

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-graduação em Física

Gabriel Batista Vilaça

GRAVITAÇÃO QUÂNTICA DE LAÇOS E COSMOLOGIA  
*SPINFOAM*

Belo Horizonte  
2024

Gabriel Batista Vilaça

**GRAVITAÇÃO QUÂNTICA DE LAÇOS E COSMOLOGIA**  
***SPINFOAM***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Nelson de Oliveira Yokomizo

Belo Horizonte

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

V695g Vilaça, Gabriel Batista.  
Gravitação quântica de laços e cosmologia spinfoam / Gabriel Batista Vilaça.  
– 2024.  
108 f. : il.

Orientador: Nelson de Oliveira Yokomizo.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,  
Departamento de Física.  
Bibliografia: f. 89-93.

1. Gravitação. 2. Relatividade geral. 3. Mecânica quântica. 4. Cosmologia.  
I. Título. II. Yokomizo, Nelson de Oliveira. III. Universidade Federal de Minas  
Gerais, Departamento de Física.

CDU – 530.12 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

### FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente dissertação, intitulada “**Gravitação Quântica de Laços e Cosmologia Spinfoam**” de autoria de **GABRIEL BATISTA VILAÇA**, submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovado para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA** em 11 de setembro de 2024.

Belo Horizonte, 11 de setembro de 2024.

Prof. Nelson de Oliveira Yokomizo  
Orientador do estudante Departamento de Física/UFMG

Prof. Mário Sérgio Carvalho Mazzoni  
Departamento de Física/UFMG

Prof. Gláuber Carvalho Dorsch  
Departamento de Física/UFMG



Documento assinado eletronicamente por **Gláuber Carvalho Dorsch, Professor do Magistério Superior**, em 13/09/2024, às 17:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Nelson de Oliveira Yokomizo, Professor do Magistério Superior**, em 14/09/2024, às 10:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Mario Sergio de Carvalho Mazzoni, Membro**, em 15/09/2024, às 20:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3552344** e o código CRC **9C614BB0**.

# Agradecimentos

Aos meus pais, por todo o suporte, incentivo e amor. Ao meu irmão, por todas as conversas, pela convivência e nossa amizade. Sem vocês, nada disso seria possível.

À Vivian, minha namorada e companheira de vida, por sempre estar ao meu lado em todos os momentos. Muito obrigado pelo seu amor e incentivo, sem os quais eu não teria chegado até aqui.

A todos os professores que tive ao longo da vida, por sempre estimularem a minha curiosidade. Especialmente, agradeço ao meu orientador, Professor Nelson Yokomizo, pelo bom relacionamento desde a graduação, por aceitar orientar esta pesquisa e por conduzi-la tão bem.

Aos membros do Grupo de Física Teórica Fundamental da UFMG, pela excelente convivência durante os últimos anos. Em especial, ao Filipe, com quem dividi boa parte dos aprendizados, discussões e reuniões ao longo do mestrado.

A todos os meus amigos que fiz na Física. Em especial, ao Cyro, pelas inúmeras discussões que enriqueceram muito este trabalho.

A todos meus familiares e amigos que de alguma forma contribuíram em algum momento da minha caminhada.

Às agências de fomento, CNPq, CAPES e FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

# Resumo

Um dos maiores desafios da física teórica é a construção de uma teoria quântica da gravitação. Uma das candidatas mais promissoras é a Gravitação Quântica de Laços, uma teoria quântica não perturbativa e independente de *background* da Relatividade Geral. Um dos objetivos desta dissertação é construir a teoria da Gravitação Quântica de Laços, utilizando o formalismo de *spinfoams*, que parte do formalismo Lagrangiano da Relatividade Geral e utiliza técnicas de quantização inspiradas nas teorias de calibre na rede, a partir de uma discretização do Espaço-Tempo. Como principais resultados, temos a construção da base de *spin-networks*, dos operadores de área e volume, que possuem o espectro discreto, e do vértice EPRL/FK, que implementa a dinâmica. Com o intuito de testar as previsões da teoria, uma das áreas de maior interesse é a Cosmologia. Outro objetivo desta dissertação é mostrar uma forma de implementar o limite cosmológico partindo da teoria completa, utilizando estados coerentes da Gravitação Quântica de Laços centrados em geometrias homogêneas e isotrópicas e estudando a dinâmica em primeira ordem. Como principal resultado, mostramos que as amplitudes de transição retornam o limite clássico esperado pela Cosmologia.

**Palavras-chave:** Gravitação Quântica de Laços, Cosmologia *Spinfoam*, Relatividade Geral, Cosmologia Quântica

# Abstract

One of the biggest challenges in theoretical physics is the construction of a quantum theory of gravity. One of the most promising candidates is Loop Quantum Gravity, a non-perturbative, background independent quantum theory of General Relativity. One of the goals of this dissertation is to construct the theory of Loop Quantum Gravity, following the spinfoam approach, which starts from the Lagrangian formalism of General Relativity and uses quantization techniques inspired by lattice gauge theories, based on a discretization of spacetime. As main results, we have the construction of the spin-network basis, the area and volume operators, which have a discrete spectrum, and the EPRL/FK vertex, which implements the dynamics. In order to test the predictions of the theory, one of the areas of greatest interest is Cosmology. Another objective of this dissertation is to show a way to implement the cosmological limit starting from the complete theory, using coherent states of Loop Quantum Gravity picked around homogeneous and isotropic geometries and studying the dynamics in first order. As a main result, we show that the transition amplitudes returns the classical limit expected by Cosmology.

**Keywords:** Loop Quantum Gravity, Spinfoam Cosmology, General Relativity, Quantum Cosmology

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>12</b>
2.1	Formulação Métrica	12
2.2	Formulação de Tetradas	13
2.3	Formalismo ADM	17
2.3.1	Variáveis ADM na linguagem de tetradas	21
2.4	Ações para a Relatividade Geral	22
2.4.1	Ação de Einstein-Hilbert	22
2.4.2	Ação de Palatini	23
2.4.3	Ação de Holst	24
2.5	Vínculo de Simplicidade Linear	26
2.6	Variáveis de Ashtekar	28
<b>3</b>	<b>DISCRETIZAÇÃO CLÁSSICA</b>	<b>32</b>
3.1	Discretização do Espaço-Tempo	33
3.1.1	Discretização da Fronteira	35
3.2	Discretização das Variáveis Dinâmicas	37
3.2.1	Variáveis da Fronteira	39
3.3	Discretização da Ação	42
<b>4</b>	<b>GRAVITAÇÃO QUÂNTICA DE LAÇOS</b>	<b>44</b>
4.1	Cinemática	44
4.1.1	Quantização da área	46
4.1.2	O espaço de Hilbert Físico e a base de <i>spin-network</i>	46
4.2	Dinâmica	53
4.2.1	O mapa $Y_\gamma$	53
4.2.2	O vértice EPRL/FK	57
<b>5</b>	<b>ESTADOS COERENTES</b>	<b>63</b>
5.1	Estados Coerentes de Livine-Speziale	63
5.2	Estados <i>Heat Kernel</i>	66
<b>6</b>	<b>COSMOLOGIA SPINFOAM</b>	<b>72</b>
6.1	Cosmologia Clássica	73
6.1.1	Variáveis de Ashtekar	78
6.1.2	Discretização Clássica	79



6.2	Cinemática . . . . .	80
6.3	Dinâmica . . . . .	82
7	CONCLUSÃO . . . . .	86
	REFERÊNCIAS . . . . .	89
	<b>APÊNDICES</b>	<b>94</b>
	<b>APÊNDICE A – TÓPICOS DE TEORIA DE GRUPOS</b> . . . . .	<b>95</b>
A.1	<b>O grupo <math>SU(2)</math></b> . . . . .	<b>97</b>
A.1.1	<i>Intertwiners</i> . . . . .	100
A.1.2	Medida de Haar . . . . .	103
A.1.3	O teorema de Peter-Weyl . . . . .	103
A.2	<b>O grupo <math>SL(2, \mathbb{C})</math></b> . . . . .	<b>104</b>

# 1 Introdução

No início do século passado surgiram duas teorias que mudaram completamente a Física e a nossa forma de ver o universo: a Relatividade Geral e a Mecânica Quântica. A primeira se mostrou muito além de uma descrição da gravitação, modificando as nossas concepções de espaço e tempo. Já a segunda desafiou o determinismo da ciência, impondo novos conceitos e ferramentas matemáticas que até os dias de hoje causam estranheza. As duas teorias porém não conversam entre si e até hoje não temos uma teoria quântica da gravitação finalizada e com resultados experimentais comprobatórios. Diversas tentativas têm sido feitas desde então para resolver este que talvez seja o maior desafio da física teórica fundamental. Dentre elas se destaca a Gravitação Quântica de Laços, uma teoria quântica não perturbativa e independente de *background* da Relatividade Geral [1].

Inicialmente a Gravitação Quântica de Laços surgiu sob a sua forma canônica, que busca partir do formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral e encontrar uma teoria quântica através de um procedimento de quantização canônica [2–4]. Tal ramo teve um rápido crescimento a partir dos anos 1980, com a formulação da Relatividade Geral em novas variáveis, conhecidas como variáveis de Ashtekar [5, 6], que serão discutidas no Capítulo 2. Nos anos 1990 a teoria tomou a forma como a conhecemos hoje, com a utilização das variáveis de holonomia e fluxo, além da formulação dos conhecidos operadores de área e volume.

Porém, na formulação canônica a construção da dinâmica da teoria se tornou um problema por muito tempo, levando ao crescimento de uma nova abordagem: o formalismo de *spinfoams*, que implementa a dinâmica quântica através do cálculo de amplitudes de transição utilizando integrais de trajetória [7]. Tal formalismo se tornou um grande sucesso com a publicação do vértice EPRL/FK no fim dos anos 2000, que respeita princípios básicos da Mecânica Quântica e da Relatividade Geral, além de levar ao limite clássico correto para a teoria [8].

Utilizando a interpretação geométrica da teoria, a cinemática construída pela formulação canônica e a dinâmica proposta pelo formalismo de *spinfoams* foi possível construir uma formulação covariante da teoria, como apresentada em [1]. Tal formulação tem uma prescrição de quantização clara, com os seguintes passos, que serão seguidos aqui na análise dos problemas:

1. Reformulação da Relatividade Geral em novas variáveis.
2. Discretização Clássica.
3. Quantização (ou Cinemática).

#### 4. Dinâmica.

O primeiro passo consiste em reformular a Relatividade Geral em novas linguagens. Tal reformulação será discutida em detalhes no Capítulo 2 e inclui o formalismo de tetradas, as variáveis ADM, os princípios de ação para a teoria e a construção das variáveis de Ashtekar.

O segundo passo será trabalhado no Capítulo 3 onde é mostrado como discretizar a Relatividade geral utilizando as ideias e técnicas de dois campos distintos: o cálculo de Regge e as teorias de calibre na rede. O primeiro nos fornece ideias de como discretizar uma variedade Lorentziana através de triangulações, além de nos fornecer uma expressão para a ação discreta da teoria. Já o segundo nos guiará na escolha das variáveis discretas, no 2-complexo e no grafo da fronteira. Com as variáveis discretas será possível obter a álgebra de holonomia-fluxo, que guiará o nosso processo de quantização.

O terceiro e quarto passos serão discutidos no Capítulo 4 onde será construída a teoria da Gravitação Quântica de Laços no formalismo de *spinfoams*. Inicialmente, a cinemática será obtida a partir de um processo de quantização canônica, guiada pela álgebra de holonomia-fluxo. Com isso, será obtida a chamada representação da holonomia, em que o nosso espaço de Hilbert é o espaço de funções de quadrado integrável no grupo  $SU(2)$ , invariantes por transformações de calibre. Uma base para este espaço é dada pelas funções de *spin-network*, construídas usando o teorema de Peter-Weyl a partir de representações irredutíveis do grupo  $SU(2)$ . A dinâmica da teoria é feita a partir do cálculo de amplitudes de transição, utilizando integrais de trajetória. Partindo de uma ação discreta e truncando tais amplitudes em um 2-complexo encontraremos a chamada amplitude do vértice, que assume a forma do vértice EPRL/FK com as escolhas adequadas de variáveis.

Apesar do desenvolvimento teórico rigoroso, ainda não há comprovações experimentais de previsões da Gravitação Quântica de Laços. Neste contexto, a cosmologia é uma das áreas de maior interesse para a aplicação da teoria, pois espera-se que efeitos quânticos introduzam modificações na dinâmica do universo primordial, levando a resultados que podem ser observados pelas próximas missões experimentais, ocasionando em um possível teste da mesma.

Recentemente, com o desenvolvimento do formalismo de *spinfoams*, surgiu a Cosmologia *Spinfoam* [9–11], que procura descrever a dinâmica de modelos cosmológicos a partir da teoria completa da Gravitação Quântica de Laços explorando estados semiclássicos associados a espaços-tempos homogêneos e isotrópicos. Para realizar tal implementação, no Capítulo 5, é introduzida uma nova base de estados: os estados coerentes. Tais estados são inspirados nos estados de mesmo nome do oscilador harmônico quântico, uma vez que eles minimizam as relações de incerteza para os observáveis geométricos, além de serem

---

centrados em torno de uma geometria rotulada por parâmetros clássicos. Serão construídos dois tipos de estados coerentes para a Gravitação Quântica de laços, utilizando técnicas diferentes: os estados de Livine-Speziale [12] e os estados *Heat Kernel* [13–18].

Juntando os elementos estudados nos capítulos anteriores, no Capítulo 6 serão aplicadas as técnicas desenvolvidas para o caso da Cosmologia, investigando o caso da Cosmologia *Spinfoam*. Por fim, no Capítulo 7 são apresentadas algumas considerações finais e perspectivas futuras para o trabalho.

## 2 Relatividade Geral

A Relatividade Geral é uma das teorias mais bem sucedidas da Física, desde a sua publicação por Einstein em 1915. Ela busca descrever o comportamento do campo gravitacional, dada uma certa distribuição de energia e matéria no espaço-tempo.

Desde então, diversas formulações surgiram para a teoria, com diferentes perspectivas e objetivos. Neste capítulo, iremos apresentar de forma resumida as diversas descrições da teoria que levaram ao modelo da Gravitação Quântica de Laços, como a formulação métrica [19, 20], o formalismo de tetradas [21], as variáveis ADM [22, 23], os princípios variacionais, como a ação de Einstein-Hilbert [19], a ação de Palatini [24] e a ação de Holst [25], e as variáveis de Ashtekar [5, 26].

### 2.1 Formulação Métrica

Na formulação original proposta por Einstein, o campo gravitacional é descrito por um tensor métrico  $g_{\mu\nu}(x)$  de uma variedade Lorentziana quadridimensional, de assinatura (1, 3). A distribuição de matéria é descrita pelo tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}(x)$ , que é relacionado à métrica pela equação de Einstein<sup>1</sup>:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

em que  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci e  $R$  é o escalar de curvatura, ambos determinados a partir de contrações do tensor de curvatura de Riemann. Este objetos são definidos da seguinte maneira:

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}, \quad (2.2)$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}, \quad (2.3)$$

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Será usada durante toda a dissertação a convenção usual: os índices gregos ( $\mu, \nu, \rho, \dots$ ) tomam valores de 0 a 3 e serão chamados de índices do espaço-tempo, uma vez que eles fazem referência à base coordenada. Além disso, será usada a seguinte convenção de soma de Einstein: quando tivermos em um mesmo termo um índice repetido em cima e embaixo, estes índices estarão somando para todos os valores permitidos.

O objeto  $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$  é chamado de símbolo de Christoffel ou Conexão de Levi-Civita e define a derivada covariante em seções do fibrado tangente da variedade:

$$\nabla_{\mu}V^{\nu} = \partial_{\mu}V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\rho}V^{\rho}. \quad (2.5)$$

<sup>1</sup> Durante toda a dissertação, a menos que seja dito o contrário, trabalharemos em unidades em que  $8\pi G = c = 1$ .

Assim, podemos ter uma noção mais intuitiva do tensor de curvatura de Riemann, uma vez que, para uma conexão livre de torção ( $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$ ), ele pode ser escrito como:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}V^\sigma = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho. \quad (2.6)$$

Ou seja, a noção de curvatura pode ser capturada pela não comutatividade de derivadas covariantes em diferentes direções.

Ao exigirmos que a conexão seja compatível com a métrica ( $\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ ) e livre de torção, pode-se mostrar que a mesma é unicamente definida pela métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.7)$$

Por fim, dada uma métrica  $g_{\mu\nu}$  que é solução de (2.1), as trajetórias no espaço tempo são dadas pela equação geodésica:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (2.8)$$

Aqui foram apresentados apenas os principais conceitos da formulação métrica. Para uma discussão mais detalhada, os livros clássicos podem ser consultados, como [19] e [20].

## 2.2 Formulação de Tetradas

A formulação de tetradas da Relatividade Geral carrega uma das noções mais importantes da teoria e de variedades diferenciáveis: localmente  $M$  é isomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Ou seja, localmente o espaço tangente é isomorfo ao espaço de Minkowski ( $M^4$ ) e podemos definir este isomorfismo através das tetradas:

$$e^I : T_p M \rightarrow M^4. \quad (2.9)$$

Assim, localmente as tetradas são um conjunto de quatro 1-formas linearmente independentes que satisfazem:

$$\begin{aligned} e^I &= e_\mu^I dx^\mu \quad ; \quad I = 0, \dots, 3 \\ e^I &: v \mapsto e^I(v) = e_\mu^I v^\mu. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Durante toda a dissertação, a menos que seja dito o contrário, os índices latinos maiúsculos do meio do alfabeto ( $I, J, \dots$ ) tomam valores de 0 a 3, são chamados **índices internos** e ganham esse nome por fazer referência ao espaço interno de Minkowski.

A relação das tetradas com a métrica surge de forma natural, uma vez que elas são definidas através do mapa (2.9). Deste modo, dada uma tetrada, a métrica  $g_{\mu\nu}$  da variedade é definida como o *pullback* da métrica de Minkowski:

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^I(x)e_\nu^J(x)\eta_{IJ}. \quad (2.11)$$

É importante estabelecer que os índices gregos da variedade sobem e descem com a métrica  $g_{\mu\nu}$  e sua inversa  $g^{\mu\nu}$ , enquanto os índices internos sobem e descem com a métrica de Minkowski  $\eta_{IJ}$  e sua inversa  $\eta^{IJ}$ . Assim, podemos definir as tetradas inversas  $e_I^\mu$ , que satisfazem:

$$e_\mu^I e_J^\mu = \delta_J^I \quad \text{e} \quad e_\mu^I e_I^\nu = \delta_\mu^\nu. \quad (2.12)$$

Diante destas definições podemos ver outra interpretação dada para as tetradas: elas definem uma base ortonormal para o espaço tangente em cada ponto da variedade. Invertendo (2.11), temos quatro campos vetoriais  $(e_0^\mu, \dots, e_3^\mu)$  que são ortonormais:

$$g_{\mu\nu}(x) e_I^\mu(x) e_J^\nu(x) = \eta_{IJ}. \quad (2.13)$$

Podemos inclusive escrever os elementos da base coordenada usual do espaço tangente  $\{\partial_\mu\}$  em termos da base de tetradas:

$$\partial_\mu = e_\mu^I e_I. \quad (2.14)$$

Observa-se ainda que ao fazermos transformações de Lorentz  $\Lambda \in SO(3, 1)$  nas tetradas na forma:

$$e_\mu^I(x) \rightarrow \Lambda_J^I e_\mu^J(x), \quad (2.15)$$

mantemos a relação (2.11), uma vez que a métrica  $\eta_{IJ}$  é invariante por transformações de Lorentz. Assim, a formulação de tetradas possui uma invariância de Lorentz local que não afeta a métrica. Ainda analisando (2.11), vemos que as tetradas codificam todas as informações da métrica, de forma que podemos formular toda a Relatividade Geral em termos destes novos objetos.

Seguindo a mesma linha de raciocínio da formulação métrica, podemos definir uma derivada covariante em seções do fibrado de Minkowski da seguinte maneira:

$$D_\mu v^I = \partial_\mu v^I + \omega_{\mu J}^I v^J. \quad (2.16)$$

Utilizaremos a notação  $D_\mu$  para diferenciar da derivada covariante  $\nabla_\mu$  definida em (2.5). Podemos definir ainda uma **derivada covariante exterior** ( $d^\omega$ ) para formas diferenciais da seguinte forma:

$$d^\omega u^I = du^I + \omega^I_J \wedge u^J. \quad (2.17)$$

Nesta linguagem, a conexão  $\omega$  é chamada de **conexão de spin** e, localmente, é uma 1-forma:

$$\omega^I_J = \omega_{\mu J}^I dx^\mu. \quad (2.18)$$

Ao exigirmos que  $D_\mu$  seja compatível com  $\eta_{IJ}$ , vemos que a conexão de *spin* toma valores na álgebra de Lie do grupo de Lorentz ( $sl(2, \mathbb{C})$ ):

$$\begin{aligned} D_\mu \eta_{IJ} &= \partial_\mu \eta_{IJ} + \omega_{\mu I}^K \eta_{KJ} + \omega_{\mu J}^K \eta_{IK} \\ &= \omega_{\mu I}^K \eta_{KJ} + \omega_{\mu J}^K \eta_{IK} = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\omega_{\mu}^{IJ} = -\omega_{\mu}^{JI}. \quad (2.19)$$

Podemos ainda introduzir uma nova derivada covariante, que age tanto nos índices internos como nos índices espaço-temporais. A ela damos o nome de **derivada covariante total** e iremos denotá-la por  $\nabla_{\mu}^{\omega}$ . Sua definição é feita da forma usual, com a conexão de *spin* agindo nos índices internos e a conexão de Levi-Civita agindo nos índices espaço-temporais:

$$\nabla_{\mu}^{\omega} C_{\nu}^I = \partial_{\mu} C_{\nu}^I + \omega_{\mu J}^I C_{\nu}^J - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} C_{\sigma}^I. \quad (2.20)$$

Utilizando a linguagem de formas diferenciais, podemos introduzir o tensor de torção:

$$T^I = d^{\omega} e^I = de^I + \omega^I_J \wedge e^J, \quad (2.21)$$

que é uma 2-forma (o símbolo  $\wedge$  denota o produto exterior de formas diferenciais, enquanto o operador  $d$  denota a derivada exterior). A equação (2.21), na ausência de torção ( $T^I = 0$ ), é chamada de **primeira equação de Cartan**.

A primeira equação de Cartan é uma ferramenta poderosa para o cálculo dos componentes da conexão de *spin*, uma vez que há um teorema que garante que dada uma tetrada, existe uma única conexão métrica livre de torção. Neste ponto, é importante observar que com estas condições a conexão de *spin* é totalmente equivalente à conexão de Levi-Civita, de forma que alguns textos costumam chamar  $\omega$  desta maneira. A tradução entre as duas pode prontamente ser feita, uma vez que a conexão de Levi-Civita é o *pullback* da conexão de *spin* para  $TM$ . Tal afirmação pode ser traduzida ao exigirmos que a derivada covariante usual (2.5) seja equivalente a derivada covariante (2.16):

$$\begin{aligned} e_{\sigma}^I \nabla_{\mu} u^{\sigma} &= D_{\mu} u^I \\ e_{\sigma}^I (\partial_{\mu} u^{\sigma} + \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} u^{\nu}) &= \partial_{\mu} u^I + \omega_{\mu J}^I u^J \\ e_{\nu}^I \partial_{\mu} u^{\nu} + e_{\sigma}^I \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} u^{\nu} &= u^{\nu} \partial_{\mu} e_{\nu}^I + e_{\nu}^I \partial_{\mu} u^{\nu} + \omega_{\mu J}^I e_{\nu}^J u^{\nu}. \end{aligned}$$

Assim, chegamos na relação entre as duas conexões:

$$e_{\sigma}^I \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} = \partial_{\mu} e_{\nu}^I + \omega_{\mu J}^I e_{\nu}^J. \quad (2.22)$$

Observando a definição (2.20), vemos que ao passar o termo da esquerda para a direita em (2.22), temos que a tetrada é compatível com a derivada covariante total:

$$\nabla_{\mu}^{\omega} e_{\nu}^I = \partial_{\mu} e_{\nu}^I + \omega_{\mu J}^I e_{\nu}^J - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} e_{\sigma}^I = 0. \quad (2.23)$$

Em coordenadas locais, podemos definir o tensor de curvatura da forma usual:

$$2d_{[\mu}^{\omega} d_{\nu]}^{\omega} u^I := F_{\mu\nu}^I{}_J u^J. \quad (2.24)$$



Traduzindo para a linguagem de formas diferenciais, temos:

$$(d^\omega)^2 u^I = F^I{}_J \wedge u^J, \quad (2.25)$$

$$F^I{}_J = d\omega^I{}_J + \omega^I{}_K \wedge \omega^K{}_J. \quad (2.26)$$

Logo, a equação (2.26) expressa a curvatura em termos de uma 2-forma e é chamada de **segunda equação de Cartan**.

A 2-forma de curvatura (2.26) pode ser traduzida para coordenadas locais, utilizando a expressão (2.24):

$$F^I{}_J = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}{}^I{}_J dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (2.27)$$

e pode ser relacionada ao tensor de Riemann usual (2.2) utilizando o mapeamento das tetradas:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = F_{\mu\nu}{}^I{}_J e_I^\rho e_\sigma^J. \quad (2.28)$$

O Tensor de Ricci é definido da mesma forma que na formulação métrica, utilizando o mapeamento das tetradas:

$$F_{MN}{}^I{}_J := F_{\mu\nu}{}^I{}_J e_M^\mu e_N^\nu, \quad (2.29)$$

$$F_{IJ} := F_{MI}{}^M{}_J, \quad (2.30)$$

$$R_{\mu\nu} = F_{IJ} e_\mu^I e_\nu^J. \quad (2.31)$$

Com estas definições, podemos mostrar que o escalar de curvatura é o mesmo nas duas formulações:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} F_{IJ} e_\mu^I e_\nu^J = \eta^{IJ} F_{IJ}. \quad (2.32)$$

Por fim, vamos provar que a equação de Einstein no vácuo no formalismo de tetradas é:

$$\epsilon_{IJKL} e^I \wedge F^{JK} = 0. \quad (2.33)$$

Reescrevendo os termos de (2.33), temos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{IJKL} e_\mu^I F^{JK}{}_{\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma &= 0 \\ \epsilon_{IJKL} e_\mu^I F^{JK}{}_{\rho\sigma} dx^\mu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \wedge dx^\nu &= 0 \\ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} e_\mu^I F^{JK}{}_{\rho\sigma} &= 0. \end{aligned}$$

Onde na segunda linha fizemos um produto exterior com  $dx^\nu$  e no passo seguinte fixamos um elemento da base de formas, mantendo a antissimetria no  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ . Usando a identidade

$\det(e)e_I^{[\mu}e_J^\nu e_K^{\rho]} = \frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{IJKL}e_\sigma^L$ , temos:

$$\begin{aligned}
0 &= e_J^{[\nu}e_K^\rho e_L^{\sigma]}F_{\rho\sigma}^{JK} \\
&= e_J^{[\nu}e_K^\rho e_L^{\sigma]}F_{\rho\sigma}^{JK}e_\mu^L \\
&= R_{\rho\sigma}^{[\nu\rho}\delta_\mu^{\sigma]} \\
&= R_{\rho\sigma}^{\nu\rho}\delta_\mu^\sigma - R_{\rho\sigma}^{\rho\nu}\delta_\mu^\sigma + R_{\rho\sigma}^{\rho\sigma}\delta_\mu^\nu - R_{\sigma\rho}^{\rho\sigma}\delta_\mu^\nu + R_{\rho\sigma}^{\sigma\nu}\delta_\mu^\rho - R_{\rho\sigma}^{\nu\sigma}\delta_\mu^\rho \\
&= R_{\rho\mu}^{\nu\rho} - R_{\rho\mu}^{\rho\nu} + R\delta_\mu^\nu + R\delta_\mu^\nu + R_{\mu\sigma}^{\sigma\nu} - R_{\mu\sigma}^{\nu\rho} \\
&= -R_\mu^\nu - R_\mu^\nu + 2R\delta_\mu^\nu - R_\mu^\nu - R_\mu^\nu \\
&= 4R_\mu^\nu - 2R\delta_\mu^\nu \\
&= 4R_\mu^\nu g_{\nu\sigma} - 2Rg_{\nu\sigma}\delta_\mu^\nu.
\end{aligned}$$

Assim, temos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0,$$

que é a já conhecida equação de Einstein no vácuo (2.1).

A formulação de tetradas possui diversas vantagens conceituais e operacionais, como a utilização das equações (2.21) e (2.26) no cálculo da conexão e da curvatura. A aplicação deste formalismo na resolução de problemas de Relatividade Geral, bem como discussões mais profundas do tema podem ser encontradas em [21].

## 2.3 Formalismo ADM

O formalismo ADM é uma reformulação da Relatividade Geral em novas variáveis, proposto por Arnowitt, Deser e Misner [22], com o objetivo de estabelecer um formalismo Hamiltoniano para a Relatividade Geral e, conseqüentemente, sua dinâmica. Sua introdução foi de extrema importância, uma vez que abriu caminho para o desenvolvimento da quantização canônica da Relatividade Geral.

A motivação inicial da troca de variáveis que iremos introduzir surge ao analisarmos o tensor de Einstein, que é definido como o lado esquerdo de (2.1):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

Como mostrado em [23, pg. 20], as componentes  $G_\mu^0$  de (2.34) apresentam apenas derivadas de primeira ordem da métrica, enquanto as componentes puramente espaciais  $G^a_b$  apresentam derivadas de segunda ordem. Assim, podemos dividir as 10 equações de Einstein em 6 equações de segunda ordem, que darão a dinâmica da teoria, e 4 equações de primeira ordem, que servirão como vínculos para as equações de evolução.

Deste modo, somos motivados a buscar uma formulação da teoria que faça a distinção entre as componentes espaciais e temporais de (2.34), de forma que possamos

tratar tensores no espaço-tempo como tensores espaciais que evoluem no tempo. Para isso, somos levados a fazer uma divisão da nossa variedade  $M$  em espaço e tempo, através de folheações espaciais que evoluem no tempo. Porém, sem um referencial fixo a noção de tempo não é bem definida. Assim, vamos trabalhar com um parâmetro  $t$ , que define uma curva tipo tempo em  $M$ , e para cada  $t$  fixo teremos uma hipersuperfície espacial  $\Sigma_t$ , que serão as folhas da nossa folheação.

Para introduzirmos tal estrutura estamos assumindo que nossa variedade é globalmente hiperbólica. Na prática, esta condição não é restritiva, pois ela nos diz que  $M$  pode ser folheada em superfícies de Cauchy, onde toda curva tipo tempo corta estas superfícies apenas uma vez. Assim, a hiperbolicidade global apenas introduz uma estrutura causal no espaço tempo, que já é esperada para espaços-tempo físicos. Logo, topologicamente,  $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ .

Naturalmente, podemos definir um vetor normal unitário às superfícies  $\Sigma_t$ :

$$n^\mu = \frac{g^{\mu\nu} \partial_\nu t}{\sqrt{-g^{\nu\rho} \partial_\nu t \partial_\rho t}}. \quad (2.35)$$

De fato o vetor é normal, pois para qualquer vetor  $v^\mu \in T\Sigma$ , temos que  $g_{\mu\nu} v^\mu g^{\nu\rho} \partial_\rho t = v^\mu \partial_\mu t = 0$ . Além disso, o vetor é normalizado e tipo-tempo, pois  $g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1$ . Por fim, podemos definir  $n^a$  de forma única ao exigirmos que ele sempre aponte para o futuro  $n^\mu \partial_\mu t > 0$ .

O vetor normal também nos permite definir precisamente os tensores espaciais. Um tensor será dito espacial se ele se anula quando contraído com a normal  $n^\mu$  em qualquer índice.

Podemos ainda definir um segundo vetor tipo-tempo, que concorda com a noção de evolução temporal introduzida pelo parâmetro  $t$ . Definimos o vetor  $t^\mu$  como sendo aquele tangente às curvas  $\gamma(t)$ , ou seja, estas curvas são as curvas integrais de  $t^\mu$ , de forma que  $t^\mu \partial_\mu t = 1$ . O vetor  $t^\mu$  será chamado de **campo vetorial de evolução temporal**. As curvas integrais de  $t^\mu$  ainda irão permitir associar unicamente pontos em duas folhas, ao estabelecermos que as interseções da curva com  $\Sigma_t$  mostram o mesmo ponto em diferentes instantes do tempo.

Cada superfície espacial  $3D \Sigma_t$  tem a sua própria estrutura Riemanniana, de forma que podemos definir a métrica induzida nestas superfícies:

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (2.36)$$

Tal definição é justificada ao percebermos que  $q_{\mu\nu}$  é a parte espacial de  $g_{\mu\nu}$ , uma vez que para um vetor puramente espacial  $v^\mu$ , temos:

$$q_{\mu\nu} v^\mu = (g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu) v^\mu = g_{\mu\nu} v^\mu, \quad (2.37)$$

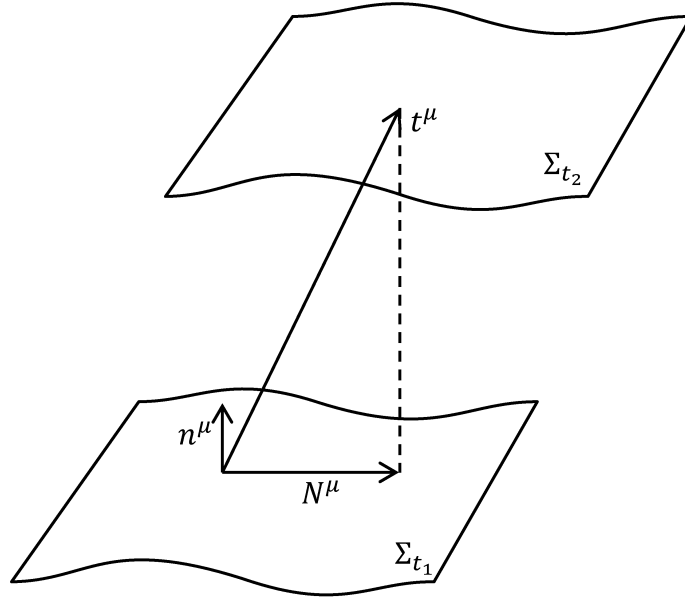


Figura 1 – Decomposição ADM.

além de ter seus componentes temporais nulos:

$$q_{\mu\nu}n^\mu = (g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu)n^\mu = n_\nu - n_\nu = 0. \quad (2.38)$$

Um ponto a ser observado é que, devido a (2.38), podemos usar a métrica  $q^\mu{}_\nu$  como um projetor, que toma apenas a componente espacial de cada componente de um tensor contraída com ela.

Desta forma, temos todos os elementos necessários para trabalharmos com tensores espaciais que evoluem no tempo. Definimos a derivada temporal de um tensor como a derivada de Lie ao longo do campo vetorial de evolução temporal  $t^\mu$ :

$$\dot{A}^{\mu_1 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \dots \nu_n} := q^{\mu_1}{}_{\rho_1} \dots q^{\mu_n}{}_{\rho_n} q^{\sigma_1}{}_{\nu_1} \dots q^{\sigma_n}{}_{\nu_n} \mathcal{L}_t A^{\rho_1 \dots \rho_n}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_n}, \quad (2.39)$$

onde as projeções são inseridas para garantir que  $\dot{A}$  seja espacial.

O vetor  $t^\mu$  aponta para o futuro, mas não necessariamente é ortogonal às superfícies  $\Sigma_t$ , de forma que ele pode ser decomposto em suas componentes espaciais e normais (ver Figura 1):

$$N^\mu = q^{\mu\nu}t_\nu, \quad (2.40)$$

$$Nn^\mu = t^\mu - q^{\mu\nu}t_\nu. \quad (2.41)$$

A componente espacial (2.40) é chamada de **vetor de shift**. A componente espacial é naturalmente definida em (2.41), ao subtrairmos a componente espacial. O termo  $N$  é a projeção de  $t^\mu$  na direção  $n^\mu$  ( $N = -n_\mu t^\mu$ ), chamado de **função de lapso**.

