostrar que a docência na escola básica é uma prática dotada de alto grau de complexidade, envolvendo relações entre atividades não triviais, desde a gestão da sala de aula até a seleção, re-tradução, adaptação, produção e utilização de saberes visando especificamente a educação escolar (SHULMAN, 1987; BROMME, 1994; GAUTHIER et al., 1998; TARDIF, 2002a).

Por outro lado, o desenvolvimento da ciência cognitiva vem contribuindo para uma maior compreensão de certos aspectos do processo de aprendizagem da matemática, com reflexos no ensino e, portanto, na constituição dos conhecimentos associados à prática docente escolar. A partir do final da década de 70, a pesquisa cognitiva, que antes se desenvolvia num plano geral, passa a colocar ênfase nas particularidades do conhecimento disciplinar específico que está em jogo no processo de aprendizagem. Estudos como os de Tall e Vinner, 1981; Behr et al.,1983, 1992; Vergnaud, 1990; Sfard, 1991; Brousseau, 1997, entre outros, se referem, com diferentes enfoques e perspectivas, a questões da aprendizagem no campo específico da matemática, muitas vezes atendo-se, particularmente, a certos tópicos ou conceitos.

Assim, a literatura de pesquisa no campo da educação matemática fornece elementos importantes para que se possa deslocar o conhecimento matemático trabalhado no processo de formação da sua posição histórica de conhecimento “dado” para a condição de conhecimento a ser problematizado, transformado em objeto de estudo e investigação. Analisada de um ponto de vista apropriado, essa literatura proporciona elementos para a construção de uma visão bastante diferenciada — em relação ao esquema “3+1” e suas variantes — das relações entre a formação matemática na licenciatura e os saberes associados às atividades da prática docente na escola. Desse modo, o apoio em estudos teóricos e pesquisas empíricas relatadas na literatura do campo da educação matemática será essencial no desenvolvimento do nosso trabalho.

Consideramos que a restrição a um tema específico proporciona condições mais favoráveis ao aprofundamento das análises. Assim, tendo em vista a sua indiscutível relevância dentro do processo de escolarização e a riqueza conceitual que o envolve, restringimos nossa atenção ao conjunto dos números reais, destacando dois subsistemas particularmente importantes na educação básica: os naturais e os racionais.

A licenciatura em matemática tomada como referência neste estudo é o curso diurno da UFMG. No início do projeto tínhamos a pretensão de analisar as licenciaturas em matemática de quatro universidades, a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), a Unesp de Rio Claro, a Universidade de São Paulo (USP) e a UFMG. A escolha dessa amostra, à época, tinha a intenção de representar tendências dominantes no país, tanto em termos de estruturação dos cursos de licenciatura como também de referência teórica para o processo de formação de professores de matemática. Além disso, considerou-se a questão prática de concentração dessas instituições na mesma região geográfica do país, o que, em princípio, facilitaria o acesso aos dados.

No entanto, em lugar das quatro universidades inicialmente indicadas, acabamos por nos restringir apenas à UFMG. Essa restrição deveu-se, essencialmente, a uma avaliação, feita ao longo do desenvolvimento do estudo na UFMG, de que para cobrir as quatro instituições com a dose desejável de rigor seriam necessários tempo, mobilidade e uma equipe de trabalho de que não dispúnhamos.

Aliada a essa dificuldade prática, outras igualmente importantes se apresentaram: na medida em que considerássemos cursos que se estruturam, pelo menos em princípio, em torno de projetos pedagógicos e propostas curriculares distintas, colocar-se-ia a necessidade de uma análise comparativa dos dados e dos resultados obtidos para cada uma dessas instituições, o que, além de envolver questões de natureza teórico-metodológica, ampliaria o escopo do trabalho, implicando, de novo, um prolongamento do tempo de execução para além do que era viável.

Procedemos, então, a uma investigação com o objetivo de responder as seguintes questões de pesquisa:

(A) Que tipo de conhecimento matemático, a respeito dos sistemas numéricos, é veiculado no processo de formação do professor na licenciatura em matemática da UFMG?

(B) Que questões, referentes ao trabalho com os sistemas numéricos, se colocam para o professor de matemática na prática docente escolar e que conhecimentos estão fundamentalmente envolvidos na ação pedagógica associada ao tratamento escolar dessas questões?

Ao analisar o tipo de saber matemático associado à prática escolar e confrontá-lo com aquele veiculado no processo de formação na licenciatura, identificamos uma forma específica e particular de distanciamento entre formação e prática profissional docente. Assim, as respostas às nossas questões de pesquisa vêm contribuir para uma compreensão mais profunda dessa cisão — reiteradamente apontada nos estudos sobre as licenciaturas, mas quase sempre em termos genéricos e superficiais — entre o processo de formação e a prática docente escolar. Cabe ressaltar, no entanto, que não faz parte dos nossos objetivos apresentar uma proposta concreta de re-estruturação global do curso de licenciatura em matemática.

Esclarecemos ainda que, neste trabalho, as *questões que se colocam para o professor de matemática na prática docente escolar*, referidas na *Questão (B)*, são identificadas como tais a partir de estudos teóricos e pesquisas empíricas relatadas na literatura, não se restringindo, portanto, apenas às questões concretamente reconhecidas e efetivamente trabalhadas pelos professores no desenvolvimento de sua prática docente escolar. Observamos também que, para nós, os conhecimentos qualificados como *envolvidos nas questões que se colocam para o professor em sua prática docente escolar* não se identificam imediatamente com aqueles estritamente necessários à prática do professor na escola básica, pois isto seria equivalente a postular que a prática do professor não pode passar por outros caminhos.

Do mesmo modo que não consideramos os conhecimentos envolvidos nas questões da prática como saberes estritamente necessários ao exercício profissional docente, também não podemos afirmar que eles sejam, em sua totalidade, efetivamente mobilizados na ação pedagógica do professor, pois isso implicaria considerar a prática docente escolar como uma instância auto-suficiente de formação profissional. O fato é que não tomamos os resultados da nossa pesquisa como saberes normativos para a ação prática do professor em sala de aula. Uma análise detalhada das relações — tão complexas e intermediadas por elementos de natureza tão diversificada — entre os resultados das pesquisas no campo da educação matemática e as necessidades incontornáveis da prática docente escolar não faz parte dos objetivos e nem das pretensões deste trabalho. O nosso pressuposto é o de que o conhecimento envolvido nas questões que se colocam para o professor de matemática na prática escolar deve ser objeto de consideração cuidadosa nos processos de formação. Resumindo, podemos dizer o seguinte: não temos elementos suficientes para afirmar que os conhecimentos que constituem nossa resposta à Questão (B) sejam necessários à prática do professor na escola básica, mas o conjunto de pesquisas em que nos fundamentamos indica que eles estão associados a questões que se referem diretamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar em matemática. Assim, a menos que se questione, no seu conjunto, a validade dessas pesquisas, é forçoso, a nosso ver, considerar a relevância do papel de tais conhecimentos dentro do processo de formação profissional para o professor de matemática da escola básica.

Três idéias fundamentais se entrelaçam na construção da nossa perspectiva de análise neste trabalho. São elas:

1. Do ponto de vista da formação do professor da escola básica, a matemática escolar não se reduz a uma versão elementar da matemática acadêmica[2].

2. A prática profissional do professor de matemática da escola básica é uma atividade complexa, cercada de contingências, que não se reduz à "transmissão" do conteúdo prescrito pelo currículo escolar.

3. A formação matemática que o futuro professor vivencia no curso de licenciatura contribui para a estruturação de um conjunto de concepções do licenciando a respeito do conhecimento matemático e dos processos de ensino e aprendizagem de matemática, as quais influenciam a sua prática como professor da escola básica.

De fato, o estudo das relações entre a matemática escolar e a matemática acadêmica pressupõe uma certa concepção da prática profissional do professor da escola. De modo análogo, uma determinada visão da prática docente escolar acaba configurando parâmetros para um projeto de formação de professores. E, finalmente, determinado modelo de formação de professores de matemática para a escola básica pode induzir nos futuros professores um correspondente espectro de concepções a respeito das relações entre matemática acadêmica e matemática escolar.

O trabalho se compõe de quatro capítulos, seguidos de um pequeno texto com as conclusões gerais, onde se indicam, também, certas limitações do estudo e algumas questões dele emergentes.

No Capítulo I desenvolvemos uma reflexão geral a respeito da constituição da matemática escolar e de suas relações com a matemática acadêmica, com os saberes e "não-saberes" associados à prática docente escolar e com o processo de formação do professor de matemática da escola básica. Em suma, construímos e fundamentamos a perspectiva a partir da qual o estudo é desenvolvido.

No Capítulo II apresentamos uma descrição dos conhecimentos a respeito dos sistemas numéricos que são veiculados no curso diurno de licenciatura em matemática da UFMG. Esse capítulo compõe, então, a nossa resposta à primeira questão de pesquisa.

No Capítulo III descrevemos alguns elementos do conhecimento matemático (a respeito dos números) envolvidos nas questões que se colocam para o professor na prática docente na escola básica. Ao mesmo tempo em que apresentamos nossa resposta à segunda

---

[2] Os significados que atribuímos, neste trabalho, às expressões *matemática acadêmica* e *matemática escolar* são explicitados e discutidos no Capítulo I.

questão de pesquisa, procuramos situar criticamente a formação matemática que se desenvolve no curso de licenciatura em relação à matemática escolar.

No Capítulo IV, nossa atenção se volta para uma análise dos resultados concretos do processo de formação na licenciatura, em termos dos conhecimentos construídos pelos licenciandos. Relatamos uma pesquisa realizada com alunos formandos e com iniciantes do curso diurno de licenciatura em matemática da UFMG. O objetivo central dessa pesquisa foi detectar e avaliar os conhecimentos sobre os sistemas numéricos que os licenciados levam para a prática docente na educação básica após vivenciarem o processo de formação profissional. Estabelecemos, paralelamente, um contraste com as imagens que os iniciantes trazem para o curso de formação a partir da vivência, como alunos, do processo de educação escolar básica. Assim, esse capítulo vem contribuir para o trabalho de duas maneiras: por um lado, funciona como uma fonte extra, permitindo uma espécie de triangulação das análises desenvolvidas no Capítulo III e, por outro, informa sobre a relevância de se tratar certas questões a respeito dos números na licenciatura.

Os procedimentos metodológicos utilizados em cada investigação são descritos nos capítulos correspondentes.

CAPÍTULO I

MATEMÁTICA ESCOLAR, MATEMÁTICA CIENTÍFICA, SABERES DOCENTES E FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Neste capítulo, procuramos explicitar a perspectiva teórica segundo a qual desenvolvemos as investigações, as análises e as conclusões do trabalho.

Em uma das notas do artigo que abre o livro "Knowledge and Control", M.C.Young, ao comentar dois estudos históricos sobre o desenvolvimento de certas idéias educacionais na sociedade inglesa, diz: "c*ada um deles, entretanto, fica limitado por um quadro conceitual implícito, o qual toma o 'conhecimento acadêmico' como 'dado' ao invés de 'a ser explicado*" (YOUNG, 1972, p. 41, aspas no original)*[1]. Citando o exemplo da matemática, afirma: "[...] *a questão 'como as crianças aprendem matemática?' pressupõe respostas a uma questão anterior que seria: qual a base social do conjunto de significados que costuma ser identificado com o nome de matemática?*" (Ibid., p. 27, aspas no original)*

Não é nosso propósito desenvolver uma análise do conhecimento matemático nos termos sugeridos por Young, isto é, discutir os fundamentos sociais da matemática acadêmica. O nosso objetivo neste capítulo é distinguir e discutir as relações entre duas faces específicas desse conjunto de significados que costuma ser identificado com o nome de matemática. As duas faces que nos interessam particularmente neste trabalho, dentre as várias que podem ser consideradas, são a *matemática acadêmica* e a *matemática escolar*.

A análise se desenvolverá a partir de uma reflexão a respeito das seguintes indagações: que relações existem entre o conjunto de significados que a comunidade científica dos matemáticos identifica com o nome de matemática e o conjunto de saberes especificamente associados à educação matemática escolar? Seria o segundo um mero subconjunto do primeiro, apenas "adaptado" ao público escolar? Neste caso, como se desenvolve esse processo de adaptação? Caso contrário, em que medida seria a matemática escolar uma construção histórica relativamente autônoma que se constitui no interior de uma *forma escolar* (VINCENT et al., 2001) produtora de cultura?

As respostas possíveis a essas questões não apenas demarcam pontos de vista específicos sobre as relações entre a matemática acadêmica e a matemática escolar, mas envolvem também diferentes leituras do exercício profissional da docência na escola e dos

[1] Todas as citações marcadas com o símbolo * são traduções nossas de trechos de publicações em língua estrangeira (inglês, francês ou espanhol).

saberes associados a essa atividade e podem, a partir daí, influenciar na conformação dos projetos de formação do professor de matemática para o ensino básico (ver, por exemplo, DRUCK, 2003 e, em contraposição, LINS, 2003).

Dominique Juliá, num estudo histórico em que trata de três aspectos das disciplinas escolares — as finalidades, o ensino ministrado e as apropriações que os alunos fazem do saber veiculado — afirma que o historiador tem todo o interesse em aproveitar as contribuições provenientes do campo da Didática, o qual vem desenvolvendo reflexões profundas e importantes sobre a questão das relações entre os saberes científicos e os saberes escolares (JULIÁ, 2002, p.39).

Por outro lado, estudos sobre a prática profissional dos professores mostram que a experiência docente na escola é um espaço de produção de saberes (SHULMAN, 1987; GAUTHIER et al., 1998; TARDIF, 2002a). Tais saberes, construídos no interior da prática escolar e referindo-se à atividade educativa dentro de um campo disciplinar específico, são elementos importantes a serem também considerados nos estudos sobre as disciplinas escolares.

Assim, no que se segue, vamos discutir as idéias de alguns autores sobre as indagações anteriormente levantadas, retirando contribuições para a análise de um elemento fundamental na seqüência do nosso trabalho: as relações entre os saberes veiculados no processo de formação do professor de matemática na licenciatura e os saberes envolvidos nas questões que se colocam no exercício de sua prática profissional na escola básica.

Matemática escolar: nem matemática científica didatizada nem construção autônoma da escola

Yves Chevallard, em sua obra *La Transposicion Didáctica*, analisa o fenômeno da passagem do saber científico — ou saber sábio[2], como o autor faz questão de nomeá-lo — para o saber ensinado:

> [...] um conteúdo de saber que é designado como saber a ensinar sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre <u>os objetos de ensino</u>. O "trabalho" que transforma um saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado <u>transposição didática</u> (CHEVALLARD, 1991, p. 45, grifos e aspas como no original)*

Para Chevallard, com o tempo, o saber ensinado desgasta-se — um desgaste biológico ou moral. O biológico se refere ao eventual afastamento das normas do saber sábio e o moral a

[2] No original, em francês, *savoir savant*.

uma proximidade "perigosa" em relação ao saber "banalizado", isto é, de domínio público (Ibid, p.30). Nos dois casos se evidenciaria uma incompatibilidade do sistema de ensino com a sociedade e, para restabelecer a compatibilidade, seria necessário instaurar-se uma nova "corrente de saber" proveniente do saber sábio: "*um novo aporte encurta a distância em relação ao saber sábio, o dos especialistas; [...] <u>Aí se encontra a origem do processo de transposição didática</u>*". (CHEVALLARD, 1991, p. 31, grifo nosso)*.

O fenômeno da transposição didática é inerente a qualquer processo de ensino e essa é uma reflexão fundamental que Chevallard nos propõe. Independentemente do fato de que o saber a ser ensinado provenha ou não de um corpo científico de conhecimentos, o trabalho de ensinar requer a construção de uma percepção particular e específica do objeto de ensino. Mas o problema, no nosso modo de ver, é que, na sua noção de transposição didática, Chevallard toma a matemática científica como a fonte privilegiada de saber à qual o sistema escolar sempre recorre para recompatibilizar-se com a sociedade. E toma, também, esse saber científico como a referência última que permitiria à comunidade dos matemáticos desautorizar o objeto de ensino que não seja considerado "*suficientemente próximo ao saber sábio*" (CHEVALLARD, 1991, p. 30)*.

Assim, a matemática escolar que resulta do processo de transposição didática se constituiria essencialmente através da adaptação, à escola, dos conceitos, métodos e técnicas da matemática científica — e, portanto, ainda que indiretamente, das suas normas e dos seus valores. Além disso, tal processo de adaptação estaria sujeito a uma "vigilância epistemológica" (termo do próprio Chevallard) que não permitiria "desvios" em relação ao conhecimento matemático científico. Nesse sentido as análises de Chevallard, embora penetrem de forma rica e profunda em certos aspectos do processo de ensino de matemática na escola, padeceriam do tipo de limitação apontado por Young, qual seja, considerar a matemática escolar como fundamentalmente "dada" (pela matemática científica), ao invés de "a ser explicada" (em termos de seus múltiplos condicionantes).

Por outro lado, André Chervel, ao propor algumas reflexões sobre o campo de pesquisa constituído pela história das disciplinas escolares, tece fortes críticas à visão de que estas sejam meras vulgarizações, para um público jovem, das ciências de referência, ou seja, daqueles *"conhecimentos que não se lhe podem apresentar em sua total pureza e integridade"* (CHERVEL, 1990, p.181). Segundo esse autor, decorre ainda de tal concepção das disciplinas escolares que o papel da pedagogia é apenas o de "lubrificante" do processo de vulgarização acima referido.

Para defender uma concepção radicalmente contrária, a de que as disciplinas escolares são "*[...] entidades sui generis, [...], independentes, numa certa medida, de toda realidade cultural exterior à escola, e desfrutando de uma organização, de uma economia interna e de uma eficácia que elas não parecem dever a nada além delas mesmas, quer dizer, à sua própria história*" (CHERVEL, 1990, p.180) o autor se fundamenta em uma análise da constituição e do desenvolvimento histórico da teoria gramatical ensinada na escola francesa, concluindo do seu estudo que *"ela foi historicamente criada pela própria escola, na escola e para a escola"* (CHERVEL, 1990, p.181).

Quanto à relação das disciplinas escolares com a pedagogia, a visão de Chervel é a de que esta é um dos constituintes das disciplinas, parte do seu próprio conteúdo:

> [...] a gramática escolar não é mais do que um método pedagógico de aquisição da ortografia; a análise gramatical não passaria de um método pedagógico de assimilação da gramática, e assim por diante. Excluir a pedagogia do estudo dos conteúdos é condenar-se a nada compreender do funcionamento real dos ensinos. A pedagogia, longe de ser um lubrificante espalhado sobre o mecanismo, não é senão um elemento desse mecanismo, aquele que transforma os ensinos em aprendizagens. (CHERVEL, 1990, p. 182)

Aqui se manifesta um elemento importante da concepção geral de disciplina escolar desse autor: ela não pode ser vista meramente como uma "matéria" a ser ensinada, isto é, uma lista de "conteúdos" que se constitui anteriormente ao processo de ensino escolar. Ao contrário, ela é concebida como parte integrante do "mecanismo" de ensino e se constitui historicamente em conjunção com a prática e a cultura escolar. Nesse sentido, ele descreve a disciplina escolar como uma

> [...] combinação, em proporções variáveis, conforme o caso, de vários constituintes: um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e de motivação e um aparelho docimológico, os quais, em cada estado da disciplina, funcionam, evidentemente, em estreita colaboração, do mesmo modo que cada um deles está, à sua maneira, em ligação direta com as finalidades. (CHERVEL, 1990, p. 207)

Para nós, que temos em perspectiva o estudo do processo de formação do professor no curso de licenciatura em matemática — focalizando especificamente as relações entre os conhecimentos veiculados nesse processo e as questões que se colocam na prática docente na escola — nenhuma das duas concepções comentadas acima se mostra satisfatória.

Na noção de matemática escolar que deriva do processo de transposição didática de Chevallard, embora se conceda algum espaço de autonomia e de produção de conhecimento à prática do professor na sala de aula da escola[3], há, ao que nos parece, um hiper-dimensionamento do saber científico, reduzindo-se a matemática escolar a uma espécie de resultado do processo de didatização da matemática científica. Já Chervel, ao mesmo tempo em que abre o caminho para se conceber a matemática escolar como uma construção fundamentalmente associada à prática e à cultura escolar, parece, por outro lado, fechar as portas à consideração dos múltiplos mecanismos e processos que condicionam essa construção a partir do exterior do espaço estritamente escolar[4].

Para os propósitos do nosso estudo, torna-se necessário buscar um referencial de análise que incorpore à matemática escolar outros conhecimentos associados ao processo de educação escolar em matemática. Tal referencial nos permitirá repensar, de forma menos dicotomizada e mais operacional, as relações entre o saber científico, o saber escolar e as questões postas pela prática profissional docente na escola básica. Nesse sentido, consideraremos uma forma de pensar a matemática escolar que não se refira tão estritamente às práticas efetivas que se desenvolvem no interior da escola, como sinaliza Chervel, e nem se reduza a uma adaptação da matemática científica ao processo de escolarização básica, como sugere Chevallard.

Na seqüência deste trabalho, usaremos as expressões *matemática científica* e *matemática acadêmica* como sinônimos que se referem à matemática como um corpo científico de conhecimentos, segundo a produzem e a percebem os matemáticos profissionais. E *matemática escolar* referir-se-á ao conjunto dos saberes "validados", associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em matemática. Com essa formulação, a matemática escolar inclui tanto saberes produzidos e mobilizados pelos professores de matemática em sua ação pedagógica na sala de aula da escola, como também resultados de pesquisas que se referem à aprendizagem e ao ensino escolar de conceitos matemáticos, técnicas, processos etc. Dessa forma distanciamo-nos, em certa medida, de uma concepção de matemática escolar que a identifica com uma disciplina "ensinada" na escola, para tomá-la como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente.

---

[3] Espaço restrito e regulado a partir do exterior da prática. Observe-se o trecho: [...] *Assim, quando o docente diz: "hoje lhes mostrei* $a^2 - b^2$*", o didata se perguntará: "qual é o objeto de ensino que o docente rotula de* $a^2 - b^2$*? Que relações estabelece com o objeto matemático a que implicitamente se refere?" Ali onde o docente vê identidade entre objeto a ser ensinado e objeto de ensino modelado pela transposição didática, o didata levanta a questão da adequação: não estará havendo uma modificação do objeto?* (CHEVALLARD, 1991 p. 49, aspas no original)

[4] Para uma crítica das visões de Chervel e Chevallard sobre as relações entre saber científico e saber escolar a partir de outra perspectiva — que procura situar a história da matemática escolar no interior de um campo mais abrangente onde se conformaria uma "nova história da matemática" — veja-se VALENTE, 2001.

A constituição da matemática escolar a partir de “saberes validados” merece um comentário de esclarecimento. A exigência de validação impõe restrições ao corpo de conhecimentos que integram a matemática escolar. Seria impraticável, por razões óbvias, trabalhar com uma noção de matemática escolar que incluísse todo “saber” associado à educação matemática na escola, independente de qualquer tipo de escrutínio público. Por exemplo, Gauthier et al. (1998) denominam “saberes experienciais” certos conhecimentos profissionais que se desenvolvem a partir da experiência do indivíduo na atividade docente escolar. Uma parte dos saberes experienciais, de acordo com os estudos desses autores, são privados, circunstanciais, provisórios, entre outras características (ver também TARDIF, 2002c). Enquanto esses saberes não são recolhidos, descritos e submetidos a algum tipo de validação pública, não nos parece conveniente integrá-los a um corpo de conhecimentos a ser utilizado como referência de análise num estudo sobre a formação do professor como o que desenvolvemos neste trabalho.

Um outro aspecto a ser comentado em relação à nossa concepção de matemática escolar refere-se à questão de decidir se um determinado conhecimento está ou não “associado” especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em matemática. Em termos da nossa formulação, consideramos que um conhecimento está associado de modo específico a esse processo se a associação for reconhecida consensualmente (um exemplo seria a propriedade comutativa da adição de naturais) ou indicada por resultados de pesquisas (por exemplo, os diferentes significados de número racional. Cf. Capítulo III). Reafirmamos, no entanto, que para nós os resultados de pesquisas científicas não se qualificam como “guias” para a ação dentro da prática educativa escolar. Essa questão, já comentada na Introdução, será retomada mais adiante, ainda neste capítulo.

De posse dessa formulação da noção de matemática escolar, passamos a explicitar e comentar alguns aspectos distintivos desta em relação à matemática acadêmica, a fim de situar eventualmente certos saberes e “não-saberes”, associados à prática docente escolar em matemática, em relação ao processo de formação profissional na licenciatura.

Matemática escolar e matemática acadêmica: uma palavra em comum e diferenças substantivas

O fenômeno social da produção da matemática escolar parece ultrapassar tanto a noção de transposição didática regulada pela comunidade científica, como também a idéia de que as disciplinas escolares sejam construções endógenas que não devam nada a ninguém. Sem desconsiderar toda a trama de condicionamentos sociais e culturais que se prendem a qualquer construção dessa natureza, entendemos a matemática acadêmica e a matemática escolar como referenciadas, *em última instância*, nas condições em que se realizam as práticas respectivas do matemático e do professor de matemática da escola. Levanta-se então, a seguinte questão: o que caracteriza essas práticas profissionais?

A prática do matemático tem como uma de suas características mais importantes, a produção de resultados originais "de fronteira". Os tipos de objetos com os quais trabalha a matemática científica contemporânea, os níveis de abstração em que se colocam as questões em todos os seus ramos, atualmente, e a busca permanente de máxima generalidade nos resultados fazem com que a ênfase nas estruturas abstratas, o processo rigorosamente lógico-dedutivo e a extrema precisão de linguagem sejam, entre outros, valores essenciais associados à visão que o matemático profissional constrói do conhecimento matemático. Observe-se o comentário de Dieudonné (1990) que mostra a interligação de todos os elementos e valores referidos acima:

> A importância dessa linguagem [da teoria dos conjuntos, esclarecimento nosso] é que ela permite aos matemáticos, a partir dos últimos anos do século XIX, falar de relações entre objetos cuja natureza é *completamente indeterminada*: são pura e simplesmente elementos de conjuntos considerados como objetos primitivos de uma teoria axiomática. Uma *estrutura* será determinada por um certo número de tais relações "primitivas", submetidas a um sistema de axiomas; a teoria de uma tal estrutura será o desenvolvimento das propriedades que são apenas conseqüências dos seus axiomas, e não dependem da natureza dos objetos matemáticos que podem verificar esses axiomas. (DIEUDONNÉ, 1990, p. 149-150, aspas e itálicos como no original)

Por sua vez, a prática do professor de matemática da escola básica desenvolve-se num contexto *educativo*, o que coloca a necessidade de uma visão fundamentalmente diferente. Nesse caso, a natureza dos objetos matemáticos estudados está profundamente associada — e, muitas vezes, é o que dá sentido — aos princípios, às definições, às justificativas e argumentações, aos métodos e aos resultados da matemática escolar. Um exemplo que ilustra essa diferença de percepção dos conceitos matemáticos a partir das especificidades desses dois contextos de trabalho, pode ser observado no seguinte relato:

> O doutor Hung-Hsi Wu da Universidade da Califórnia em Berkeley, que também foi um matemático chave na reescrita da grade curricular, escreveu um artigo descrevendo sua avaliação da revisão dos padrões curriculares. Ele considera que os padrões curriculares originais são um documento refletido, evidenciando que se teve cuidado no estabelecimento de metas [9]. Porém, no geral, Wu focou seu artigo sobre a importância da "matemática certa". Ele achou que havia muitos erros que precisavam ser corrigidos e tópicos que tinham sido omitidos e achou que havia uma mistura ambígua de assertivas pedagógicas com assertivas

> sobre o conteúdo. Por exemplo, Wu objetou fortemente contra um padrão geométrico para a quarta série que dizia: "Os alunos entendem e usam a relação entre os conceitos de perímetro e área e os relacionam a suas respectivas fórmulas". Ele argumenta que o problema é que "não há relação alguma entre perímetro e área ou entre volume e superfície, a menos que se trate da desigualdade isoperimétrica. Entretanto, esta seria completamente inadequada para alunos desse nível". Sobre tais erros, assim percebidos, Wu usa linguagem forte: "Eu lamento muito dizer que essa espécie de padrões curriculares matemáticos levaria à deterioração da educação matemática por um longo período".
>
> Embora esse padrão possa constituir um erro aos olhos de um matemático pesquisador, uma professora de quarta série explicou-nos como ela o interpreta: "Queremos que os alunos entendam, em seu nível, que perímetro *anda em volta* e a área *recobre* e que sejam capazes de explicar, por exemplo, no caso de um retângulo, porque $2 \times C + 2 \times L$ pode ser entendido como medindo o *andar em volta* enquanto $C \times L$ conta o recobrimento (digamos, por telhas quadradas)". Pensamos que uma professora pode aprender mais sobre esse tópico a partir dos esclarecimentos e exemplos (eliminados pelo Conselho Estadual de Educação) nos padrões curriculares originais. Constatamos assim um sério rompimento de comunicação entre os membros da comunidade matemática, que valorizam construções abstratas precisas, e os membros da comunidade de educação do ensino médio, que aprenderam a interpretar as apresentações informais das idéias que as crianças usam à medida que desenvolvem o pensamento matemático. (BECKER; JACOB, 2000, p. 531, aspas no original, tradução de Baldino R.R.)

Estudos de natureza cognitiva também apontam diferenças importantes que são observadas quando se percebe um determinado conceito como um objeto de trabalho dentro da matemática científica ou, sob outra perspectiva, como objeto de ensino dentro da prática pedagógica associada à matemática escolar. Por exemplo, Sfard (1991) desenvolve uma análise do processo de abstração na matemática, relacionando dois aspectos de um mesmo conceito: o aspecto operacional (em que o conceito é visto como processo) e o estrutural (o conceito como objeto). Para ela, muitos conceitos matemáticos apresentam, dual e complementarmente, os aspectos operacional e estrutural, sendo que, no processo de formação do conceito, o aspecto operacional seria precedente e, portanto, uma base sobre a qual se construiria a sua dimensão estrutural. O nível de abstração mais elevado — correspondente ao aspecto estrutural — seria atingido através das fases de interiorização (em que se modelam mentalmente as ações correspondentes ao aspecto operacional do conceito), de condensação (em que as ações interiorizadas são coordenadas de modo que o processo é captado como um todo) e de reificação (em que o processo se transforma finalmente em objeto). Sfard fornece vários exemplos de conceitos básicos da matemática escolar — números naturais, racionais, negativos, função — que teriam passado por processos de interiorização e condensação até serem reificados como objetos matemáticos. E cita resultados de algumas de suas pesquisas, que reforçariam a tese de que, no processo de aprendizagem, o aspecto operacional do conceito precede o estrutural. Uma implicação dessa tese seria a insuficiência e inadequação, para a educação escolar, de uma visão do conhecimento matemático como um sistema formal-dedutivo, própria da matemática científica, uma vez que as definições formais representam os conceitos já no seu aspecto estrutural, ocultando, de certa forma, as etapas de interiorização e de condensação que, em princípio, facilitariam a construção da reificação.

Esquemas próximos dos de Sfard são trabalhados por Dubinsky (1991). Seguindo Piaget, Dubinsky distingue três tipos de abstração: a empírica, a pseudo-empírica e a reflexiva. A primeira consistiria de abstrações a partir de propriedades dos objetos, a segunda de abstrações a partir de ações do sujeito sobre o objeto e a última, a abstração reflexiva, a partir da interiorização e coordenação dessas ações num processo que leva à construção de um novo objeto (diz-se que ele é, então, encapsulado; nos termos de Sfard, os elementos processuais do aspecto operacional são percebidos como "coisa", reificados). Dubinsky prossegue, então, descrevendo como a formação de certos conceitos matemáticos pode estar conectada com as construções mentais descritas no processo de abstração reflexiva. Ao analisar, entre outros exemplos, as idéias envolvidas na prova por indução, Dubinsky identifica pontos no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem em que, se nos restringirmos a uma visão estritamente formal da questão, podemos ser levados a ignorar ou minimizar dificuldades específicas que são importantes do ponto de vista cognitivo:

> Retornando agora, à construção da prova por indução, apresentamos um <u>exemplo de uma etapa que nossa pesquisa aponta como oferecendo sérias dificuldades cognitivas ao aluno, enquanto, do ponto de vista estritamente matemático, não há nem mesmo uma etapa a ser considerada</u>. [...] Estamos nos referindo à noção de que, numa prova por indução não se prova a tese diretamente, mas a implicação entre duas proposições derivadas dela. [...] Seja P a proposição a ser provada e seja $Q = \{P(n) \Rightarrow P(n+1)\}$. Então, de um ponto de vista matemático não há nada de novo em Q, isto é, uma vez que se entende P então, como um caso especial, entende-se Q. Entretanto, como já observamos, com os estudantes as coisas não se passam desta maneira, isto é, este não é o caso, do ponto de vista cognitivo. Em primeiro lugar, proposições do tipo Q são as mais difíceis para os alunos e são, geralmente, as últimas a serem encapsuladas. Além disso, há uma diferença entre construir P(n) a partir de uma dada proposição e construir Q a partir de P. Essa é que é a etapa a ser ultrapassada. Se alguma sutileza há aqui, então se explica a dificuldade que os estudantes têm precisamente neste ponto (DUBINSKY, 1991, p. 112-113, grifo nosso).*

Para além das questões estritamente cognitivas, um aspecto geral a partir do qual também se podem perceber certas distinções importantes entre a matemática acadêmica e a matemática escolar, diz respeito ao papel e aos significados das definições e das demonstrações, em cada um desses campos do conhecimento matemático. Embora em ambos exista, certamente, a necessidade de bem caracterizar os respectivos objetos, de validar as afirmações a eles referidas e de explicar as razões pelas quais certos fatos são aceitos como verdadeiros e outros não, o papel que desempenham, de modo geral, as definições e as provas, em cada um dos contextos é, todavia, bastante diferente.

No caso da matemática científica, devido à sua estruturação axiomática, todas as provas se desenvolvem apoiadas nas definições e nos teoremas anteriormente estabelecidos (e também, evidentemente, nos postulados e conceitos primitivos). Isso exige uma formulação extremamente precisa para as definições, pois ambigüidades na caracterização de um objeto matemático podem produzir contradições na teoria. Dieudonné (1990) cita e comenta alguns exemplos disso e reproduzimos aqui suas observações sobre o caso da característica de Euler-Poincaré dos poliedros.

> Nos seus *Elementos,* Euclides apenas definiu os prismas, as pirâmides e os poliedros regulares. Em 1750, Euler fala de poliedros sem os definir, e afirma que, se s, a e f são os números de vértices, de arestas e de faces de um poliedro P, o número $\chi(P) = s - a + f$ é sempre igual a 2. A sua demonstração (noutros aspectos insuficiente) leva a crer que ele se limitou aos poliedros convexos. [...] No decurso do século XIX, não apenas o teorema de Euler para poliedros convexos foi corretamente demonstrado, como também uma dúzia de matemáticos se preocupou em calcular o número $\chi(P)$ para *todos* os poliedros. A infelicidade é que, ao que eu saiba, *nenhum* deles foi capaz de dar uma definição *geral* daquilo que se deve entender por “poliedro”; ela só surge com Poincaré, em 1895. Antes, cada um dos matemáticos em questão pensava ter dado uma tal definição conforme com a sua “intuição” pessoal daquilo que deveria ser um “poliedro”; pouco tempo depois, um outro matemático exibia figuras que também eram “poliedros”, mas não satisfaziam as condições que o seu predecessor tinha fixado; e, naturalmente, os valores de $\chi(P)$ dependiam da “definição” escolhida, se bem que parecesse que nunca se poderia chegar a uma expressão geral de $\chi(P)$ que fosse “rigorosa”!
>
> É fácil de concluir! Só pode haver demonstração “rigorosa” dentro de uma teoria axiomática, onde os objetos e relações “primitivas” foram especificados, e os axiomas que os ligam enumerados de modo exaustivo; [...] falta de rigor significa exatamente falta de precisão. [...] é claro que não está excluído que no futuro haja matemáticos que queiram desenvolver uma teoria sem lhe dar uma forma axiomática; até que eles próprios ou outros o consigam fazer, a teoria arriscar-se-á a ser considerada como “não rigorosa” pela comunidade matemática. (DIEUDONNÉ, 1990, p. 248, aspas e itálicos como no original)

Para a matemática científica, as definições formais e as demonstrações rigorosas são elementos importantes tanto durante o processo de conformação da teoria — nos momentos em que a comunidade avalia e eventualmente acata um resultado novo, garantindo-se, então, a sua incorporação ao conjunto daqueles já aceitos como válidos — quanto no processo de apresentação sistematizada da teoria já elaborada.

No caso da matemática escolar, dois elementos fundamentais estão permanentemente em cena, os quais modificam significativamente o papel das definições e das provas. O primeiro elemento se refere ao fato de que a "validade" dos resultados matemáticos a serem discutidos no processo de escolarização básica não está posta em dúvida, ao contrário, já está garantida, a priori, pela própria matemática acadêmica. Para um exemplo ilustrativo, retomamos o trecho de Dieudonné, citado acima, e observamos que, para a matemática científica, a decisão sobre se o número $\chi(P)$ era ou não igual a 2 para todo poliedro convexo manteve-se como uma questão aberta até surgir uma demonstração considerada correta do teorema de Euler (como relata Dieudonné, a demonstração dada pelo próprio Euler, tinha falhas). Esse tipo de questão não está posta para a matemática escolar. Por exemplo, o produto de dois números naturais é comutativo, não há nenhuma dúvida quanto a isso. O problema que se coloca, no ensino escolar, não é o de demonstrar um fato como esse rigorosamente, a partir de definições precisas e de resultados já estabelecidos, como no processo axiomático científico.

A questão fundamental para a matemática escolar — este é o segundo elemento, sempre presente no cenário educativo — refere-se à aprendizagem e, portanto, ao desenvolvimento de uma prática pedagógica visando à *compreensão* do fato, à construção de justificativas que permitam ao aluno utilizá-lo de maneira coerente e conveniente na sua vida escolar e extra-escolar. Há uma diferença significativa entre alinhar argumentos logicamente irrefutáveis que garantam a validade de um resultado a partir de postulados, definições e conceitos primitivos da teoria e, por outro lado, promover entre os alunos da escola o desenvolvimento de uma convicção profunda a respeito da validade deste mesmo resultado. Morris Kline utiliza uma frase de Samuel Johnson em que este alude, de forma irônica, à diferença a que estamos nos referindo: "*Eu lhe forneci um argumento, mas não estou obrigado a lhe fornecer uma compreensão*" (JOHNSON, apud KLINE, 1974, p. 5)*. Em outras situações, poder-se-ia inverter a frase de Johnson e dizer: "*eu já tenho uma compreensão, não necessito de um argumento"*, como, talvez, fizesse um aluno da escola diante de uma demonstração matematicamente correta do fato de que não há número inteiro entre 0 e 1 (essa demonstração é feita em Birkoff e MacLane, 1980, p. 11; White, 1973, p. 24-

25; Monteiro, 1969, p. 75 e proposta como exercício em Lima, 1989, p. 9). Neste caso, é claro que, para a matemática escolar, não faz nem sentido argumentar: qualquer tipo de argumentação teria que pressupor a aceitação, sem provas, de afirmações mais complexas e menos evidentes do que a própria tese a ser provada. No entanto, para a matemática acadêmica, a demonstração faz sentido: entre outros objetivos possíveis, ela visaria exemplificar e explicitar, para o futuro matemático em processo de formação, essa espécie de "suspensão de certeza" a que devem ser submetidos todos os enunciados — até um como esse, impensável de se colocar em dúvida dentro da cultura escolar — para que se processe rigorosamente esse tipo de organização lógica da matemática científica que é a axiomática.

No caso da educação matemática escolar, o desenvolvimento e o julgamento da validade das argumentações passa, muitas vezes, por um filtro constituído de um conjunto de considerações de natureza didático-pedagógica e pela elaboração de formas de convencimento próprias da comunidade escolar. Simon (1996), num artigo em que descreve e analisa um tipo de raciocínio que ele denomina "*transformational reasoning*", oferece exemplos interessantes de demonstrações elaboradas por alunos da escola as quais, embora não possam ser consideradas rigorosas no sentido da matemática acadêmica, também não podem ser vistas, sob a ótica da matemática escolar, como incorretas ou incompletas. Vejamos alguns dos exemplos apresentados por Simon, coletados em sala de aula nos Estados Unidos:

Exemplo 1

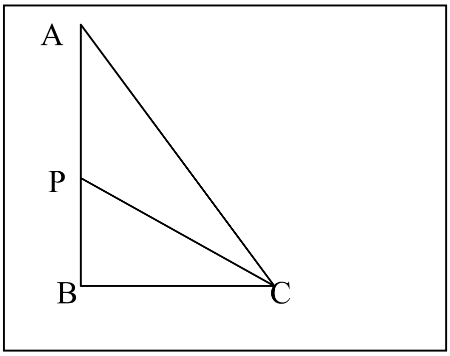
> Mary é uma estudante do décimo ano [*o que corresponderia, no Brasil, à segunda série do ensino médio, em termos de anos de escolaridade*], numa aula de Geometria. Os alunos estavam explorando idéias a respeito de triângulos isósceles com um determinado software e ainda não tinham chegado ao teorema que afirma a igualdade dos ângulos "da base", se o triângulo tem dois lados iguais. Trava-se, então, o seguinte diálogo entre a senhora Goodhue, a professora, e Mary:
>
> Goodhue: Mary, você poderia construir um triângulo isósceles, especificando dois ângulos e o lado que liga os vértices desses ângulos?
>
> Mary diz que sim e desenha os dois ângulos iguais. A professora lhe pede para explicar.
>
> Mary: eu sei que se duas pessoas caminharem, a partir das extremidades do lado e em direções que fazem ângulos iguais com o lado, quando elas se encontrarem terão andado a mesma distância.
>
> Simon (que assistia à aula): O que aconteceria se a pessoa da esquerda caminhasse fazendo um ângulo menor do que a da direita?
>
> Mary (sem nenhuma hesitação): Essa pessoa teria andado mais que a da direita, quando elas se encontrassem. (SIMON, 1996, p. 199)*

Simon, em seguida, comenta a forma com que Mary lidou com a questão que lhe foi proposta pela professora:

> Neste exemplo, a senhora Goodhue tinha antecipado que os alunos gerariam vários triângulos isósceles e notariam um padrão (raciocínio indutivo): que os ângulos da base seriam iguais. Isto levaria à conjectura de que tal padrão seria verdadeiro para todos os triângulos isósceles e criar-se-ia a necessidade de uma prova dedutiva. [...] Mary foi capaz de ver um triângulo isósceles, não como uma figura estática de dimensões particulares, mas, ao contrário, como resultado de um processo dinâmico que gera triângulos a partir das extremidades de um segmento de reta. O seu modelo mental dinâmico permitiu a ela perceber não só a relação entre os ângulos da base de um triângulo isósceles, mas também raciocinar a respeito da relação entre os tamanhos dos outros lados do triângulo se os ângulos da base são diferentes. Devido à natureza do seu raciocínio essas duas idéias foram conectadas: o triângulo isósceles era um caso particular de uma compreensão mais geral a respeito dos ângulos e lados correspondentes em um triângulo. (SIMON, 1996, p.199, grifo nosso)*

Exemplo 2

> Considere o seguinte problema: O triângulo ABC tem um ângulo reto no vértice B. P é um ponto sobre o lado AB, situado entre A e B. Que tipo de comparação (maior ou menor) se pode estabelecer entre as somas de segmentos (AP + PC) e (AB + BC)? Veja a figura abaixo.



> Pode-se provar, dedutivamente, que AP + PC é menor que AB + BC. [...] Mas considere a forma como Sam raciocinou:
>
> "O ponto A é a minha casa e o ponto C é a minha escola. O interior do triângulo ABC é a mata. Normalmente eu caminho da minha casa (A) até a esquina (B), viro à esquerda e caminho até a escola (C). Algumas vezes, quando estou indo em direção a B, eu corto por dentro da mata (a partir de um ponto P). Eu sei que quando passo por dentro da mata a caminhada é menor. Sei também que, quanto antes (mais perto de A) eu entrar para a mata, menos tenho que andar."
>
> Observe-se, neste caso também, que a última frase de Sam lhe permite validar uma afirmação que é mais complexa e mais abrangente do que a que foi proposta no problema. (SIMON, 1996, p. 200-201)*

Esses exemplos reforçam o argumento a favor da idéia de que, na matemática escolar, a prova dedutiva rigorosa não é a única forma aceitável de demonstração. As justificativas menos formais, mais "livres", que se desenvolvem tomando como postulados e elementos primitivos tácitos certos conhecimentos provenientes da vida cotidiana — já que não se coloca a necessidade de uma seleção rigorosamente *econômica* desses elementos, como na axiomática científica — não apenas podem ser aceitas, mas levar, como vimos nesses dois exemplos, a uma compreensão mais aprofundada das relações matemáticas em discussão. Outro exemplo que pode ser citado é o da utilização de dobraduras em papel para a verificação de certos fatos da geometria. Esses tipos de justificativas, por suas características de proximidade maior com as elaborações dos próprios alunos, podem se constituir, muitas vezes, em argumentações mais convincentes, dentro da comunidade escolar, do que as demonstrações formais. De fato, vários estudos relatam que, de modo geral, os alunos não se sentem efetivamente convencidos pelas provas dedutivas formais (SCHOENFELD, 1989; CHAZAN, 1993; VINNER, 1993; SIMPSON, 1994).

Por certo, argumentações de tipo menos formal não estão isentas de complicações e questionamentos, dentro do trabalho pedagógico na escola básica. Exemplos de dificuldades a serem contornadas seriam:

- a possibilidade de estímulo a um relaxamento exagerado de modo a se fazer desapercebida a utilização de circularidade lógica (algumas vezes mais evidente, outras vezes sutil) nos raciocínios empregados nas justificativas;
- a possibilidade de promoção de uma compreensão equivocada do papel e da necessidade de validação dos resultados e das sentenças matemáticas no contexto da educação escolar básica (numa direção que, levada ao extremo, implicaria em "basta eu acreditar para ser considerado verdadeiro");
- a possibilidade de reforçar certas concepções inadequadas[5] do aluno, as quais podem, eventualmente, funcionar como obstáculos ao desenvolvimento do processo de aprendizagem da matemática escolar.

Observemos, no entanto, que grandes dificuldades também são detectadas quando se fica restrito, no trabalho docente escolar, às provas dedutivas nos moldes prescritos pela matemática científica (SIERSPINSKA, 1987; SCHOENFELD, 1989; TALL, 1992; CHAZAN, 1993). Um estudo de Douek (1999), por exemplo, aponta indícios de que subordinar o processo de construção de validações dos resultados matemáticos a requisitos

[5]*misconceptions* (ver GRAEBER, 1993).

que exigem um produto final (a demonstração) formalmente elaborado pode ter conseqüências negativas para muitos estudantes, no sentido de censurar acentuadamente o processo de desenvolvimento de tentativas (ensaio e erro) ou de busca de uma compreensão não formal do resultado a ser demonstrado. Isso foi constatado com estudantes já no estágio universitário de formação matemática.

Assim, a consideração das dificuldades que podem surgir ao se tratar com formas de demonstração mais flexíveis não sugere, necessariamente, o abandono desse tipo de postura em relação às argumentações e justificativas, no processo de educação matemática escolar. A sinalização é no sentido de que se desenvolva uma atitude permanentemente crítica, não apenas em relação às demonstrações formais, como também em relação a formas alternativas de argumentação.

Resumindo, enquanto o papel central das demonstrações na matemática acadêmica refere-se à inscrição de um determinado resultado entre os aceitos como verdadeiros pela comunidade científica, na educação matemática escolar a demonstração desempenha papéis essencialmente pedagógicos, tais como:

a) contribuir para a construção de uma visão da disciplina na qual os resultados não sejam tomados como dados arbitrários, mas elementos de saber socialmente construídos e aceitos como válidos através de negociação e argumentação;
b) desenvolver a capacidade de argumentação. Por exemplo, a atividade pedagógica que consiste em submeter à crítica dos outros alunos uma determinada cadeia de argumentos construída por um deles pode levar a um entendimento mais significativo do resultado que é objeto da argumentação; pode levar também a um refinamento dos próprios argumentos ou mesmo da linguagem utilizada para apresentá-los.

Se os papéis da demonstração na matemática escolar são dessa natureza, então os cânones não serão os mesmos da matemática científica. As relações com os conceitos primitivos, com as definições, com os axiomas, com a própria linguagem e simbolismo, com o rigor etc. são necessariamente muito mais flexíveis, pois não se trata de convencer a comunidade científica de que o fato em questão pode ser inscrito no conjunto de resultados matemáticos "verdadeiros". Trata-se, na matemática escolar, de uma negociação situada num contexto educativo, numa comunidade de aprendizes, cujo saber matemático encontra-se em desenvolvimento; numa comunidade que pode ser convencida, em certo momento, por determinados tipos de argumentos, mas não por outros; uma comunidade de aprendizes que vai reencontrar o fato que é objeto da argumentação em outros estágios do processo de escolarização, e que possui, num dado estágio, uma correspondente experiência de crítica etc.

Por outro lado, no que concerne às definições, Poincaré também se refere a uma diferença entre o rigor necessário e conveniente à matemática científica e aquilo que seria adequado a um processo educativo. Ele diz: "*o que é uma boa definição? Para o filósofo ou o cientista é uma que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e somente a eles. Mas em educação não é isso; é uma que pode ser entendida pelos alunos"*. (POINCARÉ, apud TALL, 1992, p. 496)*. Além do fato de que os alunos devem entender a definição, há que se considerar também a necessidade e a conveniência, no contexto escolar, de se apresentar uma definição formal para os objetos matemáticos em estudo. Enquanto na matemática científica a caracterização através da definição formal é central para o desenvolvimento rigoroso da teoria, na matemática escolar, muitas vezes, não é adequado utilizar-se esse tipo de identificação do objeto.

A tendência predominante na matemática científica, desde o século XIX, é a de se caracterizar os objetos matemáticos abstraindo-se a sua natureza e enfatizando-se as estruturas. Por exemplo, variedade diferenciável de dimensão n é "qualquer coisa" localmente difeomorfa ao espaço euclidiano R^n; o conjunto dos números reais é "qualquer" conjunto com a estrutura de corpo ordenado completo; número natural é um elemento de um conjunto de objetos que satisfaz aos axiomas de Peano etc. Esses valores, vigentes na matemática científica contemporânea, se desenvolvem a partir de suas necessidades específicas:

> Pouco a pouco desenha-se uma idéia geral que será precisada no século XX, a de estrutura na base de uma teoria matemática; é a conseqüência da constatação de que aquilo que desempenha o papel primordial numa teoria são as *relações* entre os objetos matemáticos que aí figuram, antes da *natureza* destes objetos, e que, em duas teorias diferentes, pode acontecer que haja relações que se exprimam da *mesma* maneira nas duas teorias; o sistema destas relações e as suas "correspondências" é uma mesma estrutura "subjacente" às duas teorias.
>
> Mostrar-se-á em exemplos acessíveis ao leitor como apareceram, ao longo de todo o século XIX, várias das grandes estruturas que estão na base das matemáticas do nosso tempo. <u>É necessário sublinhar que, em quase todos os casos, este aparecimento respondeu a uma *necessidade* para atacar com sucesso problemas herdados das matemáticas *clássicas* e não uma fantasia de matemáticos criando novas noções abstratas sem nenhuma finalidade precisa</u>. (DIEUDONNÉ, 1990, p.118, itálicos e aspas como no original, grifo nosso)

Podem citar-se inúmeros exemplos que mostram a inadequação de se transferir para a matemática escolar (didatizando-os ou não) esses valores da matemática científica: o conjunto dos números naturais, o conjunto dos números reais, a representação decimal dos números, a ordem no conjunto dos reais, os poliedros, as noções de área, volume, comprimento etc., não são objetos ou conceitos definidos formalmente no contexto da educação matemática escolar, seja porque fazê-lo não é considerado como pedagogicamente conveniente, seja porque não é vista como necessária essa maneira de caracterizar tais objetos. Observe-se, por exemplo, a definição formal de conjunto finito: "*um conjunto X diz-se finito quando é vazio ou então existem* $n \in N$ *e uma bijeção* $f: I_n \rightarrow X$" (LIMA, 1989, p.3). Para caracterizar formalmente uma noção, já tão incorporada ao senso comum como essa de um conjunto contendo um número finito de elementos, faz-se uso de uma outra noção, a de bijeção, menos familiar e mais técnica.

Uma outra categoria de exemplos mostra essa diferença fundamental a que se refere Poincaré, entre a caracterização científica de um determinado objeto matemático e uma apresentação descritiva, mais adequada ao tratamento pedagógico escolar. Trata-se do seguinte: define-se um objeto matemático como o limite de uma determinada seqüência; garante-se a existência desse limite através de métodos indiretos relacionados com certas características da seqüência e do espaço onde ela toma valores (por exemplo: em **R,** toda seqüência de Cauchy tem um limite); assegura-se, assim, que o objeto está bem definido. Mas definido dessa maneira, o que sabemos sobre esse objeto é que ele é o limite de uma determinada seqüência, mas não conhecemos esse limite, apenas sabemos que existe. Assim, ainda que, de acordo com a matemática científica, o objeto esteja tecnicamente bem definido, a definição não o descreve, não nos explica o que ele é, não nos permite apreendê-lo, apenas o *constitui* como objeto matemático. De um certo ponto de vista, esse processo pode criar a sensação de que estamos trocando seis por meia dúzia: definimos alguma coisa como sendo algo que não sabemos o que é. Para a matemática científica isso não apenas é razoável, como é mesmo importante, na medida em que resolve formalmente uma série de problemas de ordem técnica. Por exemplo, o comprimento de uma curva pode ser definido como o limite dos comprimentos de certas linhas poligonais que "aproximam" a curva, a velocidade instantânea é o limite de velocidades médias, a tangente a uma curva é o limite de secantes etc. Mas, do ponto de vista da prática educativa escolar, não faz sentido definir um conceito desconhecido identificando-o com algo que também é desconhecido. Esse tipo de definição parece ir de encontro à condição de Poincaré: ela pode facilmente <u>não ser</u> entendida pelos alunos.

Vemos, assim, que no caso das definições ocorre algo semelhante ao que já observamos a respeito das demonstrações: o forte condicionamento imposto à prática escolar pelas características próprias de um processo de *ensino* e de *aprendizagem* escolares tende a favorecer um modo mais flexível de caracterização dos objetos matemáticos, muitas vezes através de referências descritivas ou de imagens intuitivas, no lugar de definições formais. Mesmo porque a definição formal parece não desempenhar, entre os estudantes, um papel muito significativo no processo de construção do conceito a que ela se refere. Muitas vezes, nem mesmo é evocada de modo relevante, numa situação de resolução de problemas envolvendo o conceito. De fato, essas são algumas das conclusões de pesquisas empíricas que Vinner (1991) relata em *"O papel das definições no ensino e no aprendizado da matemática"*. Ele abre este artigo com a seguinte consideração: "*A definição cria um sério problema para o aprendizado da matemática. Ela representa, talvez mais do que qualquer outra coisa, <u>o conflito entre a estrutura da matemática, como a concebem os matemáticos profissionais, e os processos cognitivos de aquisição dos conceitos</u>"* (VINNER, 1991, p.65, grifo nosso)*. Esse conflito pode ser sintetizado nos seguintes termos: para a matemática científica a definição expressa *o que o objeto é* (como objeto matemático) enquanto, do ponto de vista do processo cognitivo, o conhecimento do objeto pelo estudante parece se desenvolver através da construção de uma espécie de mosaico de representações pessoais desse objeto (não necessariamente livre de inconsistências), o qual pode ou não conter a definição formal como uma de suas peças.

Do mesmo modo que nas demonstrações, também aqui podem surgir problemas com essa flexibilização no processo de caracterização dos objetos matemáticos operada, em determinadas circunstâncias, pela matemática escolar. Embora a formação de conceitos matemáticos esteja fortemente associada a um processo que envolve a construção de *imagens* diversificadas relativas a esse conceito (TALL; VINNER, 1981; VINNER, 1991), essas imagens, por sua vez, podem ser, para um mesmo indivíduo e para um mesmo conceito, contraditórias, limitadas, incompletas e mesmo, em certos aspectos, contrárias à definição formal do objeto a que se referem. Observa-se, além disso, que, numa dada situação, uma imagem apenas parcialmente adequada do conceito pode ser evocada e, mesmo assim, levar efetivamente a uma solução correta da questão ou do problema proposto. Esse fato costuma produzir um reforço daquela imagem particular e uma eventual resistência a percebê-la como limitada. Assim, o conjunto de imagens de um indivíduo a respeito de determinado conceito tende a ser "psicologicamente resistente", o que significa que a simples apresentação de uma definição rigorosa não é suficiente para provocar uma nova organização desse mosaico, com a conseqüente re-elaboração das imagens que estivessem em contradição com a definição formal dada. Vinner detecta esse fato em suas pesquisas com alunos da escola e, referindo-se a uma delas (relatada em Dreyfus e Vinner, 1989), faz o seguinte comentário:

> Alguns alunos, após estudarem o conceito moderno de função, dirão que uma função é uma correspondência entre dois conjuntos que associa a cada elemento do primeiro conjunto exatamente 1(um) elemento do segundo. Ao mesmo tempo, não admitirão que a

> correspondência que associa a cada número real não nulo o seu quadrado e ao zero o número (–1) é uma função. (VINNER, 1991, p. 70-71)*

A análise dessas dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem escolar, referidas à questão das definições e demonstrações, nos conduz a outro elemento distintivo da matemática escolar em relação à matemática científica. Trata-se das formas com que cada um desses campos do conhecimento matemático lida com a noção de erro.

Para a matemática científica, o erro é um fenômeno lógico que expressa uma contradição com algum fato já estabelecido como "verdadeiro". Para a matemática escolar, no entanto, é importante pensar o erro como um fenômeno psicológico que envolve aspectos diretamente relacionados ao desenvolvimento dos processos de ensino e de aprendizagem. Não é por acaso que, ao contrário do que acontece no campo da matemática acadêmica, uma abordagem de pesquisa em educação matemática é aquela que se dedica especificamente à análise de erros a partir de variadas perspectivas teóricas e metodológicas (RADATZ, 1980; CURY, 1995, 2003). Além disso, é bastante comum, em praticamente qualquer área da educação matemática, que um relato de pesquisa contenha, ainda que desempenhando um papel complementar no estudo, alguma referência a erros que estudantes da escola cometem ao lidar com o conceito ou processo que foi objeto da investigação.

