

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

**Escola de Engenharia**

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**

Vinícius Silvestre Cordeiro Lopes

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DA INFLUÊNCIA DE TRINCAS NA RESPOSTA  
VIBRATÓRIA DE EIXOS ROTATIVOS**

Belo Horizonte  
2024

Vinícius Silvestre Cordeiro Lopes

**ANÁLISE COMPUTACIONAL DA INFLUÊNCIA DE TRINCAS NA RESPOSTA  
VIBRATÓRIA DE EIXOS ROTATIVOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Marco Túlio Corrêa de Faria

Belo Horizonte  
2024

L864a	<p>Lopes, Vinícius Silvestre Cordeiro.  Análise computacional da influência de trincas na resposta vibratória de eixos rotativos [recurso eletrônico] / Vinícius Silvestre Cordeiro Lopes. – 2024.  1 recurso online (89 f. : il., color.) : pdf.</p> <p>Orientador: Marco Túlio Corrêa de Faria.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Anexos: f. 88-89.</p> <p>Bibliografia: f. 84-87.</p> <p>1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Fadiga - Teses. 3. Aeronaves - Teses. 4. Rotores - Teses. 5. Motores - Teses. 6. Método dos elementos finitos - Teses. I. Faria, Marco Túlio Corrêa de. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 621(043)</p>
-------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário Reginaldo César Vital dos Santos CRB6/ 2165:  
Biblioteca Profº Mário Werneck, Escola de Engenharia da UFMG



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
FOLHA DE APROVAÇÃO

**“ANÁLISE COMPUTACIONAL DA INFLUÊNCIA DE TRINCAS NA  
RESPOSTA VIBRATÓRIA DE EIXOS ROTATIVOS”**

**VINÍCIUS SILVESTRE CORDEIRO LOPES**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, constituída pelos Professores Dr. Marco Túlio Correa de Faria (Orientador - Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), Dr. Eduardo Bauzer Medeiros (Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), Dr<sup>a</sup>. Maria Lucia Machado Duarte (Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG) e Dr. Lazaro Valentim Donadon (Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "**Mestre em Engenharia Mecânica**", na área de concentração de "**Projetos e Sistemas**".

Dissertação aprovada no dia 04 de julho de 2024



Documento assinado eletronicamente por **Marco Tulio Correa de Faria, Professor do Magistério Superior**, em 05/07/2024, às 14:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Eduardo Bauzer Medeiros, Professor do Magistério Superior**, em 09/07/2024, às 04:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Maria Lucia Machado Duarte, Professora do Magistério Superior**, em 09/07/2024, às 08:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Lazaro Valentim Donadon, Membro de comissão**, em 19/07/2024, às 14:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3342486** e o código CRC **FBEBF9A**.

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de expressar minha profunda gratidão à minha família, que sempre esteve ao meu lado durante esta jornada. À minha noiva, Jade, quero dedicar um agradecimento especial por seu amor incondicional e apoio incansável durante este período. Agradeço também aos meus pais por seu apoio constante, amor e sacrifícios ao longo dos anos, assim como aos meus irmãos, que foram fontes constantes de inspiração em minha vida.

Aos meus colegas de trabalho na FIAT e Embraer, sou profundamente grato pela colaboração, troca de experiências e aprendizado mútuo. Suas contribuições foram essenciais para o meu desenvolvimento profissional e pessoal.

À Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), expresso minha gratidão por oferecer um ambiente acadêmico propício para o desenvolvimento desta pesquisa. Agradeço aos professores, funcionários e colegas de curso por sua dedicação, apoio e pelo compartilhamento de conhecimentos ao longo desta jornada.

Quero estender um agradecimento especial ao meu orientador, Prof. Marco Túlio C. Faria, pela orientação excepcional, apoio constante e inspiração ao longo deste trabalho. Sua orientação e comprometimento foram fundamentais para este estudo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

A todos vocês, minha mais profunda gratidão.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma investigação do comportamento dinâmico do rotor de um motor aeronáutico usando o método de elementos finitos. No modelo de elementos finitos do sistema rotativo, são introduzidas trincas de diferentes tamanhos, que simulam fissuras provocadas por fadiga no eixo. O modelo do eixo está baseado na teoria de vigas de Timoshenko, considerando os efeitos giroscópicos e o cisalhamento transversal do eixo. As frequências naturais e os modos de vibração do rotor do motor aeronáutico NSA-2HPT, considerando a presença de trincas por fadiga, são estimadas para diversas condições de operação. Um modelo de crescimento de trinca por fadiga é utilizado para estabelecer a razão entre as dimensões desta trinca nos modelos de elementos finitos e a resposta dinâmica do sistema. Quatro modelos de eixo são empregados na análise, sendo que um representa o eixo sem trinca e os outros três representam eixos trincados com trincas de diferentes comprimentos e profundidades. Os valores de frequência natural e os modos de vibração do eixo do rotor com e sem trinca são obtidos para o sistema rotativo em repouso e em movimento. A influência do tamanho da trinca nas frequências naturais e nos modos de vibração orbital progressivos e regressivos está descrita na análise. Além disso, os diagramas de Campbell são obtidos para os quatro modelos de rotor, permitindo obter os valores das velocidades críticas para diferentes tamanhos de trinca no eixo. Os resultados revelam alterações na flexibilidade local do eixo com a introdução das trincas, que afeta os valores das frequências naturais do sistema rotativo. O avanço da trinca demonstra que em movimento orbitais progressivos observa-se uma diminuição dos autovalores dos modos que sofrem influência das trincas e, para o movimento orbital regressivo, o comportamento é contrário, gerando uma elevação dos autovalores. Os dados obtidos neste trabalho geram subsídios sobre o comportamento dinâmico do motor *turbofan* com trincas por fadiga em seu eixo, contribuindo para ampliar o conhecimento dos fenômenos associados à propagação de trincas.

Palavras-chave: motor *turbofan*; eixo trincado; diagrama de Campbell; método de elementos finitos.

## ABSTRACT

This work deals with an investigation of the dynamic behavior of an aeronautical engine rotor using the finite element method. The finite element model of the rotating system takes into account transverse cracks of different sizes, which intend to represent fatigue cracks caused by fatigue. The shaft model is based on the Timoshenko beam theory, including the gyroscopic moments and the shear effects. The natural frequencies and the whirling modes of the rotor used in the turbofan NSA-2HPT, accounting for the fatigue cracks, are computed under several operating conditions. A model for predicting the crack growth is employed to obtain the ratio between the crack dimensions and the rotating system finite element model. Four rotor models are used in this study – one represents a shaft without cracks and the other three represent cracked shafts with cracks of different lengths and depths. The values of the natural frequencies and the vibration modes for the rotor with and without cracks are estimated for the engine at rest and under operation. The influence of the crack size on the natural frequencies and on the backward and forward whirling modes of the rotor is described in this work. Besides, the Campbell diagrams are rendered for the four rotor models, leading to the estimates of the rotor critical speeds as a function of the shaft crack size. The crack propagation shows that for the forward orbital motion there is a decrease in the eigenvalues, whereas for the backward orbital motion the opposite behavior is observed, resulting in an increase in the eigenvalues. The results obtained in this work show that the introduction of cracks on the rotating shaft causes changes in the local shaft flexibility, which can affect the values of the rotating system natural frequencies. The data available in this work can provide technical insights into the dynamic behavior of turbofans with cracked shafts, giving a technical contribution to enlarge the knowledge about the crack propagation on rotors.

Keywords: turbofan engine; cracked shaft; Campbell diagram; finite element method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Flexibilidade da trinca de acordo com sua proporção e estágio do rotor .....	17
Figura 2 - Modos de um rotor bi apoiado .....	20
Figura 3 - Motor <i>Tubofan</i> Alisson TF-41 .....	21
Figura 4 - Modelo computacional de um eixo do módulo de compressão de um motor <i>turbofan</i> .....	22
Figura 5 - Módulos de um motor <i>turbofan</i> e suas seções internas .....	23
Figura 6 - Suportes dos eixos de um motor <i>turbofan</i> .....	23
Figura 7 - Movimentos orbitais .....	25
Figura 8 - MOP e MOR para rotação síncrona.....	25
Figura 9 - Diagrama de Campbell para MOP e MOR.....	26
Figura 10 - Ângulos de Euler para representação do movimento de um rotor.....	27
Figura 11 - Rotor rígido biapoiado .....	29
Figura 12 - Modos Cilíndricos e Cônicos de um rotor bi apoiado .....	31
Figura 13 - Modos em um rotor apoiado em mancais totalmente rígidos .....	31
Figura 14 - Rotor em balanço .....	32
Figura 15 - Tensões no eixo do rotor em diferentes momentos de flexão.....	34
Figura 16 - Fase I e II das trincas por fadiga .....	35
Figura 17 - Fluxograma de propagação de trinca por fadiga.....	36
Figura 18 - Modos de abertura de trinca.....	36
Figura 19 - Taxa de liberação de energia ( $G$ ).....	38
Figura 20 - Trincas em barra circular .....	39
Figura 21 - Lei de Paris .....	40
Figura 22 - Sistema rotor-mancal em balanço.....	42
Figura 23 - Fluxograma da metodologia. ....	43
Figura 24 - Dimensões do rotor NSA 2-HPT .....	45
Figura 25 - Posições dos discos do rotor de baixa pressão.....	45
Figura 26 - Tipos de elementos finitos. ....	46
Figura 27 - Elementos de 2ª ordem. ....	49
Figura 28 - Proporção da trinca no eixo. ....	51
Figura 29 - Pontos de avaliação do modo. ....	52
Figura 30 - Geometria do motor NSA 2-HPT. ....	53
Figura 31 - Detalhes do modelo de elementos finitos. ....	54
Figura 32 - Região da Máxima Tensão Principal em MPa .....	56
Figura 33 - Seção de Corte C-C. ....	57
Figura 34 - Curva de crescimento da trinca transversal ( $c$ ) e trinca longitudinal ( $a$ ) x Número de Ciclos .....	58
Figura 35 - Propagação de trinca no eixo de acordo com a Tabela 9.....	59
Figura 36 - Corte C-C da Figura 33 com relações de tamanho de trinca .....	60
Figura 37 - Correlação do Crescimento de trinca.....	60
Figura 38 - Correlação do Crescimento de trinca em função do número de ciclos.....	61
Figura 39 - Modo de vibração orbital regressivo associado a $\omega_1$ .....	67
Figura 40 - Modo de vibração orbital regressivo associado a $\omega_3$ .....	68
Figura 41 - Modo de vibração orbital regressivo associado a $\omega_5$ .....	69
Figura 42 - Modo de vibração orbital regressivo associado a $\omega_7$ .....	70
Figura 43 - Modo de vibração orbital progressivo associado a $\omega_2$ .....	71
Figura 44 - Modo de vibração orbital progressivo associado a $\omega_4$ .....	72
Figura 45 - Modo de vibração orbital progressivo associado a $\omega_6$ .....	73
Figura 46 - Modo de vibração orbital progressivo associado a $\omega_8$ .....	74

Figura 47 - Mapa de velocidades críticas - MI.....	75
Figura 48 - Mapa de velocidades críticas - MII.....	77
Figura 49 - Mapa de velocidades críticas - MIII.....	78
Figura 50 - Mapa de velocidades críticas - MIV.....	80

## LISTAS DE TABELAS

Tabela 1 - Parâmetros de uma trinca superficial submetida a diversos tipos de carregamentos .....	40
Tabela 2 - Propriedades do motor <i>turbofan</i> NSA 2-HPT .....	44
Tabela 3 - Propriedades dos discos.....	46
Tabela 4 - Tamanho aproximado de malha para cada modelo. ....	48
Tabela 5 - Modelos com diferentes proporções de falha. ....	51
Tabela 6 - Faixa de operação do rotor. ....	52
Tabela 7 - Dados do modelo de elementos finitos. ....	54
Tabela 8 - Frequências naturais do rotor com três tamanhos de malha.....	55
Tabela 9 - Modelos a serem desenvolvido de acordo com a proporção de trinca. ....	59
Tabela 10 - Frequências naturais para modelos do rotor com trinca e sem trinca, em repouso. ....	62
Tabela 11 - Frequências naturais para rotor sem trinca - MI.....	63
Tabela 12 - Frequências naturais para rotor com trinca - MII.....	64
Tabela 13 - Frequências naturais para rotor com trinca - MIII. ....	64
Tabela 14 - Frequências naturais para rotor com trinca - MIV. ....	65
Tabela 15 - Velocidades críticas para o motor <i>turbofan</i> com trincas e sem trinca.....	82

## LISTAS DE SÍMBOLOS

<b>Letras Latinas</b>		<b>Unidades</b>
<i>A</i>	Carregamento Axial	N
<i>a</i>	Profundidade da trinca	mm
<i>b</i>	Raio do eixo	mm
<i>B</i>	Posição da massa desbalanceada	mm
<i>2c</i>	Largura da trinca no eixo	mm
<i>C</i>	Amortecimento Interno	N.s/m
<i>da</i>	Diferencial do avanço de trinca	-
<i>dU</i>	Diferencial da Energia Potencial Elástica	-
<i>E</i>	Módulo de Young	MPa
<i>f</i>	Fator multiplicador em função da geometria e trinca	-
<i>FN</i>	Frequência Natural	Hz ou rad/s
<i>G</i>	Taxa de Liberação de Energia	J
<i>h</i>	Metade da altura do corpo de prova com trinca	mm
<i>K</i>	Rigidez do mancal	N/m
<i>K<sub>f</sub></i>	Fator Intensificador de Tensão de Dowling	-
<i>M</i>	Momento Fletor	N.m
<i>m</i>	Massa do sistema	kg
<i>P</i>	Carga Aplicada	N
<i>Q</i>	Centro Geométrico do rotor	mm
<i>r</i>	Raio da órbita do sistema	mm
<i><math>\vec{r}</math></i>	Vetor posição da massa desbalanceada	mm
<i>S<sub>g</sub></i>	Carregamento atuante para abertura de trinca	N ou N.m
<i>t</i>	Instante de abertura de trinca	s
<i>T</i>	Momento de Torção	N.mm
<i>U</i>	Energia Potencial Elástica associada ao material	N/m
<i>w</i>	Largura do corpo de prova	mm
<b>Letras Gregas</b>		<b>Unidades</b>
$\Phi$	Posição do eixo em relação ao ponto de partida	rad
$\dot{\phi}$	Velocidade de precessão do eixo	rad/s
$\omega$ ou $\omega_s$	Velocidade de Rotação	rad/s