Podemos agora decompor a métrica  $g_{\mu\nu}$  em termos das novas variáveis. Usando a relação (2.41) em (2.36), temos:

$$g^{\mu\nu} = q^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu = q^{\mu\nu} - \frac{1}{N^2}(t^\mu - N^\mu)(t^\nu - N^\nu). \quad (2.42)$$

Dada a métrica espacial  $q_{\mu\nu}$ , podemos definir uma derivada covariante nas superfícies  $\Sigma_t$ , que seja compatível com a mesma:

$${}^{(3)}\nabla_\lambda A^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\nu_1 \dots \nu_n} := q^{\mu_1}_{\rho_1} \dots q^{\mu_n}_{\rho_n} q^{\sigma_1}_{\nu_1} \dots q^{\sigma_n}_{\nu_n} q^\delta_\lambda \nabla_\delta A^{\rho_1 \dots \rho_n}_{\sigma_1 \dots \sigma_n}, \quad (2.43)$$

onde  $\nabla_\delta$  denota a derivada covariante usual (2.5). É imediato notar que (2.43) é linear e satisfaz a regra de Leibniz, uma vez que (2.5) também satisfaz tais propriedades. Podemos mostrar que  ${}^{(3)}\nabla$  é compatível com a métrica espacial:

$${}^{(3)}\nabla_\lambda q_{\mu\nu} = q^\sigma_\lambda q^\rho_\mu q^\delta_\nu \nabla_\sigma q_{\rho\delta} = q^\sigma_\lambda q^\rho_\mu q^\delta_\nu \nabla_\sigma (g_{\rho\delta} + n_\rho n_\delta) = 0, \quad (2.44)$$

onde no último passo foi utilizado que  $g_{\rho\delta}$  é compatível com  $\nabla_\lambda$  e que, pela regra de Leibniz, sempre haverá uma normal contraída com um projetor no segundo termo.

Definida uma derivada covariante nas folhas espaciais, podemos definir o tensor de curvatura da forma usual:

$${}^{(3)}R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma \omega_\sigma := ({}^{(3)}\nabla_\mu {}^{(3)}\nabla_\nu - {}^{(3)}\nabla_\nu {}^{(3)}\nabla_\mu) \omega_\rho. \quad (2.45)$$

Tal tensor é chamado de **tensor de Riemann 3D** ou **tensor de curvatura intrínseca**. Ele recebe esse nome pois ele apenas carrega informações da folha espacial  $\Sigma_t$ , mas não diz nada a respeito sobre como ela está imersa no espaço-tempo quadridimensional.

Em contraste com (2.45), podemos definir um **tensor de curvatura extrínseca**, que captura a informação de como as folhas espaciais estão imersas na variedade. Tal informação pode ser obtida a partir da mudança do vetor normal em diferentes pontos de  $\Sigma_t$ :

$$K_{\mu\nu} = {}^{(3)}\nabla_\mu n_\nu. \quad (2.46)$$

É importante notar que tanto (2.45), quanto (2.46) são tensores puramente espaciais, devido aos projetores presentes em  ${}^{(3)}\nabla_\mu$ , assim em alguns momentos eles podem ser denotados apenas com índices espaciais ( $a, b, \dots$ ) sem perder nenhuma informação.

O tensor de curvatura extrínseca satisfaz algumas propriedades importantes, que não serão demonstradas aqui, mas que irão gerar definições alternativas para o mesmo ao longo do texto:

$$K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}, \quad (2.47)$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{\mu\nu}, \quad (2.48)$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{\mu\nu} - {}^{(3)}\nabla_\mu N_\nu - {}^{(3)}\nabla_\nu N_\mu). \quad (2.49)$$

Por fim, podemos introduzir equações que mostram as relações entre o tensor de Riemann quadridimensional e os tensores de curvatura intrínseca e extrínseca. Tais relações são conhecidas como **equações de Gauss-Codazzi** ou **relações de curvatura** e são de vital importância na construção da Hamiltoniana da teoria. Porém, as demonstrações das mesmas são extensas e fogem do objetivo desta dissertação, de forma que elas serão apenas enunciadas. Uma dedução detalhada das mesmas pode ser encontrada em [23, pgs.47-49]. As relações são:

$$q^\delta_\mu q^\lambda_\nu q^\theta_\rho q^\sigma_\xi R_{\delta\lambda\theta}{}^\xi = {}^{(3)}R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma + K_{\mu\rho}K_\nu{}^\sigma - K_{\nu\rho}K_\mu{}^\sigma, \quad (2.50)$$

$$q^\mu_\delta q^\nu_\lambda q^\rho_\theta R_{\mu\nu\rho\sigma} n^\sigma = {}^{(3)}\nabla_\delta K_{\lambda\theta} - {}^{(3)}\nabla_\lambda K_{\delta\theta}, \quad (2.51)$$

$$R_{\mu\rho\nu\sigma} n^\rho n^\sigma = -\mathcal{L}_n K_{\mu\nu} + K_{\mu\delta} K_\nu{}^\delta + {}^{(3)}\nabla_{(\mu} n^\delta \nabla_{\delta} n_{\nu)} + n^\delta n^\lambda (\nabla_\delta n_\mu) (\nabla_\lambda n_\nu). \quad (2.52)$$

A equação (2.50) é conhecida como equação de Gauss. Já a equação (2.51) é chamada de equação de Codazzi. Por fim, a equação (2.52) é conhecida como equação de Ricci.

Podemos usar as relações de curvatura para escrever os componentes espaciais  $G^0_\mu$  e mostrar que elas realmente são vínculos entre a curvatura intrínseca e extrínseca, além de provar que as componentes  $G_{ab}$  contém derivadas segundas da métrica espacial  $q_{\mu\nu}$ , como feito em [27]. As novas variáveis introduzidas nesta seção são essenciais para reescrever a Hamiltoniana da teoria, levando à chamada ação ADM, que estabelece a Relatividade Geral como um sistema Hamiltoniano vinculado. Tal análise foi essencial no desenvolvimento da formulação canônica da Gravitação Quântica de Laços e pode ser encontrada em [23] e [3].

### 2.3.1 Variáveis ADM na linguagem de tetradas

Podemos implementar todas as variáveis discutidas nesta seção utilizando o formalismo de tetradas, o que será essencial no decorrer da dissertação. Fazendo a decomposição  $(3 + 1)$  das tetradas, temos:

$$e^0 = e^0_\mu dx^\mu = e^0_0 dx^0 + e^0_a dx^a, \quad (2.53)$$

$$e^i = e^i_\mu dx^\mu = e^i_0 dx^0 + e^i_a dx^a. \quad (2.54)$$

Sabemos que qualquer escolha de tetradas que satisfaça (2.11) é válida, de forma que, seguindo (2.42), podemos implementar as variáveis ADM da seguinte maneira:

$$e^0_a = 0; e^0_0 = N; e^i_0 = N^i. \quad (2.55)$$

Assim, temos:

$$e^0 = N dx^0; e^i = N^i dx^0 + e^i_a dx^a. \quad (2.56)$$

O termo  $e_a^i$  são as triadas (e não tetradas, pois estamos em 3D) relacionadas às folhas espaciais  $\Sigma$ . A relação com a métrica espacial é a usual:

$$q_{ab} = e_a^i e_b^j \delta_{ij}, \quad (2.57)$$

onde  $\delta_{ij}$  é a métrica interna, que no caso espacial é a métrica Euclidiana.

## 2.4 Ações para a Relatividade Geral

### 2.4.1 Ação de Einstein-Hilbert

Em 1915, em paralelo ao desenvolvimento da Relatividade Geral por Einstein, David Hilbert propôs um princípio variacional para a teoria, cujas equações de movimento reproduzem as equações de Einstein. A ação é conhecida como **ação de Einstein-Hilbert** e pode ser escrita como:

$$S_{EH}[g] = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\det(g)} R, \quad (2.58)$$

onde  $\det(g)$  é o determinante da métrica e  $R$  é o escalar de Ricci (2.4).

Podemos mostrar que a ação (2.58) nos retorna a equação de Einstein (2.1) quando utilizamos o princípio da mínima ação. Tal demonstração é feita em diversos livros de Relatividade Geral, como [19] e [20], de forma que nos concentraremos aqui nos princípios variacionais seguintes, que levaram à teoria quântica que queremos descrever.

A ação (2.58) pode ser reescrita, utilizando o formalismo de tetradas:

$$S[e] = \frac{1}{2} \int d^4x |\det(e)| e_I^\mu e_J^\nu F_{\mu\nu}{}^{IJ}, \quad (2.59)$$

onde foi utilizado que  $\det(g) = -\det(e)^2$  (obtido ao aplicarmos o determinante na equação (2.11)) e a definição do escalar de curvatura (2.32).

Traduzindo para a linguagem de formas diferenciais, temos:

$$S_{EH}[e] = \frac{1}{4} \int \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}, \quad (2.60)$$

que podemos mostrar ser equivalente a (2.59):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} &= \frac{1}{8} \epsilon_{IJKL} e_\mu^I e_\nu^J F_{\rho\sigma}{}^{KL} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \\ &= \frac{1}{8} \epsilon_{IJKL} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} e_\mu^I e_\nu^J F_{\rho\sigma}{}^{KL} d^4x \\ &= \frac{1}{2} \det(e) e_K^{[\rho} e_L^{\sigma]} F_{\rho\sigma}{}^{KL} d^4x = \frac{1}{2} \det(e) e_K^\rho e_L^\sigma F_{\rho\sigma}{}^{KL} d^4x, \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde foi usada a identidade  $\det(e) e_K^{[\rho} e_L^{\sigma]} = \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{IJKL} e_\rho^K e_\sigma^L$  e que os índices de  $F_{\rho\sigma}{}^{KL}$  são antissimétricos.

Assim, de fato as ações são equivalentes, exceto por um sinal, uma vez que a ação em variáveis métricas tem um termo na forma  $|\det(e)|$ , enquanto na ação de tetradas temos o mesmo termo sem o módulo. Assim, sobre uma operação de reversão temporal, o sinal da ação na formulação métrica não muda, enquanto na formulação de tetradas há uma inversão. Tal comportamento é observável, uma vez que afeta no acoplamento de férmions e também na evolução por integrais de trajetória [1]. Uma vez que ações no geral mudam de sinal para uma trajetória reversa, a ação na linguagem de tetradas surge como a ação natural para a Relatividade Geral.

Por fim, podemos introduzir a definição do operador **dual de Hodge**, denotado por  $\star$  e definido como:

$$F_{IJ}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} F^{KL}. \quad (2.62)$$

Assim, podemos reescrever a ação:

$$S_{EH}[e] = \frac{1}{2} \int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ}^* = \frac{1}{2} \int e \wedge e \wedge F^*, \quad (2.63)$$

onde no último passo todos os índices contraídos foram omitidos para termos uma notação mais compacta, que usaremos frequentemente daqui em diante.

## 2.4.2 Ação de Palatini

A ação de Einstein-Hilbert é dita uma formulação de segunda ordem, pois tem como variável apenas a tetrada  $e$  (ou a métrica  $g$ ) e a conexão é tomada como uma variável dependente de  $e$  via a condição de torção nula (2.21).

Porém, foi proposto por Palatini [24] um princípio variacional ligeiramente diferente de (2.63). A ação de Palatini, no formalismo de tetradas, pode ser enunciada como:

$$S_P[e, \omega] = \frac{1}{2} \int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ}^*[\omega] = \frac{1}{2} \int e \wedge e \wedge F^*[\omega]. \quad (2.64)$$

Ou seja, a ação mantém a mesma forma da ação de Einstein-Hilbert, porém aqui a curvatura  $F[\omega]$  depende da conexão, que é uma variável independente da tetrada a priori. Por este motivo, a ação de Palatini é dita uma formulação de primeira ordem.

Podemos fazer o princípio variacional para (2.64). Variando a conexão, temos:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge \delta F^{KL}.$$

Mas usando (2.26), temos:

$$\delta F^{IJ} = d(\delta\omega^{IJ}) + (\delta\omega^I_K) \wedge \omega^{KJ} + \omega^I_K \wedge (\delta\omega^{KJ}).$$

Porém, usando a derivada covariante exterior (2.17):

$$d^\omega(\delta\omega^{IJ}) = d(\delta\omega^{IJ}) + \omega^I_K \wedge \delta\omega^{KJ} + \omega^J_K \wedge (\delta\omega^{IK}). \quad (2.65)$$



Mas

$$\omega^J_K \wedge \delta\omega^{IK} = -\delta\omega^I_K \wedge \omega^{JK} = \delta\omega^I_K \wedge \omega^{KJ}, \quad (2.66)$$

de forma que podemos escrever  $\delta F^{IJ} = d^\omega(\delta\omega^{IJ})$ . Voltando à variação da ação:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2} \int \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge d^\omega(\delta\omega^{KL}) \\ &= \frac{1}{2} \int [d^\omega(\epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge \delta\omega^{KL}) - d^\omega(\epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J) \wedge \delta\omega^{KL}] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^\omega(\epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J) \wedge \delta\omega^{KL} \\ &= -\frac{1}{2} \int \epsilon_{IJKL} [d^\omega(e^I) \wedge e^J + e^I \wedge d^\omega(e^J)] \wedge \delta\omega^{KL} \\ &= -\frac{1}{2} \int [\epsilon_{IJKL} d^\omega(e^I) \wedge e^J - \epsilon_{IJKL} d^\omega(e^J) \wedge e^I] \wedge \delta\omega^{KL} \\ &= - \int \epsilon_{IJKL} (d^\omega e^I) \wedge e^J \wedge \delta\omega^{KL} = 0, \end{aligned}$$

onde na terceira linha o termo de fronteira foi desprezado. Assim, a ação é um extremo ( $\delta S = 0$ ) para variações  $\delta\omega^{KL}$  arbitrárias se:

$$d^\omega e^I = de^I + \omega^I_J \wedge e^J = 0, \quad (2.67)$$

de forma que recuperamos a condição de torção nula.

Variando a tetrada, temos:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2} \int [\epsilon_{IJKL} (\delta e^I) \wedge e^J \wedge F^{KL} + \epsilon_{IJKL} e^I \wedge (\delta e^J) \wedge F^{KL}] \\ &= \int \epsilon_{IJKL} (\delta e^I) \wedge e^J \wedge F^{KL} = 0. \end{aligned}$$

A ação é um extremo ( $\delta S = 0$ ) para variações  $\delta e^I$  arbitrárias se:

$$\epsilon_{IJKL} e^J \wedge F^{KL} = 0, \quad (2.68)$$

que são as equações de Einstein no vácuo no formalismo de tetradas (2.33).

Assim, vemos que a ação de Palatini retorna o formalismo obtido para a ação de Einstein-Hilbert no vácuo, porém é mais geral, na medida que não pressupõe uma relação entre a conexão e as tetradas. Além disso, para o acoplamento de férmions os dois formalismos não são equivalentes, como explicitado em [1] e [2].

### 2.4.3 Ação de Holst

Em 1996, Holst percebeu que podemos acrescentar um termo à ação de Palatini sem modificar as equações de movimento clássicas [25]. A esta ação generalizada da Relatividade Geral damos o nome de ação de Holst, que pode ser escrita como:

$$S_H[e, \omega] = \frac{1}{2} \int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ}^* + \frac{1}{2\gamma} \int e^I \wedge e^J \wedge F_{IJ}, \quad (2.69)$$

onde o segundo termo é chamado de termo de Holst e a constante de acoplamento  $\gamma$  recebe o nome de **constante de Barbero-Immirzi**. Podemos reescrever (2.69) de várias maneiras equivalentes:

$$S_H[e, \omega] = \frac{1}{2} \int e \wedge e \wedge \left( F^* + \frac{1}{\gamma} F \right) \quad (2.70)$$

$$= \frac{1}{2} \int e \wedge e \wedge \left( \star + \frac{1}{\gamma} \right) F \quad (2.71)$$

$$= \frac{1}{2} \int \left( \star e \wedge e + \frac{1}{\gamma} e \wedge e \right) \wedge F, \quad (2.72)$$

onde novamente os índices contraídos foram omitidos.

Podemos mostrar, via princípios variacionais, que o termo de Holst não modifica as equações de movimento clássicas. Variando a conexão, temos:

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \frac{1}{2} \int \left[ \left( \star + \frac{1}{\gamma} \right) e^I \wedge e^J \right] \wedge \delta F_{IJ} \\ &= \frac{1}{2} \int \left[ \left( \star + \frac{1}{\gamma} \right) e^I \wedge e^J \right] \wedge d^\omega (\delta \omega_{IJ}) \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ d^\omega \left[ \left( \star + \frac{1}{\gamma} \right) e^I \wedge e^J \wedge \delta \omega_{IJ} \right] - \left( \star + \frac{1}{\gamma} \right) \left[ d^\omega (e^I) \wedge e^J + e^I \wedge d^\omega (e^J) \right] \wedge \delta \omega_{IJ} \right\} \\ &= - \int \left[ \left( \star + \frac{1}{\gamma} \right) (d^\omega e^I) \wedge e^J \right] \wedge \delta \omega_{IJ} = 0, \end{aligned}$$

onde usamos (2.65) na segunda linha e desprezamos o termo de fronteira no último passo. A ação é um extremo ( $\delta S = 0$ ) para variações  $\delta \omega_{IJ}$  arbitrárias se:

$$d^\omega e^I = 0, \quad (2.73)$$

ou seja, recuperamos (2.67). Variando as tetradas, temos:

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \frac{1}{2} \int \left[ \delta e^I \wedge e^J \wedge \left( \star + \frac{1}{\gamma} \right) F_{IJ} + e^I \wedge \delta e^J \wedge \left( \star + \frac{1}{\gamma} \right) F_{IJ} \right] \\ &= \int \delta e^I \wedge e^J \wedge \left( \star + \frac{1}{\gamma} \right) F_{IJ} = 0. \end{aligned}$$

A ação é um extremo ( $\delta S = 0$ ) para variações  $\delta e_I$  arbitrárias se:

$$e^J \wedge \left( \star + \frac{1}{\gamma} \right) F_{IJ} = 0. \quad (2.74)$$

Usando (2.25), temos:

$$\begin{aligned} e^J \wedge \left( \star + \frac{1}{\gamma} \right) F_{IJ} &= e^J \wedge F_{IJ}^* + \frac{1}{\gamma} e^J \wedge F_{IJ} \\ &= e^J \wedge F_{IJ}^* + \frac{1}{\gamma} \eta_{IK} e^J \wedge F^K{}_J \\ &= e^J \wedge F_{IJ}^* + \frac{1}{\gamma} \eta_{IK} (d^\omega)^2 e^K = 0. \end{aligned}$$

Usando a condição de torção nula obtida na variação da conexão, o segundo termo zera e temos:

$$e^J \wedge F_{IJ}^* = 0 \rightarrow \epsilon_{IJKL} e^I \wedge F^{KL} = 0. \quad (2.75)$$

Ou seja, recuperamos a equação de Einstein no vácuo no formalismo de tetradas (2.33).

Assim, mostramos que classicamente a ação de Holst é equivalente à ação de Palatini. Em outras palavras, o termo de Holst não modificou as equações de movimento clássicas. Porém, como veremos adiante este termo trará implicações para a teoria quântica, de forma que a ação de Holst, que é a ação mais geral da Relatividade Geral, será nosso ponto de partida na construção da Gravitação Quântica de Laços.

## 2.5 Vínculo de Simplicidade Linear

Utilizando (2.72), podemos reescrever a ação de Holst da seguinte maneira:

$$S[e, \omega] = \int B^{IJ} \wedge F_{IJ} = \int B \wedge F, \quad (2.76)$$

onde a 2-forma  $B^{IJ}$  foi definida como:

$$B^{IJ} := \frac{1}{2} \left( \star e \wedge e + \frac{1}{\gamma} e \wedge e \right)^{IJ}. \quad (2.77)$$

A 2-forma  $B$  possui algumas propriedades importantes:

1.  $B^{IJ}$  toma valores na álgebra de  $sl(2, \mathbb{C})$

Para mostrar isso, basta notar que os índices de  $B$  são antissimétricos, de forma que o traço de  $B$  zera [28, pg. 3].

2.  $B$  é o momento conjugado à conexão  $\omega$

Para mostrar isso, podemos expandir  $F = d\omega + \omega \wedge \omega$  e notar que termos  $\dot{\omega}$  aparecem apenas em  $d\omega$ , de forma que  $\frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}} = B$ .

Devido a (2.76), dizemos que a Relatividade Geral é uma teoria BF, porém com um vínculo adicional, ao qual damos o nome de vínculo de simplicidade linear. Ele surge devido ao fato de trabalharmos em superfícies espaciais de fronteira ( $\Sigma$ ), assim como definimos no formalismo ADM. Passando para o espaço de Minkowski, utilizando o formalismo de tetradas, sabemos que nossa teoria é invariante por transformações de Lorentz (2.15). Porém, ao definirmos as superfícies  $\Sigma$ , quebramos a invariância pelo grupo de Lorentz para o grupo de rotações  $SU(2)$  em  $\Sigma$ .

Nestas superfícies, podemos naturalmente definir uma normal, como feito em (2.35). Mapeando-a para o espaço de Minkowski, utilizando (2.9), temos o vetor  $n^I$ . Aqui temos um passo importante: de posse de  $n^I$  e de  $B^{IJ}$  em  $\Sigma$ , podemos quebrar  $B$  em duas partes:

$$K^I = n_J B^{IJ}, \quad (2.78)$$

$$L^I = n_J (\star B)^{IJ}. \quad (2.79)$$

A componente (2.78) é conhecida como parte elétrica e a componente (2.79) é conhecida como parte magnética. Tais nomes surgem em analogia ao eletromagnetismo, pois de posse do tensor eletromagnético e de um referencial de Lorentz, podemos quebrar este tensor nas suas partes elétricas e magnéticas de forma análoga à feita aqui. Deve-se ressaltar que ao fixarmos uma superfície  $\Sigma$  e definirmos  $n^I$  estamos definindo exatamente um referencial de Lorentz, que nos permite a quebra de invariância citada anteriormente.

Uma vez que  $B^{IJ}$  é antissimétrico, temos que:

$$n_I n_J B^{IJ} = -n_I n_J B^{IJ} = n_I K^I = 0. \quad (2.80)$$

Analogamente para  $L^I$ . Ou seja,  $K^I$  e  $L^I$  são vetores puramente espaciais, fazendo sentido adotarmos a notação  $\vec{K}$  e  $\vec{L}$  para um determinado calibre em que  $K^I = (0, K^i)$  e  $L^I = (0, L^i)$ . Tal calibre é chamado calibre de tempo e será definido a seguir.

Sabemos que temos uma liberdade na escolha do vetor de *shift* e da função de lapso no formalismo ADM, uma vez que elas controlam como a folheação é feita, ou seja, elas determinam o campo de evolução temporal. Podemos então trabalhar no chamado calibre de tempo (ou *time gauge* na literatura), que consiste em escolhermos a normal para coincidir com o vetor de evolução temporal (em outras palavras,  $N = 1$  e  $N^\mu = 0$ ). De forma equivalente, na formulação de tetradas, o calibre de tempo é dado ao escolhermos:

$$e_a^0 = 0; e_0^0 = N = 1; e_0^i = N^i = 0. \quad (2.81)$$

Nestas condições, temos  $n_I = (1, 0, 0, 0)$ . Podemos então escrever as componentes de  $\vec{K}$  e  $\vec{L}$  neste calibre:

$$n_J B^{IJ}|_{n=(1,\vec{0})} = B^{i0} \rightarrow K^i = B^{i0}, \quad (2.82)$$

$$n_J (\star B)^{IJ}|_{n=(1,\vec{0})} = n_J \frac{1}{2} \epsilon^{IJ}{}_{KL} B^{KL}|_{n=(1,\vec{0})} = \frac{1}{2} \epsilon^{i0}{}_{kl} B^{kl} \rightarrow L^i = \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} B^{jk}. \quad (2.83)$$

Temos agora todas as condições necessárias para mostrarmos o vínculo. Primeiramente, no calibre de tempo, vemos que:

$$n_I e^I|_{\Sigma} = e^0 = dt|_{\Sigma} = 0. \quad (2.84)$$

Assim, aplicando nas definições (2.78) e (2.79):

$$K^I|_{\Sigma} = n_J B^{IJ}|_{\Sigma} = \frac{1}{2} n_I \left( \epsilon^{IJ}{}_{KL} e^K \wedge e^L + \frac{1}{\gamma} e^I \wedge e^J \right) |_{\Sigma} = \frac{1}{2} n_I (\star e \wedge e)^{IJ}. \quad (2.85)$$

Da mesma forma:

$$L^I|_{\Sigma} = n_J (\star B)^{IJ}|_{\Sigma} = \frac{1}{2\gamma} n_I (\star e \wedge e)^{IJ}, \quad (2.86)$$

onde usamos o fato que ao aplicarmos o operador  $\star$  duas vezes ele se anula e um índice da tetrada irá se contrair com  $n_I$ . Logo, observamos que uma componente de  $B$  é proporcional

a outra na superfície  $\Sigma$ . A essa relação de proporcionalidade damos o nome de **vínculo de simplicidade linear**, que pode ser escrito como:

$$\vec{K} = \gamma \vec{L}. \quad (2.87)$$

Tal vínculo deverá ser implementado na teoria quântica e será essencial em vários aspectos. Primeiramente, ele nos permitirá trabalhar com apenas uma das componentes de  $B$ , uma vez que elas são proporcionais nas superfícies  $\Sigma$ . Além disso, poderemos usar estados  $SU(2)$  na cinemática da teoria quântica, que possuem diversas vantagens operacionais, e sua implementação nos dará o mapeamento entre os estados  $SU(2)$  e  $SL(2, \mathbb{C})$  na dinâmica da teoria.

## 2.6 Variáveis de Ashtekar

As variáveis de Ashtekar tem grande importância histórica no desenvolvimento da teoria da Gravitação Quântica de Laços. Elas foram introduzidas em 1986 por Ashtekar [5], que percebeu que a sua utilização simplificava a forma dos vínculos da Hamiltoniana da Relatividade Geral [6], o que possibilitou o surgimento do formalismo canônico da teoria. Tais variáveis também vão desempenhar um papel essencial no formalismo de *spinfoams*, uma vez que a álgebra que elas estabelecem será um dos pontos de partida na construção da teoria quântica.

Há várias maneiras de chegarmos às variáveis de Ashtekar. Uma delas é via transformações canônicas no espaço de fase do formalismo ADM, como feito em [3]. Também é possível inseri-las manualmente ao escrevermos a ação de Holst no formalismo Hamiltoniano, como em [26]. Embora tais tratamentos sejam essenciais na formulação canônica da teoria, eles requerem um tratamento matemático longo e rigoroso, que não será essencial na formulação de *spinfoams*, uma vez que ela não parte da Hamiltoniana e dos vínculos da teoria. Aqui tomaremos um caminho mais curto, que destaca a origem da variáveis como um par conjugado e dá ênfase à sua interpretação geométrica.

Partindo da ação de Holst (2.70), podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$S = \frac{1}{2} \int e^I \wedge e^J \wedge \left( \frac{F^{KL}}{2} \epsilon_{IJKL} + \frac{1}{\gamma} F_{IJ} \right). \quad (2.88)$$

Assim como fizemos na análise da 2-forma  $B^{IJ}$  em (2.77), se queremos encontrar os momentos temos que procurar por derivadas temporais na ação. Lembrando que  $F_{IJ} = d\omega_{IJ} + \omega_{IK} \wedge \omega^K{}_J$ , vemos que os únicos termos que aparecem com derivadas temporais em (2.88) vão surgir de  $d\omega$ . Assim, omitindo os termos  $\omega \wedge \omega$  (que serão inseridos em um termo representado por  $(\dots)$  nas próximas equações, assim como os demais termos

omitidos daqui pra frente), temos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \int e^I \wedge e^J \wedge \left( d\omega^{KL} \epsilon_{IJKL} + \frac{2}{\gamma} d\omega_{IJ} \right) + (\dots) \\ &= -\frac{1}{4} \int d(e^I \wedge e^J) \wedge \left( \omega^{KL} \epsilon_{IJKL} + \frac{2}{\gamma} \omega_{IJ} \right) + (\dots), \end{aligned} \quad (2.89)$$

onde no último passo fizemos uma integração por partes e ignoramos o termo de fronteira. Queremos analisar as derivadas explicitamente, então temos que sair da linguagem de formas diferenciais. Usando que:

$$\int dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma = - \int \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = - \int \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} dt d^3x, \quad (2.90)$$

temos:

$$S = \frac{1}{4} \int \partial_\mu (e_\nu^I e_\rho^J) \left[ \omega_\sigma^{KL} \epsilon_{IJKL} + \frac{2}{\gamma} \eta_{IK} \eta_{JL} \omega_\sigma^{KL} \right] \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d^4x + (\dots). \quad (2.91)$$

Estamos interessados nas derivadas temporais, então vamos nos concentrar em  $\mu = 0$  e inserir todos os demais termos em  $(\dots)$ :

$$S = \frac{1}{4} \int \partial_0 (e_a^I e_b^J) \left[ \omega_c^{KL} \epsilon_{IJKL} + \frac{2}{\gamma} \eta_{IK} \eta_{JL} \omega_c^{KL} \right] \epsilon^{abc} d^4x + (\dots), \quad (2.92)$$

onde definimos  $\epsilon^{0abc} = \epsilon^{abc}$ . Implementando o calibre de tempo (2.81), temos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \int \partial_0 (e_a^i e_b^j) \left[ \omega_c^{KL} \epsilon_{ijkl} + \frac{2}{\gamma} \eta_{iK} \eta_{jL} \omega_c^{KL} \right] \epsilon^{abc} d^4x + (\dots) \\ &= \frac{1}{4} \int \partial_0 (e_a^i e_b^j) \left[ 2\omega_c^{0k} \epsilon_{ijk} + \frac{2}{\gamma} \delta_{il} \delta_{jm} \omega_c^{lm} \right] \epsilon^{abc} d^4x + (\dots) \\ &= \int \partial_0 \left( \frac{1}{2} e_a^i e_b^j \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} \right) \left[ \omega_c^{0k} + \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{lm}{}^k \omega_c^{lm} \right] d^4x + (\dots), \end{aligned} \quad (2.93)$$

onde no último passo usamos que:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lm}{}^k \omega^{lm} = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \omega^{lm} = \omega_{ij} - \omega_{ji} = 2\omega_{ij}. \quad (2.94)$$

Assim, chegamos na forma final das variáveis. Definimos o **campo elétrico de Ashtekar** como:

$$E_i^a(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} e_b^j e_c^k, \quad (2.95)$$

também chamado de **triada densitizada**, pois pode ser escrito como o inverso da triada multiplicada pelo seu determinante.

Definimos também a **conexão de Ashtekar** ou **conexão de Ashtekar-Barbero**:

$$A_a^i(x) = \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} \omega_a^{jk} + \gamma \omega_a^{0i} \quad (2.96)$$

e vemos pela forma de (2.93), que  $A_a^i$  é o momento conjugado a  $E_i^a$ .

Podemos ter uma intuição melhor do significado da conexão de Ashtekar ao analisarmos cada um de seus termos. O primeiro claramente é a conexão de *spin* relacionada a triada, ou seja, a solução da primeira equação de Cartan em 3D:

$$de^i + \omega^i_k \wedge e^k = 0. \quad (2.97)$$

Usualmente, utiliza-se a seguinte notação para este termo:

$$\Gamma_a^i = \frac{1}{2} \epsilon^i_{kl} \omega_a^{kl}. \quad (2.98)$$

Já o segundo termo exige uma análise mais cuidadosa. Calculando sua contração com a triada, temos:

$$e_{ci} \omega_a^{0i} = -e_{ci} \omega_a^{i0} = -q_a^b e_{ci} \omega_a^{io} = -q_a^b e_{ci} e^{di} \nabla_b e_d^0 = q_a^b q_c^d \nabla_b n_d = K_{ac}, \quad (2.99)$$

onde usamos (2.23) no terceiro passo e  $e_d^0 = \eta^{0I} q_{dc} e_I^c = -q_{dc} e_0^c = -n_d$  no quarto. Assim, somos motivados a definir:

$$K_a^i = \omega_a^{0i} = K_{ab} e^{bi}. \quad (2.100)$$

Deste modo, o termo  $\omega_a^{0i}$  em (2.96) pode ser interpretado como a versão em tetradas da curvatura extrínseca. Podemos reescrever a conexão de Ashtekar como:

$$A_a^i(x) = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i. \quad (2.101)$$

Assim, a conexão de Ashtekar possui uma interpretação geométrica interessante: ela transporta objetos paralelamente na folha  $\Sigma$  com o primeiro termo, mas também produz um transporte paralelo devido à curvatura extrínseca, devido ao segundo termo. Assim, ela se mostra muito útil ao codificar informações da folheação e de como ela está imersa na variedade.

Devido à definição (2.100), temos que impor um vínculo adicional à teoria. Sabemos que  $K_{ab}$  é um tensor simétrico (2.47), porém, a contração  $K_a^i e_{ib}$  não carrega esta informação. Assim, impomos o chamado **vínculo de Gauss**:

$$G_{ab} := K_{[a}^i e_{ib]} = 0, \quad (2.102)$$

que recebe este nome devido à forma que o mesmo assume na formulação Hamiltoniana da teoria, que é análoga ao vínculo de Gauss nas teorias de Yang-Mills. Pode-se mostrar também que este vínculo gera transformações infinitesimais  $SO(3)$  [3, pg. 125].

Vemos que as novas variáveis possuem um índice vetorial interno espacial livre. Assim, podemos utilizar o isomorfismo existente entre  $\mathbb{R}^3$  e  $SU(2)$  (associando uma base de matrizes de Pauli  $\{\sigma_i\}$  a estes vetores, por exemplo) para trabalhar com ambas as variáveis tomando valores em  $su(2)$ , o que será extremamente conveniente na teoria quântica.

Um dos pontos centrais da utilização das variáveis de Ashtekar está no fato de que elas formam um par canônico. A álgebra que elas estabelecem é então dada por:

$$\{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = \{E_i^a(x), E_j^b(y)\} = 0, \quad (2.103)$$

$$\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = \gamma \delta_j^i \delta_a^b \delta(x, y). \quad (2.104)$$

Apesar de simples, tal álgebra não é trivial e é obtida através da análise Hamiltoniana da teoria. Sua dedução de forma detalhada pode ser consultada em [3].



### 3 Discretização Clássica

Seguindo a prescrição de quantização do formalismo de *spinfoams* para a Gravitação Quântica de Laços, temos como próximo passo a construção de uma teoria discreta para a Relatividade Geral Clássica.

Tal construção será essencial, tanto para a cinemática como para a dinâmica da teoria. A partir da álgebra estabelecida em (2.103) e (2.104), poderemos construir uma álgebra de observáveis para variáveis discretas, que levará à álgebra de Holonomia-Fluxo, que estabelecerá a cinemática da teoria quântica através de um processo de quantização canônica.

Já a dinâmica da teoria quântica é estabelecida através do formalismo de integrais de trajetória. Sabe-se que a amplitude de transição  $W(x, t, x', t')$ , entre um estado inicial  $|x\rangle$  e final  $|x'\rangle$ , em um intervalo entre  $t$  e  $t'$ , pode ser escrita da seguinte maneira:

$$W(x, t, x', t') = \langle x' | U(t' - t) | x \rangle = \int_t^{t'} D[x(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}, \quad (3.1)$$

onde  $U(t' - t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(t' - t)}$  é o operador de evolução temporal e  $S[x]$  é a ação clássica. Porém, podemos escrever a expressão (3.1) através de um processo limite:

$$W(x, t, x', t') = \mathcal{N} \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_n e^{\frac{i}{\hbar} S_N[x_n]}, \quad (3.2)$$

onde  $\mathcal{N}$  é um fator de normalização e  $S_N[x_n]$  é a discretização da ação clássica. Como exemplo, para um sistema clássico no qual a Lagrangiana pode ser escrita como  $L = T - U$ , a discretização da ação clássica pode ser escrita como:

$$S_N[x_n] = \sum_{n=1}^N \left( \frac{m(x_{n+1} - x_n)^2}{2\Delta t^2} - U(x_n) \right) \Delta t. \quad (3.3)$$

Assim, um outro objetivo deste capítulo é encontrar uma ação para a teoria discreta da Relatividade Geral, de forma que possamos utilizá-la em (3.2) para o cálculo das amplitudes de transição quânticas.