Pesquisas indicam que os erros têm um caráter sistemático, são persistentes e, muito freqüentemente, resultam de experiências anteriores do aluno. Brousseau, por exemplo, ao apresentar a sua teoria dos obstáculos epistemológicos, afirma que alguns tipos de erros

> [...] não são somente conseqüência de ignorância, de incerteza ou do acaso [...], mas resultam de um conhecimento que foi bem sucedido anteriormente e que agora se revela falso ou inadequado. Erros desse tipo [...] constituem obstáculos. [...] O erro é um componente do significado de um conhecimento adquirido. (BROUSSEAU, 1997, p.82)*

Os erros, antes de se reduzirem simplesmente a uma manifestação de desconhecimento ou de fracasso em uma determinada tarefa, podem ser entendidos também como um elemento importante no processo de conhecer — de um ponto de vista didático-pedagógico-cognitivo — as relações entre os alunos e os saberes. Vergnaud, referindo-se ao erro a partir de uma perspectiva cognitivista, comenta essa questão da seguinte maneira:

> O erro é tão importante, do ponto de vista do papel do professor, quanto a boa resposta. Mas a interpretação dos erros e dos procedimentos dos alunos supõe que pesquisas sistemáticas sejam feitas para colocar os procedimentos de uns em relação com os outros e que os liguem às diferentes classes e subclasses de situações. O estudo psicológico não se limita ao estudo dos procedimentos; ele estuda igualmente as representações, seja através de inferências a partir dos procedimentos observados, seja considerando os diferentes sistemas de significantes utilizados

> pelo aluno (a linguagem corrente, os esquemas, a linguagem matemática etc.). (VERGNAUD, 1986, p. 9-10)

Assim, os estudos de erros podem ser vistos como parte importante dos saberes envolvidos na ação pedagógica do professor. Referindo-se simultaneamente ao aluno e ao saber a ensinar, esses estudos podem se constituir em peça fundamental no trabalho de planejamento e desenvolvimento das atividades de ensino escolar (MAURER, 1987; MOREN et al., 1992; DAVID; MACHADO, 1996). Marks (1990), numa proposta de reformulação do conceito de *conhecimento pedagógico do conteúdo*, originalmente desenvolvido por Shulman (1987), inclui o conhecimento sobre os erros dos alunos entre os componentes desse tipo de saber profissional dos professores. Baldino e Cabral (1999) comentam as relações entre a atitude pedagógica do professor diante do erro do aluno e o desenvolvimento do processo de produção de significados. Borasi (1985) também elabora uma percepção dos erros dos alunos como alavancas para o trabalho didático em sala de aula.

De um ponto de vista amplo, um aspecto relevante que o erro acaba colocando em discussão — e que importa fundamentalmente para a matemática escolar — é o processo de contradição dialética que se estabelece entre conhecimento "novo" e "antigo", no desenvolvimento da aprendizagem.

Se, por um lado, como afirma Brousseau, o conhecimento anterior do aluno pode servir de obstáculo para o avanço no aprendizado, é indiscutível que os processos de abstração e generalização se desenvolvem, essencialmente, em interação com esse conhecimento. Tais interações incluem desde adaptações de certos modelos a campos conceituais mais amplos até uma profunda reorganização da estrutura cognitiva com a acomodação de elementos ou aspectos essencialmente diferentes daqueles anteriormente conhecidos. Por exemplo, a noção de número real é construída na escola como resultado de uma seqüência de generalizações do conceito de número, desde os naturais até os racionais, passando pelos negativos e, finalmente, incluindo os irracionais. Ao longo desse processo, os conhecimentos anteriores vão atuar simultaneamente como suporte — na medida em que os exemplos conhecidos de conjuntos numéricos exibem algumas das propriedades que vão orientar o processo de ampliação e se estenderão ao novo campo mais amplo — e como fonte de conflito, no sentido de que há uma tendência a transferir para o novo campo algumas propriedades que são válidas apenas para o campo restrito que está sendo ampliado (ver, por exemplo, HART, 1981a). Desse ponto de vista, um entendimento mais profundo a respeito dos erros pode contribuir para que o professor situe mais claramente seus alunos nos diferentes estágios desse processo de desenvolvimento cognitivo.

Uma das vertentes da análise de erros associada diretamente às questões próprias da matemática escolar é a que estuda certos tipos de erros cujas características sugerem a internalização de um determinado conceito numa forma inadequada (*misconceptions*) e erros que se manifestam pela utilização de uma imagem conceitual desajustada à situação ou ao problema proposto.

Como já comentamos anteriormente, Tall e Vinner (1981) desenvolveram um estudo a respeito das representações que uma pessoa possui de um determinado conceito matemático, contrastando esse conjunto de imagens (*concept image*) com a definição formal do conceito (*concept definition*). Segundo eles, as imagens conceituais de um mesmo indivíduo não formam necessariamente um conjunto logicamente coerente e suficientemente completo de visões do conceito. Além de contradições internas que se desenvolvem entre partes componentes das imagens conceituais, haveria que se considerar ainda, como potencial fonte de erros numa dada situação, os possíveis conflitos entre essas partes e a definição formal. Conhecer e analisar as imagens dos alunos sobre determinado conceito seria importante no processo de ensino — constituindo, portanto, aspecto significativo do conhecimento matemático escolar — na medida em que essas imagens podem vir a se transformar, ao longo desse processo, tanto em obstáculos cognitivos como em germes de conhecimento novo e constituírem, sob qualquer dessas formas, um ponto de partida fundamental para o ensino.

Graeber (1993) descreve vários tipos de *misconceptions* prevalecentes entre alunos da escola, as quais induzem a erros ou limitações no uso de conceitos matemáticos em determinadas situações. Nesse mesmo artigo, Graeber analisa comparativamente cinco propostas para o trabalho em sala de aula, no sentido de promover a *mudança conceitual* (Bell; Brekke; Swan, 1987; Fuys; Geddes; Tischler, 1988; Flavell, 1977; Driver, 1987; Fishbein, 1987, apud GRAEBER, 1993, p. 223-228). Graeber observa sobre as propostas citadas que, embora não possam ser reduzidas umas às outras, todas essas formas de pensar o ensino e a aprendizagem a partir desse tipo de análise de erro sugerem o desenvolvimento de estratégias didáticas que busquem:

- tornar explícitas as concepções vigentes entre os alunos;
- trazer à tona os conflitos latentes entre as diferentes concepções;
- encorajar a reestruturação das idéias vigentes ou a construção de novas idéias, utilizando diferentes contextos para a sua aplicação;
- estimular a reflexão do estudante sobre a história de sua própria apreensão do conceito.

De outro ponto de vista, o erro pode também ilustrar dificuldades dos alunos em determinados tópicos da matemática escolar, levando a uma análise didático-pedagógica desses tópicos que, entre outros objetivos, contribua para a elaboração de estratégias didáticas potencialmente mais adequadas a cada estágio do processo de aprendizagem. Assim, visto também dessa perspectiva, o conhecimento a respeito dos erros dos alunos constitui uma forma valiosa de saber profissional docente. Como ilustração desse tipo de análise de erro, citamos o trabalho de K. Hart e sua equipe, do programa de pesquisa "Concepts in Secondary Mathematics and Science" (CSMS) que se desenvolveu na Inglaterra entre os anos 1974 e 1979, envolvendo testes escritos e entrevistas com cerca de dez mil alunos da escola secundária (11 a 16 anos). O objetivo amplo da pesquisa foi produzir uma hierarquização do conhecimento matemático trabalhado na escola secundária inglesa, a partir dos resultados dos testes aplicados. Assim, em cada um dos 10 tópicos testados, foram descritos estágios seqüenciados referindo-se a diferentes níveis de entendimento e correspondendo a uma ordem crescente de dificuldade apresentada pelos alunos. Num dos capítulos do livro em que se relatam os resultados, Hart analisa as implicações da pesquisa para o processo de ensino escolar da matemática. Para maiores detalhes, ver HART (1981b). Outro exemplo pode ser visto no trabalho de Vergnaud (1983), cujo objetivo central não é a análise de erros, mas que também utiliza e interpreta erros observados em testes escritos para comparar e situar, relativamente, certos componentes do campo conceitual referente às chamadas estruturas multiplicativas.

Em suma, pode-se dizer que os estudos sobre erros oferecem uma contribuição efetiva para a matemática escolar ao proporcionar condições para que o processo de ensino se desenvolva a partir dos conhecimentos e estratégias vigentes entre os estudantes, explorando didaticamente as suas eventuais limitações. Vê-se, assim, que o erro desempenha, na matemática escolar, um papel positivo importante, fornecendo elementos tanto para o planejamento como para a execução das atividades pedagógicas em sala de aula. Para a matemática científica, por outro lado, a função do erro, embora também muito importante, é essencialmente negativa, indicando (temporária ou definitivamente) a inadequação ou a falsidade de resultados, argumentações, formas de raciocínio etc.

Para encerrar essa seção, achamos conveniente ressaltar a operacionalidade da idéia de se reconhecer como distintos, embora inter-relacionados, os campos de saber correspondentes à matemática científica e à matemática escolar, tendo em vista a análise das relações entre a formação inicial na licenciatura e a prática docente na escola básica. A distinção é importante porque se a matemática escolar é concebida como mero subconjunto da matemática científica, a tendência é que a primeira seja reduzida à parte elementar da última, podendo se desenvolver uma desqualificação do conhecimento matemático escolar frente ao saber acadêmico. Nesse processo, a matemática escolar acaba se tornando apenas o componente fácil, simples e básico do complexo e sofisticado edifício da matemática científica.

Essa concepção pode implicar ainda a idéia de que não há muito sobre o que investigar, questionar ou refletir em se tratando da matemática escolar, dotando-a sutilmente, assim, da condição de conhecimento naturalmente "dado", dentro do processo de formação profissional do professor. De fato, um modelo muito utilizado nas análises dos saberes docentes é aquele em que se separa, no reservatório geral desses saberes profissionais, de um lado, o conhecimento disciplinar científico (no caso a matemática) e, de outro, os conhecimentos pedagógicos, curriculares, experienciais etc., associados ao ensino escolar da matemática. Uma conseqüência desse modelo é que o saber disciplinar, visto como parte da matemática científica, ocupa, ainda que de forma implícita ou subliminar, o lugar de saber fundante ou a razão de ser do trabalho docente, enquanto os outros vão se referir, essencialmente, ao desenvolvimento adequado das atividades didático-pedagógicas visando a *aquisição*, por parte dos alunos, desse núcleo fundamental de conhecimento. No limite, a educação matemática na escola acabaria se reduzindo ao ensino da matemática acadêmica, adaptada, evidentemente, às condições escolares. Uma formação matemática profunda para o professor se reduziria, então, ainda segundo essa concepção, ao domínio da matemática acadêmica não elementar, ou seja, à internalização dos seus valores, conceitos, técnicas, métodos, concepções, formas de pensamento etc. Desse modo, a matemática acadêmica e seus valores se estabelecem, de forma natural, como o centro de gravidade da formação profissional do professor, deslocando para a "periferia" desse processo as questões referentes à prática pedagógica efetiva na escola e à própria cultura escolar.

Quando, ao contrário, essa distinção entre matemática científica e matemática escolar é explicitamente admitida como fundamento dos estudos sobre a prática profissional, sobre os saberes profissionais e sobre o processo de formação do professor, resulta uma outra percepção da complexidade da matemática escolar. Nesse caso, ela se funda na complexidade da própria prática educativa escolar e não mais nos valores específicos da matemática científica.

Além disso, uma vez reconhecida a matemática escolar em sua especificidade, torna-se positivamente complicado analisar o conhecimento disciplinar isolado dos outros "componentes" dos saberes profissionais. Como procuraremos mostrar adiante, a matemática escolar se constitui como um amálgama de processos e saberes regulado por uma lógica que é específica do trabalho educativo, envolvendo uma multiplicidade de condicionantes. Desse modo, a consideração dessas duas faces do conhecimento matemático como distintas (e a conseqüente consideração do problema relativo ao papel da matemática escolar no currículo da licenciatura) pode contribuir também para introduzir uma referência mais direta e intrínseca da prática escolar no processo de formação inicial do professor.

É importante ressaltar, entretanto, que a distinção que propomos não institui uma oposição entre a matemática, vista como objeto de construção científico-acadêmica, e a matemática escolar, entendida esta como um amálgama de conhecimentos associados à educação escolar. Não se trata de regular negativamente a matemática escolar por uma espécie de necessidade intrínseca de rejeição sistemática dos valores da matemática acadêmica. Pelo contrário, ao tomar cada uma dessas faces do conhecimento matemático em suas especificidades, um leque de importantes questões que interessam diretamente à formação do professor perde o caráter de pressuposto natural e põe-se em discussão na condição de objeto ou problema de investigação teórica e de pesquisas empíricas. Alguns exemplos dessas questões podem ser citados: seria possível e/ou adequado, "transferir" para a matemática escolar certas práticas e posturas associadas ao trabalho científico de investigação na fronteira do conhecimento matemático acadêmico? Que tipo de re-contextualização essas transferências demandariam? Qual seria o dimensionamento adequado e os papéis respectivos da matemática científica e da matemática escolar no processo de formação matemática na licenciatura?

Matemática escolar: uma construção sob múltiplos condicionantes

Um dos condicionantes do processo de escolarização básica é o currículo prescrito. Goodson (1998), em uma análise histórica do desenvolvimento da noção de currículo, apresenta uma série de fatos que, em seu conjunto, convergem para sustentar uma concepção do currículo como uma construção social, ou seja, uma forma de expressão das lutas políticas, econômicas e socioculturais que se desenvolvem em torno do desenho e da execução do processo de escolarização básica. Nesse cenário de disputas figuram, entre os atores, grupos acadêmicos e profissionais que detêm e produzem saberes associados a esse processo.

Um exemplo histórico que mostra os desafios envolvidos na estruturação do currículo escolar pode ser visto no episódio referido por Goodson como "*controvérsia em torno do ensino da ciência*":

> O reverendo Dawes, por exemplo, abrira uma Escola Nacional da Sociedade em King's Semborne, na Inglaterra, em 1842. Nesta ele passou a lecionar ciências aplicadas "ao

entendimento das coisas comuns". [...] O conhecimento científico era, então, contextualizado na cultura e experiência dos filhos de pessoas comuns [...] Existe um indício claro nos relatórios governamentais contemporâneos de que a ciência das coisas comuns possibilitava um sucesso prático significativo nas salas de aula. Seria errôneo todavia supor que [...] a ciência de coisas comuns oferecia base para a definição de ciência escolar. Longe disso. Outras definições de ciência escolar estavam sendo pleiteadas por interesses poderosos. Lord Wrottesley presidia um comitê parlamentar da Associação Britânica para o Avanço das Ciências, que buscava o tipo mais adequado de educação científica para as classes superiores. Hodson (1987, p.36) afirmava que o relatório refletia crescente consciência de um sério problema, ou seja, que a educação científica em nível elementar estava se mostrando muito bem sucedida (...) ao passo que — era uma ameaça para a hierarquia social — o correspondente desenvolvimento não se verificava na classe superior.

Wrottesley aduzia um exemplo que confirmava os seus mais sérios temores:

... mancando, um menino pobre adiantou-se para dar sua resposta. Coxo e corcunda, rosto pálido e macilento, era nítida nele toda uma história de pobreza, com suas conseqüências... Mas ele deu uma resposta tão lúcida e inteligente que nas pessoas brotou um duplo sentimento: admiração, face aos talentos do menino; vexame, porque em alguém da mais baixa das classes inferiores fora encontrada, quanto a assuntos de interesse geral, mais informação do que em gente que, socialmente, era de classe muito superior. Seria uma situação nociva e perversa, esta de uma sociedade em que pessoas relativamente desprovidas das benesses da natureza fossem, quanto à capacidade intelectual, geralmente superiores aos que socialmente estão muito acima delas (citado por Hodson, 1987, p.36-37).

Logo após os comentários feitos por Wrottesley, em 1860, a ciência era excluída do currículo elementar. Quando finalmente reapareceu, uns vinte anos mais tarde, apresentava uma forma diferente da ciência das coisas comuns. Uma versão diluída da pura ciência de laboratório fora aceita como a visão correta de ciência...(GOODSON, 1998, p.89-91, aspas e itálicos no original)

Um outro exemplo, mais recente, pode ser observado no episódio chamado *guerra curricular da Califórnia*, em que a disputa se deu em torno das diretrizes curriculares para a educação básica naquele estado norte-americano, envolvendo a mídia, audiências públicas e centenas de milhões de dólares para o financiamento da produção de textos e materiais didáticos associados aos projetos vencedores (para maiores detalhes, veja-se a edição de fevereiro de 1999 da revista Phi Delta Kappan, especialmente dedicada a esse assunto).

Deve-se ponderar, entretanto, que esse estágio de prescrições expressa apenas um dos elementos condicionantes do processo de constituição dos saberes associados à prática profissional do professor de matemática da escola. É nessa dimensão prescrita da matemática escolar — mais objetivada, desenhada num terreno de disputas e conflitos, mas sob forte influência da comunidade matemática acadêmica, cuja legitimidade social para essa tarefa ainda se mostra incomparavelmente mais sólida do que aquela conquistada pela comunidade escolar — que se manifestam mais claramente os vínculos estreitos com a matemática científica. Contudo, a matemática escolar não fica totalmente definida pelos resultados dessa disputa que se desenvolve, fundamentalmente, fora dos muros da escola. Há que considerar ainda, de modo essencial, o que a prática escolar vai produzir a partir das prescrições vencedoras e as formas com que essas prescrições vão moldar as reações a elas no interior da escola; como elas vão ser acomodadas dentro do processo histórico de produção dos saberes associados à docência escolar[6], parcial ou integralmente, a curto, médio ou longo prazo. É neste sentido específico que se pode dar razão a Chervel quando diz que a disciplina escolar é criada na escola, pela escola e para a escola.

Assim é que sempre recaímos, em última instância, no terreno da prática escolar e, em particular, no campo da prática docente. Um conceito que tem produzido reflexões importantes para a compreensão dos mecanismos de produção de saber da prática docente e da constituição da matemática escolar é o de *conhecimento pedagógico do conteúdo*[7], elaborado por Shulman ao desenvolver estudos e pesquisas visando caracterizar o que seria um *repertório de conhecimentos necessários à prática docente*.[8]

Para descrever esse "repertório de conhecimentos", Shulman elabora uma lista mínima que, segundo ele, deve incluir:

- conhecimento do conteúdo;
- conhecimento curricular, envolvendo os programas e materiais curriculares;
- conhecimento pedagógico geral, com referência especial aos princípios e estratégias de manejo de classe e de organização, os quais parecem transcender o conhecimento do conteúdo;
- *conhecimento pedagógico do conteúdo, aquele amálgama especial entre conteúdo e pedagogia que constitui uma forma de entendimento profissional da disciplina e que é específica dos professores;*
- conhecimento das características cognitivas dos alunos;

[6] O uso obrigatório do chamado método intuitivo nas escolas (primárias) do Brasil foi objeto de um decreto datado de 19 de abril de 1879. Em 1910, <u>trinta e um anos depois</u>, a diretora do 2º grupo escolar da capital de Minas Gerais, D. Maria Guilhermina afirmava em seu relatório: "*As matérias de ensino continuam a ser tratadas pelas professoras conforme estavam habituadas, não podendo ainda ser, como devem, empregados os methodos intuitivos pela falta absoluta de material, apparelhos escolares e livros, <u>principalmente por não terem ainda as professoras o tirocínio indispensável a esse difícil trabalho</u>.*" (Documentos da Secretaria do Interior – Minas Gerais, Arquivo Público Mineiro, SI2982, 04/02/1910 – citado em RESENDE, 2000, grifo nosso)

[7] No original, em inglês, *pedagogical content knowledge*.

[8] No original, em inglês, *knowledge base for teaching*.

- conhecimento do contexto educacional, incluindo a composição do grupo de alunos em sala de aula, a comunidade escolar mais ampla, as suas particularidades culturais, etc.;
- conhecimento dos fins educacionais, propósitos e valores, seus fundamentos filosóficos e históricos.

Entre as categorias listadas, o autor dá um destaque especial ao *conhecimento pedagógico do conteúdo*, na medida em que este

> [...] identifica diferentes corpos do conhecimento necessário para o ensino. Ele representa a transformação de conteúdo e pedagogia em um entendimento de como certos tópicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados aos diferentes interesses e habilidades dos alunos e apresentados no processo de ensino. (SHULMAN, 1987, p. 8)*

Talvez seja interessante perguntar, a esta altura, em que medida a noção de *conhecimento pedagógico do conteúdo* se distancia (ou se aproxima) da idéia de transposição didática de Chevallard. Acreditamos que essa pergunta pode ser respondida a partir da constatação de que o conceito de Shulman refere-se a um saber proveniente da prática docente escolar. Embora o *conhecimento pedagógico do conteúdo* possa ser visto, essencialmente, como um amálgama entre pedagogia e conteúdo — que se destina a tornar mais compreensível, para o aluno, um determinado objeto de ensino — uma diferença fundamental desse conceito em relação à noção de transposição didática de Chevallard é, a nosso ver, a fonte que engendra o primeiro como uma construção de saber: a prática docente em sala de aula. Nesse sentido, o *conhecimento pedagógico do conteúdo* não é algo produzido e regulado a partir do exterior da escola e que deva ser transladado para ela, mas, ao contrário, trata-se de uma construção elaborada no interior das práticas pedagógicas escolares, cuja fonte e destino são essas mesmas práticas:

> Observar veteranos ensinando um tópico que coloca dificuldades para o professor novato nos ajudou a focalizar a atenção nos tipos de habilidades e de conhecimentos necessários para ensinar assuntos considerados difíceis. Ao focalizar, em nossas pesquisas, o ensino de certos tópicos particulares – equações quadráticas, o subcontinente indiano, fotossíntese – aprendemos como o conhecimento do conteúdo e as estratégias pedagógicas necessariamente interagem nas mentes dos professores. (SHULMAN, op.cit., p. 5)*

Assim, construído e testado na prática concreta da sala de aula da escola, esse *conhecimento pedagógico do conteúdo* incorpora-se necessariamente à matemática escolar, pois, segundo o próprio Shulman, ele pode ser entendido como a forma profissional com que o professor concebe o seu objeto de ensino e, ao mesmo tempo, a forma prática com que ele opera a organização, a representação e a apresentação do saber na sua ação pedagógica.

Entretanto, não se pode deixar de notar uma certa simplificação do papel da prática docente na produção do saber profissional, a qual ainda permanece implícita na proposição de Shulman: o *conhecimento pedagógico do conteúdo* não vai muito além de uma forma — embora criada e validada na prática — de cumprir bem as prescrições, ou seja, ensinar "competentemente" ou "eficientemente" aquilo que se encontra prescrito nos currículos escolares.

Tardif et al. (1991) descrevem a prática docente na escola básica como uma atividade complexa correspondente a um espaço de produção de saberes profissionais diversificados:

> A atividade docente [...] se desdobra concretamente numa rede de interações com outras pessoas, num contexto em que o elemento humano é determinante e dominante, e onde intervêm símbolos, valores, sentimentos, atitudes, que constituem matéria de interpretação e decisão, indexadas, na maior parte do tempo, a uma certa urgência. Essas interações são mediadas por diversos canais: discursos, comportamentos, maneiras de ser, etc. Elas exigem portanto dos professores [...] uma capacidade de se comportar enquanto sujeito, ator, e de ser uma pessoa em interação com outras pessoas. (TARDIF et al., 1991, p. 228)

E, ao confrontarem os saberes construídos na experiência com os saberes acadêmicos do processo de formação inicial ou com as próprias prescrições curriculares, esses autores se referem a uma relação crítica:

> Os saberes da experiência adquirem também uma certa objetividade em sua relação crítica com os saberes curriculares, das disciplinas e da formação profissional. [...] Os professores não rejeitam em sua totalidade os outros saberes; pelo contrário, eles os incorporam à sua prática, porém re-traduzindo-os em categorias do seu próprio discurso. Nesse sentido a prática aparece como um <u>processo de aprendizagem através do qual os professores re-traduzem sua formação e a adaptam à profissão, eliminando o que lhes parece inutilmente abstrato ou sem relação com a realidade vivida.</u> (TARDIF et al., 1991, p. 231, grifo nosso)

Assim, a matemática escolar, vista numa de suas dimensões — a de resultante do processo de produção de saberes associados à ação pedagógica em sala de aula — incorpora também essa retradução crítica dos saberes da formação, operada pelo professor.

Em vista disso, torna-se fundamental, para uma análise das relações entre os saberes da formação e os da prática, refletir sobre esse processo de seleção, de adaptação e de produção de saberes que se desenvolve na prática profissional docente. Coloca-se, assim, o problema de, por um lado, conhecer a *natureza* desse saber construído e mobilizado pelos professores em sua prática e, por outro, o de investigar as possibilidades de se desenvolver o processo de formação a partir de uma relação de complementaridade com esse processo de produção de saberes da prática docente escolar.

Gauthier et al. (1998), apresentam um estudo em que são analisadas 42 sínteses de pesquisas (cobrindo cerca de 4.700 artigos, no total) a respeito dos saberes profissionais dos professores. O estudo procurou identificar e categorizar elementos de um conjunto de conhecimentos que os autores denominam *saberes da ação pedagógica* isto é, conhecimentos, habilidades e competências dos professores, associados diretamente às atividades da sala de aula. Esses saberes foram agrupados em duas grandes categorias: a *Gestão da Classe* e a *Gestão da Matéria*. Cada uma das categorias ainda é dividida em três subcategorias: os saberes que se referem ao planejamento, os que se referem às atividades de interação com os alunos e os referentes à avaliação. Sem estar circunscrito a nenhuma disciplina escolar específica, o estudo descreve elementos que comporiam um possível *repertório de conhecimentos*[9] próprios da prática docente escolar.

Apresentamos aqui, para ilustração, extratos do texto de Gauthier et al. (1998), em que são relacionados alguns desses elementos, no que se refere à categoria Gestão da Matéria:

1. **O planejamento**

   [...] Os professores experientes realizam várias formas de planejamento.

   [...] Um bom planejamento se caracteriza pela minúcia, mas não pela rigidez. Os professores que planejam de uma maneira demasiado rígida e detalhada se concentram às vezes demais no conteúdo e não o bastante nas necessidades dos alunos.

   [...] conhecer melhor seus alunos aparece como sendo uma preocupação dos professores experientes visto que estes reúnem a respeito daqueles uma grande quantidade de informações gerais a partir de uma variedade de fontes tais como observações pessoais, fatos contados por outros professores, resultados de avaliações padronizadas e documentos da escola. Essas informações dizem respeito, por exemplo, à história familiar dos alunos, ao leque dos conhecimentos e das habilidades gerais que possuem, à participação deles em classe, às suas competências sociais, seus hábitos de trabalho, seu grau de independência, suas necessidades particulares, etc.

   [...] As decisões dos professores quanto aos conteúdos [...] dependem do esforço percebido como necessário para o ensino de um determinado conteúdo, da percepção dos professores em relação à dificuldade que o conteúdo apresenta para os alunos...

   [...] Os professores que obtêm êxito em seu trabalho conhecem a matéria de um modo que lhes permite planejar a criação de aulas que ajudarão os alunos a relacionar os conhecimentos novos aos que já possuem ...

2. **Interação com os alunos**

[9] *[...] "chamaremos de reservatório de conhecimentos aquilo que a tradição anglo-saxônica costuma chamar de knowledge base, ao passo que a expressão repertório de conhecimentos servirá para designar aquilo que chamamos de saberes da ação pedagógica, que remetem diretamente aos resultados das pesquisas sobre o gerenciamento da classe e o gerenciamento do conteúdo"* (GAUTHIER et al., 1998, p. 18).

[...] os professores experientes consagram mais tempo às atividades de grande grupo do que às atividades em pequenos grupos e percebe-se que as turmas em que os ganhos de aprendizagem são elevados comportam menos atividades individuais ou independentes.

[...] Antes de introduzir novos conteúdos, os professores considerados eficientes avaliam em que medida seus alunos são capazes de assimilá-los e procuram adaptá-los às necessidades deles. Essa avaliação pode incluir a revisão das aprendizagens anteriores [...] Ela pode consistir igualmente na identificação das idéias preconcebidas dos alunos.

[...] Os professores cujos alunos obtêm os maiores ganhos em termos de aprendizagem tendem a explicar, de maneira completa, as tarefas a serem realizadas e a dar vários exemplos práticos antes de determinar o início do trabalho.

[...] É possível que, com a experiência adquirida através da própria atividade e com um certo treino, desenvolva-se em alguns [professores] uma espécie de uso econômico e funcional da linguagem.

[...] A maioria dos professores fornece aos alunos uma certa quantidade de prática orientada, mas os professores mais eficientes consagram mais tempo a tal aspecto e fazem dele uma estratégia de ensino explícita.

[...] pesquisas demonstraram que os professores eficientes em matemática passam duas vezes mais tempo apresentando a nova matéria e orientando os exercícios do que os professores menos eficientes.

[...] Os professores que costumam acompanhar a execução dos exercícios estão em condições de fornecer retroações regulares, específicas e detalhadas. As retroações imediatas e rápidas mostram-se eficazes para ajudar os educandos. [...] Diante de uma resposta incorreta, os professores eficientes podem retomar, se necessário, a parte da lição ou toda a lição em que há problemas de compreensão.

[...] Vários estudos mostram que os professores que produzem os ganhos de aprendizagem mais elevados em seus alunos são relativamente mais inclinados a sustentar uma interação com o primeiro que responde, repetindo-lhe a pergunta, simplificando-a, dando-lhe pistas de compreensão, esperando que ele dê uma resposta substancial, que peça ajuda ou esclarecimentos ou que diga abertamente que não sabe a resposta, ao invés de suspendê-la fornecendo ele mesmo a resposta ou designando um outro aluno. O fato de exigir uma resposta ajuda no bom êxito dos aprendizes.

3. Avaliação

[...] os professores que utilizam diferentes formas de avaliação, quer seja com o objetivo de avaliar os alunos ou seus próprios métodos de ensino, são geralmente mais bem sucedidos nessa atividade/profissão do que os que não o fazem.

[...] Com o fim de verificar se seus métodos pedagógicos funcionam [...] os professores competentes utilizam uma variedade de meios de avaliação, entre os quais, por exemplo, a revisão mental de uma lição ou de um episódio interativo com os alunos; a gravação, em videocassete, do que ocorre na sala de aula, a fim de rever tudo posteriormente; a observação por um colega com vistas a uma discussão posterior. (GAUTHIER et al., 1998, cap. IV)

Embora ressaltando sempre as enormes dificuldades do empreendimento de descrever o conteúdo de um repertório de conhecimentos específicos ao ensino escolar, Gauthier et al. (1998) concluem que existe comprovadamente um saber da ação pedagógica e que há uma certa convergência nos resultados de pesquisas que tratam da gestão da matéria e da gestão da classe. Afirmam também que a idéia de um tal repertório pode ser funcional nas análises dos saberes docentes.

Como foi observado, os elementos descritos no estudo desses autores não se referem a uma disciplina específica, mas a aspectos gerais do processo de educação escolar básica. Não temos conhecimento de nenhum estudo analítico-descritivo desse porte, trabalhando com sínteses de pesquisas e referindo-se particularmente à matemática escolar, mas há registro de inúmeros trabalhos em que se descrevem, analisam e discutem elementos dos saberes da ação pedagógica de professores de matemática da escola e, em muitos deles, há referências explícitas ao fato de que a prática profissional desempenha um papel fundamental na estruturação dos saberes docentes (FIORENTINI et al., 1999; FIORENTINI; MIORIM, 2001; FIORENTINI; JIMÉNEZ, 2003; LLINARES, 1995; 1998, 1999; BROMME, 1994; LEINHARDT, 1988, 1989; LEINHARDT; SMITH, 1985, entre outros).

Com relação ao papel que os conhecimentos da experiência profissional do professor podem desempenhar no processo de formação, recorremos novamente à reflexão desenvolvida por Gauthier et al., na obra que temos citado. No capítulo V, eles apresentam e criticam duas visões extremas, concernentes à utilização de resultados das pesquisas sobre o ensino: uma que eles chamam de "cientificista radical" e a oposta, a "não-cientificista radical". A primeira conceberia o repertório de conhecimentos como se fosse "*uma ciência do ensino que, por meio da descoberta de leis, permitiria regular a ação do professor de forma direta. [...] Uma vez estabelecido, esse repertório de conhecimentos poderá determinar a ação pedagógica e até mesmo as políticas educativas.*" (GAUTHIER et al., 1998, p. 298)

No outro extremo, a idéia de um repertório de conhecimentos é inteiramente rejeitada. Para a concepção não-cientificista radical, a prática profissional do professor seria uma realidade demasiado complexa, não podendo, portanto, realizar-se obedecendo a critérios ou regras pré-estabelecidas pela ciência. Gauthier et al.(1998) adotam, então, uma posição de síntese dialética em que, rejeitando a visão de prática docente associada à concepção cientificista, a qual reduziria o professor a um técnico que aplica conhecimentos produzidos pela pesquisa científica, negam também a negação dessa visão na sua forma não-cientificista radical, a qual recusaria, segundo eles, toda racionalização do trabalho docente. E esclarecem que, nessa alternativa a que eles se filiam,

> [...] os resultados da pesquisa não podem determinar a ação a ser empreendida, mas simplesmente informar o professor, levá-lo a refletir sobre o que acontece e sobre o que ele poderia fazer...(p.300)
>
> [...] Nessa perspectiva, um dos papéis da pesquisa consiste em recolher o saber prático e em validá-lo [...] De fato, nem todas as práticas dos professores são automaticamente adequadas; algumas se mostram provavelmente mais eficazes que outras. Um repertório de conhecimentos do ensino não pode assim se reduzir à simples compilação das práticas pedagógicas, mas deve ser constituído de saberes, de conhecimentos e de julgamentos dos professores que foram submetidos a uma validação científica. (GAUTHIER et al., 1998, p. 303)

Numa nota de rodapé, os autores explicam como poderia se dar a validação científica dos saberes docentes:

> Essa validação pode ser feita de muitas maneiras. Pode ser realizada por meio de estudo dos efeitos de certas práticas docentes sobre os alunos; é o método clássico das pesquisas processo-produto. A validação também pode ser feita através do julgamento dos colegas de profissão e da confrontação de pontos de vista. Em todos os casos, entretanto, a experiência deve abandonar o seu caráter privado e passar para o domínio público para ser examinada, analisada, criticada. (Ibid., p. 303)

Segundo Tardif os saberes da ação pedagógica podem constituir um elemento fundamental do processo de formação do professor na licenciatura a partir de uma reavaliação do papel da prática docente escolar que a coloque no centro de gravidade desse processo. Ele comenta:

> Esse deslocamento do centro de gravidade da formação inicial não significa que a formação de professores passa a ser uma instância de reprodução das práticas existentes, nem que ela não comporte um forte componente teórico. Esse deslocamento significa, antes, que a inovação, o olhar crítico, a "teoria" devem estar vinculados aos condicionantes e às condições reais de exercício da profissão e contribuir assim para a sua evolução e transformação.
>
> [...] Nos Estados Unidos calcula-se que existem, atualmente, milhares e milhares de pesquisas realizadas nas salas de aula. Essas pesquisas produzem resultados que podem ser utilizados pelos professores para melhorar suas práticas profissionais. Porém o mais importante, talvez, é que essas pesquisas são globalmente baseadas na idéia de que os professores de profissão são detentores de saberes que a pesquisa deve procurar desvelar e incorporar aos programas de formação inicial. Noutras palavras, a prática profissional não é mais considerada simplesmente como sendo um objeto ou um campo de pesquisa, mas um espaço de produção da competência profissional pelos próprios professores.
>
> [...] Essas duas tarefas [*Tardif se refere aqui ao que Gauthier et al., denominam gestão da classe e gestão da matéria. Esclarecimento nosso*] constituem o cerne do ensino na sala de aula e são elas que uma boa parte da pesquisa procura documentar atualmente. Trata-se,

essencialmente, de extrair, do estudo dessas tarefas, princípios, conhecimentos e competências que poderão ser reutilizados na formação dos professores. (TARDIF, 2002b, p. 289-290)

Por outro lado, é preciso ter em conta que a prática profissional docente, sendo um parâmetro fundamental para o processo de formação, deve também ser situada em suas relações com as estruturas sociais, com as prescrições vigentes e com o próprio processo de formação. Não se trata, numa interpretação extremada das concepções estruturalistas, de tomar as práticas como completamente determinadas por essas condições ou prescrições. De fato, a prática profissional do professor se desenvolve numa arena de relações entre atores sociais e não de objetos passivos sobre os quais agem as estruturas. Mas, considerar o papel dos atores nos processos sociais não implica, do nosso ponto de vista, desconsiderar os condicionamentos e limites impostos pelas estruturas, isto é, não implica, por exemplo, conceber a prática profissional do professor como autônoma.

Uma das formas com que o processo de formação pode influenciar a prática docente é indicada nos estudos sobre as concepções[10] dos professores a respeito da matemática e dos processos de ensino e aprendizagem da matemática (ERNEST, 1991; THOMPSON, 1992; PONTE, 1992). Uma vez que — como é largamente aceito entre os estudiosos — essas concepções vão sendo construídas ao longo da vivência no processo educativo e que a formação inicial pode desempenhar um papel importante na estruturação ou re-estruturação do sistema de crenças e convicções do licenciando (GROSSMAN, 1990; BLANTON, 2002), vemos que existem canais efetivos através dos quais o processo de formação no curso de licenciatura pode atuar sobre a prática profissional do professor. PONTE (2001) também aponta vínculos entre a formação inicial e os tipos de dificuldades que o professor encontra em seu início de carreira profissional.

A nosso ver, uma questão importante no contexto de análise das conexões entre a prática docente, a formação na licenciatura e a matemática escolar é a seguinte: a prática produz saberes; ela produz, além disso, uma referência a partir da qual se processa uma seleção, uma filtragem ou uma adaptação dos saberes adquiridos fora dela, de modo a torná-los úteis ou utilizáveis. Mas será que a prática ensina tudo?

Coloquemos a questão, alternativamente, nos seguintes termos: o processo de formação na licenciatura em matemática veicula saberes que, eventualmente, podem ser considerados "inúteis" para a prática docente. Do mesmo modo, trabalha certos saberes "de forma inadequada", com referência a essa prática. E, além disso, muitas vezes se recusa —

justificando-se de variadas formas, entre as quais a utilização tácita do argumento de que isso não é objeto da matemática universitária — a desenvolver uma discussão sistemática com os licenciandos a respeito de conceitos e processos que são fundamentais na educação escolar básica em matemática. Por exemplo, no curso de licenciatura da UFMG, em nenhum momento do processo de formação matemática desenvolve-se uma discussão aprofundada a respeito das necessidades — relevantes para o trabalho do professor da escola — que levam às sucessivas expansões dos conjuntos numéricos desde os naturais até os racionais, depois aos reais e finalmente aos complexos. Mas discutem-se coisas como restos quadráticos, o axioma do supremo etc. No entanto, essa questão da expansão do sistema numérico é um ponto fundamental para a formação do professor da escola (detalhes no Capítulo III). Adotando-se uma postura bastante simplificadora (apenas para situar a discussão que queremos desenvolver), pode-se imaginar que, no caso de saberes inúteis, o problema seria contornado, na prática, através da eliminação criteriosa daquilo que fosse considerado abstrato demais ou sem sentido para a ação pedagógica na sala de aula da escola. No caso de um tratamento inadequado do conhecimento matemático dentro do processo de formação, o problema, em princípio, também poderia ser contornado, através de uma retradução e adaptação do que for possível e necessário. Observe-se, porém, que isso nem sempre pode ser feito livre de conflitos com concepções e crenças desenvolvidas ou reforçadas a partir da vivência no próprio processo de formação, o qual valoriza essa forma de saber, supostamente inadequada à prática docente. Mas, no último caso — em que o conhecimento matemático envolvido nas atividades da prática docente não é trabalhado no processo de formação — como é que se poderia contornar, na prática, o problema? Se não se reflete sistematicamente a respeito desses saberes associados à prática pedagógica escolar ao longo do processo de formação inicial, que tipo de aprendizagem sobre elas pode a prática docente oferecer ao professor? Como esse "não-saber" proveniente de deficiências do processo de formação é traduzido nas categorias do discurso da prática? O "não-saber" se incorpora à prática docente ou é superado ao longo do processo de produção de saber dessa mesma prática? A prática docente seria auto-suficiente em relação à produção dos saberes necessários ao seu exercício, isto é, ela sempre responde convenientemente às próprias questões que coloca?

A literatura da área, quando examinada sob a perspectiva de análise dessa questão, oferece ampla fundamentação à hipótese de que a prática docente escolar não pode ser

[10] Empregamos a palavra "concepções" num sentido amplo, que inclui crenças, convicções, noções, teorias professadas, sejam elas explicitamente aceitas e conscientemente sustentadas ou espontâneas e inconscientes. Sobre os diferentes sentidos da palavra concepções, ver CURY (1994).

considerada uma instância capaz de produzir todos os saberes envolvidos nas questões que se colocam para o professor na sua ação pedagógica na escola básica (POST et al., 1991; NORMAN, 1992; EVEN; TIROSH, 1995; SCHIFTER, 1998; MA, 1999). Sendo assim, em que medida podemos (e devemos) considerar um "não-saber" incorporado à prática docente escolar em matemática?

A nossa reflexão sobre esse ponto é a seguinte: do mesmo modo que se coloca, para o processo de formação do professor, a questão de conhecer a natureza do saber produzido na prática profissional docente, trata-se, aqui, de compreender a natureza desse eventual "não-saber" associado à prática pedagógica escolar em matemática. Mas, para isso, é preciso situar esse "não-saber" no interior do processo de educação matemática escolar e não concebê-lo, pura e simplesmente, como uma falta em relação ao conhecimento matemático científico. Do mesmo modo que os saberes produzidos na experiência docente na escola se incorporam apenas à matemática escolar e não constituem uma contribuição original ao conhecimento matemático científico, esse "não-saber" se refere, fundamentalmente, à matemática escolar e não pode ser reduzido a uma simples falha de formação em relação ao conhecimento matemático científico, abstrato e deslocado de contexto.

Mas, qual seria a diferença entre compreender esse "não-saber" como "falta" em relação à matemática científica e, alternativamente, analisá-lo tomando como referência a prática da educação matemática escolar? Examinemos, como um exemplo, os decimais. Do ponto de vista da matemática científica, o decimal é apenas uma forma de *representação*. Se não é importante o que seja efetivamente um número real — a abstração fundamental é aquela que o capta como elemento de uma estrutura específica, isto é, corpo ordenado completo — menos importante ainda seria uma das formas de representá-lo, especialmente se nos lembrarmos de que um mesmo número real pode ter, em princípio, mais de uma representação decimal. Entretanto, para a matemática escolar é impossível pensar em número sem pensar em forma decimal. Esta, em certas situações do ensino escolar, é muito mais que uma simples representação. Ela *é* o número.

A identificação que o aluno faz de um conceito abstrato com sua representação concreta pode ser a expressão de uma fase necessária e fundamental do seu aprendizado. Em certo estágio da sua relação cognitiva com um determinado conceito, essa identificação parece ser a forma possível de apreendê-lo. O desenvolvimento do processo deve conduzir a uma percepção qualitativamente nova: a identificação com uma forma concreta não é mais um expediente precário e provisório de apreensão do conceito, mas, ao contrário, ela resulta agora de um amplo domínio, de uma capacidade de flexibilização que permite — como num processo metonímico — ora tomar uma forma concreta de representação em lugar do próprio conceito, ora a operação inversa, de acordo com as circunstâncias. Um exemplo bastante conhecido no qual se aplicam essas considerações é a idéia de número racional e suas diferentes formas de expressão como relação parte/todo, taxa, razão, operador etc.

Assim, se o professor da escola básica tem, para si mesmo, uma percepção confusa da distinção entre a noção abstrata de numero real e uma de suas formas concretas de representação — a forma decimal — temos aí um exemplo do tipo de "não-saber" a que estamos nos referindo. Mas, pensar esse "não-saber" como falha conceitual em relação à matemática científica seria extremamente reducionista, desde que o objetivo seja a formação de professores para a escola. Uma discussão mais detalhada sobre os decimais será desenvolvida no Capítulo III.

A matemática científica, com sua estética, suas necessidades e seus valores específicos, se apoia fundamentalmente numa percepção "transversal" do *matematicamente correto,* tomando como referência central o corpo de conhecimentos abstratos — conectados por uma lógica dedutiva rigorosa — que a constitui como ciência. Por sua vez, o trabalho de educação matemática na escola básica parece conformar uma visão pedagógica do conhecimento matemático, a qual é essencialmente "longitudinal", na medida em que compreende a apreensão de um conceito, por exemplo, como um *processo* que se desenvolve ao longo de vários anos de escolarização.

Considerações finais

O que parece ocorrer, genericamente, é que os condicionantes do processo de escolarização básica acabam por conformar uma lógica tácita, a qual orienta a incorporação dos seus saberes constitutivos à matemática escolar. É no contexto de interação com esta lógica prática que a lógica interna da matemática científica, os seus métodos, técnicas, valores e resultados passam por um processo de adaptação, filtração, transformação, retradução e revalorização, tendo como referência — implícita ou explícita — o ambiente educativo em que essas operações se realizam. Não se trata, entretanto, de procurar transportar integralmente para o processo de formação do professor de matemática na licenciatura a lógica da prática escolar, até porque, como aprendemos com Schön (1983), isso é impossível. Trata-se, a nosso ver, de pensar o processo de formação do professor, a partir do reconhecimento de uma tensão — e não identidade — entre educação matemática escolar e ensino da matemática acadêmica. Para muitos, a idéia de formação matemática na licenciatura remete à matemática científica, à sua lógica interna, seus valores etc. Para outros, a dificuldade no processo de formação é essencialmente metodológica, o "conteúdo" é um dado, não está em questão. Mas, vista sob a nossa perspectiva, uma formação matemática profunda para o professor da escola básica passaria, antes de tudo, pelo re-conhecimento crítico da distinção entre matemática acadêmica elementar e matemática escolar, entendendo esta como um amálgama de conhecimentos referidos à prática da educação escolar em matemática e incorporando, assim, os saberes da experiência docente, mas apontando, ao mesmo tempo, uma carência de saberes, dada a ver também através dessa mesma experiência.

O conhecimento trabalhado em qualquer processo de ensino é, em si mesmo, educativo e formativo. Isto pode parecer óbvio demais, mas a aceitação dessa tese implica a necessidade de uma análise muito cuidadosa das relações entre o tipo de conhecimento que se trabalha no processo de formação do professor e as formas com que o futuro professor vai "absorver as lições" da prática profissional, bem como as formas com que ele vai se envolver no processo de produção de saber dessa prática e as formas de reconhecer e trabalhar as questões que se colocam para ele nessa mesma prática. É nesse sentido que toma importância pensar a questão da articulação e da complementaridade entre os saberes da formação e os da prática. E é então que faz toda a diferença optar entre as formas de se conceber a matemática escolar. Se a pensamos de uma perspectiva técnica, como mera versão "didatizada" da parte elementar da matemática científica, o processo de formação do professor acaba se estruturando em torno desta última. A formação pedagógica se incumbiria somente de "fornecer o lubrificante", como diz Chervel, para o processo de ensino e a prática se tornaria apenas a instância de aplicação dos saberes da formação ou, no máximo, uma referência para a detecção de elementos que podem conduzir a um "desvio" do desempenho *ideal* do professor. Se, por outro lado, concebemos a matemática escolar como uma construção autônoma da prática escolar e esta como uma instância auto-suficiente em termos da produção dos saberes profissionais, então não há muita coisa a ser feita, ou melhor, não faz diferença o que se faça no processo de formação do professor. Mas, se pensamos a matemática escolar como uma construção histórica que reflete múltiplos condicionamentos, externos e internos à instituição escolar, e que se expressa, em última instância, nas relações com as condições colocadas pelo trabalho educativo na própria sala de aula, então a referência da prática profissional efetiva dos professores assume um papel central no processo de formação. É uma análise adequada das questões que se colocam dentro dessa prática — em seus diferentes aspectos: de produção, de retradução, de seleção, de adaptação, de transformação, de carência e de transmissão de saberes — que pode fornecer os fundamentos para se pensar criticamente todo o processo de formação.

CAPÍTULO II

A LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UFMG E OS SISTEMAS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentamos nossa resposta à primeira questão de pesquisa, ou seja, uma descrição do conhecimento matemático a respeito dos sistemas numéricos que é trabalhado de forma explícita no curso diurno de licenciatura em matemática da UFMG. Antes, porém, é necessário abrirmos um pequeno parêntesis para explicar o sentido com que empregamos a expressão "de forma explícita" na sentença acima.

A nosso ver, é impossível descrever o conhecimento matemático a respeito dos sistemas numéricos trabalhado num curso de licenciatura em matemática, se considerarmos essa expressão num sentido tão amplo que inclua, por exemplo, resolver uma equação diferencial e, eventualmente, operar com o número que representa o valor da função e^{at} cosbt no ponto t = π. Com este sentido amplificado, resulta que em quase todas as disciplinas do curso — nas quais são propostos exercícios ou problemas cuja resolução envolve certas operações com números — algum conhecimento matemático sobre os sistemas numéricos estaria sendo implicitamente trabalhado. Nossa descrição, entretanto, não se referirá a essa abordagem implícita dos conhecimentos matemáticos relacionados aos números. O objetivo deste capítulo é descrever aquilo que é explicitamente considerado, do ponto de vista da execução real da proposta curricular em vigor, conhecimentos sobre os sistemas numéricos, obrigatórios para a formação do professor.

Para formular essa descrição, utilizamos certos procedimentos de caráter metodológico que passamos a explicitar. Em primeiro lugar, analisamos a grade curricular do curso, verificando se constava, na ementa ou no programa de cada uma das disciplinas obrigatórias, alguma referência ao estudo do tema. Selecionamos, para uma análise detalhada, aquelas disciplinas cujos programas continham esse tipo de referência, considerando que as restantes, mesmo quando pressupõem e utilizam conhecimentos a respeito dos sistemas numéricos, não trabalham, de forma relevante para os objetivos desse estudo, elementos específicos do tema em questão. As disciplinas selecionadas tiveram suas ementas, programas e referências bibliográficas analisados e foram realizadas entrevistas informais (algumas delas registradas através de gravador ou e-mail) com 17 dos professores que as lecionaram nos últimos 10 anos, a fim de conferir se a ementa e o programa da disciplina são efetivamente desenvolvidos tais como constam dos documentos oficiais. De fato, nas entrevistas confirmou-se a nossa conjectura de que os programas e ementas de algumas dessas disciplinas haviam sido modificados na prática, embora essas modificações não tenham tido registro nos documentos oficiais do curso. Assim, com base nas entrevistas e nos documentos oficiais, foi feita uma listagem das disciplinas obrigatórias do curso, nas quais algum aspecto do tema "números" é efetiva e sistematicamente trabalhado.

Em seguida, analisamos detalhadamente a bibliografia utilizada nessas disciplinas nos últimos cinco anos, tomando os textos adotados como referências fundamentais para a descrição a ser desenvolvida neste capítulo. Esse procedimento foi utilizado em função das informações obtidas na maioria das entrevistas, de que o texto básico adotado corresponde ao que é efetivamente desenvolvido na disciplina. Confirmou-se, assim, a hipótese que a nossa experiência sugeria, ou seja, a de que o texto expressa, com razoável fidelidade, a abordagem desenvolvida — se não em todas as disciplinas do curso, pelo menos naquelas selecionadas para esse estudo. Em alguns casos, os professores indicaram, nas entrevistas, os capítulos do livro adotado que, no todo ou em parte, não foram ou não são usualmente abordados.

Observamos, por outro lado, que não há propriamente um projeto pedagógico para o curso de licenciatura em matemática da UFMG. O que está registrado nos documentos (UFMG, 1986a, 1986b) que constam do processo de discussão do (então) novo currículo do curso de matemática (licenciatura e bacharelado) pelos membros da Câmara de Graduação da UFMG são considerações gerais a respeito das dificuldades e problemas observados ao longo dos anos de vigência da proposta curricular anterior e que acarretaram a apresentação de uma nova, aprovada em 1986. Nesses documentos são também avaliadas as possibilidades e apontadas as formas de contribuição da estrutura curricular proposta para uma eventual superação das dificuldades levantadas.

O currículo atual foi implementado a partir do primeiro semestre letivo de 1987, tendo sofrido modificações em cinco oportunidades. Como a estrutura geral da grade curricular se mantém, as modificações ocorridas caracterizam apenas uma nova versão do mesmo currículo. Isso fica claro quando se observa a natureza das alterações registradas.

As versões 1988/2 e 1989/2 apenas apresentam pequenas mudanças no elenco de disciplinas optativas. A versão 1990/1 é idêntica à de 1989/2. Essas duas foram criadas por razões de ordem burocrática, tendo em vista a implantação, em 1990, das normas acadêmicas gerais da UFMG. Nenhuma modificação significativa ocorreu efetivamente durante esse período de adaptação às novas normas acadêmicas.

Na versão de 1990/2, são eliminadas da grade as disciplinas Estudos de Problemas Brasileiros A e B e Educação Física B, enquanto algumas outras têm sua carga horária alterada. As disciplinas História das Ciências Exatas A e B (45 horas cada) são unificadas em uma de 60 horas — História das Ciências Exatas. Também a partir de 1990/2, o tempo de integralização do curso passa a ser de sete semestres ao invés de oito, como vinha sendo desde a implantação da versão inicial em 1987. Há, então, uma pequena redução na carga horária total obrigatória que passa de 2.250 horas nas versões anteriores, para 2.205 horas, na nova.

Na versão de 1997/1, as disciplinas Geometria Descritiva I (60 horas) e Educação Física A (30 horas) são eliminadas da grade e Prática de Ensino de Matemática I e II (60 horas cada) são unificadas na disciplina Prática de Ensino de Matemática, do sétimo e, portanto, último período do curso, com uma carga horária de 120 horas. As três disciplinas do Departamento de Física são desmembradas em seis, mantendo-se, no entanto, a sua carga horária global de 315 horas. Introdução à Educação é substituída por Sociologia da Educação. A carga horária obrigatória do curso diminui para 2.115 horas. Acrescentam-se algumas disciplinas ao elenco de optativas.

A última versão é de 2001, o que significa que, de lá para cá, não ocorreram mudanças oficiais na grade curricular. Nessa versão, a formação em Física passa a ser composta pelas seguintes disciplinas obrigatórias: Fundamentos de Mecânica, Fundamentos de Eletromagnetismo e Introdução à Física Experimental (60 horas cada), perfazendo então 180 horas. Além disso, o aluno deve escolher mais três disciplinas num elenco de sete (denominadas "optativas direcionadas") para completar a carga horária global de formação em Física, que se mantém com 315 horas. Estrutura e Funcionamento do Ensino de Primeiro e Segundo Graus é substituída, com a mesma carga horária, por Política Educacional. A carga horária obrigatória (incluindo as escolhas da formação em Física) permanece com 2.115 horas.

Paralelamente ao diurno, desenvolve-se, desde 1994, um curso noturno de licenciatura em matemática, mas a grade curricular apresenta diferenças nos nomes, carga horária e ementas de algumas disciplinas. O tempo normal de integralização do curso noturno é de quatro anos (oito períodos) e o do diurno é de três anos e meio (sete períodos).

A atual grade curricular do curso diurno de matemática da UFMG

Observamos que a licenciatura e o bacharelado têm as mesmas disciplinas até o terceiro período, inclusive. As ementas, os programas e as referências bibliográficas oficiais de todas as disciplinas marcadas com o símbolo (*) na grade curricular da licenciatura (apresentada adiante) podem ser acessados por via eletrônica através do endereço:

www.mat.ufmg.br/dmat/education/ementas/fonte.html.

Essas são disciplinas do Departamento de Matemática, cujos programas podem ser conferidos ou examinados pelo leitor interessado. As que foram pré-selecionadas e consideradas relevantes para a elaboração da descrição aqui apresentada estão marcadas abaixo com o símbolo #. Elas terão suas ementas, referências bibliográficas e programas expostos na íntegra, comentados e analisados neste texto (ou no Apêndice A deste capítulo). As que não se enquadram em nenhum dos dois casos (não estão assinaladas com nenhum símbolo), são consideradas não relevantes para esse estudo e não terão suas ementas ou programas apresentados nem discutidos.

Para eventual comparação, apresentamos também a grade curricular do curso de bacharelado em matemática (versão atual), destacando o conjunto de disciplinas comuns aos dois cursos.

Primeiro Período

* Cálculo Diferencial e Integral I
* Geometria Analítica e Álgebra Linear
* Resolução de Problemas Algébricos
# Iniciação à Matemática[1]

Segundo Período

Programação de Computadores
* Cálculo Diferencial e Integral II
* Resolução de Problemas Geométricos
* Álgebra Linear I

Terceiro Período

Cálculo Numérico
Estatística e Probabilidades
Fundamentos de Mecânica
Introdução à Física Experimental
* Cálculo Diferencial e Integral III
* Equações Diferenciais A

Quarto Período

Licenciatura	*Bacharelado*
Fundamentos de Eletromagnetismo	Fundamentos de Eletromagnetismo
# Fundamentos de Álgebra Elementar	Fundamentos de Álgebra Elementar
Sociologia da Educação	Introdução à Geometria Diferencial
#Matemática e Escola I	Variável Complexa

[1] Em alguns documentos, a disciplina é referida com o nome Iniciação Matemática, em outros a denominação empregada é Iniciação à Matemática. O mesmo acontece com Fundamentos da Álgebra Elementar, Fundamentos da Análise e Fundamentos da Geometria Plana e Desenho Geométrico, que são referidas em alguns documentos oficiais como Fundamentos de Álgebra Elementar, Fundamentos de Análise e Fundamentos de Geometria Plana e Desenho Geométrico. Neste texto, usaremos sempre as últimas formas.

Optativa Direcionada (Física)	Optativa Direcionada (Física)
Psicologia da Educação, Desenvolvimento e Aprendizagem	

Quinto Período

Licenciatura	***Bacharelado***
Optativa Direcionada (Física)	Optativa Direcionada (Física)
# Fundamentos de Análise	Análise I
#Matemática e Escola II	Álgebra Linear II
Didática de Licenciatura	
Política Educacional	

Sexto Período

Licenciatura	***Bacharelado***
* Variável Complexa	Análise II
* Matemática e Escola III	Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias
* Fundamentos de Geometria Plana e Desenho Geométrico	Álgebra I
Optativa Direcionada (Física)	Optativa Direcionada (Física)
Carga Optativa	

Sétimo Período

Licenciatura	**Bacharelado**
#Prática de Ensino de Matemática	Álgebra II
* Geometria Espacial	Análise III
* História das Ciências Exatas	História das Ciências Exatas
Carga Optativa	Carga Optativa

O **Oitavo Período** do Bacharelado é composto das disciplinas Introdução às Equações Diferenciais Parciais, Geometria Moderna e uma Carga Optativa.

Agrupando, sem preocupação com definições precisas, as disciplinas obrigatórias do curso de Licenciatura em quatro classes que denominamos "Disciplinas de Conteúdo Matemático", "Disciplinas Integradoras", "Disciplinas Pedagógicas" e "Disciplinas Complementares" teríamos a seguinte configuração:

Classe 1: Disciplinas de Conteúdo Matemático

Cálculo Diferencial e Integral I

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Cálculo Diferencial e Integral II

Álgebra Linear I

Cálculo Diferencial e Integral III

Equações Diferenciais A

Fundamentos de Álgebra Elementar

Fundamentos de Análise

Variável Complexa

Fundamentos de Geometria Plana e Desenho Geométrico

Geometria Espacial

A carga horária total dessa classe é de 870 horas, o que perfaz cerca de 41% da carga horária obrigatória do curso.

Classe 2: Disciplinas Complementares

Programação de Computadores

Cálculo Numérico

Estatística e Probabilidades

Disciplinas da Física

História das Ciências Exatas

Iniciação à Matemática

Resolução de Problemas Algébricos

Resolução de Problemas Geométricos

A carga horária dessa classe é de 705 horas, o que dá cerca de 33% da carga obrigatória total do curso.