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>16</b>
2.1	Evolução do estudo de rotores com trincas .....	16
2.2	Motor <i>turbofan</i> .....	22
2.2.1	Suportes do motor <i>turbofan</i> .....	22
2.2.2	Motor <i>turbofan</i> NSA .....	24
2.3	Conceitos de dinâmica de rotores.....	24
2.3.1	Movimentos orbitais .....	24
2.3.2	Mapa de velocidades críticas .....	26
2.3.3	Ângulos de Euler .....	27
2.3.4	Efeito giroscópio .....	28
2.3.5	Modelo de Stodola-Green.....	29
2.3.5.1	Rotor biapoiado.....	29
2.3.5.2	Rotor em balanço .....	32
2.4	Conceitos de Mecânica da Fratura e Fadiga.....	33
2.4.1	Formação de trinca .....	33
2.4.2	Abertura de trinca .....	34
2.4.3	Modos de abertura de uma trinca .....	36
2.4.4	Fatores influenciadores da abertura de uma trinca .....	37
2.4.4.1	Taxa de liberação de energia ( $G$ ) .....	37
2.4.4.2	Fator intensificador de tensão ( $K_f$ ).....	38
2.4.4.3	Trinca superficial em uma seção circular .....	39
2.4.5	Lei de Paris para crescimento de trinca .....	40
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>42</b>
3.1	Modelagem geométrica do rotor <i>turbofan</i> .....	43
3.2	Desenvolvimento do modelo de elementos finitos .....	46
3.3	Verificação do modelo de elementos finitos .....	48
3.3.1	Teste de sensibilidade de malha .....	48
3.4	Elaboração do mapa de propagação de trincas.....	49
3.4.1	Determinação da máxima tensão principal.....	50
3.4.2	Crescimento de trinca .....	50
3.5	Avaliação do comportamento dinâmico de eixos .....	51
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>53</b>
4.1	Representação geométrica do motor <i>turbofan</i> NSA 2-HPT.....	53
4.2	Modelo de elementos finitos .....	54
4.3	Avaliação do modelo de elementos finitos .....	55
4.3.1	Resultados do teste de sensibilidade de malha .....	55
4.4	Mapa de propagação de trincas .....	56
4.4.1	Nucleação da trinca .....	56
4.4.2	Mapa de propagação de trinca por fadiga.....	57

4.5	Análise dos modos de vibração .....	61
4.5.1	Análise dos autovalores .....	61
4.5.1.1	Autovalores do rotor com e sem trinca para velocidade de rotação nula .....	62
4.5.1.2	Autovalores do rotor sem trinca em diversas velocidades de operação.....	63
4.5.1.3	Autovalores do modelo MII (8% da seção do eixo com trinca) do rotor em diversas velocidades de operação .....	63
4.5.1.4	Autovalores do modelo MIII (24% da seção do eixo com trinca) do rotor em diversas velocidades de operação .....	64
4.5.1.5	Autovalores do modelo MIV (34% da seção do eixo com trinca) do rotor em diversas velocidades de operação .....	65
4.5.1.6	Entendimento da influência das trincas nos autovalores do sistema .....	65
4.5.2	Análise dos autovetores para o MOR e MOP.....	66
4.5.2.1	Autovetores associados ao MOR para os modelos MI, MII, MIII e MIV .....	66
4.5.2.1.1	Autovetor associado a $\omega_1$ .....	67
4.5.2.1.2	Autovetor associado a $\omega_3$ .....	68
4.5.2.1.3	Autovetor associado a $\omega_5$ .....	69
4.5.2.1.4	Autovetor associado a $\omega_7$ .....	70
4.5.2.2	Autovetores associados ao MOP para os modelos MI, MII, MIII e MIV .....	71
4.5.2.2.1	Autovetor associado a $\omega_2$ .....	71
4.5.2.2.2	Autovetor associado a $\omega_4$ .....	72
4.5.2.2.3	Autovetor associado a $\omega_6$ .....	73
4.5.2.2.4	Autovetor associado a $\omega_8$ .....	74
4.5.3	Mapa de velocidades críticas .....	75
4.5.3.1	Mapa de velocidades críticas - MI .....	75
4.5.3.2	Mapa de velocidades críticas - MII.....	76
4.5.3.3	Mapa de velocidades críticas - MIII .....	78
4.5.3.4	Mapa de velocidades críticas - MIV .....	79
4.5.3.5	Entendimento da influência das trincas nas velocidades críticas.....	81
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES.....</b>	<b>83</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>84</b>
	<b>ANEXO A – PROGRAMA EM MATLAB PARA REPRESENTAÇÃO DOS AUTOVETORES.....</b>	<b>88</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Investigações sobre a integridade mecânica de equipamentos e máquinas utilizadas em diferentes ramos da indústria são de fundamental importância para o avanço do conhecimento e para o desenvolvimento de procedimentos voltados para a identificação, análise, predição e monitoramento de diferentes tipos de falhas mecânicas.

O método de elementos finitos (MEF) tem sido um dos procedimentos mais utilizados para analisar características dinâmicas de componentes mecânicos, avaliando o comportamento e a propagação de trincas nesses componentes (CHEN *et al.*, 2022). Dessa forma, os resultados obtidos na análise do comportamento do sistema podem auxiliar na identificação de falhas em campo e corrigir erros em fase de projeto. As falhas mecânicas estão presentes no dia a dia em máquinas rotativas, veículos automotores, aeronaves e em sistemas mecânicos.

De acordo com Vance (1988), o estudo da dinâmica de máquinas rotativas pode ser dividido em alguns ramos, sendo eles a predição de velocidades críticas, a predição de frequências naturais de torção, a determinação da resposta ao desbalanceamento em rotores, a estimativa das massas de correção do balanceamento, a predição das frequências de instabilidade, entre outros. Vance (1988) também cita a questão de instabilidade em rotores, avaliando os parâmetros que a influenciam e como averiguar as velocidades em que elas ocorrem. Ressalta-se que rotor pode ser definido como o conjunto formado pelo eixo e seus elementos acoplados, de forma que ambos realizem o movimento de rotação contínua.

Em máquinas rotativas industriais, as falhas mecânicas ocorrem em diferentes componentes, sendo que os elementos em movimento relativo, tais como o rotor e os mancais, são os mais propícios a trincas. De acordo com Faria (2014), os procedimentos experimentais baseados em sinais de emissão acústica para detecção de falhas têm sido frequentemente empregados em procedimentos mais precisos de detecção de falha. Pimentel-Junior, Oliveira e Faria (2016) citam que o método de emissão acústica é eficiente por se tratar de uma técnica não destrutiva, permitindo analisar, monitorar e diagnosticar o componente mecânico em que ocorre a falha. Os procedimentos de detecção de falha baseados em emissão acústica ainda enfrentam dificuldades técnicas relacionadas à caracterização de sinais associados a diferentes tipos de falhas e ao tratamento do grande volume de dados coletados durante ensaios. Os procedimentos experimentais de detecção de falha são elaborados para monitorar sistemas rotativos em fases de testes de inspeção, comissionamento e operação.

Durante as etapas de análise do projeto conceitual e no desenvolvimento de sistemas de monitoramento baseados em modelos, o método de elementos finitos tem sido largamente

empregado na indústria para avaliar o comportamento dinâmico de sistemas rotativos. Esse método tem sido utilizado para o desenvolvimento de modelos capazes de prever a resposta dinâmica de eixos trincados suportados por mancais de diferentes tipos. Segundo Lin e Chu (2009), o modelo computacional é capaz de auxiliar na predição das falhas mecânicas em máquinas rotativas, propiciando dados para a investigação da trinca e correlacionando-a com sua direção de propagação.

Nas fases preliminares de projeto, os modelos de elementos finitos permitem avaliar o comportamento de sistemas rotativos com diferentes graus de defeitos em diversas condições de operação. De acordo com Kumar e Rastogi (2009), pesquisadores optam pelo método de elementos finitos para avaliar falhas em rotores porque esse método é capaz de avaliar variadas falhas, como por exemplo, trincas transversais, eixo com várias trincas e trincas oblíquas. Os resultados analítico-numéricos gerados pelos modelos do MEF fornecem informações muito importantes para o desenvolvimento de procedimentos de monitoramento e manutenção.

A modelagem por elementos finitos de eixos trincados utilizando a mudança local de flexibilidade tem sido empregada em alguns estudos realizados sobre a análise dinâmica de eixos trincados rotativos suportados em mancais flexíveis. Dong e Chen (2003) e Brant (2007) efetuam estudos sobre a influência do tamanho de trincas transversais em eixos rotativos sobre a resposta vibracional de rotores sob diferentes condições de operação. O modelo de eixo trincado de Dong e Chen (2003) está baseado na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, enquanto Brant (2007) emprega a teoria de eixos baseada na teoria de vigas de Timoshenko.

De acordo com Yu *et al.* (2015), eixos de turbinas de motores *turbofan* e turbojatos trabalham sob diversas condições de carregamento, devido às variadas condições de operação. Essas diversas condições de carregamento são responsáveis pela propagação de falhas nos eixos dos compressores. Milovanovic *et al.* (2022) utilizam o método dos elementos finitos para avaliar a propagação de trinca por fadiga em eixos de turbinas, avaliando o local de nucleação de trinca e a taxa de propagação.

Com o objetivo de contribuir para o estudo das alterações nos parâmetros dinâmicos ocasionadas por trincas por fadiga nos eixos de rotores em balanço, este trabalho apresenta o estudo de eixos trincados com aplicação em um motor *turbofan* utilizado no meio aeronáutico, considerando a presença de uma falha transversal em seu eixo com a finalidade de avaliar a resposta dinâmica do sistema quando seu eixo está sujeito a diferentes proporções de trincas. Por meio de ferramentas computacionais, é possível representar as condições de operação dessas máquinas e avaliar como a profundidade da trinca influencia a resposta dinâmica do sistema. O método dos elementos finitos é aplicado para desenvolver modelos de rotores em

balanço com diferentes profundidades de trinca no eixo, levando em conta os efeitos dos momentos giroscópicos, a contribuição do cisalhamento e as mudanças na flexibilidade local do eixo trincado.

Elementos finitos tridimensionais são empregados neste trabalho para modelagem do eixo. Elementos finitos planos quadrangulares são empregados para representações do *fan* e dos discos dos estágios de compressão do motor. Os mancais são representados por elementos discretos de mola de rigidez constante. As análises implementadas contemplam análises de autovalores e autovetores em diversas velocidades de operação além do mapa de propagação de trincas na velocidade de 449 rad/s do rotor. O modelo do sistema rotativo inclui os efeitos da inércia rotatória, de cisalhamento e dos momentos giroscópicos. As frequências naturais e os modos de vibração do rotor do *turbofan* são obtidos para eixos com diferentes dimensões de trincas transversais operando em diversas condições de operação. Diagramas de Campbell são elaborados para a análise do efeito do tamanho da trinca nas velocidades críticas do sistema rotativo.

Essa dissertação está dividida em 5 capítulos. Essa parte introdutória consiste no primeiro capítulo. O Capítulo 2 apresenta a revisão de literatura dos conceitos mais relevantes associados à análise da resposta vibratória de sistemas rotativos e conceitos fundamentais de mecânica da fratura e fadiga. Em seguida, no Capítulo 3, são descritos os procedimentos metodológicos aplicados para implementar e definir trincas no eixo do motor *turbofan*, detalhando os tipos de análises realizadas e os parâmetros identificados. O Capítulo 4 apresenta a análise dos resultados, baseada na metodologia descrita no Capítulo 3. Este capítulo descreve os parâmetros dinâmicos analisados, o local de nucleação e crescimento de trincas por fadiga no eixo do motor, além de uma análise concisa dos resultados. Por fim, no Capítulo 5, são apresentadas as conclusões deste trabalho, destacando os pontos fundamentais desenvolvidos nesta pesquisa e identificando aspectos importantes a serem analisados em estudos futuros. Estes estudos visam obter uma resposta dinâmica complementar, alterando certos parâmetros do sistema e o tipo de análise realizada.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A seguir, apresentam-se os princípios fundamentais que estão relacionados aos assuntos tratados nesta dissertação, organizados em quatro seções distintas. A primeira seção compreende uma introdução concisa ao estudo da dinâmica de rotores, focando na análise de rotores com eixos trincados. A segunda seção apresenta alguns conceitos de motores *turbofan*, que servem como meio de aplicação da técnica estudada neste trabalho, elucidando algumas partes deste tipo de motor e seu funcionamento. A terceira seção explora a teoria da Dinâmica de Rotores, elucidando conceitos essenciais que formam a base para o desenvolvimento desta pesquisa. A quarta seção abrange teorias complementares de Mecânica da Fratura e Fadiga, ressaltando a relevância desses elementos na condução do presente estudo.