É importante destacar que ao trocarmos a teoria contínua da Relatividade Geral por uma descrição discreta da mesma, estamos trocando uma teoria com infinitos graus de liberdade por um teoria com um número finito graus de liberdade. Assim, ao escolhermos uma determinada discretização da variedade, estamos truncando os graus de liberdade com os quais iremos trabalhar, o que trará consequências na descrição, como será discutido nos capítulos seguintes.

Além disso, vale destacar que este procedimento de discretização é diferente da posterior quantização e ambos não devem ser confundidos. O fato de que os operadores

que serão definidos no Capítulo 4 possuem um espectro discreto em nada está relacionado com a discretização que aqui será feita. Novamente, o procedimento de discretização é clássico e leva a um truncamento dos graus de liberdade de um determinado problema. A quantização é um resultado físico e é consequência somente do problema estudado.

As ideias e técnicas utilizadas neste capítulo surgiram de dois principais campos de estudo: as teorias de calibre na rede e o cálculo de Regge. O primeiro deles tem como principal objetivo trabalhar com as teorias de calibre de Yang-Mills em um espaço discreto, chamado de rede, e obter uma ação discreta, para calcularmos amplitudes de transição numericamente, utilizando (3.2). Já o cálculo de Regge foi introduzido por Tullio Regge [29], com o objetivo de descrever a Relatividade Geral apenas em termos geométricos, sem o uso de coordenadas. Utilizando tais ideias, Ponzano e Regge construíram um primeiro modelo quântico para a Relatividade Geral em três dimensões [30], que motivou os trabalhos seguintes, que serão descritos neste capítulo.

### 3.1 Discretização do Espaço-Tempo

As teorias de calibre na rede são construídas em um espaço discreto, de forma que os campos possuem valores definidos apenas nos nós ou arestas da rede. Porém, a Relatividade Geral é uma teoria completamente diferente das demais, pois o campo gravitacional não apenas toma valores no espaço, mas ele próprio dita a geometria do espaço-tempo. Assim, ao construirmos uma teoria discreta para a Relatividade Geral, estamos construindo uma discretização do espaço-tempo em si, o que terá implicações geométricas significativas, como será visto adiante.

O primeiro passo consiste na escolha de como quebrar o espaço-tempo em porções discretas. Tal procedimento será feito através de triangulações. Uma triangulação é a divisão de uma variedade  $d$ -dimensional em  $d$ -simplexos, juntamente com relações de fronteira e orientações. Um  $d$ -simplexo é a generalização de triângulos e tetraedros para dimensões arbitrárias, sendo definido como a região convexa de  $M$  delimitada por  $d + 1$  pontos. Por exemplo, podemos quebrar uma variedade bidimensional em vários triângulos (ver Figura 2) ou uma variedade tridimensional em vários tetraedros.

Um  $d$ -simplexo é totalmente determinado pelos  $d(d + 1)/2$  segmentos  $s$  que o delimitam, de forma que podemos definir o que chamamos de **espaço de Regge**: um espaço de Regge  $(M, s)$  é um espaço métrico  $d$ -dimensional obtido ao colarmos  $d$ -simplexos pelos  $(d - 1)$ -simplexos da sua fronteira. O grande trunfo do cálculo de Regge está no fato de que qualquer variedade Riemanniana  $(M, g)$  pode ser aproximada arbitrariamente bem por uma geometria de Regge  $(M, s)$  [31].

Para o caso quadridimensional em que estamos interessados, nossa variedade  $M$  será dividida em 4-simplexos. Um 4-simplexo é uma envoltória convexa quadridimensional

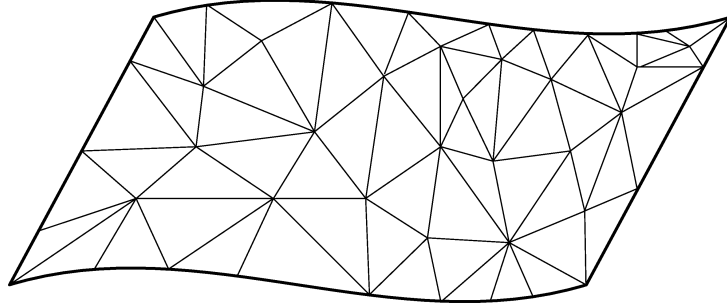


Figura 2 – Triangulação de uma variedade bidimensional.

Triangulação ( $\Delta$ )	2-complexo ( $\mathcal{C} = \Delta^*$ )
4-simplexo ( $v$ )	Vértice ( $v$ )
Tetraedro ( $\tau$ )	Aresta ( $e$ )
Triângulo ( $t$ )	Face ( $f$ )
Segmento ( $s$ )	
Ponto ( $p$ )	

Tabela 1 – Triangulação de uma variedade quadridimensional.

de 5 pontos. Em sua fronteira temos cinco 3-simplexos, que são tetraedros. Os tetraedros por sua vez são delimitados por triângulos, que são delimitados por segmentos, que são delimitados por pontos. Todas as estruturas citadas são orientadas de forma arbitrária, o que será conveniente na definição das variáveis. Uma dada triangulação de  $M$  será denotada por  $\Delta$ , enquanto a notação para os componentes da triangulação podem ser consultados na Tabela 1.

Com o objetivo de discretizar a Relatividade Geral e suas variáveis dinâmicas, é conveniente introduzir uma estrutura dual à triangulação construída. Tal introdução é feita da seguinte maneira: para cada 4-simplexo, que representa uma porção do espaço quadridimensional, associamos um vértice, que faz o mesmo papel dos sítios nas teorias de calibre na rede. Ligando dois vértices, teremos uma aresta, que são associadas aos tetraedros, uma vez que dois 4-simplexos são colados por um tetraedro comum. Entre duas arestas podemos associar uma face, que está relacionada ao triângulo comum entre dois tetraedros colados. A esta estrutura dual a triangulação damos o nome de **2-complexo**, que é composto por vértices, arestas e faces, todos orientados, sendo denotado por  $\Delta^*$  ou  $\mathcal{C}$ . As relações entre os elementos da triangulação e do 2-complexo podem ser consultados na Tabela 1. A visualização gráfica do 2-complexo para um único 4-simplexo está representada na Figura 3.

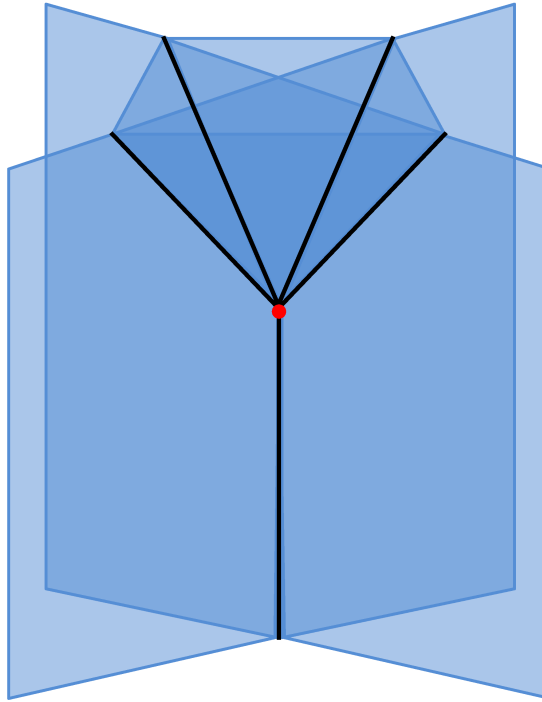


Figura 3 – 2-complexo para um 4-simplexo. Em vermelho temos o vértice ( $v$ ), em preto as arestas ( $e$ ) e em tons de azul as faces ( $f$ ).

### 3.1.1 Discretização da Fronteira

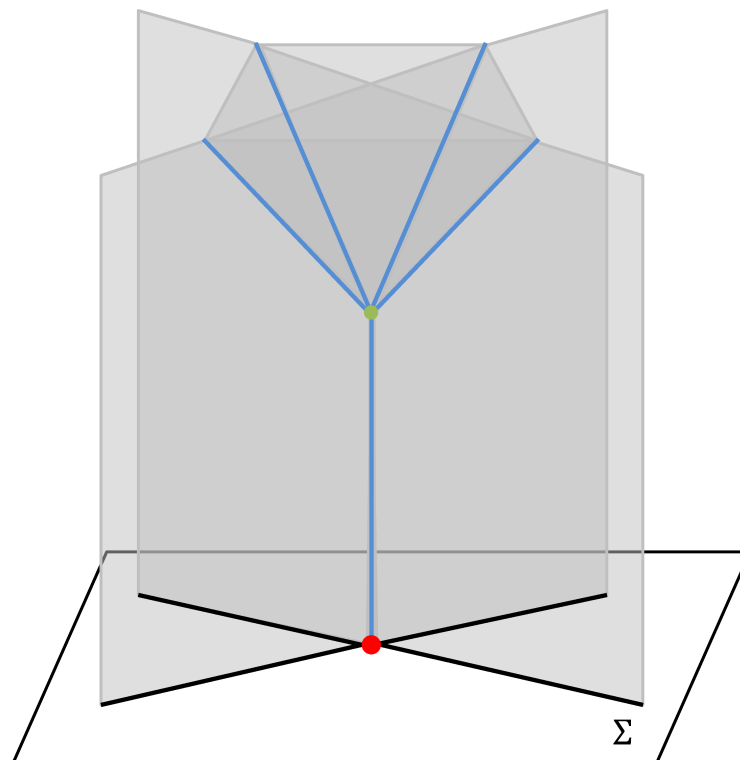
Pelo motivos mencionados no Capítulo 2, a cinemática da teoria quântica será construída em superfícies de fronteira. Assim, devemos construir também uma estrutura discreta para tais superfícies. Porém, com as escolhas feitas para a triangulação do *bulk*, não temos liberdade para discretizar a fronteira arbitrariamente.

A fronteira é uma variedade tridimensional, de forma que a sua triangulação é feita por tetraedros, que são colados pelos triângulos, que por sua vez são colados pelos segmentos, que se juntam nos pontos. Construímos o dual da triangulação de forma análoga ao feito em quatro dimensões, associando um nó para cada porção do espaço, que neste caso são tetraedros. Dois nós são ligados por um *link*, que são associados aos triângulos que estão na fronteira entre dois tetraedros colados. Desta forma, o dual da triangulação forma um grafo na fronteira, denotado por  $\Gamma$ . As relações entre os elementos da triangulação da fronteira e do grafo estão na Tabela 2.

É importante observar que o grafo pode ser visto como o dual da triangulação na fronteira ( $\Gamma = (\partial\Delta)^*$ ), como feito no parágrafo anterior, mas também pode ser visto como a fronteira do 2-complexo ( $\Gamma = \partial\Delta^*$ ). Para isso, podemos observar que um segmento do 2-complexo que corta a superfície na fronteira representa um nó, uma vez que ele é um tetraedro da fronteira. Já uma face que intercepta a superfície de fronteira está

Triangulação da fronteira ( $\partial\Delta$ )	Grafo ( $\Gamma = (\partial\Delta)^* = \partial\Delta^*$ )
Tetraedro ( $\tau$ )	nó ( $n$ )
Triângulo ( $t$ )	<i>link</i> ( $\ell$ )
Segmento ( $s$ )	
Ponto ( $p$ )	

Tabela 2 – Triangulação da fronteira.

Figura 4 – Grafo como a fronteira de um 2-complexo para um 4-simplexo. Em vermelho temos o nó ( $n$ ) e em preto os *links* ( $\ell$ ).

associada a um *link*, uma vez que ela é dual aos triângulos. Tais relações estão representadas graficamente na Figura 4.

Reunindo as informações, temos então que a discretização da fronteira é representada por um grafo, que é um conjunto de nós e *links* ( $\Gamma = \{n, \ell\}$ ), no qual os *links* possuem uma orientação arbitrária. Um tetraedro possui quatro triângulos na sua borda, de forma que, pela associação feita, para cada nó teremos 4 *links* em nosso grafo, ou seja, nosso grafo é quadrivalente. Uma representação de uma seção de um grafo genérico com estas características está na Figura 5.

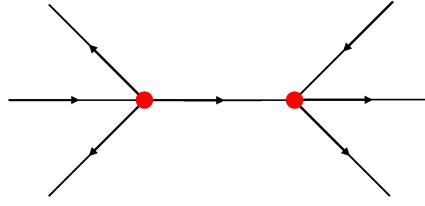


Figura 5 – Seção de um grafo quadrivalente orientado. Em vermelho temos os nós ( $n$ ) e em preto os *links* ( $\ell$ ).

## 3.2 Discretização das Variáveis Dinâmicas

A estrutura introduzida na seção anterior torna a discretização do espaço-tempo muito semelhante àquela feita para as teorias de calibre na rede, se associarmos os sítios da rede com os vértices (ou nós, na fronteira). Assim, o próximo passo consiste na discretização das variáveis clássicas introduzidas no Capítulo 2.

Sabemos que temos uma conexão  $\omega$ , que toma valores em  $sl(2, \mathbb{C})$ , responsável pelo transporte paralelo contínuo na variedade. Porém, com um espaço discreto o transporte paralelo é feito de forma discreta, ou seja, precisamos de um elemento que faça o transporte entre um vértice e outro. Desta forma, assim como nas teorias de calibre, associamos um elemento do grupo, que é a matriz de transporte paralelo gerada por  $\omega$ , a cada aresta  $e$ , responsável por fazer o transporte paralelo entre dois vértices:

$$U_e = \mathcal{P}e^{\int_e \omega}, \quad (3.4)$$

onde  $\mathcal{P}$  é o operador de ordenamento de caminho, necessário pois estamos trabalhando com grupos não-abelianos. Ele é definido a partir da expansão da exponencial em séries de Taylor:

$$\mathcal{P}e^{\int_\gamma \omega} = \mathbb{I} + \int_\gamma \omega + \int_0^1 ds \int_0^s dt \dot{\gamma}^\mu(s) \omega_\mu(\gamma(s)) \dot{\gamma}^\nu(t) \omega_\nu(\gamma(t)) + \dots, \quad (3.5)$$

onde, por exemplo, o termo quadrático pode ser escrito como  $\frac{1}{2} \mathcal{P} \int_\gamma \omega \int_\gamma \omega$ . A nova variável discreta  $U_e$  é chamada de **holonomia** e é um elemento do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ .

A holonomia será uma variável essencial em nossa construção, de forma que precisamos estudá-la mais profundamente. Se  $\gamma$  é uma curva contínua na variedade, a holonomia da conexão  $\omega$  ao longo de  $\gamma$  é definida pela equação:

$$\frac{d}{ds} U(s) - \dot{\gamma}^\mu(s) \omega_\mu(\gamma(s)) U(s) = 0 \quad (3.6)$$

e pela condição  $U(0) = \mathbb{I}$ , onde  $\dot{\gamma}^\mu(s)$  é a tangente à curva. É fácil notar que (3.4) é solução de (3.6), se identificarmos a curva  $\gamma$  com a aresta e adotarmos que  $U = U(s = 1)$ ,

para uma parametrização da aresta com um parâmetro  $s$  variando entre 0 e 1. A notação compacta utilizada em (3.4) pode ser traduzida para:

$$U_\gamma = \mathcal{P} \exp \left[ \int_0^1 ds \dot{\gamma}^\mu(s) \omega_\mu(\gamma(s)) \right]. \quad (3.7)$$

Outra propriedade fundamental da holonomia é a forma como ela se transforma sob transformações de calibre na conexão ao longo do caminho de integração. Como resultado, temos que a holonomia se transforma como:

$$U_\gamma \rightarrow \Lambda(\gamma(0)) U_\gamma \Lambda^{-1}(\gamma(1)) \quad (3.8)$$

ou, utilizando a notação da discretização no 2-complexo, que será a usual daqui em diante:

$$U_e \rightarrow \Lambda_{s_e} U_e \Lambda_{t_e}^{-1}; \quad \Lambda_{s_e}, \Lambda_{t_e} \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (3.9)$$

onde  $s_e$  é o vértice de onde sai a aresta e  $t_e$  é o vértice onde a aresta chega (de *source* e *target*, no inglês). Ou seja, as transformações de calibre acontecem apenas nos vértices.

Por fim, definimos a holonomia com orientação contrária como sendo o inverso da holonomia na orientação usual, ou seja:

$$U_{-e} = U_e^{-1}. \quad (3.10)$$

É importante citar que a utilização do termo holonomia na literatura de Gravitação Quântica de Laços, em geral, difere da literatura matemática. Aqui, a variável holonomia não precisa ser integrada ao redor de um *loop* fechado, como normalmente é definida em textos matemáticos.

Com estas definições, vemos ainda mais semelhanças entre as teorias de calibre e a forma como estamos construindo nossa teoria. A holonomia desempenha o mesmo papel das linhas de Wilson, sendo definida da mesma maneira e se comportando da mesma forma sob transformações de calibre.

Como discutido, a variável conjugada à conexão em 4 dimensões é a 2-forma  $B$ . Uma 2-forma pode ser integrada em uma superfície, de forma que discretizamos  $B$  integrando-a nos triângulos da nossa triangulação. Como os triângulos são unicamente associados com as faces, a variável pode ser discretizada como:

$$B_f = \int_{t_f} B. \quad (3.11)$$

A 2-forma  $B$  toma valores em  $sl(2, \mathbb{C})$ , de forma que  $B_f \in sl(2, \mathbb{C})$ .

A nova variável  $B_f$  não se transforma apenas nos vértices sob transformações de calibre em um calibre arbitrário. Por isso, consideraremos que a definição de  $B_f$  é tomada em um calibre que a holonomia pode ser quebrada em dois fatores, cada um deles

correspondendo a holonomia de uma metade da aresta ( $U_e = U_e^+ U_e^-$ ), sendo a holonomia da segunda metade igual a identidade ( $U_e^- = \mathbb{I}$ ), além de assumir a conexão constante no triângulo  $t_f$ . Com estas condições,  $B$  se transforma apenas nos nós [1, pg.134].

Logo, temos as variáveis do nosso espaço de fase discreto  $(U_e, B_f) \in SL(2, \mathbb{C}) \times sl(2, \mathbb{C})$ . Com esta estrutura, podemos fazer a teoria hamiltoniana para as variáveis discretas, calculando os colchetes de Poisson entre as variáveis, utilizando técnicas de teoria hamiltoniana na rede, aproveitando as propriedades do grupo envolvido. Porém, tal passo será essencial somente para as variáveis na fronteira, que levarão à cinemática da teoria quântica. Assim, o mesmo será desenvolvido na próxima seção.

### 3.2.1 Variáveis da Fronteira

Na fronteira, a discretização natural levaria a variáveis  $(B_\ell, U_\ell)$ , assim como as definidas na seção anterior, porém discretizadas no grafo da fronteira. Ambas são associadas aos *links*, pois a holonomia na fronteira fará o transporte paralelo entre dois nós e a 2-forma  $B$  ainda será integrada nos triângulos, que na fronteira são duais aos *links*. Porém, podemos utilizar alguns resultados presentes no Capítulo 2 para simplificar a teoria e que trarão consequências física importantes.

Sabemos que na fronteira, devido ao vínculo de simplicidade linear (2.87), as componentes elétricas e magnéticas da 2-forma  $B$  são proporcionais, de forma que podemos trabalhar apenas com uma delas sem perda de informação. Em particular iremos trabalhar com a componente magnética  $L^i$ . Utilizando (2.83) e que:

$$(\star e \wedge e)^{jk}|_\Sigma = \epsilon^{jk}{}_{IL} e^I \wedge e^L|_\Sigma = 0, \quad (3.12)$$

no calibre de tempo, temos:

$$L^i = \frac{1}{2\gamma} \epsilon^i{}_{jk} e^j \wedge e^k. \quad (3.13)$$

A discretização de  $B$  nos *links* implica na discretização de  $L^i$  também nos *links*, de forma que temos:

$$L_\ell^i = \frac{1}{2\gamma} \epsilon^i{}_{jk} \int_{t_\ell} e^j \wedge e^k. \quad (3.14)$$

Porém, podemos mostrar que a  $L^i$  está completamente ligada ao campo elétrico de Ashtekar. Partindo de (2.95), podemos introduzir a 2-forma:

$$E^i = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} E^{ai} dx^b \wedge dx^c. \quad (3.15)$$



Substituindo a definição (2.95), temos:

$$\begin{aligned}
E^i &= \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \left[ \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} \epsilon^{ade} e_d^j e_e^k \right] dx^b \wedge dx^c \\
&= \frac{1}{4} \epsilon^i{}_{jk} \left( \delta_b^d \delta_c^e - \delta_b^e \delta_c^d \right) e_d^j e_e^k dx^b \wedge dx^c \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} e_d^j e_e^k dx^d \wedge dx^e \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} e^j \wedge e^k.
\end{aligned}$$

Ou seja,  $E^i$  reproduz a componente magnética  $L^i$  a menos da constante  $\gamma$ , de forma que podemos trabalhar com ela nas superfícies de fronteira. Discretizando  $E^i$  nos *links*, temos:

$$E_\ell^i = \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} \int_{t_\ell} e^j \wedge e^k. \quad (3.16)$$

A nova variável discreta tem uma interpretação geométrica que será fundamental na teoria quântica. Sabemos que a área de uma superfície pode ser dada por:

$$A_S = \int_S d^2\sigma \sqrt{\det(h)},$$

onde  $h$  é a métrica induzida na superfície  $S$ . Seguindo a mesma lógica do formalismo ADM, teremos uma métrica induzida em  $S$ , que pode ser escrita como  $h_{ab} = q_{ab} - r_a r_b$ , onde  $r_a$  é normal a superfície. Escolhendo coordenadas em que  $x^3 = 0$  define a superfície,  $h_{ab}$  pode ser escrita como:

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Usando que  $q^{ab} = \frac{1}{\det(q)} C^{ba}$ , onde  $C^{ab}$  é a matriz dos cofatores, temos que  $q^{33} = \frac{1}{\det(q)} \det(h)$ . Substituindo, temos:

$$A_S = \int_S d^2\sigma \sqrt{\det(q) q^{33}} = \int_S d^2\sigma \sqrt{\det(e)^2 e_i^3 e_j^3 \delta^{ij}} = \int_S d^2\sigma \sqrt{E_i^3 E_j^3 \delta^{ij}} = \int_S |E^i|. \quad (3.18)$$

Assim, o vetor definido por  $E_\ell^i$  fornece a área do triângulo associado ao *link*  $\ell$  e é normal a superfície do mesmo.

Utilizaremos então  $E_\ell^i$  como nossa variável discreta. Porém foi visto no Capítulo 2, que a variável conjugada a  $E^i$  nas superfícies de fronteira é a conexão de Ashtekar. Assim, nosso par canônico que será utilizado na teoria quântica será  $(E_i^a, A_a^i)$ , de forma que temos que discretizar a conexão. A discretização será feita da mesma forma que na seção anterior: a conexão será discretizada através da holonomia associada a cada *link*:

$$U_\ell = \mathcal{P} e^{\int_\ell A}, \quad (3.19)$$

onde a notação compacta pode ser traduzida como:

$$U_\ell = \mathcal{P} \exp \left[ \int_0^1 ds \dot{\gamma}^a(s) A_a^i(\gamma(s)) \tau_i \right], \quad (3.20)$$

onde  $\gamma^\mu$  é a curva que percorre o *link*  $\ell$  e  $\tau_i$  são os geradores de  $su(2)$ . Assim, nossa holonomia assume valores no grupo  $SU(2)$  na representação fundamental.

Com a definição das variáveis discretas, percebemos uma estrutura semelhante à da seção anterior. Nosso espaço de fase será dado por  $(U_\ell, E_\ell) \in SU(2) \times su(2) \simeq T^*SU(2)$ . Com esta estrutura, os colchetes de Poisson entre as variáveis discretas já são conhecidos, devido a estudos de teoria Hamiltoniana na rede e podemos apenas enunciá-los:

$$\{U_\ell, U_{\ell'}\} = 0, \quad (3.21)$$

$$\{E_\ell^i, E_{\ell'}^j\} = \gamma \delta_{\ell\ell'} \epsilon^{ij}_k E_\ell^k, \quad (3.22)$$

$$\{U_\ell, E_{\ell'}^i\} = \gamma \delta_{\ell\ell'} U_\ell \tau^i. \quad (3.23)$$

Podemos porém construir cada um dos colchetes individualmente. O mais trivial surge de (3.22), uma vez que associamos  $E_\ell^i$  com elementos da álgebra de  $su(2)$ . Assim, os colchetes deverão reproduzir as relações já conhecidas para momento angular, a menos do fator  $\gamma$ . Já para (3.21), basta expandir a holonomia em termos da conexão e substituir (2.103).

Para o cálculo de (3.23), precisamos de mais cuidado. Sabemos de (2.104) que o colchete entre as variáveis é nulo, a menos que elas sejam avaliadas no mesmo ponto, devido ao  $\delta(x, y)$ . Assim, antecipando este fato, a menos que  $\ell = \ell'$  os colchetes serão nulos, de modo que podemos escrever:

$$\{U_\ell, E_{\ell'}^i\} = \{\mathcal{P}e^{\int_\ell A}, E_{\ell'}^i\} = \{\mathcal{P}e^{\int_\ell A}, E_\ell^i\} \delta_{\ell\ell'}.$$

Podemos quebrar a holonomia em três parcelas: a primeira será feita integrando a conexão na primeira metade do *link* e a última integrando na segunda metade. No ponto do *link* em que há a interseção com o triângulo  $t_\ell$ , ou seja, o único ponto que gera um termo não nulo nos colchetes, criamos um pequeno intervalo de comprimento  $\epsilon$  e tomamos o limite:

$$U_\ell = \mathcal{P}e^{\int_\ell A} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}e^{\int_+^A} \mathcal{P}e^{\int_\epsilon^A} \mathcal{P}e^{\int_-^A}. \quad (3.24)$$

Inserindo nos colchetes, temos:

$$\begin{aligned} \{U_\ell, E_{\ell'}^i\} &= \left\{ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}e^{\int_+^A} \mathcal{P}e^{\int_\epsilon^A} \mathcal{P}e^{\int_-^A}, E_\ell^i \right\} \delta_{\ell\ell'} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} U_\ell^+ \left\{ \mathcal{P}e^{\int_\epsilon^A}, E_\ell^i \right\} U_\ell^- \delta_{\ell\ell'} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} U_\ell^+ \left\{ \mathbb{I} + \int_\epsilon A^j \tau_j, E_\ell^i \right\} U_\ell^- \delta_{\ell\ell'} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} U_\ell^+ \left\{ \int_\epsilon A_a^j \tau_j dx^a, \frac{1}{2} \epsilon_{bcd} \int_{t_\ell} E^{bi} dy^c \wedge dy^d \right\} U_\ell^- \delta_{\ell\ell'} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} U_\ell^+ \tau_j \epsilon_{bcd} \int_\epsilon dx^a \int_{t_\ell} dy^c \wedge dy^d \left\{ A_a^j(x), E^{bi}(y) \right\} U_\ell^- \delta_{\ell\ell'} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} U_\ell^+ \tau_j \epsilon_{bcd} \int_\epsilon dx^a \int_{t_\ell} dy^c \wedge dy^d \gamma \delta^{ij} \delta_a^b \delta(x, y) U_\ell^- \delta_{\ell\ell'} \\ &= \frac{\gamma}{2} U_\ell^+ \tau^i U_\ell^- \delta_{\ell\ell'} \epsilon_{abc} \int_\epsilon dx^a \int_{t_\ell} dy^b \wedge dy^c \delta(x, y). \end{aligned}$$

O resultado é independente da escolha de coordenadas, assim podemos trabalhar em um sistema ortogonal, em que  $x^1$  define a direção do *link* e  $x^2, x^3$  definem o plano do triângulo. Com essa escolha,  $a = 1$  e  $b, c = 2, 3$ , gerando um fator de 2 na contração dos índices  $b$  e  $c$ . Além disso, o delta tridimensional acaba com as integrais, de forma que podemos escrever:

$$\{U_\ell, E_{\ell'}^i\} = \gamma U_\ell^+ \tau^i U_{\ell'}^- \delta_{\ell\ell'}.$$

Por fim, podemos utilizar que a definição de  $B$ , e consequentemente de  $E^i$ , é tomada em um calibre específico, em que  $U_\ell^- = \mathbb{I}$  e  $U_\ell = U_\ell^+$ , de forma que provamos (3.23):

$$\{U_\ell, E_{\ell'}^i\} = \gamma \delta_{\ell\ell'} U_\ell \tau^i.$$

As relações (3.21), (3.22) e (3.23) são chamadas de **Álgebra de Holonomia-Fluxo** e serão o ponto de partida para a quantização da teoria.

### 3.3 Discretização da Ação

Como discutido, temos que encontrar uma ação discreta para a Relatividade Geral, para que possamos utilizá-la em (3.2) e construir a dinâmica da teoria quântica. Inicialmente, uma ação com estas características foi proposta por Regge [29] e ela se mostrou uma boa ação para a Relatividade Geral em três dimensões [30], uma vez que ela converge para a ação de Einstein-Hilbert, no limite em que a variedade de Regge converge para uma variedade Riemanniana. Anos mais tarde, a ideia de Regge foi generalizada para teorias BF associadas a um grupo de calibre  $G$ , em quatro dimensões, em um campo chamado de teorias topológicas na rede [32].

Desta maneira, podem ser utilizadas as ideias vindas destes campos na construção de uma ação discreta, uma vez que a Relatividade Geral é uma teoria BF, mas que deve satisfazer o vínculo de simplicidade, como discutido em 2.5. Tal ação foi proposta inicialmente em [33] para o caso Euclidiano e generalizada em [8] para o caso Lorentziano, podendo ser enunciada como:

$$S_{Disc} = \sum_f \text{Tr}_G(B_f U_f), \quad (3.25)$$

onde  $B_f \in \mathfrak{g}$  é o elemento da álgebra associado às faces do 2-complexo e  $U_f \in G$  é o elemento do grupo associado também à face. Aqui trabalharemos com um grupo geral  $G$ , enquanto no Capítulo 4 especificaremos o grupo de interesse.

Como foi visto, a holonomia  $U_e$  é associada às arestas do 2-complexo. Assim, para associar um elemento do grupo a uma face basta compormos os elementos associados a cada uma das arestas que circundam a face  $f$ :

$$U_f = U_{e_1} \dots U_{e_n}, \quad (3.26)$$

onde as arestas  $e_1, \dots, e_n$  delimitam a face  $f$ .

A ação (3.25) pode ser qualitativamente interpretada ao ser comparada com a ação de Holst na forma (2.76). Temos um elemento da álgebra do grupo em cada uma das ações, representado por  $B$  em (2.76) e por  $B_f$  em (3.25). Em ambas também temos um termo que captura a curvatura: em (2.76) temos o tensor de curvatura  $F^{IJ}$ , já em (3.25) a curvatura é capturada por  $U_f$ .

Uma das definições do cálculo de Regge impõe que a curvatura da variedade está concentrada nos  $(d - 2)$ -simplexos, que são chamados de *hinges*. Em 4 dimensões, a curvatura está então nos triângulos. Porém, os triângulos são duais às faces, de forma que é natural esperar que o elemento  $U_f$  capture a curvatura. Sua interpretação pode ser feita da seguinte maneira: se  $U_f = \mathbb{I}$  significa que ao sairmos de um determinado vértice e fazermos sucessivos transportes paralelos pelas arestas  $e_1, \dots, e_n$  voltando para o mesmo vértice não encontramos nenhum efeito de curvatura, ou seja, um vetor transportado ao redor da face  $f$  por  $U_f$  não sofrerá nenhuma alteração. Porém, se  $U_f \neq \mathbb{I}$  significa que teremos uma operação resultante, devido à curvatura.

É importante ressaltar que as análises aqui realizadas são apenas qualitativas, destacando os aspectos geométricos da ação 3.25. O fato de que ela é uma boa ação discreta está ancorado no resultado de que ela converge para a ação da Relatividade Geral no limite contínuo [33].

## 4 Gravitação Quântica de Laços

Nos capítulos anteriores toda a teoria da Relatividade Geral foi reformulada em novas variáveis e em um espaço discretizado. Neste capítulo construiremos uma teoria quântica não-perturbativa e independente de *background* da Relatividade Geral, chamada de Gravitação Quântica de Laços, utilizando o formalismo de *spinfoams*.

O capítulo será dividido em duas principais partes: uma construindo a cinemática e outra a dinâmica da teoria quântica.

### 4.1 Cinemática

Por cinemática de uma teoria quântica entende-se a definição espaço de Hilbert e da álgebra de observáveis da mesma. Seguindo a prescrição de quantização do formalismo de *spinfoams*, a cinemática é construída a partir de um processo de quantização canônica, em que as variáveis são promovidas a operadores quânticos e os colchetes de Poisson clássicos são promovidos a comutadores. A utilização deste procedimento de quantização para a cinemática surgiu no formalismo canônico da teoria, onde os vínculos encontrados no formalismo ADM são resolvidos na teoria quântica levando exatamente à teoria que iremos descrever nesta seção [3].

É importante salientar que a cinemática será construída nas superfícies  $3D$  definidas no Capítulo 2, ou melhor, em uma teoria discreta, como definido no Capítulo 3, a cinemática será construída com estados no grafo da fronteira. Ou seja, utilizaremos técnicas de quantização canônica para definirmos a fronteira que será utilizada pelo formalismo de *spinfoams* para a implementação da dinâmica, como será discutido na seção seguinte. Deste modo, o problema a ser resolvido é encontrar uma representação para os operadores que levem a relações de comutação que espelham a álgebra de holonomia-fluxo.

Assim, espelhando (3.23), procuramos operadores que satisfaçam <sup>1</sup>:

$$[U_\ell, E_{\ell'}^i] = i\hbar\gamma\delta_{\ell\ell'}U_\ell\tau^i. \quad (4.1)$$

Uma escolha de representação natural é trabalhar na representação da holonomia, ou seja, em analogia com a mecânica quântica para partículas, em uma representação em que a holonomia  $U_\ell$  faz o papel de coordenada, enquanto a variável  $\vec{E}_\ell$  faz o papel do momento. Assim, a princípio, o nosso espaço de Hilbert associado a um grafo  $\Gamma$  será:

$$\mathcal{H}_\Gamma = L^2 [SU(2)^L, dU_\ell], \quad (4.2)$$

<sup>1</sup> Durante toda a dissertação utilizamos o sistema de unidades naturais, em que  $8\pi G = c = 1$ . Porém, neste capítulo manteremos explicitamente a constante  $\hbar$  a fim de evidenciar os efeitos de quantização.

ou seja, o espaço de funções de quadrado integrável de  $SU(2)^L$ , segundo a medida de Haar (A.37), onde  $L$  é o número de *links* no grafo, uma vez que associamos uma holonomia a cada *link*. Como um espaço de Hilbert,  $\mathcal{H}_\Gamma$  tem um produto interno definido por:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{SU(2)^L} dU_\ell \bar{\psi}(U_\ell) \phi(U_\ell). \quad (4.3)$$

Nesta representação, os estados  $\psi(U_\ell) \in L^2[SU(2)^L, dU_\ell]$  são funções dos elementos do grupo  $SU(2)$ , de forma que o operador holonomia  $U_\ell^2$  é um operador multiplicativo. Temos agora que encontrar um operador  $E_\ell^i$  que satisfaça a relação de comutação (4.1). Nesta representação, tal operador é definido por:

$$E_\ell^i = \gamma \hbar J_\ell^i, \quad (4.4)$$

onde  $J_\ell^i$  são os **campos vetoriais invariantes à esquerda**, definidos a partir da ação nos estados  $\psi(U_\ell)$  por:

$$J^i \psi(U) = -i \frac{d}{dt} \psi(U e^{t\tau^i}) \Big|_{t=0}, \quad (4.5)$$

onde  $\tau^i$  são os geradores de  $su(2)$ . O operador  $E_\ell^i$  é comumente chamado de **operador triada**.