Classe 3: Disciplinas Integradoras

Matemática e Escola I

Matemática e Escola II

Matemática e Escola III

Prática de Ensino de Matemática

A carga horária dessa classe é de 300 horas, o que dá um pouco mais de 14% do total das obrigatórias do curso.

Classe 4: Disciplinas Pedagógicas

Sociologia da Educação

Psicologia da Educação, Desenvolvimento e Aprendizagem

Didática de Licenciatura

Política Educacional

A carga horária dessa classe é de 240 horas e representa, portanto, menos de 12% do total das obrigatórias do curso.

O conhecimento matemático sobre os números, trabalhado no curso diurno de licenciatura em matemática da UFMG

De acordo com a nossa análise, o conhecimento matemático a respeito dos números que a proposta curricular do curso de licenciatura em matemática toma como fundamental para a formação inicial do professor da escola básica — e que é efetiva e sistematicamente trabalhado no curso — encontra-se concentrado nas disciplinas Fundamentos de Álgebra Elementar e Fundamentos de Análise. Restringimo-nos, então, a essas duas disciplinas no desenvolvimento da descrição proposta. Antes disso, no entanto, faremos uma pequena digressão, comentando a respeito das disciplinas Iniciação à Matemática, Matemática e Escola I, Matemática e Escola II e Prática de Ensino de Matemática. Esses comentários, envolvendo particularmente tais disciplinas, se devem, basicamente, a dois motivos. Em primeiro lugar, os programas de Matemática e Escola I e Matemática e Escola II referem-se explicitamente ao tema em questão (números) embora, segundo depoimentos de alguns dos professores entrevistados, não haja uma correspondência efetiva entre o que propõem esses programas e o que ocorre no desenvolvimento deles em sala de aula. Isto equivale a dizer que os programas foram modificados de fato, mas não oficialmente.

Em segundo lugar, as três últimas disciplinas — de modo especial a Prática de Ensino — têm sido pensadas como o espaço "natural" no processo de formação do professor, onde deveriam ser desenvolvidas as discussões referentes ao tema, quando se trata de uma abordagem mais ligada a questões da prática docente escolar. No entanto, um tratamento sistemático e profundo desse tema, que corresponda adequadamente à sua complexidade e importância dentro da prática escolar, não nos parece caber — e de fato não tem sido desenvolvido — no espaço de formação reservado a essas disciplinas dentro do currículo em vigor. Esse espaço vem sendo tradicionalmente ocupado pela discussão de questões que dizem respeito a aspectos gerais das relações entre matemática, educação escolar, ensino e aprendizagem da matemática, prática docente escolar e a própria instituição escola.

Quanto à Iniciação à Matemática, também consideramos necessário esclarecer as razões pelas quais não a consideramos nesta descrição, uma vez que, em algumas versões em que se trabalha com a referida disciplina (dependendo do professor), tem sido adotado um texto (NIVEN, 1984) que trata especificamente dos sistemas numéricos. Sobre essa disciplina comentaremos mais adiante.

Comecemos com a consideração das disciplinas Matemática e Escola I, Matemática e Escola II e Prática de Ensino de Matemática. Para referência, apresentamos no Apêndice A as ementas e os respectivos programas dessas disciplinas. Os das duas primeiras referem-se explicitamente ao desenvolvimento de uma reflexão sobre questões relativas ao ensino escolar de tópicos como números inteiros, divisibilidade, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, frações, números reais, topologia da reta etc. (cf. Apêndice A). Tais reflexões caracterizariam uma contribuição efetiva para a ampliação da formação do professor no que se refere ao conhecimento matemático sobre os sistemas numéricos e estariam, então, dentro do escopo da descrição que fazemos. Entretanto, as reflexões a que se referem os programas citados não se realizam de forma sistemática, isto é, não fazem parte permanente das atividades de sala de aula sempre que essas disciplinas são oferecidas. De acordo com os professores entrevistados, essa parte do programa é contemplada através da seguinte atividade: os alunos se dividem em grupos, cada grupo escolhe um determinado tópico e propõe — num texto ou em uma apresentação oral aos colegas de turma ou, ainda, em ambas as formas — o que poderia ser caracterizado como uma proposta de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, no ensino daquele tópico na escola básica. Deste modo, a discussão sobre o ensino escolar de um determinado assunto depende de que este assunto seja escolhido por algum grupo de alunos, o que significa que, na prática, nenhum dos tópicos citados nos programas é sistematicamente tratado. Além disso, somente o grupo de alunos que escolheu certo tópico irá estudar, analisar e propor alternativas para o ensino do mesmo; os outros irão apenas assistir às apresentações e participar dos debates que, eventualmente, vierem a se seguir a essas apresentações.

Quanto à Prática de Ensino de Matemática, a ementa e os programas relacionados no Apêndice A são bastante claros: não se trata de uma disciplina que vise uma abordagem detalhada e sistemática de um tópico específico do conhecimento matemático a respeito dos números. A disciplina trata, fundamentalmente, de questões gerais referentes ao processo ensino de matemática na escola básica. O tratamento de um tópico particular e específico da matemática escolar é feito apenas ocasionalmente, como parte de uma discussão mais abrangente (por exemplo, sobre o papel da contextualização do conhecimento no ensino escolar) ou como resultado da escolha de um grupo de dois ou três alunos, no desenvolvimento do *projeto de ensino* desse grupo (cf. atividade 2 do Programa 2003 da disciplina, no Apêndice A).

Entendemos assim que, apesar da contribuição inegável das disciplinas Matemática e Escola I e II e Prática de Ensino no sentido de aproximar o processo de formação do professor da discussão de questões relacionadas ao exercício da prática docente na escola básica, não se pode afirmar que algum elemento do saber matemático a respeito dos sistemas numéricos seja efetiva e sistematicamente trabalhado no desenvolvimento dos programas dessas três disciplinas no curso de licenciatura da UFMG.

Por último, antes de abordar as disciplinas Fundamentos de Álgebra Elementar e Fundamentos de Análise, apresentaremos algumas considerações necessárias a respeito da Iniciação à Matemática. A disciplina é do primeiro período, com uma carga horária de 30 horas (02 créditos). Observe-se que no primeiro período os alunos ainda não fizeram a opção entre bacharelado e licenciatura, sendo essa disciplina parte do núcleo comum de formação para ambas as modalidades. A ementa e o programa oficiais são apresentados abaixo:

Ementa: Análise de textos de Matemática usados no ensino de 2º grau e/ou no ensino de graduação.

Programa: Textos versando sobre:

1. Conteúdo de Matemática nas grandes áreas que a compõem: Álgebra, Geometria e Análise.
2. A relação da Matemática com as outras ciências.
3. A relação da Matemática com os campos de atuação do matemático como profissional.
4. História da Matemática.

Bibliografia básica:

Revista do Professor de Matemática - SBM.

NIVEN - *Números Irracionais e transcendentes;* SBM [2]

AZIMOV ISAAC - *No mundo dos números*.

Revista: *Matemática Universitária* - SBM.

KLINE, MORRIS - *O fracasso da Matemática Moderna* - IBRASA, SP.

Como se pode notar pela ementa, não se trata de um espaço curricular destinado ao desenvolvimento de uma discussão sistemática e específica a respeito dos sistemas numéricos. Entretanto, talvez devido ao fato de que a ementa possibilita diferentes interpretações, tem ocorrido uma certa alternância de enfoques, conforme o professor e as circunstâncias próprias de cada semestre letivo em que a disciplina é oferecida. Dados referentes aos 17 anos de vigência do atual currículo mostram que duas tradições foram se conformando no desenvolvimento do trabalho nessa disciplina. Uma delas, que poderia ser considerada hegemônica, caracteriza-se por uma interpretação da ementa e do programa que prioriza a leitura e discussão de textos, visando o desenvolvimento de uma maior "maturidade" no trato

---

[2] Observe-se a confusão entre os livros NIVEN, I. Números: Racionais e Irracionais, Rio de Janeiro: SBM, 1984 e FIGUEIREDO, D.G. Números Irracionais e Transcendentes, Rio de Janeiro: SBM, 1985.

com certos aspectos do conhecimento matemático. Assim, nessa tradição, as discussões freqüentemente se voltam para questões de natureza meta-matemática, abordando temas como "Lógica", "Verdade em Matemática", "Demonstrações em Matemática" e outros correlatos. Algumas vezes, ainda nessa primeira tradição, as atividades na Iniciação à Matemática visam suplementar o trabalho desenvolvido em outras disciplinas do mesmo período curricular, como Cálculo Diferencial e Integral I e Geometria Analítica e Álgebra Linear, nas quais os alunos estejam enfrentando dificuldades específicas. Outras atividades se desenvolvem a partir da leitura de artigos da Revista do Professor de Matemática e de outras publicações, a respeito de temas variados dentro da matemática.

No caso da segunda tradição, uma outra interpretação do programa da disciplina tem levado à utilização do texto "Números: Racionais e Irracionais" (NIVEN, 1984), que se constitui, então, na referência básica e é seguido com razoável fidelidade. Nesses casos, a disciplina se desenvolve basicamente centrada na discussão dos três ou quatro primeiros capítulos do referido livro, algumas vezes (mas não sistematicamente) acrescentando-se a leitura de artigos sobre outras questões como, por exemplo, a resolução das equações de terceiro e quarto graus.

No capítulo 1 de Niven (1984), os naturais são apresentados como "*os números usados para contar*" (p.10). Os inteiros são vistos como uma ampliação dos naturais, de modo a se obter o fechamento em relação à subtração. Seguindo a mesma estratégia, os racionais são uma ampliação dos inteiros onde vale o fechamento em relação à divisão (capítulo 2). Segue-se um estudo da representação decimal dos racionais. Embora não se discuta com maiores detalhes a questão do que seja "medir" um comprimento (ou qualquer outra grandeza), os reais positivos são vistos, no capítulo 3, como os números que medem as distâncias a um ponto fixo da reta. Segue a proposta de estabelecer uma correspondência biunívoca entre os reais (positivos) e as representações decimais infinitas. Em seguida, prova-se a irracionalidade de $\sqrt{2}$ (a demonstração clássica). O capítulo 3 contém, ainda, uma demonstração do Teorema de Tales, no caso em que a razão entre os segmentos determinados pelas retas transversais sobre as paralelas é irracional (uma discussão que, até onde temos conhecimento, não é desenvolvida satisfatoriamente nos textos de geometria elementar). Um brevíssimo comentário sobre a associação entre incomensurabilidade e irracionalidade é apresentado no parágrafo 3.6, cujo título é "as palavras que usamos". Em uma síntese bastante condensada, o que descrevemos acima é o material tratado nos três primeiros capítulos de Niven (1984).

Assim, o que se constata na disciplina Iniciação à Matemática são variações de programação em que, num extremo, não se discute praticamente nada a respeito do tema que nos interessa neste trabalho e, no outro, ele é o centro do enfoque desenvolvido. Para se ter uma idéia da freqüência de cada uma dessas formas de trabalho na disciplina, levantamos os seguintes dados: desde a implantação do atual currículo, em 1987, a disciplina foi oferecida 17 vezes (até 2003, inclusive), sendo que em sete oportunidades o livro Niven (1984) foi utilizado, enquanto nas 10 outras oportunidades configura-se o enquadramento na primeira tradição. Assim, decidimos não incluir a disciplina Iniciação à Matemática entre aquelas em que se observa um tratamento sistemático dos sistemas numéricos no curso de licenciatura em matemática da UFMG.

Passamos agora a descrever o conhecimento matemático sobre os sistemas numéricos trabalhado no curso, enfocando as duas disciplinas relacionadas anteriormente: Fundamentos de Álgebra Elementar e Fundamentos de Análise.

Fundamentos de Álgebra Elementar

A disciplina é do quarto período, com uma carga horária de 60 horas (04 créditos) e ainda faz parte do elenco comum aos cursos de bacharelado e licenciatura. A ementa e o programa oficiais são apresentados abaixo:

Ementa

Números inteiros. Polinômios de uma variável sobre R e C.

Programa

Números Inteiros: os princípios de indução matemática e da boa ordenação. Divisibilidade e o algoritmo da divisão. Sistemas de numeração. Números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética. MDC. Equações diofantinas lineares. MMC.

Polinômios Sobre R e C: definições e operações com polinômios. Divisibilidade e o algoritmo da divisão. Raízes de polinômios. MDC. Irredutibilidade e fatoração única. Irredutibilidade sobre C e R. O método das frações parciais.

Bibliografia básica

Grupo de Álgebra / UFMG - *Introdução à Teoria dos Números* - UFMG, 1988.

Shockley, J.E. - *Introduction to Number Theory*

Childes - *A Concrete Introduction to Higher Algebra*

Birkhoff and McLane - *A Survey of Modern Algebra*

Jacy Monteiro, L.H. - *Elementos de Álgebra*

Grupo de Álgebra / UFMG - *Introdução ao Estudo dos Polinômios* - UFMG, 1988

No caso dessa disciplina, não tem havido grandes variações no tratamento dos tópicos do programa. Dados dos últimos 10 anos indicam que a referência bibliográfica básica utilizada na disciplina, para a parte de Números Inteiros, é o texto produzido pelo "Grupo de Álgebra" (um grupo de professores, alguns já aposentados, do Departamento de Matemática da UFMG), numa versão datada de 1988, intitulada *Introdução à Teoria dos Números* (GRUPO DE ÁLGEBRA, 1988). Esporadicamente, outros textos têm sido adotados como, por exemplo, Domingues (1991) e Milies e Coelho (1998).

Passemos a uma descrição do modo como são abordados os tópicos do programa da disciplina, no que se refere aos números naturais e inteiros. Tomaremos como referência o texto Grupo de Álgebra (1988).

Os princípios da indução e da boa ordenação

No texto Introdução à Teoria dos Números (GRUPO DE ÁLGEBRA, 1988), o segundo capítulo é dedicado ao Princípio da Indução e ao Princípio da Boa Ordem. O seguinte plano de abordagem é apresentado ao final da introdução:

> Em uma teoria matemática, muitas vezes resultados são enunciados a partir da consideração de casos particulares (...) mas eles só são tidos como verdadeiros se puderem ser demonstrados (...) isto é, deduzidos de proposições já conhecidas e aceitas. Entre estas últimas estão os postulados que são proposições que não são demonstradas e nos quais está fundamentada a teoria.
>
> Neste capítulo trataremos dos números naturais <u>a partir de um dos postulados que os caracterizam, a saber, o Princípio da Indução Matemática</u>. Veremos então como utilizá-lo na demonstração de afirmações a respeito dos números naturais e dentre estas trataremos da que chamamos "Princípio da Boa Ordenação" (GRUPO DE ÁLGEBRA, 1988, p. 9-10, grifo nosso).

A seguir, desenvolve-se uma pequena discussão sobre a diferença entre dedução e indução, em que dedução é apresentada como uma aplicação de uma afirmação geral a um caso particular e indução como a construção de uma afirmação geral a partir de casos particulares que sejam reconhecidos como verdadeiros. Com a apresentação e discussão de vários exemplos, enuncia-se, finalmente, a primeira forma do Princípio da Indução. Com o propósito de tornar mais fácil o entendimento desse Princípio, apresenta-se o "modelo" das peças de dominó em que, a partir da primeira, cada uma delas, ao cair, derruba a seguinte, concluindo-se então que "todas" irão cair. Após alguns exemplos de demonstração por indução, chega-se à segunda forma do Princípio, apresentando-se agora um exemplo em que o uso desta facilita a prova do resultado. Em seguida, demonstra-se a segunda forma supondo válida a primeira. Por fim prova-se o Princípio da Boa Ordem (PBO) a partir da segunda forma do Princípio da Indução e pede-se, em um exercício, a demonstração de que o PBO implica a primeira forma, o que estabeleceria, então, a equivalência dos três enunciados.

Divisibilidade e o algoritmo da divisão. Sistemas de numeração

No capítulo que trata desse tópico em Grupo de Álgebra (1988) apresenta-se o plano a ser desenvolvido:

> Neste capítulo apresentaremos o resultado conhecido hoje como o lema da divisão de Euclides. A partir desse resultado demonstraremos o teorema da representação de um número numa base qualquer b > 1 e obteremos também alguns critérios de divisibilidade. (Ibid., p. 34)

O primeiro ponto a ser tratado é, portanto, o algoritmo da divisão, isto é, demonstrar que, dados dois inteiros *a* e *b,* sendo *b* não nulo, existem dois únicos inteiros *q* e *r* tais que $a = bq + r$ com $0 \leq r < |b|$. Apresenta-se inicialmente uma argumentação geométrica, em que um número natural *n* é interpretado como o comprimento do segmento de reta que contém *n* vezes uma unidade arbitrária, retirando-se daí um significado geométrico para as noções de múltiplo e divisor entre os naturais e concluindo-se a validade "intuitiva" desse resultado, para *a* e *b* naturais. Passa-se, em seguida, à "demonstração formal" do resultado, provando-o a partir do Princípio da Indução. Comenta-se a idéia de valor absoluto, estende-se a noção de múltiplo e divisor para Z e desenvolve-se a demonstração do lema de Euclides para números inteiros, utilizando-se o resultado já provado para os naturais. Em seguida provam-se as seguintes proposições:

(i) se *a* divide *b* então *a* divide $-b$

(ii) se *a* divide *b* e *a* divide *c* então *a* divide $(b + c)$

(iii) se *a* divide $(b + c)$ e *a* divide *b* então *a* divide *c*

(iv) se a divide *b* e *b* divide *a* então $a = b$ ou $a = -b$

(v) se *a* divide *b* e *a* divide *c* então *a* divide $(bx + cy)$, para quaisquer *x* e *y* inteiros

(vi) se *a* divide *b* e *b* divide *c* então *a* divide *c*

Utilizando algumas dessas propriedades e noções associadas ao sistema decimal, apresenta-se a demonstração dos critérios de divisibilidade por 2, por 9 e por 11, propondo-se como exercício os casos por 5 e por 3.

Com relação aos sistemas de numeração, o texto apresenta, no primeiro capítulo, uma breve descrição histórica, comentando o processo de contagem, os sistemas não posicionais de registro e, finalmente, explicando a lógica dos sistemas posicionais de representação dos números naturais. Exemplos de representação de certos números nas bases dez, cinco e doze são apresentados.

O capítulo termina com a conclusão, claramente induzida pelos exemplos discutidos, de que é possível representar qualquer número natural, fixada uma base b > 1. Para a demonstração formal desse fato remete-se ao capítulo que trata do algoritmo da divisão, quando se faz uso do Lema de Euclides e da indução. Num apêndice a esse terceiro capítulo, comenta-se a representação decimal dos racionais nos seguintes termos:

> Apêndice: A representação decimal dos racionais
>
> Um número racional é um número que pode ser escrito na forma a/b, onde *a* e *b* são inteiros e b não é zero. Por exemplo, -3/2, 1/7, 3 = 3/1, 25/12, 18/8 são números racionais. Como todo número inteiro *a* pode ser escrito como a/1 temos que todo inteiro é racional. Um número racional pode ser escrito de várias maneiras diferentes: (-2)/(-14) = 1/7 = 2/14 = 3/21 = ... e estas são chamadas formas equivalentes do número racional. Existe uma outra maneira de representar um número racional que é chamada a sua representação decimal, como: -3/2 = -1,5 1/7 = 0,14257 14257 14257.... 3 = 3,0 25/12 = 2,08333... 18/8 = 2,25
>
> Essas expressões decimais são obtidas dividindo-se o numerador pelo denominador, segundo o algoritmo da divisão, multiplicando-se o resto por 10 e em seguida dividindo-se o último número obtido pelo denominador e assim sucessivamente [*Seguem dois exemplos de divisão: 18 por 8 e 1 por 7. Observação nossa*].
>
> Se no decorrer do processo descrito anteriormente obtivermos um resto nulo, como no caso 18/8, então a expressão decimal é finita. No entanto podemos nunca obter um resto nulo, como no caso 1/7, quando obtivemos os restos 1, 3, 2, 6, 4, 5, e então novamente o resto 1. Nesse ponto reaparece a divisão de 10 por 7 e uma parte dos algarismos da expressão decimal de 1/7 começa a se repetir. Em ambos os casos dizemos que a expressão decimal é periódica (daí o nome dízima periódica) já que podemos escrever 2,25 = 2,25000...
>
> No caso geral a/b, sabemos que ao efetuarmos a divisão de *a* por *b* os únicos restos possíveis são 0, 1, ..., b - 1. Portanto se não obtivermos o resto zero podemos ter certeza que após um número finito de operações haverá a repetição de algum resto dando origem a um período não nulo.
>
> Passaremos agora à demonstração formal desse resultado. (GRUPO DE ÁLGEBRA, 1988, p. 46-48)

O apêndice termina com a prova formal do fato de que a representação decimal de qualquer número racional é periódica, desde que se considerem também os casos em que o período é zero.

Números primos e o Teorema Fundamental da Aritmética

Retomando, brevemente, a abordagem geométrica dos “Elementos” de Euclides para observar que certos números contêm uma quantidade “exata” (isto é, inteira) de vezes algum múltiplo da unidade e outros não, apresenta-se, na primeira página do capítulo IV de Grupo de Álgebra (1988), a definição de número primo: *seja n∈ N, com n > 1. Dizemos que n é um número primo se seus únicos divisores positivos são a unidade e ele mesmo. Caso contrário,* *dizemos que n é composto.* Em seguida desenvolvem-se alguns resultados com base nos quais se justifica o "crivo de Eratóstenes". Segue-se um exemplo em que se constrói a tabela de todos os primos até 100.

Dois resultados sobre a distribuição dos primos na seqüência dos naturais são, depois, demonstrados:

a) *existem infinitos números primos (p.56)*

b) *dado um número natural $n \geq 2$ existem n números compostos consecutivos (p.57)*

Antes de abordar o Teorema Fundamental, cita-se, sem demonstração, um resultado que se refere à comparação entre a distribuição dos primos na seqüência dos naturais até n (para n grande) e os valores das funções $f(x) = \dfrac{x}{\log x}$ e $g(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt$. Trata-se do seguinte resultado (p.57): *seja, para x positivo, a função $\pi(x)$ que associa a cada x o número de primos menores que x. Então, tem-se:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{g(x)} = 1$$

Em seguida, demonstra-se o Teorema Fundamental da Aritmética, fazendo uso do Princípio da Indução e do PBO. Como corolário, segue o seguinte resultado: se um número primo *p* divide um produto *ab*, então ou *p* divide *a* ou *p* divide *b* (p. 61). Encerrando o assunto, apresenta-se uma seção em que as tentativas de se estabelecerem fórmulas que produzam todos os números primos (ou apenas números primos) são comentadas. São citados então os seguintes resultados, sem demonstração:

1. Legendre mostrou que não existe função algébrica racional que forneça somente primos (existem funções não polinomiais que geram somente primos).
2. Fermat conjecturou que todo número da forma $2^{2^n} + 1$ é um número primo para qualquer n natural. Mas Euler mostrou que para n = 5 obtém-se um número divisível por 641.
3. Outra conjectura de Fermat, que veio a se mostrar falsa, é a de que um número natural n (maior que 1) é primo se e somente se $2^n - 2$ é divisível por n.
4. Comenta-se sobre os números de Mersenne, da forma $M_k = 2^k - 1$, os quais satisfazem a seguinte propriedade: se M_k é primo, então k é primo (exercício 17, p.68). M_k assume um valor primo para muitos valores primos de k (mas não para qualquer um. Por exemplo, para k = 67 M_k não é primo).

Num Apêndice a esse capítulo IV, sob o título “Expressões Decimais Finitas e Infinitas”, o texto apresenta a demonstração da seguinte proposição: “*Um número racional, na forma irredutível a/b, possui uma representação decimal finita se, e somente se, o denominador b não tiver outros fatores primos além de 2 e 5*” (p.65). Na prova utiliza-se o teorema da decomposição de naturais em fatores primos, supondo-se conhecidas as noções de representação decimal finita e infinita. E remete-se a Niven (1984) o leitor interessado em outros resultados sobre representação decimal dos números racionais.

MDC, Equações Diofantinas lineares, MMC

O capítulo V de Grupo de Álgebra (1988) se dedica ao estudo do máximo divisor comum e do mínimo múltiplo comum, enquanto o capítulo VI (o último) se refere às equações diofantinas lineares. Repetindo a estratégia dos outros capítulos, o texto relembra a interpretação geométrica de número natural utilizada nos “Elementos” de Euclides — em que a expressão *a* mede *b* é usada para dizer que *a* é divisor de *b*, isto é, que um segmento de tamanho *a* cabe exatamente um número inteiro de vezes no segmento de tamanho *b* — e em seguida, “usando linguagem atual”, dá a seguinte definição: *dados dois inteiros a e b, não simultaneamente nulos, dizemos que um inteiro d é máximo divisor comum de a e b se d satisfaz às seguintes propriedades: (i) d divide a e d divide b (ii) se c divide a e c divide b, então* $c \leq d$ (p.70).

Após enunciar (deixando a demonstração como exercício para o leitor) algumas propriedades do m.d.c. que seguem imediatamente da definição, passa-se à questão do cálculo do máximo divisor comum de dois números inteiros. Num primeiro exemplo, calcula-se o m.d.c.(24, –18), listando todos os divisores comuns e escolhendo o maior deles. Observando que esse processo pode ser muito trabalhoso em determinadas circunstâncias, o texto enuncia e prova — por indução no número de passos do algoritmo — o método das divisões sucessivas para o cálculo do m.d.c. de dois naturais. Como m.d.c.(a,b) = m.d.c.(|a|, |b|), conclui-se que o algoritmo é válido também para achar o m.d.c. de dois números inteiros. Segue-se a demonstração do resultado que garante a expressão do m.d.c. de dois números como uma combinação linear deles, acompanhado de alguns dos seus corolários:

1. *Se p é primo, p divide o produto ab e p não divide a então p divide b* (p.78). Observe-se que esse resultado já havia sido provado como corolário do Teorema Fundamental da Aritmética (cf. GRUPO DE ÁLGEBRA, 1988, p.61). A outra prova (usando o fato de que m.d.c.(a,p) ser 1 implica que 1 é uma combinação linear de *a* e *p*) é qualificada de “mais elegante” (p.78)

2. Uma nova caracterização do m.d.c.: *Sejam a e b inteiros não simultaneamente nulos. Um inteiro d é o máximo divisor comum de a e b se e somente se satisfaz às seguintes propriedades: (i) d > 0 (ii) d divide a e d divide b (iii) se c divide a e c divide b então c divide d* (p.79). Prova-se a equivalência das duas definições.
3. *Sejam a, b e c inteiros não nulos. Então:*
   - *(i) se c divide ab e m.d.c.(b,c) = 1 então c divide a*
   - *(ii) se m.d.c.(a,c) = m.d.c.(b,c) = 1 então m.d.c.(ab,c) = 1*
   - *(iii) se m.d.c.(a,b) = d então m.d.c.(a/d,b/d) = 1*
   - *(iv) se a divide c e b divide c e m.d.c.(a,b) = d então ab/d divide c*
   - *(v) se a divide c e b divide c e m.d.c.(a,b) = 1 então ab divide c* (p.80)

Encerra-se a seção com a demonstração formal do fato de que o m.d.c.(a,b) é o produto dos fatores primos comuns a *a* e *b*, tomados com o menor expoente com que aparecem nas duas decomposições.

Na seção seguinte, aborda-se a noção de mínimo múltiplo comum. Apresenta-se a seguinte definição: *sejam a e b inteiros não nulos. Um inteiro m é mínimo múltiplo comum de a e b se m satisfaz às seguintes propriedades: (i) m > 0 (ii) a divide m e b divide m (iii) se a divide c, b divide c e c > 0 então m ≤ c* (p.83). Analogamente ao caso do máximo divisor comum, seguem-se as seguintes proposições e suas respectivas demonstrações (p.83-86):

1. se *a* e *b* são inteiros não nulos então:
   - (i) m.m.c.(a,b) ≥ max{|a|, |b|}
   - (ii) m.m.c.(a,b) é único
   - (iii) m.m.c.(a,b) = m.m.c.(b,a)
   - (iv) m.m.c.(a,b) = m.m.c.(|a|, |b|)
2. sejam *a* e *b* inteiros não nulos. Um inteiro m é mínimo múltiplo comum de *a* e *b* se satisfaz às seguintes propriedades: (i) m > 0 (ii) *a* divide *m* e *b* divide *m* (iii) se *a* divide *c* e *b* divide *c* então *m* divide *c*
3. se *a* e *b* são inteiros não nulos então o m.m.c.(a,b) é igual ao produto dos fatores primos comuns e não comuns a *a* e *b*, tomados com o maior expoente com que aparecem nas decomposições.
4. se *a* e *b* são inteiros não nulos então m.d.c.(a,b)× m.m.c.(a,b) = |ab|

Finalmente, sobre as equações diofantinas lineares, demonstra-se que a condição necessária e suficiente para que uma equação diofantina do tipo ax + by = c admita solução é que o m.d.c.(a,b) divida c. Outro resultado demonstrado no texto é o seguinte: se uma equação diofantina em duas variáveis admite uma solução (x_0, y_0) então, para qualquer t inteiro, o par ($x_0 + tb_1$, $y_0 - ta_1$) é solução, onde $b_1 = b/d$, $a_1 = a/d$ e d = m.d.c.(a,b). Finalmente, prova-se que essas são todas as soluções inteiras possíveis. Com isso, encerra-se o programa da disciplina referente aos números inteiros. É muito comum, entretanto, que se desenvolva também o estudo das congruências módulo n, quando, então, se demonstram os teoremas de Euler e Wilson — *se a é primo com m então* $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod(m)$ e *se p é primo então* $(p-1)! \equiv -1 \bmod(p)$ — e provam-se alguns dos critérios de divisibilidade. Dos teoremas de Euler e Wilson decorrem as relações $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \bmod(p)$ se a é um resto quadrático e $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \bmod(p)$ se a não é um resto quadrático, onde *p* é primo e *a* não é múltiplo de *p*.

Para a teoria de congruência, outros textos têm sido utilizados, já que Grupo de Álgebra (1988) não aborda esse assunto: Domingues (1991) e Milies e Coelho (1998), entre outros.

Fundamentos de Análise

Essa disciplina tem carga horária de 90 horas (06 créditos), faz parte do quinto período do curso e é específica para a licenciatura. Os alunos do bacharelado fazem, também no quinto período, a disciplina Análise I que, em princípio, tem outra abordagem. A ementa e o programa de Fundamentos de Análise são os seguintes:

Ementa:

Conjuntos Q e R; seqüências numéricas; funções; funções contínuas; funções elementares; derivada de uma função.

Programa:

1. Conjuntos numéricos: relações de equivalência em um conjunto; construção de Q a partir de Z; o conjunto dos números reais de um ponto de vista intuitivo; rudimentos de topologia na reta; conjuntos enumeráveis e não enumeráveis; limites e seqüências numéricas; seqüências de Cauchy.
2. Funções reais: (definição de função, funções sobre e injetivas, função composta e função inversa). A função exponencial e a logarítmica. A função exponencial real como uma extensão da função exponencial definida nos racionais. Definições alternativas. Discussão (sic), continuidade de função real de variável real. Teorema do valor intermediário. Derivabilidade de funções reais de valor real. Teorema do valor médio.

Bibliografia básica:

1. Klein, Felix - Matemática Elementar desde um ponto de vista superior
2. Richardson, Moses - Fundamentals of Mathematics
3. Spivak, M. – Calculus - Ed. Benjamim
4. Courant, R – Que es la matemática?

Para comparação, apresentamos a ementa e o programa de Análise I, cuja carga horária é de 120 horas (08 créditos):

Ementa:

Números reais; introdução à topologia da reta; funções contínuas; funções deriváveis e integráveis.

Programa:

Números Reais: axiomática, ênfase na introdução à demonstração. Sup. e Inf. (aplicações elementares).

Introdução à Topologia da reta: seqüências (limites, monotonicidade, subseqüência), seqüências de Cauchy, Bolzano-Weierstrass, abertos, fechados e compactos da reta.

Funções contínuas: limites, continuidade, Teorema do valor intermediário, Teorema de Weierstrass (extremos de funções contínuas em intervalos compactos).

Derivadas: Definição, demonstração das regras de derivação, Teorema do valor médio e conseqüências, relação entre funções contínuas e deriváveis.

Integração: Integrais inferior e superior, funções integráveis, integral como limite de somas de Riemann, primitivas, Teorema fundamental do cálculo. Teorema da média.

Fórmula de Taylor com resto integral e outros restos. Regra de L'Hôspital, logaritmo e exponencial.

Bibliografia básica

1. Figueiredo, D.G. *Análise I.* RJ, LTC
2. Apostol, T.M. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley
3. White, A.J. *Análise Real: uma introdução*. São Paulo, Edgard Blucher
4. Spivak, M. *Calculus.* NY, Benjamin

Recomendadas:

1. Lima, E.L. *Curso de Análise* - volume I, Projeto Euclides, IMPA-CNPq
2. Brand, L. *Advanced Calculus* – NY, John Wiley
3. Lang, S. *Analysis* – vol.I, Addison-Wesley
4. Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis* – McGraw Hill

Embora numa forma ambígua e pouco explícita[3], o projeto do currículo parece indicar que essas duas disciplinas deveriam desenvolver abordagens diferenciadas, considerando, possivelmente, as especificidades do processo de formação profissional em cada uma das modalidades do curso — bacharelado e licenciatura. De fato, algumas disciplinas da licenciatura foram projetadas para desempenhar papéis que estavam associados, desde o início, a alguns dos grandes desafios com que se defrontava o Colegiado do curso na tentativa de desenvolvimento de um projeto inovador de formação inicial (cf. UFMG, 1986a, 1986b).

[3] Compare-se os programas das duas disciplinas na parte comum. O de Fundamentos de Análise apresenta os tópicos sem apontar elementos específicos a serem tratados ("rudimentos" de topologia da reta, continuidade de função real, etc.), enquanto o de Análise I é bastante mais específico. Em Fundamentos de Análise, **Q** deve ser construído formalmente a partir de **Z**, mas **R** deve ser objeto de uma abordagem "intuitiva".

Em alguns casos, como o das disciplinas Matemática e Escola I, II e III, a tentativa era no sentido de construir formas efetivas de integração entre a Faculdade de Educação, o Departamento de Matemática e a Escola (GOMES, 1997). No caso particular de Fundamentos de Análise, o desafio era a construção de uma abordagem do conteúdo matemático voltada especificamente para a formação do professor da escola básica. Entretanto, a implementação efetiva desse projeto ressentiu-se, entre outros elementos, da ausência de um grupo de pesquisa consolidado que pudesse experimentar, avaliar sistematicamente e dar suporte a essas experiências e promover, na prática, o aprofundamento crítico das concepções inovadoras contidas na proposta curricular. Há registros de experimentações dispersas na disciplina Fundamentos de Análise, baseadas essencialmente em esforços individuais e sem continuidade, desde as primeiras vezes em que foi lecionada. No início dos anos 90, uma professora que lecionou essa disciplina por dois anos consecutivos redigiu alguns textos (utilizados na disciplina, mas não publicados), em que se procurava abordar os números reais de uma perspectiva que levasse em conta a especificidade da formação do licenciado. Em meados dessa mesma década, desenvolveu-se também um subprojeto do Projeto SPEC/UFMG[4], cujo objetivo era a concretização de uma proposta de abordagem dos sistemas numéricos especificamente voltada para a formação do professor da escola básica. Desse projeto resultaram algumas experiências de trabalho nessa disciplina. Entretanto, nenhuma dessas propostas alternativas vieram a se consolidar. De um lado, porque não se desenvolveu uma fundamentação teórica mais consistente para elas e, de outro, uma série de questões de ordem prática[5] acabaram concorrendo para a estabilização de uma abordagem semelhante àquela que se faz no bacharelado, cumprindo-se, porém, um programa mais curto e menos abrangente em cada um dos tópicos. Assim, uma constatação que vai de encontro ao que parecia indicar a proposta curricular original é a de que, nas últimas cinco vezes em que Fundamentos de Análise foi oferecida, o texto adotado foi *Análise I,* de Djairo G. de Figueiredo, o qual constitui, também, a referência bibliográfica fundamental indicada para a disciplina Análise I, do bacharelado.

Como quase todos os professores de Fundamentos de Análise entrevistados afirmaram que o livro foi seguido com bastante fidelidade, tomaremos esse texto (FIGUEIREDO, 1975)

[4] Programa de Apoio à Formação de Professores e à Docência em Ciências e Matemática nos Ensinos Médio e Fundamental — PADCT/SPEC 01/94 – 0. Realizado na UFMG de fevereiro de 1997 a julho de 1998.
[5] Como uma das principais, talvez, o fato de que os professores da disciplina possuam, em sua maioria, uma formação voltada para a pesquisa em Matemática, não tendo familiaridade com as questões que se colocam para o professor da escola básica em sua prática docente.

como a referência essencial para a nossa descrição daquilo que é abordado a respeito dos números nessa disciplina[6].

Um estudo específico sobre os sistemas numéricos — com ênfase nos reais, o "ambiente" no qual estão definidas e tomam valores as funções que constituem o objeto dos estudos posteriores no texto — pode ser encontrado no capítulo 1 do livro de Figueiredo (1975), sob o título *Números Reais*. Na seção 1.1 apresentam-se a noção de função, a nomenclatura associada ao conceito (domínio, contradomínio, imagem, etc.) e alguns exemplos em que os domínios são conjuntos numéricos como **R** ou $\mathbf{R}^+$ (os quais são tratados, a essa altura, como objetos conhecidos).

Na página 3, inicia-se efetivamente a discussão a respeito dos números. No começo da seção 1.2 (denominada *Números Racionais*), são apresentados os símbolos **N**, **Z** e **Q** para os conjuntos dos números naturais, dos inteiros e dos racionais, respectivamente, escrevendo-se: *Q - conjunto dos números racionais, isto é, dos números da forma p/q, onde p e q são inteiros e* $q \neq 0$ (p.3). O autor observa então que não está no programa do livro fazer um estudo sistemático desses três conjuntos numéricos. E acrescenta o seguinte comentário:

> Como o leitor deve observar, os números racionais nada mais são que as frações da Aritmética do curso fundamental. Quando lhe ensinaram a operar com as frações, a rigor, o que se estava fazendo era definir as operações de adição e multiplicação. As propriedades (1) a (6) dessas operações enunciadas a seguir, apesar de usadas freqüentemente, não receberam maior atenção. Isto parece explicável, porque os números inteiros gozam de quase todas essas propriedades. E, na verdade, se construirmos os racionais a partir dos inteiros, tais propriedades podem ser deduzidas facilmente de propriedades análogas para Z. Também foram ensinadas relações do tipo $8/6 = 4/3$ e $3/1 = 3$. No fundo essas duas relações são escritas por definição e, portanto, não se demonstram. A primeira define a relação de igualdade entre as frações, isto é, $p/q = r/s$ se $ps = qr$. A segunda igualdade faz uma identificação do conjunto Z com um subconjunto de Q, isto é, com o subconjunto $\{p/q \in Q: q = 1\}$. Portanto, com um certo abuso de linguagem, dizemos que Z é um subconjunto de Q. (FIGUEIREDO, 1975, p. 3)

As propriedades (1) a (6) a que se refere a citação acima são as que caracterizam a estrutura *corpo* a qual é apresentada logo a seguir, nos seguintes termos:

> Um *corpo* F é um conjunto de elementos x, y, z, ..., onde se acham definidas as operações de adição (i.e., a cada par de elementos x e y em F corresponde a um elemento de F que se designa por x + y) e de multiplicação (i.e., a cada par de elementos x e y em F corresponde a um elemento de F que se designa por xy) satisfazendo as propriedades que seguem.

[6]Em uma das entrevistas, foi relatado que, ao perceber que os alunos não conseguiriam "acompanhar" o texto, o professor decidiu começar o programa a partir do estudo das seqüências, "pulando" o capítulo I de Figueiredo (1975) e utilizando paralelamente outros textos considerados mais acessíveis, como Leithold, 1982. Alguns professores recomendaram, como referência auxiliar, o livro Análise Real (LIMA, 1989).

(1) Leis comutativas: $x + y = y + x$, $xy = yx$.

(2) Leis associativas: $(x + y) + z = x + (y + z)$ e $(xy)z = x(yz)$.

(3) Existência de um zero: existe um elemento $0 \in F$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in F$.

(4) Existência de uma unidade: existe um elemento $1 \in F$ tal que $x1 = x$.

(5) Existência de inversos: dado $x \in F$ existe $-x \in F$ tal que $x + (-x) = 0$, e dado $x \in F$, $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in F$ tal que $xx^{-1} = 1$.

(6) Lei distributiva: $(x + y)z = xy + xz$.

É imediato verificar que o conjunto Q dos racionais é um corpo. (Ibid., p. 4, grifo nosso)

Para provar a existência de números irracionais, o texto apresenta uma interpretação geométrica dos racionais e comenta, de passagem, que os racionais são densos na reta, mas não cobrem a reta toda, pois o número $\sqrt{2}$ **,** que mede a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos de medida 1, não é racional. Após a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ segue o comentário em que se anuncia o conjunto dos reais:

> O fato acima demonstrado de que existem pontos de R que não correspondem a elementos de **Q** indica uma deficiência dos racionais. Procederemos agora no sentido de obter um conjunto numérico mais amplo do que os racionais e cujos elementos estejam em correspondência biunívoca com os pontos de R. (Dois conjuntos A e B estão em correspondência biunívoca se a cada elemento de A corresponde um e somente um elemento de B e vice-versa). O conjunto que vai resolver essa questão é o corpo dos números reais. (Ibid., p. 5)

Assim, todo o estudo dos racionais é feito em menos de duas páginas do livro texto, começando no meio da página 3 e terminando no início da página 5, passando ainda pela definição geral da estrutura *corpo*. Desenvolve-se em seguida o estudo da estrutura *corpo ordenado*, incluindo as propriedades da relação de ordem em tal estrutura, as noções de *ínfimo* e de *supremo* em um corpo ordenado. Define-se o conjunto dos números reais como um corpo ordenado onde vale o seguinte postulado (Dedekind): *todo subconjunto não vazio, limitado superiormente, tem supremo.* Segue-se, então, o seguinte comentário:

> O Postulado de Dedekind realmente determina o corpo dos reais entre todos os corpos ordenados. (A rigor essa determinação é feita a menos de isomorfismos). O corpo **R** assim definido contém um subconjunto que está em correspondência biunívoca com o conjunto **Q** dos racionais. Na realidade essa correspondência goza da propriedade de preservar as operações de adição e multiplicação; correspondências biunívocas desse tipo tomam em Álgebra o nome de isomorfismos. Para todos os efeitos podemos simplificar essa questão do isomorfismo e simplesmente dizer que **R** contém **Q**. A reta R é um belo modelo geométrico para o corpo **R**: cada ponto de R representa um real e, vice-versa, a cada real corresponde um

ponto de R. As afirmações feitas no parágrafo requerem demonstração. O leitor poderá encontrá-las na referência [8][7]. (Ibid., p. 9)

Nos exercícios, é deixada para o leitor a demonstração de que o conjunto dos números reais é arquimediano (*dados a e b reais positivos, existe um inteiro n tal que na > b*) e de que **Q** é *denso* em **R**. Em seguida, retoma-se a questão da existência de reais que não são racionais mostrando-se que $b = \inf\{x \in \mathbf{Q}^+ : x^2 > 2\}$ satisfaz a relação $b^2 = 2$, o que significa que $\sqrt{2}$ é um número real. Como já havia sido demonstrado que $\sqrt{2}$ não é racional, segue que **Q** está propriamente contido em **R**. Em particular, **Q** não é completo.

No exercício 9 da p.10, pede-se para demonstrar que a equação $x^p = a$ tem uma e apenas uma solução real positiva, para *p* inteiro positivo e *a* real positivo. Define-se então, a partir desse resultado, a potência de base real positiva e expoente racional: $a^{p/q} = (a^p)^{1/q}$, no caso de p e q inteiros positivos, e $a^r = (a^{-r})^{-1}$ quando r é racional negativo (o símbolo b^{-1} representa o inverso multiplicativo de b). E adia-se para o capítulo 6, quando se abordam as funções exponencial e logarítmica, "*a questão de atribuir um sentido a expressões como $2^{\sqrt{2}}$, $10^{\sqrt{3}}$ e, em geral, a^x onde a é um real positivo e x é um número irracional*". (FIGUEIREDO, 1975, p.10)

Após uma pequena lista de exercícios em que se pede para demonstrar algumas das propriedades de potências inteiras e racionais do tipo $(ab)^r = a^r b^r$ $a^r.a^s = a^{r+s}$ e $(a^r)^s = a^{rs}$, lê-se o seguinte:

> **Comentários sobre a determinação de número real.** No começo desta Seção, definimos os números reais como sendo um corpo ordenado, onde vale o Postulado de Dedekind. Põe-se imediatamente a questão da existência de um tal corpo. Essa questão deve receber uma resposta positiva para que a definição dada de número real tenha sentido. Não é fácil provar que exista um corpo nas condições pedidas. Do ponto de vista histórico, essa questão foi resolvida relativamente tarde. Coube ao matemático alemão Richard Dedekind fazer a primeira apresentação rigorosa do conceito de número real. Isso foi feito em um pequeno livro *Continuidade e Números Irracionais* publicado em 1872. A ele se deve a noção de *corte*, com a qual é possível provar que *existe* um corpo ordenado, onde vale o Postulado de Dedekind (ver o que segue). Há um outro modo de introduzir os reais, através das chamadas sucessões de Cauchy (cf. Seç. 1.11).
>
> A atitude adotada no presente trabalho, além da vantagem de introduzir os números reais sem maiores delongas, fornece-nos os elementos de prosseguir com absoluto rigor. Cremos que essa é a melhor atitude a tomar em cursos introdutórios de Cálculo ou Análise. (FIGUEIREDO, 1975, p.11-12)

[7] JACY MONTEIRO, L.H. *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1969.

Completando os comentários citados acima, descreve-se sumariamente (em 10 linhas) o processo de construção dos reais a partir dos racionais, ao modo como o fez Dedekind, utilizando a idéia de corte. Antes de passar ao estudo das seqüências e séries numéricas, desenvolve-se um rápido estudo da noção de valor absoluto, definindo-se o valor absoluto de um número real como sendo o próprio número, se este for positivo ou nulo, e o seu oposto, se for negativo. Usando as propriedades de corpo ordenado, prova-se que $|c| = \sqrt{c^2}$ (teorema 1.1, p.12) e que se *a* e *b* são reais positivos com a < b então $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ (teorema 1.2, p.13). A partir desses dois resultados obtém-se a desigualdade triangular $|a + b| \leq |a| + |b|$. Terminando a seção 1.5, apresentam-se as formas de descrever intervalos abertos e fechados da reta usando desigualdades e valor absoluto (preparando, naturalmente, para o uso intensivo que virá desse instrumento nos capítulos seguintes, ao se tratar das definições formais e dos resultados sobre limites de seqüências, limites de funções, continuidade, derivada etc., envolvendo a linguagem dos épsilons e deltas).

Da seção 1.6 até a seção 1.13 (da p.17 até a p. 44) são estudadas as questões relativas à convergência de seqüências e séries de números reais. Na seção 1.14, p. 45-46, discute-se a questão da enumerabilidade de conjuntos e prova-se que **Q** é enumerável e que **R** não é. A partir daí (capítulo 2 e seguintes), o livro se dedica ao estudo das funções reais e conceitos associados, como continuidade, derivabilidade, integrabilidade etc. Não se desenvolve nenhum estudo que tome como objeto principal algum aspecto específico dos sistemas numéricos.

Ainda que, como se sabe, o estudo de seqüências e das funções contínuas se inter-relacione com a topologia dos conjuntos onde essas funções e seqüências são definidas e tomam valores, não trataremos, nesta nossa descrição, dos conhecimentos sobre os sistemas numéricos subjacentes ao estudo das seqüências e funções. Entretanto, destacaremos ainda três pontos relacionados diretamente aos números reais que o texto (FIGUEIREDO, 1975) aborda: a seção 1.11, em que se apresenta uma breve descrição da construção dos reais, usando as seqüências de Cauchy; a seção 1.13, na qual se aborda a representação decimal e uma parte do capítulo 6, em que se comenta a extensão da idéia de potência para expoentes irracionais.

Ao final da seção 1.11, na qual se demonstra que no conjunto dos reais uma seqüência é convergente se e somente se ela for uma seqüência de Cauchy, aparecem três pequenas notas relacionadas com a definição dessas seqüências. Na última delas, traça-se um esboço do método de construção dos reais a partir dos racionais, utilizando a noção de seqüências de Cauchy. Eis o teor dessa nota:

> Considere o conjunto C de todas as sucessões de Cauchy de números racionais. (Um elemento de C é uma sucessão de números racionais!) Como não desejamos distinguir entre sucessões que estão "perto" uma da outra (por exemplo, $1 + 1/n$ e $1 - 1/n$) consideraremos um novo conjunto C', cujos elementos são classes ou subconjuntos de C. (Um elemento de C' é um conjunto de sucessões de Cauchy de racionais!) Nesse conjunto C' definem-se operações de adição e multiplicação e demonstra-se que C' é um corpo. Define-se também uma ordem em C' e prova-se que com essa ordem C' é um corpo ordenado. Finalmente, demonstra-se que o corpo ordenado C' satisfaz o Postulado de Dedekind. Esse corpo C' é definido como o corpo dos reais. (FIGUEIREDO, 1975, p. 33, aspas no original)

A seção sobre representação decimal (p. 41-44) vem logo após o estudo das séries numéricas e, obviamente, a intenção é fazer um rápido estudo da representação decimal dos racionais e dos reais, usando os resultados obtidos sobre convergência de seqüências e séries. Para dar uma idéia mais exata do nível de formalismo com que se aborda a questão da representação decimal dos reais, reproduzimos integralmente o início dessa seção, em que se mostra que todo número real admite uma representação decimal.

> **1.13 Representação decimal**
>
> Nesta seção mostramos como os números reais podem ser representados por expressões decimais. Restringimo-nos aos reais do intervalo [0,1); os demais serão reduzidos a esses mediante translação conveniente por um inteiro. Uma *decimal* é uma sucessão cujos elementos são os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9; uma decimal será representada assim: $.a_1a_2a_3...$, onde o ponto antes dos a's é para indicar que estamos considerando apenas o intervalo [0,1), e a_i é um dos 10 algarismos acima. Seja **D** o conjunto de todas as decimais. Nosso objetivo será estabelecer uma correspondência biunívoca entre **D** e o conjunto dos reais no [0,1).
>
> Definimos a função f: **D** $\rightarrow$ **R** pela expressão $f(.a_1a_2....) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$. Inicialmente observamos que essa série é convergente: de fato, ela é majorada pela série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$ cuja soma é 1. A seguir observamos que f não é injetiva pois,
>
> (1) $$f(.a_1...a_{j-1}(a_j - 1)99...) = f(.a_1....a_j00...)$$
>
> Por outro lado, se $\delta_1 = .a_1a_2...$, $\delta_2 = .b_1b_2...$ e $f(\delta_1) = f(\delta_2)$, mostraremos que δ_1 e δ_2 devem ser da forma das decimais que aparecem em (1). De fato seja j o primeiro índice onde o *a* é diferente de *b*; suponhamos $a_j < b_j$. Então, de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} = 0$, obtemos
>
> (2) $$\frac{1}{10^j} \leq \frac{b_j - a_j}{10^j} = \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^j};$$

e logo em (2) só temos igualdades e daí se segue que $b_j = a_j + 1$, $a_n = 9$ e $b_n = 0$ para $n \geq j + 1$. Se definirmos $\mathbf{D}^*$ como o subconjunto de **D** formado pelas decimais que não têm todos os elementos iguais a 9 a partir de certa ordem, então a função f, definida acima, restrita a $\mathbf{D}^*$ é *injetiva*. Mostramos agora que f é sobre [0,1) e, portanto, temos a correspondência biunívoca

$$\mathbf{D}^* \leftrightarrow [0,1)$$

$$.a_1a_2... \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Seja pois $r \in [0,1)$. Consideremos a decomposição $[0,1) = \bigcup_{j=0}^{9} \left[\frac{j}{10}, \frac{j+1}{10}\right)$ e, portanto, r pertence a um, e só um, desses subintervalos: $r \in I_1 = \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}\right)$. A seguir consideremos $\left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}\right) = \bigcup_{j=0}^{9} \left[\frac{a_1}{10} + \frac{j}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{j+1}{10^2}\right)$ e selecionemos a_2 tal que $r \in I_2 = \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2}\right)$. E assim por diante. Pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{I}_n$ consiste de um único ponto; $\bar{I}_n$ designa o intervalo fechado que tem as mesmas extremidades que I_n.

Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \ni r$, segue-se que a sucessão formada pelas extremidades esquerdas dos I_n converge para r e, portanto, $r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, e a decimal que se toma para corresponder a r é a $.a_1a_2...$. (FIGUEIREDO, 1975, p. 41-42).

O estudo da representação decimal se completa com as demonstrações dos fatos abaixo (já provados na disciplina Fundamentos de Álgebra), sendo que algumas partes são deixadas como exercício para o leitor:

1. Teorema 1.14 (transformação de dízimas periódicas em frações ordinárias) *A dízima periódica* $.a_1a_2...a_m\dot{b}_1...\dot{b}_n$ *é um número racional que pode ser escrito como* $\dfrac{a_1...a_mb_1...b_n - a_1...a_m}{9...90...0}$, *onde o denominador da fração é um número com n noves e m zeros.*
2. *(I) toda dízima periódica simples é igual a uma fração irredutível cujo denominador não é divisível por 2 nem por 5.*

3. *(II) uma dízima periódica composta com* *<u>m</u>* *termos na parte não periódica é igual a uma fração irredutível cujo denominador é divisível por* 2^m *ou* 5^m*, mas não por potências mais elevadas de 2 ou 5.*
4. *A recíproca de (I)*
5. *A recíproca de (II).*

Para finalizar comentamos brevemente a maneira pela qual se estende a noção de potência de base positiva para expoentes irracionais. No Capítulo 6, após o estudo da integral de Riemann, desenvolvido em capítulos anteriores, define-se $\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ para x real positivo. Interpreta-se o logaritmo de um número positivo como sendo a área da região entre o eixo das abcissas e a curva f(x) = 1/x, desde a abcissa 1 até o número considerado (com valor negativo se o número é menor que 1 e zero se o número for 1). Prova-se que a função logaritmo, assim definida, é estritamente crescente no domínio $(0, +\infty)$ e tem como imagem toda a reta real. Define-se, a seguir, a função exponencial como a inversa da função logaritmo. Define-se o número **e** como o valor da exponencial no ponto 1, mostra-se que a exponencial coincide com $\mathbf{e}^r$ quando r é racional e adota-se a seguinte simbologia: o valor da função exponencial no ponto x, real, é notado como $\mathbf{e}^x$. Assim, a potência $\mathbf{e}^x$ fica definida para todo x real. Como a exponencial é a inversa do logaritmo, tem-se que $\mathbf{e}^{\log x} = x$ para todo x positivo. Por definição, toma-se $a^b = \mathbf{e}^{b \log a}$, para *a* positivo, real e *b* real (p.158). Provam-se a seguir, a partir de propriedades anteriormente verificadas para as funções exponencial e logaritmo, as propriedades usuais de potências isto é, $a^x a^y = a^{x+y}$ e outras (p.158-159).

Considerações finais

Nas abordagens axiomáticas dos naturais, toma-se como pressuposto o fato de que são alguns postulados (entre eles o Princípio da Indução) que "caracterizam" os números naturais. Assim, este conjunto numérico é definido formalmente como o conjunto cujos elementos satisfazem aos postulados escolhidos (ver cap.1 de Lima, 1976, em que os naturais são definidos pelos axiomas de Peano). Por outro lado, de uma perspectiva não axiomática — importante de se considerar, tendo em vista a futura prática profissional do licenciando — esses números podem ser caracterizados por uma tautologia que, no entanto, expressa a raiz da idéia de número natural: *"um natural n > 1 é a soma de 1 + 1 + 1 + ...+ 1, "n vezes"* . Essa caracterização do número natural encontra-se igualmente subjacente a algumas das justificativas escolares da validade das propriedades das operações básicas (BROWN, 1996; DICKSON et al., 1993).

Um objetivo geral do estudo dos naturais poderia ser descrito assim: *compreender certas propriedades desse conjunto numérico*. Mas, o que se entende por compreender? Conhecer os vínculos lógico-formais entre essas propriedades? Saber usá-las para resolver problemas? Ser capaz de explicá-las e produzir argumentos, aceitáveis por alunos e professores da escola, para assegurar-se de que sejam realmente válidas? Cada critério desses indica, em princípio, um tipo de abordagem do assunto. Embora fique claro que o tratamento usual dos naturais na disciplina Fundamentos de Álgebra Elementar não é rigorosamente axiomático, não se notam indicações explícitas de que o objetivo do estudo dos números nessa disciplina — assentar as propriedades dos naturais em bases formais e dedutivas — foi selecionado *entre outros possíveis*. Nesse sentido, pode-se considerar a hipótese de que essa abordagem formal dos números naturais esteja sendo veiculada como a abordagem *natural* para a formação do professor da escola básica. Os riscos de uma naturalização desse tipo são as eventuais conseqüências no processo de estruturação e estabilização de concepções a respeito da matemática e do seu ensino, as quais poderão se refletir de forma limitadora na futura prática profissional do licenciado.

Já na disciplina Fundamentos de Análise, o objetivo é claramente especificado: a abordagem axiomática dos reais é desenvolvida para que se possa chegar, com todo o rigor e o mais rapidamente possível, às questões fundamentais relativas às seqüências e séries, às funções contínuas, à derivada e à integral.

Embora cada uma das duas disciplinas em que se trabalha o conhecimento matemático relativo aos sistemas numéricos na licenciatura da UFMG — Fundamentos de Álgebra Elementar e Fundamentos de Análise — tenha suas particularidades de abordagem, elas possuem um ponto em comum: em ambas, o princípio segundo o qual se organizam os resultados é o do encadeamento lógico-formal-dedutivo. Essa ênfase na dedução formal tem implicações sobre dois aspectos importantes da formação matemática do futuro professor. Um deles diz respeito ao tipo de argumentação considerada aceitável para a validação dos resultados e o outro se refere ao significado implicitamente associado à expressão "conhecer os sistemas numéricos". Essas implicações e suas relações com as questões que se colocam para o professor na prática docente escolar serão objeto de discussão nos capítulos seguintes deste trabalho.

Observemos, por outro lado, antes de encerrar essas considerações, que o programa da disciplina Fundamentos de Álgebra Elementar, ao contrário do enfoque recomendado para os polinômios, não se refere ao estudo das operações básicas com os inteiros nem às propriedades fundamentais dessas operações (comutatividade, associatividade etc.), passando diretamente do Princípio da Indução à noção de divisibilidade e daí ao lema da divisão de Euclides, ao teorema da fatoração única etc. De fato, as questões relativas às operações básicas não são discutidas nessa disciplina nem em nenhuma outra. Com relação aos racionais, nota-se uma abordagem sumária: afora o tratamento formal da representação decimal e as demonstrações das relações entre as dízimas e as formas fracionárias irredutíveis correspondentes (que basicamente se repetem nas duas disciplinas analisadas), os racionais são considerados, ao que parece, objetos suficientemente conhecidos para o trabalho do licenciando em sua futura prática docente escolar.