### 2.1 Evolução do estudo de rotores com trincas

Na década de 1970, o engenheiro Robert Gasch emerge como um dos pioneiros no estudo da resposta dinâmica de eixos rotativos com trincas transversais. Em seu modelo, Gasch (1976) considera um rotor suportado por mancais rígidos e representa a abertura e fechamento de trincas por meio da implementação de equações nas equações de movimento de modelos de rotores de Jeffcott (1919), solucionando estas equações de forma computacional. Dessa forma, Gasch (1976) investiga a influência das trincas na resposta dinâmica do sistema. No entanto, as equações de abertura e fechamento de trincas adotadas por Gasch (1976) tratam a etapa de transição de forma abrupta, desconsiderando a transição de movimento.

No início dos anos 80, Mayes e Davies (1984) fornecem um estudo complementar ao estudo de Gasch (1976), onde, por meio de equações matemáticas, consideram a transição do processo de abertura e fechamento da trinca em um eixo de rotor biapoiado em mancais rígidos. Este estudo permite avaliar com maior precisão o processo de transição de abertura e fechamento de trinca na resposta dinâmica de um rotor aeronáutico.

Já em 1986, Nelson e Nataraj (1986) realizam a implementação de trincas transversais em modelos de elementos finitos representados por elementos finitos de barra, considerando a influência do efeito giroscópico na resposta. Em seu estudo, Nelson e Nataraj (1986) avaliam um rotor biapoiado em mancais rígidos com uma trinca pré-determinada e inserem equações de rigidez das trincas na matriz de rigidez do sistema, de acordo com a etapa de abertura e fechamento da trinca. Nelson e Nataraj (1986) comparam os resultados de seu estudo com resultados numéricos de Grabowski (1982), concluindo que, embora os resultados qualitativos

sejam razoáveis, os resultados quantitativos não apresentam boa correlação devido às incertezas nos procedimentos e parâmetros adotados.

No início da década de 90, Gasch (1993) publica um trabalho complementar ao seu publicado em 1976, onde estuda a influência das trincas transversais em órbitas de sistemas rotativos. Neste estudo, Gasch (1993), ainda por meio das alterações de movimento do rotor de Jeffcott (1919), insere equações para o processo de transição de abertura e fechamentos de trinca, etapa similar ao estudo de Mayes e Davies (1984). Gasch (1993) evidencia a influência da trinca na resposta transiente de órbitas do rotor.

Complementar ao trabalho de Gasch (1976), no final do século XX, Huang, Huang e Shieh (1993) desenvolvem o estudo de sistemas rotativos com trincas transversais ocasionadas por fadiga em seu eixo. Huang, Huang e Shieh (1993) apresentam o conceito de abertura e fechamento de trinca de acordo com o movimento rotativo do rotor e a relação de proporção da trinca radial, representada pela letra  $a$  e da trinca transversal, representada pelo símbolo  $2c$ . Em seu estudo, Huang, Huang e Shieh (1993) mapeiam a variação da flexibilidade local da trinca em função do momento de abertura, conforme apresentado na Figura 1.

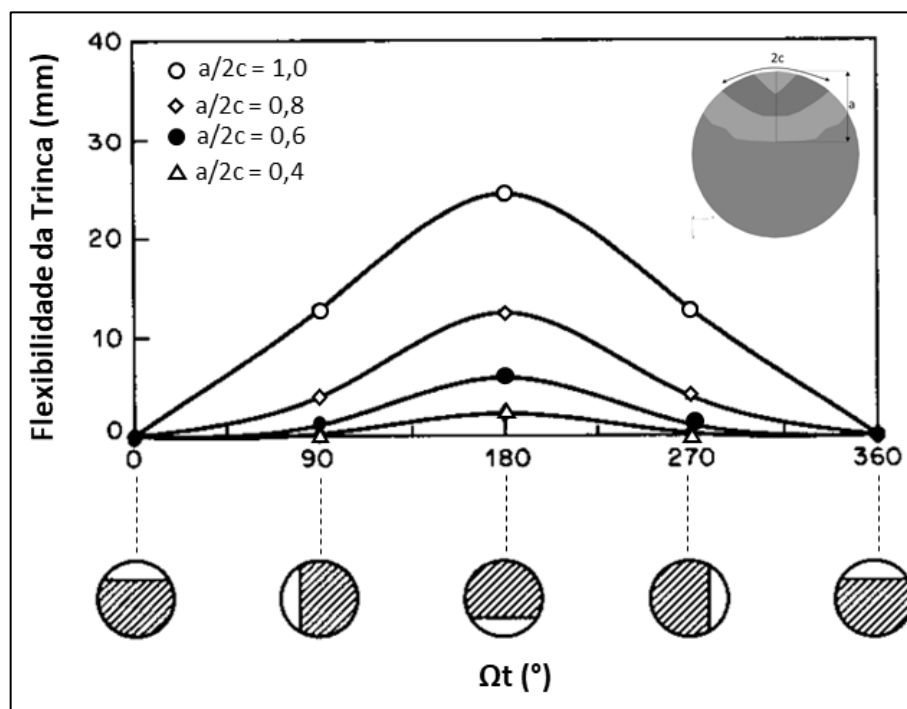


Figura 1 - Flexibilidade da trinca de acordo com sua proporção e estágio do rotor (Huang, Huang e Shieh, 1993 - Adaptada).

Huang, Huang e Shieh (1993) ilustram bem o estágio de abertura de uma trinca de acordo com a posição do eixo. O eixo do rotor em  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  e  $360^\circ$  possui suas deflexões

máximas, onde esses ângulos extremos proporcionam o estágio de abertura da trinca e fechamento da trinca quando defasados em  $180^\circ$ . Huang, Huang e Shieh (1993) concluem que a profundidade da trinca influencia diretamente na amplitude da resposta do sistema, onde, uma trinca com maior profundidade proporciona uma maior amplitude da resposta.

No final dos anos de 1990, Ku (1998) por meio do método dos elementos finitos, realiza um estudo de casos de um rotor biapoiado em diferentes mancais. Nesse estudo, Ku (1998) utiliza a teoria de viga de Timoshenko para representação do efeito giroscópio do eixo. O primeiro estudo de caso baseia-se em um rotor biapoiado em mancais isotrópicos onde o amortecimento do sistema é proveniente somente do arrasto aerodinâmico e do material do eixo. O segundo caso insere as equações de amortecimento dos mancais. Ku (1988) conclui que o amortecimento interno proveniente somente do arrasto aerodinâmico resulta na instabilidade dos modos orbitais progressivos em todas as velocidades, enquanto o amortecimento do material resulta na instabilidade dos modos de precessão no movimento orbital progressivo somente quando a velocidade de rotação é maior que a 1ª velocidade crítica. Ressalta-se que a velocidade crítica pode ser definida quando o sistema rotativo experimenta a máxima resposta ao desbalanceamento, resultando em uma maior transmissibilidade de esforços aos mancais. Outro ponto importante é que a adição de amortecimento nas equações dos mancais aumenta a velocidade inicial de instabilidade.

Pouco antes do estudo de Ku (1998), Stephenson e Rouch (1993) emergem como um dos pioneiros no estudo de eixos rotativos através do método dos elementos finitos, utilizando elementos tridimensionais (3D) para representar regiões complexas, que são desafiadoras para se modelar com elementos unidimensionais (1D) ou bidimensionais (2D). Em seu estudo observa-se uma correlação positiva entre os resultados ao empregar elementos finitos volumétricos para calcular as frequências naturais de um rotor em balanço, em comparação com os resultados obtidos através da modelagem unidimensional. Notavelmente, seu estudo revela frequências naturais mais precisas quando comparado ao modelo unidimensional.

Nandi e Neogy (2001) implementam elementos finitos tridimensionais nas áreas de alta complexidade geométrica do rotor em balanço, incorporando uma combinação de elementos 1D, 2D e 3D em seu estudo. Eles concluem que os elementos 3D oferecem uma resposta satisfatória para as áreas de difícil modelagem do sistema, embora destaque a necessidade de desenvolver uma metodologia mais eficaz para descrever as transições entre os elementos 3D e os elementos 1D e 2D.

De acordo com Kumar (2016), certos rotores, devido às suas geometrias complexas, não oferecem uma resposta satisfatória quando representados somente por elementos finitos 1D e

2D. A tentativa de modelar regiões complexas destes rotores com esses tipos de elementos requer um grande esforço na definição de condições de contorno e hipóteses simplificadoras. Os elementos 3D permitem a representação mais precisa de variações da geometria, embora exijam mais tempo de processamento computacional para a solução. Kumar (2016) avalia um motor *turbofan* modelando as regiões de eixo e discos com elementos finitos sólidos 3D, e regiões das paletas com elementos finitos bidimensionais. Ele realiza a comparação de resultados do seu rotor com um rotor de paletas totalmente rígidas e evidencia a precisão na variação da resposta para a 1ª e 2ª frequência natural deste rotor em balanço.

Estudos mais recentes como o de Roy, Palit e Mukhyopadyay (2020), avaliam a presença de trinca por fadiga em um eixo de uma bomba centrífuga, avaliando o aspecto da falha e o estudo de parâmetros do sistema. Roy, Palit e Mukhyopadyay (2020) identificaram o ponto de nucleação da trinca na região da chaveta do eixo, local onde apresenta um concentrador de tensão. Seu estudo experimental permitiu avaliar a morfologia da trinca e sua direção de propagação, além de concluir que em regiões com alta concentração de tensão, a vida em fadiga do material prevista é menor do que estabelecida em projeto.

Visando a implementação de massas desbalanceadas em modelos de elementos finitos 3D, Krishna, Mudgala e Seth (2021) conduzem uma simulação para incorporá-las em um rotor biapoiado em mancais totalmente rígidos. Em seu estudo, Krishna, Mudgala e Seth (2021) avaliam a resposta dinâmica do sistema com três materiais diferentes, com o objetivo de fornecer dados para a escolha de materiais do sistema de acordo com a aplicação do rotor e a influência da massa desbalanceada nas diferentes propriedades do rotor. Neste estudo, Krishna, Mudgala e Seth (2021) utilizam o pacote computacional ANSYS® e desprezam a influência do efeito giroscópico na resposta do sistema.

Visando estudar o comportamento energético de uma turbomáquina com o eixo de seu rotor biapoiado entre mancais e com a presença de uma trinca por fadiga em seu eixo, Zhang *et al.* (2022) conduzem um estudo da profundidade inicial de uma trinca por fadiga no eixo dessa turbomáquina e correlaciona os resultados experimentais por meio das equações de movimento do rotor. Todavia, Zhang *et al.* (2022) desprezam, assim como Krishna, Mudgala e Seth (2021), a influência do efeito giroscópico na resposta do sistema.

Com o intuito de considerar os efeitos giroscópicos no rotor e avaliar a influência do avanço da trinca por fadiga, Lopes e Faria (2023) desenvolvem um modelo 3D de elementos finitos do rotor de Zhang *et al.* (2022) utilizando o pacote computacional ABAQUS CAE® (2023). Nesse estudo, eles analisam a resposta dinâmica do sistema para várias relações de trinca por fadiga, levando em conta o efeito giroscópico. Inicialmente, Lopes e Faria (2023)

validam o modelo sem efeito giroscópico com os resultados de Zhang *et al.* (2022), para então incorporar os efeitos giroscópicos no modelo. O estudo de Lopes e Faria (2023) envolve a análise do rotor em duas velocidades de operação: 2.890 rpm e 10.166 rpm, e são apresentados na Figura 2 os autovetores obtidos.

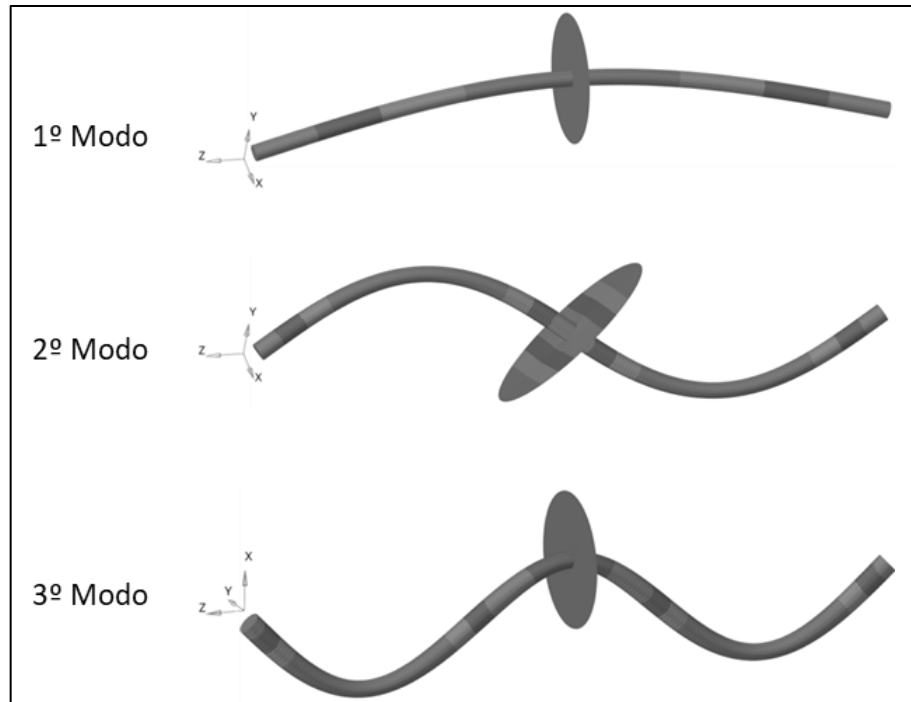


Figura 2 - Modos de um rotor bi apoiado (Lopes e Faria, 2023 - Adaptada).