Um grupo de Lie admite duas álgebras de campos vetoriais: os campos invariante à esquerda e à direita. O ponto fundamental é que tais campos são isomórficos à álgebra de Lie do grupo, de forma que o colchete de Lie entre eles a define completamente. Uma discussão detalhada dos campos vetoriais invariantes pode ser encontrada na referência [34].

Apesar de ser uma escolha natural, temos que mostrar que de fato a representação do operador  $E_\ell^i$  em termos dos campos vetoriais invariantes à esquerda satisfaz as relações de comutação (4.1):

$$\begin{aligned} [U_\ell, E_\ell^i] \psi(U_\ell) &= U_\ell E_\ell^i \psi(U_\ell) - E_\ell^i U_\ell \psi(U_\ell) = \gamma \hbar (U_\ell J_\ell^i \psi(U_\ell) - J_\ell^i (U_\ell \psi(U_\ell))) \\ &= \gamma \hbar \left[ U_\ell \left( -i \frac{d}{dt} \psi(U_\ell e^{t\tau^i}) \Big|_{t=0} \right) + i \frac{d}{dt} (U_\ell e^{t\tau^i} \psi(U_\ell e^{t\tau^i})) \Big|_{t=0} \right] \\ &= \gamma \hbar \left[ -i U_\ell \frac{d}{dt} \psi(U_\ell \tau^i) \Big|_{t=0} + i U_\ell \left( \tau^i e^{t\tau^i} \psi(U_\ell e^{t\tau^i}) \Big|_{t=0} + e^{t\tau^i} \frac{d}{dt} \psi(U_\ell e^{t\tau^i}) \Big|_{t=0} \right) \right] \\ &= i \hbar \gamma U_\ell \tau^i \psi(U_\ell). \end{aligned}$$

Assim, o operador triada na forma (4.4) obedece as relações de comutação (4.1), quando o operador holonomia é um operador multiplicativo, ou seja, na representação da holonomia. Os demais colchetes de Poisson clássicos (3.21) e (3.22) são trivialmente satisfeitos, uma vez que os campos vetoriais invariantes à esquerda satisfazem as relações de comutação de  $su(2)$  e os operadores holonomia são multiplicativos.

<sup>2</sup> Com o objetivo de manter uma notação mais limpa, não será usada a notação  $\hat{U}_\ell$  para denotar um operador quântico. Assim, deste ponto em diante, a menos que seja dito o contrário,  $U_\ell$  e  $\vec{E}_\ell$  são operadores em  $\mathcal{H}_\Gamma$ .

É interessante notar as semelhanças da representação da holonomia com a representação da posição da mecânica quântica de partículas: a holonomia, que é análoga às coordenadas, é um operador multiplicativo, enquanto o operador triada, que é análogo aos momentos, é um operador derivativo no grupo.

#### 4.1.1 Quantização da área

Como foi mostrado em (3.18), a variável  $E_\ell^i$  determina a área do triângulo associado ao *link*  $\ell$ . Assim, ao promovermos  $E_\ell^i$  a operador, podemos definir também um operador de área:

$$A_\ell = \gamma \hbar |\vec{J}|. \quad (4.6)$$

Sabemos porém, que  $J^i$  são os geradores do grupo  $SU(2)$ , de forma que  $|\vec{J}|^2$  é o operador de Casimir de  $SU(2)$  (ver Apêndice A). Os autovalores do operador de Casimir são conhecidos: são dados por  $j(j+1)$ , onde  $j \in \mathbb{N}/2$ . Assim, a área é quantizada, com os seguintes autovalores:

$$A_{j_\ell} = \gamma \hbar \sqrt{j_\ell(j_\ell + 1)}. \quad (4.7)$$

Devido às analogias com a mecânica quântica de momento angular, os números quânticos  $j_\ell$  são chamados de *spins*. Como será visto adiante, a base de estados terá como um dos seus números quânticos os *spins* associados a cada um dos *links*.

Estamos trabalhando em unidades  $8\pi G = c = 1$ , porém podemos restaurar as constantes para interpretarmos a quantização da área fisicamente:

$$A_{j_\ell} = \frac{8\pi G \gamma \hbar}{c^3} \sqrt{j_\ell(j_\ell + 1)}. \quad (4.8)$$

Assim, definindo a escala de comprimento  $l_{GQL}^2 = \frac{8\pi G \gamma \hbar}{c^3}$ , temos:

$$l_{LQG} = 8\pi \gamma l_{Planck}, \quad (4.9)$$

onde  $l_{Planck}$  é o comprimento de Planck ( $l_{Planck} \sim 10^{-35}m$ ), que é a escala de comprimento onde espera-se que os efeitos quânticos se tornem dominantes na descrição da gravitação.

A quantização da área é um resultado fundamental e uma das previsões da teoria da Gravitação Quântica de Laços: qualquer interação que dependa da área sofrerá efeitos de quantização.

#### 4.1.2 O espaço de Hilbert Físico e a base de *spin-network*

Os estados no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_\Gamma$  definido em (4.2) ainda não são os estados físicos da teoria, pois os mesmos não são invariantes por transformações de calibre. É importante recordar que a teoria formulada na linguagem de tetradas é invariante por Transformações de Lorentz Locais (2.15). Tais transformações de calibre atuam na conexão,

de forma que a holonomia se transforma como visto em (3.9). Lembrando que na teoria discreta construída as transformações de calibre acontecem apenas nos nós, nossos estados invariantes devem ser da seguinte forma:

$$\psi(U_\ell) = \psi(\Lambda_{s_\ell} U_\ell \Lambda_{t_\ell}^{-1}), \quad (4.10)$$

onde  $\Lambda_{s_\ell}, \Lambda_{t_\ell} \in SU(2)$  e  $s_\ell$  indica o nó de onde sai o *link* e  $t_\ell$  o nó onde ele chega.

Tais invariâncias por transformações de calibre podem ser implementadas através do **vínculo de Gauss** ou **vínculo de fechamento**:

$$\vec{G}_n \psi = 0, \quad (4.11)$$

onde o operador  $\vec{G}_n$  é definido como:

$$\vec{G}_n = \vec{E}_{\ell_1} + \vec{E}_{\ell_2} + \vec{E}_{\ell_3} + \vec{E}_{\ell_4} \quad (4.12)$$

e  $\ell_1, \dots, \ell_4$  são os *links* associados ao nó  $n$ .

Podemos prontamente mostrar que a condição (4.10) e a equação de vínculo (4.11) são equivalentes. Como a orientação dos *links* é arbitrária, podemos escolher todos os links orientados para dentro do nó  $n$ , de forma que  $n = t_\ell$ . Assim, fazendo uma transformação de calibre  $\Lambda_{t_\ell}^{-1} = e^{-t\tau^i} \in SU(2)$ , temos:

$$\psi(U_\ell) = \psi(U_\ell e^{-t\tau^i}) = \psi(U_\ell) + \sum_\ell \frac{d}{dt} \psi(U_\ell e^{-t\tau^i}) \Big|_{t=0} t + \dots, \quad (4.13)$$

onde expandimos  $\psi(U_\ell e^{-t\tau^i})$  na segunda igualdade. Ou seja, para que os estados sejam invariantes pelas transformações de calibre nos nós, temos que ter:

$$\sum_\ell \frac{d}{dt} \psi(U_\ell e^{-t\tau^i}) \Big|_{t=0} = i \sum_\ell J_\ell^i \psi(U_\ell) = 0, \quad (4.14)$$

ou seja, recuperando os fatores de  $\gamma\hbar$ , chegamos a relação (4.11).

O nome vínculo de fechamento surge devido a uma interpretação geométrica interessante. Foi visto no Capítulo 3 que a variável  $\vec{E}_\ell$  pode ser interpretada como um vetor normal às superfícies dos triângulos associados aos *links*, com a norma dada pela área do triângulo. Assim, o vínculo (4.11) indica que as quatro normais às faces de um tetraedro associado ao nó  $n$  somam zero, que é a condição geométrica de existência de um tetraedro fechado.

Introduzido o vínculo, podemos introduzir um outro espaço de Hilbert, com estados que satisfazem a condição (4.11). Tal espaço abrigará os estados físicos da teoria, ou seja, aqueles estados que são invariantes por transformações de calibre da forma (4.10). A este espaço damos o nome de espaço de Hilbert físico, definido por:

$$\mathcal{K}_\Gamma = L^2[SU(2)^L/SU(2)^N, dU_\ell], \quad (4.15)$$



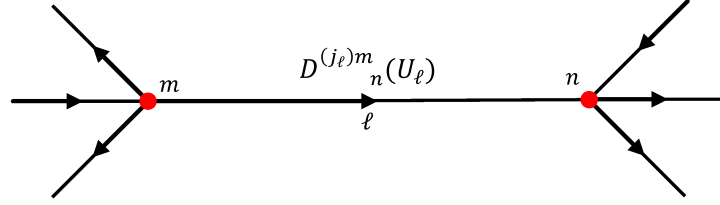


Figura 6 – Matriz de Wigner associada a um *link*  $\ell$ . Os índices  $m$  e  $n$  se transformam de acordo com as transformações de calibre em cada nó.

onde  $N$  é o número de nós no grafo  $\Gamma$  e a notação de espaço quociente leva a um interpretação de  $\mathcal{K}_\Gamma$  como o espaço de funções quadrado integráveis de  $SU(2)$  em cada *link*, que são invariantes por transformações de calibre nos nós.

Definido o espaço de Hilbert físico, podemos procurar uma base de estados para o mesmo. Como consequência do teorema de Peter-Weyl (A.41), podemos escrever o espaço de funções quadrado integráveis do grupo  $SU(2)$  na forma:

$$L^2[SU(2), dU] = \bigoplus_j \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j. \quad (4.16)$$

Como associamos um espaço  $\mathcal{H}_j$  para cada *link*, temos:

$$L^2[SU(2)^L, dU_\ell] = \bigotimes_\ell \bigoplus_{j_\ell} \mathcal{H}_{j_\ell} \otimes \mathcal{H}_{j_\ell} = \bigoplus_{j_\ell} \bigotimes_\ell \mathcal{H}_{j_\ell} \otimes \mathcal{H}_{j_\ell}. \quad (4.17)$$

Podemos porém fazer uma recontagem, uma vez que estamos interessados em espaços invariantes por transformações de calibre nos nós. Ao associarmos um espaço  $\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j$  por *link* estamos associando um espaço  $\mathcal{H}_j$  com cada metade de um *link*, pois cada espaço deste se transforma de acordo com o nó adjacente a ele. Na linguagem de representações irredutíveis do grupo, estamos associando uma matriz de Wigner com cada *link* e cada um de seus índices se transforma de acordo com transformações no nó adjacente, como representado na Figura 6. Assim, ao invés de fazermos um produto tensorial nos *links*, podemos fazer um produto nos nós, com um espaço  $\mathcal{H}_j$  diferente associado a cada *link* naquele nó:

$$L^2[SU(2)^L, dU_\ell] = \bigoplus_{j_\ell} \bigotimes_n (\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4}). \quad (4.18)$$

Ao analisarmos o espaço (4.18) podemos construir o espaço de Hilbert físico, ao inserirmos a invariância por transformações de calibre nos nós:

$$\mathcal{K}_\Gamma = L^2[SU(2)^L/SU(2)^N, dU_\ell] = \bigoplus_{j_\ell} \bigotimes_n \text{Inv}_{SU(2)}(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4}). \quad (4.19)$$

Uma base para este espaço é conhecida, sendo dada pelos *intertwiners* quadrivalentes (ver A.1.1):

$$\iota_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{(k)} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & k \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \epsilon^{(k)mn} \begin{pmatrix} k & j_3 & j_4 \\ n & m_3 & m_4 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

onde os objetos entre parênteses são os símbolos 3j de Wigner e  $\epsilon^{(j)mn}$  é o tensor invariante  $SU(2)$  na representação  $\mathcal{H}_j$ :

$$\epsilon_{mn}^{(j)} = (-1)^{j-m} \delta_{m,-n} \quad \text{e} \quad \epsilon^{(j)mn} = (-1)^{j-m} \delta_{m,-n}. \quad (4.21)$$

Os *intertwiners* quadrivalentes formam uma base para o espaço de objetos invariantes por transformações  $SU(2)$  em quatro representações dadas. Por exemplo, na base de números magnéticos, um estado no nó  $n$  invariante por transformações  $SU(2)$  pode ser escrito como:

$$|k_n, j_1, \dots, j_4\rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3 m_4} \iota_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{(k)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle |j_3, m_3\rangle |j_4, m_4\rangle. \quad (4.22)$$

Sabemos que o símbolo 3j é nulo, a menos que os *spins* da linha superior satisfaçam as condições de Clebsch-Gordan entre eles. Assim,  $k$  é um *spin*, ou seja, um semi-inteiro, que deve satisfazer:

$$\max[|j_1 - j_2|, |j_3 - j_4|] \leq k \leq \min[j_1 + j_2, j_3 + j_4] \quad \text{e} \quad j_1 + j_2 + k, j_3 + j_4 + k \in \mathbb{Z}, \quad (4.23)$$

ou seja,  $k$  é um *spin* associado ao nó, que carrega a liberdade residual do espaço invariante.

Podemos construir explicitamente os estados em  $\mathcal{K}_\Gamma$ , utilizando uma outra consequência direta do teorema de Peter-Weyl: as matrizes de Wigner formam uma base para o espaço de funções quadrado integráveis de  $SU(2)$  (A.40). Assim, podemos escrever:

$$\psi(U) = \sum_{jmn} c_{jmn} D^{(j)m}_n(U); \quad \psi(U) \in L^2[SU(2), dU]. \quad (4.24)$$

Para um grafo com  $L$  *links*, temos então:

$$\psi(U_\ell) = \sum_{j_\ell, n_\ell, m_\ell} c_{j_1 \dots j_L m_1 \dots m_L n_1 \dots n_L} D^{(j_1)m_1}_{n_1}(U_{\ell_1}) \dots D^{(j_L)m_L}_{n_L}(U_{\ell_L}). \quad (4.25)$$

Os estados desta forma porém não são invariantes de calibre. Podemos analisar o comportamento de (4.25) sob transformações de calibre ao realizar uma transformação apenas em um nó. Escolhendo orientar todos os links entrando no nó, temos:

$$\begin{aligned} \psi(U_\ell) &= \sum_{j_\ell, n_\ell, m_\ell} c_{j_\ell, m_\ell, n_\ell} D^{(j_1)m_1}_{n_1}(\Lambda U_{\ell_1}) D^{(j_2)m_2}_{n_2}(\Lambda U_{\ell_2}) D^{(j_3)m_3}_{n_3}(\Lambda U_{\ell_3}) D^{(j_4)m_4}_{n_4}(\Lambda U_{\ell_4}) \\ &\quad \times D^{(j_5)m_5}_{n_5}(U_{\ell_5}) \dots D^{(j_L)m_L}_{n_L}(U_{\ell_L}). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Como  $D^{(j)}(U)$  é uma representação, temos que  $D(UV) = D(U)D(V)$ , assim:

$$\begin{aligned} \psi(U_\ell) &= \sum_{j_\ell, n_\ell, m_\ell} c_{j_\ell, m_\ell, n_\ell} D^{(j_1)m_1}_{n'_1}(\Lambda) D^{(j_2)m_2}_{n'_2}(\Lambda) D^{(j_3)m_3}_{n'_3}(\Lambda) D^{(j_4)m_4}_{n'_4}(\Lambda) \\ &\times D^{(j_1)n'_1}_{n_1}(U_{\ell_1}) D^{(j_2)n'_2}_{n_2}(U_{\ell_2}) D^{(j_3)n'_3}_{n_3}(U_{\ell_3}) D^{(j_4)n'_4}_{n_4}(U_{\ell_4}) \\ &\times D^{(j_5)m_5}_{n_5}(U_{\ell_5}) \dots D^{(j_L)m_L}_{n_L}(U_{\ell_L}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Logo, para que o estado seja invariante por transformações de calibre nos nós, precisamos em cada nó de um objeto invariante por transformações  $SU(2)$  com quatro índices, ou seja, um *intertwiner* quadrivalente. Assim, um estado invariante de calibre é escrito na forma:

$$\psi(U_\ell) = \sum_{j_\ell k_n} c_{j_\ell k_n} \iota_{k_1}^{m_1 m_2 m_3 m_4} \dots \iota_{k_N}^{m_{L-3} m_{L-2} m_{L-1} m_L} D^{(j_1)}_{m_1 n_1}(U_{\ell_1}) \dots D^{(j_L)}_{m_L n_L}(U_{\ell_L}), \quad (4.28)$$

que também pode ser escrito como:

$$\psi(U_\ell) = \sum_{j_\ell k_n} c_{j_\ell k_n} \psi_{j_\ell k_n}(U_\ell), \quad (4.29)$$

onde  $\psi_{j_\ell k_n}(U_\ell)$  são as chamadas **funções de onda *spin-network***. Em outras palavras,  $\psi_{j_\ell k_n}(U_\ell)$  são os estados  $|j_\ell, k_n\rangle$  na representação da holonomia. Eles podem ser escritos na forma compacta:

$$\psi_{j_\ell k_n}(U_\ell) = \langle U_\ell | j_\ell, k_n \rangle = \bigotimes_n \iota_{k_n} \cdot_\Gamma \bigotimes_\ell D^{(j_\ell)}(U_\ell). \quad (4.30)$$

Para esta base de estados para  $\mathcal{K}_\Gamma$  damos o nome de **base de *spin-network***.

A notação usada em (4.30) indica que temos um *intertwiner* quadrivalente associado a cada nó, com o respectivo número quântico  $k_n$ , e uma matriz de Wigner associada a cada link, na representação  $j_\ell$ . O símbolo  $\cdot_\Gamma$  indica que os *intertwiners* estão contraídos com as matrizes de Wigner seguindo a estrutura do grafo  $\Gamma$ . A Figura 6 mostra como são associados os índices das matrizes de Wigner com os índices dos *intertwiners* em cada nó.

A estrutura de contração entre *intertwiners* e matrizes de Wigner está indicada esquematicamente na equação (4.28). Para descrevê-la explicitamente, é preciso especificar um grafo em particular. Como exemplo, considere um grafo tetravalente de três nós, como na Figura 7. Um estado *spin-network* para este grafo é:

$$\begin{aligned} \psi(U_\ell) &= \sum_{j_\ell, k_n} c_{j_\ell k_n} \iota_{k_{n_1}}^{m_2 m_3 m_5 n_6} \iota_{k_{n_2}}^{n_1 n_3 n_4 m_6} \iota_{k_{n_3}}^{m_1 n_2 m_4 n_5} D^{(j_1)}_{m_1 n_1}(U_{\ell_1}) D^{(j_2)}_{m_2 n_2}(U_{\ell_2}) \\ &\times D^{(j_3)}_{m_3 n_3}(U_{\ell_3}) D^{(j_4)}_{m_4 n_4}(U_{\ell_4}) D^{(j_5)}_{m_5 n_5}(U_{\ell_5}) D^{(j_6)}_{m_6 n_6}(U_{\ell_6}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Há um outro operador geométrico fundamental na Gravitação Quântica de Laços: o operador de volume. O volume de um tetraedro clássico é dado por:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{|\vec{A}_1 \cdot (\vec{A}_2 \times \vec{A}_3)|}, \quad (4.32)$$

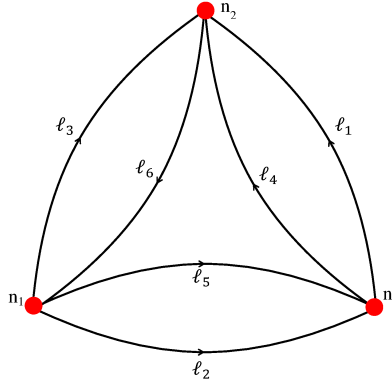


Figura 7 – Grafo quadrivalente com três nós. Como exemplo, um estado *spin-network* para este grafo pode ser montado como feito em (4.31).

onde  $\vec{A}_i$  é o vetor normal ao triângulo da face, com norma dada pela área daquele triângulo. Um tetraedro é delimitado por quatro triângulos, mas qualquer escolha de três triângulos gera o mesmo volume pela equação (4.32), uma vez que o vetor  $\vec{A}_4$  estará vinculado aos demais pelo vínculo de fechamento (4.11).

A quantização do observável volume é direta, uma vez que os operadores  $\vec{E}_\ell$  são normais aos triângulos e tem norma dada pela área dele. Assim, o operador volume é dado por:

$$V_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{|\vec{E}_{\ell_1} \cdot (\vec{E}_{\ell_2} \times \vec{E}_{\ell_3})|} = \frac{\sqrt{2}}{3} (\gamma \hbar)^{3/2} \sqrt{|\vec{J}_{\ell_1} \cdot (\vec{J}_{\ell_2} \times \vec{J}_{\ell_3})|}. \quad (4.33)$$

Como associamos os tetraedros aos nós na nossa discretização, o operador de volume também está associado a cada nó. Observa-se assim que o número quântico associado ao nó pode ser o autovalor de volume  $v_n$ , ao invés do número  $k_n$ . Tal mudança é feita ao calcularmos os elementos de matriz de  $V_n$  na base  $|k_n\rangle$  e diagonalizarmos a matriz, obtendo os autovalores e autoestados de  $V_n$ . Nesta nova base, é possível escrever as funções de onda de *spin-network* como:

$$\psi_{j_\ell v_n}(U_\ell) = \langle U_\ell | j_\ell, v_n \rangle = \bigotimes_n \iota_{v_n} \cdot \Gamma \bigotimes_\ell D^{(j_\ell)}(U_\ell). \quad (4.34)$$

É importante destacar que o cálculo do espectro do operador de volume é um problema mais complicado, sem uma fórmula simples para *spins* arbitrários, como temos para o operador de área. Além disso, é importante observar que a forma (4.33) só é válida para uma discretização construída a partir de tetraedros, uma vez que ela usa explicitamente o volume de um tetraedro clássico. Porém, formas mais gerais podem ser construídas para diversas geometrias.

Outra consideração importante acerca dos estados *spin-network* é que eles não diagonalizam completamente a métrica espacial. Geometricamente falando, os autovalores

de área e volume não contém informações suficientes para reconstruir a geometria de um tetraedro clássico. Tal conclusão é classicamente esperada, uma vez que para especificar completamente um tetraedro precisamos de seis informações, que podem ser três vetores que especificam três lados com uma origem em comum no ponto de uma das quinas do tetraedro, por exemplo. Porém, com as áreas dos triângulos que delimitam o tetraedro e o volume temos apenas cinco graus de liberdade especificados.

Quanticamente tal incerteza no formato dos tetraedros pode ser vista na perspectiva dos princípios de incerteza. Podemos introduzir um novo operador, que nos dará a informação do ângulo diedral entre dois triângulos de um tetraedro:

$$\vec{E}_{\ell_1} \cdot \vec{E}_{\ell_2} = (A_{\ell_1} \vec{n}_{\ell_1}) \cdot (A_{\ell_2} \vec{n}_{\ell_2}) = A_{\ell_1} A_{\ell_2} \cos \theta_{\ell_1 \ell_2}. \quad (4.35)$$

Podemos então calcular o comutador de dois operadores para dois ângulos diedrais diferentes:

$$\begin{aligned} [\vec{E}_{\ell_1} \cdot \vec{E}_{\ell_2}, \vec{E}_{\ell_1} \cdot \vec{E}_{\ell_3}] &= (\hbar\gamma)^4 [\vec{J}_{\ell_1} \cdot \vec{J}_{\ell_2}, \vec{J}_{\ell_1} \cdot \vec{J}_{\ell_3}] \\ &= (\hbar\gamma)^4 [J_{\ell_1}^i J_{\ell_2}^j \delta_{ij}, J_{\ell_1}^k J_{\ell_3}^l \delta_{kl}] \\ &= (\hbar\gamma)^4 [J_{\ell_1}^i, J_{\ell_1}^k] J_{\ell_2}^j \delta_{ij} J_{\ell_3}^l \delta_{kl} \\ &= (\hbar\gamma)^4 i \epsilon_{ijk} J_{\ell_1}^m J_{\ell_2}^j \delta_{ij} J_{\ell_3}^l \delta_{kl} \\ &= (\hbar\gamma)^4 i \epsilon_{ijk} J_{\ell_1}^k J_{\ell_2}^i J_{\ell_3}^j \\ &= i \hbar\gamma \vec{E}_{\ell_1} \cdot (\vec{E}_{\ell_2} \times \vec{E}_{\ell_3}). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ou seja, o comutador é proporcional ao operador de volume, que é não nulo no geral. Pelo princípio da incerteza sabe-se que dados dois operadores  $A$  e  $B$ , temos:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|. \quad (4.37)$$

Assim, para o nosso caso, temos:

$$\Delta(\vec{E}_{\ell_1} \cdot \vec{E}_{\ell_2}) \Delta(\vec{E}_{\ell_1} \cdot \vec{E}_{\ell_3}) \geq \frac{\hbar\gamma}{2} |\langle \vec{E}_{\ell_1} \cdot (\vec{E}_{\ell_2} \times \vec{E}_{\ell_3}) \rangle|. \quad (4.38)$$

Devido a relações de incerteza, como (4.38), o formato dos tetraedros não são bem especificados no regime quântico. Assim, a interpretação da geometria discreta na forma de pequenos tetraedros é imprecisa e deve ser usada apenas como uma imagem que pode auxiliar na visualização dos estados quânticos. Somente no limite semi-clássico tal perspectiva geométrica é retomada, como será discutido no Capítulo 5.

Por fim, devemos lembrar que a nossa prescrição de quantização trunca os graus de liberdade da Relatividade Geral ao realizar a discretização das superfícies espaciais em um grafo  $\Gamma$ . Assim, podemos obter resultados melhores da teoria ao refinarmos o grafo, ou seja, aumentarmos o número de nós. Da mesma forma, o espaço de Hilbert físico  $\mathcal{K}_\Gamma$  não é o espaço completo da Gravitação Quântica de Laços, mas sim o espaço de Hilbert

associado à teoria truncada a um grafo  $\Gamma$ . O espaço de Hilbert completo é obtido tomando a soma sob todos os grafos abstratos possíveis:

$$\mathcal{H}_{GQL} = \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{K}_{\Gamma}. \quad (4.39)$$

Tal distinção ficará clara ao aplicarmos a teoria à Cosmologia no Capítulo 6, pois escolheremos explicitamente um único grafo para representar o espaço, além de mostrar as possibilidades de refinamento dos grafos.

## 4.2 Dinâmica

Por dinâmica de uma teoria quântica entende-se a parte da mesma que define a evolução temporal dos estados. No formalismo de *spinfoams*, a dinâmica é definida a partir das amplitudes de transição (3.1). Assim, nosso objetivo é construir uma expressão para as amplitudes de transição para um 2-complexo, dada uma configuração definida no grafo da fronteira.

### 4.2.1 O mapa $Y_{\gamma}$

Para o cálculo das amplitudes de transição iremos trabalhar com estados no espaço-tempo, ou seja, estados 4D, discretizados no 2-complexo. Tais estados são funções da holonomia da conexão de *spin* (3.4), ou seja, são funções de elementos do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ . Porém, na fronteira trabalhamos com estados que são funções de  $SU(2)$  e precisamos de alguma forma conectar as informações da fronteira com as do *bulk*. Tal conexão será feita utilizando o vínculo de simplicidade linear (2.87) para a construção de um mapa entre os estados  $SL(2, \mathbb{C})$  e  $SU(2)$ .

Sabe-se que o grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  possui dois operadores de Casimir, dados no calibre de tempo por (ver Apêndice A.2):

$$C_1 = \frac{1}{2} B_{IJ} B^{IJ} = \vec{K}^2 - \vec{L}^2, \quad (4.40)$$

$$C_2 = \frac{1}{8} \epsilon_{IJKL} B^{IJ} B^{KL} = \vec{K} \cdot \vec{L}, \quad (4.41)$$

onde  $B^{IJ} \in sl(2, \mathbb{C})$  são os geradores do grupo,  $K^i$  são os geradores de *boosts* (2.78) e  $L^i$  são os geradores de rotações (2.79).

Usando o fato de que os espaços de representações unitárias  $V^{(p,k)}$  do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  se decompõem em espaços  $\mathcal{H}_j$  de representações de  $SU(2)$ , como mostrado em (A.53), podemos construir uma base que diagonaliza os operadores  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L^2$  e  $L_z$ , chamada de

base canônica  $|p, k; j, m\rangle$ :

$$C_1 |p, k; j, m\rangle = (p^2 - k^2 + 1) |p, k; j, m\rangle, \quad (4.42)$$

$$C_2 |p, k; j, m\rangle = pk |p, k; j, m\rangle, \quad (4.43)$$

$$L^2 |p, k; j, m\rangle = j(j+1) |p, k; j, m\rangle, \quad (4.44)$$

$$L_z |p, k; j, m\rangle = m |p, k; j, m\rangle. \quad (4.45)$$

Nosso objetivo é fazer uma implementação fraca do vínculo (2.87), ou seja, queremos estados  $\langle \phi | \vec{K} - \gamma \vec{L} | \psi \rangle = 0$  ao menos no limite clássico. Para fazer a implementação fraca podemos trabalhar diretamente com os autovalores dos operadores de Casimir e exigir que (2.87) seja satisfeito. Assim temos, implementando o vínculo diretamente nos operadores:

$$C_1 = \vec{K}^2 - \vec{L}^2 = \gamma^2 \vec{L}^2 - \vec{L}^2 = (\gamma^2 - 1) \vec{L}^2, \quad (4.46)$$

$$C_2 = \vec{K} \cdot \vec{L} = \gamma \vec{L}^2. \quad (4.47)$$

Em função dos autovalores, temos:

$$\begin{cases} p^2 - k^2 + 1 = (\gamma^2 - 1)j(j+1) \\ pk = \gamma j(j+1) \end{cases}. \quad (4.48)$$

Porém, queremos a implementação do vínculo no limite clássico, que é onde esperamos que o vínculo de simplicidade seja válido. O limite clássico é tomado com o limite de números quânticos grandes, de forma que podemos manter apenas os termos quadráticos:

$$\begin{cases} p^2 - k^2 = (\gamma^2 - 1)j^2 \\ pk = \gamma j^2 \end{cases}. \quad (4.49)$$

Uma solução para este sistema de equações é dada por:

$$p = \gamma k \quad \text{e} \quad k = j. \quad (4.50)$$

Tal solução define completamente a implementação do vínculo de simplicidade linear e permite a construção de um mapa entre os espaços de representação de  $SU(2)$  e de  $SL(2, \mathbb{C})$ . O mapa é denotado por  $Y_\gamma$ , sendo definido por:

$$\begin{aligned} Y_\gamma : \mathcal{H}_j &\rightarrow V^{(p=\gamma j, k=j)} \\ |j, m\rangle &\mapsto |\gamma j, j; j, m\rangle \end{aligned} \quad (4.51)$$

ou pela sua atuação nos respectivos espaços de funções:

$$\begin{aligned} Y_\gamma : L^2[SU(2)] &\rightarrow F[SL(2, \mathbb{C})] \\ \psi(h) = \sum_{jmn} c_{jmn} D^{(j)m}_n &\mapsto \psi(g) = \sum_{jmn} c_{jmn} D^{(\gamma j, j)jm}_{jn}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

onde  $F[SL(2, \mathbb{C})]$  é o espaço de funções de  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Temos agora apenas que mostrar que o mapa definido por (4.51) realmente implementa o vínculo de simplicidade linear fracamente, ou seja, temos que mostrar que:

$$\langle Y_\gamma \phi | \vec{K} - \gamma \vec{L} | Y_\gamma \psi \rangle = 0. \quad (4.53)$$

Os estados na base canônica podem ser escritos como:

$$|Y_\gamma \phi\rangle = |\gamma j, j; j, m'\rangle, \quad (4.54)$$

$$|Y_\gamma \psi\rangle = |\gamma j, j; j, m\rangle. \quad (4.55)$$

Escolhemos estados com o mesmo  $j$ , uma vez que as relações de ortogonalidade tornam a relação (4.53) válida trivialmente se os estados tiverem  $j$ 's diferentes. Como a relação é vetorial, podemos prová-la para cada uma das três componentes. Começemos com a primeira:

$$\begin{aligned} \langle Y_\gamma \phi | L^1 | Y_\gamma \psi \rangle &= \langle \gamma j, j; j, m' | L^1 | \gamma j, j; j, m \rangle = \langle \gamma j, j; j, m' | \frac{L^+ + L^-}{2} | \gamma j, j; j, m \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \gamma j, j; j, m' | \left[ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} | \gamma j, j; j, m+1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(j-m+1)(j+m)} | \gamma j, j; j, m-1 \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m', m+1} + \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \delta_{m', m-1} \right]. \end{aligned}$$

Para  $K^1$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle Y_\gamma \phi | K^1 | Y_\gamma \psi \rangle &= \langle \gamma j, j; j, m' | K^1 | \gamma j, j; j, m \rangle = \langle \gamma j, j; j, m' | \frac{K^+ + K^-}{2} | \gamma j, j; j, m \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \gamma j, j; j, m' | \left[ \alpha_j \sqrt{(j-m-1)(j-m)} | \gamma j, j; j-1, m+1 \rangle \right. \\ &\quad + \beta_j \sqrt{(j+m+1)(j-m)} | \gamma j, j; j, m+1 \rangle \\ &\quad + \alpha_{j+1} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)} | \gamma j, j; j+1, m+1 \rangle \\ &\quad - \alpha_j \sqrt{(j+m)(j+m-1)} | \gamma j, j; j-1, m-1 \rangle \\ &\quad + \beta_j \sqrt{(j+m)(j-m+1)} | \gamma j, j; j, m-1 \rangle \\ &\quad \left. - \alpha_{j+1} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} | \gamma j, j; j+1, m-1 \rangle \right] \\ &= \frac{\beta_j}{2} \left[ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m', m+1} + \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \delta_{m', m-1} \right], \end{aligned}$$

onde foram utilizadas as relações de ortogonalidade da base canônica e as ações dos geradores na base estão listadas em A.2, juntamente com a definição das constantes  $\alpha_j$  e  $\beta_j$ . Juntando ambas as expressões, temos:

$$\begin{aligned} \langle Y_\gamma \phi | K^1 - \gamma L^1 | Y_\gamma \psi \rangle &= \frac{\beta_j - \gamma}{2} \left[ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m', m+1} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \delta_{m', m-1} \right]. \quad (4.56) \end{aligned}$$



Porém, a definição de  $\beta_j$  é dada por:

$$\beta_j = \frac{kp}{j(j+1)} = \frac{\gamma j^2}{j(j+1)}. \quad (4.57)$$

Logo, no limite de números quânticos grandes, mantendo apenas os termos quadráticos em  $j$ , temos  $\beta_j = \gamma$  e o vínculo é satisfeito fracamente para a primeira componente. Para a segunda componente, temos:

$$\begin{aligned} \langle Y_\gamma \phi | L^2 | Y_\gamma \psi \rangle &= \langle \gamma j, j; j, m' | L^2 | \gamma j, j; j, m \rangle = \langle \gamma j, j; j, m' | \frac{L^+ - L^-}{2i} | \gamma j, j; j, m \rangle \\ &= \frac{1}{2i} \langle \gamma j, j; j, m' | \left[ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} | \gamma j, j; j, m+1 \rangle \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(j-m+1)(j+m)} | \gamma j, j; j, m-1 \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m', m+1} - \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \delta_{m', m-1} \right]. \end{aligned}$$

Para  $K^2$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle Y_\gamma \phi | K^2 | Y_\gamma \psi \rangle &= \langle \gamma j, j; j, m' | K^2 | \gamma j, j; j, m \rangle = \langle \gamma j, j; j, m' | \frac{K^+ - K^-}{2i} | \gamma j, j; j, m \rangle \\ &= \frac{1}{2i} \langle \gamma j, j; j, m' | \left[ \alpha_j \sqrt{(j-m-1)(j-m)} | \gamma j, j; j-1, m+1 \rangle \right. \\ &\quad + \beta_j \sqrt{(j+m+1)(j-m)} | \gamma j, j; j, m+1 \rangle \\ &\quad + \alpha_{j+1} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)} | \gamma j, j; j+1, m+1 \rangle \\ &\quad + \alpha_j \sqrt{(j+m)(j+m-1)} | \gamma j, j; j-1, m-1 \rangle \\ &\quad - \beta_j \sqrt{(j+m)(j-m+1)} | \gamma j, j; j, m-1 \rangle \\ &\quad \left. + \alpha_{j+1} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} | \gamma j, j; j+1, m-1 \rangle \right] \\ &= \frac{\beta_j}{2i} \left[ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m', m+1} - \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \delta_{m', m-1} \right]. \end{aligned}$$

Juntando ambas as expressões, temos:

$$\langle Y_\gamma \phi | K^2 - \gamma L^2 | Y_\gamma \psi \rangle = \frac{\beta_j - \gamma}{2i} \left[ \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m', m+1} - \sqrt{(j-m+1)(j+m)} \delta_{m', m-1} \right]. \quad (4.58)$$

Mas já mostramos que  $\beta_j = \gamma$  sob a imagem do mapa  $Y_\gamma$  e no limite de  $j$  grande, de forma que a segunda componente também satisfaz o vínculo. Para a terceira componente, temos:

$$\langle Y_\gamma \phi | L^3 | Y_\gamma \psi \rangle = \langle \gamma j, j; j, m' | L^3 | \gamma j, j; j, m \rangle = m \delta_{m, m'}.$$

Para  $K^3$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle Y_\gamma \phi | K^3 | Y_\gamma \psi \rangle &= \langle \gamma j, j; j, m' | K^3 | \gamma j, j; j, m \rangle \\ &= \langle \gamma j, j; j, m' | \left[ \alpha_j \sqrt{j^2 - m^2} | \gamma j, j; j-1, m \rangle + \beta_j m | \gamma j, j; j, m \rangle \right. \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\left. + \alpha_{j+1} \sqrt{(j+1)^2 - m^2} | \gamma j, j; j+1, m \rangle \right] \quad (4.60)$$

$$= m \beta_j \delta_{m, m'}. \quad (4.61)$$

Juntando ambas as expressões, temos:

$$\langle Y_\gamma \phi | K^3 - \gamma L^3 | Y_\gamma \psi \rangle = (\beta_j - \gamma) m \delta_{m,m'}, \quad (4.62)$$

que no limite em que  $\beta_j = \gamma$  é igual a zero. Logo, a terceira componente também satisfaz o vínculo, de forma que provamos a expressão (4.53) e mostramos que o mapa  $Y_\gamma$  implementa o vínculo de simplicidade linear na teoria quântica.