APÊNDICE A

Matemática e Escola I

Ementa: Determinantes que interferem no ensino de Matemática no 1º grau.

Programa: Observação e reflexão do processo de ensino de Matemática no 1º grau a partir da análise dos determinantes políticos, filosóficos e psicológicos do sistema de ensino e da organização e funcionamento das instituições escolares de 1º grau.

Observação e reflexão dos problemas e as alternativas no ensino específico dos seguintes tópicos: teoria dos conjuntos, números inteiros, divisibilidade, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, frações, polinômios, equações de 1º e 2º graus. Será feita uma discussão do ensino dos tópicos acima, levando em consideração o ambiente onde eles são normalmente ensinados e suas características, (faixa e situação geográfica da escola, classe social dos alunos, etc.).

Bibliografia Básica: Freudenthal, H. Mathematics as an Educational Task

Matemática e Escola II

Ementa: Determinantes que interferem no ensino de Matemática no 2º grau

Programa: Observação e reflexão do processo de ensino de Matemática no 2º grau, a partir da análise dos determinantes políticos, filosóficos e psicológicos do sistema de ensino e da organização e funcionamento das instituições escolares do 2º grau.

Observação e reflexão sobre os problemas e as alternativas no ensino dos seguintes tópicos: números reais, topologia da reta, limites, seqüências, progressões aritméticas e geométricas. Funções definidas abstratamente, funções inversas, função logarítmica e função exponencial, funções contínuas e funções deriváveis. Matrizes, determinantes e funções lineares.

Bibliografia Básica: Freudenthal, H. Mathematics as an Educational Task

Prática de Ensino de Matemática

Ementa: Livros didáticos em Matemática. Propostas metodológicas do ensino de Matemática no 1º e 2º graus: elaboração e planejamento de unidades de ensino. Experiência docente em escolas de 1º e 2º graus. Desenvolvimento de proposta metodológica.

Programa: a programação pode variar a cada semestre e diferentes pontos da ementa podem ser mais ou menos enfatizados num dado semestre. Para ilustração, apresentamos dois programas diferentes para essa disciplina, desenvolvidos respectivamente nos anos de 2001 e 2003.

Programa 2001:

1. Diferentes concepções de Matemática e de ensino-aprendizagem de Matemática.
2. Aspectos que diferenciam a Matemática do cotidiano da Matemática escolar e da Matemática científica.
3. Importância do ensino da Matemática, hoje.
4. Grau de aprofundamento dos conceitos matemáticos versus desenvolvimento cognitivo dos alunos.
5. Formas interativas de trabalhar a Matemática: o caso da álgebra e da geometria.

6. A questão da contextualização da Matemática.
7. A Matemática e os temas transversais.
8. A questão da avaliação em Matemática.
9. A pesquisa em Educação Matemática. Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática
10. Estágio supervisionado em escolas da comunidade.

Programa 2003:

A disciplina tem por objetivos gerais:

- possibilitar ao aluno licenciando um estágio em escola básica, onde possa conhecer, discutir e praticar a docência;
- possibilitar discussões de interesse, de modo a melhor compreender a condição docente;
- possibilitar ao aluno o conhecimento dos recursos disponíveis para o seu desempenho como professor de matemática na educação básica;
- possibilitar ao aluno forma de se organizar (com materiais e registros próprios).

A disciplina está sendo proposta e organizada a partir de três grandes atividades:

1. Estágio

O estágio em escola de educação básica, na cidade, será realizado em pelo menos 60 horas do curso, nos meses de junho julho, agosto e setembro. Procurar-se-á diversificar escolas, compondo informações e experiências das escolas públicas, particulares, de ensino fundamental e médio.

Cada aluno fará dois trabalhos vinculados ao estágio:

- diário de campo - um caderno de anotações diárias sobre a visita realizada. [...]
- reflexões sobre a experiência de estágio - este será um texto produzido pelo aluno ao final do estágio (que pode começar a ser feito antes), de modo que contenha uma síntese de como foi a experiência observada e as suas opiniões e questões sobre ela. O aluno poderá ainda escolher um assunto para explorar melhor (abordagens sobre o assunto tratado pelo professor; relação professor-aluno; relações da escola com a comunidade; informática etc.)

2. Projeto de ensino

Discutir possibilidades e trocar experiências para o ensino por conteúdos matemáticos, temas e questões de interesse da educação fundamental e média. O projeto de ensino será realizado em duplas ou trios, devendo cada agrupamento destes realizar um planejamento que será apresentado à turma toda. O procedimento proposto é o seguinte:

- selecionar temas;
- procurar abordagens diferenciadas sobre o tema escolhido, não deixando de consultar PCN, pelo menos duas coleções de livros didáticos, livros para-didáticos, revistas especializadas, internet, outros materiais.

Explorar possibilidades de relacionamento do tema com outras áreas do conhecimento e com coisas da sociedade em geral, com o dia a dia dos alunos. [...]

A apresentação do tema na sala de aula se dará na forma de aula e/ou discussão das possibilidades propostas. [...]

3. Estudo exploratório

Será o estudo de um livro sobre educação matemática, entre os disponíveis e que atenda ao interesse e/ou curiosidade do aluno, para apresentação na turma. Uma vez escolhido o livro o aluno deverá dele fazer uma síntese bastante breve, por escrito. Havendo tempo, será feita uma apresentação oral da leitura feita.

O trabalho final deve conter: o motivo da escolha do livro, dados do livro [...], um resumo de seu conteúdo, uma avaliação do aluno sobre o trabalho.

Segue então a lista de sugestões bibliográficas.

História das Ciências Exatas

Ementa: Proporcionar uma visão histórica do desenvolvimento do conhecimento científico e tecnológico inserido no contexto sócio-cultural. Mostrar a importância da Matemática na ciência grega e seu papel fundamental na ruptura provocada pelo renascimento e no conseqüente desdobramento da ciência moderna a partir do século XVII.

Programa

1. O conhecimento espontâneo e o científico
2. A concepção grega de ciência
3. A física aristotélica
4. A astronomia aristotélica
5. A Matemática no Egito e na Babilônia
6. A Matemática e a astronomia helenística
7. A emergência da consciência racional
8. A ciência na Idade Média
9. O nascimento da ciência moderna (Galileu)
10. As ciências exatas no século XVII
11. O método científico

Bibliografia Básica

ARANHA, Maria Lúcia de Arruda e MARTINS, Maria Helena Pires - *Filosofando - Introdução à Filosofia* - Editora Moderna - São Paulo - 1992.

BOYER, Carl B. - *História da Matemática* - Editora Edgard Blücher - São Paulo - 1974.

CAPÍTULO III

O CONHECIMENTO MATEMÁTICO DO PROFESSOR: FORMAÇÃO NA LICENCIATURA E PRÁTICA DOCENTE NA ESCOLA BÁSICA

Neste capítulo apresentamos uma resposta à segunda questão de pesquisa:

(B) Que questões, referentes ao trabalho com os sistemas numéricos, se colocam para o professor de matemática na prática docente escolar e que conhecimentos estão fundamentalmente envolvidos na ação pedagógica associada ao tratamento escolar dessas questões?

A nossa resposta se constrói como resultado de uma análise crítica da formação matemática desenvolvida no curso de licenciatura da UFMG, em que se confrontam os conhecimentos aí veiculados (descritos no Capítulo II) com os conhecimentos envolvidos nas questões que se colocam para o professor de matemática na prática escolar. Como já se observou na Introdução, essas questões são identificadas a partir de pesquisas relatadas na literatura, não se restringindo apenas àquelas reconhecidas pelos professores e efetivamente trabalhadas em sala de aula da escola.

Veremos que certos conceitos e processos fundamentais da matemática escolar não são abordados ao longo da formação na licenciatura. É sempre possível justificar a exclusão através de algum argumento. Entretanto, não faz parte dos nossos objetivos explicitar e analisar cada um desses possíveis argumentos. O que nos propomos fazer neste capítulo é um levantamento extensivo (embora, seguramente, não exaustivo) de questões referentes ao conhecimento matemático sobre os sistemas numéricos, com as quais o professor se depara, implícita ou explicitamente, no seu trabalho docente na escola básica. Ao analisar o tipo de saber matemático associado ao tratamento escolar dessas questões e confrontá-lo com aquele veiculado no processo de formação na licenciatura, constatamos uma forma específica de distanciamento entre a formação profissional e a prática docente escolar. Uma série de exemplos que tipificam essa forma e que nos permitem avançar na identificação de algumas de suas características gerais são apresentados e discutidos.

No estudo referente a este capítulo, utilizamos fontes de natureza diversificada: livros didáticos escolares e livros destinados a professores do ensino básico; os dados descritos no Capítulo II, relativos ao curso de licenciatura em matemática da UFMG; textos utilizados como referência bibliográfica básica nas disciplinas do curso de licenciatura da UFMG e, por último, mas constituindo a nossa principal fonte, a literatura de pesquisa no campo da Educação Matemática.

Abordaremos, em primeiro lugar, o conjunto dos números naturais, em seguida o dos racionais e, finalmente, trataremos de alguns aspectos relativos aos números reais.

Os números naturais

Como se sabe, as idéias fundamentais que vão se desenvolver até a formação do conceito de número natural começam a ser elaboradas muito cedo pelas crianças, a partir, principalmente, de atividades associadas à contagem e à ordenação de objetos (DICKSON et al.,1993, p.169-188; SINCLAIR; SINCLAIR, 1986, p.62-67). As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de naturais também têm, em geral, significados fortemente associados a uma diversidade de situações da vida cotidiana. É possível que uma discussão aprofundada dos processos de aquisição, pela criança, dos conceitos relativos às quatro operações com os números naturais (CARPENTER; MOSER, 1983; FUSON, 1992; GREER, 1992) seja mais imprescindível num curso de formação de professores para as séries iniciais do Ensino Fundamental. Contudo, ao desconsiderar (como veremos) o tratamento de questões referentes aos significados e propriedades dessas operações, aos algoritmos correspondentes e ao sistema de numeração decimal, o processo de formação matemática na licenciatura remete a outras instâncias a elaboração de saberes que são fundamentais na prática docente escolar.

É verdade que o licenciado em matemática, de modo geral, não irá trabalhar com alunos das séries iniciais, onde esses tópicos são apresentados numa primeira abordagem escolar do tema. Entretanto, uma separação acentuada entre a formação docente para o trabalho nas séries iniciais e finais do Ensino Fundamental pode contribuir para intensificar ainda mais a descontinuidade que se observa na passagem dos primeiros para os últimos ciclos desse estágio do processo de escolarização. Isso, por si só, já coloca uma demanda no sentido de que o licenciado conheça a matemática que é trabalhada nas séries iniciais.

O fato mais importante, no entanto, é que o licenciado em matemática, a partir do início do segmento do ensino básico em que atua (quinta série do Ensino Fundamental), estará retomando e ampliando todo o trabalho com os números naturais desenvolvido nos ciclos anteriores, considerando esses números agora como elementos de um conjunto (que, por exemplo, contém a soma e o produto de quaisquer dois deles, mas não contém, sempre, a diferença ou a divisão), promovendo a percepção de relações entre eles (números primos e compostos, múltiplos, divisores, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum etc.) e eventualmente estendendo — num processo pedagógico extremamente complexo, como veremos — as operações, seus significados e suas propriedades para os inteiros negativos, para os racionais e, a partir destes, para os reais. No desenvolvimento de cada etapa desse processo de expansão dos conjuntos numéricos, o professor terá que conhecer profundamente, de um ponto de vista relevante para a sua prática, aquilo que os alunos consideram como o universo numérico nos diferentes estágios da vida escolar. O professor terá que lidar também com dúvidas e concepções incorretas que vão se referir tanto ao novo conjunto, mais amplo, como também ao conjunto mais restrito, aquele supostamente conhecido, que está sendo ampliado. Essas dúvidas e falhas conceituais que aparecem freqüentemente entre os alunos podem ser associadas a dois aspectos do processo de aprendizagem escolar dos sistemas numéricos, os quais tendem a se sobrepor.

O primeiro aspecto refere-se ao fato — ressaltado em vários estudos, como veremos a seguir — de que, do ponto de vista da aprendizagem escolar, a aritmética dos naturais é um tema complexo, cuja apreensão, em níveis considerados satisfatórios, não se esgota no processo que se desenvolve ao longo das séries iniciais. Assim, o professor terá que lidar com dificuldades de aprendizagem desse tema que, muitas vezes, acompanham o aluno até o final do Ensino Fundamental. O segundo aspecto refere-se ao processo de acomodação do conhecimento "novo" e de construção de um estágio diferenciado de compreensão do conhecimento "antigo".

Estudos como o de Margaret Brown, dentro do programa de pesquisa *Concepts in Secondary Mathematics and Science — CSMS (Inglaterra)*, deixam claro que uma série de dificuldades com os números naturais que, muitas vezes, se supõem associadas apenas ao aprendizado da matemática nas séries iniciais, freqüentemente se manifestam até o final do período escolar que equivaleria, no Brasil, ao Ensino Fundamental. Por exemplo, quando foi pedido aos alunos ingleses (em idades que corresponderiam, aqui, aos últimos ciclos do Ensino Fundamental) para escrever, em dígitos, o número quatrocentos mil e setenta e três, o índice de acertos foi baixo, como vemos na Tabela 1.

Tabela 1 – Escrever número em dígitos (Fonte: Brown, 1981a, p. 50)

idade (anos)	respostas corretas (%)
12	42
13	51
14	57
15	57

Em outra questão, em que era pedido o valor relativo do 2, no número 521.400, o índice de acertos também foi baixo, como mostra a Tabela 2:

Tabela 2 – Valor relativo do 2 em 521400 (Fonte: Brown, 1981a, p. 50)

idade (anos)	resposta correta (%)
12	22
13	32
14	31
15	43

Em outra questão ainda, em que se pedia para efetuar a subtração 2312 – 547, o índice de acertos foi o que se vê na Tabela 3:

Tabela 3 – Conta 2312 - 547 (Fonte: Brown, 1981a, p. 50)

idade (anos)	resposta correta (%)
12	61
13	61
14	62
15	66

Numa pesquisa utilizando teste escrito e entrevistas, envolvendo um total de 1.270 alunos de 3ª a 6ª séries do Ensino Fundamental, em Belo Horizonte e no Rio de Janeiro, Moren et al. (1992) confirmam a permanência de dificuldades com a subtração de números naturais em todos os estágios pesquisados. Os dados indicaram também, em todas as séries em que o teste foi aplicado, que as questões referentes ao sistema de numeração foram as que apresentaram maior dificuldade para os alunos.

Dickson et al.(1993) descrevem e analisam, do ponto de vista do ensino-aprendizagem escolar, diferentes aspectos do conhecimento matemático subjacente à construção e uso do sistema decimal: a noção de agrupamento, a linguagem envolvida na leitura dos números, a idéia de valor relativo do algarismo tendo em vista a sua posição (de modo especial o caso do zero), soma e subtração mentais e estimativas de resultados das operações, decomposição de números ou reagrupamento, multiplicação e divisão por potências de 10. Observe-se que propriedades como a distributividade do produto em relação à adição, a associatividade e a comutatividade da adição estão implícitas nessa lista: 562 é igual, por exemplo, a cinqüenta e seis dezenas mais duas unidades, ou também, três centenas, vinte e seis dezenas e duas unidades ou, ainda, cinco centenas e sessenta e duas unidades etc. As autoras se referem também a uma diversidade de pesquisas empíricas que convergem para a conclusão de que o domínio do sistema decimal de numeração é um processo que se desenvolve ao longo de todo o Ensino Fundamental e que é um dos aspectos mais complicados da aprendizagem a respeito dos números[1]. Ao sintetizar a seção do livro em que discutem o assunto, elas escrevem:

> Como foi visto, existem muitas facetas no processo de compreensão do sistema posicional de numeração. Evidências sugerem que algumas das idéias envolvidas não são de fácil domínio [...] Há indicações de que erros e idéias incorretas se desenvolvem tanto nas séries iniciais

[1] Entre essas pesquisas, as autoras citam um estudo de Luria, publicado em 1969, mas realizado no período da Segunda Grande Guerra: investigando um tipo de lesão cerebral que acarreta certa dificuldade de lidar com números (em inglês, dyscalculia), ele chegou à conclusão de que os efeitos da doença refletem a ordem inversa de apreensão dos conceitos: os aspectos mais difíceis e menos solidamente fixados são afetados em primeiro lugar pela doença. E em todos os seus pacientes, Luria constatou que as noções referentes ao sistema posicional de numeração foram as primeiras a serem afetadas (cf. DICKSON et al., 1993, p. 208).

> como nas seguintes e, de fato, o domínio desse assunto é incompleto até o fim do quarto ano da escola secundária.
>
> O ensino do sistema posicional parece ser um processo de longo prazo, não limitado a algumas aulas, demandando uma progressão cuidadosamente planejada por um longo período de tempo (DICKSON et al., 1993, p. 221)*.

Em relação às propriedades das operações com os naturais, estudos indicam que, em sua prática docente na escola, o professor não deve tomar como evidente o fato de que a vezes b resulta no mesmo valor que b vezes a (cf. Capítulo IV). O mesmo se poderia dizer a respeito da associatividade: em situações do ensino escolar, não é óbvio que a vezes bc dê o mesmo resultado que ab vezes c. Brown (1996) relata como a questão da comutatividade do produto aparece como dúvida genuína numa sala de 3ª série (third grade, no sistema americano) e descreve como ela, na condição de professora, pôde ajudar os alunos na construção de um entendimento fundamentado dessas propriedades.

A fundamentação é realmente importante tendo em vista que, muitas vezes, a criança aceita a comutatividade, por exemplo, da adição e da multiplicação e, na falta de um entendimento mais abrangente dos significados das operações, transfere indevidamente a mesma propriedade para a subtração e a divisão. Um estudo de Margaret Brown detecta esse tipo de procedimento em alunos da escola inglesa, num estágio que corresponderia, no Brasil, à quinta e sexta séries do Ensino Fundamental. A autora relata que, num problema envolvendo a divisão de dois números naturais, 36% das crianças de 12 anos deu como resposta $26 \div 286$, enquanto apenas 34% respondeu corretamente $286 \div 26$ (BROWN, 1981b, p.38). A pesquisadora infere, a partir de entrevistas, que a tendência geral entre os alunos que responderam na forma invertida ($26 \div 286$), era pensar que as duas alternativas eram idênticas. De todo modo, nas conclusões desse estudo, ela afirma que, no máximo, 30% dos alunos de 12 anos da amostra reconheciam que a divisão não era comutativa. E destaca que os professores do ensino secundário (que corresponderia, mais ou menos, às últimas 4 séries do Ensino Fundamental no Brasil) cometem um grande erro quando partem do princípio de que os conceitos e idéias matemáticas relativas às operações com os naturais foram apreendidas nas séries iniciais (BROWN, 1981b, p.47). Dickson et al., por sua vez, assim se referem ao processo de aprendizagem relativo às operações com os naturais:

> [...] como em outras áreas da matemática, o entendimento das operações com os números se desenvolve ao longo de anos; os significados de cada uma das operações se estendem gradualmente até cobrir um amplo espectro de situações. Isto continua sendo verdadeiro mesmo quando os números envolvidos são números naturais pequenos, como nos casos da maioria dos estudos a que nos referimos nesta seção.
>
> No passado pensava-se que a criança, uma vez assegurado o domínio do significado da multiplicação, por exemplo, poderia simplesmente ir adiante e aprender métodos de cálculo

> mais complexos. Entretanto, os resultados de pesquisa apresentados anteriormente sugerem que um cuidado explícito deve ser tomado para que a criança se familiarize gradualmente com os vários modelos associados à multiplicação e que essa tarefa se estende, com certeza, para a escola secundária. Um dos modos de fazer isso é através da discussão da seguinte questão: de quantas maneiras, essencialmente diferentes, uma criança é capaz de inventar um problema cuja solução se expresse por uma conta do tipo 5×3 ? (DICKSON et al., 1993, p.237-238)*

Por outro lado, como já foi observado, o processo de extensão dos conjuntos numéricos que se desenvolve a partir da quinta série do ensino fundamental vai colocar para o professor da escola a questão da extensão das operações com os naturais para um campo numérico mais amplo — o dos racionais. No relato de um abrangente estudo das idéias envolvidas no processo de construção do conceito de número racional, incluindo avaliações dos níveis de compreensão dessas idéias em diferentes estágios, Behr et al. comentam:

> [...] foi comum observar regressões significativas na compreensão dos conceitos. Os conceitos já trabalhados anteriormente devem ser não só relembrados, mas integrados progressivamente a sistemas mais complexos de idéias; algumas vezes eles têm que ser re-conceitualizados quando da extensão para novos domínios. Idéias que são verdadeiras em domínios restritos [...] podem ser enganosas, incorretas ou mesmo inúteis quando transportadas para novos domínios. (BEHR et al., 1983, p.104)*

Fica claro que os conhecimentos matemáticos associados à discussão escolar dos significados das operações com os naturais, da validade de suas propriedades básicas e das várias questões referentes ao sistema decimal de numeração são parte importante dos saberes profissionais docentes. Mais do que isso, esses conhecimentos profissionais não se reduzem à matemática *certa*, do ponto de vista acadêmico. Uma vez que, na prática escolar, o professor estará lidando com alunos de diferentes séries e ciclos do Ensino Básico, o processo de apreensão dos saberes envolvidos nas questões citadas vai se encontrar em diferentes estágios de elaboração entre esses alunos. O desenvolvimento de uma visão flexível e multifacetada do conhecimento matemático envolvido nessas questões pode contribuir decisivamente para que o professor seja capaz de dialogar com seus alunos, de reconhecer e validar, quando for o caso, certos pontos de partida por eles adotados para a construção de um determinado conceito ou de avaliar uma determinada forma de elaboração do conceito como adequada para certo estágio, ainda que precise ser re-elaborada em estágios posteriores.

Entretanto, em todo o seu curso, o licenciando não é exposto sistematicamente a uma discussão sobre essas questões. Em todas as disciplinas do curso, as operações de adição e multiplicação de naturais e suas propriedades são tomadas como "fatos conhecidos", saberes anteriores aos pontos de partida dos programas e ementas curriculares. A abordagem do sistema decimal, quando feita, não inclui a discussão das questões relacionadas por Dickson et al. (1993), como comentado anteriormente (cf. Capítulo II). Uma decisão curricular dessa natureza se ajusta perfeitamente a uma visão do tema (Números Naturais) que Courant e Robbins, expõem logo na primeira página do primeiro capítulo de sua conhecida obra, em que procuram explicar "o que é a matemática":

> Por sorte, os matemáticos não têm que se ocupar com o aspecto filosófico da transição que proporciona a passagem de coleções de objetos concretos ao conceito abstrato de número. <u>Consideraremos, portanto, como dados, os números naturais, juntamente com as duas operações fundamentais, adição e multiplicação, mediante as quais eles podem ser combinados.</u> (COURANT; ROBBINS, 1964, p. 8, grifo nosso)*

Os matemáticos, na condição de produtores de conhecimento de fronteira, realmente não têm que se ocupar com a questão da construção do conceito de número e nem com a questão dos significados das operações elementares com os naturais. Contudo, o que pretendemos mostrar é que assumir a posição do matemático diante dessas questões e desenvolver o processo de formação matemática num curso de licenciatura a partir de um ponto em que o conjunto dos números naturais é considerado *dado*, juntamente com as operações de adição e multiplicação, significa desconsiderar questões postas pela prática profissional concreta, para a qual se pretende formar o licenciando. Estabelece-se assim uma forma de distanciamento entre os conhecimentos trabalhados no processo de formação na licenciatura e as questões que se colocam para o professor da escola em sua atividade docente.

É importante observar ainda que, em termos da prática docente escolar, uma compreensão significativa do conjunto dos números naturais não é produzida automaticamente como resultado do estudo deste conjunto utilizando-se uma abordagem formal e lógico-dedutiva, em que se definem as operações, tomam-se certos fatos como "princípios" e os outros são demonstrados rigorosamente, como conseqüência (cf. Capítulo IV). Conhecer as operações num sentido relevante para o ensino escolar é muito diferente de conhecer a cadeia que estabelece a dependência lógico-formal entre as propriedades estruturais das operações, os postulados, as definições e os conceitos primitivos adotados. O conhecimento dos números naturais como uma estrutura lógica formal não substitui — em alguns casos chega até a esconder, através de uma assepsia que elimina tudo aquilo que não é considerado estritamente essencial — o conhecimento desse conjunto como objeto de ensino e de aprendizagem escolar. Posto de outra forma, o essencial a respeito dos números naturais, do ponto de vista da matemática científica, nem sempre coincide com aquilo que é considerado essencial, da perspectiva da matemática escolar.

Knight (1930) aborda essa questão nos seguintes termos:

> É bastante generalizada a idéia de que os matemáticos é que devem ser os responsáveis pela visão da aritmética a ser veiculada nos cursos de formação de professores. [...] entretanto, uma procura assídua na literatura não nos revela como o domínio da matemática avançada pode

> ajudar no ensino da aritmética. Por outro lado, é interessante pensar na possibilidade de existência de vários tipos de conhecimento da aritmética. Consideremos, por um momento, que há uma distinção útil entre o conhecimento da aritmética do ponto de vista da matemática e o conhecimento da aritmética do ponto de vista do ensino. Quando a aritmética é analisada do ponto de vista do seu aprendizado pela criança, um conjunto diferente de critérios deve ser usado na avaliação do que seja dominar o assunto (KNIGHT, 1930, p. 161, grifo nosso)*

A descrição feita no Capítulo II indica que, do ponto de vista segundo o qual se desenvolve o processo de formação matemática na licenciatura, os números são objetos abstratos, desde o princípio concebidos e percebidos como tais. As operações e suas propriedades básicas não se conectam a situações concretas que contribuam para o desenvolvimento dos processos de negociação de significados na escola. Elas se prestam, fundamentalmente, a esclarecer e informar sobre a estrutura aritmética do conjunto **N**. Na prática docente escolar, no entanto, as operações aritméticas básicas são usadas também, até certo estágio do desenvolvimento da criança, como instrumento de apoio no processo de construção do próprio conceito abstrato de número. De fato, uma das grandes questões pedagógicas no trabalho com as operações elementares no ensino escolar é a construção de significados para elas e o desenvolvimento da capacidade de identificação — mediante estratégias que envolvem, entre outros elementos, um certo domínio da língua materna — das situações em que uma determinada operação, e não outra, fornece a resposta correta para um dado problema (DICKSON et al., 1993; HART, 1981a; CARPENTER; MOSER, 1983; GREER, 1992). Nesses casos, os números se referem sempre a objetos concretos e a resolução correta do problema, ao mesmo tempo em que traduz uma relação flexível com a idéia de número — uma abstração que se concretiza em situações específicas — pode ser, também, mais um exercício na direção da construção dessa relação de flexibilidade.

Sobre essa questão, mais uma vez, os estudos de Margaret Brown no projeto CSMS fornecem dados interessantes. Quando ela pediu a uma amostra de cerca de 500 alunos de 11 anos de idade que inventassem um problema cuja solução fosse dada por uma determinada conta, o resultado foi o seguinte:

Tabela 4 – Inventar um problema para uma dada conta (Fonte: Brown, 1981b, p. 40)

conta	resposta considerada correta (%)
$84-28$	77
$9\div 3$	60
$84\div 28$	42
9×3	45
84×28	31

Além do fato de que a multiplicação tenha se mostrado mais difícil que a divisão — embora em termos da execução do algoritmo ela seja considerada mais fácil — os resultados indicam que números grandes causam maiores problemas. Vê-se assim que o conceito de número ainda não chegou ao nível de abstração em que diferenças desse tipo não mais importam. A mesma autora, em sua tese de doutorado, atribui a maior dificuldade com o significado da multiplicação e da divisão à estrutura dessas operações. Segundo ela, numa determinada situação-problema, os números que são somados ou subtraídos referem-se a objetos similares que são combinados ou dissociados. Por exemplo, para a conta $2+3$ pode-se pensar em $2(carros)+3(carros)=5(carros)$. Nos casos da multiplicação e da divisão, de modo geral, não só os objetos envolvidos são de tipos diferentes, como também, em cada caso, cada objeto de um tipo tem de ser associado a um correspondente conjunto de objetos de outro tipo. Por exemplo, para a conta 2×3 teríamos, em determinadas circunstâncias, que considerar os seguintes agrupamentos: duas pessoas, a cada pessoa três carros, 2×3 carros no total (cf. Dickson et al., 1993, p.232). Vê-se que a criança, em determinado estágio de elaboração do conceito abstrato de número, ainda se prende de modo pouco flexível à grandeza (carros, pessoas, carros por pessoa) a que ele se refere e isso pode provocar dificuldades no processo de produção de significado para a operação.

No trabalho escolar, o que parece importante é que o professor seja capaz de envolver os alunos em um leque de situações didáticas adequadas, isto é, situações que se colocam como *problemas* e que, de algum modo, desafiem os seus saberes anteriores, conduzindo à reflexão sobre novos significados e novos domínios de uso desses saberes. Nesse processo dialético conjugam-se dois aspectos da aprendizagem: desenvolve-se uma *diversificação* dos significados concretos dos objetos matemáticos e uma progressiva *integração* desses significados numa forma abstrata, cujo sentido é potencializar as possibilidades de uso em novas situações concretas. No caso dos números naturais, das operações básicas e suas propriedades, o tratamento desses objetos a partir das definições formais e das deduções rigorosas constitui, de fato, uma abordagem que elimina a dialética descrita acima. As definições e as propriedades formais das operações são expressões últimas da *identificação* de todos os seus significados concretos. Posto numa forma extrema (e, talvez, mais simples), isso significa que, da perspectiva puramente formal, não cabe a discussão sobre diferentes significados para a adição ou para a multiplicação de números naturais: essas operações estão definidas e dessas definições seguem as propriedades. Formalmente, isso é tudo que interessa.

A divisão de números naturais é tratada apenas na disciplina Fundamentos de Álgebra Elementar, dentre todas as obrigatórias do currículo do curso de licenciatura. Mas é abordada num contexto em que o fundamental é a existência e unicidade do quociente e do resto. Em outras palavras, trata-se de demonstrar rigorosamente (isto é, a partir do princípio da boa ordem em **N**, ou de seu equivalente, o princípio da indução) a seguinte proposição, conhecida como o Lema da Divisão de Euclides: *dados dois naturais a e b, com* $b > 0$*, existem dois naturais q e r tais que* $a = bq + r$ *e* $0 \leq r < b$*. Para cada par a,b dado, os naturais q e r são univocamente determinados* (cf. Capítulo II). Se o horizonte da disciplina é desenvolver uma percepção do conjunto dos inteiros e do conjunto dos polinômios sobre **Q**, **R** ou **C** como exemplos elementares da estrutura *anel euclidiano*, então o essencial no estudo da divisão de naturais é, realmente, o referido argumento da existência e unicidade. A cadeia de resultados que começa com o Lema da Divisão, passa pela expressão do máximo divisor comum de dois elementos como combinação linear deles e vai até o teorema da decomposição única em fatores primos deve ser cuidadosamente construída para que a adaptação dos argumentos a conjuntos mais gerais, em que não se pode trabalhar com as noções de *maior* e *menor* como se faz nos naturais, traga à luz o máximo de generalidade com que se podem pensar essas idéias[2] (cf. HERSTEIN, 1970, p.126-153). Desse modo, certos resultados referentes ao conjunto dos inteiros e dos polinômios são vistos como expressões concretas e particulares das características de uma estrutura matemática mais geral — a dos anéis euclidianos. Mas, como vimos, do ponto de vista da prática docente na escola básica o saber *essencial* sobre os naturais refere-se a outras questões. A visão que unifica formalmente a estrutura dos inteiros e a dos polinômios não parece adequada ao tratamento escolar das questões referentes à produção de significados para os elementos que compõem essas estruturas (as operações, suas propriedades etc.).

Além da questão dos significados das operações com os naturais, do uso desses significados na resolução de problemas, da extensão da idéia de número para incluir os inteiros, racionais e reais, o professor da escola básica vai enfrentar, ainda, o problema do ensino dos algoritmos para encontrar os resultados das operações. O uso dos algoritmos formais para as operações básicas, diferentemente do uso das calculadoras, traz à tona a questão da lógica do seu funcionamento e coloca, para o professor da escola, a necessidade de

[2] Observe-se, nesse sentido, a definição de máximo divisor comum de dois inteiros positivos dada em Birkhoff e MacLane (1980, p.19): em lugar da formulação natural, mais simples, direta e descritiva que seria "o maior número que divide os dois" — encontrada em praticamente todos os textos escolares — opta-se por outra que caracteriza o m.d.c. como o número natural *d* que satisfaz a duas propriedades:

a) d é um divisor comum dos números dados

b) Todo divisor comum dos números dados é divisor de d

Esta última forma teria a vantagem de ser generalizável para domínios não ordenados, ao mesmo tempo em que explicitaria o "essencial" da noção.

uma percepção clara dos princípios em que se baseia a sua justificativa, ou seja, a explicação das razões pelas quais eles fornecem os resultados corretos. Alguns estudos sugerem que muitos dos erros cometidos pelos alunos ao utilizarem os algoritmos têm origem no fato de que o estudante não entende a lógica segundo a qual o algoritmo funciona (BAROODY, 1987; DICKSON et al., 1993).

Em relação ao algoritmo da divisão, por exemplo, é interessante observar que, já em 1930, no Twenty-Ninth Yearbook of the National Society For The Study Of Education, F. B. Knight faz o seguinte comentário, ao analisar uma lista com doze exemplos de divisão de números naturais:

> Do ponto de vista matemático, os exemplos são todos iguais. Todos são exemplos de divisão de naturais e isto é tudo que há para ser dito. Do ponto de vista do ensino, entretanto, existem importantes diferenças entre eles (KNIGHT, 1930, p.161).*

E prossegue explicitando algumas das diferenças entre os doze casos apresentados: um deles contém dificuldades do tipo "vai 1" em alguma das multiplicações que aparecem no processo de execução do algoritmo; em outro caso aparece o dígito zero "no meio" do quociente; outro apresenta dificuldades no momento de estimar o valor do primeiro dígito do quociente etc.

Considerando-se, hoje em dia, o uso mais ou menos generalizado das calculadoras, os algoritmos para as operações fundamentais já não desempenham o mesmo papel no ensino que desempenhavam em 1930. Mas, de todo modo, a questão que se coloca para um curso de licenciatura atualmente refere-se à necessidade de se discutir os algoritmos para as operações elementares, tendo como referência a realidade do processo de ensino e do aprendizado escolar. Dessa perspectiva, observa-se, antes de qualquer outra coisa, que ainda hoje não há consenso na discussão sobre as formas de utilização das calculadoras nas salas de aula da escola, especialmente quando se relaciona essa utilização com a eliminação do ensino dos algoritmos. Dentro do amplo espectro em que se acomodam as posições a respeito desse assunto, destacamos duas para situar, minimamente, a questão dos algoritmos. A primeira pode ser sintetizada assim: com as calculadoras, a ênfase no ensino escolar dos números pode ser redirecionada para a resolução de problemas, para os significados das operações e para as análises críticas dos resultados. O trabalho com as calculadoras para obter os resultados das operações deve ser priorizado, abandonando-se o ensino dos algoritmos formais. Uma outra visão do assunto seria a seguinte: o uso das calculadoras pode ajudar os alunos na produção de estimativas mais críticas dos resultados das operações e a desenvolver certo tipo de familiaridade com os números (*senso numérico*)[3]; pode ainda liberar alunos e professores da execução repetitiva de certos cálculos, mas não implica a dispensa definitiva do saber fazê-

[3] Em inglês, *number sense.*

los. De todo modo, o fato a se destacar é que para participar com autonomia das discussões que eventualmente se desenvolvam a respeito do assunto em sua escola, o futuro professor deverá, no mínimo, conhecer como os algoritmos funcionam, a lógica operacional deles, as possíveis dificuldades dos alunos na sua utilização etc. Assim, o conhecimento sobre os algoritmos formais ainda continua sendo parte da demanda da prática profissional docente na escola básica hoje e, consequentemente, essa questão se coloca, também, para o processo de formação na licenciatura. No entanto, como se pode ver no Capítulo II, essa discussão sobre os algoritmos não é sequer mencionada no curso de licenciatura da UFMG.

Os números racionais

Do ponto de vista da preparação do futuro professor para o trabalho pedagógico de construção dos racionais positivos nas salas de aula da escola, a abordagem que se desenvolve na licenciatura pode ser, também, submetida a fortes questionamentos. Ao longo de todo o processo de formação na licenciatura, o conjunto dos números racionais é visto como um objeto extremamente simples, enquanto as pesquisas mostram que, em termos da prática docente, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações da matemática escolar.

> Os conceitos associados aos números racionais estão entre as idéias mais complexas e importantes que as crianças encontram ao longo dos primeiros anos de escolarização. A importância desses conceitos pode ser vista a partir de diferentes perspectivas: (a) do ponto de vista prático, a habilidade de lidar com esses conceitos aumenta enormemente a capacidade da criança de compreender e manejar uma série de situações dentro e fora da escola; (b) de uma perspectiva psicológica, os números racionais constituem um cenário rico para um contínuo desenvolvimento intelectual; (c) do ponto de vista da matemática, o entendimento dos números racionais provê os fundamentos sobre os quais as operações algébricas elementares podem ser desenvolvidas.
>
> [...] o conceito de número racional envolve um rico conjunto de subconstrutos e processos integrados, relacionados a uma gama de conceitos elementares, mas profundos (por exemplo, medida, probabilidade, sistemas de coordenadas, gráficos, etc.). (BEHR et al., 1983, p. 91-92)*

Os autores observam, em uma nota de rodapé:

> [...] esses conceitos aparecem implícitos numa variedade de problemas e são freqüentemente considerados "fáceis", quando, de fato, muitos deles se desenvolveram tardiamente na história da ciência e não são nada óbvios para aqueles que não os tenham já assimilados [...]. (Ibid., p. 92, aspas no original)*

Da perspectiva da nossa análise neste trabalho, um dos aspectos fundamentais que distingue as construções formais de **Z**, **Q** e **R** — a partir de **N**, **Z** e **Q**, respectivamente — das sucessivas extensões dos conjuntos numéricos que se desenvolvem no processo de escolarização básica é o fato de que essas construções da matemática científica visam produzir uma abstração que expresse formalmente as características *essenciais* de um objeto que, a menos da construção formal, já é, de certo modo, conhecido. De fato, as várias construções de **R** a partir de **Q** têm, em comum, a qualidade de expressar o que já se sabia ser *essencial* em **R**, ou seja, a sua estrutura de corpo ordenado completo. É por isso que não interessa o que seja cada elemento: se um corte de Dedekind, uma classe de equivalência de seqüências de Cauchy etc. O que interessa é a estrutura do conjunto construído, isto é, as relações que os elementos mantêm entre si e que podem ser caracterizadas pelas propriedades de corpo das operações fundamentais (adição e multiplicação), pela ordem compatível com essas operações e pela completude. Observe-se, nesse sentido, o comentário de Djairo G. Figueiredo[4], no livro *Análise I*:

> No começo desta Seção, definimos os números reais como sendo um corpo ordenado, onde vale o Postulado de Dedekind. <u>Põe-se imediatamente a questão da existência de um tal corpo. Essa questão deve receber uma resposta positiva para que a definição dada de número real tenha sentido</u>. [...] Do ponto de vista histórico, essa questão foi resolvida relativamente tarde. Coube ao matemático alemão Richard Dedekind fazer a primeira apresentação rigorosa do conceito de número real. [...] A ele se deve a noção de *corte*, com a qual é possível provar que *existe* um corpo ordenado, onde vale o Postulado de Dedekind. [...] Há um outro modo de introduzir os reais, através das chamadas sucessões de Cauchy. (FIGUEIREDO, 1975, p. 11, itálicos no original, grifo nosso)

Com um pouco mais de detalhes, Elon Lima comenta a apresentação dos reais que desenvolve em *Curso de Análise* (vol.1):

> Frisamos, porém, que nosso ponto de vista coincide com o exposto na p. 511 de [Spivak]:
> "*É inteiramente irrelevante que um número real seja, por acaso, uma coleção de números racionais; tal fato nunca deveria entrar na demonstração de qualquer teorema importante sobre números reais. Demonstrações aceitáveis deveriam usar apenas o fato de que os números reais formam um corpo ordenado completo* [...]"
> Assim, um processo qualquer de construção dos números reais a partir dos racionais é importante apenas porque prova que corpos ordenados completos existem. A partir daí, tudo que interessa é que **R** é um corpo ordenado completo.
> Uma pergunta relevante é, porém, a seguinte: ao definir o conjunto R dos números reais não estamos sendo ambíguos? Em outras palavras, será que existem dois corpos ordenados completos com propriedades distintas? Esta é a questão da *unicidade* de R.
> Evidentemente, num sentido exageradamente estrito, não se pode dizer que existe apenas *um* corpo ordenado completo. Se construirmos os números reais por meio de cortes de Dedekind, obtemos um corpo ordenado completo cujos elementos são coleções de números racionais. Se usamos o processo de Cantor, o corpo ordenado completo que obtemos é formado por classes de equivalência de seqüências de Cauchy. São, portanto, dois corpos ordenados completos

[4] Neste capítulo, reproduzimos algumas citações e comentários feitos no Capítulo II, com o objetivo de tornar a leitura mais fluente, evitando-se que o leitor seja obrigado a recorrer, com muita freqüência, ao capítulo anterior.

> diferentes um do outro. O ponto fundamental é que eles diferem apenas pela natureza dos seus elementos, mas não pela maneira como esses elementos se comportam. Ora, já concordamos, desde o capítulo anterior, em adotar o método axiomático, segundo o qual a natureza intrínseca dos objetos matemáticos é uma matéria irrelevante, sendo o importante as relações entre esses objetos. Assim sendo, a maneira adequada de formular a questão da unicidade dos números reais é a seguinte: existem dois corpos ordenados completos não-isomorfos? A resposta é negativa. (LIMA, 1976, p. 47-48, aspas e itálico no original)

As extensões numéricas que se operam na escola são de natureza totalmente diferente, já que o conjunto e a estrutura que resultam do processo de extensão apresentam-se como um universo genuinamente novo para o aluno. Essa *novidade* constitui um elemento fundamental na conformação da prática docente, afetando decisivamente o tratamento didático-pedagógico das várias etapas desse processo. Por exemplo, no caso da ampliação dos naturais aos racionais positivos, o professor tem que levar em conta que a criança, até certa altura da sua vida escolar, apenas reconhece como números os inteiros positivos, isto é, 1, 2, 3 etc. Assim, a aquisição da noção abstrata de número racional parece estar associada a um longo processo de construção e re-elaboração, quase que elemento a elemento:

> Talvez seja interessante ter em mente o processo análogo que ocorre na construção do conceito de número natural: a criança observa, no mundo, certas concretudes como duas pessoas, dois carros etc., e vai desenvolvendo a percepção de que uma mesma "coisa" (o que virá a constituir a sua concepção do número dois) está associada a todas essas concretudes. [...] O processo de se captar o 2 como algo "livre" da concretude a que se refere originalmente é análogo ao processo de se captar o 2/7, por exemplo, como algo "livre" daquilo a que ele se "aplica" em situações concretas — 2/7 da área de um terreno, 2/7 de uma maçã, 2/7 dos alunos de uma classe etc. Mas esse desvinculamento do concreto, que está no cerne da construção do conceito de número, não é uma ruptura cabal que desconecta abstrato e concreto. Pelo contrário, o sentido desse desvinculamento é a potencialidade de novos vínculos a novas concretudes. Por outro lado, esses novos vínculos vão proporcionar um aprofundamento no nível de abstração com que é percebido o conceito de número racional (SOARES et al.,1998, p. 9-10).

Como veremos detalhadamente mais adiante, o professor da escola básica tem que trabalhar com os significados concretos das frações e outros subconstrutos para que o aluno alcance, eventualmente, a idéia abstrata de número racional, mas esse processo de construção da abstração não tem como resultado apenas a demonstração da possibilidade de se exibir formalmente um conjunto com as características *essenciais* (e já concebidas) dos racionais. Ao contrário, este conjunto numérico ampliado, visto em sua totalidade, como um objeto, assim como as relações entre seus elementos (os *novos* números), as *novas* formas de representação, a *nova* ordem, as *novas* operações e suas *novas* propriedades, tudo isso é conhecimento *novo* a ser processado e, eventualmente, assimilado.

Em nenhuma das disciplinas obrigatórias do atual currículo do curso de licenciatura da UFMG se faz, como no currículo anterior se fazia, a construção formal de **Z**, **Q** ou **R**, referidas anteriormente. Entretanto, a abordagem atual pressupõe conhecidas as propriedades *essenciais* do conjunto dos números reais: **R** é um conjunto cuja existência é postulada, juntamente com as operações que satisfazem aos axiomas de corpo ordenado completo (cf. Capítulo II e também a próxima seção deste capítulo).

No caso dos reais realiza-se um estudo formal de certos aspectos da sua estrutura. Mas as referências ao conjunto dos racionais ao longo do curso, em qualquer das disciplinas, são feitas considerando-o como uma estrutura simples e conhecida**:** **Q** não passa do "menor" subcorpo de **R**, aquele que contém apenas os números da forma $a.b^{-1}$, onde a e b são inteiros, $b \neq 0$ e b^{-1} é o inverso (multiplicativo) de b.

Na disciplina Iniciação à Matemática, que pertence aos currículos da licenciatura e do bacharelado, desenvolve-se, dependendo do professor (detalhes no Capítulo II), uma discussão sobre os racionais, tomando-se como referência, nestes casos, o livro *Números: Racionais e Irracionais,* de Ivan Niven.

Niven apresenta a seguinte definição na primeira página do capítulo 2, cujo título é *Números Racionais* (o capítulo 1 trata dos naturais e dos inteiros): "*um número racional (ou uma fração ordinária) é um* <u>*número*</u> *que pode ser colocado na forma a/d, onde a e d são inteiros e d não é zero".* (NIVEN, 1984, p. 30, grifo nosso). Observe-se que essa definição pressupõe a noção de número já estendida a um contexto mais amplo do que os naturais ou inteiros. A idéia é a de que, dentre os <u>números</u> (uma noção já concebida; o autor seguramente se refere, no contexto, a números reais), existem aqueles que podem ser colocados na forma a/d, (a e d inteiros); estes são os racionais. Fica subentendido que existem, também, <u>números que não podem</u> ser colocados na forma citada, pois, do contrário, a definição não faria sentido.

Na disciplina Fundamentos de Análise — específica para a licenciatura, onde se faz um estudo dos reais e, portanto, em princípio, um espaço natural para se desenvolver um tratamento mais detalhado dos racionais — dois livros têm sido a referência básica nos últimos dez anos: *Análise I*, de Djairo G. Figueiredo e, secundariamente, *Análise Real, V.1,* de Elon Lages de Lima (cf. Capítulo II).

No capítulo 1 do texto de Lima, apresentam-se os racionais da seguinte maneira: $\boldsymbol{Q} = \{m/n;\ m,n \in Z,\ n \neq 0\}$ (LIMA, 1989, p.8). Em seguida, prova-se que **Q** é enumerável. Algumas páginas à frente, no capítulo 2, o autor comenta: "*nada do que foi dito até agora permite distinguir **R** de **Q,** pois os números racionais também constituem um corpo ordenado. Acabaremos agora nossa caracterização de **R**, descrevendo-o como um corpo ordenado* *completo, propriedade que **Q** não tem*" (LIMA, 1989, p.16). Em seguida deduz-se, a partir da adoção do postulado da completude, que existe número (real) que não é racional e no capítulo seguinte inicia-se o estudo das seqüências de números reais.

Em *Análise I*, logo na terceira página do capítulo 1, Figueiredo apresenta os símbolos **N**, **Z** e **Q** para os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais, respectivamente, escrevendo: ***Q*** *- conjunto dos números racionais, isto é, dos números da forma p/q, onde p e q são inteiros e q* $\neq 0$ (FIGUEIREDO, 1975, p.3). O autor observa, então, que não está no programa do livro fazer um estudo sistemático desses três conjuntos numéricos. E faz, de passagem, o seguinte comentário:

> Como o leitor deve observar, os números racionais nada mais são que as frações da Aritmética do curso fundamental. Quando lhe ensinaram a operar com as frações, a rigor, o que se estava fazendo era definir as operações de adição e multiplicação. As propriedades (1) a (6) dessas operações enunciadas a seguir *[propriedades que caracterizam a estrutura corpo — esclarecimento nosso]*, apesar de usadas freqüentemente, não receberam maior atenção. Isto parece explicável, porque os números inteiros gozam de quase todas essas propriedades. E, na verdade, se construirmos os racionais a partir dos inteiros, tais propriedades podem ser deduzidas facilmente de propriedades análogas para Z. Também foram ensinadas relações do tipo 8/6 = 4/3 e 3/1 = 3. No fundo essas duas relações são escritas por definição e, portanto, não se demonstram. A primeira define a relação de igualdade entre as frações, isto é, p/q = r/s se ps = qr. A segunda igualdade faz uma identificação do conjunto Z com um subconjunto de Q, isto é, com o subconjunto $\{p/q \in Q\colon q = 1\}$. Portanto, com um certo abuso de linguagem, dizemos que Z é um subconjunto de Q. (FIGUEIREDO, 1975, p. 3)

Figueiredo descreve, nesse breve trecho, as idéias fundamentais envolvidas no processo de construção formal dos racionais a partir dos inteiros. Entretanto, como ele não se propõe a tarefa de desenvolver a construção em detalhes, deixa implícita uma série de identificações que, do ponto de vista da nossa análise, consideramos interessante explicitar. Assim, para referência, apresentaremos, de forma um pouco mais detalhada, um esboço da construção a que ele se refere, estabelecendo a correspondência do processo com os comentários de Figueiredo (para maiores detalhes, dentro de uma abordagem mais geral ver, por exemplo, LANG, 1972, p. 50-54):

1. Define-se em $Z \times Z^*$ a seguinte relação de equivalência: (a,b) ~ (c,d) $\Leftrightarrow$ ad = bc.

   Note-se a idéia de equivalência de frações, com a substituição da fração a/b pelo par ordenado (a,b). Nos termos de Figueiredo: *"também foram ensinadas relações do tipo 8/6 = 4/3 e 3/1 = 3. No fundo essas duas relações são escritas por definição e, portanto, não se demonstram. A primeira define a relação de igualdade entre as frações, isto é, p/q = r/s se ps = qr".*

2. Define-se **Q** como o conjunto das classes de equivalência da relação ~, isto é, **Q** é o conjunto $(Z \times Z^*) / \sim$

   Assim, um número racional é um conjunto de frações equivalentes, ou seja, *"os números racionais nada mais são do que as frações da Aritmética do curso fundamental".*
3. Definem-se a soma e o produto a partir dos representantes das classes de equivalência e mostra-se que a definição é "boa", isto é, o resultado não depende da escolha dos representantes: $(a,b)+(c,d) = (ad+bc,bd)$ e $(a,b)\times(c,d) = (ac,bd)$.

   Essas operações possuem seus elementos neutros, satisfazem a propriedade comutativa, associativa etc., como decorrência imediata da definição e do fato de que essas propriedades valem para os inteiros. A existência do inverso multiplicativo não decorre, evidentemente, da propriedade correspondente para os inteiros, mas segue imediatamente da definição de produto dada acima. Assim, "*quando lhe ensinaram a operar com as frações, a rigor, o que se estava fazendo era definir as operações de adição e multiplicação. As propriedades (1) a (6) dessas operações, enunciadas a seguir, apesar de usadas freqüentemente, não receberam maior atenção. Isto parece explicável, porque os números inteiros gozam de quase todas essas propriedades. E, na verdade, se construirmos os racionais a partir dos inteiros, tais propriedades podem ser deduzidas facilmente de propriedades análogas para Z".*
4. Finalmente, define-se $\mathbf{Z}_0 = \{(a,1), a \in \mathbf{Z}\}$ e uma função $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_0$ pondo $f(x) = (x,1)$. Prova-se que f é uma bijeção que preserva as operações, isto é, um isomorfismo que identifica a estrutura de **Z** com a de $\mathbf{Z}_0$, (esta última, "herdada" de **Q**).

   Como Figueiredo coloca, *"a segunda igualdade faz uma identificação do conjunto Z com um subconjunto de **Q**, isto é, com o subconjunto $\{p/q \in \boldsymbol{Q}: q = 1\}$. Portanto, com um certo abuso de linguagem, dizemos que Z é um subconjunto de **Q**."*

Um aspecto que chama a atenção numa construção desse tipo é a profusão de identificações entre objetos que, da perspectiva da matemática escolar, não é conveniente identificar. Perseguindo-se a idéia de captar aquilo que é essencial — do ponto de vista da matemática científica — certas diferenças tornam-se irrelevantes, seguindo-se daí as identificações. Por exemplo, a passagem ao quociente na etapa 2, identifica, num lance, todas as interpretações escolares concretas (os chamados subconstrutos) do conceito de número racional, unificando-os num construto puramente formal: número racional é uma classe de equivalência de pares ordenados de inteiros. Entretanto, Behr et al. assinalam enfaticamente a importância do papel dessas diferentes interpretações da noção de número racional no processo escolar de apreensão do conceito:

> Análises dos componentes do conceito de número racional (Kieren, 1976; Novillis, 1976; Rappaport, 1962; Riess, 1964; Usiskin, 1979) sugerem claramente um motivo pelo qual uma compreensão completa do conceito envolve um formidável esforço de aprendizagem. O número racional pode ser interpretado pelo menos de seis maneiras diferentes (subconstrutos): comparação parte-todo, decimal, razão, quociente indicado, operador e medida de quantidades contínuas ou discretas. Kieren (1976) defende a idéia de que um entendimento completo dos racionais requer, não apenas o entendimento de cada subconstruto separadamente, mas também de como eles se inter-relacionam. Análises teóricas e evidências empíricas recentes sugerem que diferentes estruturas cognitivas podem ser necessárias para lidar com os diferentes subconstrutos.
>
> Vários estudos identificaram estágios no pensamento das crianças sobre os racionais, examinando a gradual diferenciação e progressiva integração de subconstrutos diferentes. Um dos aspectos importantes desses estudos tem sido observar se sujeitos que têm uma determinada performance, num certo estágio, em tarefas relativas a um dado subconstruto, apresentam resultados no mesmo nível em tarefas envolvendo outro subconstruto. (BEHR et al., 1983, p. 92-93, referências no original)*

Um outro aspecto que se destaca na concepção formal do conjunto dos racionais refere-se às operações. Assim como os diferentes subconstrutos associados ao conceito de número racional ficam subsumidos na forma abstrata de um conjunto quociente, os significados das operações se eludem nos algoritmos que as definem. De fato, as definições formais das operações com os racionais não passam de algoritmos para o cálculo dos resultados e as propriedades se deduzem imediatamente, como observa Figueiredo, a partir de suas análogas, já estabelecidas entre os inteiros. No entanto, em termos dos significados, as conexões entre as operações nesses dois campos numéricos não se mostram de modo tão claro. Por exemplo, por que $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$, enquanto $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$? (Cf. Capítulo IV) Sabendo-se que $3\times(2+5)=3\times2+3\times5$, por qual motivo deveríamos esperar que $\frac{2}{3}\times(\frac{4}{5}+\frac{6}{7})$ fosse igual a $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ + $\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}$? Em outras palavras, por que a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição deve permanecer válida entre os racionais? Em princípio, poderíamos estender as operações para os racionais de modo que algumas das propriedades não se mantivessem. Por que a extensão é feita de um modo e não de outro? E por que permanecem válidas todas as propriedades fundamentais?

Se o objetivo é a formação matemática do professor do ensino básico, a elaboração de respostas para essas perguntas conduz, necessariamente, a uma discussão a respeito dos significados das operações entre os naturais e como elas devem ser estendidas para os racionais de modo a que, no processo, esses significados também se generalizem para o novo campo numérico. A argumentação formal — quando restritas aos inteiros, as operações em **Q** produzem os mesmos resultados que as operações definidas em **Z**; as propriedades das operações em **Q** decorrem imediatamente das definições e das propriedades análogas em **Z** — pressupõe já definidas as operações em **Q** e apenas confirma o fato de que essas definições são "boas", desde que o objetivo predeterminado seja manter válidas as propriedades (comutativa, associativa, distributiva etc.).

Da perspectiva da prática profissional futura do licenciando, entretanto, nota-se a insuficiência e a inadequação dessa forma de ver as relações entre os inteiros e os racionais. Reduzido a esse formalismo, o entendimento do processo de extensão dos campos numéricos pode projetar uma visão da matemática como um jogo lógico, cujas regras são dadas arbitrariamente. Mas para o processo de escolarização básica em matemática interessa enfatizar que as definições das operações e as propriedades mantidas no novo campo são essas — e não outras — porque a utilização empírica dos novos números impõe isso e não por uma decisão arbitrária ou por alguma imposição de natureza puramente lógica e "interna" à matemática. M. Kline comenta essa questão do seguinte modo:

> Quando usamos a adição de frações em situações reais, para somar $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{3}$, por exemplo, nós reduzimos ambas a sextos e então somamos $\frac{3}{6}$ com $\frac{2}{6}$ para obter $\frac{5}{6}$. Entretanto, quando multiplicamos frações, multiplicamos os numeradores e os denominadores de modo que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Poderíamos somar frações somando os numeradores e os denominadores para obter $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. Por que não usamos esse método? É mais simples, mas não se adapta às situações empíricas. Como outro exemplo, poderíamos considerar o produto de matrizes. O uso que se faz das matrizes requer que a multiplicação seja não comutativa, embora fosse possível definir uma multiplicação comutativa de matrizes. Uma vez que a multiplicação deve ser não comutativa, os fundamentos lógicos da teoria se ajustam a esse fato. Portanto, a lógica não dita o conteúdo da matemática; o uso é que determina a estrutura lógica. A organização lógica é posterior e constitui, essencialmente, um ornamento (KLINE, 1974, p.51).*

À medida que se ampliam os conjuntos numéricos e se estendem as operações para os novos campos, os significados dessas operações vão tomando um sentido mais amplo e mais geral e, talvez se possa dizer, mais algébrico. Algumas noções associadas a esses significados permanecem, enquanto outras (por exemplo, a identificação da idéia de multiplicação com a de uma soma iterada) vão sendo progressivamente superadas. Outras, ainda, são simplesmente abandonadas, como a ordem linear, quando se passa dos reais aos complexos. A literatura de pesquisa nos indica que as questões que se colocam para o professor da escola — que vai desenvolver, junto com os alunos, as diferentes etapas desse processo de expansão dos campos numéricos — não se referem às definições algorítmicas das operações ou às demonstrações formais da permanência de suas propriedades no campo ampliado. Ao contrário, referem-se, fundamentalmente, a uma compreensão das *razões* pelas quais as operações com os novos números devem ser efetuadas de um determinado modo e *por que* algumas propriedades permanecem válidas. Uma compreensão tal que permita ao professor conduzir a discussão de uma questão central dentro do processo de escolarização básica em matemática: *como* estender as operações dos naturais para os racionais positivos e quais as conseqüências dessa extensão?

É claro que uma eventual automatização do algoritmo é desejável, mas, como se insiste em praticamente todas as pesquisas sobre o ensino escolar dos racionais, a automatização precoce não colabora para a compreensão e, por isso, deve ser produzida como conseqüência do uso reiterado dessas relações em situações concretas e diversificadas, nas quais os diferentes subconstrutos, emprestando significados às operações, desempenham um papel importante.