Em 2.890 rpm, Lopes e Faria (2023) observam que o primeiro e terceiro modos de vibração apresentam um aumento nos valores de frequência natural nos estágios iniciais de avanço da trinca, com uma subsequente redução desses valores à medida que a trinca avança. O segundo modo, por sua vez, mostra uma diminuição dos valores ao longo de todo o processo de avanço da trinca. Na velocidade de 10.166 rpm, os três modos exibem um comportamento semelhante, com um aumento na frequência natural na fase inicial de avanço da trinca, seguido por uma redução à medida que a trinca avança.

Com o propósito de estudar falhas em rotores empregados nos meios aeroespaciais, Sawicki *et al.* (2005) efetuam uma análise de um sistema rotativo da NASA (Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço) com o objetivo de investigar a resposta dinâmica do sistema quando apresenta diversas fissuras por fadiga em seu eixo. O rotor em estudo está apresentado na Figura 3.

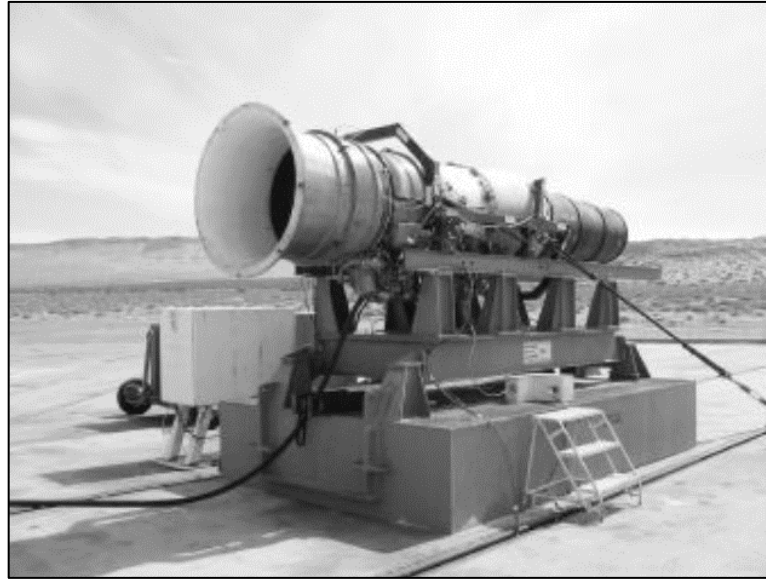


Figura 3 - Motor *Tubofan* Alisson TF-41 (Sawicki *et al.*, 2005).

Sawicki *et al.* (2005) utilizam o método dos elementos finitos para correlacionar resultados de vibração lateral obtidos analiticamente com resultados experimentais. Sawicki *et al.* (2005) concluem que a posição e orientação das trincas influenciam os autovalores do sistema. Também é constatado que há um aumento da resposta vibracional do sistema de acordo com o crescimento da trinca, até que ocorra o colapso do eixo e a amplitude da vibração cresce parabolicamente com o avanço da trinca.

Na investigação de rotores aeronáuticos em vibração síncrona, Hozic (2009) conduz um estudo de um motor aeronáutico diante de uma falha relacionada à perda de uma das paletas do *fan*, conhecida como *fan blade-off* (FBO). Essa falha resulta na criação de uma força de excitação e aumenta os esforços transmitidos aos mancais. Ressalta-se que neste tipo de máquina rotativa, a carga de desbalanceamento tende ser muito pequena, já definida em fase de projeto. Hozic (2009) realiza uma simulação representativa da seção do rotor em balanço de baixa pressão do motor *turbofan* NSA 2-HPT por meio do método dos elementos finitos. Hozic (2009) teve como objetivo estimar a carga de desbalanceamento inicial do rotor quando ocorre a FBO e definir cargas transmitidas aos mancais para serem usadas em fase de projeto.

Na Figura 4, apresenta-se o modelo inicial da região do rotor analisado por Hozic (2009), onde são destacados os elementos associados à rigidez dos mancais, as paletas do compressor e a geometria do eixo. No rotor de Hozic (2009), a rigidez dos mancais é representada pelos coeficientes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$ .

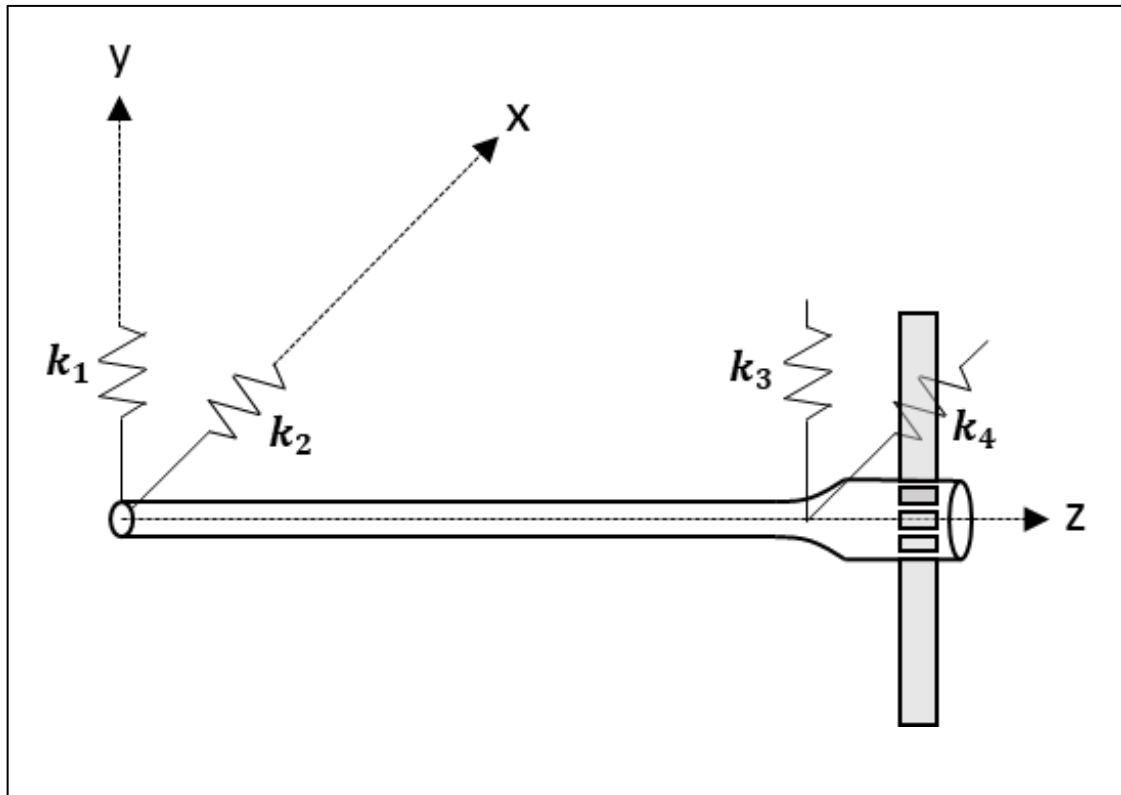


Figura 4 - Modelo computacional de um eixo do módulo de compressão de um motor *turbofan* (Hozic, 2009-Adaptada).

## 2.2 Motor *turbofan*

A seguir, são apresentados conceitos geométricos e de montagem de motores *turbofan*, com foco nos estágios de compressão, nos mancais, no compressor e na turbina. Esses conceitos permitem descrever o funcionamento básico deste sistema mecânico, abrangendo a disposição e o papel desses componentes internos essenciais, como compressores, câmaras de combustão e turbinas.

### 2.2.1 Suportes do motor *turbofan*

Balli e Caliskan (2021) citam que motores *turbofan* são comumente empregados em meios de aviação civil e militar, onde estes rotores representam um gama de motores que são amplamente estudados na engenharia. Aainsqatsi (2011) realiza a representação de um motor *turbofan*, descrevendo os seus estágios e princípios de fluxo de ar, conforme apresentado na Figura 5.

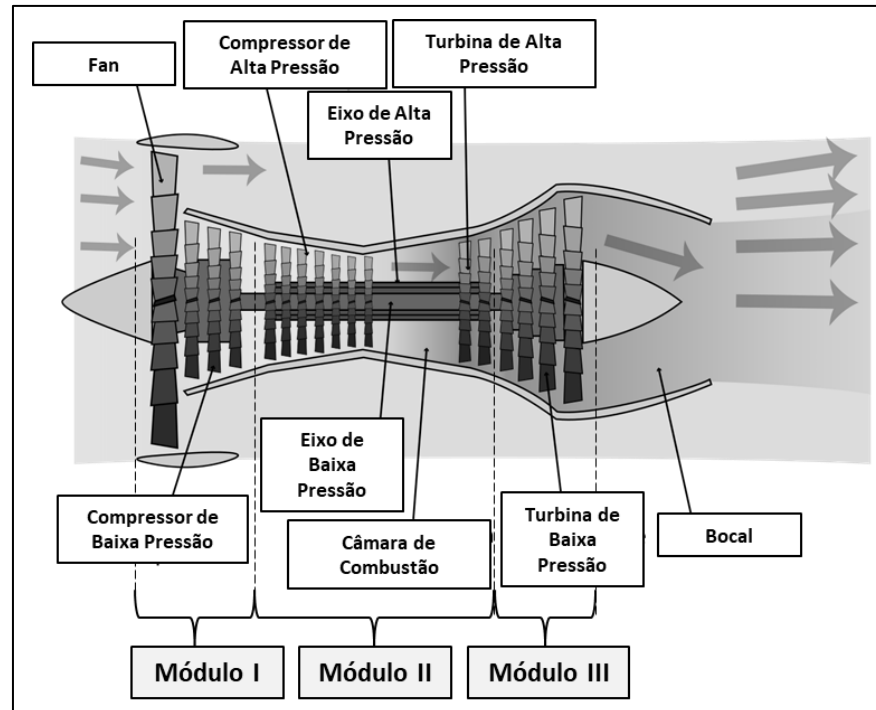


Figura 5 - Módulos de um motor *turbofan* e suas seções internas (Aainsqatsi, 2011).

Wang, Zhu e JinFeng (2020) descrevem uma visão mais detalhada dos tipos de suportes de eixos do motor *turbofan*, detalhando os módulos do rotor e os eixos responsáveis pelas conexões entre o rotor de baixa pressão e o rotor *fan*, conforme apresentado na Figura 6.

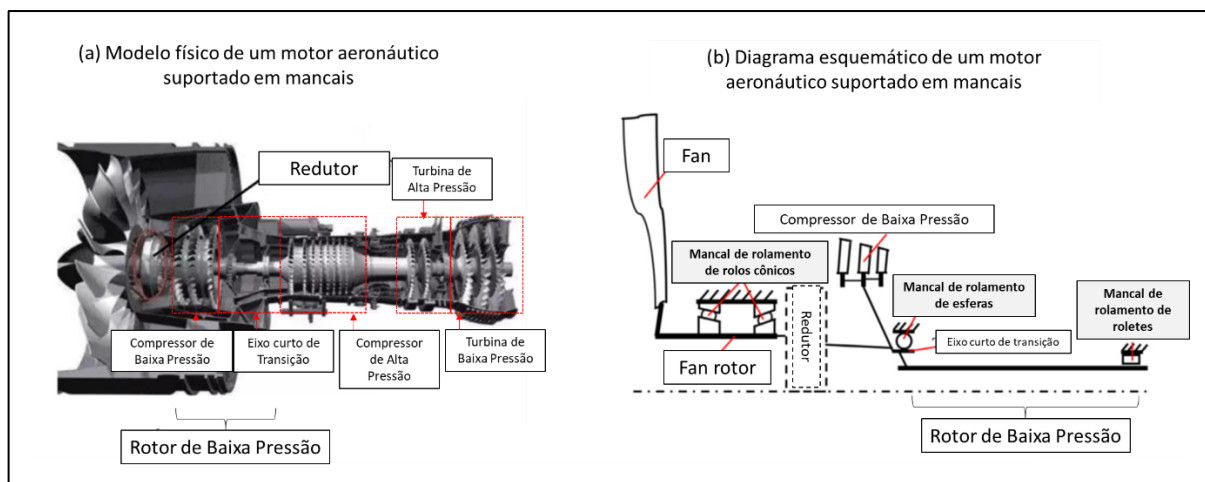


Figura 6 - Suportes dos eixos de um motor *turbofan* (Wang, Zhu e JinFeng, 2020 -Adaptada).

Wang, Zhu e JinFeng (2020) discutem os tipos de mancais comumente empregados em motores *turbofan*. Ao analisar o eixo do rotor de baixa pressão, observa-se que ele é sustentado por dois tipos de mancais: mancais de roletes e de esferas. Além disso, é ressaltado que, para esses tipos de mancais, o torque de partida de um rotor pode atingir quase o dobro devido à

inércia rotacional do conjunto rotativo. Esses mancais são suscetíveis a cargas axiais e radiais, as quais variam com a velocidade angular do rotor, onde a sua rigidez para o trabalho em estudo, pode atingir valores muito superiores aos valores da rigidez do eixo rotativo. O motor *turbofan* em estudo é apresentado no tópico a seguir.