O mapa  $Y_\gamma$  terá papel fundamental no que se segue, sendo utilizado no mapeamento entre os estados do *bulk*, que são funções de  $SL(2, \mathbb{C})$ , e os estados da fronteira, que são funções de  $SU(2)$ , na construção das amplitudes de transição.

### 4.2.2 O vértice EPRL/FK

Um dos grandes desafios na formulação canônica da Gravitação Quântica de Laços é a implementação do vínculo Hamiltoniano, responsável por gerar a evolução temporal dos estados cinemáticos. Tal dificuldade é evitada no formalismo de *spinfoams*, uma vez que a evolução temporal dos estados é feita pelo cálculo de amplitudes de transição de estados na fronteira. O grande problema então se tornou encontrar uma forma para as amplitudes de transição que levassem ao limite clássico descrito pela teoria da Relatividade Geral, que será apresentado adiante.

Historicamente, existiram diversos trabalhos e modelos que procuraram resolver o problema da dinâmica. A implementação de uma evolução temporal via integrais de trajetória de um modelo discreto tem inspiração na formulação de Regge [30], que foi generalizada para teorias BF gerais posteriormente, em um campo chamado de Teorias Topológicas na Rede [32]. Já os primeiros resultados que levaram ao modelo atual surgiram no modelo de Barrett-Crane [35]. Houve ainda inúmeras outras contribuições para chegarmos ao modelo atual que não discutiremos nesta dissertação. Para uma perspectiva histórica de vários outros trabalhos, a referência [7] pode ser consultada.

Nesta dissertação nos concentraremos no modelo introduzido pelo vértice EPRL/FK. As siglas remetem aos nomes dos autores dos dois principais trabalhos: Engle, Pereira, Rovelli e Livine [8] e Freidel e Krasnov [36]. Mostraremos aqui como chegar à forma atual das amplitudes de transição através da escolha adequada de variáveis e da implementação do vínculo de simplicidade linear via mapa  $Y_\gamma$ .

É importante lembrarmos que estamos trabalhando em uma teoria discreta, onde os graus de liberdade foram truncados em um 2-complexo. Assim, a amplitude de transição pode ser escrita através de um processo limite, como na Equação (3.2). Foi visto também que a ação discreta para uma teoria BF associada a um grupo de calibre  $G$  é a ação (3.25). Assim, a amplitude de transição truncada para um dado 2-complexo  $\mathcal{C}$  utilizando esta ação é:

$$W_{\mathcal{C}} = \mathcal{N} \int dU_e \int dB_f e^{\frac{i}{\hbar} \sum_f \text{Tr}(B_f U_f)}, \quad (4.63)$$

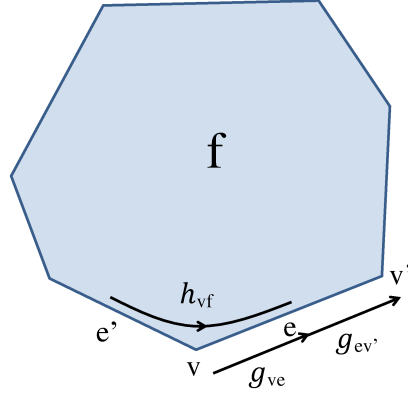


Figura 8 – Face de um 2-complexo delimitada por várias arestas. As novas variáveis (4.65) e (4.66) estão representadas pictoricamente.

onde  $U_f$  é o elemento do grupo associado as faces (3.26) e  $B_f$  é o elemento da álgebra também associado as faces.  $\mathcal{N}$  é um fator de normalização e irá absorver todas as contribuições constantes daqui em diante. Transformando o somatório em um produto de exponenciais e fazendo a integração nos elementos da álgebra, temos:

$$W_C = \mathcal{N} \int dU_e \prod_f \delta(U_f). \quad (4.64)$$

Neste ponto introduzimos duas novas variáveis:

$$U_e = g_{ve} g_{ev'}, \quad (4.65)$$

$$h_{vf} = g_{e'v} g_{ve}. \quad (4.66)$$

A variável  $g_{ve}$  pode ser interpretada como a holonomia da metade do link, enquanto  $h_{vf}$  é a holonomia associada às quinas. A notação utilizada evita confusões:  $g_{ve}$  é a holonomia que faz o transporte paralelo do vértice  $v$  até o meio da aresta  $e$ , enquanto  $g_{ev'}$  faz o transporte do meio de  $e$  até o vértice  $v'$ . Assim, nesta notação, temos:

$$g_{ev} = g_{ve}^{-1}. \quad (4.67)$$

Para  $h_{vf}$  a notação também é intuitiva: ele é o elemento do grupo que faz o transporte paralelo da metade de uma aresta até outra, passando por uma quina. Em cada quina de uma face temos apenas um vértice, assim utilizamos o rótulo  $vf$  para identificar de qual elemento  $h$  estamos falando. Todas essas definições estão representadas na Figura 8.

Voltando à amplitude de transição, podemos escrever:

$$W_C = \mathcal{N} \int dh_{vf} \prod_f \delta(h_{vf} h_{v'f} \cdots), \quad (4.68)$$

onde apenas trocamos as variáveis  $U_e$  multiplicadas ao redor da face pelas variáveis  $h_{vf}$ . Podemos agora aproveitar da relação entre as variáveis  $h_{vf}$  e  $g_{ve}$  para inserir resoluções da identidade da forma:

$$\int dg_{ve} \delta(g_{ev} g_{ve} h_{vf}) = \mathbb{I}. \quad (4.69)$$

Temos assim:

$$W_{\mathcal{C}} = \mathcal{N} \int dh_{vf} \int dg_{ve} \prod_f \delta(h_{vf} h_{v'f} \cdots) \prod_{vf} \delta(g_{ev} g_{ve} h_{vf}). \quad (4.70)$$

Podemos então escrever a amplitude de transição da seguinte maneira:

$$W_{\mathcal{C}} = \mathcal{N} \int dh_{vf} \prod_f \delta(h_f) \prod_v A_v(h_{vf}), \quad (4.71)$$

onde  $h_f$  é a multiplicação dos elementos  $h_{vf}$  ao redor da face e  $A_v(h_{vf})$  é chamada de **amplitude do vértice**, definida por:

$$A_v(h_{vf}) = \int dg_{ve} \prod_f \delta(g_{ev} g_{ve} h_{vf}). \quad (4.72)$$

A amplitude do vértice tem papel fundamental no que se segue.

Para desenvolver a expressão (4.72), temos que especificar com qual grupo estamos trabalhando para utilizarmos as representações daquele grupo e podermos fazer os cálculos explicitamente. Observa-se que até aqui os resultados (4.71) e (4.72) são totalmente gerais, ou seja, são válidos para qualquer teoria BF em um grupo  $G$  arbitrário, uma vez que não o especificamos em nenhuma etapa da dedução.

A implementação correta do grupo de simetria, bem como a utilização do mapa  $Y_\gamma$  foi o grande sucesso dos modelos EPRL/FK. Sabemos que na fronteira queremos estados  $SU(2)$ , enquanto no *bulk* queremos estados  $SL(2, \mathbb{C})$ . Podemos então fazer a seguinte tentativa: as variáveis  $g_{ve}$  serão tomadas como variáveis  $SL(2, \mathbb{C})$ , enquanto as variáveis  $h_{vf}$  são escolhidas como  $SU(2)$ . A motivação geométrica é interessante. Se os vértices do 2-complexo estão associados aos 4-simplexos, uma aresta, que liga dois vértices, cola um tetraedro da fronteira de um 4-simplexo com outro tetraedro da fronteira de um 4-simplexo vizinho. Assim, podemos pensar na variável  $g_{ve}$  como fazendo o transporte paralelo do centro do 4-simplexo até o tetraedro da sua fronteira, ou seja, ela está associada somente a um único 4-simplexo, de forma que ela não carrega nenhuma informação da fronteira deste 4-simplexo, estando relacionada somente ao *bulk* da variedade. Já as variáveis  $h_{vf}$  saem do meio de uma aresta, passando pelo vértice e chegando ao meio da aresta seguinte, ou seja, podemos visualizá-la como sendo a variável que faz o transporte paralelo entre dois tetraedros de um 4-simplexo. Assim,  $h_{vf}$  carrega as informações de como dois tetraedros estão colados, ou seja, ela carrega a informação da fronteira de um 4-simplexo. É importante dizer que tais argumentos servem apenas como uma visualização das escolhas das variáveis, de forma que uma demonstração rigorosa da sua validade é feita ao mostrarmos que a forma da amplitude do vértice obtida leva ao limite clássico correto.

Escolhidos os grupos envolvidos, podemos trabalhar com representações dos mesmos. Iremos expandir a função delta de (4.72) em representações unitárias do grupo  $SU(2)$ :

$$\delta(U) = \sum_j (2j+1) \text{Tr}_j \left[ D^{(j)}(U) \right], \quad (4.73)$$

onde o traço é tomado na representação de  $spin-j$  de  $SU(2)$ .

Temos porém um problema. A multiplicação de elementos do grupo em  $\delta(g_{ev}g_{ve'}h_{vf})$  não é bem definida ao trabalharmos com representações, uma vez que estamos multiplicando elementos que pertencem a diferentes grupos. Outro ponto é que a expansão (4.73) apenas é válida para o grupo  $SU(2)$ . Porém, podemos utilizar o mapeamento introduzido pelo mapa  $Y_\gamma$  para solucionar ambos os problemas, de forma que temos:

$$A_v(h_{vf}) = \sum_{j_f} \int_{SL(2,\mathbb{C})^5} dg_{ve} \prod_f (2j_f+1) \text{Tr}_{j_f} \left[ Y_\gamma^\dagger D^{(p,k)}(g_{ev}) D^{(p,k)}(g_{ve'}) Y_\gamma D^{(j)}(h_{vf}) \right], \quad (4.74)$$

onde  $D^{(p,k)}(g_{ev})$  são as matrizes de Wigner para  $SL(2, \mathbb{C})$  (A.66).

O rótulo  $SL(2, \mathbb{C})^5$  na integração nos lembra que a integração é feita em cinco elementos do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ , pois temos cinco arestas saindo de um vértice, ou seja, temos cinco elementos  $g_{ve}$  em um dado vértice. Porém, podemos mostrar que devido a estas integrações, a amplitude do vértice na forma (4.74) diverge. Começemos observando que a amplitude do vértice definida é uma função na forma:

$$A_v \sim \int_{SL(2,\mathbb{C})^5} dg_{ev} f(g_{ev}g_{ve'}) = \int_{SL(2,\mathbb{C})^5} dg_{ev} f(g_{ev}g_{e'v}^{-1}). \quad (4.75)$$

Porém, uma função  $f$  como esta é invariante por transformações  $\Lambda \in SL(2, \mathbb{C})$  comuns da forma:

$$\begin{aligned} g_{ve} &\mapsto \Lambda g_{ve} \\ f(g_{ev}g_{e'v}^{-1}) &\mapsto f(g_{ev}\Lambda^{-1}\Lambda g_{e'v}^{-1}) = f(g_{ev}g_{e'v}^{-1}). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Logo, chamando  $\Lambda = g_{v5}^{-1}$ , onde  $g_{v5}$  é o elemento associado com a quinta aresta, temos:

$$\begin{aligned} g_{v5} &\mapsto g_{v5}^{-1}g_{v5} = \mathbb{I} \\ f(g_{v1}, \dots, g_{v5}) &\mapsto f(g_{v1}, \dots, g_{v4}). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Logo, a função não dependerá mais do elemento do grupo associado à quinta aresta e teremos:

$$A_v \sim \int_{SL(2,\mathbb{C})^5} dg_{ev} f(g_{v1}, \dots, g_{v4}) = F \int_{SL(2,\mathbb{C})} dg_{v5} \rightarrow \infty, \quad (4.78)$$

que diverge, pois  $SL(2, \mathbb{C})$  é um grupo não compacto. O mesmo raciocínio é válido para qualquer outro elemento do grupo associado com qualquer uma das outras quatro arestas, sendo que o quinto elemento foi escolhido apenas como um exemplo. Porém, como as transformações de calibre nos vértices são comuns, apenas um dos cinco elementos pode

ser mapeado na identidade, de forma que  $f$  continuará dependendo de quatro outros elementos.

A divergência de (4.74) é porém facilmente resolvida. A integral divergente em (4.78) é apenas o volume do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ , que é divergente pelo fato do grupo não ser compacto, e não traz nenhuma informação física. Assim, podemos suprimir a quinta integração e realizar apenas as integrais não divergentes, de forma que a forma final da amplitude do vértice pode ser escrita como:

$$A_v(h_{vf}) = \sum_{j_f} \int_{SL(2, \mathbb{C})} dg'_{ve} \prod_f (2j_f + 1) \text{Tr}_{j_f} \left[ Y_\gamma^\dagger D^{(p,k)}(g_{ev}) D^{(p,k)}(g_{ve'}) Y_\gamma D^{(j)}(h_{vf}) \right], \quad (4.79)$$

onde a notação  $\int_{SL(2, \mathbb{C})} dg'_{ve}$  indica que apenas realizamos as integrais não divergentes de (4.74). Com esta modificação, é possível mostrar que a amplitude do vértice (4.79) é finita [37].

É conveniente ainda escrever a amplitude do vértice de uma forma mais compacta:

$$A_v(h_{vf}) = \int_{SL(2, \mathbb{C})} dg'_{ve} \prod_f P[g_{ev} g_{ve'}, h_{vf}], \quad (4.80)$$

onde  $P[g, h]$  é definido como:

$$P[g, h] = \sum_j (2j + 1) \text{Tr}_j \left[ Y_\gamma^\dagger D^{(p,k)}(g) Y_\gamma D^{(j)}(h) \right]. \quad (4.81)$$

A amplitude do vértice na forma (4.80) será frequentemente usada no Capítulo 6.

Definida a forma final da amplitude do vértice, podemos escrever a forma completa das amplitudes de transição:

$$W_{\mathcal{C}}(U_\ell) = \mathcal{N} \int_{SU(2)} dh_{vf} \prod_f \delta(h_f) \prod_v A_v(h_{vf}). \quad (4.82)$$

Como esperado,  $W_{\mathcal{C}}$  deve depender da configuração do grafo da fronteira, ou seja, das variáveis  $U_\ell$ . Assim, na integral em (4.82) integramos sobre todos os elementos  $h_{vf}$  no *bulk*, ou seja, no interior do 2-complexo, de forma que (4.82) dependerá apenas dos elementos que não foram integrados, ou seja, os elementos do grupo associados ao grafo da fronteira. Assim, a interpretação de (4.82) é direta: ela nos dá a amplitude de uma determinada configuração da fronteira de um dado 2-complexo. Se a fronteira for formada por duas partes desconexas, como será feito no modelo do Capítulo 6, (4.82) pode ser interpretada como a probabilidade de uma determinada configuração inicial transicionar para uma determinada configuração final, dado um 2-complexo ligando os dois grafos desconexos.

É sempre importante lembrar que ao trabalharmos com uma teoria discreta estamos truncando os graus de liberdade, de forma que a amplitude definida em (4.82) é uma aproximação. Quanto mais refinado for o 2-complexo, ou seja, quanto maior o número

de vértices na discretização, mais a amplitude de transição se aproxima do valor exato esperado. Em outras palavras, podemos escrever:

$$W = \lim_{\mathcal{C} \rightarrow \infty} W_{\mathcal{C}}. \quad (4.83)$$

Na prática, em cálculos concretos, podemos ver as contribuições que cada novo vértice adicionado ao 2-complexo traz para os resultados procurados. Tal ideia será aplicada diretamente no Capítulo 6 ao analisarmos a contribuição de apenas um vértice no modelo estudado.

Outro ponto importante é que a nossa construção inicial partiu da discretização da variedade a partir de triangulações. Assim, a princípio, o nosso vértice é dual a um 4-simplexo (ver Tabela 1), de forma que a amplitude de transição obtida seria válida apenas para este tipo de geometria. Porém, é possível discretizar a variedade de diversas outras maneiras e utilizando outras geometrias, de forma que é possível mostrar que o resultado encontrado para a amplitude de transição (4.82) e para a amplitude do vértice (4.79) é válido para geometrias arbitrárias [38]. Tal generalização do vértice EPRL/FK é essencial e também será usada explicitamente no Capítulo 6, onde a fronteira será construída por triangulações mas o vértice utilizado não necessariamente será dual a um 4-simplexo.

Por fim, vale dizer que a construção do vértice EPRL/FK foi um dos modelos propostos e o seu sucesso e ampla utilização se deve ao fato de o mesmo levar ao limite clássico esperado da teoria. Entende-se o limite clássico esperado da seguinte maneira. Os resultados clássicos acontecem no regime em que  $\hbar$  é pequeno. Assim em (3.1), o integrando oscilará fortemente para todas as trajetórias, exceto para aquelas que levam a variações nulas da ação, ou seja, para as soluções das equações de movimento, de forma que no limite clássico podemos escrever:

$$W \sim e^{\frac{i}{\hbar} S(x,t,x',t')}, \quad (4.84)$$

em que  $S(x,t,x',t')$  é a ação avaliada na solução das equações de movimento, entre os pontos iniciais  $(x,t)$  e finais  $(x',t')$ . A função  $S(x,t,x',t')$  recebe o nome de **função de Hamilton**. Logo espera-se que para o vértice EPRL/FK, no limite clássico, a amplitude se comporte como em (4.84), com o peso dado pela ação de Regge, uma vez que estamos na teoria discreta. A implementação deste limite na Gravitação Quântica de Laços é feita ao utilizarmos os estados coerentes, que serão discutidos no Capítulo 5, e tomarmos o limite de números quânticos grandes. Neste contexto, alguns trabalhos mostraram que o vértice EPRL/FK reproduz o resultado esperado, como [39] e [40].

## 5 Estados Coerentes

No Capítulo 4 foi introduzida a base de *spin-networks* (4.34), como sendo a base de estados na representação da holonomia que diagonaliza os operadores de área e volume em um dado grafo  $\Gamma$ . Porém, foi visto que a interpretação geométrica introduzida pela discretização clássica se torna imprecisa na teoria quântica, devido às incertezas associadas à geometria (4.38). Assim, somos motivados a buscar estados que recuperem as propriedades clássicas da geometria, possibilitando a análise do regime semiclássico da teoria.

Tais estados são chamados de estados coerentes, inspirados nos estados que levam o mesmo nome na teoria do oscilador harmônico quântico. Nesta, estes estados reproduzem as características esperadas para um oscilador harmônico clássico: possuem valores esperados  $\langle \hat{x} \rangle$  e  $\langle \hat{p} \rangle$  oscilantes, possuem um valor bem definido de energia, ou seja, com pequenas incertezas relativas, além de minimizarem as relações de incerteza ( $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$ ). A função de onda destes estados é descrita como um pacote de onda gaussiano, que oscila no tempo sem perder a sua forma [41].

Com estas características, os estados coerentes se mostram excelentes estados semiclássicos, uma vez que reproduzem as características esperadas para as variáveis clássicas, mas ainda carregando comportamentos inerentes da descrição quântica. O objetivo deste capítulo é introduzir algumas construções de estados coerentes para a Gravitação Quântica de Laços, que minimizem as relações de incerteza para um dado observável, além de ter um pico em uma determinada geometria, favorecendo a recuperação das características clássicas e o consequente estudo do limite clássico da teoria.

### 5.1 Estados Coerentes de Livine-Speziale

Uma classe de estados coerentes conveniente, baseada nas propriedades do grupo  $SU(2)$ , foi introduzida em [12], levando o nome dos autores do trabalho: os estados coerentes de Livine-Speziale. A construção destes estados parte do fato que o espaço de Hilbert da Gravitação Quântica de Laços truncado para um grafo pode ser decomposto a partir de produtos de espaços de representação de *spin*  $j$  de  $SU(2)$  ( $\mathcal{H}_j$ ) para cada nó (4.19). Assim, podemos construir estados coerentes  $SU(2)$  para cada espaço  $\mathcal{H}_j$  e tomar o produto tensorial dos mesmos em seguida.

Começemos com um estado  $|j, m\rangle \in \mathcal{H}_j$ . Tal base diagonaliza os operadores  $J^2$  (A.13) e  $J_z$  (A.14). Assim, o valor de  $J_z$  é bem definido, mas temos relações de incerteza associadas a  $J_x$  e  $J_y$ . Usando (A.12) e (4.37), temos:

$$\Delta J_x \Delta J_y \geq \frac{1}{2} |\langle J_z \rangle|. \quad (5.1)$$



Queremos encontrar estados em  $\mathcal{H}_j$  que minimizem esta relação de incerteza, ou seja, estados em que valha a igualdade em (5.1). Um bom candidato é o estado  $|j, j\rangle$ , ou seja, o estado de maior  $J_z$  possível. Vamos mostrar isso explicitamente. A ação dos operadores de escada é facilmente calculada:

$$J_+ |j, j\rangle = 0, \quad (5.2)$$

$$\langle j, j | J_- |j, j\rangle = C \langle j, j | j, j - 1\rangle = 0. \quad (5.3)$$

Logo,  $\langle J_x \rangle = \langle J_y \rangle = 0$ , já que eles são combinações de  $J_+$  e  $J_-$ :

$$J_x = \frac{J_+ + J_-}{2}, \quad (5.4)$$

$$J_y = \frac{J_+ - J_-}{2i}. \quad (5.5)$$

Para calcularmos as dispersões procedemos para o cálculo de  $\langle J_x^2 \rangle$  e  $\langle J_y^2 \rangle$ . Temos então:

$$\langle J_x^2 \rangle = \frac{1}{4} (\langle J_+^2 \rangle + \langle J_+ J_- \rangle + \langle J_- J_+ \rangle + \langle J_-^2 \rangle), \quad (5.6)$$

$$\langle J_y^2 \rangle = -\frac{1}{4} (\langle J_+^2 \rangle - \langle J_+ J_- \rangle - \langle J_- J_+ \rangle + \langle J_-^2 \rangle). \quad (5.7)$$

Porém, devido a (5.2) e (5.3), sabemos que  $\langle J_+^2 \rangle = 0$  e  $\langle J_-^2 \rangle = 0$ . Assim,  $\langle J_x^2 \rangle = \langle J_y^2 \rangle$  e podemos escrever:

$$\langle J_x^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle J_x^2 + J_y^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle J^2 - J_z^2 \rangle = \frac{1}{2} (j(j+1) - j^2) = \frac{j}{2}. \quad (5.8)$$

Calculando a dispersão, temos:

$$\Delta J_x = \Delta J_y = \sqrt{\langle J_x^2 \rangle - \langle J_x \rangle^2} = \sqrt{\frac{j}{2}}. \quad (5.9)$$

Aplicando na relação de incerteza (5.1):

$$\Delta J_x \Delta J_y = \frac{j}{2} = \frac{1}{2} |\langle J_z \rangle|. \quad (5.10)$$

Ou seja, os estados  $|j, j\rangle$  minimizam as relações de incerteza (5.1). Além disso, temos para as incertezas relativas:

$$\frac{\Delta J_x}{\sqrt{\langle J^2 \rangle}} = \frac{\sqrt{\frac{j}{2}}}{\sqrt{j(j+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2(j+1)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \quad (5.11)$$

ou seja, no limite clássico, onde temos números quânticos grandes, as incertezas relativas são pequenas, indicando que temos um bom estado semiclássico.

Os estados  $|j, j\rangle$  são estados coerentes para o operador  $L_z$ . Porém, podemos generalizar tais estados, de forma a obter estados coerentes em uma direção genérica  $\vec{n}$ . Para isso, basta utilizarmos matrizes de rotação  $D(R_{\vec{n}})$  que rodam o vetor  $\hat{z}$  para o vetor  $\vec{n}$ :

$$R_{\vec{n}} \hat{z} = \vec{n}. \quad (5.12)$$

Atuando com as representações nos estados, podemos definir:

$$|j, \vec{n}\rangle = D(R_{\vec{n}}) |j, j\rangle. \quad (5.13)$$

Os estados (5.13) são chamados de **estados coerentes**  $SU(2)$ .

Definidos os estados coerentes em  $\mathcal{H}_j$ , queremos definir estados coerentes em  $\mathcal{H}_\Gamma$ . Porém, sabemos que  $\mathcal{H}_\Gamma$  pode ser decomposto em produtos tensoriais de espaços  $\mathcal{H}_j$  em cada nó (4.18). Assim, um estado coerente para um nó em  $\mathcal{H}_\Gamma$  pode ser escrito como:

$$|j_1, \vec{n}_1\rangle \otimes |j_2, \vec{n}_2\rangle \otimes |j_3, \vec{n}_3\rangle \otimes |j_4, \vec{n}_4\rangle \in \mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4}, \quad (5.14)$$

onde  $j_1, \dots, j_4$  são os *spins* associados a cada um dos *links* naquele nó. Estes estados porém, de forma geral, não são invariantes por transformações de calibres no nós, ou seja, eles não estão no espaço de Hilbert físico  $\mathcal{K}_\Gamma$  (4.19). Para projetar os estados (5.14) para  $\mathcal{K}_\Gamma$  precisamos que os mesmos sejam invariantes por transformações  $SU(2)$  nos nós. Tal projeção pode ser implementada de forma intuitiva: fazemos uma transformação  $SU(2)$  comum em todos os estados  $|j_\ell, \vec{n}_\ell\rangle$  e integramos sob todas as transformações possíveis, de forma que o estado resultante é invariante por estas transformações. Assim, temos:

$$\begin{aligned} ||j_{\ell_n}, \vec{n}_{\ell_n}\rangle = \int_{SU(2)} dU D^{(j_1)}(U) |j_1, \vec{n}_1\rangle \otimes D^{(j_2)}(U) |j_2, \vec{n}_2\rangle \\ \otimes D^{(j_3)}(U) |j_3, \vec{n}_3\rangle \otimes D^{(j_4)}(U) |j_4, \vec{n}_4\rangle. \end{aligned} \quad (5.15)$$

O objeto acima é um *intertwiner*, uma vez que está associado a um nó e é um objeto invariante por transformações de calibre  $SU(2)$ . Por este motivo, ele é chamado de **intertwiner coerente de Livine-Speziale**.

Nesta base de *intertwiners* podemos escrever um estado coerente associando um *intertwiner* coerente para cada nó:

$$\psi_{j_\ell, \vec{n}_\ell}(U_\ell) = \bigotimes_{\ell} D^{(j_\ell)}(U_\ell) \cdot \bigotimes_{\mathbf{n}} \iota_{\mathbf{n}}(\vec{n}_\ell). \quad (5.16)$$

Os estados na forma (5.16) são chamados de **estados coerentes de Livine-Speziale**.

A interpretação física dos estados coerentes de Livine-Speziale é interessante. Eles são rotulados por um vetor e um *spin* para cada *link* em um determinado nó. Ao visualizarmos a triangulação envolvida, temos um vetor associado a cada triângulo de um tetraedro. Para os estados físicos, tais vetores devem continuar satisfazendo a relação de fechamento ao rodarmos um tetraedro por transformações  $SU(2)$ . Assim, os vetores  $\vec{n}_\ell$  em cada link podem ser interpretados como normais a cada um dos triângulos da borda de um tetraedro. Já os spins estão relacionados às áreas dos triângulos (4.7). Porém, foi visto no Capítulo 3 que a variável  $\vec{E}_\ell$  tem a interpretação de um vetor normal aos triângulos, com norma dada pela área da superfície dos mesmos. Desse modo, os estados coerentes de Livine-Speziale são rotulados pelas grandezas associadas ao operador  $\vec{E}_\ell$ , sendo estados coerentes associados a eles.

Com esta descrição, os estados coerentes de Livine-Speziale carregam as informações da geometria de um tetraedro clássico, porém ela não diz nada a respeito de como estes tetraedros são colados, ou seja, ela não nos fornece informações de como eles estão mergulhados na triangulação do espaço-tempo. Deste modo, estes estados coerentes são comumente chamados na literatura de **estados coerentes intrínsecos** [1], uma vez que eles carregam informações apenas da geometria intrínseca, ou seja, da geometria das folhas espaciais tridimensionais (descritas no Capítulo 2).

## 5.2 Estados *Heat Kernel*

Como discutido inicialmente, os estados coerentes se caracterizam como aqueles que possuem uma distribuição centrada ao redor de um valor médio, de forma que as relações de incerteza sejam minimizadas. Utilizando estes conceitos, o objetivo desta seção é construir estados coerentes que tenham picos nas variáveis de configuração e também nas respectivas variáveis canonicamente conjugadas.

A construção de tais estados coerentes pode seguir ideias básicas da Mecânica Quântica usual. Vamos considerar o seguinte estado gaussiano unidimensional para uma partícula centrada na posição  $q$  na representação da posição:

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{(x-q)^2}{2\sigma^2}}, \quad (5.17)$$

onde  $A$  é uma constante de normalização. Fazendo uma transformada de Fourier podemos obter a função no espaço dos momentos:

$$\phi(k) = Be^{-\frac{k^2}{2/\sigma^2}} e^{-iqk}, \quad (5.18)$$

onde  $B$  é uma constante. Assim, o estado gaussiano satisfaz a relação de incerteza mínima ( $\Delta x \cdot \Delta k = 1$ ) desejada. Porém, ao escrevermos o estado na forma (5.17), centramos a sua posição ao redor de um valor  $q$ , porém seu momento é centrado em zero. Ao contrário, se especificarmos a função  $\phi(k)$  centrada em um valor  $p$ , ao realizarmos a transformada de Fourier obteremos a posição centrada em zero. Queremos encontrar uma forma de especificar tanto o valor médio da posição como do momento. Tal objetivo pode ser atingido ao complexificarmos o valor médio da posição:

$$q \rightarrow z = q + i\frac{\sigma^2}{\hbar}p, \quad (5.19)$$

de forma que teremos:

$$\psi(x) = Ae^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2}} = A'e^{-\frac{(x-q)^2}{2\sigma^2} + \frac{i}{\hbar}px}. \quad (5.20)$$

Ao realizarmos a transformada de Fourier obtemos:

$$\phi(k) = B'e^{-\frac{(k-p/\hbar)^2}{2/\sigma^2} + iqk}. \quad (5.21)$$

Assim, conseguimos manter a minimização das relações de incerteza, enquanto a posição e o momento estão centrados nos valores desejados ( $\langle x \rangle = q$  e  $\langle k \rangle = p/\hbar$ ).

A generalização matemática das ideias acima para a construção de estados coerentes para grupos de Lie compactos foi introduzida em [42]. Já a forma de construção dos estados para a Gravitação Quântica de Laços foi proposta inicialmente em [17] e posteriormente em [13] na forma invariante de calibre.

Tais estados coerentes podem ser construídos de uma forma intuitiva, como proposto em [1]. Queremos um estado centrado em um certo valor da nossa variável de configuração, ou seja, da holonomia. Inicialmente, podemos fazer isso com uma função delta:

$$\psi_{h_\ell}(U_\ell) = \delta(U_\ell h_\ell^{-1}), \quad (5.22)$$

onde  $h_\ell \in SU(2)$  é o elemento onde a distribuição delta está centrada.<sup>1</sup> Expandindo o delta em representações, como em (4.73), temos:

$$\psi_{h_\ell}(U_\ell) = \sum_j (2j+1) \text{Tr}_j[D^{(j)}(U_\ell h_\ell^{-1})]. \quad (5.23)$$

A função delta porém não é a nossa escolha final para um estado coerente, uma vez que ela está centrada em um valor de holonomia, sem nenhuma incerteza associada, de forma que a variável conjugada necessariamente apresentará uma grande incerteza. Uma opção na resolução deste problema surge de técnicas desenvolvidas na resolução da equação do calor:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \nabla^2 u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = f(x) \end{cases}, \quad (5.24)$$

que por inspeção direta possui soluções na forma:

$$u(t, x) = e^{-t\nabla^2} f(x) \quad (5.25)$$

Onde  $e^{-t\nabla^2}$  é o chamado operador *Heat Kernel*. Sua interpretação é direta ao analisarmos (5.24): para soluções de estado estacionário, a equação se reduz a uma equação de Laplace, que não admite máximos e mínimos locais, de forma que o papel do operador *Heat Kernel* é de suavizar a distribuição inicial dada por  $f(x)$ . Analisando um caso particular de interesse, a visualização da atuação do operador *Heat Kernel* é ainda mais clara: sabe-se que, se  $f(x) = \delta(x - a)$ , então a solução da equação do calor é uma gaussiana centrada em  $a$ , mas que se alarga no tempo, com  $\sigma = \sqrt{t}$ .