Como se observa, a construção do conceito de número racional e o estudo das operações nesse campo numérico enfatizam diferentes aspectos e se apoiam em distintos valores conforme se adote a perspectiva da educação escolar ou a da matemática científica. Enquanto esta última funde numa única expressão — a que sintetiza a essência abstrata do conceito, ou seja, aquilo que lhe dá *identidade* como objeto matemático científico — as várias formas de se pensar concretamente a idéia de número racional, a matemática escolar faz quase que o caminho inverso. Como vimos, para o ensino escolar é fundamental "decompor" a idéia de razão de inteiros nas suas diversas formas de manifestação e explicitar as suas diferentes possibilidades de interpretação, uma vez que o processo de construção escolar da noção de número racional se desenvolve a partir da integração progressiva dos vários subconstrutos. Nesse sentido, o conceito é uma construção em processo e não um alvo dado e estático, a ser necessária e explicitamente atingido.

De maneira análoga, os significados das operações com os racionais se constroem, na matemática escolar, a partir da discussão e análise de uma diversidade de situações concretas nas quais se torna necessário reconhecer, comparar com o caso dos naturais e re-estabelecer certas relações entre os números, abandonar outras, inferindo-se, a partir desse processo, a validade das propriedades. Estas, então, como assinala Kline, se ajustam aos significados das operações e não vice-versa.

Para a matemática científica, por sua vez, todos os significados relevantes das operações estão impressos nas suas propriedades estruturais (postuladas ou deduzidas das definições formais das operações) e estas se constituem, então, nos instrumentos verdadeiramente objetivos a serem efetivamente utilizados, em detrimento das formulações menos precisas e das interpretações mais circunstanciais, próprias da matemática escolar. Em síntese, é como se a teoria da matemática científica sobre os racionais resultasse da ação de um fortíssimo compactador que condensa e, portanto, de certa maneira, esconde uma variedade imensa de idéias matemáticas em alguns enunciados formais — as definições e os teoremas relativos às propriedades das operações. Entretanto, é numa forma altamente descompactada, mas não necessariamente desorganizada — e que encerra, também, um alto grau de complexidade, mas uma complexidade própria da forma escolar — que, segundo os estudos citados, essas idéias se inserem ou se tornam operativas na prática docente, ao longo do processo de educação matemática na escola básica. A compactação intensa e direcionada em seus objetivos opera, de fato, uma verdadeira metamorfose, de modo que o objeto de ensino escolar não pode ser identificado com uma simples parte "elementarizada" ou "didatizada" do objeto de saber científico.

Restringindo-nos apenas aos conjuntos N e Q^+ — sem considerar, portanto, neste momento, questões que serão abordadas mais tarde, como por exemplo as limitações de Q frente ao problema da expressão de medidas incomensuráveis com a unidade e a necessidade de uma nova extensão do sistema numérico até os reais — o estudo que desenvolvemos aponta três elementos fundamentais do saber matemático a respeito dos números racionais, diretamente relacionados com a educação matemática escolar:

- os subconstrutos (incluindo os decimais) associados à noção de número racional;
- as operações no conjunto dos racionais positivos;
- as relações entre **N** e $\mathbf{Q}^+$.

Os elementos citados acima não são independentes, mas, ao contrário, fortemente inter-relacionados e a percepção da suas inter-relações é fundamental para o processo de ensino dos racionais na escola básica. O desenvolvimento e a maturação de uma concepção ampliada de número, através da progressiva integração dos subconstrutos associados à idéia de razão de inteiros, não se separa do trabalho pedagógico com as relações (de ordem, multiplicativa, aditiva etc.) dos próprios números entre si, em diferentes situações, de modo semelhante ao que acontece no caso dos naturais, porém envolvendo agora contextos típicos mais complexos. A introdução de um novo subconstruto, ao mesmo tempo em que aprofunda o processo de construção do conceito abstrato de número racional, pode desencadear um processo paralelo de re-elaboração e ampliação das idéias já estabelecidas no trabalho com os outros subconstrutos. Por exemplo, a idéia de fração como expressão de uma relação parte-todo tem de ser repensada quando se trabalha com frações impróprias, no contexto de medida. Uma operação (adição ou divisão) envolvendo duas frações próprias pode resultar numa fração imprópria. A adaptação da idéia de soma iterada para o produto de racionais obriga a uma recontextualização específica da associação entre multiplicar e aumentar (ou dividir e partir em pedaços menores), válida em $\mathbf{N}^*$, mas não em $\mathbf{Q}^+$.

É muito comum reduzir a questão da aprendizagem e do ensino dos racionais na escola ao treinamento do aluno no cálculo dos resultados das operações. Behr et al. (1983, p.91-92), ao comentar o fraco desempenho dos alunos norte-americanos em grandes avaliações nacionais como os NAEP (National Assesment of Educational Progress[5]) levantam a hipótese de que o baixo rendimento nas contas possa ser, paradoxalmente, o reflexo de um ensino dos racionais com ênfase nos cálculos e nos algoritmos, o qual dissocia o estudo das operações de um desenvolvimento dos elementos conceituais e dos significados (ver também GRAEBER; TANENHAUS, 1992, p.99). Llinares e Sánchez (1996), analisando a formação de professores para o ensino primário espanhol, referem-se à *flexibilidade do conhecimento* como uma característica importante do saber profissional docente:

> A idéia de flexibilidade do conhecimento pode ser entendida como a habilidade que os professores devem possuir para ajustar os significados dos conceitos matemáticos às características das tarefas propostas e/ou às características do sistema de representação empregado. Esse é um aspecto do conhecimento do professor que determina a sua capacidade de ajudar os aprendizes a construir uma compreensão das idéias matemáticas (McDiarmid et al., 1989) e caracteriza os processos de negociação de significados [...]
>
> O professor deve ser capaz de utilizar diferentes significados associados às noções matemáticas, junto com diferentes sistemas de representação. [...] Esses aspectos do conhecimento do professor podem ajudá-lo a planejar ambientes adequados de aprendizagem e a dotar de significados as produções dos estudantes. Nesse sentido, a flexibilidade deveria permitir ao professor "estar alerta" às diferentes produções dos alunos, geradas ao executarem uma determinada tarefa. (LLINARES; SÁNCHEZ, 1996, p.109)*

Em seu famoso artigo sobre os racionais, *On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers,* Kieren (1976) apresenta uma lista de sete subconstrutos relacionados com a noção de número racional e descreve, para cada um deles, uma série de atividades e de experiências que se referem aos aspectos cognitivo e didático dos processos de ensino e de aprendizagem dos racionais. Kieren propõe, para o ensino, uma imagem do número racional como um "conglomerado" dos diferentes subconstrutos. Ele diz:

> Nas sete seções anteriores deste artigo, diferentes interpretações dos números racionais foram discutidas. O fato de que os números racionais admitem essas diferentes interpretações não é novo. [...] Entretanto, a principal tese deste artigo é a de que os números racionais, do ponto de vista do ensino, devem ser considerados sob todas as formas de interpretação. Do ponto de vista do currículo, tem sido comum assumir implicitamente uma das interpretações dos racionais e desenvolver as idéias restringindo-se a essa interpretação. Isso freqüentemente acarreta que algum conceito relativo aos racionais torna-se de difícil compreensão ou então que se deixe de enfatizar algum aspecto importante associado a esse conceito.

[5] Para a análise dos resultados de alguns NAEP, ver CARPENTER et al., 1976; CARPENTER et al., 1980; POST, 1981.

> Essa abordagem singular, que considera apenas uma interpretação, ao invés de uma abordagem multifacetada, que considera várias interpretações, também afeta a criança que está aprendendo. Uma vez que cada interpretação relaciona-se a estruturas cognitivas particulares, ignorar a idéia do conglomerado ou não identificar as estruturas particulares necessárias ao desenvolvimento do processo de ensino pode levar a uma falta de entendimento por parte da criança. [...] Sem essa visão do conglomerado, é fácil projetar um cenário didático em que estão presentes elementos contraditórios ou que não conduzem de modo adequado ao desenvolvimento de algum conceito relacionado com os racionais. Por exemplo, se interpretamos o número racional apenas como medida, utilizando o modelo da reta numérica, a multiplicação de racionais não é gerada de uma forma natural. O modelo da reta numérica pode entrar em conflito com um modelo de área no desenvolvimento das idéias associadas à estrutura multiplicativa. (KIEREN, 1976, p.127)*

Vemos, assim, que o conhecimento detalhado das principais interpretações do número racional e de como elas se vinculam às chamadas estruturas aditivas e multiplicativas (isto é, às situações e idéias associadas a essas operações e suas propriedades) se apresenta como um saber matemático envolvido, de modo fundamental, nas questões que se colocam para o professor na prática docente na escola básica (cf. também SOWDER et al., 1998; ROMANATTO, 1999; DAVID; FONSECA, 1997). Mas, como se viu no Capítulo II, essa forma de conhecimento a respeito dos racionais não é objeto de consideração sistemática dentro do processo de formação profissional na licenciatura.

O terceiro elemento citado — as relações entre $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Q}^+$ — refere-se a uma percepção menos superficial da maneira com que os naturais estão imersos em $\mathbf{Q}^+$ e de como $\mathbf{N}$, visto como um universo numérico em si mesmo, possui propriedades e limitações que se desfazem quando da sua extensão a $\mathbf{Q}^+$. A simples cadeia de inclusões $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, não dá conta do conjunto de questões pedagógicas que se referem às relações entre esses sistemas numéricos. Como já foi observado, há uma série de re-contextualizações e re-interpretações a serem consideradas. No caso de $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Q}^+$ podemos citar alguns pontos específicos que sugerem a necessidade dessas recontextualizações:

- em **N,** todo subconjunto (não vazio) possui um menor elemento; em $\mathbf{Q}^+$, isso não acontece;
- em **N,** a idéia de sucessor tem sentido; em Q^+, não;
- em $\mathbf{Q}^+$, existe uma infinidade de números entre quaisquer dois dados; em **N,** não;
- em **N,** a multiplicação “aumenta” e a divisão “diminui”; em $\mathbf{Q}^+$, isso não acontece sempre;
- em $\mathbf{Q}^+$, dados a e b, existe sempre um elemento c, tal que bc = a; em **N** isso não acontece sempre.

Algumas das questões listadas acima podem parecer artificiais ou irrelevantes, do ponto de vista da matemática acadêmica. Entretanto, pesquisas mostram que elas estão ligadas à formação de certos tipos de imagens e *misconceptions* que podem se transformar em obstáculos para a aprendizagem de certas idéias fundamentais relacionadas às etapas seguintes do processo de extensão dos conjuntos numéricos. Essas concepções incorretas podem levar também à construção de modelos inadequados, numa atividade de resolução de problemas. Por exemplo, Hart (1981a) comentando os resultados de uma questão da pesquisa do *CSMS* sobre frações, em que era dada a área de um retângulo ($^1\!/_3$ cm^2) e a sua altura ($^3\!/_5$ cm) e perguntava-se qual era a medida da base, diz:

> Regras como "multiplicação sempre aumenta" foram aplicadas às frações [...] Essa foi uma questão muito difícil para as crianças. Muitos não se lembravam mais de como achar a área, mas outros disseram: "$^3\!/_5$ é maior que a área, não pode ser feito". Somente 7% dos alunos de 14 anos e 5,6% dos de 15 deram uma resposta correta para essa questão, mas a grande maioria nem tentou resolvê-la[6]. (HART, 1981a, p. 68, aspas no original, grifo nosso)*

Um exemplo que mostra uma percepção inadequada do contexto em que se deve realizar a operação de divisão (em **N**, na forma a = bq + r ou em **Q**, expressando o quociente como razão de inteiros) é apresentado por Soares et al. (1998). Numa pesquisa com cerca de 350 alunos da sexta, sétima e oitava séries do Ensino Fundamental e do primeiro ano do Ensino Médio de sete escolas de Belo Horizonte, são propostas — juntamente com 21 outras, todas de múltipla escolha — as duas seguintes questões:

Questão 7

Você tem uma haste de metal de 17 dm para fazer raios de roda de bicicleta. Cada raio deverá ter 4 dm. Quantos raios você poderá fazer?

(a) $4\frac{1}{4}$ *de raios (b) 4 raios (c) 4 raios e sobra 1dm de metal (d)* $\frac{4}{17}$ *(e) 4 raios e sobra 1 raio*

Questão 8

Um pedaço de fita de 17cm deve ser cortado em quatro pedaços de mesmo tamanho. Qual o comprimento de cada pedaço? Marque a resposta que você pensa ser a mais adequada.

(a) 4cm e sobra um pedaço (b) 4cm e sobra 1cm (c) $4\frac{1}{4}$ *cm (d)* $\frac{4}{17}$ *cm*

Essas questões tinham por objetivo avaliar a flexibilidade com que o aluno transita de um conjunto para o outro (**N** e **Q**), de acordo com o contexto em que a questão se coloca. O fato

[6] Essa mesma questão foi proposta por Soares et al. (1998) a alunos de Belo Horizonte e os resultados foram um pouco melhores: 23% dos alunos da oitava série acertaram e 36% não responderam. Para os alunos do primeiro ano do ensino médio, as porcentagens foram 27% e 19% respectivamente (SOARES et al., 1998, p.57).

de que a construção de **Q** resulte em uma maior liberdade para se efetuar a operação de divisão não significa que fazer uso dessa liberdade seja adequado em qualquer contexto. Assim, a resposta considerada correta para a Questão 7 seria um número natural — opção (b) ou opção (c) — já que não faz sentido fazer ¼ de raio de roda de bicicleta. Na Questão 8, o que não faz muito sentido é desperdiçar uma parte da fita apenas para que a medida dos pedaços seja dada por um número inteiro de centímetros. Os resultados foram os seguintes, em valores arredondados:

Tabela 5 – Respostas, em porcentagem, à Questão 7 (Fonte: Soares et al., 1998, p. 42)

resposta	sexta série	sétima série	oitava série	primeiro ano
(a)	19	19	21	11
(b)	8	2	2	12
(c)	38	50	53	62
(d)	19	22	15	5
(e)	12	3	7	7
em branco	4	4	2	3

Tabela 6 – Respostas, em porcentagem, à Questão 8 (Fonte: Soares et al., 1998, p. 42)

resposta	sexta série	sétima série	oitava série	primeiro ano
(a)	25	18	5	11
(b)	30	39	57	51
(c)	24	24	22	26
(d)	19	14	14	7
em branco	2	5	2	5

Observa-se, na questão 8, que entre os alunos da sexta e sétima séries as respostas se distribuíram bem mais eqüitativamente pelas alternativas apresentadas do que na questão 7, mas ainda assim houve uma certa concentração na alternativa (b). Essa concentração foi amplificada entre os alunos da oitava série e do primeiro ano do ensino médio. O que os autores concluem é que os alunos não atentaram para as exigências do contexto. Neste caso, a tendência foi fazer a conta em **N** em ambas as questões porque, ao que parece, o aluno se sente mais seguro e confortável trabalhando com o conjunto dos naturais.

Uma idéia que parece muito pouco familiar aos alunos da escola básica refere-se à distribuição dos racionais na reta numérica. Na questão 14 do estudo de Soares et al. (1998) foi feita a seguinte pergunta: *quantas frações existem entre ¼ e ½?*

(a) só uma *(b) menos de 10* *(c) mais de 10 e menos de 20* *(d) mais de 20*

Os resultados estão expressos na tabela abaixo (números arredondados):

Tabela 7 – Respostas, em porcentagem, à Questão 14 (Fonte: Soares et al., 1998, p. 47)

resposta	sexta série	sétima série	oitava série	primeiro ano
(a)	60	49	44	54
(b)	20	29	20	20
(c)	9	9	3	7
(d)	7	6	24	14
em branco	4	7	9	5

Todos esses exemplos indicam dificuldades dos alunos em tarefas escolares relacionadas com os números racionais. Como no caso dos naturais, vê-se que essas dificuldades atravessam todo o Ensino Fundamental e podem ser encontradas até no Ensino Médio. Como vimos no Capítulo I, o conhecimento sobre os erros dos alunos, sobre as suas *misconceptions* e sobre suas imagens conceituais é parte importante dos saberes profissionais docentes porque possibilitam o planejamento de intervenções mais eficazes em sala de aula e a construção de estratégias didáticas mais adequadas às condições reais de aprendizagem dos alunos. No caso específico dos racionais, uma visão global desse conjunto é extremamente importante para o desenvolvimento da próxima etapa do processo de extensão dos sistemas numéricos: a introdução dos irracionais e a constituição do conjunto dos números reais. O modelo da reta numérica, se já era importante para a concretização e visualização de várias propriedades relacionadas com os números inteiros, é crucial nessa passagem dos racionais aos reais. Além disso, a disposição dos racionais na reta numérica possui características bem diferentes da dos conhecidos naturais, apresentando aspectos de uma complexidade notável. A condução do processo didático visando o desenvolvimento de uma percepção consistente de que os racionais se acumulam em todo ponto da reta (sem, no entanto, preenchê-la) envolve um conjunto de atividades e estratégias que deve ser objeto de um planejamento cuidadoso. Um dos elementos desse planejamento refere-se, certamente, ao conhecimento das dificuldades dos alunos em tarefas que envolvem o uso dos conceitos associados. No entanto, como foi visto no Capítulo II, o desenvolvimento de discussões sistemáticas a respeito dessas dificuldades não é parte do processo de formação na licenciatura.

Abordaremos, para encerrar esta seção, a questão referente às formas decimais, confrontando o enfoque desenvolvido na licenciatura com as questões que se colocam para o professor na sua prática docente na escola básica. O aluno da escola mantém contato freqüente com os decimais finitos em contextos específicos (dinheiro e algumas medidas usuais, por exemplo, 1,75 metro, 1,5 litro etc.). Essa é, possivelmente, uma das razões que levam vários pesquisadores a considerarem os decimais como um dos subconstrutos associados ao conceito de número racional, isto é, uma das formas significativas de manifestação concreta da idéia de número racional. Nesses casos, o número decimal representa sempre uma medida, sendo acompanhado, portanto, de uma unidade de medir. A idéia de se aproveitar os saberes e vivências dos alunos fora da escola para dar sentido e significado à aprendizagem escolar dos conceitos matemáticos é, certamente, uma política defensável, mais que isso, recomendada e freqüentemente utilizada pelos professores e pelos textos didáticos escolares. Entretanto, Brousseau, em um artigo de 1980 sobre os problemas do ensino dos decimais, alerta para o problema da "evaporação da unidade", associado a certas formas de abordagem dos decimais. A questão levantada por Brousseau é a seguinte: se os números decimais são vistos apenas como medidas, eles só possuem significado quando acoplados a uma unidade de medir. Isso acarreta problemas em várias situações didáticas, especialmente na discussão das operações. Por exemplo, $4 \times 1{,}75m$ poderia ser interpretado como soma de quatro parcelas iguais a 1,75m, mas como se poderia produzir significado para $1{,}75m \times 4$? Brousseau relata que, ao examinar os livros textos escolares da França percebeu o seguinte fenômeno: sem nenhuma explicação, de uma página para outra, no momento de se trabalhar as operações, o decimal deixava de se associar à unidade de medida, transformando-se, através dessa *evaporação da unidade*, em um número "puro". O resultado da operação era obtido utilizando-se um algoritmo adaptado daquele correspondente aos números naturais. Segundo o autor, essa questão está presente na tradição francesa de ensino escolar dos decimais nos anos 1960 e se mantém nos anos 70, mesmo após a reforma, mas ele observa que nos anos 70 a "evaporação" acontece mais intensamente:

> A pura e simples omissão da unidade, sem nenhum aviso, como se fez sistematicamente depois da reforma de 1970, é francamente abusiva, mas nos anos 60 ela era produzida apenas furtivamente, uma vez que a pressão dos matemáticos para isolar os objetos sobre cujas estruturas eles teorizam ainda não era tão forte nessa época (BROUSSEAU, 1997, p. 125)*.

Não há dúvida de que, numa situação concreta, o número está inevitavelmente associado a algum tipo de unidade, referida ao contexto. No caso dos números naturais, as bases fundamentais do processo de reter o que há de comum em diferentes situações de uso concreto e caminhar no sentido da construção do conceito abstrato, se desenvolvem, pelo menos em parte, no período pré-escolar da criança, cabendo à escola o aprofundamento do processo. Mas no caso dos racionais, promover esse tipo de elaboração constitui, desde o início, uma tarefa essencial da educação matemática escolar. A idéia então, como têm sugerido as pesquisas e estudos sobre o assunto (BEHR et. al., 1983; KIEREN, 1976;

BROWN, 1981a; HIEBERT; WEARNE, 1986; OWENS; SUPER, 1992; BEZUK; BIECK, 1992; DICKSON et al., 1993) é que o professor da escola trabalhe com vários significados, em uma diversidade de contextos concretos, para que o aluno possa construir, ele mesmo, gradativamente, uma percepção da idéia de número em sua forma abstrata. Em suma, o processo didático escolar atuaria subliminarmente no sentido de promover a percepção de que as unidades concretas estão associadas a situações específicas, isto é, são circunstanciais, enquanto a expressão da medida (ou seja, o "número") refere-se a algo "comum" a todas as circunstâncias. A construção da noção de número por parte do aluno se desenvolveria como um processo gradual de *separação* e de *autonomização* desse "algo comum" em relação às unidades concretas, ou seja, do reconhecimento, ainda que implícito, do sentido de se trabalhar com a idéia de unidade na forma abstrata (o número 1). Dessa maneira o *processo*, embora proposto pela instância escolar e orientado pelo professor, é vivenciado pelo aluno de forma intelectualmente ativa, reproduzindo-se condições semelhantes àquelas em que se desenvolve a construção da noção de número natural e distanciando-se, assim, de uma simples exposição do aluno a um *produto* imposto pelo discurso.

De outro ponto de vista, Sowder et al. (1998) chamam atenção para a necessidade de se discutir com os futuros professores da escola a importância do desenvolvimento de uma percepção abrangente da natureza e do papel daquilo que se toma como *unidade*, ao se trabalhar com os números racionais no ambiente escolar. A capacidade de reconhecer um agregado de objetos, ou parte de um deles, como uma "nova" unidade pode ser fundamental para o tratamento matemático de uma determinada situação, para a construção de certas formas conceituais e para uma compreensão mais profunda das estruturas multiplicativas.

> [...] trabalhos recentes sobre as estruturas multiplicativas têm focalizado (1) a distinção entre o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo e (2) a progressiva evolução de situações que demandam o raciocínio aditivo, nas séries iniciais, para situações que são tratadas de modo mais adequado através do raciocínio multiplicativo, nas séries finais do Ensino Fundamental[7] (Harel et al., 1994; Lamon, 1995; Noelting, 1980a, 1980b; Simon & Blume, 1994b). [...] Existe certo consenso em torno da idéia de que o raciocínio aditivo se desenvolve mais ou menos naturalmente, a partir do tratamento de muitas situações de natureza essencialmente aditivas. O raciocínio multiplicativo, no entanto, não se desenvolve tão naturalmente; o processo de escolarização se faz necessário para o desenvolvimento de um profundo entendimento das situações multiplicativas (Resnick & Singer, 1993; Hiebert & Behr, 1998b).
>
> A transição do raciocínio aditivo para o multiplicativo requer uma reconceptualização da noção de unidade (Hiebert & Behr, 1988b). A multiplicação põe em cena o trabalho com unidades compostas ao invés de unidades simples, o que afeta a construção da noção de número. Há, ainda, uma mudança na natureza dos objetos a que os números se referem e a introdução de

[7] *middle grades*, no original.

quantidades intensivas tais como "5 balas por saquinho" (em contraste com quantidades extensivas, derivadas da contagem ou medida, e.g., 30 balas e 6 saquinhos). Nossa experiência indica que poucos professores têm refletido mais profundamente sobre as implicações do papel da unidade na transição para a matemática da quinta à oitava série (J.T.Sowder et al., 1998). No entanto, é o foco sobre o papel da unidade que permite ao estudante perceber os elementos de um conjunto na forma de agregados, um processo que amplia consideravelmente a força do seu conhecimento matemático (Lamon, 1994).

A centralidade do raciocínio multiplicativo para o desenvolvimento de uma compreensão conceitual de frações, decimais, razões, taxas, proporções e percentagem [...] é outro aspecto que tem sido apontado fortemente pelas pesquisas (Kieren, 1995; Lamon, 1994; P.W. Thompson, 1994). Com elas, aprendemos que situações que envolvem multiplicação e divisão podem ser psicologicamente mais complexas do que têm sido consideradas (Greer, 1992; Hiebert & Behr, 1988b).

(SOWDER et al., 1998, p.128-129, referências e aspas como no original)*

Esses autores consideram ainda, com base em pesquisas realizadas por alguns deles e por outros pesquisadores junto a professores da escola, que "*para poder elaborar questões como essas, que focalizem as estruturas multiplicativas relacionadas com o domínio dos números racionais, os professores da escola precisam refletir, eles mesmos, sobre tais questões"* (SOWDER et al., 1998, p.147)*.

Entretanto, no estudo que se desenvolve no curso de licenciatura, questões desse tipo não são discutidas. Os decimais são vistos unicamente como forma de *representação* dos números e estes, por sua vez, são tratados num contexto e num nível de abstração tal que essas questões, de fato, já não fazem sentido (cf. Capítulo II, p.64 e p.75-77).

Outra questão geral que se coloca para o processo de formação do professor da escola básica, com manifestações específicas no caso dos decimais (BROWN, 1981a; HIEBERT; WEARNE, 1986; DICKSON et al., 1993; STACEY et al., 2001) refere-se ao conhecimento prévio, por parte do professor, de certas dificuldades e *misconceptions* dos alunos. Como já observamos anteriormente, muitos estudos sobre as práticas pedagógicas dos professores da escola apontam esse tipo de conhecimento (a respeito das dificuldades dos alunos com um determinado tema ou tópico) como um dos elementos fundamentais do conjunto de saberes associados à prática profissional docente. Além de ser estrategicamente importante no planejamento e execução do trabalho pedagógico, esse tipo de conhecimento profissional potencializa positivamente a comunicação professor-aluno, aumentando as possibilidades de compreensão, por parte do professor, das dúvidas colocadas pelos alunos. Stacey et al., (2001) comentam que "*há certa variação na maneira como os componentes do conhecimento profissional dos professores são descritos na literatura, mas a grande maioria dos pesquisadores concorda que o conhecimento do conteúdo e um entendimento dos modos de* *pensar dos estudantes são elementos cruciais dos saberes docentes"* (STACEY et al., 2001, p.205)*. No entanto, parece que essa forma de conhecimento profissional não se produz automaticamente a partir da prática:

> [...] pesquisas recentes mostram que há falhas na forma como os professores entendem o pensamento dos alunos em determinadas situações didáticas. Em um pequeno, porém refinado estudo das idéias dos alunos a respeito das funções, Even e Markovits (1993) relatam que os professores investigados têm uma percepção inadequada das concepções dos estudantes e as respostas desses professores às perguntas dos alunos ou são demasiado genéricas ou enfatizam exageradamente os aspectos algorítmicos, em detrimento dos significados (STACEY et al., 2001, p. 207)*.

Após citar outros estudos, Stacey et al. concluem afirmando que "*essas pesquisas indicam a necessidade de que o ensino seja baseado num conhecimento acurado das dificuldades dos alunos*" (STACEY et al., 2001, p. 207).

Com relação a esse aspecto a abordagem dos sistemas numéricos vigente na licenciatura mostra-se, mais uma vez, insuficiente e inadequada: não apenas se desconsideram as imagens e concepções que os licenciandos trazem do processo de escolarização, como também não se discutem as dificuldades específicas dos alunos da escola básica associadas à aprendizagem dos decimais, algumas delas, como veremos em seguida, já extensivamente estudadas e referidas na literatura. Por outro lado, observa-se ainda a ausência de um trabalho didático na licenciatura que promova o reconhecimento, por parte do futuro professor, da natureza das dificuldades enfrentadas pelos alunos da escola na aprendizagem dos decimais. Esse trabalho junto aos licenciandos é necessário porque há uma tendência a se ver os problemas relativos ao ensino escolar dos sistemas numéricos como vinculados a aspectos algorítmicos, envolvendo cálculo de resultados das operações e desconectados de questões conceituais. No entanto, segundo vários estudos, esses problemas se referem, muito freqüentemente, à falta de uma articulação apropriada entre os procedimentos e os elementos conceituais[8] do conhecimento matemático escolar. Esse fenômeno se manifesta na aprendizagem matemática de modo geral, mas apresenta características específicas no caso dos decimais.

Na pesquisa do *CSMS* (Hart, 1981c), M. Brown desenvolveu a parte do trabalho referente aos decimais. O primeiro tipo de dificuldade que ela relata é o seguinte: alguns alunos tendem a ver o decimal como composto de dois números naturais separados por uma vírgula. Isso leva, por exemplo, a considerar 0,8 menor que 0,75 ou, de modo análogo, 4,9 menor que 4,90 (BROWN, 1981a, p.51). Brousseau também comenta essa questão: "*com*

[8] *procedural knowledge* e *conceptual knowledge.* Ver HIEBERT, 1986.

essa concepção, muitos alunos terão dificuldade de imaginar um número entre $10{,}849$ *e* $10{,}850$" (BROUSSEAU, 1997, p.125). Ver também BROWN (1981a, p.55). Esse mesmo tipo de *misconception* se manifesta nas respostas apresentadas à seguinte questão: "*quanto resulta se somarmos 1 décimo a* $2{,}9$ *?*" Uma das respostas mais freqüentes foi $2{,}10$.

Outras dificuldades se referem à internalização de uma regra sem a devida compreensão da lógica subjacente: ao multiplicar $5{,}13$ por 10 alguns alunos apresentam o número $5{,}130$ como resultado. Em entrevista, uma aluna inglesa explicou: "*meu pai me ensinou que para multiplicar por 10 basta acrescentar um zero no final*". Uma outra resposta apresentada para essa mesma questão (o número $50{,}130$) configura, ao que parece, uma combinação da regra de acrescentar um zero no final com a concepção de decimal como dois inteiros separados por uma vírgula (BROWN, 1981a, p.52).

Brown detecta uma série de situações que se referem à dificuldade de reconhecer e fazer uso das "vantagens" que resultam da extensão da idéia de número às frações e aos decimais. Assim, por exemplo, ela relata a resistência a efetuar a divisão de 16 por 20 e dar como resultado um número decimal menor que 1 (BROWN, 1981a, p.53). Alguns alunos chegam a inverter os termos da conta, dividindo 20 por 16, sob a alegação de que *não é possível* dividir um número por outro maior que ele. Permanece também a idéia de que "multiplicação sempre aumenta" e "divisão sempre diminui". Alunos de 12 a 15 anos de idade, respondendo à seguinte questão:

> *Circule a conta que fornece a MAIOR resposta: a)* 8×4 *ou* $8 \div 4$ *b)* $8 \times 0{,}4$ *ou* $8 \div 0{,}4$ *c)* $0{,}8 \times 0{,}4$ *ou* $0{,}8 \div 0{,}4$

circularam as multiplicações nos três casos, com a seguinte freqüência: 50% entre os alunos de 12 anos; 58% entre os de 13; 47% entre os de 14 e 30% entre os de 15 (BROWN, 1981a, p.54). Reconhecer corretamente a operação a ser feita numa dada situação também oferece dificuldades especiais no caso em que pelo menos um dos números envolvidos é um decimal menor que 1. Numa determinada questão foram apresentadas a uma amostra de alunos de 12 a 15 anos de idade cinco situações nas quais eles deviam indicar, sempre entre seis opções oferecidas, a conta que fornece a resposta correta. Para se ter uma idéia do tipo de situações usadas na questão, citamos uma delas como exemplo: "*uma mesa tem* $92{,}3$ *centímetros de comprimento. Isto representa quantas polegadas, aproximadamente? (1 polegada equivale a cerca de* $2{,}54$ *cm)*". As alternativas apresentadas, para que os alunos escolhessem a mais adequada, foram:

a) $2{,}54 + 92{,}3$ b) $2{,}54 \div 92{,}3$ c) $2{,}54 - 92{,}3$ d) $92{,}3 \div 2{,}54$ e) $92{,}3 - 2{,}54$ f) $92{,}3 \times 2{,}54$

Dickson et al. (1993) comentam os resultados dessa questão:

> Brown observa que menos de 10% dos alunos de 15 anos apresentaram a resposta correta para todas as cinco situações e, assim, podem ser considerados como possuidores de um sólido entendimento do significado das operações com os números, em aplicações envolvendo decimais. Nenhum dos 39 alunos entrevistados obteve a resposta correta para todas as cinco questões [...]. Isso sugere que o significado das operações de multiplicação e divisão no caso de decimais é muito difícil para crianças, particularmente em função de falsas generalizações que são feitas a partir de situações que envolvem números inteiros (DICKSON et al., 1993, p.318)*.

A própria Margaret Brown conclui o relato de sua pesquisa para o CSMS observando nas *Implicações para o Ensino*:

> Acima de tudo fica claro que a aprendizagem sobre números inteiros e decimais não é apenas uma questão de relembrar os nomes das casas decimais e algumas regras para as operações, como alguns livros parecem indicar. [...] Ao contrário, essa aprendizagem envolve a internalização de uma cadeia de relações e conexões, algumas vinculadas ao próprio sistema decimal, algumas a outros conceitos como o de fração e número racional, a certas correspondências visuais e às aplicações no mundo "real" (BROWN, 1981a, p.64, aspas no original)*.

Hiebert e Wearne (1986) também descrevem e analisam dificuldades dos alunos da escola relacionadas com a aprendizagem dos decimais. A pesquisa deles utiliza várias fontes de informação sobre essas dificuldades, o que amplifica o conjunto dos dados e fortalece as conclusões. Segundo esses autores,

> [...] Duas das fontes são estudos nacionais em larga escala, um nos Estados Unidos (Carpenter et al., 1981; NAEP, 1983) e outro na Inglaterra (Brown, 1981; Hart, 1981). Outras fontes são estudos de pesquisadores que descrevem tanto as performances de grupos de alunos (Carr, 1983; Ekenstam, 1977; Fishbein, Deli, Nero & Marino, 1985) como de indivíduos (Erlwanger, 1975) em tarefas envolvendo os decimais, além de um relatório sobre resultados de um processo didático projetado com o objetivo de trabalhar especificamente sobre misconceptions (Bell, Swan & Taylor, 1981). E a última fonte foi o nosso recém terminado estudo sobre os conhecimentos que os alunos da escola básica possuem a respeito dos decimais (Hiebert &Wearne, 1984) (HIEBERT; WEARNE, 1986, p. 203, referências no original).*

O recém terminado estudo a que eles se referem consiste de um acompanhamento, durante dois anos, de cerca de 700 alunos do quarto ao nono ano da escola (que corresponderia, no Brasil, às séries finais do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio, observando-se que o ensino médio americano desenvolve-se em quatro anos e não em três, como no Brasil). Os autores descrevem e procuram explicar as origens de certas *misconceptions* de alunos da escola básica, observadas em tarefas relacionadas com os decimais. Todos os tipos de visões incorretas que citamos anteriormente a partir da pesquisa de Brown (1981a) são confirmados por Hiebert e Wearne. E são apresentadas análises mais detalhadas referentes a esses dados e a outros por eles obtidos ou provenientes dos trabalhos citados. Uma dificuldade de caráter geral que eles notam em relação ao trabalho escolar com os decimais é a seguinte:

> Estender os conceitos relativos aos números inteiros para construir referentes que sejam apropriados aos decimais é um processo delicado. Os alunos têm que reconhecer as propriedades dos inteiros que são extensíveis aos decimais e aquelas que são específicas dos inteiros. [...] Com algumas exceções, são os elementos de ordem semântica que se generalizam para os decimais e os de natureza sintática são os que não se generalizam. O problema que se coloca para os estudantes é distinguir qual é qual (HIEBERT; WEARNE, 1986, p. 204)*.

Prosseguem, então, apontando uma série de questões que, referindo-se a diferentes aspectos do conhecimento matemático sobre os decimais, apresentam dificuldades específicas para os alunos da escola. Uma delas é a questão da ordem, já indicada em outras pesquisas. Como vimos, muitos alunos tendem a transportar dos naturais para os decimais a seguinte regra: quanto mais dígitos o número possui, maior ele é. Hiebert e Wearne pediram aos alunos que selecionassem o maior entre os decimais a) 0,09 b) 0,385 c) 0,3 d) 0,1814. As respostas corretas cresceram de um índice de 0% na quarta série a 43% no primeiro ano do Ensino Médio (*grade 9, nos Estados Unidos*). A resposta mais freqüente em todas as séries foi 0,1814 com uma incidência de 44% na sétima e 31% no primeiro ano (HIEBERT; WEARNE, 1986, p.205). Alguns estudantes tendem a formular o raciocínio contrário: quanto mais casas decimais tiver o número, menor ele é. A escolha do número 0,3 como o menor na lista referida acima indica esse tipo de *misconception* (índice de 25% no primeiro ano do Ensino Médio). Respostas dadas a outras questões, nesse mesmo estudo e em outros (p. ex., STACEY et al., 2001), confirmam que esse tipo de erro está presente, de modo estável, entre as imagens dos alunos. Hiebert e Wearne tentam explicar a forma de raciocínio associada a essa estranha idéia de ordem entre os decimais: "o*s alunos aprendem que os dígitos mais à direita representam menos e, aparentemente, modificam de alguma maneira essa noção e acabam desenvolvendo a idéia de que o número como um todo é pequeno, se possui muitos dígitos à direita da vírgula"* (HIEBERT; WEARNE, 1986, p. 206)*

Outra fonte de erros relaciona-se com o significado do zero na notação dos números decimais. Hiebert e Wearne confirmam os dados obtidos por Brown (1981a) com relação à aplicação da regra de acrescentar um zero no final do número para multiplicar por 10 e levantam a hipótese geral de que o zero, no registro dos decimais e nas operações com esses números, é freqüentemente percebido pelos alunos como um elemento do "maquinário procedimental", ou seja, um mero instrumento de fazer contas, algo que, inserido nos lugares devidos, faz com que as regras funcionem. Por exemplo, ao somar 2 + 0,8 muitos alunos consideram que 2 pode ser substituído por 2,0 mas não por 2,00. Hiebert e Wearne relatam ainda que, numa entrevista, um aluno da quinta série, ao ser perguntado se 0,7 e 0,70 tinham o mesmo valor, respondeu: *bem, depende do que você vai fazer com eles* (Ibid., p. 208).

Com relação às operações com decimais, mais uma vez há convergência nos dados apresentados pelas diferentes fontes que Hiebert e Wearne utilizam. Estes autores comentam as falsas generalizações dos inteiros para os decimais de regras como a "multiplicação sempre aumenta" e a "divisão diminui", as dificuldades específicas de reconhecer a operação a ser feita numa dada situação envolvendo decimais e relatam o seguinte episódio, descrito em Bell, Swan e Taylor (1981): no problema "*quanto custam n galões de gasolina, se o preço por galão é m dólares?",* apresentado a alunos de 12 a 15 anos para que selecionassem a operação a ser feita para obter a resposta correta, muitos alunos assinalaram a multiplicação quando *n* e *m* eram naturais, mas optaram pela divisão quando *n* e *m* eram decimais, com *n* menor que 1. Hiebert e Wearne apontam ainda outras fontes de dificuldades de alunos da escola com os decimais: efetuar contas, equivalências com as frações ordinárias, estimar ou criticar resultados na resolução de problemas.

Os números reais

Um número real é um corte de Dedekind nos racionais, isto é, um par (A,B) de subconjuntos não vazios e complementares de **Q** tais que A não possui um elemento máximo, todo elemento de A é cota inferior para B e todo elemento de B é cota superior para A.

Um número real é uma classe de equivalência de seqüências de Cauchy de números racionais, segundo a seguinte relação: duas seqüências são equivalentes se e somente se a diferença entre elas converge para zero.

Um número real é um par ordenado (a,b) em que *a* é um número inteiro e *b* uma seqüência infinita formada por dígitos pertencentes ao conjunto {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}[9].

Um número real é uma classe de equivalência de intervalos racionais encaixantes[10], segundo a seguinte relação de equivalência: $[a_n, b_n] \sim [c_n, d_n]$ se e somente se as seqüências de números racionais $(a_n - c_n)$ e $(b_n - d_n)$ convergem, ambas, para zero.

Diante de quatro definições do mesmo objeto, cabe perguntar: afinal, o que são os números reais? São cortes de Dedekind? São classes de equivalência de seqüências de Cauchy? São pares ordenados de números inteiros e seqüências infinitas cujos termos são algarismos do sistema decimal? São classes de equivalência de intervalos encaixantes?

Como fica claro nos comentários de Elon Lima e Djairo Figueiredo, citados no início da seção referente aos racionais (p.95-96 deste capítulo), e nos de J. Dieudonné, apresentados

---

[9] Na verdade, é preciso acrescentar a seguinte condição para as seqüências (b_n): para todo n, existe um m > n tal que b_m não é o dígito 9.

[10] Os intervalos da forma $[a_n , b_n]$ são encaixantes se $a_n \leq a_{n+1}$ e $b_n \geq b_{n+1}$ para todo n e a seqüência $(b_n - a_n)$ converge para zero.

no Capítulo I (p.20), a distinção entre essas formas de conceber os números reais não é relevante para o matemático profissional. O mesmo objeto pode ser pelo menos quatro "coisas" completamente diferentes e não há o menor problema. A forma "matematicamente científica" de conhecer os reais é como um conjunto cujos elementos se relacionam segundo a estrutura de corpo ordenado completo. A natureza dos elementos do conjunto não importa. É a estrutura que o caracteriza como o sistema dos números reais. As quatro definições citadas são apenas exemplos "concretos" que garantem a existência desse tipo de estrutura. Além disso, há que se considerar o seguinte fato: se existe um corpo ordenado completo, então é possível construir "outro": basta considerar a bijeção que leva x em (x,0)[11] e induzir neste novo conjunto as operações e a ordem por via da bijeção. Desse modo, desde que se constate a existência de um, existirão infinitos corpos ordenados completos *diferentes*, mas, ao mesmo tempo, todos eles *iguais* ao conjunto dos números reais. A diferença está na natureza dos elementos, num caso x, no outro o par (x,0) e a igualdade tem seu fundamento no fato de que a estrutura é a mesma. Por fim, observe-se que a apresentação do conjunto dos reais usualmente feita no curso de licenciatura da UFMG é aquela em que se postula a existência de um corpo ordenado completo (o qual é identificado com **R**) deduzindo-se, rigorosamente, as demais propriedades desse sistema numérico a partir dos axiomas que caracterizam a referida estrutura (cf. Capítulo II).

Agora pensemos na forma como o professor de matemática do Ensino Básico precisa conhecer esse mesmo objeto. Por um lado, é fundamental conceber o número real como *número*, o que faz uma grande diferença, porque, na escola, a idéia de número já possui uma história de elaboração e re-elaboração no processo de ensino-aprendizagem que vem se desenvolvendo desde o trabalho com os naturais, passando pelos inteiros, pelos racionais até chegar aos reais. Ao longo dessa história, o aluno se vê na condição de re-elaborar seus esquemas cognitivos para, a cada etapa, assimilar e acomodar a *nova* noção de número, mas esse processo de extensão se desenrola a partir de uma concepção original e nuclear — a de número natural. Em suma, para a matemática escolar, a idéia de número real vem estender uma noção de número que já inclui os naturais e os racionais. Assim, na escola, 1; 2; 3; 2/5; 0,25 etc. *são* números, mas par ordenado, corte de Dedekind e classe de equivalência de seqüências ou de intervalos *não são* números.

Por outro lado, uma vez que a noção do que seja número vem sendo ampliada desde a idéia básica de número natural, o conjunto dos reais se apresenta ao aluno e ao professor da escola como uma construção cujo *sentido é o de superar determinadas limitações da noção anterior de número.* Assim, "criar" os reais a partir do nada, ou seja, postular a existência de

[11] 0 é o elemento neutro da adição do corpo originalmente dado.

um corpo ordenado completo e identificar o conjunto dos números reais com essa estrutura, configura uma inversão de rota que entra em conflito com o processo correspondente que se desenvolve na escola. Além disso, com essa abordagem elimina-se (ou encaminha-se de forma dissonante com o tratamento escolar) a discussão a respeito de questões importantes, entre elas o próprio *sentido* da ampliação de **Q**. Em termos da educação matemática escolar, o conjunto dos reais, antes de ser uma estrutura matemática abstrata, compõe-se de objetos (números) que são constituídos para dar solução a problemas vistos como insuperáveis no âmbito dos números racionais. A estrutura de corpo ordenado completo é estabelecida a posteriori. Analogamente ao caso da extensão dos naturais para os racionais positivos, ela decorre dos significados dos novos números e da extensão, ao novo conjunto, das operações e da ordem já estabelecidas entre os racionais.

Por todas essas razões, a discussão detalhada das necessidades que levam a uma nova ampliação da noção de número e a negociação de significados para os irracionais acaba se constituindo em elemento fundamental no processo de discussão da idéia de número real, da perspectiva da matemática escolar. Nesse sentido, a apresentação dos reais feita na licenciatura, em que se valoriza enfaticamente a idéia de estrutura abstrata (corpo ordenado completo), em que os números e as operações têm seus significados dados pela estrutura e esta, por sua vez, é constituída através de axiomas, configura, a nosso ver, uma forma de conhecer os reais que se desconecta das questões que se apresentam para o professor de matemática da escola básica. Este, na sua prática docente, terá que se desincumbir da tarefa de discutir com os alunos, ao longo das séries finais do Ensino Fundamental, a necessidade de se trabalhar com "números" que não são razão de inteiros, encarando, a partir daí, uma série de sutilezas, obstáculos e dificuldades de natureza cognitiva, epistemológica ou didático-pedagógica associados à construção dessa nova noção de número.

Essas considerações não pretendem induzir a idéia de que, para o matemático, os reais não respondem a nenhuma finalidade ou que os matemáticos pensam os reais como "qualquer coisa". O que queremos enfatizar é que, para o matemático, lidando com a teoria na fronteira do conhecimento, não importa pensar os reais como um professor precisa pensá-los lidando com seus alunos no processo de escolarização básica. A idéia que deve ser ressaltada aqui é a de que o conjunto dos números reais é um objeto para a matemática escolar e *outro objeto* para a matemática científica.

No caso da formação do bacharel, justifica-se a definição axiomática dos reais (ver Figueiredo, 1975 e Lima, 1976 em trechos citados, respectivamente, no Capítulo II (p.73) e neste capítulo (p.95-96) porque o que se configura como alternativa, do ponto de vista da matemática científica, seria a construção formal dos reais via cortes de Dedekind, seqüências de Cauchy ou algum outro caminho. Em todos eles, entretanto, o roteiro geral é o mesmo: constituir um conjunto de objetos, definir duas operações com propriedades tais que caracterizem esse conjunto como um *corpo*, estabelecer nesse corpo uma ordem compatível com a estrutura, de modo que se produza um *corpo ordenado* e, finalmente, demonstrar que esse corpo ordenado é *completo* (cf. LANDAU, 1951, p. 43-91). Se a alternativa é essa, além das já referidas razões para se adotar a definição axiomática no bacharelado (que, de resto, é a utilizada em vários livros de Análise Real destinados à formação do futuro matemático, como RUDIN, 1964; BARTLE, 1964; WHITE, 1973; APOSTOL, 1975) pode-se acrescentar a ponderação que faz Simmons (1987), de que "*não há parte da matemática mais tediosa e menos gratificante do que a construção detalhada do sistema dos números reais, quaisquer que sejam os métodos*" (SIMMONS, 1987, p. 633).

No caso da licenciatura não se observa, nos documentos relativos ao currículo, nas entrevistas com os professores do curso nem nos textos usualmente utilizados na disciplina Fundamentos de Análise, qualquer argumentação específica a favor da definição axiomática dos números reais (cf. Capítulo II). No entanto, o tratamento desse conjunto numérico, na forma como é feito, suprime da pauta de discussões com o futuro professor da escola algumas questões fundamentais associadas ao sentido de se ampliar, mais uma vez, a noção de número e aos significados dos conceitos aí envolvidos. Discutiremos algumas dessas questões mais adiante. Por outro lado, nas questões eventualmente abordadas, o ponto de vista que prevalece é aquele em que se enfatizam as definições formais e o rigor lógico-dedutivo, de tal forma que a exposição do assunto se organiza e se desenvolve com o uso de um aparato técnico e conceitual demasiado distante das condições de um tratamento escolar. A instrumentação efetiva para a prática docente na escola fica, então, relegada ao plano das oportunidades eventuais que se apresentem em outras instâncias de formação.

Uma questão de ordem geral, que se refere ao processo de aprendizagem no próprio curso de licenciatura, diz respeito ao fato de que os licenciandos já possuem uma longa vivência de aprendizagem da matemática desde a escola básica, formulando e reformulando uma série de imagens a respeito dos conceitos e processos da matemática e, em particular, aqueles associados aos sistemas numéricos. Pesquisas indicam que a abordagem lógico-formal-dedutiva, como a que se faz na licenciatura (ver Capítulo II), não se tem mostrado capaz de trazer à tona e tratar de modo adequado os obstáculos e os conflitos cognitivos que emergem quando as imagens conceituais e as pré-concepções vigentes entre os alunos são confrontadas com as definições formais apresentadas pelos professores (TALL; VINNER, 1981; SCHWARZENBERGER; TALL, 1978; GRAEBER, 1993; VINNER, 1991). David Tall, ao comentar certos aspectos cognitivos e didáticos da educação matemática universitária, questiona a utilização, mesmo nesse nível de formação, de uma apresentação dos conceitos através de suas definições formais e dos resultados através da pura dedução lógica rigorosa:

> [...] o ensino na graduação apresenta freqüentemente a forma final da teoria, ao invés de desenvolver condições para que o aluno participe do seu ciclo completo de criação. Nas palavras de Skemp (1971), a abordagem usual na graduação tende a oferecer ao estudante o *produto final do pensamento matemático* em lugar de promover o acesso ao *processo de pensar matematicamente*.
>
> Não só os métodos usuais de apresentação da matemática universitária não são capazes de mostrar ao aluno a força do pensamento matemático, como possuem, também, uma outra deficiência, igualmente séria: *um enfoque lógico pode não ser apropriado para o desenvolvimento cognitivo do aluno.* De fato, grande parte dos trabalhos empíricos relatados nos últimos capítulos deste livro revela obstáculos cognitivos que surgem quando os alunos se esforçam para assimilar idéias que desafiam e contradizem suas estruturas cognitivas (TALL, 1991, p. 3, itálicos no original)*

Estudos mostram que ignorar as concepções prévias dos estudantes e tentar impor as definições formais e as deduções rigorosas agrava ainda mais o problema, na medida em que algumas dessas concepções, além de funcionar como obstáculos à aprendizagem, exibem uma relativa estabilidade, isto é, se mostram resistentes a modificações imediatas a partir do simples confronto com as formulações consideradas corretas, do ponto de vista do rigor científico (FISHBEIN et al., 1979; SIERPINSKA, 1987; GRAEBER, 1993). Soares et al. comentam e descrevem com um exemplo típico a forma pela qual o aluno costuma acomodar a definição ou a prova formal entre as suas imagens do conceito ou do fato matemático em questão:

> É ingenuidade acreditar que os alunos vão abandonar suas imagens, construídas ao longo da vida escolar, para substituí-las de imediato por uma definição formalmente correta apresentada pelo professor de um curso de Análise, na universidade. De um modo geral, o aluno tende a manter as suas imagens conceituais e acrescentar a elas uma versão (possivelmente distorcida) da definição formal apresentada. Dessa forma ele constrói uma espécie de mosaico com várias representações de um determinado conceito, recorrendo a uma ou outra dessas representações, dependendo das circunstâncias. Um aluno do 5.º período da Licenciatura em Matemática da UFMG, respondendo a uma questão, em sala de aula, explicita essa dinâmica. A questão é a seguinte :
>
> Marque a alternativa correta: a) 0,999... < 1 b) 0,999... tende a 1 c) 0,999... = 1.
>
> A resposta do aluno foi:
>
> "*Existe uma justificativa matemática, uma demonstração através de operações com dízimas periódicas e frações que prova que a igualdade (c) é verdadeira. Não me recordo dela agora, mas sei que é verdadeira. Num primeiro momento tem-se o ímpeto de achar que todas as afirmativas são satisfatórias. Na verdade <u>eu ainda acho</u> (grifo nosso) que as duas primeiras não são falsas, pois dentro do que é passado no 1.º e 2.º graus elas têm uma lógica bastante aceitável*". (SOARES et al., 1999, p. 97, itálicos no original)

De fato, é a partir da constatação da estabilidade potencial das concepções prévias dos estudantes, insistindo sempre na criação de situações didáticas ativas, em que essas concepções e imagens se explicitem e possam ser repensadas, que vários pesquisadores têm investigado as possibilidades de desenvolvimento de estratégias didáticas que promovam a *mudança conceitual* e a superação de obstáculos cognitivos provenientes de concepções inadequadas (SIERPINSKA, 1987; GRAEBER, 1993).

Essas considerações a respeito da formação de imagens e concepções conflitantes com as definições formais se referem, por certo, a um fenômeno geral no processo de aprendizagem matemática, tanto na escola quanto na universidade. Entretanto, no caso do trabalho com os números reais dentro da abordagem usualmente desenvolvida na licenciatura, esse fenômeno se manifesta de modo mais intenso. A inevitável consideração de processos que envolvem a *passagem ao infinito*, por sua complexidade intrínseca, favorece a formação de *misconceptions* (CORNU, 1991; TALL, 1994) e, além disso, dificulta a tradução da linguagem formal para uma formulação mais acessível ao aluno da escola (SCHWARZENBERGER; TALL, 1978).

A definição axiomática dos reais e a abordagem formal-dedutiva que se desenvolve na licenciatura, além de não se mostrarem adequadas do ponto de vista do processo de aprendizagem e desenvolvimento cognitivo dos próprios licenciandos, ainda se desconectam da prática do professor da escola básica porque não tratam adequadamente algumas questões importantes para a prática docente escolar. Discutiremos a seguir, com certo nível de detalhe, duas dessas questões, a título de exemplo: a noção de incomensurabilidade e a representação decimal dos números.

Como já comentamos anteriormente, uma questão fundamental na preparação do professor para o trabalho escolar com os reais é a que se refere às necessidades que levam a uma nova ampliação da noção de número e ao significado dos irracionais. Fishbein et al. (1995) comentam essa questão da seguinte maneira: "*Como seria possível passar dos racionais aos reais sem descrever o conjunto dos números irracionais? Os irracionais são parte do sistema numérico e sem eles o conceito de número real é incompleto. Basta descuidar-se dos irracionais e todo o sistema desmorona*" (FISHBEIN et al., 1995, p. 30, aspas no original)*.

Nos textos didáticos escolares, o número irracional é apresentado de duas maneiras: um número que não se pode escrever como razão de inteiros ou uma forma decimal infinita não periódica (GIOVANNI; PARENTE, 1999, p.17-21; JACUBOVIC; LELLIS, 1995, p.12-24; GIOVANNI; GIOVANNI JR, 2000a, p.52-57; IMENES; LELLIS, 2002, p.248-255). Ora, se o universo numérico dos alunos ainda é o conjunto dos racionais, nenhuma dessas duas caracterizações tem qualquer significado para eles. Não sabendo o que significa uma forma decimal infinita não periódica não se sabe o que é número irracional e vice-versa. Do mesmo modo, se a idéia escolar de número está associada, no seu significado mais amplo, apenas a uma razão de inteiros, os irracionais, não sendo razão de inteiros, não são números. Trata-se de uma situação análoga àquela de procurar no dicionário o sinônimo para uma palavra cujo significado não conhecemos e encontrar apenas duas palavras, as quais, também, não sabemos o que significam. No final, define-se o conjunto dos números reais como a união dos racionais com os irracionais. Fecha-se, assim, um ciclo de inconsistências e não se esclarece o sentido de se conceber os irracionais como números ou o significado que possa vir a ter essa nova espécie de número.

No processo de formação na licenciatura, os reais são definidos axiomaticamente e, uma vez assim estabelecidos, *prova-se* que existem reais que não são racionais. Dessa forma, os irracionais são números (reais) "porque" são supremos de subconjuntos não vazios e limitados superiormente de um corpo ordenado completo. Por outro lado, utilizando-se uma definição formal de representação decimal prova-se, *a partir dos resultados já estabelecidos no estudo das seqüências e séries de números reais*, que todo número real admite uma representação decimal infinita e que a dos irracionais (i.e., números reais que não são racionais) não é periódica (cf. Capítulo II, p.76-77). Estabelece-se, assim, uma espécie de legitimidade formal para que se adote nos textos escolares a apresentação usual dos irracionais e dos reais: uma vez garantido o fato de que não há nada matematicamente incorreto em se apresentar os irracionais como números que não são frações ou como decimais infinitos não periódicos, a questão pedagógica referente à introdução dos reais para alunos cujo universo numérico é o recém-construído conjunto dos racionais fica simplesmente esquecida. Desse modo, o tipo de visão que se veicula na licenciatura, além de não oferecer alternativas para o tratamento dado nos textos escolares, ainda acaba legitimando uma forma inadequada (no contexto da educação matemática escolar) de apresentação da idéia de número irracional.

Entretanto, essas duas formas de apresentação dos reais são, num certo sentido, contraditórias. A dos textos escolares, no que se refere à definição dos reais pela forma decimal, tem seu fundamento pedagógico no pressuposto de que um trabalho didático anterior tenha sido desenvolvido de modo a promover uma compreensão profunda do significado das formas decimais infinitas, associando-as, por exemplo, a pontos da reta e estes, via medida de comprimentos, à idéia de número real. Ou mesmo, com um enfoque mais direto, através da simples identificação dos reais com os pontos da reta (ver FREUDENTHAL, 1973, p. 215-222). No caso da conceituação de número irracional como aquele que não é razão de inteiros, também não há como fugir, a nosso ver, a uma discussão de natureza geométrica através da associação dos reais a medidas de segmentos e da consideração da possibilidade da incomensurabilidade. A definição axiomática dos reais, por sua vez, vincula-se a um movimento — importante para o avanço da matemática científica contemporânea (cf. DIEUDONNÉ, 1990) — que toma exatamente a direção contrária, determinada pelo objetivo de eliminar qualquer apelo a argumentos geométricos no desenvolvimento da teoria dos reais, visando estabelecer os resultados da Análise em bases rigorosamente dedutivas.

Um dos elementos fundamentais do campo semântico associado ao conceito de número real é, certamente, a idéia de incomensurabilidade (CARAÇA, 1975; MIGUEL, 1993; FISHBEIN et al., 1995). Vista da perspectiva escolar, a discussão da incomensurabilidade traz à tona a questão da insuficiência do conjunto dos números racionais e a necessidade de se ampliar novamente a noção de número, de modo a incluir a consideração de "quantidades" que não se expressam como razão de inteiros. Conjugada a essa discussão, evidentemente, faz-se necessária uma re-elaboração da noção do que seja medir algo, fixada uma unidade. Por outro lado, essa elaboração mais profunda da idéia de medir pode servir de base para uma abordagem que venha a tornar mais transparente e compreensível o vínculo intrínseco da irracionalidade com os processos infinitos: um número irracional, por expressar medidas de segmentos incomensuráveis com a unidade, não pode ser dado por uma fração da unidade, mas é sempre uma soma de infinitas frações. Por esse mesmo motivo, um número irracional tem a forma decimal (ou em qualquer outra base, num sistema posicional análogo) infinita e não periódica.