### 2.2.2 Motor *turbofan* NSA

A *Next Generation Single Aisle* (NSA ou NGSA), ou Próxima Geração de Aviões com Corredor Único, representa uma evolução significativa na indústria da aviação, especialmente no segmento de aeronaves civis e comerciais com um único corredor central. Projetadas para atender às crescentes demandas por viagens aéreas de curto e médio alcances, as aeronaves NSA são o resultado de avanços tecnológicos inovadores e da busca contínua por maior eficiência e desempenho. Szodruch *et al.* (2010) destacam o desenvolvimento do estudo destes tipos de rotores para implementação em aeronaves, onde destaca os requisitos e as soluções tecnológicas a serem empregadas nos desafios do desenvolvimento destes rotores. Para o trabalho corrente, será analisado o rotor NSA 2-HPT, objeto de estudo de Hozic (2009). Em seu trabalho, Hozic (2009) estuda variados rotores do tipo NSA, avaliando diversas repostas do sistema.

## 2.3 Conceitos de dinâmica de rotores

Neste tópico, são apresentados conceitos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, com ênfase em teorias de sistemas rotativos. O propósito é oferecer uma base conceitual para dar suporte à pesquisa em questão.

### 2.3.1 Movimentos orbitais

Na Figura 7 são apresentados dois desenhos esquemáticos com vistas laterais de um disco desbalanceado suportado por um eixo flexível, utilizada por Vance, Zeidan e Murphy (2010) para explicar o conceito de movimento orbital. Nesta figura o ângulo de defasagem entre massa desbalanceada e movimento de precessão do rotor ( $\phi$ ) é representado pela letra  $\Theta$ . Quando o ângulo  $\Theta$  é constante, tem-se a caracterização de movimento orbital síncrono. Os movimentos orbitais não síncronos apresentam esse ângulo variável e velocidades relativas diferentes de zero. Ressalta-se que  $\omega_s$  representa a velocidade de rotação do rotor,  $\dot{\phi}$  é a

velocidade de precessão,  $\vec{r}$  o vetor posição da massa desbalanceada e  $\dot{\Theta}$  a velocidade orbital da massa desbalanceada para movimentos orbitais não síncronos.

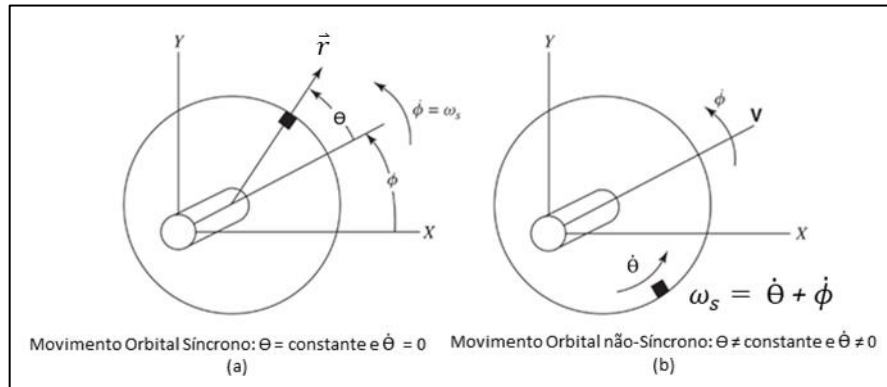


Figura 7 - Movimentos orbitais (Vance, Zeidan e Murphy, 2010).

Quando o rotor apresenta movimento orbital síncrono, com velocidade de rotação ( $\omega_s$  ou  $\omega$ ) constante, a força devido ao desbalanceamento é responsável pelo deslocamento do centro geométrico, sendo responsável com que rotação síncrona tenha dois tipos de movimentos característicos, sendo eles:

- Movimento Orbital Progressivo (MOP) ou *Forward Whirl (FW)*;
- Movimento Orbital Regressivo (MOR) ou *Backward Whirl (BW)*.

No MOP tem-se a rotação do sistema no mesmo sentido do movimento de precessão do sistema. Para o MOR, a rotação do sistema tem sentido oposto à precessão do sistema. Estes movimentos são representados na Figura 8.

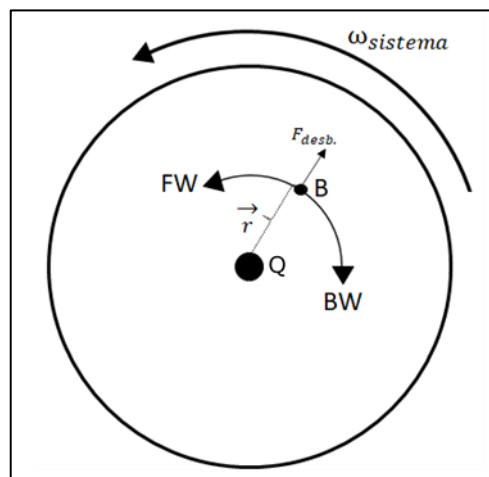


Figura 8 - MOP e MOR para rotação síncrona.

Analisando o MOP, o eixo do rotor com rotação  $\omega$  apresenta sentido de rotação no mesmo sentido de precessão. Para o MOR os sentidos de rotação e precessão estão em sentidos opostos.

### 2.3.2 Mapa de velocidades críticas

O mapa de velocidades críticas é comumente utilizado no estudo de sistema rotativos para mostrar suas velocidades críticas em função da velocidade de rotação e das frequências naturais. Nas velocidades críticas, há uma maior transmissibilidade de forças aos mancais e uma maior amplitude do movimento orbital do eixo. Na Figura 9 é apresentado um mapa de frequências naturais ou velocidades críticas, também conhecido como Diagrama de Campbell.

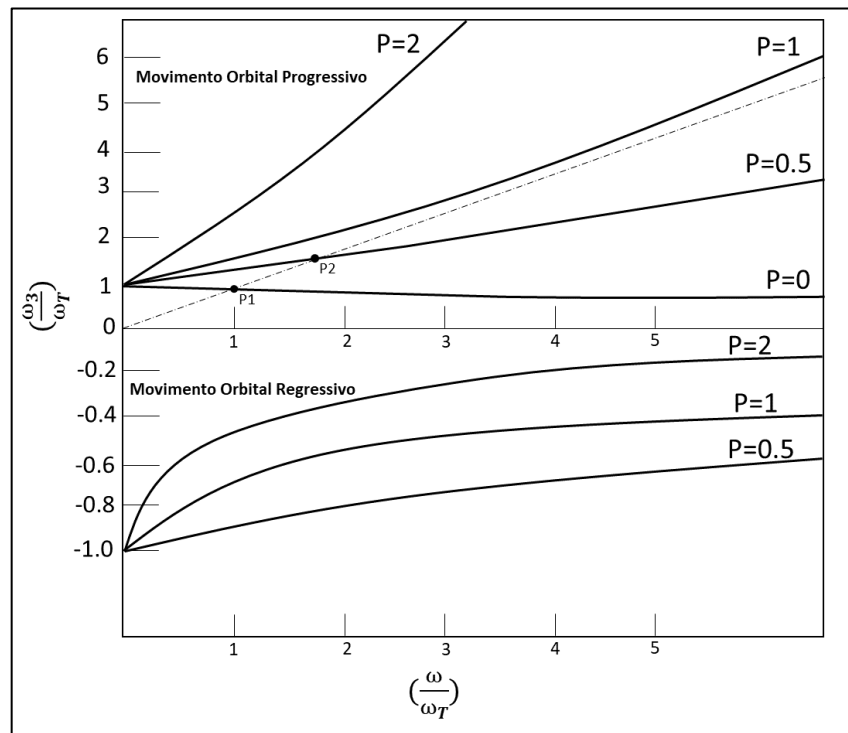


Figura 9 - Diagrama de Campbell para MOP e MOR (Vance, Zeidan e Murphy, 2010).

Neste tipo de gráfico é possível obter os valores de velocidades críticas em função da velocidade de rotação e da influência do efeito giroscópico no sistema. Onde  $P$  representa a razão entre momento polar de inércia ( $I_P$ ) e momento transversal de inércia ( $I_T$ ). Os pontos  $P_1$  e  $P_2$  representam as velocidades críticas relacionadas aos modos de vibração orbital cônicos para o MOP.

### 2.3.3 Ângulos de Euler

No estudo de sistemas rotativos com múltiplos graus de liberdade, é essencial utilizar sistemas de coordenadas adequados para descrever os movimentos angulares do rotor. Um sistema local de coordenadas, que proporciona uma representação mais precisa do rotor, pode ser obtido por meio dos ângulos de Euler. Li *et al.* (2022), em seu estudo sobre um motor rotativo convencional, descrevem os movimentos de rotação utilizando os ângulos de Euler, os quais são apresentados na Figura 10.

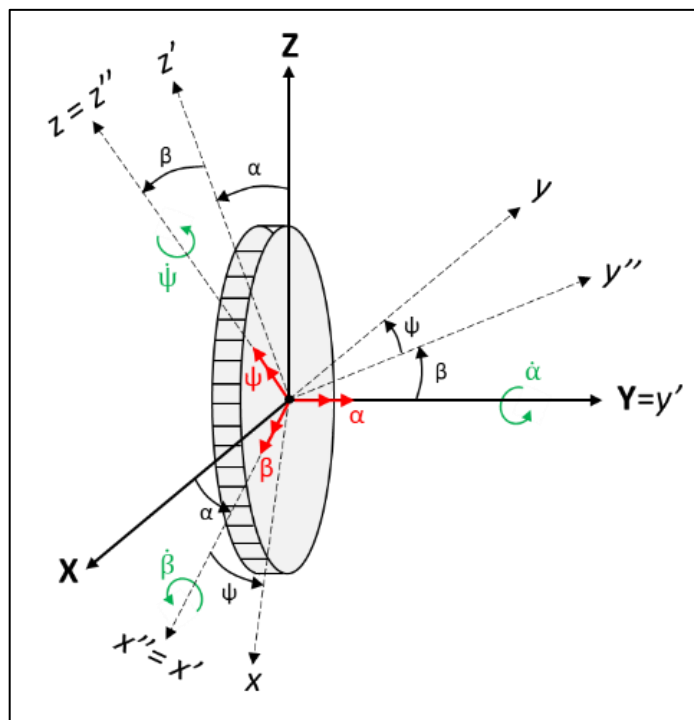


Figura 10 - Ângulos de Euler para representação do movimento de um rotor (Li et. al, 2022 - Adaptada).

Os ângulos de Euler são gerados a partir de três rotações infinitesimais realizadas na seguinte ordem:

- Rotação do ângulo  $\alpha$  sobre o eixo  $Y$ , gerando o sistema  $x'y'z'$ ;
- Rotação do ângulo  $\beta$  sobre o eixo  $x'$ , gerando o sistema  $x''y''z''$ ;
- Rotação do ângulo  $\psi$  sobre o eixo  $z''$ , gerando o sistema  $xyz$ .

Os ângulos de Euler são de fundamental importância pois descrevem a orientação de corpos girantes em um espaço tridimensional. Por meio das rotações do sistema de coordenadas de um corpo rígido, é possível obter o novo sistema de coordenadas local, baseado no sistema de coordenadas global. Essa transformação de coordenadas permite uma melhor interpretação

da posição do corpo girante no espaço tridimensional e possibilita a escrita de matrizes de transformação de coordenadas locais em termos das funções seno e cosseno das coordenadas globais.

#### 2.3.4 Efeito giroscópio

Em um sistema rotativo, há o aparecimento de um termo na equação de movimento que está associado à velocidade de rotação ( $\omega$ ) do disco e ao seu momento polar de inércia ( $I_p$ ). Esse segundo termo, também chamado de momento giroscópico ( $\vec{L}$ ), está associado com a tendência do corpo em manter o seu estado de movimento, sendo responsável por alterações na resposta do sistema. Na Equação 9 apresenta-se a expressão do momento giroscópico.

$$\vec{L} = \pm I_p \cdot \omega \cdot \dot{\phi} \quad (9)$$

Onde:

$\dot{\phi}$  representa a velocidade de precessão eixo;

$\omega$  a velocidade de rotação do rotor.

O termo  $\vec{L}$ , também conhecido como momento giroscópico, relaciona uma resistência à mudança de direção de um sistema variando com a velocidade, provocando a alteração de frequências naturais em sistemas rotativos. A relação do momento polar de inércia e do momento transversal de inércia é apresentado na Equação 10.

$$P = \frac{I_p}{I_T} \quad (10)$$

A razão dos momentos de inércia ( $P$ ) representa a parcela de contribuição que será adicionada nos cálculos de velocidades críticas do sistema.

### 2.3.5 Modelo de Stodola-Green

De acordo com Pedersen (2009), o modelo de rotor de Stodola-Green representa um avanço teórico significativo no estudo de dinâmica de rotores. Esse modelo leva em consideração os ângulos de Euler, os efeitos cisalhantes e os momentos giroscópicos.

A seguir, são apresentadas as equações de movimento para um rotor biapoiado e para um rotor em balanço, utilizadas como base no estudo deste trabalho. As equações consideram exclusivamente as vibrações laterais do eixo do rotor e são derivadas a partir das equações da quantidade de movimento linear e da quantidade de movimento angular do sistema.

#### 2.3.5.1 Rotor biapoiado

O estudo de rotores biapoiados se torna relevante para avaliação de sistemas dinâmicos comumente empregados na indústria. Em seu livro, Vance, Zeidan e Murphy (2010) utilizam uma figura esquemática de um rotor rígido biapoiado em mancais elásticos, com quatro graus de liberdade. Esta figura está reproduzida na Figura 11 .