Nosso objetivo é generalizar a atuação do operador *Heat Kernel* para o grupo  $SU(2)$ , de forma a suavizar a distribuição delta em (5.23), tornando-a uma distribuição gaussiana,

<sup>1</sup> Neste contexto, é importante dizer como funciona a função delta para o grupo  $SU(2)$ . Ela possui as mesmas propriedades de filtragem que o delta de Dirac usual: a filtragem ocorre quando o argumento do delta retorna a identidade do grupo. Para o grupo dos reais, com a operação de soma, a identidade é o elemento zero. Para o grupo  $SU(2)$  a identidade é a matriz  $\mathbb{I}$ . Assim,  $\int dU f(U) \delta(Uh^{-1}) = f(h)$ .

mas ainda centrada em  $h_\ell$ . Em nosso contexto, temos como operadores derivativos no grupo os campos vetoriais invariantes (4.5), de forma que a generalização do Laplaciano é dada pelo operador  $\vec{J}^2$ . Assim, podemos reescrever um novo estado centrado em  $h_\ell$  como:

$$\psi_{h_\ell}(U_\ell) = \sum_j (2j+1) e^{-t\vec{J}^2} \text{Tr}_j[D^{(j)}(U_\ell h_\ell^{-1})]. \quad (5.26)$$

Expandindo o operador *Heat Kernel* em série, percebemos que cada um dos termos retornará potências dos autovalores de  $\vec{J}^2$ , de forma que teremos:

$$\psi_{h_\ell}(U_\ell) = \sum_j (2j+1) e^{-tj(j+1)} \text{Tr}_j[D^{(j)}(U_\ell h_\ell^{-1})]. \quad (5.27)$$

O estado na forma (5.27) possui o pico em  $h_\ell$ , mas ainda não especifica o pico na variável conjugada. Porém, foi visto da experiência com a Mecânica Quântica usual que tal pico pode ser obtido a partir da complexificação do pico da variável de configuração. Procuramos então como complexificar um elemento do grupo  $SU(2)$ . A resposta surge na análise das álgebras de  $su(2)$  e  $sl(2, \mathbb{C})$ . Sejam  $A, B \in su(2)$ , então qualquer elemento de  $sl(2, \mathbb{C})$  pode ser escrito como  $A + iB \in sl(2, \mathbb{C})$ , ou seja,  $sl(2, \mathbb{C}) \simeq su(2)^\mathbb{C}$ . Tomando a exponencial destes elementos da álgebra, chegamos à chamada decomposição polar de  $SL(2, \mathbb{C})$ :

$$H = h e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma}}, \quad (5.28)$$

que é um caso particular da decomposição de Cartan (A.51). Vemos que a complexificação de um elemento do grupo  $SU(2)$  resulta em um elemento do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ . Além disso, pela decomposição polar (5.28), vemos que:

$$SL(2, \mathbb{C}) \simeq SU(2) \times su(2) \simeq T^*SU(2), \quad (5.29)$$

ou seja, o grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  é isomorfo ao espaço de fase cinemático da Gravitação Quântica de Laços, de forma que ao complexificarmos  $h \in SU(2) \rightarrow H \in SL(2, \mathbb{C})$ , o novo elemento  $H$  nos fornecerá as informações do pico de ambas as variáveis do espaço de fase, como será discutido em seguida.

Assim, complexificando o pico da nossa variável de configuração em (5.27) e extendendo a construção para todos os *links*, podemos escrever:

$$\psi_{h_\ell}(U_\ell) = \prod_\ell \sum_{j_\ell} (2j_\ell + 1) e^{-tj_\ell(j_\ell+1)} \text{Tr}_{j_\ell}[D^{(j_\ell)}(U_\ell H_\ell^{-1})]. \quad (5.30)$$

Da mesma forma como foi discutido para os estados coerentes de Livine-Speziale, os estados *Heat Kernel* na forma (5.30) não pertencem ao espaço de Hilbert físico da Gravitação Quântica de Laços  $\mathcal{K}_\Gamma$ , ou seja, eles não são invariantes por transformações de calibre nos nós. Porém, assim como na seção anterior, tal problema é resolvido ao projetarmos o estado para o espaço invariante através de integrações, cobrindo todas as transformações possíveis nos nós:

$$\psi_{h_\ell}(U_\ell) = \int_{SU(2)} dg_n \prod_\ell \sum_{j_\ell} (2j_\ell + 1) e^{-tj_\ell(j_\ell+1)} \text{Tr}_{j_\ell}[D^{(j_\ell)}(g_{s_\ell}^{-1} U_\ell g_{t_\ell} H_\ell^{-1})]. \quad (5.31)$$

Os estados nesta forma são chamados de **estados coerentes Heat Kernel**. Eles também são escritos usualmente na forma compacta:

$$\psi_{h_\ell}(U_\ell) = \int_{SU(2)} dg_n \prod_\ell K(g_{s_\ell}^{-1} U_\ell g_{t_\ell} H_\ell^{-1}), \quad (5.32)$$

onde

$$K(U) = \sum_j (2j+1) e^{-tj(j+1)} \text{Tr}_j[D^{(j)}(U)]. \quad (5.33)$$

O estudo dos picos destes estados foi feito inicialmente em detalhes em [18]. É importante notar que os estados são escritos na representação da holonomia, ou seja, eles são funções que dependem de  $U_\ell$ . O rótulo  $H_\ell$  apenas indica o elemento de  $SL(2, \mathbb{C})$  escolhido, que determina os valores médios das variáveis, como ficará claro adiante. Utilizando a parametrização de  $H_\ell$  proposta em [9]:

$$H_\ell = h_\ell e^{i4tE_\ell^i/8\pi\gamma G} \quad (5.34)$$

é possível mostrar que os picos do estado (5.31) são:

$$\frac{\langle \psi_{H_\ell} | U_\ell | \psi_{H_\ell} \rangle}{\langle \psi_{H_\ell} | \psi_{H_\ell} \rangle} = h_\ell \quad \text{e} \quad \frac{\langle \psi_{H_\ell} | \vec{E}_\ell | \psi_{H_\ell} \rangle}{\langle \psi_{H_\ell} | \psi_{H_\ell} \rangle} = \vec{E}_\ell \quad (5.35)$$

com incertezas:

$$\Delta U_\ell \sim \sqrt{t\hbar} \quad \text{e} \quad \Delta E_\ell \sim \sqrt{\frac{\hbar}{t}}, \quad (5.36)$$

que têm um comportamento esperado para distribuições gaussianas. Estamos interessados nas incertezas relativas. Usando o fato de que o módulo de  $\vec{E}_\ell$  é dado pela área do triângulo associado ao *link*  $E_\ell \approx \gamma\hbar j_\ell$ , temos:

$$\frac{\Delta E_\ell}{E_\ell} \sim \frac{1}{j_\ell \sqrt{t}}. \quad (5.37)$$

Para a holonomia o valor esperado não depende de  $j_\ell$ , assim:

$$\frac{\Delta U_\ell}{U_\ell} \sim \sqrt{t}. \quad (5.38)$$

Como queremos incertezas relativas pequenas o parâmetro  $t$ , chamado de tempo *Heat Kernel*, sofre uma restrição:

$$\frac{1}{j_\ell} \ll \sqrt{t} \ll 1. \quad (5.39)$$

Uma característica importante dos estados *Heat Kernel* é a sua interpretação física em termos da geometria do espaço-tempo. Tal interpretação foi apresentada em diversos trabalhos, como [14–16]. Uma vez que o comportamento médio da geometria é determinado por  $H_\ell$ , o estudo deste levará à interpretação física desejada. Começamos relembrando a decomposição de Cartan de um elemento de  $SL(2, \mathbb{C})$ , descrita com mais detalhes em (A.51):

$$H = U e^{\eta\sigma_3/2} V^{-1}, \quad (5.40)$$

onde  $U, V \in SU(2)$ . Um elemento de  $SU(2)$  por sua vez pode ser escrito como uma composição de rotações:

$$U = R_{\vec{n}_s} e^{iq\sigma_3/2}, \quad (5.41)$$

onde  $R_{\vec{n}_s}$  é definida como a rotação que leva o vetor unitário na direção  $\hat{z}$  para o vetor  $\vec{n}_s$  (5.12) e o outro fator é apenas uma rotação ao redor do eixo  $\hat{z}$ . Podemos fazer uma decomposição análoga para  $V$ :

$$V = R_{\vec{n}_t} e^{iq'\sigma_3/2}. \quad (5.42)$$

A interpretação física dos vetores  $\vec{n}_s$  e  $\vec{n}_t$  será dada adiante. Substituindo (5.41) e (5.42) em (5.40) e já inserindo o rótulo em termos dos links, temos:

$$\begin{aligned} H_\ell &= R_{\vec{n}_{s_\ell}} e^{iq_\ell\sigma_3/2} e^{i\eta_\ell\sigma_3/2} e^{-iq'_\ell\sigma_3/2} R_{\vec{n}_{t_\ell}}^{-1} \\ &= R_{\vec{n}_{s_\ell}} e^{-i(q'_\ell - q_\ell + i\eta_\ell)\sigma_3/2} R_{\vec{n}_{t_\ell}}^{-1}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde no segundo passo foi utilizado que rotações e *boosts* na mesma direção comutam (A.49). Definindo uma nova variável  $\xi_\ell = q'_\ell - q_\ell$  podemos escrever:

$$H_\ell = R_{\vec{n}_{s_\ell}} e^{-iz_\ell\sigma_3/2} R_{\vec{n}_{t_\ell}}^{-1}, \quad (5.44)$$

onde foi definida a variável complexa:

$$z_\ell = \xi_\ell + i\eta_\ell. \quad (5.45)$$

Assim, um elemento  $H_\ell$  determina completamente os picos do estados coerentes (5.31). Por sua vez, seguindo a decomposição (5.44) o elemento  $H_\ell$  depende de 4 parâmetros:  $\xi_\ell$ ,  $\eta_\ell$ ,  $\vec{n}_{s_\ell}$  e  $\vec{n}_{t_\ell}$ . Tais parâmetros tem uma interpretação física fundamental e influenciam diretamente na geometria descrita.

Os dois vetores  $\vec{n}_{s_\ell}$  e  $\vec{n}_{t_\ell}$  fornecem as normais associadas aos triângulos que são colados no *link*  $\ell$  [16]. Os rótulos  $s_\ell$  e  $t_\ell$  indicam o triângulo do tetraedro do qual sai (do inglês, *source*) o *link*  $\ell$  e o triângulo do tetraedro no qual chega (do inglês, *target*) o *link*, respectivamente. É importante ressaltar que na nossa construção dois triângulos colados tem necessariamente a mesma área, mas não necessariamente estão perfeitamente alinhados na colagem. A este tipo de geometria é dada o nome de *twisted geometry*, introduzida em [14].<sup>2</sup>

Já as variáveis  $\xi_\ell$  e  $\eta_\ell$  tem interpretação ainda mais direta. É possível mostrar que  $\eta_\ell$  é totalmente determinada pela área associada ao triângulo no *link*  $\ell$ :

$$\eta_\ell = \frac{A_\ell t}{\hbar\gamma}. \quad (5.46)$$

<sup>2</sup> Há outros tipos de geometrias possíveis, descritas de acordo com as restrições na colagem dos poliedros. Quando as normais estão alinhadas temos as *vector geometries*. Já para colagens entre poliedros com exatamente o mesmo formato temos as *Regge geometries*. O trabalho [43] pode ser consultado para mais detalhes.

Enquanto a variável  $\xi_\ell$  é determinada pelo chamado ângulo extrínseco, que é dado pelo ângulo na variedade quadridimensional entre dois tetraedros da triangulação, ou seja, tal ângulo é a versão discreta da curvatura extrínseca [16].

A interpretação física dos estados *Heat Kernel* será fundamental e servirá como um guia na escolha das variáveis do problema no próximo capítulo. Devido a esta interpretação e ao fato de que estes estados possuem picos em ambas as variáveis do espaço de fase, eles também são usualmente chamados de **estados coerentes extrínsecos** [1].



## 6 Cosmologia *Spinfoam*

Neste capítulo iremos reunir todas as ideias apresentadas ao longo da dissertação para a aplicação em um problema concreto: o estudo da Cosmologia. Há um grande interesse na aplicação da Gravitação Quântica de Laços na Cosmologia, uma vez que se espera que efeitos quânticos introduzam modificações na dinâmica do universo primordial, levando a efeitos que podem ser observados, possibilitando o teste da teoria.

Na Figura 9, temos um diagrama esquemático das possibilidades para abordar o problema. Partindo da Relatividade Geral, podemos introduzir o princípio cosmológico, reduzindo os graus de liberdade da teoria e chegando na Cosmologia. A partir da Cosmologia, podemos implementar as técnicas de quantização da Gravitação Quântica de Laços nas variáveis cosmológicas, como será discutido adiante, chegando na Cosmologia Quântica de Laços. Tal campo de pesquisa teve um grande crescimento no início dos anos 2000, com previsões importantes, como a substituição da singularidade inicial do universo por um *bounce* devido aos efeitos de quantização [44]. A Cosmologia Quântica de Laços é um campo de pesquisa amplo e com várias possíveis abordagens, porém ela não é o tópico principal desta dissertação. Para mais detalhes, as referências [45, 46] podem ser consultadas.

Neste trabalho iremos seguir o outro caminho. Ao longo do texto, construímos

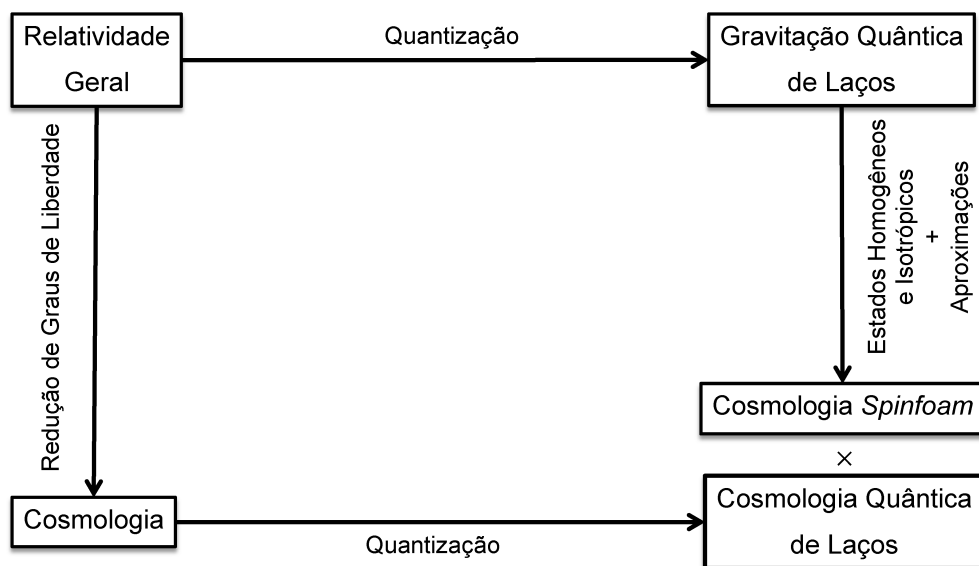


Figura 9 – Diagrama ilustrativo das possibilidades de abordar o problema de quantização na Cosmologia. Neste capítulo seguiremos o caminho da Cosmologia *Spinfoam*.

a teoria da Gravitação Quântica de Laços no formalismo de *spinfoams*. Neste capítulo, iremos mostrar como podemos utilizar as técnicas desenvolvidas para implementar estados coerentes homogêneos e isotrópicos, ou seja, com picos em geometrias FLRW na cinemática da teoria [10]. Além disso, usando a dinâmica do vértice EPRL/FK é possível mostrar, com as devidas aproximações, que a teoria retorna o limite clássico esperado para as amplitudes de transição, se mostrando autoconsistente [9, 11].

## 6.1 Cosmologia Clássica

A Cosmologia consiste no estudo do universo em largas escalas, onde vale o princípio cosmológico, que assume o espaço como sendo homogêneo e isotrópico. Neste contexto, é possível mostrar que a métrica sempre pode ser escrita na forma:

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (6.1)$$

onde  $N(t)$  é chamada de função de lapso,  $a(t)$  é o fator de escala e  $K$  é o parâmetro de curvatura [47, 48]. A métrica na forma (6.1) é chamada de **métrica FLRW**, em homenagem àqueles que contribuíram no seu desenvolvimento (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker). Como a função de lapso multiplica a parte temporal da métrica, ela nos indica o ritmo de contagem do tempo. Já o fator de escala multiplica a parte espacial da métrica, determinando assim o tamanho do universo. Ambas dependem somente do tempo, sendo coerentes com as hipóteses de homogeneidade e isotropia. Já o parâmetro de curvatura pode assumir três valores, dependendo da topologia do espaço estudado:  $K = -1$  para universos abertos,  $K = 0$  para universos planos e  $K = 1$  para universos fechados.

Apesar de ser uma questão em aberto, os resultados observacionais sugerem que o nosso universo é plano [49]. Assim, neste capítulo trabalharemos explicitamente com  $K = 0$ , o que facilitará alguns cálculos. A inclusão de curvatura pode ser feita como sugerido em [50].

Para interpretarmos as amplitudes de transição que encontraremos na teoria quântica precisamos obter a forma da ação para a Cosmologia. Para utilizar a ação de Einstein-Hilbert (2.58) precisamos do escalar de curvatura (2.4). Vamos então calculá-lo utilizando o formalismo de tetradas. Uma escolha de tetradas para a métrica (6.1) com  $K = 0$  é:

$$e^0 = N(t)dt \quad , \quad e^1 = a(t)dr \quad , \quad e^2 = a(t)r d\theta \quad , \quad e^3 = a(t)r \sin \theta d\varphi. \quad (6.2)$$

Utilizando a condição de torção nula (2.21) para calcular os componentes da conexão

obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} a\omega^0_1 dr + ar\omega^0_2 d\theta + ar \operatorname{sen} \theta \omega^0_3 d\varphi = 0, \\ \dot{a} dt dr + N\omega^1_0 dt + ar\omega^1_2 d\theta + ar \operatorname{sen} \theta \omega^1_3 d\varphi = 0, \\ \dot{a} r dt d\theta + a dr d\theta + N\omega^2_0 dt + a\omega^2_1 dr + ar \operatorname{sen} \theta \omega^2_3 d\varphi = 0, \\ \dot{a} r \operatorname{sen} \theta dt d\varphi + a \operatorname{sen} \theta dr d\varphi + ar \cos \theta d\theta d\varphi + N\omega^3_0 dt + a\omega^3_1 dr + ar\omega^3_2 d\theta = 0, \end{cases} \quad (6.3)$$

onde o produto exterior entre formas diferenciais foi omitido para termos uma notação mais compacta. Usando (2.19) e as propriedades do produto exterior temos as soluções:

$$\begin{aligned} \omega^0_1 = \omega^1_0 = \frac{\dot{a}}{N} dr, \quad \omega^2_1 = -\omega^1_2 = d\theta, \quad \omega^2_0 = \omega^0_2 = \frac{\dot{a}r}{N} d\theta, \\ \omega^3_0 = \omega^0_3 = \frac{\dot{a}r \operatorname{sen} \theta}{N} d\varphi, \quad \omega^3_1 = -\omega^1_3 = \operatorname{sen} \theta d\varphi, \quad \omega^3_2 = -\omega^2_3 = \cos \theta d\varphi. \end{aligned}$$

De posse dos componentes da conexão e utilizando a equação (2.26) podemos calcular os componentes da curvatura:

$$\begin{aligned} F^1_0 = \left( \frac{\ddot{a}}{N} - \frac{a\dot{N}}{N^2} \right) dt dr, \quad F^2_0 = \left( \frac{\ddot{a}}{N} - \frac{a\dot{N}}{N^2} \right) r dt d\theta, \quad F^3_0 = \left( \frac{\ddot{a}}{N} - \frac{a\dot{N}}{N^2} \right) r \operatorname{sen} \theta dt d\varphi, \\ F^2_1 = \frac{\dot{a}^2}{N^2} r d\theta dr, \quad F^3_1 = \frac{\dot{a}^2}{N^2} r \operatorname{sen} \theta d\varphi dr, \quad F^3_2 = \frac{\dot{a}^2}{N^2} r^2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Usando a definição (2.30), podemos calcular as componentes do tensor de Ricci. Como estamos interessados no cálculo do escalar de curvatura, apenas as componentes diagonais do tensor são de interesse. Assim, temos:

$$F_{00} = \frac{3}{Na} \left( \frac{a\dot{N}}{N^2} - \frac{\ddot{a}}{N} \right), \quad F_{11} = F_{22} = F_{33} = \frac{1}{Na} \left( \frac{a\dot{N}}{N^2} - \frac{\ddot{a}}{N} \right) + \frac{2\dot{a}^2}{a^2 N^2}.$$

Substituindo na definição do escalar de curvatura (2.32), temos:

$$R = 6 \left( \frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} \right). \quad (6.4)$$

O determinante da métrica FLRW é facilmente calculado, uma vez que ela é diagonal:

$$\det(g) = -N^2 a^6 r^4 \operatorname{sen}^2 \theta. \quad (6.5)$$

Substituindo (6.4) e (6.5) na ação de Einstein-Hilbert (2.58), temos:

$$S_{\text{cosm}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\det(g)} R = 3 \int d^4x N a^3 r^2 \operatorname{sen} \theta \left( \frac{\ddot{a}}{N^2 a} + \frac{\dot{a}^2}{N^2 a^2} - \frac{\dot{a}\dot{N}}{aN^3} \right). \quad (6.6)$$

Como a geometria é a mesma em todas as regiões, podemos escolher uma região finita para a integração e definir:

$$V_0 = \int r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\varphi. \quad (6.7)$$

Em particular, podemos escolher uma região tal que  $V_0 = 1$ , de forma que temos:

$$S_{cosm} = 3 \int dt \left( \frac{a^2 \ddot{a}}{N} + \frac{a \dot{a}^2}{N} - \frac{a^2 \dot{a} \dot{N}}{N^2} \right). \quad (6.8)$$

Integrando o primeiro termo por partes, teremos:

$$S_{cosm} = -3 \int dt \frac{a \dot{a}^2}{N} + S_{fronteira}, \quad (6.9)$$

onde

$$S_{fronteira} = \frac{3a^2 \dot{a}}{N}. \quad (6.10)$$

A ação na forma (6.9) é válida apenas para a descrição da dinâmica cosmológica sem nenhum conteúdo de matéria no universo. Para descrever situações diferentes desta temos que acrescentar um termo  $S_{matéria}$  acoplando os componentes desejados:

$$S_{total} = S_{cosm} + S_{matéria}. \quad (6.11)$$

Pela observação de (6.9) podemos definir a Lagrangiana para a cosmologia:

$$L_{cosm} = -\frac{3a \dot{a}^2}{N}. \quad (6.12)$$

Definida a Lagrangiana, podemos partir para a análise canônica do problema. Calculando os momentos canonicamente conjugados à  $a$  e  $N$ , temos:

$$p_a = \frac{\partial L_{cosm}}{\partial \dot{a}} = -\frac{6a \dot{a}}{N}, \quad (6.13)$$

$$p_N = \frac{\partial L_{cosm}}{\partial \dot{N}} = 0. \quad (6.14)$$

Assim,  $p_N$  é um vínculo primário e irá aparecer na Hamiltoniana multiplicado por um multiplicador de Lagrange. Fazendo a transformação de Legendre:

$$H_{cosm} = \dot{a} p_a + \dot{N} p_N - L_{cosm} = -\frac{N p_a^2}{12a}. \quad (6.15)$$

A nossa Hamiltoniana total será então:

$$H_{total} = H_{cosm} + H_{matéria} + \lambda p_N, \quad (6.16)$$

onde  $\lambda$  é um multiplicador de Lagrange.

De posse da Hamiltoniana, podemos encontrar as equações de movimento:

$$\dot{N} = \frac{\partial H_{total}}{\partial p_N} = \lambda, \quad (6.17)$$

ou seja, a primeira equação nos dá um informação essencial:  $N(t)$  é uma função arbitrária do tempo, ou seja, uma escolha de calibre. Isto será essencial no decorrer do capítulo. A próxima equação será:

$$\dot{p}_N = -\frac{\partial H_{total}}{\partial N} = \frac{p_a^2}{12a} - \frac{\partial H_{matéria}}{\partial N}. \quad (6.18)$$

Porém, sabemos que  $p_N = 0$ , logo, por consistência, temos que impor  $\dot{p}_N = 0$ . Temos assim:

$$\frac{p_a^2}{12a} - \frac{\partial H_{matéria}}{\partial N} = 0. \quad (6.19)$$

A equação de movimento seguinte é:

$$\dot{a} = \frac{\partial H_{total}}{\partial p_a} = -\frac{Np_a}{6a}, \quad (6.20)$$

que apenas reproduz a definição de  $p_a$ . A última equação de movimento é:

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial H_{total}}{\partial a} = -\frac{Np_a^2}{12a^2} - \frac{\partial H_{matéria}}{\partial a}. \quad (6.21)$$

Combinando as equações de movimento podemos chegar em expressões familiares. Calculando a  $\dot{p}_a$  em (6.20) e substituindo em (6.19), temos:

$$\left(\frac{\dot{a}}{aN}\right)^2 = \frac{1}{3a^3} \frac{\partial H_{matéria}}{\partial N}. \quad (6.22)$$

Substituindo o mesmo  $\dot{p}_a$  em (6.21) e utilizando (6.22), obtemos:

$$\frac{\ddot{a}/N - \dot{a}\dot{N}/N^2}{Na} = -\frac{1}{6} \left( \frac{1}{a^3} \frac{\partial H_{matéria}}{\partial N} - \frac{1}{Na^2} \frac{\partial H_{matéria}}{\partial a} \right). \quad (6.23)$$

Para escrever as equações (6.22) e (6.23) de uma forma mais familiar podemos fazer algumas definições. A dependência de  $H_{matéria}$  com  $N$  deve vir apenas do fator do determinante da métrica, para que ele carregue a interpretação de energia. Assim, podemos definir:

$$E = \frac{\partial H_{matéria}}{\partial N} = \frac{H_{matéria}}{N}. \quad (6.24)$$

A partir da energia, podemos definir a densidade de energia  $\rho$  e a pressão  $P$ :

$$\rho = \frac{E}{V} = \frac{H_{matéria}}{Na^3}. \quad (6.25)$$

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{1}{3Na^2} \frac{\partial H_{matéria}}{\partial a}. \quad (6.26)$$

Como devido a (6.17)  $N(t)$  é função arbitrária de  $t$ , podemos escolher o chamado calibre de tempo, em que  $N = 1$ . Nestas condições, podemos reescrever (6.22) e (6.23):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3}, \quad (6.27)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3P). \quad (6.28)$$

A equação (6.27) é conhecida como **Equação de Friedmann** e a equação (6.28) é conhecida como **Equação de Raychaudhuri**.

Neste capítulo, iremos estudar o caso do espaço livre, ou seja, sem nenhum conteúdo de matéria. Existem técnicas para acoplarmos matéria à Gravitação Quântica de Laços,

como descrito em [1], porém tal procedimento complica consideravelmente o problema, fugindo do escopo desta dissertação. Outro ponto essencial é que, como já discutido, iremos trabalhar no calibre de tempo, ou seja,  $N(t) = 1$  daqui em diante. É importante observar que foi essencial manter a dependência em  $N(t)$  até aqui a fim de derivarmos as equações de movimento. Feito isso, sabendo que a função é apenas uma escolha de calibre, podemos substituí-la pela expressão mais conveniente.

Com a forma da ação (6.9) e as equações de movimento (6.27) e (6.28) em mãos, podemos estudar qual o limite clássico esperado da teoria quântica. Tal procedimento é importante, pois ao obtermos a amplitude do vértice para a Cosmologia poderemos verificar que a mesma apresenta o limite clássico correto. Foi discutido no Capítulo 4, na Equação (4.84), que o limite clássico da amplitude de transição é dado por:

$$W(x, t, x', t') \sim e^{\frac{i}{\hbar} S(x, t, x', t')}, \quad (6.29)$$

em que  $S(x, t, x', t')$  é a função de Hamilton, definida como a ação clássica calculada na solução das equações de movimento entre configurações iniciais  $(x, t)$  e finais  $(x', t')$ .

Temos então que encontrar a função de Hamilton para a Cosmologia. Ao avaliarmos a ação (6.9) nas soluções da equação de Friedmann (6.27), vemos que o termo principal e o de fronteira irão se anular, uma vez que para  $\rho = 0$  a solução da equação (6.27) leva à  $\dot{a} = 0$ . Porém, podemos tratar o problema de forma perturbativa, para analisarmos as flutuações em torno dos valores de  $a_{clássico}$  e  $\dot{a}_{clássico}$ , definidos pelas soluções das equações de movimento. Assim, definimos:

$$a^{(1)} = a_{clássico} + \delta a, \quad (6.30)$$

$$\dot{a}^{(1)} = \dot{a}_{clássico} + \delta \dot{a} = \delta \dot{a}. \quad (6.31)$$

Primeiramente, vamos analisar o termo principal da ação, sem o termo de fronteira. Substituindo a expansão em (6.9) e mantendo apenas os termos de primeira ordem, temos:

$$S_{cosm}^{(1)} = -3 \int dt a^{(1)} (\dot{a}^{(1)})^2 = \mathcal{O}^{(2)}. \quad (6.32)$$

Já para o termo de fronteira (6.10), temos:

$$S_{fronteira}^{(1)} = 3a^{(1)2} \dot{a}^{(1)} = 3a_{clássico}^2 \delta \dot{a} + 6a_{clássico} \delta a + \mathcal{O}^{(2)}. \quad (6.33)$$

Assim, em primeira ordem, apenas sobram contribuições do termo de fronteira para a função de Hamilton.

É importante comentar que no caso com acoplamento de matéria ou constante cosmológica, tal resultado é exato, ou seja, o termo principal da ação zera ao ser avaliado nas soluções das equações de movimento, mas o termo de fronteira não, sendo este o único que contribui para a função de Hamilton.

Assim, a função de Hamilton para a cosmologia será:

$$S(a_i, a_f) = S_{\text{fronteira}}|_{a_i}^{a_f} = S(a_f) - S(a_i), \quad (6.34)$$

onde

$$S(a) = 3a^2\dot{a}, \quad (6.35)$$

de forma que espera-se que as amplitude de transição apresentem um comportamento na forma:

$$W(a_i, a_f) \sim e^{\frac{i}{\hbar}S(a_i, a_f)} = e^{\frac{i}{\hbar}S(a_f)} e^{-\frac{i}{\hbar}S(a_i)} = W(a_f) \overline{W(a_i)}. \quad (6.36)$$

Ou seja, espera-se que as amplitudes de transição façom e que cada fator tenha seu comportamento oscilatório governado por (6.35).

### 6.1.1 Variáveis de Ashtekar

Antes de prosseguirmos para a discretização e a quantização de fato, podemos analisar quais são as variáveis de Ashtekar no contexto da Cosmologia. Tal passo é essencial na Cosmologia Quântica de Laços, como será discutido, mas também desempenha um papel importante na escolha das nossas variáveis na construção de estados cosmológicos.

O primeiro passo para a construção das variáveis é a escolha da folheação em que iremos trabalhar. No caso da Cosmologia tal escolha é direta: iremos trabalhar no calibre de tempo em que  $N(t) = 1$  e  $\vec{N} = 0$ . Com esta escolha, a escolha das triadas para as folhas espaciais é direta:

$$e^i = a(t)dx^i. \quad (6.37)$$

Escolhida a triada podemos partir para o cálculo da conexão de Ashtekar (2.101). O primeiro termo da conexão é dado pela conexão de *spin* da triada, que pode ser calculada pela condição de torção nula:

$$de^i + \epsilon^i_{jk}\Gamma^j \wedge e^k = 0, \quad (6.38)$$

cuja solução para espaços planos e em superfícies espaciais de  $t$  fixo é:

$$\Gamma_a^i = 0. \quad (6.39)$$

O segundo termo da conexão é calculado a partir da curvatura extrínseca. No calibre de tempo, a expressão (2.49) se reduz a:

$$K_{ab} = \frac{\dot{q}_{ab}}{2} = \frac{\delta_{kj}}{2} (\dot{e}_a^k e_b^j) = \delta_{kj} \delta_a^k \delta_b^j a\dot{a} = \delta_{ab} a\dot{a}. \quad (6.40)$$

Contraindo com a triada inversa obtemos o termo de curvatura extrínseca:

$$K_a^i = K_{ab} e^{bi} = \delta_{ab} a\dot{a} \delta^{bi} \frac{1}{a} = \dot{a} \delta_a^i. \quad (6.41)$$

Reunindo (6.39) e (6.41) podemos escrever a conexão de Ashtekar:

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i = \gamma \dot{a} \delta_a^i = c \delta_a^i, \quad (6.42)$$

onde definimos uma nova variável

$$c = \gamma \dot{a} \quad (6.43)$$

que carrega toda a informação da conexão.

A variável seguinte é o campo elétrico de Ashtekar, definido em (2.95). Substituindo as triadas explicitamente, temos:

$$E_i^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} e_b^j e_c^k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} a^2 \delta_b^j \delta_c^k = \frac{a^2}{2} \epsilon_{ibc} \epsilon^{abc} = a^2 \delta_i^a = p \delta_i^a, \quad (6.44)$$

onde novamente definimos uma nova variável

$$p = a^2 \quad (6.45)$$

que carrega toda a informação do campo elétrico.

As variáveis  $c$  e  $p$  fazem o papel das variáveis de Ashtekar na teoria da Cosmologia Quântica de Laços. Assim, os procedimentos de quantização partem da álgebra clássica estabelecida entre  $c$  e  $p$ . Na Cosmologia *Spinfoam* estas variáveis também serão importantes na construção dos estados coerentes homogêneos e isotrópicos, como será discutido adiante.

### 6.1.2 Discretização Clássica

Antes de partirmos para a teoria quântica, nossa prescrição de quantização estabelece que devemos truncar os graus de liberdade da nossa teoria, fazendo uma discretização da variedade. Começemos pela fronteira.

Na construção feita no Capítulo 3 a nossa fronteira espacial é discretizada por tetraedros. Tal discretização nos fornece um dual, que é dado pelo grafo da fronteira  $\Gamma$ , onde são discretizadas as variáveis. Para discretizarmos as superfícies espaciais temos que lembrar que elas satisfazem uma propriedade fundamental: o espaço é homogêneo e isotrópico. Assim, o grafo de fronteira escolhido deve representar tais propriedades. Para isso, como será discutido adiante, os grafos devem ser regulares, ou seja, todos os nós devem ter a mesma valência. O grafo mais simples com esta característica é o grafo de dipolo ( $\Gamma_2$ ), representado na Figura 10. Pela sua simplicidade, as figuras deste capítulo irão fazer referência ao grafo de dipolo, mas os resultados aqui apresentados são válidos para qualquer grafo regular.

Para fazermos a dinâmica quântica, precisamos construir um 2-complexo. Vimos porém que a amplitude de transição pode ser calculada em diferentes ordens, dependendo do quanto refinamos o 2-complexo escolhido. Aqui, trabalharemos em uma primeira



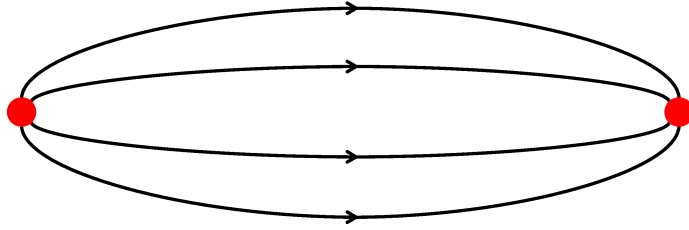


Figura 10 – Grafo de Dipolo quadrivalente ( $\Gamma_2$ ): o grafo regular de dois nós (em vermelho) conectados por 4 *links* (em preto). Sua interpretação geométrica é direta: estamos discretizando um espaço tridimensional colando dois tetraedros por todas as suas bordas.

aproximação, ou seja, consideraremos um 2-complexo com apenas um vértice, o que nos possibilitará chegar a um resultado analítico.

Assim, a discretização completa do nosso problema está representada na Figura 11. A interpretação desta discretização é direta. Estamos interessados no estudo da dinâmica no contexto da Cosmologia. Para isso, folheamos nossa variedade em superfícies espaciais homogêneas e isotrópicas. A discretização de cada uma destas superfícies é feita através de um grafo regular. Para estudarmos como uma superfície espacial evolui em outra introduzimos o 2-complexo da Figura 11, que liga um grafo inicial ( $\Gamma_i$ ), que é dual à triangulação de uma superfície inicial, a um grafo final ( $\Gamma_f$ ), que é dual à triangulação de uma superfície final. Esta ligação é feita com um 2-complexo de apenas um vértice, que nos dará uma amplitude de transição truncada apenas a um primeiro termo de amplitude do vértice.