Ainda que não haja consenso com relação à conveniência de se trabalhar detalhadamente a noção de incomensurabilidade, em todos os seus aspectos, com os alunos da escola básica, não parece haver objeção à tese de que essa noção deva ser discutida na licenciatura. O fato é que o domínio dos conhecimentos envolvidos no trabalho didático com a idéia de incomensurabilidade e sua vinculação com o significado dos números irracionais pode ser essencial no desempenho de eventuais tarefas de avaliação, seleção, adaptação ou mesmo a construção e implementação de possíveis propostas de abordagem escolar do tema "números reais". Essas tarefas não podem ser consideradas supérfluas ou desnecessárias dentro do trabalho docente na escola, tendo em vista que a abordagem usual do assunto nos textos didáticos escolares é problemática, como já comentamos. Por outro lado, alguns estudos mostram que, mesmo entre alunos universitários, incluindo estudantes do curso de matemática, predominam idéias bastante confusas a respeito da noção de incomensurabilidade e suas relações com o significado da irracionalidade. Um exemplo é a Questão 5 da pesquisa que realizamos com formandos e iniciantes do curso de licenciatura em matemática da

UFMG, cujo relato integral constitui o Capítulo IV deste trabalho. Outros estudos, no Brasil e no exterior, também apontam dificuldades dos alunos com a idéia de incomensurabilidade. Fishbein et al. (1995) relatam uma pesquisa com alunos do Ensino Médio e com licenciandos em matemática de Israel, na qual, entre outros itens de um questionário do tipo múltipla escolha com justificativa, constavam duas questões diretamente relacionadas com o assunto. Na primeira, perguntava-se se é sempre possível encontrar uma unidade de medida comum para dois segmentos arbitrários, de tamanhos diferentes. Na segunda, se é possível encontrar uma unidade comum para o lado e a diagonal de um quadrado.

Os autores esperavam encontrar, generalizada entre os estudantes da amostra, a idéia de que quaisquer dois segmentos são comensuráveis. Isso, entretanto, não ocorreu. Os resultados foram, em síntese, os seguintes: em turmas de cerca de 30 alunos para cada um dos três estágios pesquisados (correspondentes, no Brasil, ao primeiro e segundo anos do Ensino Médio e licenciatura), 37% dos alunos do primeiro ano, 50% dos do segundo ano e 31% dos licenciandos marcaram a resposta afirmativa na primeira questão. A resposta considerada correta (*nem sempre*) foi escolhida por 27% no primeiro ano, 28% no segundo e 38% na licenciatura, mas apenas um aluno do primeiro ano, três do segundo e três licenciandos a justificaram de forma aceitável. Para a segunda questão, a resposta considerada correta (*nunca)* foi assinalada por 30% no primeiro ano, 16% no segundo e 49% na licenciatura. No entanto, justificativas aceitáveis foram fornecidas por apenas um aluno do primeiro ano, um do segundo e por todos os que marcaram a resposta certa na licenciatura. Embora a expectativa inicial dos autores não se tenha confirmado, eles concluem que "*a idéia de incomensurabilidade, mesmo quando referida especificamente ao caso do lado e diagonal do quadrado, permanece confusa para a grande maioria dos alunos do Ensino Médio e para a metade dos licenciandos da amostra"* (FISHBEIN et al., 1995, p.40)*.

Soares et al. (1999) aplicaram um questionário a 84 alunos do segundo, quarto e sétimo períodos dos cursos de licenciatura e bacharelado em matemática da UFMG e da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), numa pesquisa em que se procurava conhecer as concepções dos estudantes sobre diferentes aspectos conceituais relativos aos números reais. Algumas perguntas referiam-se à noção de incomensurabilidade e à sua associação com o significado dos irracionais. Comentaremos os resultados de três delas: as questões 3 e 4, que foram apresentadas a todos os alunos da amostra, e a questão 11, respondida por 38 deles. Os enunciados foram os seguintes:

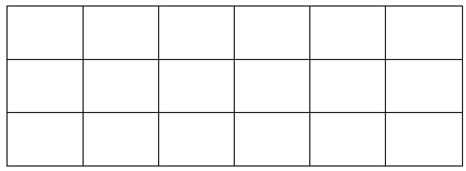
Questão 3: "*O que leva você a acreditar na existência de números irracionais?"*

Questão 4: "*você quebra uma barra de chocolate em dois pedaços, ao acaso. É sempre possível exprimir a razão entre os "tamanhos" desses dois pedaços (as áreas deles, por exemplo) por um número racional?*"

Questão 11: "*Considere quatro retângulos cujas dimensões x e y em cm são dadas por:*

a) $x = 15; y = 35$ *b)* $x = 1,5; y = 3,5$ *c)* $x = 15\sqrt{2}; y = 35\sqrt{2}$ *d)* $x = 15\sqrt{2}; y = 35$

Quais desses retângulos podem ser divididos em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas horizontais e verticais? (ver figura abaixo)



Os autores observam que as questões 3 e 4 visavam complementar a questão anterior do questionário, em que se perguntava: *para você, o que é um número irracional?* A expectativa era a de que muitos responderiam essa questão apresentando as definições escolares ("número que não se escreve como fração" ou "decimal infinito não periódico"). A questão 3 procurava prosseguir o diálogo implícito, como se dissesse: "mas, existe número que não é razão de inteiro?" Ou então: "existe número que possui representação decimal infinita e não periódica?" A questão 4 visava verificar o quanto a possibilidade da incomensurabilidade é considerada pelos alunos da amostra. E a questão 11 pretendia avaliar se o aluno é capaz de associar a irracionalidade da razão dos lados do retângulo com a impossibilidade de encontrar uma medida comum, isto é, com a incomensurabilidade deles.

Das 84 respostas apresentadas à questão 3, quinze foram consideradas satisfatórias. Isso significa que mais de 80% da amostra não consegue citar um argumento que mostre que os racionais não nos bastam. Na questão 4, quase 65% dos alunos responderam não, mas somente em dois casos essa resposta foi acompanhada de uma explicação satisfatória. Em muitas explicações para a resposta "não", dizia-se que um dos pedaços podia ter área irracional e assim a razão de suas áreas seria irracional. Na questão 11, apenas sete alunos (menos de 20%) da amostra responderam corretamente (a, b e c), encontrando também, corretamente, o número mínimo de quadrados pedido. Mas *nenhum* deles explicou porque no caso d) não se poderia subdividir o retângulo em quadrados iguais. Os autores comentam os resultados dessa questão: "*No caso a) eles* [os sete alunos que responderam corretamente] *acharam o máximo divisor comum de 15 e 35. Dividindo esse inteiro por 10 e multiplicando-o por* $\sqrt{2}$ *eles obtiveram as respostas para os casos b) e c). Como isso não funciona em d), eles podem ter concluído que nesse caso a subdivisão é impossível, sem considerar a* *incomensurabilidade entre a base e a altura do retângulo dado"* (SOARES et al., 1999, p.110). No geral, os autores concluem que "*o contraste racionalidade versus irracionalidade parece ser percebido pelos alunos como pura formalidade[...]. O significado da incomensurabilidade de dois segmentos, o sentido e a necessidade dos irracionais passa ao largo de quase todas as respostas* (Ibid., p.115).

Nota-se, assim, a conveniência de uma discussão mais específica e aprofundada sobre a noção de incomensurabilidade no processo de formação do professor na licenciatura, considerando-se as dificuldades observadas entre os próprios licenciandos. Tendo estas por base, podemos projetar as dos alunos da escola fundamental e inferir a necessidade do desenvolvimento de alternativas para a abordagem escolar do assunto.

Antonio Miguel, em sua tese de doutorado, desenvolve três estudos sobre história e educação matemática e num deles (o terceiro) aborda o tema "números irracionais" (MIGUEL, 1993). Esse estudo, qualificado como histórico-pedagógico-temático, pretende ilustrar as possibilidades do uso pedagógico da história da matemática através da descrição, análise e fundamentação de uma proposta de tratamento escolar do assunto. Na justificativa para a escolha do tema, o autor esclarece:

> A razão de nossa escolha ter recaído sobre esse tema deve-se ao fato de, tradicionalmente, as passagens dos textos didáticos de matemática para a escola secundária referentes a ele reduzirem-se, invariavelmente, a um amontoado de regras para operar com radicais para as quais, na maioria das vezes, não se apresentam justificativas convincentes e que acabam por constituir-se, aos olhos dos estudantes, em conhecimentos pouco úteis, pouco desafiadores e desligados dos demais temas presentes nos programas de matemática (MIGUEL, 1993, p. 168).

Entre outros elementos que constituem o referido estudo, uma seqüência de atividades — dirigida ao trabalho com alunos da oitava série do Ensino Fundamental — é cuidadosamente planejada com o objetivo de "provocar" um eventual reconhecimento da possibilidade de que dois segmentos sejam incomensuráveis e desenvolver uma percepção do sentido e da necessidade de uma ampliação do campo numérico racional. A formulação dessa seqüência de atividades se faz a partir de uma escolha fundamentada entre as diferentes versões históricas da descoberta da incomensurabilidade e da adaptação pedagógica do processo segundo o qual se teria chegado a essa descoberta. Assim, procura-se evitar que a informação de que os racionais não medem todos os comprimentos, que já não é algo naturalmente conjecturável, venha a "cair" sobre os estudantes como uma *fatalidade* que resulte apenas da impotência deles diante de uma argumentação lógica inquestionável. O que se visa é uma efetiva compreensão e assimilação do fenômeno da incomensurabilidade. No início do estudo, após descrever e fundamentar sua opção por uma concepção *construtivista não radical* do processo de ensino-aprendizagem, Miguel explica por que organiza a seqüência de atividades em torno da relação de incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do pentágono e não do quadrado. Ele diz:

> Essa história pareceu-nos também interessante pelo fato de, nela, um elemento iconográfico desempenhar um papel fundamental. Percebemos que esse elemento iconográfico poderia dar uma unidade aos diferentes tópicos escolhidos para compor o material referente ao estudo histórico-pedagógico-operacionalizado [*EHPO, esclarecimento nosso*]. A razão disso é, ao mesmo tempo, histórica e psico-pedagógica. [...] Psico-pedagógica pois parece desejável que um processo de ensino-aprendizagem de caráter construtivo deva ter como ponto de partida um elemento motivador que funcione como guia na construção do conhecimento, como ponto de referência emblemático que confira sentido, ainda que inicialmente difuso e misterioso, à trajetória obscura a ser percorrida pelo aprendiz em seu processo de busca. Em outras palavras, um elemento motivador que funcione, como diz Price, como uma "Gestalt que parece forçar o surgimento de uma sensação de necessidade e que, em muitos casos, só pode traduzir-se de modo figurativo" (Price, 1976, p. 77).
>
> Felizmente o emblema que se mostrou adequado para nos guiar nessa busca tem luz própria suficiente para iluminar os momentos de obscuridade. É uma estrela. A estrela de cinco pontas. O pentagrama ou pentáculo das bruxas (MIGUEL, 1993, p. 199-200, referências e aspas no original).

Mais adiante observa que a percepção do fenômeno da incomensurabilidade a partir do quadrado não é totalmente marginalizada no estudo. Ela aparece como uma percepção a posteriori, isto é, "*desencadeada pelo emblema que coliga indefinidamente pentágonos e pentagramas*" (MIGUEL, 1993, p. 204). Após descrever e dar os fundamentos para o uso de certas atividades no estudo (relacionadas com uma prova "construtiva" do teorema de Pitágoras e com o algoritmo euclidiano da divisão), o autor comenta a estratégia pedagógica baseada no desenvolvimento de uma provocação que leve o estudante a considerar a possibilidade da incomensurabilidade de segmentos:

> O estudante, porém, até o momento, desconhece a existência de magnitudes incomensuráveis, e o propósito da atividade 14 é o de não apenas fazer com que ele tenha a possibilidade de aplicar o método das subtrações sucessivas geométrica e aritmeticamente a segmentos que são comensuráveis, como também o de sondar como o aluno se comporta diante da aplicação desse método a magnitudes incomensuráveis [...]. A reação prevista do aluno nesta atividade de aplicação e de sondagem é que o fenômeno da incomensurabilidade, apesar da provocação, lhe passe despercebido [...]
>
> O objetivo do texto 8 da p. 31 do EHPO é o de provocar uma nova dissonância necessária para "transportar" o "ghost" [...] do campo de invisibilidade para o campo semântico, isto é, ao plano da consciência. [...] Mas não basta contrariar o senso comum. É preciso também "mostrar" que a negação faz sentido. Mas esse "mostrar", que implica um "convencer", não poderia recorrer a procedimentos dedutivos abstratos muito sofisticados que nem estavam disponíveis no conjunto de conhecimentos matemáticos da época e nem teriam o poder de persuasão necessário para desafiar o senso comum. [...] O poder da vista deveria ser destruído

> com algo visível. Aí reside a força da "prova" de Hipasus. A punição de Hipasus é a prova do êxito pedagógico de sua prova. Daí a possibilidade do seu aproveitamento didático na atualidade. A atividade 16 do estudo histórico-pedagógico-operacionalizado tem por objetivo fazer com que o estudante, através da aplicação do método das subtrações sucessivas à rede de pentágonos e pentagramas, chegue à conclusão, de uma forma provavelmente análoga àquela empregada por Hipasus, da possibilidade de existência de segmentos incomensuráveis. A atividade 15, que a antecede, procura simplesmente preparar o terreno para isso [...] (MIGUEL, 1993, p. 223-226, aspas no original)

Em síntese, o que essa proposta de Miguel e as considerações sobre concepções e imagens dos estudantes a respeito da idéia de incomensurabilidade nos mostram é que o tratamento escolar do assunto é delicado e deve ser objeto de discussão aprofundada no processo de formação do professor. Entretanto, a discussão detalhada da noção de incomensurabilidade não é desenvolvida sistematicamente no curso de licenciatura. Exceto, talvez, de forma esporádica e ocasional como, por exemplo, numa disciplina optativa eventualmente oferecida durante o curso ou como resultado de demanda dos alunos ou de opção pessoal do professor num determinado semestre letivo, essa questão (incomensurabilidade de segmentos) é referida apenas *en passant* e de modo extremamente superficial ao longo do curso. O fato é que uma discussão detalhada do assunto não faz parte daquelas discussões consideradas obrigatórias dentro do processo de formação do professor na licenciatura. Isso fica claro ao analisarmos os textos que são utilizados como referência básica nas respectivas disciplinas do curso.

No livro *Análise I* (FIGUEIREDO, 1975), em torno do qual se desenvolve a disciplina Fundamentos de Análise, a única referência à idéia de incomensurabilidade é feita na p. 4, seção 1.2, que tem o título *Números Racionais*. Após anunciar as propriedades que caracterizam a estrutura *corpo* e afirmar que "*é imediato verificar que **Q** é um corpo",* o texto se refere à disposição dos racionais na reta. São fixados arbitrariamente dois pontos na reta (correspondentes aos números 0 e 1) e prossegue-se da seguinte maneira:

> Os inteiros são marcados, facilmente, se usarmos o segmento de extremidades 0 e 1 como unidade. Os racionais são obtidos por subdivisão adequada do segmento unidade. Se imaginarmos os números racionais marcados sobre a reta, veremos que eles formam um subconjunto da reta que é *denso* no sentido que esclarecemos a seguir.
>
> Dado um ponto qualquer da reta, poderemos obter racionais tão perto dele quanto se queira; basta tomar subdivisões cada vez mais finas da unidade. Pode parecer, pois, que os racionais cobrem a reta R, isto é, a cada ponto de R corresponde um racional. Que isso não é verdade já era conhecido pelos matemáticos da Escola Pitagórica. <u>Sabiam eles que a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles não é comensurável com os catetos, isto é, se os catetos têm comprimento igual a 1, então a hipotenusa não é racional</u>. Portanto, o ponto P da reta R, obtido

traçando-se a circunferência centrada em 0 e raio igual à hipotenusa, não corresponde a um racional. (FIGUEIREDO, 1975, p.4. Itálico no original, grifo nosso)

Em seguida, apresenta-se a demonstração clássica de que a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos unitários não tem medida racional (isto é, que o número $\sqrt{2}$ não é racional) e encerra-se a seção com a seguinte consideração:

> O fato acima demonstrado de que existem pontos de R que não correspondem a elementos de **Q** indica uma deficiência dos racionais. Procederemos agora no sentido de obter um conjunto numérico mais amplo que o dos racionais e cujos elementos estejam em correspondência biunívoca com os pontos de R. (Dois conjuntos A e B estão em correspondência biunívoca, se a cada elemento de A corresponde um e somente um elemento de B e vice-versa.) O conjunto que vai resolver essa questão é o corpo dos números reais. (Ibid., p.5)

Na seqüência, define-se corpo ordenado, supremo e então o conjunto dos números reais é definido como (qualquer) corpo ordenado completo (Capítulo II, p.72). Com isso, encerra-se o tratamento da incomensurabilidade, não se retornando mais a essa questão.

No outro livro que tem servido de referência auxiliar na disciplina Fundamentos de Análise (LIMA, 1989), simplesmente não há qualquer referência à noção de incomensurabilidade. Na disciplina Iniciação à Matemática, quando se trabalha com o livro *Números: Racionais e Irracionais* de Ivan Niven (o que tem ocorrido com relativamente pouca freqüência, conferir Capítulo II, p.61), também se poderia imaginar que essa discussão fosse desenvolvida com mais detalhes, mas não é o caso. Em todo o livro, uma única referência é feita à noção de incomensurabilidade, no meio de um comentário mais ou menos marginal sobre o uso de certas expressões dentro da matemática, quando elas já possuem um significado na linguagem usual. Transcrevemos esse comentário integralmente com o objetivo de explicitar a forma aligeirada e superficial com que é discutido esse aspecto do conhecimento matemático sobre os números irracionais e reais.[12]

> 3.6 As palavras que usamos
>
> A linguagem que usamos para descrever as várias classes de números faz parte de nossa herança histórica e, sendo assim, é pouco provável que ela mude, apesar de sentirmos que algumas palavras sejam ligeiramente peculiares. Por exemplo, na linguagem de todo dia, ao dizermos que algo é “irracional” queremos, em geral, dizer que este algo é desprovido de bom senso, sendo, portanto, contrário à razão. Mas é claro que não consideramos números irracionais como contrários à razão. Aparentemente os gregos ficaram surpresos ao descobrirem os números irracionais porque eles pensavam que, dados dois segmentos

[12] É preciso deixar claro, entretanto, que essa superficialidade se justifica em termos dos objetivos do livro, pois o autor anuncia explicitamente, no início, a escolha de uma abordagem que leve o mais diretamente possível à questão da classificação dos reais em algébricos e transcendentes. Nesse sentido, os três primeiros capítulos, em que se discutem os naturais, os inteiros e os reais, compõem, basicamente, uma preparação para o estudo que se desenvolve nos capítulos seguintes e que vai culminar, no último, com a prova da existência de números reais transcendentes.

quaisquer, existiriam sempre inteiros a e b tais que a razão dos comprimentos dos segmentos fosse a/b.

O significado matemático da palavra "racional" se refere à razão de números inteiros e "irracional" se refere à ausência de tal razão.

A palavra "comensurável" tem sido usada para descrever dois comprimentos cuja razão é um número racional. Duas grandezas *comensuráveis* são tais que uma delas pode ser "medida" por intermédio da outra, no seguinte sentido: Existe um inteiro k tal que, se dividirmos o primeiro segmento em k partes iguais, cada uma de comprimento l, o segundo segmento poderá ser dividido em um número inteiro, digamos m, de partes iguais, cada uma de comprimento l. Neste caso, a razão dos comprimentos dos dois segmentos será $(kl/ml) = k/m$, que é um número racional (veja fig.11). Porém se os segmentos forem tais que a razão de seus comprimentos for irracional (por exemplo, o lado e a diagonal de um quadrado), então a construção acima nunca poderá ser feita, não importando quão grande escolhamos k (e quão pequeno escolhamos l)! Neste caso, os segmentos dados se dizem incomensuráveis.

Números como $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{24}$ ou, em geral, números da forma $\sqrt[n]{a}$, onde a é racional e n inteiro, são chamados *radicais*.

O termo "números reais" é uma outra herança do passado. Se fôssemos escolher um nome hoje em dia, talvez os chamássemos de números unidimensionais. De qualquer modo não consideramos "irreais" números que não sejam reais. O leitor estará provavelmente familiarizado com os números complexos dos quais os números reais formam uma subclasse. Um número complexo é [...]

(NIVEN, 1984, p.69-71. Itálicos e aspas no original, grifo nosso)

Na disciplina História das Ciências Exatas, onde também se poderia esperar uma abordagem sistemática da questão da incomensurabilidade, isso, de fato, não ocorre. Entrevistamos um dos três professores que têm lecionado essa disciplina com mais freqüência nos últimos dez anos e ele nos explicou que o objetivo da disciplina não é desenvolver discussões sobre tópicos específicos da matemática, mas analisar certas idéias e enfoques gerais dentro do pensamento científico e, em particular, do pensamento matemático, procurando-se referi-las ao contexto sócio-histórico e cultural em que surgem (ver ementa e programa da disciplina História das Ciências Exatas no APÊNDICE A do Capítulo II). Sendo assim, segundo esse professor, a discussão mais detalhada de qualquer tópico específico da matemática, quando acontece, é resultado de seleções circunstanciais, feitas pelos professores, negociadas ou não com os alunos, a cada semestre.

Agora passamos à questão da representação decimal dos reais e, em particular, das formas decimais não periódicas que representam os irracionais. De certo ponto de vista, tudo se reduz, primariamente, a uma compreensão do sistema decimal de registro dos números naturais. A forma decimal de números não inteiros não passa de uma extensão dessa idéia básica. Da perspectiva com que se trabalha o assunto na licenciatura, essa extensão parece muito simples, mas a questão mostra-se problemática e de difícil tratamento no processo de educação matemática escolar. Como já comentamos no Capítulo I, os decimais desempenham, até certo estágio da aprendizagem escolar, uma função ambígua, porém pedagogicamente importante: eles podem ser utilizados em certas circunstâncias para ajudar na construção da noção abstrata de número, quando se consideram certos decimais finitos como um *subconstruto* associado ao conceito de número racional; em outras situações podem ser vistos como uma forma de representação do número, isto é, como uma das maneiras de se *registrar* os números racionais ou reais, supondo-se sabido *o que é* número racional ou real; ou, ainda, podem ser identificados com a própria noção de número, no caso em que se *conceituam* os irracionais como os decimais infinitos não periódicos. Para alguém que já domine as idéias envolvidas nesses processos de abstração, o uso das formas decimais em diferentes situações e com sentidos específicos em cada caso se faz de modo imperceptível e constitui muito mais uma solução do que um problema. Mas, do ponto de vista da formação do professor da escola básica é fundamental que essa mistura de significados — crucial nos processos de formação e ampliação do conceito abstrato de número — seja explicitada, discutida e analisada criticamente para que possa ser usada de maneira criteriosa pelo professor e não se transmute de auxílio em obstáculo para o processo de aprendizagem dos alunos. No caso dos decimais finitos, tratados anteriormente, vimos como certas concepções e generalizações inadequadas podem conduzir a erros e dificuldades de aprendizagem.

Quando consideradas no contexto dos números irracionais, acentuam-se ao extremo as dificuldades dos alunos com os decimais, porque eles se vêem diante do problema de conciliar a idéia de número com as formas decimais que representam os irracionais. Essa situação envolve certo conflito porque a noção de número que os alunos vêm construindo e ampliando gradativamente ao longo de toda a vivência escolar aplica-se a quantidades finitas e bem determinadas, mas é exatamente essa condição fundamental que lhes parece estar ausente nas formas decimais infinitas, especialmente as não periódicas. Tall (1994) comenta:

> [...] decimais infinitos são freqüentemente vistos pelos alunos como *impróprios*, no sentido em que "continuam indefinidamente" e não especificam *exatamente* o valor limite (4). A notação $\sqrt{2} = 1{,}414...$ significa apenas que "a raiz quadrada de 2 pode ser calculada com quantas casas decimais se quiser e, com três casas é $1{,}414$. Isso *não* significa que o decimal infinito <u>seja</u> o limite da seqüência de aproximações decimais finitas. As experiências dos estudantes com os números, na escola fundamental, se desenvolvem em torno da idéia de *aproximações* e não da de precisão. O conflito entre o desejo abstrato pela precisão e as questões práticas ligadas à aritmética leva a conflitos sutis na mente dos alunos (TALL, 1994, p.1-2, itálicos e aspas no original, grifo nosso)*.

No caso das dízimas periódicas, há sempre a alternativa de entendê-las e operar com elas a partir das respectivas frações geratrizes, mas os decimais não periódicos são intrinsecamente misteriosos para os alunos porque, ao que lhes parece, esses “números” não têm uma origem (não resultam da divisão de dois “números”, por exemplo), não têm um fim (a representação decimal não “termina”) nem uma finalidade (não se sabe bem a que servem). E, sobretudo, não possuem significado.

A identificação da representação decimal com o resultado de uma “divisão continuada” é uma das formas eficientes de atribuição da qualidade de “número” às dizimas periódicas. Quando vistos como resultado de uma divisão que se prolonga indefinidamente, na qual percebe-se claramente que nunca aparecerá um resto zero, esses decimais são aceitos como números porque já se parte do número (a fração) para se obter a dízima, ou seja, esta já se apresenta ao aluno, antecipadamente, como número. Outros tipos de referência também contribuem para a aceitação de certas formas decimais infinitas como números. O $\sqrt{2}$, por exemplo, é visto como número, mesmo possuindo uma representação decimal infinita não periódica, porque já tem um significado que independe de sua forma decimal: ele é o “número” que elevado ao quadrado dá como resultado o 2. Por outra via, o fato de $\sqrt{2}$ ser a medida do comprimento da diagonal do quadrado de lado 1, também garante o seu estatuto de número. Entretanto, quando retirada de um contexto desse tipo, em que a condição de número já está garantida por outros mecanismos, a forma decimal infinita perde significado e pode se associar a algo anômalo ou misterioso. Pesquisas mostram que, embora os alunos tenham a tendência de acatar, talvez irrefletidamente, os decimais infinitos como números, freqüentemente se sentem inseguros ao responder perguntas que “desnaturalizam” essa atitude e penetram, de alguma forma, nos significados desses decimais.

Sierspinska (1987), buscando identificar obstáculos epistemológicos relacionados com a idéia de limite e de infinito, relata uma experiência de pesquisa com alunos da área de ciências humanas num Liceu de Varsóvia. Um pequeno grupo de alunos foi incumbido de preparar uma aula, a ser apresentada para seus colegas, sobre um determinado assunto. Quatro sessões de encontros da pesquisadora com o grupo foram realizadas. Na primeira, a pesquisadora forneceu informações sobre o assunto a ser abordado pelo grupo, na segunda e na terceira desenvolveram-se discussões, visando a preparação da aula, e na quarta teve lugar, efetivamente, a aula preparada. No primeiro encontro, entre outras questões discutidas, haviam sido mostradas aos alunos duas formas de justificar a igualdade 0,999... = 1. No segundo, foram retomados alguns exercícios envolvendo a representação decimal infinita, entre eles a igualdade citada acima e a seguinte pergunta: “*é possível representar o número 123,12345678910111213.... por uma fração?*” A autora relata que os estudantes tendiam a classificar esse último decimal como um terceiro tipo de número, que não seria nem racional nem irracional (SIERSPINSKA, 1987, p.378). Observe-se, de passagem, que Fishbein et al. (1995, p.34-35) relatam a classificação, por alunos do Ensino Médio de Israel, do decimal 34,272727... como racional e irracional ao mesmo tempo. No caso da igualdade 0,999... = 1 Sierspinska descreve as reações dos estudantes às demonstrações apresentadas, reações que vão desde a recusa tanto do resultado como da prova, até a aceitação da prova e recusa do resultado (*"o resultado é verdadeiro matematicamente, mas não logicamente"*)[13]. Apenas um aluno, do grupo de seis participantes das discussões, aceitou, sem restrições, tanto a prova como o resultado.

Soares et al. (1999) colocaram diretamente a 36 alunos dos cursos de licenciatura e bacharelado em matemática da UFMG e da UFSC a seguinte pergunta (compare com a questão posta por Sierpinska, citada logo acima): *"seja α = 0,12345678910111213....(as próximas casas decimais continuam a seqüência dos naturais). Pergunta-se: α é um número? Explique sua resposta* (SOARES et al., 1999, p.106). Segundo os autores, embora quase toda a amostra tenha respondido afirmativamente, *nenhuma* explicação apresentou uma interpretação consistente desse decimal como representando efetivamente alguma "quantidade" ou um ponto na reta. Alguns exemplos das explicações dadas são:

> *α é um número, pois é uma seqüência numérica*
>
> *α é um número, pois é formado por casas decimais que são algarismos*
>
> *α é um número racional pois é uma dízima periódica e poderá ser representado na forma de fração* (Ibid., p.106-107)

Um dos alunos levanta o problema de que a pergunta remete a uma definição de número real, a qual ele afirma que nunca viu e nem sabe se existe. Nessa mesma pesquisa, duas outras questões referem-se às formas decimais infinitas. Trata-se das questões 8 e 9 do Questionário B, cujos enunciados são:

Questão 8: *Considere os números* $x_1 = 0{,}3$ $x_2 = 0{,}33$ $x_3 = 0{,}333$ $x_4 = 0{,}3333$ *e assim sucessivamente, isto é, se n é um número natural x_n é o número decimal da forma* 0,333...3 *com as n primeiras casas depois da vírgula iguais a 3 e as outras todas iguais a 0. Existe um número natural n muito grande, para o qual $x_n = 1/3$?*

Questão 9: *Considere um ponto C, escolhido arbitrariamente no interior de um segmento AB. Comece dividindo o segmento AB em 10 partes iguais. Depois, divida cada uma das 10 partes em 10 partes iguais. Continue o processo. Será que depois de um número finito de etapas*

[13] Compare-se com o comentário de um licenciando em matemática da UFMG, sobre essa mesma matéria, citado em Soares et al., 1999, p.97 e reproduzido neste capítulo (p.120).

desse processo (talvez um número muito grande), o ponto C vai coincidir necessariamente com um dos pontos de subdivisão?

A questão 8 procura detectar em que medida ocorre, no caso da representação decimal, a identificação de um processo infinito com aquele que se completa em "um número muito grande" de etapas. A questão 9 é uma "versão geométrica" da questão 8. Pedia-se apenas uma resposta simples do tipo sim, não ou não sei, sem a necessidade de explicações. De 48 alunos, menos de 40% responderam consistentemente *não* para as duas questões, enquanto outros 40% apresentaram o entendimento de que, pelo menos em uma das duas situações, o processo se esgota para um valor finito. Isso mostra que há dificuldades enormes com a idéia de representação decimal infinita entre os próprios licenciandos.

Monaghan (2001), num artigo em que comenta as percepções do infinito em jovens estudantes pré-universitários, observa que a idéia de infinito possui duas faces que são intrinsecamente contraditórias e complementares: o infinito como processo e o infinito como objeto. O autor afirma que, embora o infinito também apareça como objeto, paralelamente à idéia de infinito como processo, esta última é predominante na percepção dos alunos. Monaghan relata que, para muitos deles, os decimais infinitos são "números infinitos" e o que está presente nessa forma de percepção incorreta é a idéia de que a representação por infinitos dígitos induz a associação com um *processo* que não tem fim, levando o aluno a identificar o número com uma "quantidade" infinitamente grande. Ele diz:

> A força cognitiva do "infinito como processo" é, a meu ver, a razão por trás disso. Em Monaghan (1986) as entrevistas mostraram, repetidamente, estudantes descrevendo os decimais infinitos como incompletos, como entidades dinâmicas que eram qualitativamente diferentes dos decimais finitos.
> "Eu não sei sobre o que estou falando ou com que números estou lidando quando digo 0,333.... [...] $\frac{1}{3}$ é um número específico, mas 0,333... não é um número específico. Poderia ser qualquer número" (Monaghan, 1986, p.249).
> "Bem, um número que não termina, você não pode definir como um número" (Ibid., p. 250)
> "Você não vai saber onde parar de colocar os 1's, vai? 0,111.... ainda não é uma resposta definida, é? Não é como se dissesse 5. Você sabe o que 5 é" (Ibid., p. 246)
> (MONAGHAN, 2001, p.248-249, aspas no original)*

Monaghan cita uma pesquisa de Vinner e Kidron, realizada em 1985, em que se examina como os alunos do Ensino Médio (High School) entendem os decimais infinitos. "*Somente quatro, em 91 alunos do segundo ano [10^{th} grade, no original] e 32, de um total de 97 alunos do terceiro ano [11^{th} grade] sabiam da existência de decimais infinitos não periódicos*" (MONAGHAN, 2001, p.249)*. Em outros estudos, nos quais se pede para classificar certos números como racionais ou irracionais, é comum a identificação das dízimas periódicas com os irracionais (IGLIORI; SILVA, 1998; FISHBEIN et al., 1995, MONAGHAN, 2001). Nesses casos, como os decimais já foram dados como números, o que parece ocorrer é que os alunos tendem a classificar como irracional todas as formas que carregam, na visão do aluno, qualquer tipo de anomalia. Fishbein et al. (1995) comentam que "*um número negativo é intuitivamente inaceitável, então é associado com irracionalidade. Uma infinidade de casas decimais significa algo que nunca atinge efetivamente um valor e isso é facilmente associado à irracionalidade (p.35)*. Veja-se também Igliori; Silva (1998, p.18) e Soares et al. (1999, p.115).

Pode-se concluir assim que duas questões básicas associadas ao trabalho com os decimais infinitos referem-se, em primeiro lugar, ao fato de que eles representam um número e, em segundo, à associação dos não periódicos com os irracionais. As dificuldades envolvidas nesses fatos básicos e fundamentais são muitas e de natureza diversificada. Afinal, que número uma determinada forma decimal infinita não periódica poderia representar se é impossível, muitas vezes, expressar completamente os dígitos da própria forma decimal que o representaria? Se identificarmos a representação com o número, uma vez que aquela não se pode expressar, este não está bem determinado, não é "um valor exato" e, consequentemente, não pode tratar-se de um "número". Por outro lado, os decimais infinitos não periódicos são genericamente complicados porque representam uma soma formada de infinitas parcelas e o significado disso, ao que parece, não pode ser percebido, de modo natural, como uma extensão da noção usual de soma da escola básica. A concepção corrente de somar é a que envolve apenas um número finito de parcelas e o resultado é obtido quando nós somamos essas parcelas, uma a uma, até chegar ao fim do processo. É claro que isso não faz nenhum sentido para a soma de infinitas parcelas. É preciso dar sentido e significado àquilo que se projeta como o fim de um processo, o qual, visto sob a ótica vigente na escola, não tem fim. Um instrumento fundamental para a resolução desse conflito é a noção de limite de seqüência. Mas o tratamento formal e rigoroso dessa noção na licenciatura não parece ajudar no trabalho docente escolar com as noções de número irracional e real, mesmo porque os próprios licenciandos demonstram dificuldades com essas noções.

Quando se interpreta o conjunto dos reais como pontos da reta orientada, desenvolvendo-se uma representação geométrica para os números, pode-se mostrar que qualquer forma decimal infinita, além de se traduzir numa soma de infinitas parcelas de um determinado tipo, representa também um único ponto da reta e, portanto, um número real. Aqui também, uma argumentação geométrica, fundada numa percepção da reta como "contínua", sem "falhas", pode ser desenvolvida, mas a noção de limite, de novo, permanece subliminar. Enfim, parece não ser possível associar, consistentemente, um sentido numérico para os decimais infinitos não periódicos (e, portanto, para os irracionais) sem enfrentar o desafio de atribuir sentido a certos processos que se reproduzem indefinidamente, ou seja, que "não têm fim".

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) recomendam que, ao concluir o Ensino Fundamental, o estudante seja capaz de reconhecer a forma decimal dos irracionais, o que pressupõe a atribuição, na escola, de algum significado aos decimais infinitos não periódicos. Isso, por sua vez, implica alguma forma de discussão escolar de processos infinitos, seja no contexto aritmético de uma soma de infinitas parcelas seja numa formulação geométrica, em que se associa a forma decimal a um ponto da reta e, portanto, ao comprimento de um segmento. O que se conclui é que, de um modo ou de outro, o futuro professor vai lidar com o problema de construir significados para as formas decimais infinitas ao apresentar a idéia de número real na escola básica. Nesse caso, dada a reconhecida sofisticação das idéias envolvidas, especialmente quando se trata de trabalhá-las com alunos da sétima ou oitava série do Ensino Fundamental, o professor da escola precisa ter acesso a formas de elaboração do conhecimento matemático que viabilizem o cumprimento de tarefas extremamente delicadas, tais como:

- decidir sobre que tipos de idéias ou conceitos matemáticos seria essencial discutir neste estágio de elaboração da noção de número real;
- uma vez decidida a discussão de um determinado conceito ou idéia, que abordagem adotar, que noções e conceitos associados explorar, de que exemplos dispor e em que conhecimentos anteriores se apoiar para ilustrar uma idéia em discussão ou facilitar a sua compreensão ou, ainda, promover a construção de um determinado conceito por parte do aluno;
- decidir sobre quais argumentos seriam genuinamente convincentes e adaptáveis ao estágio de desenvolvimento intelectual e cognitivo dos alunos;
- refletir sobre os tipos de pré-concepções dos alunos que favorecem ou se apresentam como obstáculos para a construção dos conceitos a serem tratados;
- analisar quais deficiências podem ser identificadas na forma com que o assunto é desenvolvido no livro texto adotado e decidir o que fazer, no trabalho em sala de aula, no sentido de superar as deficiências reconhecidas no texto etc.

Todos esses pontos referem-se a análises e decisões que cabem essencialmente ao professor da escola no exercício de sua prática pedagógica em sala de aula e que são especialmente difíceis, quando o tema inclui as formas decimais infinitas e a apresentação dos números reais na escola básica. E, a nosso ver, é aí, onde mais precisa, que o professor da escola menos encontra as pesquisas, estudos e propostas de que possa lançar mão para experimentar, criticar, refletir, reformular, adaptar e eventualmente criar formas de abordagem que se ajustem às necessidades e às condições de sua prática docente escolar. A literatura nacional e internacional do campo da educação matemática é, até onde pudemos constatar, relativamente escassa, no que se refere ao trabalho *escolar* com as formas decimais infinitas e mesmo, mais geralmente, no que concerne ao ensino e à aprendizagem dos números irracionais e reais *na escola básica*.

A abordagem que se desenvolve no processo de formação na licenciatura, por outro lado, se reduz à demonstração formal da correspondência entre números reais e formas decimais, à prova de que a representação dos racionais é finita ou periódica e de que, conseqüentemente, a dos irracionais é infinita e não periódica (Capítulo II, p. 76-77). Nessas demonstrações, além de se apoiar em definições formais de limite de seqüência e da própria forma decimal, utiliza-se um conjunto de resultados e conceitos relacionados com a estrutura de corpo ordenado completo, bem como certas propriedades topológicas decorrentes dessa estrutura as quais garantem, de forma indireta, a existência de alguns limites que são cruciais no processo. Mas, uma vez que esse tratamento apenas *institui* uma correspondência formal entre o decimal infinito e o limite de uma certa série, o problema passa a ser compreender o que significa esse limite. Ao fim e ao cabo, conclui-se que o significado da forma decimal infinita é o de um limite cuja existência é garantida indiretamente por resultados derivados da estrutura atribuída, *por definição,* ao conjunto dos números reais. A situação em que se encontra o licenciando seria a seguinte: procurava um significado para a forma decimal infinita não periódica e agora procura um significado para o limite de um determinado tipo de série. Não sabia o que era uma forma decimal infinita não periódica e continua não sabendo. Para a matemática acadêmica, no entanto, tudo está resolvido: a forma decimal infinita pode ser vista como uma representação do número real dado pelo limite de uma determinada série, o qual, *em conseqüência das propriedades dos números reais*, existe e é único. Nota-se, claramente, que qualquer tentativa de tradução, adaptação, reformulação, reorganização ou complementação dessa forma de conhecimento sobre os decimais infinitos para uso no contexto escolar do Ensino Fundamental configura uma tarefa extremamente difícil, mesmo para professores experientes.

Se a abordagem escolar usual do assunto favorece a formação de concepções inadequadas, imagens conceituais precárias, limitadas e inconsistentes, o enfoque formal dedutivo adotado na licenciatura, junto com a definição axiomática dos reais, pouco ou nada contribui para a superação ou a re-elaboração dessas imagens e concepções. Assim, o que parece ocorrer, na melhor das hipóteses, é que o licenciado volta à escola, na condição de professor, de posse de um conhecimento sobre os números irracionais e reais profundamente distanciado das formas (e inadequado às condições) em que poderia ser utilizado na sua prática pedagógica escolar.

Considerações finais

O estudo do conjunto dos números naturais, assim como o dos racionais e dos reais, desenvolvido no curso de licenciatura em matemática não contempla uma série de questões que se associam ao tratamento escolar do tema. Para cada um dos conjuntos numéricos estudados, pudemos apresentar, neste capítulo, exemplos concretos de questões que se colocam para o professor na sua prática pedagógica na escola, mas que, no processo de formação, são ignoradas ou são veiculadas sob uma ótica por demais distanciada do trabalho docente escolar. A lista de questões levantadas e analisadas é numerosa, mas o traço comum e persistente que se faz notar ao longo da abordagem dos três conjuntos numéricos na licenciatura traduz-se no abandono sistemático das questões que se referem à prática docente no processo de educação matemática escolar, em favor de uma centralização do foco sobre questões que, muitas vezes, são relevantes apenas do ponto de vista da matemática acadêmica. No próximo capítulo veremos uma demonstração empírica de algumas conseqüências dessa abordagem dos sistemas numéricos na formação do professor.

CAPÍTULO IV

A FORMAÇÃO MATEMÁTICA NA LICENCIATURA E CINCO QUESTÕES SOBRE OS NÚMEROS

No Capítulo II descrevemos o conhecimento matemático a respeito dos números que é trabalhado no curso diurno de licenciatura em matemática da UFMG. No Capítulo III confrontamos esse conhecimento com aquele envolvido nas questões que se colocam para o professor de matemática em sua prática docente na escola básica. Constatamos, então, que certos aspectos do saber matemático a respeito dos sistemas numéricos, importantes do ponto de vista da prática docente escolar, não são discutidos sistematicamente no processo de formação na licenciatura.

Neste Capítulo IV relatamos uma pesquisa realizada com alunos da licenciatura diurna em matemática da UFMG, cujo objetivo foi avaliar em que medida os formandos do curso dominam as formas escolares dos conhecimentos matemáticos a respeito dos números, isto é, a matemática escolar relativa aos sistemas numéricos. Para realizar essa investigação, apresentamos a dois grupos de licenciandos um questionário com cinco perguntas selecionadas. Um dos grupos era formado por alunos matriculados em uma disciplina do último período e o outro por alunos matriculados no primeiro período do curso. De um total de 35 alunos freqüentes na disciplina do último período, 25 responderam, mas um deles, por razões de ordem técnica[1], teve suas respostas desconsideradas. Dos 45 freqüentes na disciplina do primeiro período, 44 responderam, sendo que dois não eram iniciantes no curso e, por isso, também tiveram suas respostas desconsideradas. A aplicação do questionário, em ambos os casos, se deu durante um intervalo de uma hora e meia, aproximadamente, dentro do horário de aula das referidas disciplinas, cedido pelos respectivos professores. Cada aluno presente respondeu por escrito às perguntas constantes do questionário, identificando-se e registrando um telefone ou endereço eletrônico para contato, caso isso fosse eventualmente necessário. Após a análise das respostas escritas, entrevistas foram realizadas com 13 alunos do último período, a fim de confirmar e/ou complementar o nosso entendimento a respeito de alguns pontos das suas respostas.

Na elaboração do questionário procuramos nos orientar por dois parâmetros.

[1]Não completou suas respostas em sala, junto com os outros alunos, contrariamente aos procedimentos estabelecidos para a pesquisa.

Em primeiro lugar, as questões propostas deveriam abordar conhecimentos matemáticos que estivessem envolvidos nas atividades da prática docente escolar. Da nossa perspectiva, como já foi comentado, esses conhecimentos são caracterizados como tais a partir dos estudos sobre a prática docente e pesquisas relatadas na literatura a respeito do ensino e da aprendizagem escolar dos sistemas numéricos. Assim, as perguntas do questionário se ajustam às descrições do saber matemático envolvido nas questões que se colocam para o professor na prática docente escolar, apresentadas no Capítulo III.

Em segundo lugar, a pesquisa deveria ser vista como um contraponto empírico ao estudo feito no Capítulo III. Assim, as respostas dos licenciandos ao nosso questionário teriam o efeito de, em certa medida, confirmar ou contradizer as análises do Capítulo III, as quais apontam um distanciamento problemático entre os conhecimentos matemáticos veiculados na licenciatura e as questões que se colocam na prática docente escolar. Essas foram as considerações gerais que parametrizaram a construção do instrumento da pesquisa. Os objetivos específicos de cada uma das cinco questões propostas no questionário são descritos imediatamente antes da apresentação dos seus resultados.

Na análise dos dados, confrontamos as respostas dos formandos com as dos iniciantes. Essas últimas nos interessam nesta pesquisa sob dois pontos de vista. Por um lado, elas configuram um dos elementos de referência para a análise das respostas dos formandos. Por outro lado, conhecer as visões dos alunos iniciantes é relevante, na medida em que elas fornecem dados para uma análise a respeito da necessidade de se tratar determinadas questões no processo de formação na licenciatura.

Abstraindo-se as particularidades que constituem o perfil específico dessas duas turmas (formandos e iniciantes de um determinado ano), pode-se considerar que as respostas dos iniciantes expressam parte das visões e dos saberes que os alunos trazem da escola básica, a respeito das questões apresentadas no questionário. Do mesmo modo, as respostas dos formandos expressam as visões e os saberes com que eles voltarão à escola, como docentes, depois de vivenciar o processo de formação profissional na licenciatura. Assim, contrastando os dois conjuntos de respostas, é possível detectar elementos indicadores de eventuais falhas ou omissões desse processo. A nosso ver, uma etapa de re-elaboração e aprofundamento das visões e saberes que os licenciandos trazem da escola é necessária e importante, pois se trata, agora, de uma construção de conhecimentos visando a ação *profissional* como *docente* e não como *aluno*, num processo de *escolarização básica*.

O Questionário

Questão 1

Como você justificaria, para um aluno da escola básica, a validade da lei comutativa da multiplicação de números naturais, isto é, ab = ba para quaisquer números a, b?

Questão 2

Imagine a seguinte situação. Depois de algumas aulas sobre as operações com os números racionais numa sala de quinta série do ensino fundamental, um aluno faz a seguinte pergunta:

professor, por que para somar frações a gente tem que reduzir ao mesmo denominador e somar os numeradores (mantendo o denominador), mas, para multiplicar, a gente pode simplesmente multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador?

Que resposta você lhe daria?

Questão 3

Como você justifica o fato de que o produto de números reais é comutativo? Em outras palavras, por que se pode acreditar que ab = ba para quaisquer dois números reais a e b?

Questão 4

Sabe-se que a expressão 2^3 significa o produto $2\times2\times2$. A expressão $2^{\sqrt{3}}$ tem algum significado para você? Se a sua resposta for sim, por favor, explique.

Questão 5

Os números naturais se prestam muito bem, entre outras coisas, para contar coleções de objetos. Os números racionais se prestam, entre outras coisas, para expressar uma medida fracionária. Para você, o que são números irracionais? E para que servem eles?

Análise das respostas

Apresentamos uma síntese das respostas obtidas para cada uma das cinco perguntas, desenvolvendo, paralelamente, uma análise dessas respostas, de acordo com os objetivos da pesquisa. Antes, porém, descrevemos brevemente os procedimentos utilizados na categorização dos dados.

Num primeiro momento, relacionamos os dados na forma de uma tabela onde classificamos as respostas, basicamente, em satisfatórias e não satisfatórias. É claro que uma classificação desse tipo está inevitavelmente impregnada das concepções do investigador. Entretanto, o critério básico para a caracterização de uma resposta como insatisfatória pode ser descrito como a sua inadequação, por razões que vão desde uma incorreção de ordem técnica (por exemplo, considerar a comutatividade do produto como um dos axiomas dos números naturais) até uma explicação pedagogicamente insuficiente (como dizer que frações de denominadores diferentes não podem ser somadas, porque só podemos somar "coisas" semelhantes). Ainda assim, reconhecemos, fica por conta do investigador interpretar como "*inadequado*" o argumento oferecido pelo respondente, mas esperamos que a citação de algumas respostas na íntegra e os comentários que fazemos a respeito de outras possam tornar mais transparentes os fundamentos das nossas interpretações.

Num segundo momento, comentamos e analisamos as respostas numa forma mais detalhada, considerando algumas subcategorias dentro das respostas não satisfatórias e os argumentos apresentados nas satisfatórias. A constatação da possibilidade de utilizar essencialmente as mesmas subcategorias para sintetizar as respostas dos iniciantes e as dos formandos favoreceu a explicitação do contraste entre as respostas dos dois grupos.

Apresentamos, a seguir, os dados e a nossa análise, questão por questão. Ao final discutimos os resultados em termos globais e elaboramos algumas conclusões gerais.

Questão 1

Como você justificaria, para um aluno da escola básica, a validade da lei comutativa da multiplicação de números naturais, isto é, ab = ba para quaisquer números <u>a</u>, <u>b</u>?

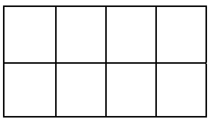
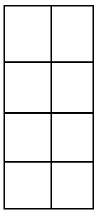
A adição de números naturais tem um sentido tão fortemente assimilado — o de "juntar" — que torna evidente a propriedade comutativa: $3 + 5 = 5 + 3$ porque se tivermos 3 bolas e adicionarmos outras cinco às nossas, obteremos, obviamente, o mesmo resultado que se fizermos a operação na ordem inversa, ou seja, juntarmos as nossas três bolas ao grupo das outras cinco. No entanto, embora o produto de naturais possa ser visto como uma soma iterada, não é tão evidente que somar 1421, cinqüenta e três vezes, forneça o mesmo resultado que somar 53, mil quatrocentos e vinte e uma vezes.

O objetivo desta primeira questão era detectar em que medida os sujeitos da pesquisa eram capazes de argumentar convincentemente, para um público imaginário de alunos da escola básica, a respeito da validade da propriedade comutativa do produto de números naturais.

Tabela 1 – Respostas à Questão 1

respostas	formandos (24)	iniciantes (42)
satisfatórias	5 (21%)	3 (7%)
insatisfatórias	19 (79%)	38 (91%)
não sei	0	1 (2%)

Nos dois grupos pesquisados a argumentação satisfatória apresentada foi, essencialmente, a representação do resultado do produto $a \times b$ como o número total de pontos num arranjo retangular e contar os pontos, uma vez pelas linhas e outra vez pelas colunas. Um dos alunos do primeiro período tomou o arranjo das carteiras em uma sala de aula como concretização do argumento, outro (do último período) usou a área de um retângulo em função das medidas (inteiras) dos lados. Uma das 5 respostas consideradas satisfatórias entre os formandos não deixava transparecer, de modo inequívoco, o domínio do argumento pela pessoa que a apresentou. Eis como o licenciando coloca a sua resposta:

> Faria vários exemplos com os alunos para que eles pudessem visualizar e se convencer de que realmente a lei comutativa é verdadeira. Deixaria que eles fizessem perguntas e exemplos para comprovar que com todos os números naturais que eles tentassem a comutativa iria funcionar. Desta forma tentaria argumentar que a lei valeria para todos os números naturais como valeu para aqueles dos nossos exemplos. Poderíamos usar desenhos (quadradinhos) para fazer exemplos ou contextualizar problemas, por exemplo: se tenho duas vezes esta quantidade de bolas [*três bolas desenhadas*], quantas bolas tenho? R = 6 bolas.
>
> Se tenho três vezes esta quantidade de bolas [*duas bolas desenhadas*], quantas bolas tenho?
>
> R = 6 bolas.
>
> Ou:
>
> 
>
> $2 \times 4 = 8$
>
> 
>
> $4 \times 2 = 8$ (estudante do último período)

A impressão que se tem é a de que o desenho dos retângulos era apenas um exemplo a mais. Embora a ênfase geral pareça estar voltada para os exemplos, classificamos essa resposta entre as satisfatórias porque continha no final, ainda que desempenhando um papel mais ou menos marginal na argumentação, uma referência à mesma justificativa satisfatória apresentada pelos outros quatro alunos.

Nos dois grupos (iniciantes e formandos), a maior concentração das respostas insatisfatórias nessa primeira questão refere-se a uma simples apresentação de exemplos. Entre os 24 alunos do último período, 13 (54% do total) disseram que justificariam apenas mostrando exemplos numéricos e seis apresentaram outros argumentos insatisfatórios. Dos treze que disseram que mostrariam a validade da propriedade comutativa pelos exemplos, dois apresentaram também argumentos alternativos, mas insatisfatórios. O primeiro tentou uma prova do fato. Eis a sua resposta:

> Daria alguns exemplos, como $2\times3 = 6 \quad 3\times2 = 6 \quad$ então $2\times3 = 3\times2$
>
> E dependendo da série, justificaria da seguinte forma: $ab = ba$ pois se dividirmos a equação por a, sendo $a \neq 0$ temos $b = b$ (e vice versa), e $b = b$ é verdade. No caso de $a = 0$ seria óbvio: $0\times b = b\times 0 = 0$ (estudante do último período)

O segundo apresentou, como uma primeira alternativa aos exemplos, um argumento que ele mesmo concordou, em entrevista posterior, que seria insatisfatório. E completou sua resposta afirmando que, em último caso, mesmo reconhecendo que isso não seria pedagogicamente conveniente, apelaria para a classificação desse fato como um axioma. Eis a sua resposta na íntegra:

> Dependeria do grau de intimidade do aluno com demonstrações formais. Primeiramente mostraria diversos exemplos e o induziria a "acreditar" na validade para quaisquer a e b. Caso ele questionasse a generalização, tentaria escrever o produto como soma de partes iguais, e inverter a ordem deste processo para mostrar a equivalência. Em último caso recorreria ao argumento formal, ou seja, dizer ao aluno que tal equivalência é um axioma, o que com certeza não agradaria ao aluno, que pretende ter uma melhor explicação do fato (estudante do último período).

Um outro formando também classificou a comutatividade do produto de naturais como axioma.

É importante atentar para o fato de que, entre os formandos, a simples apresentação dos exemplos não era entendida como uma forma plenamente válida de justificar o resultado. Esse tipo de a argumentação mostra, na verdade, uma certa tendência deles a considerar que, para alunos da escola básica, não é pedagogicamente adequado apresentar justificativas para os resultados ou fatos matemáticos, devendo o professor se limitar a "ilustrar" o fato com exemplos. Justificativas, muitas vezes, são entendidas como demonstrações de tipo formal e isso estaria fora do alcance das crianças. Justificativas informais corretas, talvez porque não façam parte da experiência de discussão e de aprendizado dos licenciandos no curso, parecem estar fora de cogitação para muitos deles. Os exemplos funcionariam, então, como um último recurso de convencimento. Uma resposta que ilustra essas considerações é a seguinte:

> Acho que na escola básica, a forma de "convencer" os alunos deste resultado não tem como ser formal. Não é possível uma dedução rigorosa, partindo, por exemplo, da construção dos naturais pelos axiomas de Peano. A solução seria fazer os alunos "experimentarem" com vários

> números naturais. A partir daí, tentar fazê-los "intuir" o enunciado geral (estudante do último período, aspas no original)

Esse aluno parece ter assimilado a concepção axiomática dos naturais e a cadeia dedutiva que permite concluir a comutatividade do produto a partir dos axiomas e da definição formal da operação. E parece ter compreendido, também, a inadequação de tal abordagem para o contexto escolar. Entretanto, não é capaz de apresentar nenhuma forma alternativa — pedagogicamente válida para esse contexto — de justificar a comutatividade da multiplicação de naturais. Embora a "experimentação com vários números", a que ele se refere como "a solução", seja, sem dúvida, uma maneira de promover uma primeira reflexão a respeito da questão, não nos parece viável, neste caso, "tentar fazê-los intuir o enunciado geral" simplesmente a partir da observação de vários exemplos. Ao contrário, poder-se-ia até classificar como anti-pedagógico, em certo sentido, o estímulo a uma atitude de generalizar a partir de exemplos isolados, sem o apoio de um "exemplo crucial" (isto é, um exemplo que ilustre, em sua essência, o argumento geral). Em particular, esse depoimento pode ser também ilustrativo da insuficiência de uma abordagem dedutiva rigorosa no processo de formação de professores para a escola básica: o conhecimento da cadeia dedutiva formal que comprova a validade de um determinado resultado matemático não parece suficiente para assegurar a capacidade de produção de validações alternativas que sejam pedagogicamente adequadas ao processo de ensino escolar.

As outras cinco argumentações insatisfatórias dos formandos derivam, essencialmente, da crença de que, ao desmembrar o produto em somas iteradas, a comutatividade aparece como um resultado óbvio:

> Inicialmente acho interessante apresentar a lei comutativa em números, de forma quantitativa, por exemplo, $2\times3 = 3 + 3 = 3\times2 = 2 + 2 + 2$. Após alguns exemplos (e exercícios para ver se houve entendimento neste nível), pode-se tentar a generalização: $a\times b = b + b + b + ... + b$ (a vezes) $= a + a + a + ... + a$ (b vezes) (estudante do último período).

Entre os iniciantes, 16 (cerca de 40% do total) justificariam mostrando exemplos, 9 (cerca de 20%) apresentaram outros argumentos insatisfatórios e 13 (pouco mais de 30%), ao invés de argumentar, simplesmente disseram que $a\times b = b\times a$ "porque" a ordem dos fatores não altera o resultado do produto. Eis alguns exemplos desse último tipo de resposta:

> **Exemplo 1**
>
> Em uma multiplicação a ordem dos fatores não altera o produto, ou seja, a ordem em que se encontram os números a serem multiplicados, não influenciará no resultado. Por exemplo, se multiplicarmos 2×3 o resultado será 6 ($2\times3 = 6$). Desse modo é correto dizer que 3×2 <u>também será 6</u> ($3\times2 = 6$). Logo, $2\times3 = 3\times2$ (estudante do primeiro período, grifo nosso).
>
> **Exemplo 2**

ab = ba porque a ordem dos fatores não altera o produto. Assim como acontece na adição de números naturais, a ordem em que os fatores são multiplicados, ou somados no caso da adição, não afetará o resultado da operação.

ab significa somar “b” a ele mesmo “a” vezes. E ba significa somar “a” a ele mesmo “b” vezes.