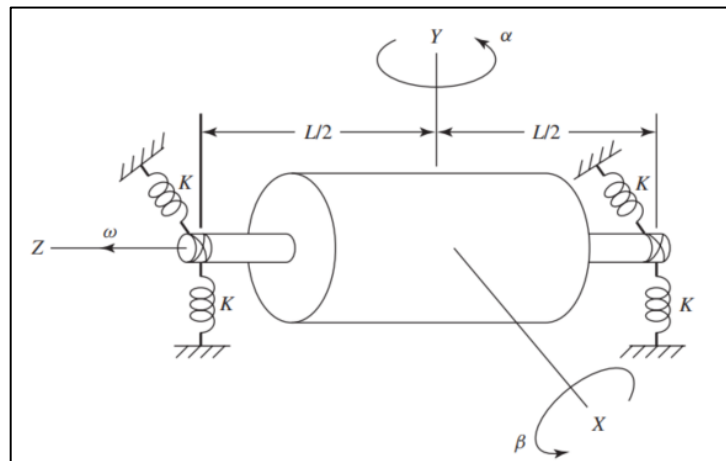


Figura 11 - Rotor rígido biapoiado (Vance, Zeidan e Murphy, 2010).

As equações de movimento apresentadas por Vance, Zeidan e Murphy (2010) estão descritas pelas Equações 11, 12, 13 e 14. Nessas equações,  $m$  representa a massa do sistema,  $\ddot{X}$  e  $\ddot{Y}$  as acelerações nas direções ortogonais ao eixo e,  $F_X$  e  $F_Y$  as forças resultantes atuantes nessas direções. Para as equações de equilíbrio torcional,  $\ddot{\beta}$  e  $\ddot{\alpha}$  representa as acelerações angulares nas respectivas direções,  $M_X$  e  $M_Y$  representam os momentos resultantes,  $\dot{\beta}$  e  $\dot{\alpha}$  as velocidades angulares.

$$m. \ddot{X} = \sum F_x \quad (11)$$

$$m. \ddot{Y} = \sum F_Y \quad (12)$$

$$I_T. \ddot{\beta} + I_P. \omega. \dot{\alpha} = \sum M_x \quad (13)$$

$$I_T. \ddot{\alpha} - I_P. \omega. \dot{\beta} = \sum M_Y \quad (14)$$

Considerando-se as forças externas geradas pelos mancais elásticos isotrópicos sobre o rotor rígido biapoado, obtêm-se as seguintes equações para o movimento do rotor:

$$m. \ddot{X} + 2. k. X = 0 \quad (15)$$

$$m. \ddot{Y} + 2. k. Y = 0 \quad (16)$$

$$I_T. \ddot{\beta} + I_P. \omega. \dot{\alpha} + \frac{1}{2}. k. L^2. \beta = 0 \quad (17)$$

$$I_T. \ddot{\alpha} - I_P. \omega. \dot{\beta} + \frac{1}{2}. k. L^2. \alpha = 0 \quad (18)$$

Onde as equações (15) e (16) representam as equações das vibrações laterais nas direções transversais em  $X$  e  $Y$ . As equações (17) e (18) representam as equações de movimento angular em torno do eixo  $X$  ( $\beta$ ) e em  $Y$  ( $\alpha$ ). A partir dos problemas de autovalor gerados por essas equações, obtêm-se as primeiras quatro frequências naturais ( $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  e  $\omega_4$ ) do sistema rotativo de um rotor rígido biapoado em mancais elásticos isotrópicos, representadas pelas equações (19), (20) e (21).

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{2.K}{m}} \quad (19)$$

$$\omega_3 = \left[ \frac{I_P}{2.I_T} . \omega + \sqrt{\frac{k.L^2}{I_T} + \left( \frac{I_P}{2.I_T} . \omega \right)^2} \right] \quad (20)$$

$$\omega_4 = \left[ \frac{I_P}{2.I_T} . \omega - \sqrt{\frac{k.L^2}{I_T} + \left( \frac{I_P}{2.I_T} . \omega \right)^2} \right] \quad (21)$$

Ao analisar as equações (20) e (21), verifica-se que os termos giroscópios são os responsáveis pela variação das frequências naturais com a velocidade de rotação, sendo que o modo de vibração orbital cônico progressivo apresenta elevação do valor da frequência natural, enquanto o modo de vibração orbital cônico regressivo apresenta tendência oposta. Isso faz com

que o rotor tenha uma faixa de operação menor e que sua frequência natural varie com a velocidade, conhecido como bifurcação do espectro de frequência.

Para mancais flexíveis,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  representam os modos cilíndricos,  $\omega_3$  representa o modo cônico progressivo e  $\omega_4$  representa o modo cônico regressivo, conforme apresentado na Figura 12.

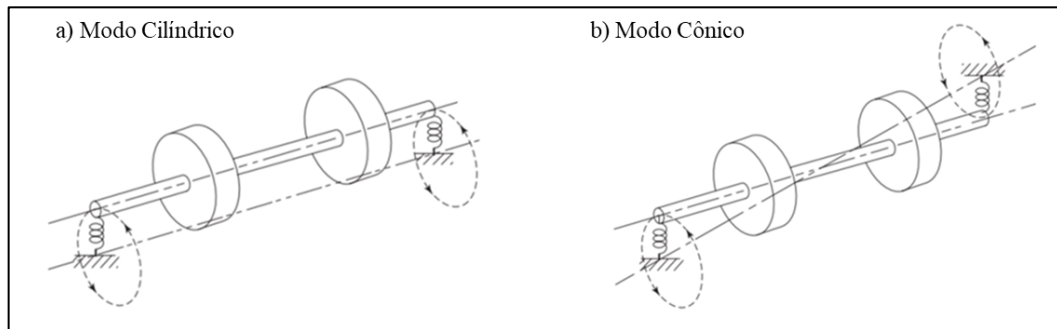


Figura 12 - Modos Cilíndricos e Cônicos de um rotor bi apoiado (Vance, Zeidan e Murphy, 2010).

Para rotores suportados em mancais com elevada rigidez,  $\omega_1$  e  $\omega_2$  apresentam como modos de flexão em torno dos mancais, enquanto  $\omega_3$  e  $\omega_4$  apresentam o comportamento de flexão oposta do eixo em torno dos mancais, conforme apresentado na Figura 13.

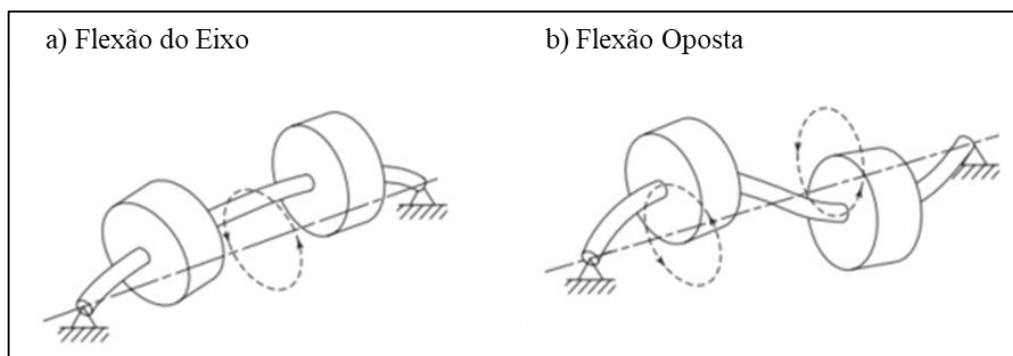


Figura 13 - Modos em um rotor apoiado em mancais totalmente rígidos (Vance, Zeidan e Murphy, 2010).

Quando o rotor está em repouso, ou seja, sua velocidade de rotação  $\omega$  é zero, a primeira frequência natural é definida como  $\omega_T$ , representada pela seguinte equação:

$$\omega_T = \sqrt{\frac{K.L^2}{I_T}} \quad (22)$$

Onde os modos de vibração para esse caso são modos planares (inclinação e guinada) e não há influência do efeito giroscópico. Esta frequência auxilia na construção do mapa de velocidades críticas.

### 2.3.5.2 Rotor em balanço

Partindo das premissas adotadas no rotor biapoiado nas extremidades, é possível utilizar as mesmas premissas para um rotor biapoiado em balanço, onde há uma maior influência de termos giroscópicos. Na Figura 14 é apresentado um rotor em balanço suportado em mancais de rigidez  $K_1$  e  $K_2$  e ângulos de torção em torno de  $Y$  ( $\alpha$ ) e em  $X$  ( $\beta$ ).

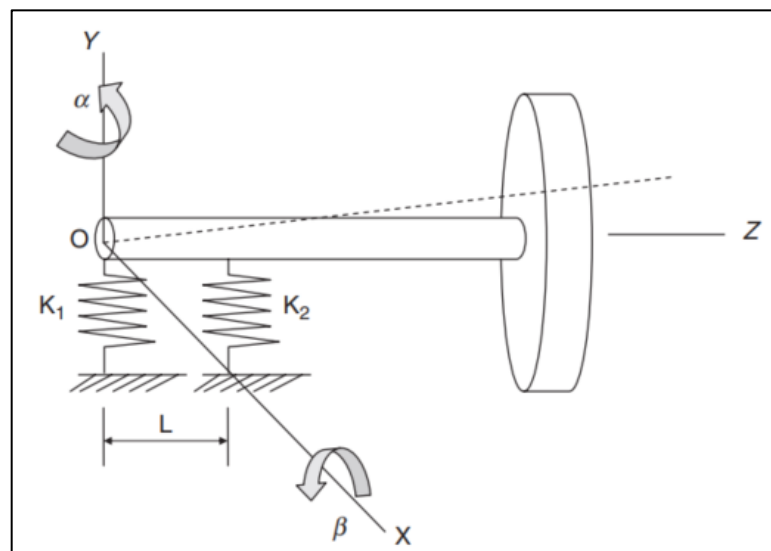


Figura 14 - Rotor em balanço (Vance, Zeidan e Murphy, 2010).

O rotor em balanço, para a velocidade de rotação  $\omega$  igual a zero, apresenta os dois primeiros modos de vibração como modos planares, conforme apresentado na Equação 22. Quando o rotor está em operação, as equações de  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são representadas pelas Equações 20 e 21.

Para velocidade de rotação superior a 0 rad/s, os dois primeiros modos do rotor apoiado em mancais flexíveis são modos de vibração orbital progressiva (*Forward Whirl*) e vibração orbital regressiva (*Backward Whirl*), apresentados na Figura 12 e na Figura 13.

Vance, Zeidan e Murphy (2010) apresentam as equações de movimento angular de um rotor em balanço, usando as equações de equilíbrio da quantidade de movimento angular, indicadas pelas Equações 23 e 24.

$$I_T \cdot \ddot{\beta} + I_P \cdot \omega \cdot \dot{\alpha} + K_2 \cdot L^2 \cdot \beta = 0 \quad (23)$$

$$I_T \cdot \ddot{\alpha} + I_P \cdot \omega \cdot \dot{\beta} + K_2 \cdot L^2 \cdot \alpha = 0 \quad (24)$$

As expressões de frequência natural para as Equações 23 e 24 são apresentadas pelas equações 20 e 21. A equação que representa o rotor em repouso é a Equação 19.

## 2.4 Conceitos de Mecânica da Fratura e Fadiga

Na dinâmica de rotores, a análise da mecânica da fratura e fadiga desempenha um papel crucial na garantia da segurança e confiabilidade desses sistemas em operação. A combinação de velocidades de rotação, cargas dinâmicas e as variações contínuas de tensão cria condições desafiadoras que podem levar à falha. A mecânica da fratura investiga os processos pelos quais as trincas e fissuras se propagam em materiais sob tensão, enquanto a fadiga aborda o acúmulo progressivo de danos causados por repetidas variações de carga ao longo do tempo. Em sistemas rotativos, onde os componentes estão sujeitos a ciclos contínuos de carregamento, compreender os efeitos da fratura e fadiga é essencial para garantir a durabilidade e segurança operacional. De acordo com Dowling (2013), a falha por fadiga pode ocorrer com cargas bem inferiores a cargas admissíveis onde as falhas estão comumente presentes em turbinas a vapor, turbinas a gás e motores de aeronaves.

A seguir são apresentados alguns conceitos fundamentais utilizados neste trabalho relacionados à mecânica da fratura e fadiga, apresentando algumas teorias e trabalhos já realizados.

### 2.4.1 Formação de trinca

Segundo Visnadi, Filho e Castro (2022), o diagnóstico de falhas é um processo de modernização da indústria, auxiliando na redução de custos devido a falhas inesperadas. O estudo de falhas em máquinas rotativas se torna muito importante pela presença de tensões alternadas durante sua operação. Os componentes dos rotores, por estarem trabalhando com diversos movimentos rotacionais, apresentam variação de tensões em seus componentes, principalmente no eixo, conforme apresentado na Figura 15.