## 6.2 Cinemática

Definida a forma da discretização do espaço podemos discretizar as nossas variáveis no grafo da fronteira para então proceder para a quantização. Porém, tais procedimentos são exatamente os mesmos desenvolvidos nos Capítulos 3 e 4. O espaço de Hilbert físico da teoria ainda é descrito por (4.19) e uma boa base de estados ainda é a base de *spin-network* (4.30).

Para implementarmos as variáveis do nosso problema precisamos porém de estados que tenham picos em geometrias homogêneas e isotrópicas. Uma ferramenta para a construção de tais estados foi desenvolvida no Capítulo 5: os estados coerentes. Utilizaremos aqui os estados *Heat Kernel*, que nos possibilitarão escolher o pico dos estados tanto na geometria intrínseca quanto na extrínseca.

A construção de estados coerentes homogêneos e isotrópicos a partir dos estados

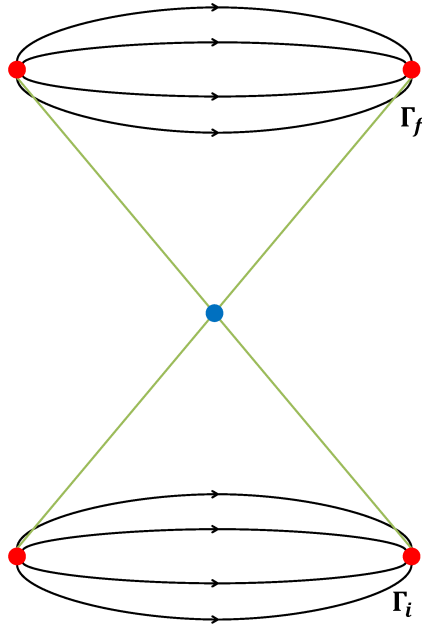


Figura 11 – 2-complexo entre dois grafos regulares de fronteira desconexos com apenas um vértice. Os grafos da fronteira estão representados por grafos de dipolo, com links em preto e nós em vermelho. O vértice do 2-complexo está representado em azul, enquanto as arestas estão em verde. Por simplicidade, as faces não estão representadas no desenho, mas estão presentes sempre entre duas arestas.

*Heat Kernel* foi proposta inicialmente em [9]. Em seguida, outros autores mostraram que tais estados realmente possuem picos em geometrias FLRW [10]. Vamos apresentar aqui como tal construção é feita.

Reproduzindo alguns resultados do Capítulo 5, lembramos que os estados *Heat Kernel* podem ser escritos como:

$$\psi_{h_\ell}(U_\ell) = \int_{SU(2)} dg_n \prod_\ell K(g_{s_\ell}^{-1} U_\ell g_{t_\ell} H_\ell^{-1}), \quad (6.46)$$

onde

$$K(U) = \sum_j (2j+1) e^{-tj(j+1)} \text{Tr}_j[D^{(j)}(U)]. \quad (6.47)$$

O elemento  $H_\ell \in SL(2, \mathbb{C})$  determina completamente o pico da geometria e pode ser decomposto na forma:

$$H_\ell = R_{\vec{n}_{s_\ell}} e^{-iz_\ell \sigma_3 / 2} R_{\vec{n}_{t_\ell}}^{-1}, \quad (6.48)$$

onde foi definida a variável complexa:

$$z_\ell = \xi_\ell + i\eta_\ell. \quad (6.49)$$

Assim,  $H_\ell$  depende de quatro parâmetros que definem o pico da geometria e possuem interpretação dada no Capítulo 5:  $\vec{n}_{s_\ell}$  e  $\vec{n}_{t_\ell}$  são as normais dos triângulos que estão colados

no *link*  $\ell$ ,  $\xi_\ell$  é proporcional a curvatura extrínseca, enquanto  $\eta_\ell$  é proporcional a área dos triângulos colados no *link*  $\ell$  (5.46).

Com as interpretações físicas dadas, a proposta de implementação de estados coerentes homogêneos e isotrópicos feita em [9–11] é intuitiva. Partindo de estados *Heat Kernel*, devemos impor:

1. Os grafos nos quais os estados são construídos devem ser regulares.
2. As normais não dependem dos nós:

$$\vec{n}_{s_\ell} = \vec{n}_{t_\ell} = \vec{n}_\ell, \quad (6.50)$$

onde  $\vec{n}_\ell$  é a normal ao triângulo da borda de um tetraedro regular, que é associado ao *link*  $\ell$ .

3. A variável  $z_\ell$  deve independe do *link* e deve ser dada por:

$$z = c + i \frac{t}{\hbar\gamma} p. \quad (6.51)$$

As três condições implementam explicitamente a homogeneidade e a isotropia ao exigir que não devem haver direções ou pontos preferidos no grafo. Já a terceira condição, implementa as variáveis da Cosmologia definidas na Seção 6.1.1, utilizando a interpretação física das quantidades  $\xi$  e  $\eta$ . Como  $\xi$  é relacionada a curvatura extrínseca, que por sua vez é relacionada a derivadas temporais de quantidades intrínsecas, no contexto da cosmologia é natural associar  $\xi = c = \gamma\dot{a}$ . Já  $\eta$  é associada a área (5.46), que na cosmologia é dada pelo quadrado do fator de escala. Utilizando as três condições acima é possível mostrar que os estados coerentes *Heat Kernel* possuem picos em geometrias FLRW [10].

## 6.3 Dinâmica

O último passo no estudo do nosso problema é a implementação da dinâmica quântica. Como descrito no Capítulo 5, a dinâmica da Gravitação Quântica de Laços é truncada para um dado 2-complexo e pode ser calculada a partir da seguinte amplitude de transição (4.82):

$$W_{\mathcal{C}}(U_\ell) = \mathcal{N} \int_{SU(2)} dh_{\text{vf}} \prod_{\text{f}} \delta(h_{\text{f}}) \prod_{\text{v}} A_{\text{v}}(h_{\text{vf}}), \quad (6.52)$$

onde  $A_{\text{v}}(h_{\text{vf}})$  é a amplitude do vértice, que pode ser escrita como:

$$A_{\text{v}}(h_{\text{vf}}) = \int_{SL(2,\mathbb{C})} dg'_{\text{ve}} \prod_{\text{f}} P[g_{\text{ev}}g_{\text{ve}'}, h_{\text{vf}}], \quad (6.53)$$

onde  $P[g, h]$  é definido como:

$$P[g, h] = \sum_j (2j + 1) \text{Tr}_j \left[ Y_\gamma^\dagger D^{(p,k)}(g) Y_\gamma D^{(j)}(h) \right]. \quad (6.54)$$

Para o nosso problema, queremos calcular a amplitude do vértice do 2-complexo da Figura 11, considerando que os estados de fronteira são aqueles definidos na Seção 6.2. Assim, calculando a amplitude do vértice na base de estados coerentes, temos:

$$\begin{aligned}
 A_v(H_\ell) &= \langle A_v | \psi_{H_\ell} \rangle = \int_{SU(2)^L} dU_\ell A_v(U_\ell) \psi_{H_\ell}(U_\ell) \\
 &= \int_{SU(2)^L} dU_\ell \int_{SL(2, \mathbb{C})} dg'_{ve} \left( \prod_f \sum_{j_f} (2j_f + 1) \text{Tr}_{j_f} \left[ Y_\gamma^\dagger D^{(p,k)}(g_{ev} g_{ve'}) Y_\gamma D^{(j)}(U_\ell) \right] \right) \\
 &\quad \left( \prod_\ell \sum_{j_\ell} (2j_\ell + 1) e^{-tj_\ell(j_\ell+1)} \text{Tr}_{j_\ell} [D^{(j_\ell)}(U_\ell H_\ell^{-1})] \right) \\
 &= \int_{SL(2, \mathbb{C})} dg'_{ve} \prod_f \sum_{j_f} (2j_f + 1) e^{-tj_\ell(j_\ell+1)} \text{Tr}_{j_f} \left[ Y_\gamma^\dagger D^{(p,k)}(g_{ev} g_{ve'}) Y_\gamma D^{(j)}(H_\ell) \right] \\
 &= \int_{SL(2, \mathbb{C})} dg'_{ve} \prod_f P_t(H_\ell, g_{ev} g_{ve'}), \tag{6.55}
 \end{aligned}$$

onde no penúltimo passo foi utilizada a expansão do delta em representações (4.73) para calcular a integral e no último passo foi definido:

$$P_t(H, g) = \sum_j (2j + 1) e^{-tj(j+1)} \text{Tr}_j \left[ Y_\gamma^\dagger D^{(p,k)}(g) Y_\gamma D^{(j)}(H) \right]. \tag{6.56}$$

É importante observar um ponto essencial. Em (6.53) o produto é tomado sobre as faces, enquanto em (6.46) o produto é tomado nos *links* podendo causar alguma confusão na definição (6.55). Porém, observando a Figura 11 e lembrando que na fronteira a correspondência entre *links* e faces é direta (um *link* pode ser interpretado como uma face que corta a fronteira) percebemos que não há nenhuma ambiguidade na expressão. O mesmo raciocínio é válido entre arestas e nós: um nó pode ser associado a uma aresta que intercepta a fronteira. Com isso, podemos reescrever a expressão (6.55) abrindo explicitamente as integrais em termos dos elementos dos grafos e do 2-complexo:

$$\begin{aligned}
 A_v(z_i, z_f) &= A_v(H_\ell(z_i), H_\ell(z_f)) \\
 &= \int_{SL(2, \mathbb{C})} dg_1^i dg_2^i dg_1^f dg_2^f \prod_{\ell^i} P_t(H_{\ell^i}, g_1^i (g_2^i)^{-1}) \prod_{\ell^f} P_t(H_{\ell^f}, g_1^f (g_2^f)^{-1}) \\
 &= A(z_i) A(z_f). \tag{6.57}
 \end{aligned}$$

Ou seja, é possível fatorar a amplitude do vértice em dois fatores, cada um dependendo apenas dos elementos do grafo inicial ou do grafo final.

Queremos estudar o comportamento das amplitudes no limite semiclássico. No nosso contexto, o limite semiclássico pode ser encontrado no limite em que a nossa escala de comprimento é grande comparada ao comprimento de Planck. Analisando (6.51), queremos  $p = a^2 \gg \gamma \hbar$ , ou seja,  $\text{Im}(z) \gg 1$ . O único termo que depende de  $z$  em  $A(z)$  está em  $H_\ell$ , de forma que usando (6.48) temos:

$$D^{(j)}(H_\ell) = D^{(j)}(R_{\vec{n}_\ell}) D^{(j)}(e^{-iz\sigma_3/2}) D^{(j)}(R_{\vec{n}_\ell}^{-1}). \tag{6.58}$$

Expandindo o termo que depende de  $z$ , temos:

$$\begin{aligned} D^{(j)}(e^{-iz\sigma_3/2}) &= \sum_{m=-j}^j e^{-izm} |j, m\rangle \langle j, m| \\ &= \sum_{m=-j}^j e^{-i\operatorname{Re}(z)m} e^{\operatorname{Im}(z)m} |j, m\rangle \langle j, m| \\ &\approx e^{-izj} |j, j\rangle \langle j, j|, \end{aligned} \quad (6.59)$$

onde foi usado o fato de que  $\operatorname{Im}(z) \gg 1$ , assim, como o termo  $e^{\operatorname{Im}(z)m}$  não é limitado, a soma será dominada pelo termo de maior número magnético  $m = j$ . Substituindo em (6.58), temos:

$$D^{(j)}(H_\ell) \approx e^{-izj} D^{(j)}(R_{\vec{n}_\ell}) |j, j\rangle \langle j, j| D^{(j)}(R_{\vec{n}_\ell}^{-1}). \quad (6.60)$$

Usando porém a definição dos estados coerentes  $SU(2)$  (5.13), temos:

$$D^{(j)}(H_\ell) \approx e^{-izj} |j, \vec{n}_\ell\rangle \langle j, \vec{n}_\ell| = e^{-izj} P_\ell, \quad (6.61)$$

onde  $P_\ell = |j, \vec{n}_\ell\rangle \langle j, \vec{n}_\ell|$  é o projetor nos estados coerentes  $SU(2)$ .

Como a amplitude do vértice fatora em duas partes que dependem de apenas um dos grafos da fronteira, podemos estudar o comportamento de somente uma delas, uma vez que o resultado será exatamente o mesmo para a outra diferindo apenas pelo valor de  $z$ . Substituindo o resultado (6.61), temos:

$$A(z) \approx \int_{SL(2, \mathbb{C})} dg_{\text{ve}} \prod_{\ell} \sum_{j_\ell} (2j_\ell + 1) e^{-tj_\ell(j_\ell+1)} e^{-izj_\ell} \operatorname{Tr} [P_\ell Y_\gamma^\dagger D^{(p,k)}(g_{\text{ev}} g_{\text{ve}'}) Y_\gamma]. \quad (6.62)$$

Notando que a soma em  $j_\ell$  é a mesma para todos os links e que ela não depende dos elementos do grupo, podemos escrever:

$$A(z) \approx \left( \sum_j (2j + 1) e^{-tj(j+1)} e^{-izj} \right)^L \int_{SL(2, \mathbb{C})} dg_{\text{ve}} \prod_{\ell} \operatorname{Tr} [P_\ell Y_\gamma^\dagger D^{(p,k)}(g_{\text{ev}} g_{\text{ve}'}) Y_\gamma]. \quad (6.63)$$

Aqui tomaremos outra aproximação. Observa-se que a soma em  $j$  é gaussiana, assim trocaremos a soma pelo seu pico  $j_0$ , que pode facilmente ser calculado:

$$j_0 = \frac{p}{2\hbar\gamma}. \quad (6.64)$$

Assim, substituindo  $j_0$ , podemos escrever:

$$A(z) \approx \left( (2j_0 + 1) e^{\frac{tp(p-4)}{4\hbar\gamma}} e^{-\frac{icp}{2\hbar\gamma}} \right)^L \Omega(j_0), \quad (6.65)$$

onde  $\Omega(j_0)$  foi definida como a integral em (6.63) avaliada no pico  $j = j_0$ . Tal integral pode ser avaliada utilizando técnicas de ponto de sela, resultando em um fator proporcional a norma dos estados coerentes, como feito em [11].

Estamos porém interessados no comportamento oscilatório da amplitude que nos fornecerá a comparação com o resultado clássico esperado. O termo oscilatório da amplitude (6.65) é dado por;

$$A(z) \sim e^{-\frac{iLcp}{2\hbar\gamma}} = e^{-\frac{iL\gamma\dot{a}a^2}{2\hbar\gamma}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{L}{2}\dot{a}a^2}. \quad (6.66)$$

Ou seja, a amplitude de transição quântica fatora em dois termos. Um deles depende apenas das variáveis do grafo final, enquanto o outro depende apenas das variáveis do grafo inicial. Cada um destes termos tem o comportamento oscilatório no limite clássico dado por (6.66). Assim, mostramos que no limite clássico a parte oscilatória da amplitude de transição é governada pela função de Hamilton da Cosmologia (6.34), como previsto em (6.36). Ou seja, a teoria construída se mostra autoconsistente, retornando os valores esperados no limite clássico.

Em uma outra abordagem, é possível mostrar que a amplitude obtida em (6.65) está no núcleo de um operador, que no limite clássico corresponde ao vínculo Hamiltoniano, de forma que a equação de Friedmann é recuperada [9]. Tal resultado também pode ser obtido usando a extensão do vértice EPRL/FK que inclui uma constante cosmológica [11].

## 7 Conclusão

Nesta dissertação vimos como construir uma teoria quântica, não perturbativa e independente de *background* da Relatividade Geral: a Gravitação Quântica de Laços no formalismo de *spinfoams*.

Inicialmente, no Capítulo 2, foi visto como reformular a Relatividade Geral em diferentes linguagens. Tais formulações nos permitiram desenvolver ferramentas essenciais para uma posterior quantização, como o formalismo de tetradas, as variáveis ADM, a ação de Holst e as variáveis de Ashtekar.

De posse destas novas ferramentas, foi visto no Capítulo 3 como discretizar a Relatividade Geral combinando técnicas de dois campos distintos: as teorias de calibre na rede e o cálculo de Regge. Com isso, foi possível truncar os graus de liberdade da Relatividade Geral a um grafo, no contexto cinemático, ou a um 2-complexo no contexto dinâmico. A construção de uma ação discreta se mostrou uma grande vantagem, indicando um caminho para o cálculo de amplitudes de transição na teoria quântica. Além disso, com as variáveis da teoria discretizadas foi possível obter uma álgebra simples, que abriu caminho para a quantização da teoria: a álgebra de holonomia-fluxo.

Em seguida, no Capítulo 4, utilizando os resultados anteriores foi construída a Gravitação Quântica de Laços. A cinemática da teoria é obtida através de um processo de quantização canônica, onde promovemos as variáveis a operadores que satisfazem relações de comutação que espelham a álgebra de holonomia-fluxo. Com isso, encontramos a representação da holonomia, na qual o nosso espaço de Hilbert é o espaço de funções de quadrado integrável do grupo  $SU(2)$  para cada *link* do grafo, que são invariantes por transformações de calibre em todos os nós. Foi visto que uma base conveniente para este espaço é a base de *spin-network*, construída a partir de matrizes de Wigner, que são representações irredutíveis do grupo  $SU(2)$ , e *intertwiners*, que garantem a invariância de calibre nos nós. Nesta construção, vimos que associamos um spin a cada *link* do grafo, que nos dá a informação da área da superfície dual a este link, além de um número quântico a cada nó, que pode ser interpretado como fornecendo o volume do poliedro a ele associado.

Ainda no mesmo capítulo, foi construída a dinâmica da teoria. Tal desenvolvimento foi o grande sucesso do formalismo de *spinfoams*, que utiliza as integrais de trajetória como ferramenta no cálculo das amplitudes de transição. Mostramos como chegar a amplitude do vértice EPRL/FK, que obedece princípios básicos da Mecânica Quântica e da Relatividade Geral, além de levar ao limite clássico correto [39, 40].

Já no Capítulo 5, foi desenvolvida uma nova base de estados para a Gravitação Quântica de Laços, que são bons estados semiclássicos, com picos em determinadas

geometrias e minimizando as relações de incerteza. Tais estados são chamados de estados coerentes, inspirados nos estados que levam o mesmo nome e tem propriedades semelhantes na teoria do oscilador harmônico quântico. Foram construídos dois tipos de estados, utilizando técnicas diferentes. Os estados de Livine-Speziale utilizam técnicas do grupo  $SU(2)$  para construir *intertwiners* que minimizam as relações de incerteza em cada *link*. Estes estados porém não possuem picos na geometria extrínseca, nos motivando a construir os estados *Heat Kernel* utilizando técnicas da resolução da equação do calor. Tais estados possuem pico na geometria intrínseca e extrínseca, além de possuir uma interpretação geométrica direta, facilitando a sua aplicação em problemas diversos.

Por fim, no Capítulo 6, foram aplicadas as técnicas desenvolvidas ao longo de toda a dissertação em um problema concreto: a Cosmologia. A partir da ação encontrada para o problema foi possível estabelecer qual o limite clássico que deve ser encontrado para a amplitude de transição de uma teoria quântica da Cosmologia. Discretizando a variedade espacial em grafos regulares e implementando as variáveis cosmológicas adequadamente nos estados *Heat Kernel*, foi possível construir estados coerentes homogêneos e isotrópicos, que possuem picos em geometrias FLRW. Com isso, calculamos a amplitude de transição em primeira ordem, ou seja, com apenas um vértice, entre estados homogêneos e isotrópicos associados a dois grafos regulares desconexos. No limite de volumes grandes comparados à escala de Planck foi possível mostrar que a parte oscilatória das amplitudes de transição retorna o comportamento previsto a partir da dinâmica clássica.

É importante observar que os resultados obtidos no Capítulo 6 não são nenhuma previsão da teoria. Apenas mostramos que o modelo construído é autoconsistente, no sentido de que partimos de uma teoria clássica e percorremos um longo caminho até chegarmos à teoria quântica, porém é necessário que a teoria quântica construída retorne o comportamento clássico no limite adequado.

Devemos salientar também que os cálculos feitos no último capítulo foram feitos tomando fortes aproximações. O modelo adotado em si é uma primeira aproximação, uma vez que tomamos apenas um grafo para representar todo o espaço de Hilbert da Gravitação Quântica de Laços, como discutido em (4.39), e calculamos a amplitude de transição em um 2-complexo com apenas um vértice, de forma que espera-se novas contribuições com o refinamento do mesmo. Além disso, o cálculo foi feito para volumes grandes, de forma que desprezamos vários termos nas somas (6.59) e (6.65). Outro ponto importante é que os cálculos foram feitos para o espaço vazio ( $\rho = 0$ ) e sem curvatura ( $K = 0$ ), de forma que o modelo pode ser aprimorado para procurarmos novos resultados.

Assim, há a perspectiva da melhora do modelo em algum dos vários pontos apresentados. Inicialmente podemos trabalhar em um modelo com curvatura [50] ou com a inclusão de uma constante cosmológica [11, 51]. Há indicativos de que o refinamento dos grafos de fronteira não leva a novas contribuições [11, 52]. Alguns trabalhos já desenvolveram



modelos com acoplamento de matéria e com um 2-complexo mais refinado [53]. Outra possibilidade seria a mudança dos estados de fronteira. Recentemente foram publicados candidatos a estados cosmológicos [54], que possuem a sua semiclassicalidade amparada na conjectura de Bianchi-Myers [55] e podem levar a novos resultados quando estudada a sua dinâmica. Desta forma, espera-se encontrar novas previsões da teoria, que possam levar a testes observacionais no futuro, comprovando-a ou refutando-a.

# Referências

- [1] Rovelli, Carlo e Francesca Vidotto: *Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, novembro 2014, ISBN 978-1-107-06962-6, 978-1-316-14729-0. Citado 8 vezes nas páginas 9, 23, 24, 39, 66, 67, 71 e 77.
- [2] Rovelli, Carlo: *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 24.
- [3] Thiemann, Thomas: *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2007, ISBN 978-0-511-75568-2, 978-0-521-84263-1. Citado 6 vezes nas páginas 9, 21, 28, 30, 31 e 44.
- [4] Ashtekar, Abhay e Jerzy Lewandowski: *Background independent quantum gravity: A Status report*. *Class. Quant. Grav.*, 21:R53, 2004. Citado na página 9.
- [5] Ashtekar, A.: *New Variables for Classical and Quantum Gravity*. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2244–2247, 1986. Citado 3 vezes nas páginas 9, 12 e 28.
- [6] Ashtekar, A.: *New Hamiltonian Formulation of General Relativity*. *Phys. Rev. D*, 36:1587–1602, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 28.
- [7] Perez, Alejandro: *The Spin Foam Approach to Quantum Gravity*. *Living Rev. Rel.*, 16:3, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 57.
- [8] Engle, Jonathan, Etera Livine, Roberto Pereira e Carlo Rovelli: *LQG vertex with finite Immirzi parameter*. *Nucl. Phys. B*, 799:136–149, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 9, 42 e 57.
- [9] Bianchi, Eugenio, Carlo Rovelli e Francesca Vidotto: *Towards Spinfoam Cosmology*. *Phys. Rev. D*, 82:084035, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 10, 69, 73, 81, 82 e 85.
- [10] Magliaro, Elena, Antonino Marciano e Claudio Perini: *Coherent states for FLRW space-times in loop quantum gravity*. *Phys. Rev. D*, 83:044029, 2011. Citado 4 vezes nas páginas 10, 73, 81 e 82.
- [11] Vidotto, Francesca: *Many-nodes/many-links spinfoam: the homogeneous and isotropic case*. *Class. Quant. Grav.*, 28:245005, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 10, 73, 82, 84, 85 e 87.

- [12] Livine, Etera R. e Simone Speziale: *A New spinfoam vertex for quantum gravity*. Phys. Rev. D, 76:084028, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 63.
- [13] Bahr, Benjamin e Thomas Thiemann: *Gauge-invariant coherent states for loop quantum gravity. II. Non-Abelian gauge groups*. Class. Quant. Grav., 26:045012, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 67.
- [14] Freidel, Laurent e Simone Speziale: *Twisted geometries: A geometric parametrisation of  $SU(2)$  phase space*. Phys. Rev. D, 82:084040, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 11, 69 e 70.
- [15] Bianchi, Eugenio, Elena Magliaro e Claudio Perini: *Coherent spin-networks*. Phys. Rev. D, 82:024012, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 69.
- [16] Bianchi, Eugenio, Elena Magliaro e Claudio Perini: *Spinfoams in the holomorphic representation*. Phys. Rev. D, 82:124031, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 11, 69, 70 e 71.
- [17] Thiemann, Thomas: *Gauge field theory coherent states (GCS): 1. General properties*. Class. Quant. Grav., 18:2025–2064, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 67.
- [18] Thiemann, T. e O. Winkler: *Gauge field theory coherent states (GCS). 2. Peakedness properties*. Class. Quant. Grav., 18:2561–2636, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 69.
- [19] Wald, Robert M.: *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., Chicago, USA, 1984. Citado 3 vezes nas páginas 12, 13 e 22.
- [20] Carroll, Sean M.: *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, julho 2019, ISBN 978-0-8053-8732-2, 978-1-108-48839-6, 978-1-108-77555-7. Citado 3 vezes nas páginas 12, 13 e 22.
- [21] Krasnov, Kirill: *Formulations of General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, novembro 2020, ISBN 978-1-108-67465-2, 978-1-108-48164-9. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 17.
- [22] Arnowitt, Richard L., Stanley Deser e Charles W. Misner: *The Dynamics of general relativity*. Gen. Rel. Grav., 40:1997–2027, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 17.
- [23] Bojowald, Martin: *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 12, 17 e 21.

- [24] Palatini, Attilio: *Deduzione invariante delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 43(1):203–212, 1919. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 23.
- [25] Holst, Soren: *Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action*. Phys. Rev. D, 53:5966–5969, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 24.
- [26] Shoshany, Barak: *At the Corner of Space and Time*. Tese de Doutorado, U. Waterloo (main), 2019. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 28.
- [27] Baez, John e Javier P Muniain: *Gauge Fields, Knots and Gravity*. WORLD SCIENTIFIC, 1994. <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/2324>. Citado na página 21.
- [28] Martin-Dussaud, Pierre: *A Primer of Group Theory for Loop Quantum Gravity and Spin-foams*. Gen. Rel. Grav., 51(9):110, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 26, 107 e 108.
- [29] Regge, T.: *General relativity without coordinates*. Nuovo Cim., 19:558–571, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 42.
- [30] Ponzano, G and Regge, T: *Semiclassical limit of Racah coefficients*. pp 1-58 of Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics. Block, F. (ed.). New York, John Wiley and Sons, Inc., 1968., 10 1969. <https://www.osti.gov/biblio/4824659>. Citado 3 vezes nas páginas 33, 42 e 57.
- [31] Cheeger, Jeff, Werner Muller e Robert Schrader: *On the Curvature of Piecewise Flat Spaces*. Commun. Math. Phys., 92:405, 1984. Citado na página 33.
- [32] Ooguri, Hiroshi: *Topological lattice models in four dimensions*. Modern Physics Letters A, 07(30):2799–2810, 1992. <https://doi.org/10.1142/S0217732392004171>. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 57.
- [33] Engle, Jonathan, Roberto Pereira e Carlo Rovelli: *Flipped spinfoam vertex and loop gravity*. Nucl. Phys. B, 798:251–290, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- [34] Nakahara, M.: *Geometry, topology and physics*. Graduate Students Series in Physics. Institute of Physics Publishing, 2003. Citado na página 45.
- [35] Barrett, John W. e Louis Crane: *Relativistic spin networks and quantum gravity*. J. Math. Phys., 39:3296–3302, 1998. Citado na página 57.
- [36] Freidel, Laurent e Kirill Krasnov: *A New Spin Foam Model for 4d Gravity*. Class. Quant. Grav., 25:125018, 2008. Citado na página 57.

- [37] Engle, Jonathan e Roberto Pereira: *Regularization and finiteness of the Lorentzian LQG vertices*. Phys. Rev. D, 79:084034, 2009. Citado na página 61.
- [38] Kaminski, Wojciech, Marcin Kisielowski e Jerzy Lewandowski: *Spin-Foams for All Loop Quantum Gravity*. Class. Quant. Grav., 27:095006, 2010. [Erratum: Class.Quant.Grav. 29, 049502 (2012)]. Citado na página 62.
- [39] Barrett, John W., R. J. Dowdall, Winston J. Fairbairn, Frank Hellmann e Roberto Pereira: *Lorentzian spin foam amplitudes: Graphical calculus and asymptotics*. Class. Quant. Grav., 27:165009, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 86.
- [40] Donà, Pietro, Marco Fanizza, Giorgio Sarno e Simone Speziale: *Numerical study of the Lorentzian Engle-Pereira-Rovelli-Livine spin foam amplitude*. Phys. Rev. D, 100(10):106003, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 62 e 86.
- [41] Cohen-Tannoudji, Claude, Bernard Diu e Franck Laloë: *Quantum Mechanics*. WILEY-VCH, 2020. Citado na página 63.
- [42] Hall, B.C.: *The Segal-Bargmann "Coherent State" Transform for Compact Lie Groups*. Journal of Functional Analysis, 122(1):103–151, 1994, ISSN 0022-1236. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123684710640>. Citado na página 67.
- [43] Baytaş, Bekir, Eugenio Bianchi e Nelson Yokomizo: *Gluing polyhedra with entanglement in loop quantum gravity*. Phys. Rev. D, 98(2):026001, 2018. Citado na página 70.
- [44] Bojowald, Martin: *Absence of singularity in loop quantum cosmology*. Phys. Rev. Lett., 86:5227–5230, 2001. Citado na página 72.
- [45] Bojowald, Martin: *Loop quantum cosmology*. Living Rev. Rel., 11:4, 2008. Citado na página 72.
- [46] Agullo, Ivan e Alejandro Corichi: *Loop Quantum Cosmology*, páginas 809–839. Springer, 2014. Citado na página 72.
- [47] Dodelson, Scott: *Modern Cosmology*. Academic Press, Amsterdam, 2003, ISBN 978-0-12-219141-1. Citado na página 73.
- [48] Baumann, Daniel: *Cosmology*. Cambridge University Press, julho 2022, ISBN 978-1-108-93709-2, 978-1-108-83807-8. Citado na página 73.
- [49] Aghanim, N. *et al.*: *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*. Astron. Astrophys., 641:A6, 2020. [Erratum: Astron.Astrophys. 652, C4 (2021)]. Citado na página 73.

- [50] Rennert, Julian e David Sloan: *A Homogeneous Model of Spinfoam Cosmology*. *Class. Quant. Grav.*, 30:235019, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 87.
- [51] Bianchi, Eugenio, Thomas Krajewski, Carlo Rovelli e Francesca Vidotto: *Cosmological constant in spinfoam cosmology*. *Phys. Rev. D*, 83:104015, 2011. Citado na página 87.
- [52] Frisoni, Pietropaolo, Francesco Gozzini e Francesca Vidotto: *Markov chain Monte Carlo methods for graph refinement in spinfoam cosmology*. *Class. Quant. Grav.*, 40(10):105001, 2023. Citado na página 87.
- [53] Han, Muxin, Hongguang Liu, Dongxue Qu, Francesca Vidotto e Cong Zhang: *Cosmological Dynamics from Covariant Loop Quantum Gravity with Scalar Matter*. fevereiro 2024. Citado na página 88.
- [54] Baytas, Bekir e Nelson Yokomizo: *Cosmological states in loop quantum gravity on homogeneous graphs*. *Phys. Rev. D*, 107(6):066009, 2023. Citado na página 88.
- [55] Bianchi, Eugenio e Robert C. Myers: *On the Architecture of Spacetime Geometry*. *Class. Quant. Grav.*, 31:214002, 2014. Citado na página 88.
- [56] Sternberg, S.: *Group theory and physics*. Cambridge University Press, 1994. Citado 3 vezes nas páginas 96, 103 e 104.
- [57] Murgulo, Cyro Barros: *Formulação Matemática da Conexão de Ashtekar*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2024. Citado na página 96.
- [58] Mäkinen, Ilkka: *Introduction to  $SU(2)$  Recoupling Theory and Graphical Methods for Loop Quantum Gravity*. outubro 2019. Citado 2 vezes nas páginas 99 e 100.
- [59] Sakurai, Jun John e Jim Napolitano: *Modern Quantum Mechanics*. Quantum physics, quantum information and quantum computation. Cambridge University Press, outubro 2020, ISBN 978-0-8053-8291-4, 978-1-108-52742-2, 978-1-108-58728-0. Citado na página 99.
- [60] Condon, E.U. e G.H. Shortley: *The Theory of Atomic Spectra*. Cambridge Univ.Pr.209. Cambridge University Press, 1935, ISBN 9780521092098. Citado na página 101.

# Apêndices

# APÊNDICE A – Tópicos de teoria de grupos

A teoria da Gravitação Quântica de Laços utiliza várias técnicas e resultados de teorias de grupos, principalmente dos grupos  $SU(2)$  e  $SL(2, \mathbb{C})$ . Assim, este Apêndice tem como objetivo introduzir alguns resultados importantes utilizados ao longo da dissertação. Ressalta-se que este tópico é extremamente amplo e pode ser analisado através de diversas abordagens, de forma que neste Apêndice serão enunciados e mostrados apenas os resultados essenciais para a compreensão do texto principal desta dissertação.

Começemos com algumas definições básicas, porém essenciais.

**Definição A.1** (Grupo). *Um grupo  $\mathbf{G}$  é um conjunto equipado com uma operação  $\cdot : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ , chamada de operação do grupo, uma operação  $^{-1} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ , chamada de inversa, e um elemento  $\mathbb{I} \in \mathbf{G}$ , chamado de identidade, de modo que:*

1.  $(g \cdot h) \cdot c = g \cdot (h \cdot c)$ ,
2.  $g \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I} \cdot g = g$ ,
3.  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = \mathbb{I}$ ,

com  $g, h, c \in \mathbf{G}$ .

Definido o que é um grupo, podemos definir o que caracteriza um subgrupo:

**Definição A.2** (Subgrupo). *Um subgrupo  $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$  é um subconjunto de  $\mathbf{G}$  fechado pela operação do grupo e inversa, contendo a identidade.*

Visto que os dois grupos de nosso interesse são grupos matriciais, a operação do grupo será o produto, de forma que será omitido o símbolo  $\cdot$  daqui em diante. Um grupo de matrizes extremamente importante é o grupo geral linear  $GL(n, \mathbb{C})$ :

**Definição A.3** (Grupo Geral Linear). *O grupo geral linear  $GL(n, \mathbb{C})$  é o grupo de matrizes  $n \times n$  invertíveis e com entradas complexas.*

Ou seja,  $GL(n, \mathbb{C})$  é o grupo de transformações lineares, que engloba inúmeros grupos matriciais de interesse físico.

Definido o grupo  $GL(n, \mathbb{C})$ , podemos definir a representação de um grupo:

**Definição A.4** (Representação). *Uma representação  $\rho$  do grupo  $\mathbf{G}$  no espaço vetorial  $V$  é um homomorfismo  $\rho : \mathbf{G} \rightarrow GL(V)$ , obedecendo  $\rho(gh)v = \rho(g)\rho(h)v, \forall v \in V$  e  $\forall g, h \in \mathbf{G}$ .*



Ou seja, uma representação mapeia um elemento do grupo em uma transformação linear em um espaço vetorial de interesse. Uma classe de representações de interesse são as representações irredutíveis, definidas a seguir.

**Definição A.5** (Representação Irredutível). *Um subespaço  $V' \subset V$  é dito invariante se  $\rho(g)v \in V', \forall v \in V'$  e  $g \in \mathbf{G}$ . Dizemos que uma representação  $\rho$  é irredutível se os seus únicos subespaços invariantes são o próprio  $V$  e  $\{0\}$ .*

As representações irredutíveis são importantes, uma vez que podemos construir representações redutíveis a partir dela, seja por soma direta ou por produto tensorial.

Ao longo de diversos textos há diferentes usos para o termo representação, podendo se referir ao espaço em que agem as transformações lineares do grupo  $\mathbf{G}$ , ou seja,  $V$ , ou às representações  $\rho$ , como na Definição A.4. Aqui seremos precisos com as definições, com o objetivo de evitar confusões. O espaço vetorial  $V$  onde age o grupo  $\mathbf{G}$  será chamado de **espaço de representação**, enquanto o termo representação será reservado para o que foi definido na Definição A.4.