Por exemplo:

$2\times3 = 3 + 3 = 6$

$3\times2 = 2 + 2 + 2 = 6$ (estudante do primeiro período, grifo nosso)

Exemplo 3

para justificar ao aluno a validade de tal lei, deve-se ressaltar que a ordem na multiplicação de dois números naturais não importa, pois a multiplicação de um número natural por outro também natural tem como resultado um número que também pertence ao conjunto dos números naturais (estudante do primeiro período)

Exemplo 4

Eu tenho duas frutas, uma laranja e uma maçã. Quero fazer uma salada de frutas e se eu colocar primeiro a maçã e depois a banana (sic) eu tenho uma salada. Correto? Então se eu misturar primeiro a banana e depois a maçã eu tenho outra salada. As duas saladas são iguais ou diferentes? Lógico, são iguais, porque a ordem em que eu coloco as frutas não altera o sabor da salada. O mesmo ocorre com a lei comutativa da multiplicação. A ordem dos fatores não altera o resultado da multiplicação (estudante do primeiro período)

Exemplo 5

Isto existe porque a ordem dos fatores não altera o produto, como assim: escolha um número, dois por exemplo. Escolha outro, três, então faça a multiplicação dos dois números. Seria: $2\times3 = 6$, o resultado é seis, mas seis não é a mesma coisa que dois vezes três e também não é a mesma coisa que três vezes dois? Então: $2\times3 = 3\times2 = 6$, a ordem dos fatores não importa, o resultado é o mesmo. (estudante do primeiro período)

Esse enunciado (“a ordem dos fatores não altera o produto”) foi tomado, por esses alunos, como uma verdade “natural” sobre a qual caberia ao professor da escola básica apenas informar seus alunos e fazê-los entender através da ilustração com exemplos. Por isso, consideramos esse caso como outra categoria (diferente da justificativa através de exemplos) já que, aqui, o papel dos exemplos não era o de induzir a uma aceitação da validade da propriedade comutativa do produto de naturais, mas apenas o de esclarecer o que se quer dizer com a lei ou o princípio “a ordem dos fatores não altera o produto”.

A relativamente grande incidência dessas respostas (quase um terço da amostra) e o tom “didático” em que são apresentadas sugerem a presença, entre os iniciantes, de uma concepção de matemática escolar e do ensino de matemática na escola (não detectada, sob a mesma forma, entre os formandos) que poderia ser expressa da seguinte maneira: a matemática é um conjunto de regras (“naturalmente” corretas) e ensinar matemática é transmitir informações a respeito do “funcionamento” dessas regras. Justificar, segundo essa concepção, seria entendido como *explicar o que se quer dizer com os enunciados* (ver os resultados da **Questão 3** entre os iniciantes).

Por último, embora seja a única com esse teor entre todas as 66 respostas a esta questão nos dois grupos, vale a pena notar os comentários de uma estudante do primeiro período:

> Eu estudei as propriedades da multiplicação na escola básica, então o que posso dizer é que eu não me lembro da justificativa para a lei comutativa ou que não me ensinaram o verdadeiro motivo. Só me lembro da famosa frase: “A ordem dos fatores não altera o produto”.

Questão 2

Imagine a seguinte situação. Depois de algumas aulas sobre as operações com os números racionais numa sala de quinta série do ensino fundamental, um aluno faz a seguinte pergunta: *professor, por que para somar frações a gente tem que reduzir ao mesmo denominador e somar os numeradores (mantendo o denominador), mas, para multiplicar, a gente pode simplesmente multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador?*

Que resposta você lhe daria?

O objetivo dessa questão era verificar em que medida o futuro professor é capaz de elaborar uma discussão sobre essas duas operações, de modo que os algoritmos para o cálculo dos resultados se justifiquem em função dos significados que podem ser atribuídos às operações. Uma parte dos formandos (cerca de 30%) conseguiu desenvolver satisfatoriamente essa discussão para uma das duas operações, mas apenas 4 discutiram a questão de modo razoavelmente satisfatório para os dois casos. Entre os iniciantes, ninguém apresentou uma resposta satisfatória nem mesmo para uma das operações apenas.

Tabela 2 – Respostas à Questão 2

resposta	formandos	iniciantes
satisfatória	4 (17%)	0 (0%)
satisfatória só para a soma	4 (17%)	0 (0%)
satisfatória só para o produto	3 (12%)	0 (0%)
insatisfatória para ambas	13 (54%)	38 (90%)
não sei	0	4 (10%)

No caso da soma, a extensão do significado da operação (dos naturais para os racionais positivos) é clara o suficiente para que a discussão se restrinja a uma explicação do por que se deve reduzir ao mesmo denominador. Assim, a questão que está posta no caso da soma

($\frac{a}{b}$ + $\frac{c}{d}$) é, essencialmente, a escolha de uma "sub-unidade" (por exemplo, $\frac{1}{bd}$) em termos da qual se possa expressar com um número inteiro (ad + bc) aquilo que representa a "junção" das duas partes ($\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$) de algo considerado como o "todo".

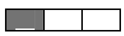
No caso da multiplicação, entretanto, a questão é um pouco mais complicada, por duas razões. Em primeiro lugar, o significado usualmente atribuído ao produto de frações ($\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ é igual a $\frac{a}{b}$ *de* $\frac{c}{d}$) não aparece claramente como uma extensão do significado que a multiplicação já possui entre os naturais (soma de parcelas iguais). Além disso, ele não é universalmente compartilhado entre os alunos, como é o caso do significado da adição. De fato, entre os formandos, apenas a metade dos alunos se referiu a esse significado para o produto e entre os iniciantes, menos de 15% (6 num total de 42). Acrescente-se que, nos dois grupos, nenhum outro significado foi atribuído ao produto de frações.

No caso da soma, quase todos os formandos desenvolveram suas respostas tentando justificar a redução ao mesmo denominador. Muitos utilizaram exemplos envolvendo pizzas, chocolates, áreas de faixas retangulares etc. Os que **não** apresentaram uma explicação satisfatória mostraram, de modo geral, dificuldades referentes a dois elementos que se conjugam: a falta de uma percepção clara da necessidade de reduzir ao mesmo denominador e a falta de um domínio adequado da linguagem que permitisse expressar claramente as idéias. Isso pode ser observado em alguns exemplos:

Exemplo 1

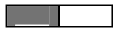
Quando queremos fazer, por exemplo, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, represente essas quantidades:

1/2 = 

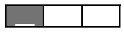
1/3 = 

Em ambos os casos, tomamos um inteiro e o dividimos de acordo com a quantidade pedida e tomamos (colorimos) a parte desejada. Para adicionarmos essas partes coloridas que representam $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$, respectivamente, observe que elas possuem "tamanhos", "medidas diferentes". Como faremos então para adicioná-las e dizermos qual foi o resultado? Temos aqui dois problemas: como adicionarmos as partes e se, por acaso, "sacarmos" o resultado, como fazer para explicá-lo, prová-lo aos demais colegas?

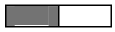
Chegaremos à conclusão que só podemos comparar elementos que possuem características para serem comparadas. E também que só adicionamos a algum conjunto um elemento que possua características típicas àquele conjunto; caso contrário o elemento não poderá fazer parte daquele conjunto. Assim, como compararmos e somarmos

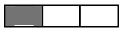
½ = 

com

1/3 =  ?

São partes que possuem tamanhos diferentes quando comparadas a um inteiro. Assim tomamos uma fração equivalente a $\frac{1}{2}$ e a $\frac{1}{3}$ que possam ser comparadas, ou melhor que possuam "pedaços" ou "divisões" do mesmo tamanho. Faremos:

½ = 

1/3 = 

Mas $\frac{3\times 1}{3\times 2}=\frac{3}{6}$ e $\frac{2\times 1}{2\times 3}=\frac{2}{6}$. Também as representações agora podem ser: $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ pois multiplicamos ½ pelo número 1. Também $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$. Logo: $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$

Desta forma os pedaços têm o mesmo tamanho e o inteiro em ambos os casos, foram divididos em seis partes. Logo $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$. (estudante do último período, aspas no original, grifo nosso)

Exemplo 2

Para somar, o denominador tem que ser igual, exemplo, é como se você pegasse uma barra de chocolate e partisse em 10 pedaços iguais e outra barra e partisse em 3 pedaços, com qual dos pedaços das barras de chocolate você preferiria ficar? Bom, p/ somar, vc tem que estar somando pedaços iguais (nesse exemplo não daria). Na soma, como precisamos somar pedaços iguais, temos que igualar o denominador, que nos diz em quantas partes dividimos o chocolate (exemplo). Se as duas barras estiverem partidas iguais fica fácil de somar. (estudante do último período, grifo nosso)

Exemplo 3

2/3 + 2/5 = (10 + 6)/15 = 16/15

Porque conseguimos visualizar melhor esta soma se estivermos somando coisas semelhantes (com o mesmo denominador, ou seja, que partem do mesmo todo) (estudante do último período, grifo nosso).

No exemplo 1, o estudante parece querer estabelecer uma regra, partindo de um argumento implicitamente admitido como senso comum a respeito da operação de adição: "*só adicionamos a um conjunto um elemento que possua características típicas àquele conjunto*". Daí segue, segundo o seu raciocínio, que só podemos adicionar frações com o mesmo denominador, o que é, em si, contraditório, pois a redução ao mesmo denominador pode ser vista, antes, como um *recurso* que se utiliza para expressar, na forma de fração, a soma de duas frações com denominadores diferentes. Nos dois outros exemplos, a questão da redução ao mesmo denominador aparece como uma forma de "tornar mais fácil" a execução da operação ou de facilitar a "visualização" do resultado.

Vê-se, assim, que a idéia fundamental de que é necessário e possível estabelecer uma sub-unidade apropriada para que se possa expressar a soma de duas frações como uma *razão de dois números inteiros*, não foi claramente apontada.

No que se refere à multiplicação, podemos dividir as respostas dos formandos em dois grandes grupos: 11 (cerca de 46%) deram respostas evasivas que não se referem ao significado da operação (exemplos adiante) e 12 (50%) tomaram como um pressuposto natural a idéia de que calcular, por exemplo, $(2/3)\times(a/b)$ é o mesmo que calcular quanto vale duas terças partes de a/b. E o único aluno restante atribuiu à multiplicação um significado que oscila, de maneira confusa, entre esse e um outro que nos parece mais adequadamente associado à divisão:

> Já na multiplicação não é necessário *[reduzir ao mesmo denominador, esclarecimento nosso]* uma vez que estamos apenas multiplicando aquela quantidade por um número, <u>ou seja, quanto é 2/3 de ¼ de pizza, então eu quero saber quantas vezes ¼ de pizza cabem em 2/3</u>, por isso pode-se multiplicar numerador e denominador (estudante do último período, grifo nosso).

Apesar de se constituir num caso isolado entre os formandos, destacamos essa resposta porque nos lembramos do relato de Liping Ma, em sua tese de doutorado. A pesquisadora, entrevistando professores do ensino primário dos Estados Unidos e da China, observou que, dos 23 professores da amostra americana, dez confundiram divisão por ½ com divisão por 2, seis confundiram divisão por ½ com multiplicação por ½ e dois outros, que não estavam incluídos em nenhum dos casos anteriores, confundiam multiplicar por ½ com dividir por ½ e também dividir por ½ com dividir por 2 (MA, 1999, p. 64-66). Assim, essa confusa atribuição de significados ao produto de racionais por este formando pode não ter sido apenas uma distração.

Entre as respostas dos formandos que consideramos evasivas, temos os seguintes exemplos:

> **Exemplo 1**
>
> Acho que alguns desenhos feitos no quadro são capazes de dar resposta satisfatória a este aluno. (estudante do último período)
>
> **Exemplo 2**
>
> Na soma, como precisamos somar pedaços iguais, temos que igualar o denominador...

Bom, na multiplicação também é assim, mas depois de muitos cálculos descobriram um jeito mais fácil de fazer conta.

Ex: $\frac{1}{10} \times \frac{1}{3}$ se colocar com o mesmo denominador fica:

$\frac{3}{30} \times \frac{10}{30} = \frac{30}{30 \times 30} = \frac{1}{30}$

E assim, ao invés de multiplicar e depois dividimos até chegar a números que são primos entre si. (estudante do último período)

Exemplo 3

Eu utilizaria desenhos para mostrar por exemplo, quanto vale $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$ e $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$ e mais outros exemplos se preciso.

Perguntaria a ele se conseguiu perceber alguma relação comum aos exemplos de soma e multiplicação. Se a resposta fosse não eu faria mais alguns exemplos induzindo-o a perceber a relação. Ao final concluiria que alguns matemáticos, há algum tempo atrás, após resolverem vários exercícios através dos desenhos (que era a única maneira que sabiam) perceberam o método que hoje utilizamos para soma e multiplicação de frações (estudante do último período)

Exemplo 4

Primeiro eu mostrava através de desenho que se ele utilizasse o mesmo processo para a multiplicação na adição, a resposta não condiz com a realidade. Por exemplo, se uma pessoa comesse ½ de uma pizza e depois comesse mais ¼ de pizza ele comeria ¾ da pizza (fato que pode ser mostrado por desenho). Se o procedimento usado fosse igual à multiplicação ele comeria então $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ da pizza. Logicamente, nesse caso, muito menos do que na realidade pois $\frac{1}{3}$ é menor que ½ da pizza que foi o que ele comeu primeiramente (estudante do último período).

Um outro estudante do último período também adotou esse caminho ilustrado no exemplo 4, isto é, entendeu que a questão se reduzia a mostrar que não se pode utilizar, na soma, um algoritmo análogo ao do produto. Mas nenhum dos dois explicou por que os algoritmos usuais são válidos, embora o do exemplo 4 tenha mencionado que, para a soma, pode-se mostrar "por desenho". Perguntado, em entrevista posterior, sobre como se poderia fazer no caso da multiplicação, o estudante respondeu que não sabia.

Todas as quatro respostas dos formandos que consideramos satisfatórias para essa questão tomaram como "dado" o significado do produto de racionais [(a/b) × (c/d) é a/b *de* c/d]. A partir desse fato, cada um deles apresentou alguma argumentação satisfatória para mostrar que o algoritmo se ajusta a esse significado. Os oito alunos restantes (dos 12 que tomaram como dado o significado acima referido) não chegaram satisfatoriamente ao algoritmo do produto ou não desenvolveram de modo convincente o caso da soma.

Entre os iniciantes, as respostas foram menos diversificadas. As 38 respostas insatisfatórias se dividiram basicamente em três subcategorias. Na primeira, os algoritmos são vistos como regras inquestionáveis (consistente com a concepção de matemática detectada entre os iniciantes, mencionada na análise da **Questão 1**). Em outra, as tentativas de explicação para o algoritmo da soma eram baseadas na idéia de que não se podem somar "pedaços de tamanhos diferentes" tendo-se, por isso, que reduzir ao mesmo denominador. E, por último, uma argumentação "negativa" — também apresentada por dois alunos do grupo dos formandos — que mostrava apenas que a adoção, para a soma, de um algoritmo análogo ao do produto levaria a resultados absurdos, como 6/3 + 4/2 = 10/5, ou seja, 2 + 2 = 2.

A questão da identificação do produto de frações com o cálculo de "uma parte *de* outra parte da unidade" merece uma discussão mais detalhada, pois se refere aos significados da multiplicação entre os racionais e, como observam Dickson et al.,

> [...] há evidências [...] de que a multiplicação seja, entre as quatro operações, a mais difícil de se atribuir um significado concreto. Em particular, a maioria dos alunos de 12 anos de idade ainda pode ter um domínio limitado do significado da multiplicação, mesmo com números inteiros. E no caso das frações, naturalmente, a tendência é que as dificuldades se mostrem muito maiores (DICKSON et al., 1993, p. 308)

Nas suas respostas a esta **Questão 2**, nenhum dos 12 formandos que identificaram as operações (a/b)×(c/d) e a/b *de* c/d apresentou qualquer forma de explicação para esse fato. Em função desse dado, entrevistamos todos eles (os 12 citados) e colocamos essa questão para a análise de cada um. Sete entendiam essa identificação como "natural", não tendo, até então, desenvolvido uma reflexão sobre o assunto e os outros cinco deram a seguinte explicação: fazendo os dois cálculos (tomando-se, como definição, que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$) obtém-se a mesma resposta. A lógica subjacente a essa explicação parece ser a de *atribuir* ao produto de racionais o mesmo significado que possui a operação de calcular uma parte de outra parte da unidade. Neste caso, do nosso ponto de vista, há que se levar em conta que o produto já está dotado de significado quando os fatores são naturais, o que coloca a necessidade de uma elaboração da seguinte questão: como se pode entender um significado como extensão do outro? Não nos parece imediatamente claro que 5 vezes 8 unidades (isto é, 8 + 8 + 8 + 8 + 8) possa ser entendido como uma "parte" de outra "parte" da unidade. Essa questão da extensão do significado do produto dos naturais aos racionais é importante, pois, como Hart comenta,

> [...] o significado da multiplicação está fortemente enraizado na experiência da criança com os números naturais, onde a operação <u>pode sempre ser entendida como uma soma iterada</u>. Se a criança vê 4×3 como quatro grupos de três objetos (que podem ser separados e contados), o significado que ele atribui a 1/3×6/7 não é tão claro...(HART, 1981a, p. 80, grifo nosso)

Muitos dos formandos relataram, nas entrevistas, que suas experiências escolares eram no sentido de tomar esse significado do produto de racionais como uma "regra" sem explicações. Isso nos sugeriu uma consulta a livros didáticos utilizados nas escolas como textos de referência para a quinta série do Ensino Fundamental, onde são usualmente estudadas as operações com os racionais. De fato, não encontramos, em nenhum dos seis livros consultados, uma discussão adequada dessa questão. No melhor dos casos, essa atribuição de significado foi justificada como uma "tradução" do vocábulo *de* para a linguagem matemática, em analogia com o fato de que o dobro *de* 5 pode ser "traduzido" como 2×5.

Em dois dos livros consultados (BIGODE, 1995; IMENES; LELLIS, 1998) não constava o assunto multiplicação de números racionais na forma fracionária. Nos outros quatro encontramos a questão tratada da seguinte forma:

Livro 1

> Multiplicando dois números fracionários
>
> Pense e descubra
>
> 1. Gisela ganhou metade de um chocolate de Felipe e deu para Mônica a quarta parte do que ganhou. O chocolate de Felipe era formado por 8 pedaços iguais.
>
> a) Quantos pedaços de chocolate Felipe deu a Gisela? 4
>
> b) Quantos pedaços Gisela deu a Mônica? 1
>
> O que fizemos no item b) foi calcular ¼ de ½ de 8.
>
> Calcular ¼ de ½ de uma quantidade significa calcular a quarta parte da metade dessa quantidade. <u>Considerando-se que a palavra de pode ser substituída pelo sinal de multiplicação</u> (×), <u>então, calcular ¼ de ½ é o mesmo que calcular</u> ¼ × ½.
>
> Geometricamente temos: [...].
>
> (GIOVANNI; GIOVANNI JR, 2000b, p. 192-193, grifo nosso)

Livro 2

> Multiplicação de números racionais absolutos
>
> <u>A expressão **o triplo de cinco** é traduzida em matemática por **3x5**</u>. <u>Da mesma forma, a expressão **um terço de dois quintos** será traduzida por</u> $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$. <u>Note que nessas expressões a palavra **de** é traduzida por</u> ×.
>
> Como se calcula $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$? <u>Já que essa expressão é igual a</u> $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}$, podemos fazer o cálculo usando figuras, como os matemáticos antigos faziam [...]
>
> (JAKUBOVIC E LELLIS, 1998, p. 165. Negritos no original, grifo nosso)

Livro 3

> Multiplicando uma fração por outra fração:
>
> Consideremos os seguintes exemplos:
>
> 1. Quanto dá $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$?
>
> <u>Em matemática, a palavra de pode ser substituída pelo sinal de multiplicação</u>.

(Lembre-se: *o dobro de* significa duas vezes). Assim, devemos calcular $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$. Observe a figura: [...] (GIOVANNI; CASTRUCCI; GIOVANNI JR., 1998, p. 132, itálico no original, grifo nosso)

Livro 4

Multiplicação

Observe a resolução dos três problemas que seguem.

1. Qual é o dobro de 37?

O dobro de 37 é 2.37 = 37 + 37 = 74.

2) Qual o dobro de $\frac{2}{5}$?

O dobro de $\frac{2}{5}$ é $2.\ \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$.

3) Quanto é $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{2}$ de uma unidade?

Tomamos $\frac{1}{2}$ da unidade:

Em seguida tomamos $\frac{3}{5}$ dessa parte:

E observamos que ficamos com $\frac{3}{10}$ da unidade. Então:

$\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

Repare que $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3 \times 1}{5 \times 2} = \dfrac{3}{10}$

O produto de duas frações é uma fração cujo numerador é o produto dos numeradores e o denominador [...]

(IEZZI; DOLCE; MACHADO, 1995, p. 119-120, grifo nosso)

Observamos que as pesquisas a respeito da aprendizagem dos racionais sugerem fortemente que sejam explorados, no trabalho docente na escola, todos os subconstrutos ou interpretações do conceito de número racional para dar significação às operações básicas nesse conjunto (KIEREN, 1976; BEHR et al., 1983; SOWDER et al., 1998; GRAEBER; TANENHAUS, 1992. Cf. Capítulo III). Esse tipo de estratégia pode ser desenvolvido utilizando-se os vários “modelos multiplicativos” em situações que podem sugerir uma analogia rica com aquelas em que se usa a mesma operação mas com números naturais, nas quais o significado já é familiar. Assim, desenvolve-se uma espécie de dialética do processo de ampliação de **N** para $\mathbf{Q}^+$, de tal forma que as “situações multiplicativas” no conjunto dos racionais são apreendidas e reconhecidas como tais em analogia com o significado do produto de naturais e, ao mesmo tempo, essa ampliação de significado produz um aprofundamento da compreensão do conceito no ambiente mais restrito, o conjunto dos números naturais.

Questão 3

Como você justifica o fato de que o produto de números reais é comutativo? Em outras palavras, por que se pode acreditar que ab = ba para quaisquer dois números reais a e b?

Como vimos no Capítulo III, a escola aborda os conjuntos numéricos e suas estruturas pela via da ampliação gradativa. Numa primeira etapa, sistematiza a idéia de número que a criança já vem desenvolvendo desde a fase pré-escolar, promovendo a percepção de relações estruturais entre os elementos do conjunto dos números naturais. A partir das limitações deste conjunto diante de determinadas situações, promove a ampliação da noção de número de modo a incluir, sucessivamente, os racionais positivos, os negativos, os irracionais, chegando, por fim, a um conjunto numérico capaz de expressar as medidas de grandezas de variação contínua: o conjunto dos números reais. Em cada etapa desse processo, as operações básicas também vão sendo estendidas ao novo universo numérico, adquirindo significados mais abrangentes de modo a abarcar situações das quais o conjunto numérico anterior não podia dar conta. Essa mesma dinâmica de extensão leva necessariamente à recontextualização e re-significação de algumas idéias relativas às estruturas desses sistemas numéricos como, por exemplo, a de que a "multiplicação sempre aumenta", válida nos naturais, mas incorreta nos racionais. Como outro exemplo, a noção de sucessor também não pode ser estendida aos racionais, mas é fundamental nos naturais. A operação de multiplicação vai se autonomizando gradativamente em relação à idéia de soma iterada à medida que passamos aos racionais e aos reais. Finalmente, num exemplo drástico desse fenômeno, a idéia de ordem linear é preservada até os reais, mas é perdida no processo de ampliação aos complexos.

Entretanto, quase na contramão desse processo que se desenvolve na escola, no curso de licenciatura o conjunto dos números reais ou é suposto conhecido ou é objeto de uma abordagem axiomática, em que os elementos, as operações e as propriedades estruturais são simplesmente tomados como postulados o que, em certo sentido, encerra toda discussão sobre o assunto. Tomar as propriedades estruturais das operações de adição e multiplicação nos reais como axiomas pode ser um recurso válido para que se estabeleçam rapidamente as bases para o estudo rigoroso das funções reais e das noções associadas (continuidade, diferencial, integral). Essa escolha de prioridades, ao que parece, conforma-se aos objetivos gerais do processo de formação do bacharel (cf. Capítulo III). Todavia, no caso da formação do professor do ensino básico, essa estratégia tem a inconveniência de ignorar a discussão do processo de extensão dos conjuntos numéricos que se desenvolve na escola. Além disso, a questão é trabalhada no processo de formação de um modo tal que, por um lado, as propriedades das operações são tomadas como axiomas e, por outro, não se elaboram as evidências que justificariam encará-las dessa forma (considerando-se que, de modo geral, os axiomas são associados a verdades “evidentes”, aceitas sem demonstração e sobre as quais se funda a teoria).

Entre os naturais, a multiplicação tem o significado de soma de parcelas iguais, o que fornece um recurso didático interessante para a discussão da comutatividade. Nos racionais sob a forma fracionária, a comutatividade do produto pode ser explicada diretamente pelo algoritmo, desde que se estabeleça uma conexão adequada deste com os significados da operação. Quando se trabalha com os números reais, no entanto, a multiplicação já desenvolveu um processo de relativa “autonomização” em relação à soma e o vínculo do produto em **R** com o produto em **Q** tem de ser intermediado pela idéia de limite, a qual, de todo modo, já se encontra subjacente à noção de número irracional. Nesse sentido, argumentos que justifiquem a comutatividade do produto de números reais mantêm, implícita ou explicitamente, uma relação intrínseca com todo o processo de extensão dos conjuntos numéricos desenvolvido na escola. Como exemplo, podemos citar a seguinte linha de argumentação: o produto de reais é comutativo porque pode ser aproximado, com qualquer grau de precisão, pelo produto de racionais e este é comutativo.

Assim, o objetivo dessa terceira questão era investigar, no caso dos formandos, que tipo de reflexão a respeito da validade da propriedade comutativa do produto de números reais o curso de licenciatura da UFMG promove ou induz entre seus alunos. No caso dos iniciantes, o objetivo era detectar o tipo de visão dessa questão com que eles iniciam o processo de formação profissional na universidade.

Observamos, por fim, que nas três últimas perguntas do questionário (incluindo essa terceira, portanto), não pedimos mais que os respondentes produzissem uma explicação ou justificativa que estivesse ao alcance de alunos do Ensino Fundamental, como nas duas primeiras.

Tabela 3 – Respostas Questão 3

respostas	formandos	iniciantes
satisfatórias	0 (0%)	1 (2%)
insatisfatórias	14 (60%)	35 (84%)
trata-se de um axioma	2 (7%)	1 (2%)
não sei ou em branco	8 (33%)	5 (12%)

Observamos, em primeiro lugar, que dois formandos e um iniciante responderam: *trata-se de um axioma*. Na Tabela 3, destacamos essa resposta do grupo das insatisfatórias porque está tecnicamente correta, considerando-se a forma como se define o conjunto dos reais na licenciatura. A nosso ver, no entanto, ela não responde satisfatoriamente à questão proposta, na medida em que não *justifica* e nem fornece nenhuma *razão* pela qual se poderia acreditar que ab = ba.

Chamamos atenção, em segundo lugar, para o fato de que apenas um aluno (do primeiro período) apresentou uma resposta satisfatória e o argumento toma como dado que o produto de dois números reais (positivos) expressa a área de um retângulo. Eis o trecho crucial de sua resposta:

> [...] vê-se que, geometricamente, esse produto pode ser a área de um retângulo de lados a e b. Se b for a base e a a altura temos que S = ba. Se a for a base e b a altura temos que S = ab. Repare que o segundo retângulo tem a mesma área que o primeiro retângulo, só que este está com um giro em relação àquele [...] (estudante do primeiro período).

É claro que uma explicação completa, nessa direção, incluiria uma discussão da interpretação do produto de dois números reais como área de um retângulo, considerando, ainda, a extensão aos casos em que um dos fatores seja negativo. Mas, por um lado, isso não foi explicitamente solicitado dos respondentes e, por outro, há que se considerar que nenhum aluno, entre os 65 restantes, desenvolveu qualquer tentativa de associar um significado ao produto de números reais, no contexto desta questão.

Nenhum dos formandos sequer esboçou uma justificativa aceitável. O aluno do primeiro período que apresentou a única resposta considerada satisfatória para esta pergunta não usou o mesmo argumento para os naturais, preferindo, na primeira questão, argumentar através da apresentação de exemplos isolados. Por outro lado, é interessante notar também que nenhum dos formandos que responderam satisfatoriamente à **Questão 1** transferiu o argumento para o caso dos reais na **Questão 3**.

Sete alunos do último período relacionaram explicitamente as questões 1 e 3: um deles afirmou tratar-se de um axioma, como no caso dos naturais; dois afirmaram que justificariam a comutatividade do produto de reais através de exemplos, como no caso dos naturais; os outros quatro disseram que tomam esse fato como uma extensão "natural" da sua validade entre os inteiros positivos.

No grupo dos formandos, nota-se uma tendência maior (em relação às respostas à **Questão 1**) no sentido de uma formalização dos argumentos. No entanto, as sete tentativas de demonstração se reduziram, com pequenas variações, ao seguinte tipo de encaminhamento:

$$a \times b = c \;\Rightarrow\; a \times \frac{1}{b} \times b = \frac{1}{b} \times c \;\Rightarrow\; a \times 1 = \frac{c}{b} \;\Rightarrow\; a = \frac{c}{b} \;\Rightarrow\; b \times a = b \times \frac{c}{b}$$

$\Rightarrow$ $b \times a = c$ (estudante do último período)

A sensação geral transmitida pelas respostas do tipo *não sei,* no caso dos formandos, foi de desamparo:

> 1. No momento não me passa pela cabeça como justificar. Na verdade, nunca [*portanto nem no curso de licenciatura, observação nossa*] parei para pensar o porque da validade desta lei, na escola me convenceram ou fizeram eu tomar isso como verdade sem a mínima justificativa. "É comutativo e pronto!" (estudante do último período, aspas no original, grifo nosso)
> 2. Não justifico! Em se tratando de números reais, não é válido o argumento da soma repetida, portanto o que posso fazer é utilizar a capacidade adquirida durante o curso de aceitar que algumas coisas são inventadas para funcionar, contrariando nosso ímpeto de curiosidade e anseio por explicações (estudante do último período, grifo nosso)
> 3. O fato de o produto dos números reais ser comutativo é tomado como verdade, eu não sei como justificá-lo ou prová-lo (estudante do último período)
> 4. Não sei justificar o fato do produto de reais ser comutativo. Recordo-me de que o conjunto dos números reais é um corpo, mas a propriedade comutativa da multiplicação não é característica só de um corpo (estudante do último período)
> 5. Não tenho nem idéia (estudante do último período)
> 6. Infelizmente eu não consigo me lembrar de um argumento plausível que pudesse ser utilizado para mostrar a comutatividade dos números reais (estudante do último período)
> 7. Justificaria para os alunos da mesma forma que para os números naturais ou tentaria provar formalmente, mas particularmente duvido que funcionaria muito bem desta forma.
> Diria que da mesma forma que valeu para os naturais vale para os racionais.
> (Acho que se tivesse experiência ou se tivesse tido até mesmo uma formação melhor não faria deste jeito). (estudante do último período)

No caso dos iniciantes, as 35 respostas da categoria *insatisfatórias* se dividiram basicamente entre a justificativa através de exemplos (9 respostas), a tomada da lei comutativa como um princípio universal e natural *que não necessita de nenhum tipo de justificativa* — "a ordem dos fatores não altera o produto" — (12 respostas), sete que se reduziam basicamente a afirmar que "o produto ab significa somar b com ele mesmo a vezes e que, por isso, ab = ba" e sete outras que tentaram uma demonstração (incorreta) do fato. Observe-se a consistência do segundo grupo de respostas ("a ordem dos fatores não altera o produto") em relação aos dados da **Questão 1**. Um dos estudantes do primeiro período descreveu da seguinte maneira a forma como via a validade da lei comutativa para o produto de reais, a partir do seu aprendizado escolar:

> "A ordem dos fatores não altera o produto" foi uma das frases que eu mais ouvi no primeiro grau. Agora que eu paro pra pensar, eu não me recordo de nenhum professor provando a

> verdade dessa afirmação, mas eu a aceitava, fazia as contas, dava certo e pronto. Acho que se pode acreditar nessa frase porque sempre que a aplicava nos problemas o resultado dava certo, todo mundo ficava feliz e não se duvidava de nada. Quando alguma coisa funciona, a maioria das pessoas não se interessa em saber porque, desde que continue funcionando (só quando não funciona é que a pergunta é levantada). Neste momento eu me sinto envergonhada de estar cursando matemática e nunca ter perguntado a um professor porque ab = ba (estudante do primeiro período, grifo nosso).

Questão 4

Sabe-se que a expressão 2^3 significa o produto $2\times2\times2$. A expressão $2^{\sqrt{3}}$ tem algum significado para você? Se a sua resposta for sim, por favor, explique.

Na sua futura prática docente no ensino médio, o licenciado vai trabalhar com as funções exponenciais e logarítmicas. Nos textos escolares, o logaritmo de x na base a é apresentado como o número ao qual se deve elevar a para se obter x (YOUSSEF; FERNANDEZ; SOARES, 1998, p.105; GENTIL et al., 1997, p.157). A hipótese implícita é a de que tal número sempre exista, dados a e x reais positivos ($a \neq 1$). Por outro lado, de modo geral, a questão da extensão da potência a expoentes não inteiros é tratada até os racionais: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ (m/n na forma irredutível) é uma conhecida formulação dessa extensão, supondo-se discutido o fato de que todo número real (positivo, se n for par) tem uma única raiz enésima. Assim, é muito comum que o aluno desenvolva uma concepção ambígua a respeito da potência com expoente irracional. Por um lado, dados a e x, reais positivos, sempre existe um número b tal que $a^b = x$ e, por outro, não se discute significado para uma expressão do tipo a^b quando b é irracional. O aluno costuma resolver essa ambigüidade adotando a idéia de que "qualquer número elevado a um número é sempre um número".

Na universidade, nos cursos de Cálculo, Equações Diferenciais etc., a função exponencial é estudada sob vários aspectos, enfatizando-se uma característica fundamental que é a de ser a (única) função real que varia a uma taxa proporcional ao seu valor. Outro aspecto importante relacionado com a exponencial é a sua vinculação com a função logarítmica, qual seja, $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$.

Um procedimento muito comum nos textos universitários para dar sentido à expressão a^b com b real qualquer e a real positivo, é o de definir a^b como $e^{b(\ln a)}$. A questão a ser considerada nesse caso é que a exponencial e o logaritmo de base **e** já teriam que ter seus significados estabelecidos independentemente. Isso desvia completamente o curso do processo de extensão da potência, produzindo uma construção formalmente muito elegante, porém demasiado artificial para ser trabalhada no âmbito da escola.

O objetivo dessa Questão 4 era, no caso dos iniciantes, detectar os significados que eles atribuem à potência com expoente irracional, provavelmente desenvolvidos a partir da formação escolar básica. Com relação aos formandos, queríamos verificar em que medida o processo de formação no curso de licenciatura contribui para a construção de significados para expressões desse tipo.

Na tabela 4, abaixo, dividimos as respostas em três grupos: aqueles que afirmaram claramente que $2^{\sqrt{3}}$ **não tem** significado para eles, os que afirmaram claramente que $2^{\sqrt{3}}$ **tem** um significado para eles (mesmo que, na explicação subseqüente, esse significado se mostre, de fato, confuso, incoerente ou incorreto) e um terceiro grupo, composto pelos alunos que não responderam explicitamente nem sim nem não, mas fizeram comentários a respeito de como vêem a expressão $2^{\sqrt{3}}$. Este último grupo só aparece entre os alunos iniciantes. Eis os resultados:

Tabela 4 – Respostas à Questão 4

respostas	formandos	iniciantes
não tem significado	14 (59%)	10 (24%)
tem significado	10 (41%)	21 (50%)
outras	0 (0%)	11 (26%)

Em primeiro lugar, notamos que cerca de 60% dos formandos afirmaram categoricamente que a expressão $2^{\sqrt{3}}$ *não tem significado* para eles. Entre os dez formandos que disseram que $2^{\sqrt{3}}$ *tem* significado para eles, quatro mostraram, nas explicações, que tal significado é, no mínimo, confuso. Eis suas respostas:

> 1. Sim. Como $\sqrt{3}$ é um número real então $2^{\sqrt{3}}$ pode ser calculado. Não sei se para calcular utilizaria a mesma definição, ou seja $2\times2\times.....\times2$ ($\sqrt{3}$ vezes) ou teria outro argumento para isso (estudante do último período).
>
> 2. $2^{\sqrt{3}} = 2^{3^{\frac{1}{2}}}$ (estudante do último período)
>
> 3. Quando estudamos as potências aprendemos que só existe potência de números reais com expoente natural, mas surgiu da necessidade a criação da função exponencial cujo expoente pode ser qualquer número real. Como função $2^{\sqrt{3}}$ tem sim um sentido, que é encontrar um valor determinado para a expressão $2^{\sqrt{3}}$ ou mesmo encarar a expressão $2^{\sqrt{3}}$ como um número levando em conta o abuso de notação (estudante do último período).

4. Possui significado teórico, sem exemplo prático. Pode dizer que é um número que elevado a $\sqrt{3}$ tem a mesma propriedade que $2\times2\times2$. Pode ser visto como uma extensão das propriedades dos outros conjuntos já que os outros subconjuntos são subconjuntos desse (estudante do último período).

Dos seis restantes, três apresentaram a definição com base no logaritmo ou na exponencial (sem nenhum comentário a respeito dos significados dessas expressões), um referiu-se vagamente a "ter um significado na forma de exponencial" e 2 indicaram, sem elaborar, a possibilidade de que a expressão seja entendida em termos de aproximações racionais para o expoente. Vejamos suas respostas:

1. $2^{\sqrt{3}} = 2^{3^{\frac{1}{2}}}$ é uma exponencial de tal forma que $\log_2 x = \sqrt{3}$. Não é uma expressão que se possa expressar como um produto de inteiros como 2^3 (estudante do último período)

2. $2^{\sqrt{3}}$ não tem um significado tão palpável quanto 2^3. Porém para manter algumas propriedades importantes, generalizamos o conceito de potência para expoentes reais da seguinte forma:

$a^k = e^{k\ln a}$ $\quad 2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\ln 2}$ (estudante do último período)

3. Não possui o mesmo significado de multiplicar o 2, $\sqrt{3}$ vezes, mas possui significado quando penso em logaritmos pois se $2^{\sqrt{3}} = x$ tenho: $\ln 2^{\sqrt{3}} = \ln x$ $\quad \sqrt{3}\ln 2 = \ln x$ (estudante do último período)

4. A expressão $2^{\sqrt{3}}$ não possui um significado se analisada da mesma maneira que $2^3 = 2\times 2\times 2$. No entanto sabemos que ela possui um significado em termos de exponencial (estudante do último período)

5. Sim. Um significado confuso. Se por um lado não é difícil acreditar que $2^{\sqrt{3}}$ é um número real, imaginando aproximações do expoente numa representação decimal, por outro lado cai por terra a noção de potência como produto repetido (estudante do último período).

5. Claro que sim. Assim como $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ ou $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ não podem ser entendidas pelo processo de $a^m = a\times a\times a.... \times a$ (m vezes). Isto só cabe se m for inteiro, mas $2^{3/5}$ ou 5^{-3} também são calculados e chegam a resultados compreensíveis. $2^{\sqrt{3}}$ não pode e muito menos deve ser visto como o valor 2 multiplicado por ele mesmo $\sqrt{3}$ vezes. O valor de $2^{\sqrt{3}}$ é um número real compreendido entre $2^1 = 2$ e $2^2 = 4$ já que $1<\sqrt{3}< 2$ (estudante do último período).

Ao contrário dos formandos, a metade dos alunos do primeiro período afirmou que $2^{\sqrt{3}}$ tem um significado para eles. Entretanto, nenhum deles conseguiu explicitar esse significado. Três, dos 21 desse grupo, tangenciaram uma forma de construção de significado para a potência com expoente irracional, mas esbarraram na falta de uma concepção teórica mais clara de número irracional. Isso parece ter produzido, em um deles, a noção de um "número que existe mas não é totalmente definido" e nos outros dois a busca de um cálculo aproximado para $2^{\sqrt{3}}$ utilizando uma tabela de logaritmos (no caso, ao que nos pareceu, fazendo o papel de uma calculadora). Eis suas respostas:

> 1. $2^{\sqrt{3}}$ faz sim sentido para mim. Assim como 2^3 é o número 2, 3 vezes, o $2^{\sqrt{3}}$ seria o número 2, $\sqrt{3}$ vezes. <u>Apesar de ser um número que não é totalmente definido</u> (acredito que $\sqrt{3}$ seja um número com infinitas casas decimais) <u>ele existe.</u> E $2^{\sqrt{3}}$ também existe e seria um número não definido totalmente, assim como $\sqrt{3}$ (estudante do primeiro período, grifo nosso).
>
> 2. $2^{\sqrt{3}} \rightarrow 2^{3^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 2^{1,73...}$
>
> Isso faz sentido para mim. Assim como $10^{0,3010} = 2$ *[observe-se que a igualdade não é referida como aproximada, comentário nosso]* $2^{\sqrt{3}}$ também será um número (um número entre 2 e 4, pois $2^1 = 2$ e $2^2 = 4$, logo $2^{1,73...} = x \rightarrow 2 < x < 4$). Na verdade, não é difícil encontrar o resultado dessa conta: $2^{\sqrt{3}} = x \quad \log_2 x = \sqrt{3}$.
>
> Correção: é um pouco difícil achar o resultado, pois depende de quantas casas decimais serão usadas para $\sqrt{3}$. Mas, em todo caso, a expressão possui um significado para mim (note que possuir um significado não é a mesma coisa que possuir um uso, uma aplicação) (estudante do primeiro período).
>
> 3. Como $\sqrt{3} \cong 1,71$ e $2^1 = 2$ e $2^2 = 4$, sei que $2^{\sqrt{3}}$ é um número que está entre 2^1 e 2^2, i. e., $2^1 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2$. Para saber qual é este número (aproximadamente), teria que usar logaritmo. O resultado daria um número mais próximo de 2^2 que de 2^1, pois 1,71 está mais próximo de 2 [*observe-se a linearização, comentário nosso*] (estudante do primeiro período).

Dos outros 18 iniciantes que responderam sim, sete explicaram que $2^{\sqrt{3}}$ significa $2^{3^{\frac{1}{2}}}$, sendo que alguns desses acabaram identificando a expressão com $2^{3/2}$ (ou variações) e quatro deles explicaram o significado nos seguintes termos: "$2^{\sqrt{3}}$ *significa* $2\times 2 \times ... \times 2$ *(*$\sqrt{3}$ *vezes)*". Os sete restantes desse grupo basicamente disseram que a expressão tem um significado para eles, mas que não sabiam explicar, ou apresentaram uma explicação confusa, que não conseguimos interpretar.

Finalmente, dos 11 iniciantes da categoria *outras,* alguns disseram que não sabiam explicar ou que não possuíam conhecimento para discutir a questão, enquanto outros entenderam a pergunta como se estivéssemos perguntando se, na matemática, a expressão $2^{\sqrt{3}}$ tinha algum significado. E então responderam: "*algum deve ter, mas eu não sei explicar*" ou "*se puser esse valor numa calculadora, com certeza terá um resultado para essa potência*".

Questão 5

Os números naturais se prestam muito bem, entre outras coisas, para contar coleções de objetos. Os números racionais se prestam, entre outras coisas, para expressar uma medida fracionária. Para você, o que são números irracionais? E para que servem eles?

Queríamos, com esta questão, captar e comparar imagens de licenciandos iniciantes e formandos a respeito dos números irracionais.

Nos textos escolares os números irracionais são apresentados como aqueles que não se escrevem como fração ou, pela via da forma decimal, aqueles cuja representação é infinita e não-periódica. O conhecimento de alguns pontos básicos a respeito da noção de número irracional pode ser considerado essencial para os professores da escola porque lhes permitiria fundamentar eventuais opções alternativas de abordagem do assunto e criticar as abordagens usualmente encontradas nos livros didáticos escolares (cf. Capítulo III). Tais pontos básicos, fortemente vinculados entre si, seriam:

1. A idéia de incomensurabilidade; a associação entre essa noção e a eventual impossibilidade de representação fracionária de uma medida. Tais elementos fornecem significado para a característica distintiva dos números irracionais, qual seja, o fato de que não são razões de inteiros.
2. A idéia de representação decimal infinita e a distinção entre representações periódicas e não periódicas. A possibilidade de aproximação arbitrária, por racionais, de qualquer número irracional.
3. A constatação de que as razões de inteiros não podem expressar *todas* as medidas — daí as limitações do conjunto dos racionais — e o papel dos números irracionais na constituição de um conjunto numérico *contínuo*, isto é, capaz de expressar medidas de grandezas de variação contínua, como o tempo, comprimento etc.

A nossa expectativa, fundada em experiência de trabalho na licenciatura bem como em estudos desenvolvidos sobre o assunto tanto no Brasil como no exterior (FISHBEIN et al., 1995; SOARES et al., 1999; IGLIORI; SILVA, 1998), era a de que os iniciantes apresentassem imagens confusas a respeito dos irracionais. Em parte, essa expectativa se confirmou, como mostram os dados comentados adiante. Com relação aos formandos, queríamos observar em que medida a experiência de formação na licenciatura contribui para uma re-elaboração das imagens que trouxeram da escola.

Devido à natureza diferenciada desta **Questão 5** em relação ao resto do questionário, não foi possível compor uma síntese dos dados obtidos no formato e categorização que vínhamos desenvolvendo nas questões anteriores. Assim, analisamos as respostas tomando como referência aqueles três pontos citados acima. Como consideramos de interesse registrar as imagens vigentes entre os alunos, decidimos listar, na íntegra, todas as respostas, enumerando-as, para referência. Essa listagem encontra-se num apêndice, ao final deste capítulo (Apêndice B).

A análise das respostas aponta os seguintes resultados:

- Entre os iniciantes, sete alunos (pouco mais de 15% do total da amostra) se referiram aos irracionais como "aqueles que não podem ser escritos na forma de fração" (Iniciantes 4, 5, 17, 20, 34, 39, 41). Mas, no que se refere à questão "para que servem os irracionais?" nenhum deles se referiu a elementos relevantes (expressar a medida de um segmento incomensurável com a unidade, por exemplo).
- Onze iniciantes (cerca de 26%) se referiram à representação decimal como caracterização dos irracionais (Iniciantes 6, 7, 12, 15, 20, 23, 24, 28, 30, 40, 41), mas nenhum deles identificou corretamente irracionalidade com representação decimal infinita e não periódica. A única resposta que se aproximou dessa identificação, a 23, refere-se ao número irracional como originário de uma "divisão fracionária" que resulta numa dízima não periódica.
- As demais respostas dos iniciantes mostram imagens precárias do conceito de número irracional, muitas vezes relacionadas à idéia de infinito, mas de uma forma confusa e inconsistente. As imagens captadas vão desde o "*número não exato*", "*impreciso*", "*números infinitos, irrepresentáveis*" até as raízes quadradas de inteiros negativos, frações que geram dízimas periódicas, passando por idéias vagas como "*números que servem para expressar o infinito, o que não se pode contar*" ou "*que só encontram sua utilização em laboratórios*".

Em suma, o que se registra é que nenhum aluno da amostra dos iniciantes se referiu, com alguma consistência, a qualquer expressão fundamental em termos de significado para a irracionalidade.

Entre as respostas dos formandos, podemos constatar o seguinte:

- Em quinze delas menciona-se o fato de que os irracionais não podem ser escritos como fração (Formandos 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 22, 24). Destas, *apenas três* (3, 7, 22) prosseguem, após essa caracterização dos irracionais, com uma discussão satisfatória da questão do sentido de se considerar tais objetos como números. A resposta (3) menciona, todavia de modo vago, a questão da continuidade do sistema numérico que se obtém com a inclusão dos irracionais; a (7) menciona o fato de que os irracionais "*servem para representar medidas, distância [...] que não podem ser representadas por números racionais*" e a (22) refere-se de forma consistente à questão da medida de segmentos incomensuráveis com a unidade. Das outras 12, algumas se referem de modo pouco claro à "natureza" ou à "função" dos irracionais (4, 11, 12, 14, 16, 18, 19, 24) e, dos quatro alunos restantes, dois afirmam não saber "para que servem" os números irracionais (8, 10), um não se refere a esta questão (15) e o outro diz, de forma ambígua: "*acho que a existência dos irracionais garante a continuidade da reta*" (6) (grifo nosso).

- Em seis respostas (Formandos 10, 13, 17, 22, 23, 24), faz-se referência à idéia de incomensurabilidade, mas destas, *apenas uma* (22) apresenta um texto articulado em que se expressam claramente as relações entre incomensurabilidade e número irracional. As outras cinco (10, 13, 17, 23, 24) mostram idéias confusas ou incompletas tais como "*não sei para que eles servem mas sei que existem e dou exemplos:* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, *e. E sei que foram descobertos a partir de uma crise dos pitagóricos (segmentos de retas incomensuráveis)*" (10), "*medidas não mensuráveis*" (24), "*números irracionais são números que representam grandezas que não podem ser medidas [...] matematicamente representam a densidade da reta numérica*" (23), "*valores que não podem ser medidos, ou seja, o que não é natural nem real*" (13) e "*irracionais, para mim, são os incomensuráveis*" (17).
- Quatro respostas fizeram referência explícita à idéia de "tornar contínua" ou "completar" a reta real (Formandos 3, 6, 18, 20). Mas em *nenhuma* delas se elabora um sentido ou se destaca a importância teórica desse fato: em (3) fala-se que "*eles estão relacionados com a continuidade da reta real*", em (6), como já comentado, refere-se da seguinte forma a essa questão: "*acho que a existência dos irracionais garante a continuidade da reta*" (grifo nosso), em (18) nem se fala explicitamente em continuidade, mas "*os números irracionais servem para cobrir as lacunas na reta real, espaços que não podem ser representados nem por frações nem por inteiros, mas que existem*" e, por fim, a (20) contém uma referência pouco clara ao papel dos números irracionais: "*Para mim são números que não podemos representar exatamente na forma decimal. São essenciais para completar a reta dos números reais, mas essa é uma visão absolutamente teórica. Em*

problemas práticos não é difícil ser convencido de que tais números servem para expressar medidas".

- Sete respostas do grupo dos formandos fizeram menção à representação decimal dos irracionais (Formandos 3, 4, 8, 14, 19, 20, 22). Mas *nenhuma* delas se referiu, com propriedade, à possibilidade de se aproximar qualquer número real por racionais, com a precisão que se queira. A resposta (4) toca nessa questão, mas de uma forma que nos pareceu inconsistente: "*não há muita serventia para tais números uma vez que para qualquer cálculo é usada sempre uma forma truncada ou <u>aproximada por números</u>, mas apenas para <u>preencher lacunas na formalização matemática</u>* [...]" (grifo nosso).

Concluindo, pode-se notar uma certa diferença entre as respostas do grupo dos formandos e as do grupo dos iniciantes, nessa **Questão 5**. Embora a nossa análise dos dados esteja longe de apontar uma visão consistente da noção de número irracional entre os formandos, não se pode deixar de observar que este grupo apresenta certo amadurecimento, em relação às imagens dos iniciantes, na medida em que se atêm mais, ainda que de modo confuso, a questões referentes ao significado e ao sentido da extensão da noção de número aos irracionais.

Conclusões gerais

Deborah L. Ball, termina o resumo do artigo "*O entendimento da matemática que os estudantes trazem para o processo de formação*" (BALL, 1990) da seguinte maneira:

> [...] Baseados nesses resultados, o artigo questiona três pré-concepções bastante comuns sobre o que seja aprender matemática para o ensino escolar: (1) que o conteúdo tradicional da matemática escolar não é difícil; (2) que a própria educação escolar fornece aos professores a maior parte da matemática de que precisam e (3) um curso de graduação em matemática assegura ao futuro professor o conhecimento do conteúdo matemático. Essas crenças estão subjacentes tanto às práticas vigentes nos processos de formação do professor como também às propostas de reforma (BALL, 1990, p. 449)*

Os dados da pesquisa relatada neste capítulo reforçam enfaticamente as três direções para as quais aponta o questionamento de Ball. Uma visão sumária dos resultados mostra que:

- Cerca de 80% da amostra dos formandos não conhecem um argumento com o qual possam justificar, para alunos da escola básica, a validade da propriedade comutativa do produto de números naturais. E 97% da amostra dos iniciantes terminam a escola básica — e entram para o curso de licenciatura em matemática — sem conhecer um argumento para isso.

- No caso do produto de números reais, os resultados são ainda mais contundentes: nenhum formando, e apenas um entre os iniciantes, foi capaz de produzir um argumento consistente que justifique a validade da propriedade comutativa.
- Mais de 80% da amostra dos formandos não souberam associar os significados das operações de adição e multiplicação de racionais aos respectivos algoritmos para o cálculo dos resultados dessas operações. Entre os iniciantes, nenhum aluno foi capaz de elaborar essa associação, nem mesmo para uma delas apenas.
- Cerca de 60% da amostra dos formandos afirmaram categoricamente que a expressão $2^{\sqrt{3}}$ *não possui significado para eles*. Dos 40% restantes, a metade não foi capaz de atribuir um valor bem definido a essa expressão. Isso significa que 80% da amostra dos formandos têm dificuldades com a potência de expoente irracional. Entre os iniciantes, esse índice chega a ultrapassar os 90%.
- Apenas três alunos formandos (pouco mais de 10% da amostra) apresentaram uma caracterização satisfatória dos números irracionais acompanhada de um arrazoado consistente a respeito da necessidade de se considerar como número algo que não se expressa como razão de inteiros.
- Entre os 24 formandos apenas um se refere de forma consistente à noção de incomensurabilidade em associação com o conceito de número irracional. Entre os iniciantes nenhum faz essa associação.

Esses dados reforçam as conclusões das análises desenvolvidas no Capítulo III, a respeito da inadequação da abordagem dos conjuntos numéricos em vigor no curso de licenciatura diurno da UFMG. Por um lado, configura-se claramente a necessidade de se discutir, na licenciatura, questões como as do questionário, o que parece ir de encontro a um pressuposto implícito do currículo do curso, que se desenvolve de tal modo que os conjuntos numéricos são abordados como exemplos elementares das estruturas abstratas da matemática acadêmica e não como objeto de trabalho do professor na educação matemática escolar. Por outro lado, fica reforçada, também, a tese de que a abordagem formal dedutiva dos conjuntos numéricos não é suficiente para produzir uma visão adequada ao tratamento do assunto na prática docente escolar em matemática.

Se o processo de formação busca preparar o futuro professor de matemática da escola para uma prática de negociação e de construção de significados com os alunos, infere-se dos resultados obtidos que é necessário repensar esse processo, pelo menos no que concerne à abordagem dos sistemas numéricos. Uma condição básica para o desenvolvimento de uma prática pedagógica desse tipo é o domínio, por parte do professor, dos conceitos matemáticos numa forma multifacetada isto é, capaz de se conectar a diferentes caminhos no processo de construção dos conceitos. Outra condição importante refere-se à flexibilidade, à capacidade de adaptar-se aos diferentes estágios de desenvolvimento cognitivo dos alunos da escola (BEHR et al., 1983; DICKSON et al., 1993; LLINARES; SÁNCHEZ, 1996). Entretanto, os resultados apresentados neste capítulo nos mostram que a abordagem do assunto na licenciatura da UFMG não foi capaz de produzir essas formas de conhecer os conjuntos numéricos.

A nossa análise dos resultados levanta, também, algumas hipóteses sobre concepções vigentes entre iniciantes e formandos a respeito da matemática e do processo de ensino escolar da matemática. Entre os iniciantes aparece, com relativa freqüência, um discurso em que se tomam as justificativas para os fatos matemáticos como desnecessárias, pelo menos no processo de escolarização básica. Em contraste, são vistas como necessárias as ações de informação e de transmissão didaticamente cuidadosa, isto é, de forma "compreensível" para o aluno, dos fatos matemáticos em si (o que não inclui, necessariamente, discutir as razões pelas quais eles são aceitos como verdadeiros). Já entre os formandos pode-se notar uma tendência de conceber a justificativa como uma demonstração de tipo formal. Como não lhes parece possível desenvolver esse tipo de argumentação no processo de ensino escolar, a solução seria, então, recorrer aos exemplos particulares para validar as afirmações gerais. Assim, a educação matemática escolar reduzir-se-ia, ao fim e ao cabo — dado que os alunos da escola ainda não estão prontos para a matemática "boa", isto é, num alto nível de abstração e formalismo — à *transmissão* de um conjunto de informações sobre os fatos matemáticos. Estes, por sua vez, seriam validados através da exposição do estudante a uma coleção de exemplos que, talvez em conjunto com a autoridade social e institucional do professor e/ou dos textos didáticos, promoveriam a aceitação por parte dos alunos.

Dessa forma, configura-se uma espécie de círculo vicioso que se traduziria no seguinte roteiro: o professor inicia sua prática profissional na escola básica sob a influência de uma concepção implícita de que, na impossibilidade de trabalhar com a "boa" matemática a que foi exposto no processo de formação na licenciatura, é obrigado a optar por uma estratégia que acaba reproduzindo a sua própria formação escolar, ou seja, a que ele acabou trazendo para a licenciatura.

Finalizando, observamos que as conclusões do estudo apresentado neste capítulo são convergentes com a análise desenvolvida no Capítulo III e, de certa forma, confirmam o distanciamento, lá apontado, entre o conhecimento sobre os sistemas numéricos veiculado no processo de formação inicial na licenciatura e os saberes envolvidos nas questões que se colocam para o professor na prática docente escolar.

APÊNDICE B

Aqui apresentamos, na íntegra, as respostas dos dois grupos à **Questão 5**.

INICIANTES

1. Depois dessa pergunta comecei a pensar como seria eu como professora de matemática... Como uma pessoa pode ensinar outras, sendo que não consegue nem lembrar o que são números irracionais.
2. Os números são abstratos quando trabalhamos só com eles sem ter necessidade de somar objetos, resolver problemas e cada número posterior veio para resolver limitações dos anteriores e os números irracionais nos servem para dar continuidade nos números matemáticos, para resolver problemas com dízimas periódicas, raízes, pi, etc.
3. Não são números exatos, servem para expressar valores que vão além dos números fracionários, indefiníveis.
4. São números que não podem ser escritos na forma de fração.
5. São números que não podem ser expressos na forma fracionária. Eles têm grande utilidade na trigonometria.
6. Os números irracionais são dízimas, números com infinitas casas decimais. São originados através de uma divisão. A serventia dos números irracionais pode ser explicada com o número π, que expressa a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu raio, para toda circunferência. Assim como o π outros números irracionais têm muita utilidade para efetuar cálculos em matemática, física, química e outras ciências.
7. Os números são infinitos, são, portanto, irrepresentáveis. Entretanto, faz-se o esforço para tentar representá-los ao máximo. Criam-se assim dízimas não periódicas, raízes não exatas, etc.
8. Números irracionais são aqueles que servem de apoio à prática na matemática. Servem para a representação de determinadas divisões e raízes de números não-perfeitos.
9. Números irracionais, para mim, são medidas fracionárias imprecisas que causam uma certa dúvida nos cálculos, eles servem exatamente para isso, para essas medidas imprecisas.
10. São números bem específicos que só acham sua utilização em laboratórios.
11. São números que não podem ser expressados de uma maneira singular, ou seja, não possuem uma posição especificamente determinada entre dois outros valores próximos. Eles apenas serão úteis se pensarmos nos seus limites laterais de modo que $0 < |x| < \gamma$, ou seja, estejam possivelmente compreendidos entre seus limites perfeitamente determinados.
12. Os números irracionais são aqueles constituídos de infinitas casas decimais após a vírgula. A sua utilização é vasta, indo do número de ouro ao π. Mas a sua principal utilidade é expressar a raiz de determinados números que não tenham tanta precisão
13. Números irracionais são números que não podem ser escritos por apenas algarismos. Eles servem para representar um ponto no plano e determinar resultados que a matemática dos números racionais não determina.
14. Apesar de não conseguirmos lidar com os números irracionais de uma maneira mais prática, eles são, sem dúvida, um grande instrumento matemático.