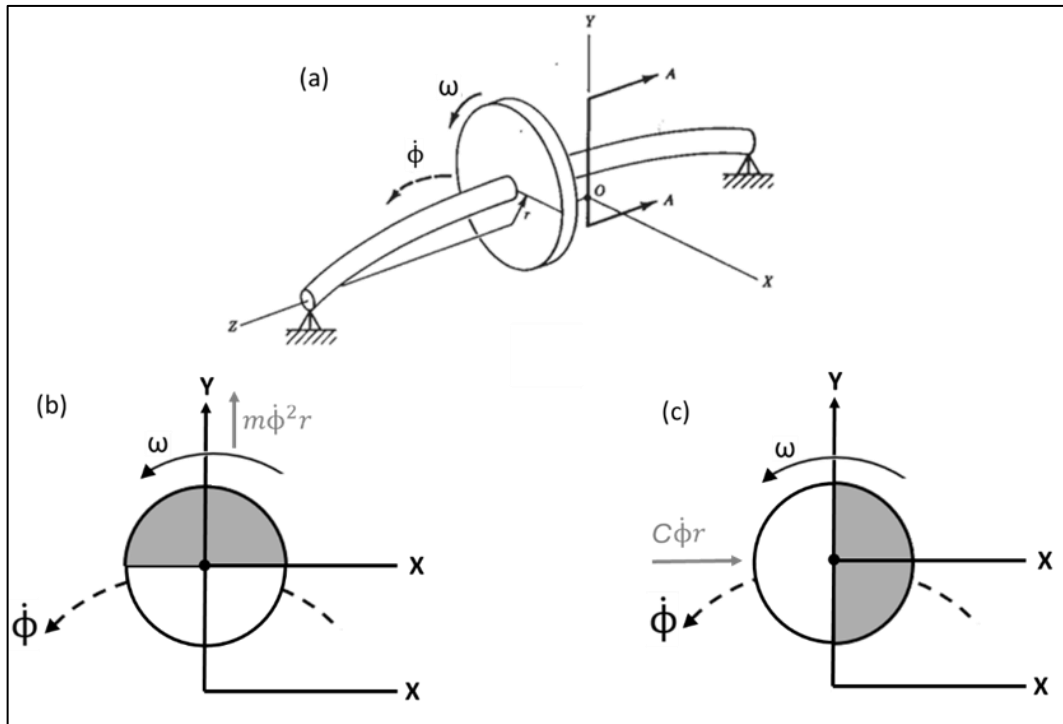


Figura 15 - Tensões no eixo do rotor em diferentes momentos de flexão (Vance, 1998).

A Figura 15a apresenta de forma esquemática uma configuração do movimento lateral do eixo do rotor, onde estão mostrados a velocidade de rotação  $\omega$  e a velocidade de precessão  $\dot{\phi}$ . A flexão do eixo cria uma tensão cíclica em torno do eixo, onde em determinados momentos (Figura 15b e Figura 15c) a máxima tensão ocorre em diferentes regiões. A região onde ocorre a máxima tensão principal no estágio de tração e mínima tensão principal no estágio de compressão é a região onde ocorre a nucleação da trinca por fadiga.

#### 2.4.2 Abertura de trinca

A propagação de trincas por fadiga é um fenômeno crítico que ocorre em materiais sujeitos a ciclos repetidos de carga e descarga. Esse processo desempenha um papel significativo na falha mecânico-estrutural de componentes mecânicos e estruturais, sendo crucial compreender as diferentes fases que caracterizam a propagação de trincas nesse contexto. Segundo Lee (2005), a falha por fadiga apresenta três fases de propagação. São elas:

- Fase I - Nucleação da Trinca:

Nessa fase, ocorrem concentrações de tensão devido ao carregamento em locais onde o sistema apresenta variações microestruturais, ocasionado por diversos fatores, como por exemplo, acabamento superficial.

- Fase II:

Após a Fase I, o sistema ao sofrer a ação da carga cíclica, apresenta o comportamento conhecido como *persistent slip band* ou banda de deslizamento persistente. Nessa fase, a ação da carga cíclica combinada com os concentradores de tensão vai realizar o movimento microestrutural dos grãos do material de acordo com seus planos de deslizamento.

Essa fase se subdivide em dois estágios. O Estágio I é responsável pelo pequeno crescimento estável da trinca e, o Estágio II, é responsável pelo maior crescimento estável da trinca. Ressalta-se que quanto maior o avanço da trinca, ela tende a se propagar intensamente devido à diminuição da tenacidade à fratura.

- Fase III: Fratura Final

Nessa etapa, acontece a falha e o colapso da região, onde não há mais a necessidade de uma carga atuar para o crescimento de trinca continuar ocorrendo. Define-se essa etapa como região instável de crescimento de trinca.

Lee (2005) apresenta o processo de nucleação de trinca por fadiga e os Estágios I e II na Figura 16. Ele destaca o processo de movimentos das bandas de deslizamento (PSB) evidenciando os estágios e a direção de propagação da trinca.

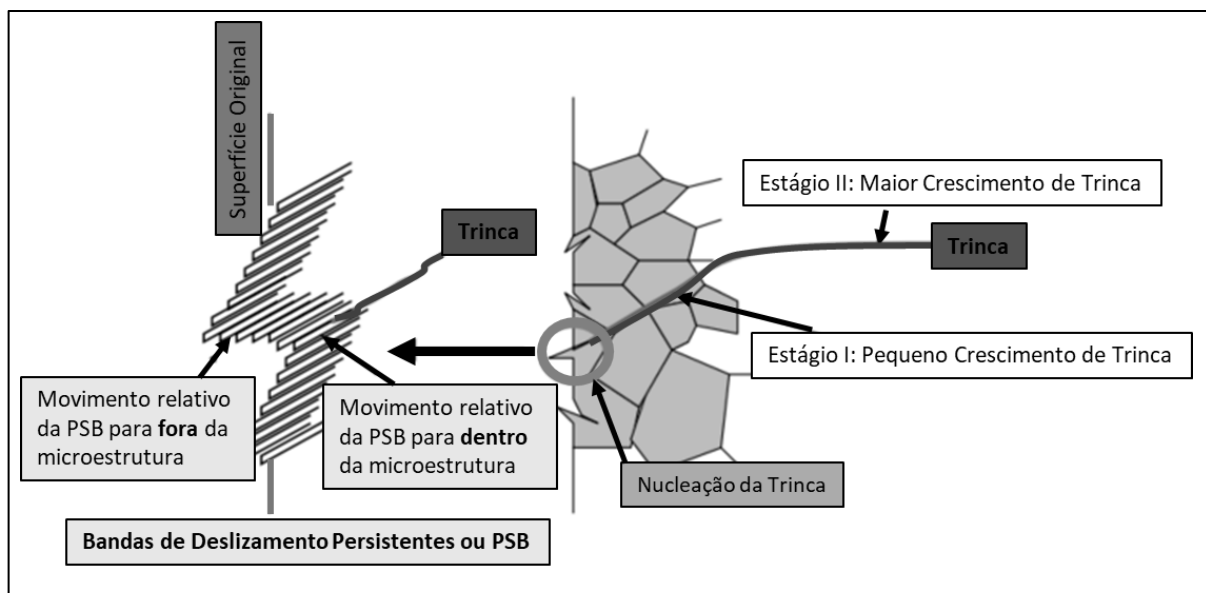


Figura 16 - Fase I e II das trincas por fadiga (Lee, 2005 - Adaptada).

Na Figura 17 é apresentado o fluxograma que descreve a formação de uma trinca por fadiga, juntamente com algumas características das fases e estágios desse processo. Além disso,

o fluxograma destaca os diferentes estágios da formação da trinca, começando com a nucleação da trinca em uma região propensa a concentração de tensão, seguida pela propagação gradual da trinca durante ciclos repetidos de carga e, finalmente, culminando na falha catastrófica do material.

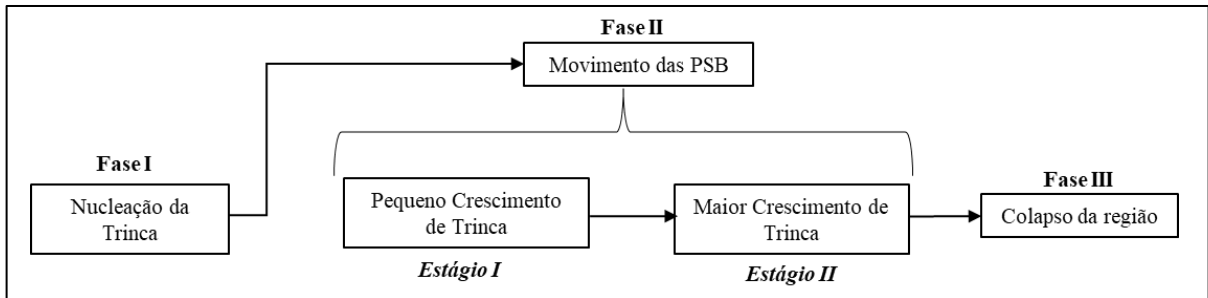


Figura 17 - Fluxograma de propagação de trinca por fadiga.

#### 2.4.3 Modos de abertura de uma trinca

Dowling (2013) expõe três conceitos distintos relacionados à abertura de trincas por fadiga. Esses conceitos categorizam o tipo de modo de abertura de uma trinca com base na direção da carga aplicada, sendo o Modo I o mais frequentemente empregado, conforme destacado na Figura 18.

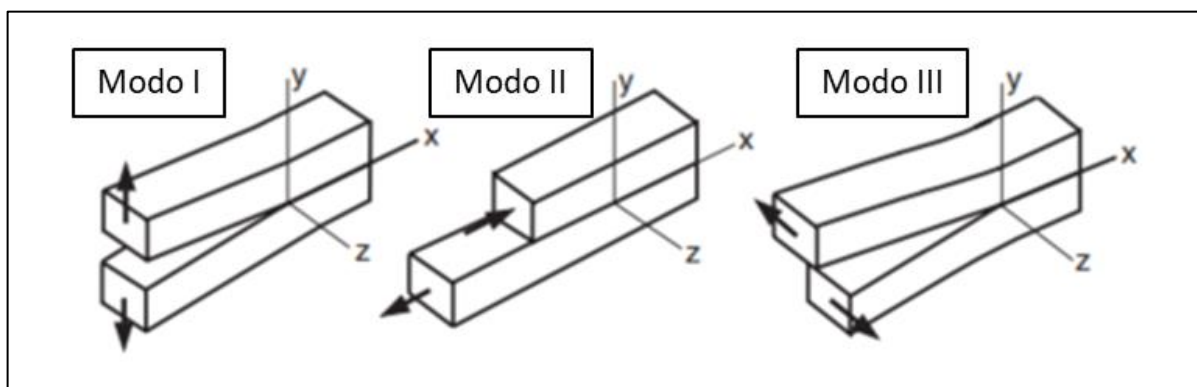


Figura 18 - Modos de abertura de trinca (Dowling, 2013).

Dowling (2013) destaca que a direção do carregamento exerce influência significativa no modo de abertura de uma trinca. No Modo I, também conhecido como Modo de Abertura, a trinca se abre pelo afastamento das superfícies opostas. Já o Modo II, denominado Modo Deslizante ou Cisalhamento Dianteiro, ocorre devido ao deslizamento das faces da trinca. Por fim, o último modo (Modo III ou Modo de Cisalhamento Transversal) envolve o deslizamento relativo lateral das superfícies. Essa distinção entre os modos de abertura é essencial para

compreender a mecânica da fadiga e sua influência na integridade mecânico-estrutural de componentes sujeitos a carregamentos cíclicos.

#### 2.4.4 Fatores influenciadores da abertura de uma trinca

Conceitos fundamentais relacionados à tenacidade de abertura de trinca são elucidados a seguir. Na primeira parte, é apresentado o conceito de taxa de liberação de energia associada à abertura de trinca. Em seguida, aborda-se o conceito do fator intensificador de tensão, que está relacionado com a alteração de tensões na região da trinca devido à descontinuidade geométrica. Por fim, são apresentadas equações que relacionam a tensão na ponta da trinca com o tipo de carregamento aplicado.

##### 2.4.4.1 Taxa de liberação de energia ( $G$ )

A análise de Dowling (2013) sugere que para trincas mais comuns, no Modo I, o comportamento dessas trincas é predominantemente caracterizado como linear elástico. Isso implica que, quando submetidas a pequenas deformações, as trincas no Modo I tendem a responder de maneira elástica, exibindo uma relação linear entre tensão e deformação reversível. Essa trinca, de tamanho  $a$ , apresenta uma energia de deformação associada à deformação do material, onde, pela Lei de Hooke, é representada como uma força em função do deslocamento.

Conforme Dowling (2013), quando ocorre o avanço na propagação da trinca de  $a$  para  $a + da$ , a rigidez da região tende a diminuir. Como resultado, a energia potencial  $U$  associada ao deslocamento da trinca também diminui ( $U - dU$ ). Essa mudança na energia potencial ( $U - dU$ ) é referida como Taxa de Liberação de Energia ( $G$ ). Outra definição dada por Dowling (2013) para  $G$  é que a Taxa de Liberação de Energia representa a energia por unidade de área de trinca necessária para estender a trinca. Na Figura 19 são apresentadas as curvas de carga pelo deslocamento antes e depois da trinca, que são a base para a obtenção da expressão para a taxa de liberação de energia.

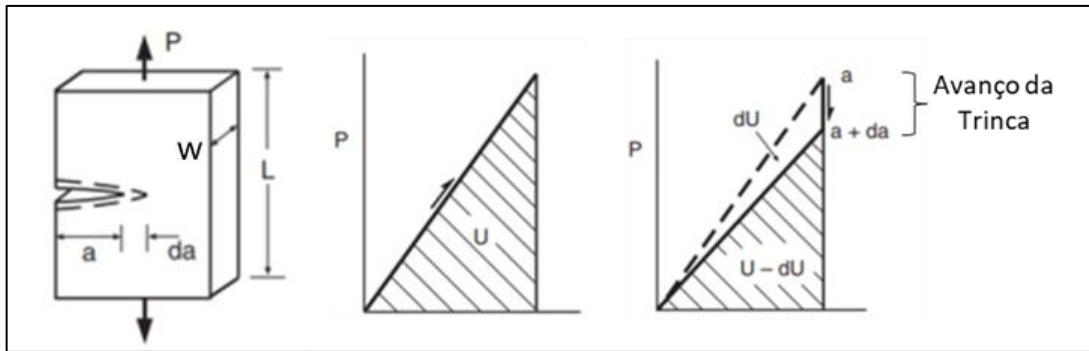


Figura 19 - Taxa de liberação de energia ( $G$ ) (Dowling, 2013 - Adaptada).