Outras definições de interesse são a de um grupo abeliano e de um Grupo de Lie:

**Definição A.6** (Grupo Abeliano). *Um grupo  $\mathbf{G}$  é dito abeliano se  $gh = hg, \forall g, h \in \mathbf{G}$ .*

**Definição A.7** (Grupo de Lie). *Um grupo  $\mathbf{G}$  é dito um grupo de Lie se ele possui a estrutura de uma variedade, com as operações do grupo e inversa sendo mapas suaves.*

Os nossos grupo de interesse são grupos de Lie, de forma que poderemos utilizar ferramentas do estudo de variedades no seu tratamento.

Dadas as definições acima, podemos partir para o estudo de cada um dos grupos de interesse, ou seja,  $SU(2)$  e  $SL(2, \mathbb{C})$ . Porém, vale ressaltar a motivação de estes serem os nossos grupos de interesse. Originalmente, os grupos de interesse seriam o grupo de Lorentz ( $SO_0(1, 3)$ ) e o grupo de rotações espaciais ( $SO(3)$ ). Porém, podemos mostrar que o grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  é o recobrimento universal de  $SO_0(1, 3)$ , assim como  $SU(2)$  é o recobrimento universal de  $SO(3)$  [56]. Desta maneira, pelo fato dos grupos de interesse possuírem a mesma álgebra dos grupos originais, ao tomarmos um elemento do grupo como a exponencial da combinação linear de elementos da álgebra, caímos no grupo maior, ou seja, no recobrimento universal. Tal argumentação pode ser feita de maneira matematicamente rigorosa, através das chamadas estruturas de *spin*, como feito em [57].

Como será visto nas próximas seções, os grupos de recobrimento  $SU(2)$  e  $SL(2, \mathbb{C})$  possuem vantagens operacionais interessantes e nos possibilitarão utilizar ferramentas essenciais para a Gravitação Quântica de Laços.

## A.1 O grupo $SU(2)$

O grupo  $SU(2)$  é um grupo de Lie, não-abeliano, de matrizes  $2 \times 2$ , unitárias e de determinante 1. Seu nome vem da sigla de grupo especial unitário (*special unitary*, do inglês). Uma matriz genérica com estas características pode ser representada por:

$$U^A_B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}; |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (\text{A.1})$$

O fato de  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  leva à uma consequência fundamental: o grupo  $SU(2)$  é **compacto**. Tal afirmação pode ser facilmente observada, ao definirmos  $\alpha = w + iz$  e  $\beta = x + iy$ , de forma que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ , ou seja,  $SU(2)$  é isomórfico à esfera unitária  $S^3$ .

O espaço de representação fundamental de  $SU(2)$  é formado pelos espinores  $v^A \in \mathbb{C}^2$ ;  $a = 0, 1$ . Denotaremos os espaço de representação fundamental de  $SU(2)$  por  $\mathcal{H}_{1/2}$ . O espaço de espinores de  $2j$  índices completamente simétricos  $v^{A_1 \dots A_{2j}}$  também se transforma sob a ação de  $SU(2)$  em cada um dos índices, assim ele é um espaço de representação de  $SU(2)$  e será denotado  $\mathcal{H}_j$ . Pode-se observar diretamente que  $\mathcal{H}_j$  tem dimensão  $2j + 1$ , uma vez que cada um dos índices assume valor  $A_n = 0, 1$  e eles são simétricos.

Podemos definir em  $\mathcal{H}_{1/2}$  um produto escalar, que é invariante sob a ação de  $SU(2)$ :

$$\langle u|v \rangle = \bar{u}^0 v^0 + \bar{u}^1 v^1. \quad (\text{A.2})$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \langle U^A_B u | U^A_B v \rangle &= (\bar{\alpha} \bar{u}^0 + \bar{\beta} \bar{u}^1)(\alpha v^0 + \beta v^1) + (-\beta \bar{u}^0 + \alpha \bar{u}^1)(-\bar{\beta} v^0 + \bar{\alpha} v^1) \\ &= |\alpha|^2 \bar{u}^0 v^0 + \bar{\alpha} \beta \bar{u}^0 v^1 + \bar{\beta} \alpha \bar{u}^1 v^0 + |\beta|^2 \bar{u}^1 v^1 \\ &\quad + |\beta|^2 \bar{u}^0 v^0 - \beta \bar{\alpha} \bar{u}^0 v^1 - \alpha \bar{\beta} \bar{u}^1 v^0 + |\alpha|^2 \bar{u}^1 v^1 \\ &= (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \bar{u}^0 v^0 + (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \bar{u}^1 v^1 = \langle u|v \rangle. \end{aligned}$$

□

Podemos também introduzir dois tensores antissimétricos  $\epsilon_{AB}$  e  $\epsilon^{AB}$ , definidos como:

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \epsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Tais tensores são invariantes sob a ação de  $SU(2)$ :

$$\epsilon_{AB} U^A_C U^B_D = \epsilon_{CD}. \quad (\text{A.4})$$

Tal afirmação é facilmente demonstrada ao substituímos explicitamente  $U^A_B$  e utilizar  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ .

Os tensores  $\epsilon_{AB}$  ainda possuem outras propriedades interessantes:

$$(U^{-1})^A{}_B = \epsilon^{AC} \epsilon_{BD} U^D{}_C, \quad (\text{A.5})$$

$$\epsilon_{AB} \epsilon^{BC} = -\delta_A^C. \quad (\text{A.6})$$

Ambas as propriedades são facilmente demonstradas ao substituirmos as definições dadas aos objetos explicitamente.

Devido às características do tensor  $\epsilon_{AB}$ , podemos adotar a convenção de que ele pode ser usado para subir e abaixar os índices  $SU(2)$  da seguinte maneira:

$$v^A = \epsilon^{AB} v_B \quad \text{e} \quad v_A = v^B \epsilon_{BA}. \quad (\text{A.7})$$

Definido o grupo, podemos introduzir a álgebra a ele associada. A álgebra de Lie de  $SU(2)$ , denotada por  $su(2)$ , é definida pelas relações de comutação:

$$[\tau_i, \tau_j] = \epsilon_{ij}{}^k \tau_k. \quad (\text{A.8})$$

Uma base de matrizes que satisfazem essas relações é dada por:

$$\tau_i = -\frac{i}{2} \sigma_i, \quad (\text{A.9})$$

onde  $\sigma_i$  são as matrizes de Pauli.

Sabemos que podemos escrever um elemento de um grupo de Lie como a exponencial da combinação linear de elementos da álgebra. Temos então:

$$U(\alpha^i) = e^{\alpha^i \tau_i}. \quad (\text{A.10})$$

Podemos também interpretar  $\alpha^i = \alpha n^i$ , onde  $\vec{n}$  é um vetor unitário. Assim, um elemento de  $SU(2)$  depende de um ângulo  $\alpha$  e de uma direção  $\vec{n}$ , podendo ser escrito como:

$$U(\alpha, \vec{n}) = e^{-i\alpha \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{n} \cdot \vec{\sigma}, \quad (\text{A.11})$$

onde a última igualdade é facilmente mostrada ao expandirmos a exponencial em série de potências.

Observando (A.8), percebe-se que a álgebra de  $su(2)$  satisfaz as relações da álgebra de geradores de rotação, o que é esperado, uma vez que as álgebras de  $su(2)$  e  $so(3)$  são isomórficas. Assim podemos interpretar os elementos de  $SU(2)$  como operadores de rotação. Utilizando este fato, podemos aproveitar todo o formalismo já conhecido para a mecânica quântica de momento angular, uma vez que ele está fundamentado na mesma álgebra.

Sabemos que uma rotação por um ângulo  $\alpha$  na direção  $i$  é descrita pelo operador  $R_i(\alpha) = e^{-i\alpha J_i}$ , onde os operadores  $J_i$  satisfazem  $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ij}{}^k J_k$ . Porém, quaisquer

operadores  $J_i$  hermitianos que satisfazem estas relações de comutação são ditos operadores de momento angular, de forma que:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ij}^k J_k \quad \text{e} \quad [J_i, J^2] = 0, \quad (\text{A.12})$$

onde  $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  é o momento angular total, chamado na linguagem de teoria de grupos de **Operador de Casimir** do grupo  $SU(2)$ .

Devido a (A.12), podemos encontrar uma base que diagonaliza  $J^2$  e  $J_z$  simultaneamente. Tal base é conhecida e nela estes operadores possuem os seguintes autovalores:

$$J^2 |j, m\rangle = j(j+1) |j, m\rangle, \quad (\text{A.13})$$

$$J_z |j, m\rangle = m |j, m\rangle, \quad (\text{A.14})$$

onde  $j \in \mathbb{N}/2$  e  $m = -j, \dots, j$ . A base  $|j, m\rangle$  é usualmente a base mais utilizada para  $\mathcal{H}_j$  e será utilizada daqui em diante.

Como discutido, na base de espinores, o espaço  $\mathcal{H}_j$  é o espaço de representação de  $SU(2)$  gerado pelos espinores de  $2j$  índices totalmente simétricos. Porém, podemos definir  $\mathcal{H}_j$  na base  $|j, m\rangle$  como sendo o espaço gerado por  $|j, m\rangle$  com  $j$  fixo. Observamos que o espaço possui dimensão  $2j+1$ , pois  $m = -j, \dots, j$ .

Podemos escrever um elemento genérico de  $\mathcal{H}_j$  nesta base como:

$$|v\rangle = \sum_{m=-j}^j v^m |j, m\rangle, \quad (\text{A.15})$$

além de definir um produto interno análogo ao definido para  $\mathcal{H}_{1/2}$ :

$$\langle u|v\rangle = \sum_m \bar{u}^m v^m. \quad (\text{A.16})$$

Na base  $|j, m\rangle$ , há uma representação irredutível para o grupo  $SU(2)$  que é de fundamental importância no que se segue. Tais representações são conhecidas como **matrizes de Wigner** ( $D^{(j)m}_n(U)$ ) e são definidas como:

$$D^{(j)m}_n(U) = \langle j, m|e^{-i\alpha^i J_i}|j, n\rangle. \quad (\text{A.17})$$

Utilizando a interpretação já conhecida da mecânica quântica, observa-se que  $D^{(j)m}_n(U)$  pode ser interpretada como a probabilidade de encontrarmos o estado  $|j, m\rangle$  a partir do estado  $|j, n\rangle$  rodado de um ângulo  $|\vec{\alpha}|$  na direção definida por  $\vec{\alpha}$ .

Fórmulas explícitas para as matrizes de Wigner podem ser encontradas em [58] ou em livros tradicionais de Mecânica Quântica, como [59]. Além disso, elas podem ser encontradas facilmente em *softwares* matemáticos a partir de uma dada parametrização para os elementos de  $SU(2)$ , que serão discutidas adiante.

O tensor invariante  $SU(2)$   $\epsilon_{AB}$  pode ser generalizado para a representação de *spin*  $j$ , na base  $|j, m\rangle$ . O resultado é [58]:

$$\epsilon_{mn}^{(j)} = (-1)^{j-m} \delta_{m,-n} \quad \text{e} \quad \epsilon^{(j)mn} = (-1)^{j-m} \delta_{m,-n} \quad (\text{A.18})$$

e ele satisfaz as seguintes propriedades:

$$\epsilon_{nm}^{(j)} = (-1)^{2j} \epsilon_{mn}^{(j)}, \quad (\text{A.19})$$

$$\epsilon_{mm'}^{(j)} \epsilon^{(j)m'n} = (-1)^{2j} \delta_m^n, \quad (\text{A.20})$$

além das propriedades satisfeitas por ele no espaço de representação fundamental. Em particular, podemos usar  $\epsilon_{mn}^{(j)}$  para subir e abaixar índices, além de calcular os elementos das matrizes de Wigner inversas.

### A.1.1 Intertwiners

Os *intertwiners* desempenham papel fundamental na construção da teoria de Gravitação Quântica de Laços, uma vez que os estados físicos da geometria devem ser invariantes por transformações de calibre nos nós. Assim, precisamos de um objeto que seja invariante por transformações  $SU(2)$  em todos os seus índices e, por definição, estes são os *intertwiners*.

Na Gravitação Quântica de Laços associamos um espaço  $\mathcal{H}_j$  a cada metade de um *link*. Assim, em um nó quadrivalente estaremos lidando com um espaço  $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4}$ , de forma que temos que desenvolver técnicas para trabalhar em espaços formados por produtos tensoriais de espaços  $\mathcal{H}_j$ .

Tais técnicas são amplamente conhecidas para o grupo  $SU(2)$ , uma vez que elas surgem do formalismo da soma de momento angular. Sabe-se que temos duas bases de interesse para o espaço  $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$ : a base  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ , que diagonaliza os operadores  $J^{(1)2}$ ,  $J^{(2)2}$ ,  $J_z^{(1)}$  e  $J_z^{(2)}$ , e a base  $|j_1, j_2; j, m\rangle$ , que diagonaliza os operadores  $J^{(1)2}$ ,  $J^{(2)2}$ ,  $(J^{(1)} + J^{(2)})^2$  e  $J_z^{(1)} + J_z^{(2)}$ . Como ambas as bases geram o mesmo espaço, as duas estão relacionadas por uma transformação unitária:

$$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = \sum_{jm} C^{(j_1 j_2 j)}_{m_1 m_2}^m |j_1, j_2; j, m\rangle, \quad (\text{A.21})$$

$$|j_1, j_2; j, m\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{(j_1 j_2 j) m_1 m_2}_m |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle. \quad (\text{A.22})$$

Aos coeficientes desta transformação unitária damos o nome de **coeficientes de Clebsch-Gordan**.

O espaço  $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$  pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \mathcal{H}_j. \quad (\text{A.23})$$

Logo, os valores de  $j$ , que determina os autovalores do momento angular total, são limitados:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2. \quad (\text{A.24})$$

Esta condição, juntamente com  $j_1 + j_2 + j \in \mathbb{Z}$ , são chamadas de **condições de Clebsch-Gordan**.

Os coeficientes de Clebsch-Gordan possuem algumas propriedades importantes:

1. Os coeficientes são nulos, a menos que as condições de Clebsch-Gordan sejam satisfeitas;
2.  $C_{m_1 m_2}^{(j_1 j_2 j)} = 0$  se  $m \neq m_1 + m_2$ ;
3. (Ortogonalidade)  $\sum_{jm} C_{m_1 m_2}^{(j_1 j_2 j)} C_{m_1 m_2}^{(j_1 j_2 j) m'_1 m'_2} = \delta_{m_1}^{m'_1} \delta_{m_2}^{m'_2}$ ;
4. (Convenção de fase) Com a convenção de fase de Condon-Shortley<sup>1</sup> [60], os coeficientes são reais e  $C_{m_1 m_2}^{(j_1 j_2 j) m}$  e  $C_{m_1 m_2}^{(j_1 j_2 j) m}$  possuem o mesmo valor numérico.

Definidos os coeficientes de Clebsch-Gordan, podemos voltar ao objetivo inicial de construir um objeto invariante por transformações  $SU(2)$  em todos os índices. Tal objeto é o **símbolo  $3j$  de Wigner**, definido como:

$$\iota_{m_1 m_2 m_3} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2j_3 + 1}} (-1)^{j_1 - j_2 + j_3} C_{m_1 m_2}^{(j_1 j_2 j_3)} \epsilon_{nm_3}^{(j_3)}. \quad (\text{A.25})$$

Como principal propriedade o símbolo  $3j$  é invariante por transformações  $SU(2)$  comuns em todos os seus índices, para três representações diferentes:

$$D^{(j_1) m_1}_{n_1}(U) D^{(j_2) m_2}_{n_2}(U) D^{(j_3) m_3}_{n_3}(U) \iota_{m_1 m_2 m_3} = \iota_{n_1 n_2 n_3} \quad (\text{A.26})$$

e devido a esta propriedade o símbolo  $3j$  é chamado de ***intertwiner* trivalente**.

Os *intertwiners* serão úteis na construção de estados físicos invariantes por transformações  $SU(2)$ . Por exemplo, um estado invariante pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_{m_1 m_2 m_3} \iota_{m_1 m_2 m_3} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle |j_3 m_3\rangle. \quad (\text{A.27})$$

Ou seja, este estado é invariante por rotações, só podendo fazer parte da representação de *spin*-0. Assim, a interpretação do *intertwiner* trivalente é clara: ele acopla três *spins* ( $j_1, j_2$  e  $j_3$ ) em um *spin* zero.

O símbolo  $3j$  possui algumas propriedades importantes, derivadas da sua construção a partir dos coeficientes de Clebsch-Gordan:

<sup>1</sup> A convenção de fase de Condon-Shortley é tomada ao não adicionarmos uma fase extra nos coeficientes que definem a ação dos operadores de escada, como em (A.60) e (A.61), de forma que os escolhemos reais e positivos.

1.  $\iota_{m_1 m_2 m_3} = 0$ , se  $m_1 + m_2 + m_3 = 0$  ou as condições de Clebsch-Gordan não forem satisfeitas:

$$|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2 \quad \text{e} \quad j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{Z}; \quad (\text{A.28})$$

2. (Ortogonalidade)

$$\sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & m' \end{pmatrix} = \frac{1}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_m^{m'}, \quad (\text{A.29})$$

$$\sum_{jm} (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m'_1 & m'_2 & m \end{pmatrix} = \delta_{m_1}^{m'_1} \delta_{m_2}^{m'_2}; \quad (\text{A.30})$$

3. (Normalização)  $\iota^{m_1 m_2 m_3} \iota_{m_1 m_2 m_3} = 1$ ;

4. O símbolo  $3j$  é real com as convenções de fase de Condon-Shortley.

Estamos porém interessados em construir objetos invariantes  $SU(2)$  em quatro representações dadas, uma vez que utilizamos grafos quadrivalentes. Tais objetos podem facilmente ser construídos a partir dos *intertwiners* trivalentes e de  $\epsilon_{mn}^{(j)}$ , uma vez que ambos são invariantes por transformações  $SU(2)$ :

$$\iota_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{(k)} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & k \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \epsilon^{(k)mn} \begin{pmatrix} k & j_3 & j_4 \\ n & m_3 & m_4 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

O objeto (A.31) é conhecido como ***intertwiner* quadrivalente**. De fato, podemos construir *intertwiners* de valência arbitrária ao contrairmos símbolos  $3j$  utilizando o tensor  $\epsilon_{mn}^{(j)}$ .

A principal propriedade do *intertwiner* quadrivalente é a sua invariância por transformações  $SU(2)$  em cada um dos índices:

$$D^{(j_1)m_1}_{n_1}(U) D^{(j_2)m_2}_{n_2}(U) D^{(j_3)m_3}_{n_3}(U) D^{(j_4)m_4}_{n_4}(U) \iota_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{(k)} = \iota_{n_1 n_2 n_3 n_4}^{(k)}, \quad (\text{A.32})$$

como esperado, uma vez que os seus constituintes são invariantes.

O número  $k$  é um *spin*, que deve satisfazer as condições de Clebsch-Gordan com os dois símbolos  $3j$ . Ou seja:

$$\max[|j_1 - j_2|, |j_3 - j_4|] \leq k \leq \min[j_1 + j_2, j_3 + j_4] \quad \text{e} \quad j_1 + j_2 + k, j_3 + j_4 + k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.33})$$

Assim, variando  $k$  para todos os valores possíveis, geramos o espaço de estados invariantes  $SU(2)$  de quatro representações  $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} \otimes \mathcal{H}_{j_3} \otimes \mathcal{H}_{j_4}$ .

As principais propriedades do *intertwiner* quadrivalente surgem das propriedades dos símbolos  $3j$  e do tensor  $\epsilon_{mn}^{(j)}$ . É importante porém citar que eles obedecem uma relação de ortogonalidade:

$$\iota^{(k)m_1 m_2 m_3 m_4} \iota_{m_1 m_2 m_3 m_4}^{(k')} = \frac{1}{2k+1} \delta_{kk'}. \quad (\text{A.34})$$

### A.1.2 Medida de Haar

Uma questão de fundamental importância é a de como realizar integrações de elementos do grupo ou então de funções destes elementos. Para isso, precisamos construir uma medida de integração, chamada de medida de Haar.

O desenvolvimento da medida de Haar se apoia no fato de haver um teorema que garante que para todo grupo compacto, como é o caso de  $SU(2)$ , há uma única integral invariante a menos de um escalar com volume total finito. Ou seja, a integral é completamente definida ao normalizarmos o volume. Uma integral é invariante se a medida obedece a propriedade  $dU = d(UV) = d(VU)$ , para todo  $V$  pertencente ao grupo.

Podemos ainda estender a definição para grupos não compactos, ao certificarmos que a função que está sendo integrada possua suporte compacto, ou seja, ela zera fora de um conjunto compacto.

Dadas as propriedades citadas, a medida de Haar pode ser construída explicitamente. Tal construção é feita em detalhes em [56] para o grupo  $SU(2)$ , assegurando que de fato a medida é invariante. Partindo de (A.1), podemos utilizar a seguinte parametrização:

$$\alpha = w + iz \quad \text{e} \quad \beta = x + iy, \quad (\text{A.35})$$

com

$$w = \cos \theta, \quad z = \sin \theta \cos \psi, \quad x = \sin \theta \sin \psi \cos \phi, \quad y = \sin \theta \sin \psi \sin \phi. \quad (\text{A.36})$$

Podemos facilmente verificar que com esta parametrização  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ . Neste sistema, a medida de Haar normalizada para  $SU(2)$  é dada por:

$$\int_{SU(2)} dU = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin \theta^2 \sin \psi d\theta d\psi d\phi. \quad (\text{A.37})$$

A parametrização em termos dos ângulos de Euler é usual, tanto em livros texto, como para cálculos em programas de computador. Nesta parametrização um elemento de  $SU(2)$  pode ser escrito como:

$$U(\psi, \theta, \phi) = e^{\psi\tau_3} e^{\theta\tau_2} e^{\phi\tau_3} \quad (\text{A.38})$$

e a medida de Haar é:

$$\int_{SU(2)} dU = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\psi d\phi. \quad (\text{A.39})$$

### A.1.3 O teorema de Peter-Weyl

Um teorema de extrema importância em nosso contexto é o teorema de Peter-Weyl. Ele nos permitirá encontrar uma base para o espaço de funções quadrado integráveis de  $SU(2)$  e conseqüentemente poderemos construir explicitamente as funções de onda de *spin network*. Na forma encontrada em [56], o teorema pode ser enunciado como:



**Teorema A.1** (de Peter-Weyl). *Seja  $\mathbf{G}$  um grupo compacto, então:*

1. *O espaço  $L^2(\mathbf{G})$  pode ser decomposto em um espaço de Hilbert da soma de representações irredutíveis de  $\mathbf{G}$ , cada uma de dimensão finita;*
2. *Toda representação irredutível de  $\mathbf{G}$  é de dimensão finita;*
3. *Cada representação irredutível de  $\mathbf{G}$  ocorre em  $L^2(\mathbf{G})$  com uma multiplicidade igual a sua dimensão;*
4. *Qualquer representação unitária de  $\mathbf{G}$  em qualquer espaço de Hilbert pode ser decomposta em um espaço de Hilbert da soma direta de representações irredutíveis de dimensão finita.*

A demonstração do teorema foge do escopo deste texto e pode ser encontrada em [56].

No contexto do grupo  $SU(2)$ , sabemos que as matrizes de Wigner são uma representação irredutível do grupo. Assim, as consequências do Teorema de Peter-Weyl podem ser enunciadas de algumas maneiras diferentes:

$$\psi(U) = \sum_{jmn} c_{jmn} D_n^{(j)m}; \quad \psi(U) \in L^2[SU(2), dU], \quad (\text{A.40})$$

ou seja, as representações irredutíveis do grupo formam uma base para o espaço de funções quadrado integráveis do grupo em relação à medida de Haar. Além disso, podemos escrever:

$$L^2[SU(2), dU] = \bigoplus_j \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j, \quad (\text{A.41})$$

que é uma consequência de (A.40), uma vez que o espaço  $\mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}_j$  é o espaço das matrizes de Wigner. Como consequência final, temos que a base formada pelas matrizes de Wigner é ortogonal com relação à medida de Haar:

$$\int_{SU(2)} dU \overline{D_n^{(j)m}}(U) D_n^{(j')m'}(U) = \frac{1}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_m^{m'} \delta_n^n. \quad (\text{A.42})$$

O teorema de Peter-Weyl tem grande importância na teoria de grupos e representações, possuindo uma ampla utilização em vários tópicos. Assim, o objetivo desta seção é apenas enunciar os resultados utilizados ao longo da dissertação. Novamente, para um tratamento mais detalhado, a referência [56] pode ser consultada.

## A.2 O grupo $SL(2, \mathbb{C})$

O grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  é um grupo de Lie, não-abeliano, de matrizes  $2 \times 2$ , de entradas complexas e de determinante 1. Seu nome vem da sigla de grupo especial linear (*special*

*linear*, do inglês). Uma matriz genérica com estas características pode ser representada por:

$$H^A_B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad ad - bc = 1. \quad (\text{A.43})$$

Observando esta estrutura podemos enunciar uma primeira propriedade importante: o grupo  $SU(2)$  é subgrupo de  $SL(2, \mathbb{C})$ , uma vez que ele satisfaz todas as condições exigidas para tal.

A álgebra de Lie de  $sl(2, \mathbb{C})$  é composta por matrizes que satisfazem:

$$sl(2, \mathbb{C}) = \{J \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \mid \text{Tr } J = 0\}, \quad (\text{A.44})$$

onde  $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$  é a álgebra de matrizes complexas  $2 \times 2$ . Uma base que satisfaz tais relações é composta pelos geradores  $J^{IJ} (= -J^{JI})$ , definidos pelas relações de comutação:

$$[J^{IJ}, J^{KL}] = -\eta^{IK} J^{JL} + \eta^{IL} J^{JK} + \eta^{JK} J^{IL} - \eta^{JL} J^{IK}. \quad (\text{A.45})$$

Assim como já feito para o tensor  $B^{IJ}$ , dado um tensor de dois índices que toma valores na álgebra de  $sl(2, \mathbb{C})$  e um referencial, podemos quebrar este tensor nas suas componentes elétricas e magnéticas. Na linguagem dos geradores do grupo, podemos quebrar  $J^{IJ}$  nos geradores de *boosts* ( $K^I$ ) e rotações ( $L^I$ ). Dado um vetor  $n^I$  tipo-tempo e trabalhando no sistema em que  $n^I = (1, 0, 0, 0)$ , temos:

$$L^I = \frac{1}{2} \epsilon^I_{JKL} J^{JK} n^L = (0, L^i), \quad (\text{A.46})$$

$$K^I = J^{IJ} n_J = (0, K^i), \quad (\text{A.47})$$

de forma que a álgebra dos geradores  $K^i$  e  $L^i$  é dada por:

$$[L^i, L^j] = i \epsilon^{ij}_k L^k, \quad (\text{A.48})$$

$$[L^i, K^j] = i \epsilon^{ij}_k K^k, \quad (\text{A.49})$$

$$[K^i, K^j] = -i \epsilon^{ij}_k L^k. \quad (\text{A.50})$$

Um elemento de  $SL(2, \mathbb{C})$  pode ser decomposto para diversas aplicações, como a construção de medidas de integração ou estudo de algumas propriedades, como para o caso dos estados coerentes extrínsecos da Gravitação Quântica de Laços. Para esta aplicação, a decomposição usual é a chamada decomposição de Cartan, que pode ser escrita como:

$$H = U e^{p\sigma_3/2} V^{-1}, \quad (\text{A.51})$$

onde  $U, V \in SU(2)$  e  $e^{p\sigma_3/2}$  é um *boost* na direção  $z$ , com  $p$  sendo um parâmetro. A interpretação física da decomposição de Cartan é clara: uma transformação de Lorentz pode ser decomposta em uma rotação, seguida de um *boost* na direção  $z$ , seguida de uma

outra rotação. Tal decomposição é usada constantemente no estudo de estados coerentes e na implementação de estados homogêneos e isotrópicos na Gravitação Quântica de Laços.

Queremos agora construir o espaço de representações unitárias de  $SL(2, \mathbb{C})$  (espaços de representação como o espinorial e de vetores de Minkowski não são unitários, logo não podemos definir um produto interno positivo definido). Tal espaço é definido pela ação dos elementos do grupo:

$$U(\Lambda)\phi(x) = \phi(\Lambda^{-1\mu}{}_{\nu}x^{\nu}); \quad U(\Lambda) = e^{i\alpha_{IJ}J^{IJ}}. \quad (\text{A.52})$$

Denotamos o espaço de representações unitárias de  $SL(2, \mathbb{C})$  por  $V^{(p,k)}$ , sendo rotulados pelos números  $p$  e  $k$  que determinam os autovalores dos Casimirs do grupo.  $V^{(p,k)}$  possui uma propriedade importante: ele pode ser decomposto em espaços de representação de  $spin$ - $j$  de  $SU(2)$ :

$$V^{(p,k)} = \bigoplus_{j=k}^{\infty} \mathcal{H}_j. \quad (\text{A.53})$$

Tal resultado é muito importante por diversos motivos. O principal é o fato de ele nos permitir utilizar as técnicas desenvolvidas para o grupo  $SU(2)$  em vários passos, como a construção de uma base de estados, uma vez que o espaço de representações de  $SL(2, \mathbb{C})$  se decompõe em espaços de representação de  $SU(2)$ . Além disso, observamos duas características importantes do espaço  $V^{(p,k)}$ : ele é um espaço de representações redutível, uma vez que ele pode ser decomposto em espaços menores, e ele é de dimensão infinita, uma vez que cada um dos  $\mathcal{H}_j$  é de dimensão finita, mas  $V^{(p,k)}$  é uma soma infinita de espaços de  $spin$   $j$ .

Outro fato importante acerca do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  é que ele possui dois operadores de Casimir. Eles podem ser escritos como:

$$C_1 = \frac{1}{2} J_{IJ} J^{IJ} = \vec{K}^2 - \vec{L}^2, \quad (\text{A.54})$$

$$C_2 = \frac{1}{8} \epsilon_{IJKL} J^{IJ} J^{KL} = \vec{K} \cdot \vec{L}. \quad (\text{A.55})$$

Os autovalores de  $C_1$  e  $C_2$  são determinados por  $p$  e  $k$  e serão discutidos em seguida.

Uma base natural então pode ser construída para  $V^{(p,k)}$ , considerando o resultado (A.53). A base  $|p, k; j, m\rangle$  é chamada de **base canônica** e diagonaliza os operadores  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L^2$  e  $L_z$ :

$$C_1 |p, k; j, m\rangle = (p^2 - k^2 + 1) |p, k; j, m\rangle, \quad (\text{A.56})$$

$$C_2 |p, k; j, m\rangle = pk |p, k; j, m\rangle, \quad (\text{A.57})$$

$$L^2 |p, k; j, m\rangle = j(j+1) |p, k; j, m\rangle, \quad (\text{A.58})$$

$$L_z |p, k; j, m\rangle = m |p, k; j, m\rangle. \quad (\text{A.59})$$

O número  $p \in \mathbb{R}^+$  é um número real positivo, enquanto  $k \in \frac{\mathbb{N}}{2}$  é um semi-inteiro. Os valores possíveis para  $j$  partem de (A.53), ou seja,  $j = k, k + 1, \dots$ , enquanto os valores de  $m = -j, \dots, j$  seguem o já conhecido para  $SU(2)$ .

Dada a base canônica, é conveniente definirmos como é a ação dos geradores na mesma. A ação de  $L_z$  é conhecida, pois o operador é diagonal na base. A ação dos operadores  $L_x$  e  $L_y$  podem ser definidas a partir da ação dos operadores de escada:

$$L_+ |p, k; j, m\rangle = \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |p, k; j, m+1\rangle, \quad (\text{A.60})$$

$$L_- |p, k; j, m\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |p, k; j, m-1\rangle, \quad (\text{A.61})$$

onde  $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ . Relações análogas podem ser utilizadas para os geradores de *boosts*, de forma que temos:

$$\begin{aligned} K_z |p, k; j, m\rangle &= \alpha_j \sqrt{j^2 - m^2} |p, k; j-1, m\rangle + \beta_j m |p, k; j, m\rangle \\ &\quad - \alpha_{j+1} \sqrt{(j+1)^2 - m^2} |p, k; j+1, m\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

$$\begin{aligned} K_+ |p, k; j, m\rangle &= \alpha_j \sqrt{(j-m)(j-m-1)} |p, k; j-1, m+1\rangle \\ &\quad + \beta_j \sqrt{(j-m)(j+m+1)} |p, k; j, m+1\rangle \\ &\quad + \alpha_{j+1} \sqrt{(j+m+1)(j+m+2)} |p, k; j+1, m+1\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

$$\begin{aligned} K_- |p, k; j, m\rangle &= -\alpha_j \sqrt{(j+m)(j+m-1)} |p, k; j-1, m-1\rangle \\ &\quad + \beta_j \sqrt{(j+m)(j-m+1)} |p, k; j, m-1\rangle \\ &\quad - \alpha_{j+1} \sqrt{(j-m+1)(j-m+2)} |p, k; j+1, m-1\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

onde  $K_{\pm} = K_x \pm iK_y$ . As constantes  $\alpha_j$  e  $\beta_j$  são definidas como:

$$\alpha_j = i \sqrt{\frac{(j^2 - k^2)(j^2 + p^2)}{j^2(4j^2 - 1)}} \quad \text{e} \quad \beta_j = \frac{kp}{j(j+1)}. \quad (\text{A.65})$$

A forma da ação dos geradores é essencial para a implementação do vínculo de simplicidade linear na teoria quântica, como feito no Capítulo 4.

Com a base canônica, podemos também definir as matrizes de Wigner para o grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ :

$$D^{(p,k)j_1 m}_{j_2 n}(H) = \langle p, k; j_1, m | H | p, k; j_2, n \rangle. \quad (\text{A.66})$$

Fórmulas explícitas para as matrizes são obtidas ao escolhermos uma decomposição dos elementos do grupo. Tais relações podem ser encontradas em [28].

Assim como feito para o grupo  $SU(2)$ , podemos construir uma medida de integração invariante para  $SL(2, \mathbb{C})$ . A forma explícita da medida dependerá da decomposição escolhida para os elementos do grupo, assim como no caso de  $SU(2)$ . Utilizando a forma da matriz (A.43), uma medida de integração invariante é dada por:

$$dH = \left(\frac{i}{2}\right)^3 |b|^{-2} da \bar{a} db \bar{b} dd \bar{d}. \quad (\text{A.67})$$

Utilizando a decomposição de Cartan (A.51), a medida pode ser escrita como:

$$dH = \frac{1}{4\pi} \sinh p^2 dp dU dV, \quad (\text{A.68})$$

onde as medidas dos elementos  $SU(2)$  são dadas pela medida de Haar já definida.

Outras medidas podem ser definidas para diferentes decomposições do grupo. É importante destacar que as medidas não são normalizadas, como feito para o grupo  $SU(2)$ , pois  $SL(2, \mathbb{C})$  não é compacto. Tal fato será de grande importância na definição de integrais no grupo na teoria, uma vez que o volume do grupo é divergente. Assim, como discutido no Capítulo 4, a divergência no vértice EPRL/FK é evitada ao retirarmos uma integração no volume do grupo.

Definida a medida de integração, podemos estabelecer a relação de ortogonalidade entre as matrizes de Wigner:

$$\int_{SL(2, \mathbb{C})} dH D^{(p,k)j_1 m}_{j_2 n}(H) D^{(p',k')j'_1 m'}_{j'_2 n'}(H) = \frac{1}{4(p^2 + k^2)} \delta(p - p') \delta_{kk'} \delta^{j_1 j'_1} \delta^{mm'} \delta_{j_2 j'_2} \delta_{nn'}. \quad (\text{A.69})$$

Há diversos outros resultados do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  que podem ser explorados, porém aqui foram apresentados somente os resultados essenciais para a dissertação. Para discussões mais aprofundadas a referência [28] pode ser consultada.