15. Números irracionais, para mim, são um equívoco da matemática porque eles não são inteiros e são dízimas (periódicas e não periódicas). Talvez num sistema não decimal não existiriam números irracionais. Alguns números irracionais servem como constantes em algumas funções: é o caso do π, que é um número irracional, dízima não periódica, fundamental em funções trigonométricas (como uma função de um pêndulo). Esses números podem ser representados, como os números racionais, em frações de denominador múltiplo de 9.
16. São números inteiros que foram fracionados e servem para expressar resultados de forma mais exata.
17. Os números irracionais são aqueles que não podem ser escritos sob a forma a/b, com $a \in Z$ e $b \in Z^*$. Em termos práticos, e pensando de certa forma superficialmente, eles servem para compor um novo conjunto dos números, o conjunto R e têm grande utilidade em operações matemáticas.
18. Irracionais são os números criados para resolução de problemas matemáticos que esbarravam nos números racionais como obstáculos para a sua resolução. Servem exatamente para a resolução destas questões.
19. Números que representam porções variáveis de números que não atingem a forma inteira. Essenciais, na <u>minha</u> opinião, para cálculo de áreas, medidas, volumes, relações matemáticas.
20. Números irracionais são números que não podem ser escritos na forma de fração, pois não tem parte decimal periódica e em muitos casos infinitas. Servem para representar raízes não exatas ou algumas constantes. Ex: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi$
21. Para representar raízes na sua forma mais simples.
22. Para expressar o infinito, o que não se pode contar.
23. São os números cujas dízimas não são periódicas, onde os resultados de uma divisão fracionária resultam em dízimas não periódicas. Por exemplo, temos o π, que serve, entre outras coisas, para calcular o comprimento de uma circunferência.
24. Os números irracionais são os números racionais, os números naturais e os números que contêm, por exemplo, dízimas periódicas ou não e infinitas. Esses números servem para expressar resultados não finitos, ou resultados que se encontram no infinito.
25. São números de complexa representação usados para questões mais detalhadas onde números inteiros ou frações são pouco expressivos.
26. São números os quais não se tem um valor definido, por exemplo: $\sqrt{-4}$ = 2 + i, onde 2 é a parte real do número e i a imaginária. Servem para nos ampliar os horizontes da pesquisa e compreensão de certos fenômenos; para que se tornasse possível descrever todos os números matemáticos e estes possibilitarem a ampliação do desenvolvimento humano.
27. O conjunto dos números irracionais envolvem aqueles números que não possuem raízes exatas, por exemplo $\sqrt{2}$ e servem para explicitar a infinidade de números presentes numa reta por exemplo, tomando um intervalo entre um e outro número natural.
28. Os números irracionais são aqueles que representam os resultados infinitos, isto é, com muitas casas decimais após a vírgula, da divisão de determinados números por dados números. Os irracionais servem para representar números com infinitas casas decimais. Muitos destes números aparecem das diversas aplicações da matemática às outras ciências, como física, química e economia.

29. É um conjunto de números que abrange todos os outros conjuntos só que acrescentando números capazes de serem soluções de operações, expressões e outros, que até então outros conjuntos não tinham capacidade. Eles servem para dar resposta como por exemplo em uma radiciação com um número negativo, ex: $\sqrt{-4}$
30. Não sei explicar o que são números irracionais. Talvez números infinitos que vêm de uma divisão inexata. Eles na prática não têm utilidade. Têm utilidade apenas na parte teórica e abstrata da matemática.
31. Não me lembro o que são direito mas devem ser números negativos ou que ficam dentro da raiz assim como a $\sqrt{3}$. Além de fazer contas não sei mais para o que servem.
32. Servem para mostrar o que ainda não foi mostrado nos outros conjuntos. Cada descoberta na matemática complementa uma anterior.
33. São números inteiros e fracionários positivos ou negativos. Servem para fazer medidas mais precisas.
34. Os números irracionais são números que não podem ser escritos na forma de fração. Os números racionais servem para simplificar a representação das dízimas não periódicas.
35. São números que não podem ser representados por algo concreto, como coleção de bolas. Eles servem para representar, entre outras coisas, sentido de movimento e, numa subtração, quando se retira mais do que se tem, eles representam o que falta.
36. São medidas não exatas por exemplo, de difícil visualização e até de exemplos numéricos e concretos. Servem para várias aplicações.
37. São números positivos ou negativos, todos inteiros. Podem representar elementos indivisíveis que invertem o sentido numa mesma direção.
38. Eles servem para ajudar a resolver problemas envolvendo circunferência (sempre aparecerá π) e tirar raízes de números.
39. Os números irracionais são aqueles que não podem ser representados por frações: as raízes de números como 3, 5 e 6 e o número π, por exemplo. O π serve para trabalhar com circunferências, calcular sua área, perímetro, volume de esferas, etc. Mas na verdade pra que servem as raízes? (quem detesta matemática adora essas perguntas e outras do tipo). Servem para você construir um quadrado bonitinho (entre outras coisas, claro, foi uma brincadeira infeliz). Suponha que você tenha que fazer um quadrado de área 2 km pra construir um shopping geometricamente perfeito – o lado terá que ter $\sqrt{2}$ km.... Suponha que um matemático maluco queira viver numa casa cúbica com 25 m^3 – o lado da casa terá que ter $5\sqrt{5}$ m. Espero que o curso quebre esse meu pequeno preconceito de achar que algumas coisas da matemática não servem pra nada... Espero mesmo embora eu continue amando matemática mesmo que ela não resolva o problema da fome, da guerra, da desigualdade (talvez ela ajude bastante e eu a esteja menosprezando...). E também quem disse que uma coisa só é maravilhosa se servir pra alguma coisa? Se a gente for pensar bem a maioria das coisas que a gente faz não serve pra nada... E a gente não deixa de fazê-las. Tô cansada de ouvir que matemática não serve pra nada, mas isso já é outra discussão.
40. Acho que os números irracionais são as frações irredutíveis, como por exemplo, 10/7, que não possui uma divisão exata e ao reduzi-lo encontramos dízimas periódicas.
41. São números que não são escritos na forma de frações, são chamados de dízimas. Eles servem para dar valores a vários fatores que necessitem de alta precisão, em que todas as casas decimais podem influenciar no resultado.

42. Em branco.

FORMANDOS

1. São números inventados pelos matemáticos para obter soluções para problemas que, só com a existência dos números racionais eles não poderiam ser resolvidos. Por exemplo: qual a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos de medidas iguais a 1? Esse problema não tem solução quando considerados apenas os naturais e os racionais. Na vida prática (ou seja, fora da matemática), os números reais não têm utilização nenhuma. Não conseguimos medir um segmento de comprimento igual a $\sqrt{5}$ por exemplo.
2. Os números irracionais existiram a partir da necessidade do homem, como todos os outros números; como o homem evoluiu, com ele também os números e como no início era só uma necessidade de contar, saber onde tinha mais ou menos; mas com a evolução o homem chegou em números malucos, por exemplo, toda vez que ele fazia o cálculo da circunferência chegava em um valor que era sempre parecido, que chamamos π, e assim outros números; e eles existem para dar exatidão, dar ao homem um sentido de coisas inexplicáveis.
3. São os números que não podem ser escritos na forma fracionária (raízes inexatas, decimais infinitos e não periódicos). Eles estão relacionados à idéia de continuidade da reta real.
4. São números que, como o próprio nome diz, não pode ser racionalizado ou não pode ser escrito como uma fração irredutível. Não há muita serventia para tais números uma vez que para qualquer cálculo é usada sempre uma forma truncada ou aproximada por números, mas apenas para preencher lacunas na formalização matemática, já que dizemos, por exemplo, que uma reta é contínua. Então necessitamos de algo que esteja sempre entre dois números racionais e se não há um terceiro racional entre dois racionais, foi convencionada a existência de no mínimo um irracional. Na verdade este conceito não é um conceito de uso comum, como números naturais, inteiros ou racionais, mas apenas usado para a formalização matemática.
5. Os irracionais também são números que representam medidas. Tais como hipotenusa de triângulo retângulo de cateto 1, a razão do comprimento da circunferência pelo diâmetro, entre uma infinidade de outras. São medidas que desafiam a lógica da maioria das pessoas, mas não deixa de ser números que representam medidas de tamanho.
6. São números que não podem ser obtidos a partir de uma razão de inteiros. Acho que a existência dos irracionais garante a continuidade da reta.
7. Números irracionais são números que não podem ser expressos por uma fração ou razão de dois números. Eles servem para representar medidas, distância. Por exemplo, a diagonal de um quadrado de lado 1, o comprimento de uma circunferência, ou seja, são medidas que não podem ser representadas por números racionais.
8. Números irracionais são aqueles que não possuem representação fracionária. Os decimais não periódicos, raízes não exatas (destes não estou bem certa). Para que servem? Não sei. O π é muito útil.
9. Para passar a idéia de que não existe apenas números naturais e racionais. Entre os naturais e os racionais existem diversos outros números, que não dão noção de contagem nem de fração. Se os irracionais não existissem haveria um enorme buraco entre um inteiro e outro, ou então entre um racional e outro. Falar

sobre para que serve os irracionais é um pouco difícil, pois lidamos com eles freqüentemente e não vemos uma utilidade prática. Com certeza esse é um assunto que gere bastante discussão.

10. São aqueles que não podem ser escritos na forma fracionária p/q. Não sei para que eles servem. Sei que eles existem e dou exemplos: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi,$ e. E sei que foram descobertos a partir de uma crise dos pitagóricos (segmentos de retas incomensuráveis).
11. Número irracional é todo número que não se pode escrever na forma de fração. Apesar de não poder escrevê-los na forma de fração cada número irracional possui uma medida. Exemplo: $\sqrt{2}$ que é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos 1.
12. Irracionais são números que não se pode visualizar através de uma fração mas tem plena utilidade no cálculo de segmentos, cada número não deve ficar preso a um tipo de representação pois possuem suas peculiaridades.
13. Para representar valores que não podem ser medidos, ou seja, o que não é natural nem real.
14. Os números naturais são todos aqueles que não podem ser escritos na forma de fração p/q com q diferente de zero. Seria um número decimal que não contém a parte periódica. Os números irracionais servem para diversos cálculos, como por exemplo o número irracional π.
15. Os números irracionais são todos os números que não são escritos em forma de frações.
16. São aqueles que não podem ser escritos na forma de fração a/b. Eles aparecem quando dividimos duas constantes, por exemplo, o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro, quando tentamos encontrar a diagonal do quadrado de lado 1. Eles servem para representar essas constantes que freqüentemente aparecem.
17. Irracionais para mim são os incomensuráveis e sua utilidade é deixar a reta real contínua.
18. Os números irracionais são comprimentos, medidas que não são mensuráveis, que não têm uma representação exata para o seu valor. Os números irracionais servem para cobrir as lacunas na reta real, espaços que não podem ser representados nem por frações nem por números inteiros, mas que existem.
19. São números que não podem ser escritos na forma p/q com $q \neq 0$. São números com casas decimais infinitas e que não se repetem periodicamente. Algumas coisas na matemática têm seus valores expressos por números reais como, por exemplo, π. Então este número (com o maior número de casas decimais possíveis) ajuda a calcular áreas e comprimentos de circunferências, por exemplo. Mas em comparação com os exemplos que você colocou, de contar coleções de objetos, acho que os irracionais não servem para muita coisa pois não consigo imaginar como contaríamos objetos usando números irracionais (exemplo): eu tenho $\sqrt{2}$ balas ou tenho $\sqrt{3}$ camisas? (Não faz sentido nenhum).
20. Para mim são números que não podemos representar exatamente na forma decimal. São essenciais para completar a reta dos números reais, mas essa é uma visão absolutamente teórica. Em problemas práticos não é difícil ser convencido de que tais números servem para expressar medidas. Por exemplo, sem os irracionais seria impossível expressar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles de cateto 1, bem como encontrar o local deste comprimento na reta dos números reais.
21. Números irracionais para mim são números que satisfazem determinados problemas que não apresentariam soluções entre os racionais, assim como os números negativos explicam problemas sem solução dentro dos números naturais.

22. Os números irracionais, na minha opinião, devem ser introduzidos como sendo os números que expressam medidas de segmentos incomensuráveis com a unidade. Um exemplo clássico e interessante de ser explorado é o do triângulo retângulo isósceles de catetos iguais a 1. É possível demonstrar, em sala de aula da escola básica, que a hipotenusa do tal triângulo é incomensurável com a unidade (medida do cateto), ou seja, que não se pode expressá-la na forma m/n, com m,n pertencentes aos naturais. Esta é uma boa forma de se introduzir os números irracionais. Não com aquele fato que muitos livros trazem de que irracionais são números com representação decimal infinita não periódica. Este fato só deve ser mostrado pelo professor muito depois, e não ser a introdução de números irracionais como muitos autores fazem. Então é assim: introduzir o conceito de irracional relacionando com a história dos segmentos incomensuráveis. Só depois mostrar a propriedade deles: "têm representação decimal infinita e não periódica", tá?
23. Os números irracionais são números que apareceram devido a questão da diagonal do quadrado de lado 1 não poder ser medida. Então os números irracionais são números que representam grandezas que não podem ser medidas. Na vida prática os irracionais não servem para nada, mas matematicamente eles representam a densidade da reta numérica, possibilitando o surgimento e o entendimento de conceitos matemáticos (por exemplo, limite de uma função).
24. Números irracionais são números que não podem ser expressos na forma de razão. Servem, entre outras coisas, para definir medidas não mensuráveis, tal como $\sqrt{2}$ em um triângulo de catetos iguais a 1.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, examinamos uma forma específica de relação entre o processo de formação do professor de matemática na licenciatura e a prática profissional docente na escola básica. Essa forma específica refere-se ao tipo de articulação existente entre os conhecimentos matemáticos (sobre os sistemas numéricos) veiculados no curso diurno de licenciatura em matemática da UFMG e as questões que se colocam para o professor no trabalho com o tema, dentro da prática docente escolar. Nosso estudo se insere, assim, em um conjunto de pesquisas que procuram compreender a natureza das conexões (e desconexões) que se estabelecem entre o processo de formação do professor e a prática profissional na escola básica.

O processo de formação na licenciatura em matemática pode se articular com a prática docente escolar de diferentes formas e em diversos sentidos. O licenciado volta à escola, agora na condição de professor, de posse de conhecimentos, crenças e concepções (sobre a matemática, seu ensino e aprendizagem) que constituem saberes e não-saberes *novos* em relação aos que possuía quando completou a escolarização básica e iniciou seu processo de formação universitária. Esses saberes e não-saberes são novos porque, ao longo dos anos que separam o término da formação escolar e o início da vida profissional, os anteriores foram, de uma maneira ou de outra, examinados, reformulados, ampliados, re-valorizados, criticados, re-elaborados, transformados, substituídos e, talvez, até esquecidos ou abandonados. Em princípio, a inserção do licenciado na atividade profissional docente — subjetividades que se situam diante das condições objetivas da prática — pode se dar, num extremo, *contra* esses novos saberes, em intenso conflito com eles ou, no outro extremo, de forma inteiramente harmonizada, uma passagem contínua e suave da formação à prática. Nesse sentido, a formação *sempre* se articula com a prática e, no limite, até mesmo uma imensa lacuna entre os dois processos pode ser vista como uma forma de articulação. É claro que nenhuma das duas formas extremas (e improváveis) é desejável. A primeira por razões óbvias e a segunda porque desejá-la pressupõe uma aceitação incondicional dos valores, das condições de exercício, dos processos e dos resultados da prática docente escolar, nos termos em que ela efetivamente se realiza. Essa aceitação parece estar longe de um consenso, no cenário atual. Assim, é possivelmente em alguma região intermediária do espectro delimitado pelos dois extremos mencionados que se situam, de fato, as conexões e desconexões entre os conhecimentos matemáticos veiculados na licenciatura e aqueles associados à prática docente na escola básica. O estudo que desenvolvemos teve como objetivo situar mais precisamente essa região e entender mais profundamente as desconexões existentes. As duas questões de pesquisa que nos propusemos responder foram:

(A) *Que tipo de conhecimento matemático, a respeito dos sistemas numéricos, é veiculado no processo de formação do professor na licenciatura em matemática da UFMG?*

(B) *Que questões, referentes ao trabalho com os sistemas numéricos, se colocam para o professor de matemática na prática docente escolar e que conhecimentos estão fundamentalmente envolvidos na ação pedagógica associada ao tratamento escolar dessas questões?*

Nossas respostas a essas questões encontram-se nos capítulos II e III deste trabalho. O Capítulo III contém também uma análise das relações entre as duas respostas. Trata-se, mais precisamente, do seguinte: a nossa resposta à segunda questão de pesquisa é construída no desenvolvimento de um confronto dos conhecimentos da formação com as questões que se colocam para o professor na prática docente escolar. No Capítulo IV complementam-se, de certa forma, as análises desenvolvidas no Capítulo III: relatamos uma pesquisa empírica cujos resultados são convergentes com as conclusões dessas análises.

Temos dito que desconexões são formas de articulação. Uma vez que certas questões não são discutidas no processo de formação — como exemplificamos extensivamente no Capítulo III — os licenciados, no exercício da prática docente escolar, se vêem diante do problema de desenvolver sua ação pedagógica em sala de aula a partir de uma formação que não lhes proporcionou acesso a essa discussão. Qualquer solução que se adote na prática incorporará, de alguma forma, essa falha de formação, ainda que ela não implique necessariamente uma dificuldade incontornável. O problema é que, ao não se discutir essas questões na licenciatura, interrompe-se um fluxo de saberes que, tendo sua origem no estudo de dificuldades associadas ao exercício da própria prática docente escolar, a ela retornaria através do processo de preparação profissional para essa prática. A interrupção desse fluxo acaba aprofundando o fosso entre duas instâncias importantes de formação docente: a licenciatura e a prática na escola.

Por outro lado, uma apresentação hiper-valorizada do conhecimento matemático acadêmico — na sua forma compacta, abstrata e formal, exemplificada e contrastada com as formas do saber escolar no Capítulo III — pode reforçar certos tipos de dificuldades que o professor vai eventualmente encontrar em sua prática efetiva. Essas dificuldades referem-se à identificação e ao reconhecimento de um conjunto de questões e formas de saber/não-saber que se distanciam das formas próprias da matemática acadêmica, mas que são cruciais na educação básica porque se vinculam de modo fundamental ao processo de construção escolar do saber matemático. A dificuldade do professor em reconhecer essas questões como importantes na prática pedagógica pode inibir o desenvolvimento de uma reflexão mais profunda sobre elas, na condição de profissional docente.

A hiper-valorização da matemática acadêmica no processo de formação pode estimular ainda o desenvolvimento de concepções e valores que, muitas vezes, dificultam a comunicação do professor com os alunos e a própria gestão da matéria em sala de aula. Um dos exemplos que se explicitaram no Capítulo IV refere-se ao seguinte: o recém-licenciado, sem alternativas para justificar um determinado resultado matemático senão a prova formal e reconhecendo esta como inviável na prática escolar, pode ser levado a reduzir a argumentação a um exame de vários exemplos numéricos, sem outro recurso de convencimento a não ser a indução da crença de que, sendo verificado em "muitos" casos particulares, o resultado deve ser válido em geral.

Uma síntese bastante compacta do presente trabalho pode ser enunciada nos seguintes termos: dentre as várias formas de distanciamento que normalmente se estabelecem entre o processo de formação inicial do professor de matemática e a prática docente escolar, constatamos, na licenciatura diurna da UFMG, uma forma específica que se refere ao fato de que os conhecimentos matemáticos sobre os sistemas numéricos trabalhados no processo de formação não se ajustam ao tratamento escolar de uma série de questões importantes que se apresentam ao professor em sua prática docente. A identificação do aspecto característico dessa forma específica constitui a conclusão geral do nosso estudo: *o conhecimento matemático é trabalhado no processo de formação a partir da perspectiva e dos valores da matemática acadêmica, ignorando-se importantes questões escolares que não se ajustam a essa perspectiva e a esses valores.* Diante disso, coloca-se claramente a necessidade de um redimensionamento da formação matemática na licenciatura, de modo a equacionar melhor os papéis da matemática científica e da matemática escolar nesse processo. Essa é, a nosso ver, a implicação imediata deste trabalho para o processo de formação inicial do professor de matemática da escola básica.

É claro que o nosso estudo — e, portanto, o alcance de suas conclusões — tem limitações importantes que precisam ser mencionadas. Em primeiro lugar, restringimo-nos a um tema (números) que, embora fundamental na educação matemática básica, constitui apenas uma parte do currículo escolar. Coloca-se, naturalmente, a necessidade de se examinar as nossas questões de pesquisa, a partir da seleção de outros temas relevantes e abrangentes da matemática escolar como, por exemplo, funções e geometria plana. Em segundo lugar, tomamos como referência para a coleta de dados relativa aos conhecimentos matemáticos veiculados no processo de formação o curso diurno de licenciatura em matemática da UFMG.

Seria interessante verificar como essas mesmas questões de pesquisa podem ser respondidas, quando examinadas em relação a outras licenciaturas e em que medida nossas conclusões se mantêm essencialmente válidas. Esses dois pontos referem-se diretamente a limitações do trabalho que nos sugerem certa cautela na generalização das conclusões.

É comum, por outro lado, o questionamento de determinadas análises críticas na medida em que não propõem alternativas. Nesse sentido, outro ponto que pode ser visto como uma limitação deste estudo refere-se ao fato de que ele não contém uma proposta alternativa de desenvolvimento da formação matemática no curso de licenciatura. Embora fosse possível explicitar alguns elementos propositivos, consideramos que seria precoce e especulativa qualquer sugestão nessa direção. O problema é que nosso estudo, pelo objeto focalizado e pela perspectiva adotada, ainda constitui ponto mais ou menos isolado no universo das pesquisas sobre formação de professores e, portanto, necessita do desenvolvimento de estudos paralelos que venham a complementá-lo, seja através da crítica e da divergência, seja pela convergência ou aprofundamento dos resultados. Dessa forma, poderemos situar melhor e avaliar mais precisamente a perspectiva geral que esta pesquisa abre para a análise do processo de formação do professor de matemática e as possibilidades de se propor uma re-estruturação da licenciatura com base nesses resultados.

Gauthier e seus colaboradores, na conclusão do livro *Por uma Teoria da Pedagogia*, referem-se a uma carta de Gilles Deleuze a Arnaud Villani, em que Deleuze diz que só se escreve um livro digno se: (1) julga-se que os livros sobre o assunto se encontram todos numa espécie de erro global; (2) avalia-se que algo de essencial foi esquecido sobre o assunto; (3) imagina-se que se é capaz de criar um novo conceito. Adotando os parâmetros de Deleuze, os pesquisadores canadenses concluem o relato de sua importante investigação sobre os saberes profissionais docentes, explicitando que erro quiseram combater, que esquecimento pretenderam reparar e que conceito novo tiveram que criar. Embora a nossa pesquisa seja, verdadeiramente, bem mais modesta, entendemos que é possível apontar os três elementos que, segundo os critérios de Deleuze, a qualificariam como "digna". É claro que esse exercício é também interessante no sentido de situar o nosso trabalho em relação a outros estudos sobre o mesmo tema ou sobre temas conexos.

Em primeiro lugar indicaremos não um erro global de todas as outras pesquisas sobre o assunto, mas determinadas limitações a que conduzem, no nosso entendimento, alguns dos pressupostos freqüentemente nelas implícitos. São muitas as concepções que servem de base a análises da prática dos professores de matemática da escola, focalizando o conjunto dos seus saberes profissionais, mas em grande parte delas, o conhecimento matemático — na acepção que, neste trabalho, temos denominado *matemática acadêmica* ou *matemática científica* — é tomado como o saber fundamental, aquele a partir do qual os outros saberes associados ao exercício da profissão passam a fazer sentido. De modo geral, o saber profissional docente é decomposto em componentes, de tal forma que um deles, o chamado *conhecimento da disciplina*, assume naturalmente a condição de essencial. Os outros componentes, ainda que reconhecidos como saberes complexos e extremamente importantes na ação do professor da escola, acabam por configurar um conjunto de conhecimentos de caráter basicamente acessório ao processo de transmissão do saber disciplinar. Decomposta dessa forma, a matemática escolar costuma se reduzir à parte elementar e simples da matemática acadêmica e a complexidade do saber profissional docente vai se localizar em conhecimentos considerados de natureza essencialmente não matemática. Dessa perspectiva, a construção de vínculos substantivos da formação com a prática é vista como uma tarefa a ser executada basicamente no *exterior* da formação matemática. A esta caberia, fundamentalmente, promover o aprofundamento do componente disciplinar dos saberes profissionais do professor, o que significaria, então, ultrapassar a matemática escolar, isto é, a forma elementar do conhecimento matemático, apresentando ao licenciando a forma avançada e profunda desse conhecimento, ou seja, a matemática acadêmica.

Talvez se possa referir, ainda hoje, a uma tradição que eventualmente se tornou senso comum e que se mantém, explicitamente ou não, nos pressupostos de grande parte da pesquisa sobre a formação do professor de matemática da escola básica. De acordo com essa visão tradicional do saber docente, em primeiro lugar "*o professor tem que saber aquilo que vai ensinar*" e, em segundo, "*o professor tem que saber <u>mais</u> do que aquilo que ensina*". As expressões "*aquilo que vai ensinar*" e "*mais do que aquilo que ensina*", quando se referem ao "conteúdo matemático", postulam que o professor da escola precisa conhecer seu objeto de trabalho da maneira como o matemático profissional o conhece, ou seja, que o conhecimento da matemática acadêmica é necessário ao exercício da profissão docente na escola. O avanço na análise dos saberes profissionais do professor se reduz, muitas vezes, a explorar os caminhos que se abrem a partir da recusa de que esse tipo de conhecimento seja, também, suficiente.

No desenvolvimento do nosso trabalho, consideramos necessário e conveniente construir uma outra perspectiva, uma que nos permitisse compreender mais profundamente *o que o futuro professor de matemática da escola vai ensinar*, que tipo de questões referentes ao conhecimento matemático ele encontra no seu trabalho docente e que significado se pode atribuir, em termos da prática escolar, à expressão "o professor precisa saber mais do que aquilo que ensina". Em outras palavras, uma perspectiva que nos permitisse estudar o processo de formação e a prática docente escolar e investigar como os conhecimentos matemáticos da formação se conectam (ou não) aos conhecimentos matemáticos envolvidos nas questões que se colocam para o professor na prática profissional na escola básica.

Para realizar o trabalho a partir dessa perspectiva diferenciada, fomos levados a distinguir a matemática escolar da matemática acadêmica. Essa distinção, elaborada no Capítulo I, foi importante no desenvolvimento do estudo na medida em que permitiu pensar o conhecimento matemático do professor da escola de forma global e integrada, sem nos submetermos à decomposição usual. Essa decomposição, ao que nos parece, acaba hierarquizando os componentes e submergindo neles, como peças separadas de um quebra-cabeça, elementos importantes do saber matemático associado ao trabalho docente escolar. Como já comentamos, uma das conseqüências disso é que a análise das formas de articulação dos conhecimentos da formação com a prática costuma ficar "presa" aos outros componentes do saber docente, deixando de fora o componente "conhecimento disciplinar". Aí chegamos ao segundo e terceiro parâmetros indicados por Deleuze. O conhecimento matemático veiculado no processo de formação fica freqüentemente "esquecido" como objeto de investigação (foi esse *esquecimento* que quisemos reparar) e a formação matemática na licenciatura fica liberada de um exame crítico investigativo e da obrigação de buscar uma articulação intrínseca com a prática docente escolar. Foi para evitar esse tipo de circularidade metodológica e "libertar" a análise dessa espécie de rota pré-determinada, que achamos conveniente trabalhar com o conceito de matemática escolar da forma como o apresentamos no Capítulo I e explicitar seus elementos distintivos em relação à matemática acadêmica. Isso responde pelo *conceito que tivemos de criar*, nos termos de Deleuze. Neste caso, a distinção entre matemática escolar e matemática acadêmica se coloca como uma estratégia básica, com conseqüências práticas imediatas no contexto da pesquisa que realizamos. No bojo dessa distinção constituiu-se o nosso objeto de investigação de maneira que a sua face oculta ou esquecida se voltasse para nós e pudesse, assim, ser examinada.

Uma das conseqüências da distinção que propusemos refere-se às possibilidades de organização e sistematização do conhecimento matemático associado à prática docente escolar. A axiomática é, como se sabe, uma forma de organização do conhecimento matemático científico que acabou se impondo historicamente e que, apesar dos problemas filosóficos aos quais remete, tem se mostrado eficiente e sedutora. Entretanto, serve a propósitos específicos que, ao que nos mostra este trabalho, nem sempre se coadunam com os objetivos de organização dos saberes dentro da matemática escolar. Especificamente, pudemos perceber, ao longo das análises desenvolvidas no Capítulo I e no Capítulo III, que a matemática escolar simplesmente não "cabe" na forma axiomática de organização do conhecimento matemático. Para nós, no entanto, esse reconhecimento não deve ser visto como uma desilusão, mas como um importante desafio: será possível organizar e sistematizar o conhecimento matemático escolar obedecendo a critérios e valores específicos da prática e da cultura escolar? Em que medida essa sistematização rejeitaria ou acomodaria a formulação axiomática vigente na matemática científica? Por ser usualmente percebida como parte elementar da matemática acadêmica, a matemática escolar tem sido condenada a se ver como um conjunto de conhecimentos que seriam sistematizáveis apenas na forma da axiomática científica. O que se considera como inevitável é que, fora desse tipo de organização, ela se pulveriza num amontoado de fatos desconexos, isolados das regras operacionais e sem justificativas. Por outro lado, o preço a pagar pela sua sistematização no interior da matemática acadêmica é o de se ter marginalizada, ou simplesmente ignorada, uma enorme quantidade de formulações, concepções e valores que são fundamentais à sua dinâmica de desenvolvimento. Além disso, há ainda o problema de que, organizado nessa forma, o saber matemático perde, também, a relação de pertinência com a prática docente e a cultura escolar. Assim, a necessidade e a possibilidade de alguma forma de organização estrutural do conjunto de saberes constituintes da matemática escolar — reconhecida em sua plenitude, diferenciada da matemática acadêmica e retirada da camisa de força da axiomática — se põem à comunidade interessada no estudo da prática docente escolar como um genuíno problema de pesquisa, relevante e desafiador.

Saramago, em *Manual de Pintura e Caligrafia*, escreve: "*se quisermos procurar uma coisa, teremos de levantar as tampas (ou pedras, ou nuvens, mas vá por hipótese que são tampas, que a escondem). [...] creio que não valeremos muito como artistas (e, obviamente como homem, como gente, como pessoa) se, encontrada por sorte ou por trabalho a coisa procurada, não continuarmos a levantar o resto das tampas, a arredar as pedras, a afastar as nuvens [...] Lembremos que a primeira coisa pode ter sido ali posta apenas para nos distrair da segunda.*"

No caso deste nosso estudo, se tivermos efetivamente encontrado alguma "coisa" daquelas a que nos propusemos procurar, terá sido, certamente, mais *por trabalho* do que *por sorte*. Ainda assim, seguramente, restam tampas por levantar, pedras por arredar, nuvens por afastar, se quisermos conhecer mais profundamente a formação matemática na licenciatura e suas relações com a prática docente escolar. Nesse sentido, algumas questões se colocam como um possível desdobramento ou prolongamento deste trabalho. Por exemplo, restringimo-nos aqui a uma descrição do conhecimento matemático que é objeto de trabalho no curso de licenciatura, ou seja, aquilo que é, de certa forma, concebido como o saber necessário (do ponto de vista do processo de formação) aos futuros professores da escola básica. Um estudo mais amplo, um prolongamento deste, poderia acrescentar elementos que se refiram ao *modo como efetivamente se desenvolve* o processo de formação, em termos da análise direta da ação pedagógica do professor da licenciatura em sala de aula, da identificação e análise daquilo que é priorizado nas avaliações, do papel das interações dos licenciandos entre si e dos licenciandos com o professor na construção do conhecimento e no processo de aprendizagem na própria licenciatura, da análise do discurso (sobre a matemática, seu ensino e aprendizagem) que se veicula na licenciatura etc. Tais estudos complementariam o nosso numa determinada direção e indicariam, potencialmente, outras formas específicas de conexões e desconexões do processo de formação com a prática escolar.

Neste trabalho investigamos as relações entre os conhecimentos matemáticos da formação e aqueles envolvidos nas questões que se colocam para o professor da escola em sua prática docente. Nosso referencial constituiu-se a partir da constatação de que a matemática escolar não está contida na matemática acadêmica e que elas possuem, de fato, elementos distintivos marcantes, discutidos no Capítulo I. No entanto, pode-se pensar na questão em termos dos elementos de similaridade ou complementaridade entre essas duas faces do conhecimento matemático e, até mesmo, em termos da possibilidade de adaptação de certos aspectos da prática profissional do matemático ao trabalho do professor de matemática na sala de aula da escola básica. Assim, uma série de afirmações que têm sido tomadas, subliminarmente, como verdades inquestionáveis e que são pressupostos implícitos em diversos trabalhos de pesquisa passam, quando vistas a partir da perspectiva desenvolvida neste estudo, a compor uma lista de questões de investigação importantes para a formação do professor. Algumas delas seriam: em que medida e de que maneira concreta o conhecimento da matemática, na forma e valores associados à matemática acadêmica, poderia contribuir efetivamente para o desempenho profissional no trabalho docente na escola básica? Em que medida ou a partir de quais características o processo de construção da matemática científica pelos matemáticos profissionais poderia servir de modelo para o desenvolvimento de práticas educativas escolares em matemática? Seria possível e/ou adequado, “transferir” para a matemática escolar certas práticas e posturas associadas ao trabalho científico de investigação na fronteira do conhecimento matemático acadêmico? Que tipo de re-contextualização essas “transferências” demandariam? Qual seria o dimensionamento adequado e os papéis respectivos da matemática científica e da matemática escolar no processo de formação matemática na licenciatura? Essas questões poderiam compor um programa de pesquisa complementar ao nosso trabalho e seus resultados constituiriam certamente uma importante contribuição para o aprofundamento da visão atual sobre os saberes profissionais dos professores e sobre o processo de formação matemática nos cursos de licenciatura.

REFERÊNCIAS

APOSTOL, T.M. (1975) *Mathematical Analysis*. Reading: Addison-Wesley.

BALDINO, R.R.; CABRAL, T.C.B. (1999) Erro do significado ou significado do erro? *Boletim Gepem*, n.35, p. 9-41.

BIGODE, A.J.L. (1995) *Matemática Atual* 5ª série. São Paulo: Atual.

BALL, D.L. (1990) The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal,* v.9, n.4, p. 449-466.

BALL, D.L.; COMITI, C. (1996) Preparing teachers to teach mathematics: a comparative perspective. In: BISHOP, A.; CLEMENTS, K.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LABORDE, C. (eds) *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer, p.1123-1154.

BAROODY, A. (1987) *Children´s Mathematical Thinking*. NY: Teachers College Press.

BARTLE, R. (1964). *The Elements of Real Analysis*. NY: J. Wiley.

BECKER, J.; JACOB, B. (2000) The politics of California school mathematics: the anti-reform of 1997-99. *Phi Delta Kappan*, v.81, n.7, p.529-537.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. (1983) Rational-Number Concepts. In LESH, R.; LANDAU, M. (eds) *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*. Orlando: Academic Press, p.91-126.

BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T.R. LESH, R. (1992) Rational number, ratio and proportion. In: GROWS, D. (ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NY: MacMillan, p. 296-333.

BERTONI, N. (1995) Formação do professor: concepção, tendências verificadas e pontos de reflexão. *Temas e Debates*, n. 7, p. 8-15.

BEZUK, N.S.; BIECK, M. (1992) Current research on rational numbers and common fractions: summary and implications for teachers. In: OWENS, D.T. (ed) *Research ideas for the classroom*: middle grades mathematics. NY: MacMillan, p. 118-136.

BLANTON, M.L. (2002) Using an undergraduate geometry course to challenge preservice teachers' notions of discourse. *Journal of Mathematics Teacher Education,* n.5, p.117-152.

BIRKHOFF, G.; MACLANE, S. (1980) *Álgebra Moderna Básica*. RJ: Guanabara 2.

BORASI, R. (1985) Using errors as springboards for the learning of mathematics: an introduction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v.7, n.3-4, p.1-14.

BRASIL (2001). Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena*. Brasília.

BRASIL (2003). Ministério da Educação. *Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura*. Brasília.

BRASIL (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental, Matemática. Brasília.

BRAGA, M. M. (1988) A licenciatura no Brasil: um breve histórico sobre o período 1973-1987. *Ciência e Cultura,* 40 (2): 151-157.

BROMME, R. (1994) Beyond subject matter: a psychological topology of teachers' professional knowledge. In: BIEHLER, R.; SCHOLZ, R.; STRÄSSER, R.;WINKELMANN, B. (eds) *Didactics of Mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer, p.73-88.

BROUSSEAU, G. (1997) *The theory of didactical situations in mathematics.* Editado e traduzido para o inglês por Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R., Warfield, V. London: Kluwer.

BROWN, M. (1981a) Place Value and Decimals. In: HART, K. (ed) *Children´s Understanding of Mathematics*: 11-16. London: John Murray, p.48-65.

BROWN, M. (1981b) Number Operations. In: HART, K. (ed) *Children´s Understanding of Mathematics:* 11-16. London: John Murray, p.23-47.

BROWN, V. (1996) Third graders explore multiplication. In: SCHIFTER, D. (ed) *What's happening in math class?* Envisioning new practices through teacher narratives. NY: Teachers College Press, p.18-24.

BRZEZINSKI, I. (1996) Formação de professores - Concepção básica no movimento de reformulações curriculares. In: BRZEZINSKI, I. (org) *Formação de Professores*: um desafio. Goiânia: UCG, p.13-28.

CARAÇA, B.J. (1975) *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa.

CARNEIRO, V. C. (2000) Mudanças na formação do professor de matemática: um estudo de caso. *Zetetiké*, v.8, n.13/14, p.81-116.

CARPENTER, T.P.; CORBITT, M.K.; KEPNER JR, H.S.; LINDQUIST, M.M.; REYS, R. (1980) Results of the second NAEP mathematics assesment: secondary school. *Mathematics Teacher,* 73(5) p. 329-338.

CARPENTER, T.P.; TERRENCE, G.C.; REYS, R.E.; WILSON, J.W. (1976) Notes from National Assesment: addition and multiplication with fractions. *Arithmetic Teacher*, 23, p.137-142.

CARPENTER, T.P.; MOSER, J.M. (1983) The Acquisition of Addition and Subtraction Concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (eds). *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*. Orlando: Academic Press, p.7-44.

CARVALHO A. M. P. (1988) O currículo do curso de licenciatura: realidade, diretrizes e problemas. In: CARVALHO, A.M.P. (coord.) *A Formação do Professor e a Prática de Ensino*. São Paulo: Pioneira, p.19-23.

CHAZAN, D. (1993) High School geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics,* n.24, p.359-387.

CHERVEL, A. (1990) História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, n.2, p.177-229.

CHEVALLARD, Y. (1991) *La Transposición Didáctica*: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique.

CORNU, B. (1991) Limits. In: TALL, D. (ed) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, p.153-166.

COURANT, R.; ROBBINS, H.(1994) *Que es la matematica?* Madrid: Aguilar.

CURY, H. N. (1994) *As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos*. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre.

CURY, H.N. (1995) Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática. *Zetetiké*, v.3, n.4, p.39-50.

CURY, H.N. (2003) Análise de erros e análise de conteúdo: subsídios para uma proposta metodológica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2003, Santos. Anais... São Paulo: SBEM. CD-ROM.

DAVID, M.M.M.S.; MACHADO, M.P.L. (1996) Como alguns procedimentos de ensino estão contribuindo para o erro e o fracasso em matemática. *Educação e Matemática*, n.40, p.25-29.

DAVID, M.M.M.S.; FONSECA, M.C.F.R. (1997) Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. *Presença Pedagógica*, v.3, n.14, p.55-67.

DICKSON, L.; BROWN, M.; GIBSON, O. (1993) *Children Learning Mathematics*: A teachers guide to recent research. London: Schools Council Publications.

DIEUDONNÉ, J. (1990) *A Formação da Matemática Contemporânea*. Lisboa: Dom Quixote.

DINIZ-PEREIRA, J. E. (2000) *Formação de professores*: pesquisas, representações e poder. Belo Horizonte: Autêntica.

DOMINGUES, H. (1991) *Fundamentos de Aritmética*. São Paulo: Atual.

DOUEK, N. (1999) Argumentative aspects of proving: analysis of some undergraduate mathematics students' performances. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF PME 23, 1999, Haifa, Israel. *Proceedings*...v.2, p.273-280.

DREYFUS, T; VINNER, S. (1989) Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 20, n. 4, p. 336-356.

DRUCK, S. (2003) O drama do ensino da matemática. Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u343.shtml Acesso em: 31 de julho de 2004.

DUBINSKY, E. (1991) Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, p.95-126.

ERNEST, P. (1991) The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In: ERNEST, P. (ed) *Mathematics teaching*: The State of the Art. London: The Falmer Press, p.249-254.

EVEN, R.; TIROSH, D. (1995) Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject-matter. *Educational Studies in Mathematics*, 29, p.1-20.

FARIA, P.C. (1996) A Formação do Professor de Matemática: Problemas e Perspectivas. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, UFPR, Curitiba.

FERREIRA, A.C.; LOPES, C.A.E.; FIORENTINI, D.; JARAMILO, D.; MELO, G.F.A.; CARVALHO, V.; SANTOS-WAGNER, V.M. (2000) Estado da arte da pesquisa brasileira sobre formação de professores que ensinam matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1, 2000, Serra Negra. *Anais*... São Paulo: SBEM, p.264-271.

FIGUEIREDO, D.G. (1975) *Análise I*. Rio de Janeiro: LTC/UnB.

FIORENTINI, D. (2003) Estado da arte da pesquisa brasileira sobre formação de professores que ensinam matemática. In: SEMINÁRIO SOBRE LICENCIATURAS, 2003, Salvador. *Atas*...Disponível em http://www.sbem.com.br/licenciatura.html Acesso em: 31 de julho de 2004.

FIORENTINI, D.; NACARATO, A..; PINTO, R. (1999) Saberes da experiência docente em matemática e educação continuada. *Quadrante*, v.8, n.1/2, p. 33-60.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A. (orgs) (2001) *Por trás da porta, que matemática acontece?* Campinas: Unicamp.

FIORENTINI, D.; JIMENEZ, A. (orgs) (2003) *Histórias de aulas de matemática*: compartilhando saberes profissionais. Campinas: CEMPEM.

FISHBEIN, E.; TIROSH, D.; HESS, P. (1979) The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10, p.3-40.

FISHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. (1995) The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 29, p.29-44.

FREUDENTHAL, H. (1973) *Mathematics as an educational task*. Dordrecht-Holland: D. Reidel Publishing Company.

FUSON, K.C. (1992) Research on whole number addition and subtraction. In: GROWS, D. (ed). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NY: MacMillan, p.243-275.

GARNICA, A.V.M. (1996) Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática. *Zetetiké*, v.4, n.5, p.7-28.

GARNICA, A.V.M.; MARTINS, R.M. (1999) Avaliação de um projeto pedagógico para a formação de professores de matemática: um estudo de caso. *Zetetiké*, v.7, n.12, p.51-74.

GARNICA, A.V.M.; FERNANDES, D.N. (2002) Concepções de professores formadores de professores: exposição e análise de seu sentido doutrinário. *Quadrante*, v.11, n.2, p.76-98.

GAUTHIER, C.; MARTINEAU, S.; DESBIENS, J.F.; MALO, A.; SIMARD, D. (1998) *Por uma teoria da pedagogia*: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente. Ijuí: Unijuí.

GENTIL, N.; MARCONDES, C.A.; GRECO, A.C.; BELLOTTO, A.; GRECO, S.E. (1997) *Matemática para o 2º grau* (volume 1). São Paulo: Ática.

GIOVANNI, J.R.; CASTRUCCI, B; GIOVANNI JR, J.R. (1998) *A Conquista da Matemática* 5. São Paulo: FTD.

GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI JR, J.R. (2000a) *Matemática*: Pensar e Descobrir 7. São Paulo: FTD.

GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI JR, J.R. (2000b) *Matemática*: Pensar e Descobrir 5. São Paulo: FTD.

GIOVANNI, J.R.; PARENTE, E. (1999) *Aprendendo Matemática 7*. São Paulo: FTD.

GOMES, M. L. M. (1997) Matemática e Escola: uma experiência integradora na Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais. *Zetetiké*, v. 5, n. 7, p.95-109.

GOODSON, I. F. (1998) *Currículo*: Teoria e História. Petrópolis: Vozes.

GRAEBER, A.O. (1993) Mathematics and the reality of the student: bringing the two together. In: DAVIS, R.B. AND MAHER, C.A. (eds.) *Schools, Mathematics and the world of reality*. Boston: Allin and Bacon, p.213-236.

GRAEBER, A.O.; TANENHAUS, E. (1992) Multiplication and division: from whole numbers to rational numbers. In: OWENS, D.T. (ed) *Research ideas for the classroom*: middle grades mathematics. NY: MacMillan, p. 99-117.

GREER, B. (1992) Multiplication and division as models of situations. In GROWS, D. (ed) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NY: MacMillan, p.276-295.

GROSSMAN, P. (1990) *The making of a teacher*: teacher knowledge and teacher education. NY: Teachers College Press.

GRUPO DE ÁLGEBRA (1988) *Fundamentos de Álgebra*. Belo Horizonte: Departamento de Matemática, ICEX-UFMG. Mimeografado.

HAMBURGER, A. I. (1983) Alguns dilemas da licenciatura. Ciência e Cultura, 35(3), p.307-313.

HART, K. (1981a) Fractions. In: HART, K. (ed) *Children´s Understanding of Mathematics*: 11-16. London: John Murray, p.66-81.

HART, K. (1981b) Implications for teaching. In: HART, K. (ed) *Children´s Understanding of Mathematics*: 11-16. London: John Murray, p. 208-217.

HART, K. (ed) (1981c) *Children´s Understanding of Mathematics*: 11-16. London: John Murray.

HERSTEIN, I. N. (1970) *Tópicos de Álgebra*. São Paulo: Edusp/Polígono.

HIEBERT, J.; WEARNE, D. (1986) Procedures over concepts: the acquisition of decimal number knowledge. In: HIEBERT, J. (ed) *Conceptual and procedural knowledge*: the case of mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, p. 199-223.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. (1995) *Matemática e Realidade* 5ª série. São Paulo: Atual.

IGLIORI, S.; SILVA, B. (1998) Conhecimento de concepções prévias dos estudantes sobre números reais: um suporte para a melhoria do ensino aprendizagem. In: XXII REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 22, 1998, Caxambu, MG. *Anais*...Rio de Janeiro: Anped, GD19, CD-ROM.

IMENES, L.M.; LELLIS, M. (2002) *Matemática para todos* 8ª série. São Paulo: Scipione.

IMENES, L.M.; LELLIS, M. (1998) *Matemática para todos* 5ª série. São Paulo: Scipione.

JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. (1995) *Matemática na medida certa* 7ª Série. São Paulo: Scipione.

JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. (1998) *Matemática na medida certa* 5ª Série. São Paulo: Scipione.

JULIÁ, D. (2002) Disciplinas escolares: objetivos, ensino e apropriação. In: LOPES, A.C.; MACEDO, E. (orgs). *Disciplinas e Integração Curricular*: História e Políticas. Rio de Janeiro: DP&A, p.37-71.

KIEREN T. E. (1976) On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, R. (ed) *Number and measurement*: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, p.101-144.

KLINE, M. (1974) *Why Johnny can´t add*: the failure of the new math. New York: Random House.

KNIGHT, F.B. (1930) Some considerations of method. In: WHIPPLE, G.M. (ed.) *The Twenty-Ninth Yearbook of the National Society For The Study Of Education*. Illinois: Public School Publishing, p. 145-267.

KOGA, M.T. (1998) *Uma análise do discurso de alguns professores de cálculo diferencial e integral no curso de licenciatura em matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). IGCE, UNESP, Rio Claro.

LANDAU, E. (1951) *Foundations of Analysis*: The arithmetic of whole, rational, irrational and complex numbers. NY: Chelsea Publishing Company.

LANG, S. (1972) *Estruturas Algébricas*. RJ: Ao Livro Técnico.

LEINHARDT, G. (1989) Math lessons: a constrast of novice and expert competence. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (1), p.52-75.

LEINHARDT, G. (1988) Expertise in instructional lessons: an example from fractions. In: GROWS, D.; COONEY, T.J. (eds) *Effective mathematics teaching*. Reston, VA: Lawrence Erlbaum, p.47-66.

LEINHARDT, G.; SMITH, D.A. (1985) Expertise in mathematics instruction: subject matter knowledge. *Journal of Educational Psychology*, v.77, n.3, p. 247-271.

LEITHOLD, L. (1982) *O Cálculo com Geometria Analítica* (v. I). São Paulo: Harbra.

LIMA, E.L. (1976) *Curso de Análise*. RJ: IMPA/CNPq.

LIMA, E.L. (1989) *Análise Real*. RJ: IMPA/CNPq.

LINS, R. (2003) Os problemas da Educação Matemática. Disponível em http://www1.folha.uol.com.br/folha/sinapse/ult1063u385.shtml. Acesso em: 31 de julho de 2004.

LLINARES, S. (1999) Conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas. Características de una agenda de investigación. *Zetetiké*, v.7, n.12, p.9-36.

LLINARES, S. (1998) Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, n.17, p.51-63.

LLINARES, S. (1995) Del conocimiento para la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza. In: BLANCO L.; MELLADO, V. (orgs) *La formación de profesores de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal*. Badajoz: Diputación de Badajoz, p.153-172.

LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V. (1996) Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de Primária. In: JIMÉNEZ, J.; LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V. (coord.) *El proceso de llegar a ser un profesor de primária*. Cuestiones desde la Educación Matemática. Granada: Comares, p.94-118.

LÜDKE, M. (1994) *Formação de docentes para o ensino fundamental e médio*: As Licenciaturas. Rio de Janeiro: CRUB.

LÜDKE, M.; GOULART, S.M. (1996) Licenciatura: novos caminhos pela via da interdisciplinaridade. In: BRZEZINSKI, I. (org.) *Formação de professores*: um desafio. Goiânia: UCG, p.29-44.

MA, L. (1999) *Knowing and teaching elementary mathematics*: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. NJ: Lawrence Erlbaum.

MARKS. R. (1990) Pedagogical content knowledge: from a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education*, v.41, n.3, p.3-11.

MAURER, S.B. (1987) New Knowledge about errors and new views about learners: what they mean to educators and more educators would like to know. In: SCHOENFELD, A.H. (ed) *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, p.165-187.

MIGUEL, A. (1993) *Três estudos sobre História e Educação Matemática*. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas.

MILIES, C.P.; COELHO, S.P. (1998) *Números:* uma introdução à Matemática. São Paulo: Edusp.

MONAGHAN, J. (2001) Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 48, p.239-257.

MONTEIRO, L.H.J. (1969) *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico.

MOREN, E.B.S.; DAVID, M.M.M.S.; MACHADO, M.P.L. (1992) Diagnóstico e análise e erros em matemática: subsídios para o processo e ensino/aprendizagem. *Cadernos de Pesquisa*, n.83, p. 43-51.

NIVEN, I. (1984) *Números*: Racionais e Irracionais. Rio de Janeiro: SBM.

NORMAN, A. (1992) Teachers' mathematical knowledge of the concept of function. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (orgs) *The concept of function*: aspects of epistemology and pedagogy. MAA Notes, v.25, p.215-232.

OWENS, D.T.; SUPER, D.B. (1992) Teaching and learning decimal fractions. In: OWENS, D.T. (ed) *Research ideas for the classroom*: middle grades mathematics. NY: MacMillan, p. 137-158.

PONTE, J.P. (1992) Concepções de professores de matemática e processos de formação. In: PONTE, J.P., MATOS, J.F., FERNANDES, D., BROWN, M. *Educação Matemática*: Temas de Investigação. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, p.185-239.

PONTE, J.P. (2001) O início da carreira profissional de professores de matemática e ciências. *Revista de Educação*, v.10, n.1, p.31-44.

POST, T.R. (1981) Fractions: Results and implications from National Assesment. *The Arithmetic Teacher*, 28(9) p.26-31.

POST, T.R.; HAREL, G.; BEHR, M.J.; LESH, R. (1991) Intermediate teacher's knowledge of rational number concepts. In: FENNEMA, E.; CARPENTER T.P.; LAMON, S.J. (eds) *Integrating research on teaching and learning mathematics*. NY: Sunny Press, p.177-198.

RADATZ, H. (1980) Students' errors in the mathematical learning process: a survey. *For the Learning of Mathematics*, v.1, n.1, p.16-20.

REIS, F. S. (2001) *A tensão entre rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise*: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas.

RESENDE, F. M. (2000) Divulgação e apropriação do método intuitivo em Minas Gerais (início do séc. XX). In: CONGRESSO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO, 1, 2000, UFRJ. *Anais...* Rio de Janeiro, 2000. CD-ROM.

ROMANATTO, M.C. (1999) Número racional: uma teia de relações. *Zetetiké*, v.7, n.12, p.37-49.

RUDIN, W. (1964) *Principles of Mathematical Analysis*. NY: McGraw-Hill.

SCHIFTER, D. (1998) Learning mathematics for teaching: from a teachers' seminar to the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, p.55-87.

SCHOENFELD, A. H. (1989) Explorations of students' beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.20, n.4, p.338-355.

SCHÖN, D. (1983) *The reflective practitioner*. NY: Basic Books.

SCHWARZENBERGER, R.; TALL, D. (1978) Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, 82, p.44-49.

SFARD, A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), p.1-36.

SHULMAN, L. S. (1987) Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review,* v.57, n.1, p.1-22.

SIERPINSKA, A. (1987) Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, n.18, p.371-397.

SIMMONS, G.F. (1987) *Cálculo com Geometria Analítica* (v.I). RJ: McGraw-Hill.

SIMON, M. (1996) Beyond inductive and deductive reasoning: the search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, n.30, p.197-210.

SIMPSON, A. (1994) Student attitudes to proof. In: XVIII INTERNATIONAL CONFERENCE OF PME, 18, 1994, Lisboa. *Proceedings*... Working Group on Advanced Mathematical Thinking, p.26-30.

SINCLAIR, H.; SINCLAIR, A. (1986) Children´s mastery of written numerals and the construction of basic number concepts. In HIEBERT, J. (ED). *Conceptual and procedural knowledge:* the case of mathematics. N J: Lawrence Erlbaum, p.59-74.

SOARES, E.F.; FERREIRA, M.C.C.; MOREIRA, P.C. (1998) *Números racionais e reais*: as concepções dos alunos e a formação do professor. Relatório de pesquisa. Belo Horizonte: SPEC/UFMG.

SOARES, E.F.; FERREIRA, M.C.C.; MOREIRA, P.C. (1999) Números reais: concepções de licenciandos e formação matemática na licenciatura. *Zetetiké*, v.7, n.12, p.95-117.

SOUZA, A.C.; PEREZ, G; BICUDO, I; BICUDO, M.A.V.; SILVA, M.G.P.; BALDINO, R.R.; CABRAL, T.C.B. (1995) Novas diretrizes para a Licenciatura em Matemática. *Temas e Debates*, v.8, n.7, p. 41-65.

SOWDER, J.; ARMSTRONG, B.; LAMON, S.; SIMON, M.; SOWDER, L.; THOMPSON, A. (1998) Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 1, p.127-155.

STACEY, K.; HELME, S.; STEINLE, V.; BATURO, A.; IRWIN, K.; BANA, J. (2001) Preservice teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 4, p. 205-225.

TÁBOAS, C.G. (1993) *O número e sua história cultural*: fundamento necessário na formação do professor. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas.

TALL, D. (1991) The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. (ed) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, p.3-21.

TALL, D. (1992) The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. In: GROWS, D. (ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. NY: MacMillan, p. 495-511.

TALL, D. (1994) Cognitive difficulties in learning analysis. In: BARNARD, A. (ed) *Report on the teaching of Analysis*, for the Talum Committee. University of Warwick, England, p.1-6.

TALL, D.; VINNER, S. (1981) Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), p.151-169.

TANUS, S. (1995) *Reestruturação dos cursos de licenciatura em matemática*: Teoria e Prática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). IGCE, UNESP, Rio Claro.

TARDIF, M. (2002a) *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes.

TARDIF, M. (2002b) Ambigüidade do saber docente. In: TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes, p.277-303.

TARDIF, M. (2002c) Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas conseqüências para a formação docente. In: TARDIF, M. *Saberes docentes e formação profissional*. Petrópolis: Vozes, p. 245-276.

TARDIF, M.; LESSARD, C.; LAHAYE, L. (1991) Os professores face ao saber: esboço de uma problemática do saber docente. *Teoria & Educação*, n.4, p.215-233.

THOMPSON, A.G. (1984) The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, v.15, p.105-127.

THOMPSON, A.G. (1992) Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In: GROWS, D. (ed) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NY: MacMillan, p.127-146.

UFMG (1986a) *Proposta de Novo currículo para o Curso de Matemática*. Universidade Federal de Minas Gerais.

UFMG (1986b) *Parecer da Câmara de Graduação*. Universidade Federal de Minas Gerais.

VALENTE, W. R. (2001) História da matemática escolar: problemas teórico-metodológicos. In: FOSSA, J. A. (ed). IV SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 4, 2003, Natal (RN). *Anais*... p. 207-219.

VERGNAUD, G. (1986) Conhecimento e atividade operatória. In: VERGNAUD, G. *Conhecimento e atividade operatória. Estruturas aditivas e complexidade psicogenética. Invariantes quantitativos, qualitativos e relacionais.* Porto Alegre: GEEMPA. Mimeografado, p. 1-11.

VERGNAUD, G. (1983) Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (eds) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Orlando: Academic Press, p.127-174.

VERGNAUD, G. (1990) La theorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v.10, n.2/3, p. 137-170.

VINNER, S. (1991) The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, p.65-81.

VINNER, S. (1993) The notion of proof: some aspects of students' views at the sênior highschool level. In: XVII INTERNATIONAL CONFERENCE OF PME, 17, 1993, Tsukuba, Japan. *Proceedings*... p. 289-294.

VINCENT, G.; LAHIRE, B.; THIN, D. (2001) Sobre a história e a teoria da forma escolar. *Educação em Revista*, n.33, p.7-47.

WHITE, A.J. (1973) *Análise real*: uma introdução. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp.

YOUNG, M.F.D. (1972) An approach to the study of curricula as socially organized knowledge. In: YOUNG, M.F.D. (ed.) *Knowledge and Control*. London: Collier-MacMillan, p.19-46.

YOUSSEF, A.N.; FERNANDEZ, V.P.; SOARES, E. (1998). *Matemática para o* $2^{\underline{0}}$ *Grau*: Curso Completo. São Paulo: Scipione.

ZAIDAN, S. (1993) A formação do professor de Matemática: uma discussão do curso de licenciatura da UFMG. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, UFMG, Belo Horizonte.