Onde:

- $U$  é a energia potencial elástica associada ao material;
- $P$  é a carga aplicada para abertura da trinca;
- $L$  é o comprimento do corpo de prova;
- $w$  é a largura do corpo de prova;
- $a$  é o comprimento atual da trinca;
- $da$  é o diferencial de avanço de trinca;
- $\Delta L$  é a variação da altura do corpo de prova;
- $t$  é o instante em que a abertura de trinca ocorre.

Portanto a equação que representa a taxa de liberação de energia é dada pela Equação 28. Esta equação relaciona o momento de abertura de trinca com a relação do avanço e a energia potencial elástica.

$$G = -\frac{1}{t} \cdot \frac{dU}{da} \quad (28)$$

#### 2.4.4.2 Fator intensificador de tensão ( $K_f$ )

O Fator Intensificador de Tensão ( $K_f$ ), como definido por Dowling (2013), quantifica a capacidade de abertura da trinca, levando em consideração parâmetros geométricos e o tamanho da trinca. Este fator é responsável por alterar, matematicamente, os valores de tensões na região de acordo com a forma da geometria, devido a presença de descontinuidades geométricas. Na Equação 29, é apresentada a expressão para cálculo do concentrador de tensão de uma trinca.

$$K_f = f \cdot S_g \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \quad (29)$$

Onde:

- $K_f$  é o fator intensificador de tensão para o modo de abertura da trinca;
- $f = \text{função}(\text{geometria}, \frac{2c}{a})$  é um fator multiplicador que é obtido em função da geometria e relação de trinca;
- $S_g$  é o carregamento atuante para abertura da trinca;

Visto que este fator depende diretamente das características geométricas da região onde ocorre a trinca e da geometria da trinca, torna-se necessário apresentar alguns tipos de trincas em função da geometria, conforme apresentado nos tópicos a seguir.

#### 2.4.4.3 Trinca superficial em uma seção circular

Conforme apresentado por Zhang *et al.* (2022), Roy *et al.* (2020), Gasch (2007) e Milovanovic *et al.* (2022), é comum que as trincas em eixos de sistemas rotativos apresentem nucleação na superfície do eixo. Assim, para elucidar alguns conceitos fundamentais neste trabalho, conforme apresentado por Dowling (2013), são exploradas trincas em barras com seções circulares submetidas a três tipos de carregamentos distintos: torção ( $T$ ), flexão ( $M$ ) e carregamento axial ( $A$ ), conforme apresentado na Figura 20.

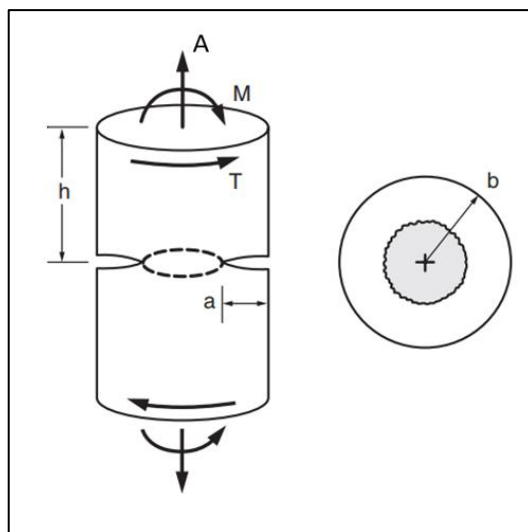


Figura 20 - Trincas em barra circular (Dowling, 2013).

Dowling (2013) evidencia que os parâmetros geométricos para uma trinca superficial em seção circular são funções de relações das trincas na geometria e também são influenciadas pelos tipos de carregamentos, onde estes parâmetros são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros de uma trinca superficial submetida a diversos tipos de carregamentos (Dowling, 2013).

Tipo de Carregamento	$f$	$S_g$	Relação de Trinca ( $2c/a$ )
Axial	1,12	$\frac{A}{\pi \cdot b^2}$	$\leq 21\%$
Momento Fletor	1,12	$\frac{4 \cdot M}{\pi \cdot b^3}$	$\leq 12\%$
Torção	1,00	$\frac{2 \cdot T}{\pi \cdot b^3}$	$\leq 9\%$

#### 2.4.5 Lei de Paris para crescimento de trinca

Dowling (2013) define que o crescimento de trinca por fadiga está associado ao tamanho da trinca, carga aplicada e o número de ciclos, onde a etapa de propagação pode ser subdividida na etapa de nucleação da trinca, propagação estável e propagação instável. Karimi, Nejati e Ahmadi (2023) apresentam o conceito da Lei de Paris em seu estudo, descrevendo as três etapas do processo de propagação da trinca por fadiga na Figura 21.

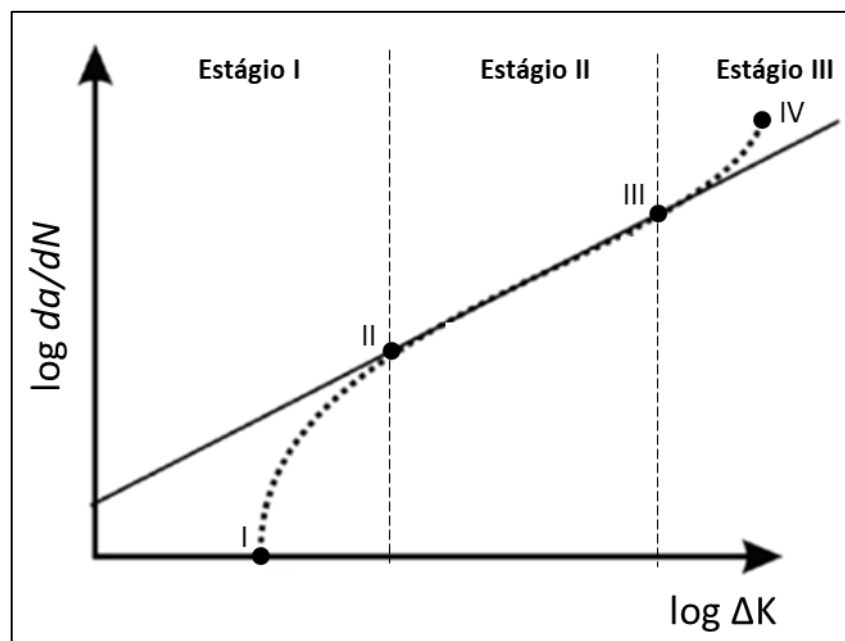


Figura 21 - Lei de Paris (Karimi, Nejati e Ahmadi, 2023 - Adaptada).

O Estágio I, entre os pontos I e II, é o estágio de nucleação da trinca, ocorrendo quando o componente mecânico está sujeito a cargas cíclicas, conforme explicado nos itens anteriores. O Estágio II, entre os pontos II e III, representa a propagação estável da trinca, na qual o aumento da trinca ocorre somente quando uma carga maior que a tenacidade à fratura ( $G$ ) é aplicada. Por fim, o Estágio III que está entre os pontos III e IV, é caracterizado pela propagação contínua da trinca, mesmo após a retirada da carga, até que ocorra a falha da estrutura (ponto IV).

### 3 METODOLOGIA

Este capítulo descreve os procedimentos analítico-computacionais utilizados no desenvolvimento do estudo do comportamento dinâmico de eixos trincados de um rotor em balanço. A metodologia do procedimento analítico-computacional permite realizar análises lineares elásticas de tensões, resolver o problema de autovalores associado ao problema selecionado de turbomáquinas e estudar o comportamento da trinca no eixo de um motor *turbofan* para aplicação aeronáutica.

Os procedimentos são divididos em algumas etapas, sendo a primeira associada à modelagem geométrica do motor aeronáutico estudado, descrevendo os seus componentes mecânicos. O modelo rotor-mancal com uma seção biapojada e outra em balanço é apresentado na Figura 22, em que a rigidez dos mancais é representada pela letra  $K$  com as direções de rigidez indicadas pelos subscritos  $z$  e  $y$ .

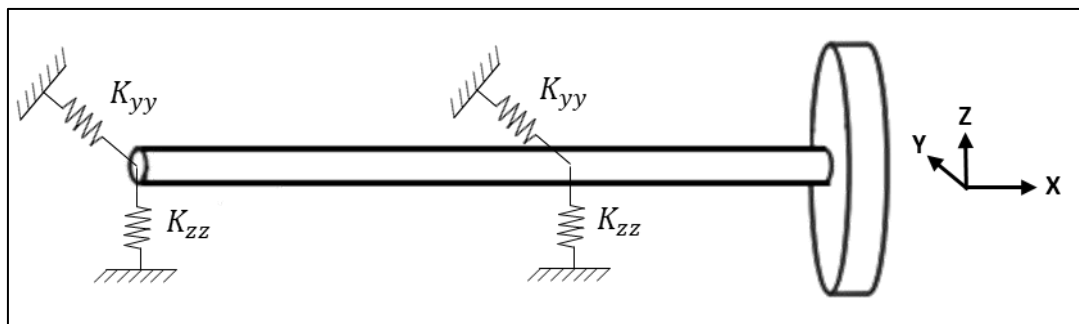


Figura 22 - Sistema rotor-mancal em balanço.

Em seguida, é apresentado o desenvolvimento do modelo de elementos finitos do rotor do motor *turbofan*. Essa etapa consiste em implementar o modelo em elementos finitos do motor *turbofan*, onde são feitas considerações necessárias para avaliar a resposta dinâmica do sistema, utilizando-se um pacote computacional de análise de engenharia por elementos finitos.

O terceiro passo é dividido em duas subetapas. A primeira subetapa consiste na análise de sensibilidade da malha implementada, baseada em procedimento para análise da convergência da resposta dinâmica em diferentes tamanhos de malha para o rotor. A segunda subetapa baseia-se em validar a resposta do modelo em elementos finitos adotado pelo método comparativo de resultados deste trabalho com resultados presente no trabalho de Hozic (2009).

Na quarta etapa, será desenvolvido um procedimento para elaborar o mapa de propagação de trincas por fadiga, dividindo-se em duas subetapas. A primeira subetapa consiste na metodologia para determinar o local de nucleação da trinca por fadiga no rotor em balanço.

A próxima subetapa descreve o processo adotado para implementar o mapa de propagação de trincas no eixo do rotor.

A última etapa é responsável por descrever o procedimento para avaliar as respostas dinâmicas do motor *turbofan* com eixo íntegro e trincado, definindo posições de trincas a serem analisadas e quais parâmetros dinâmicos serão analisados. Na Figura 23 é apresentado o fluxograma das etapas previamente citadas.

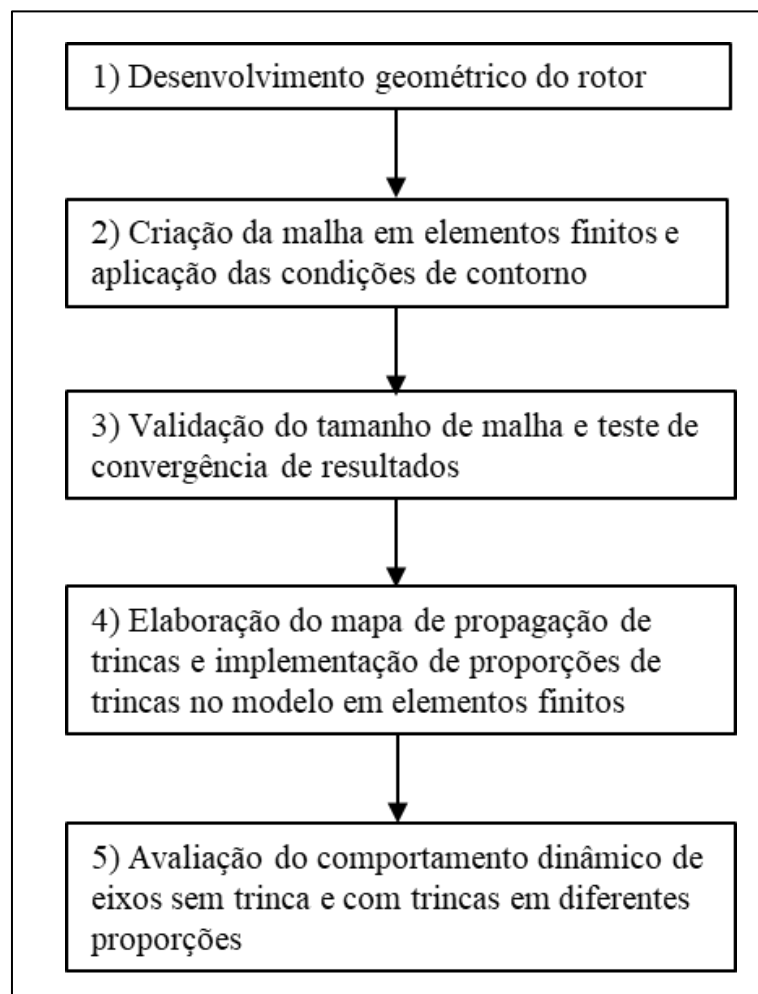


Figura 23 - Fluxograma da metodologia.

### 3.1 Modelagem geométrica do rotor *turbofan*

Para o objeto de estudo deste trabalho, foi escolhido um rotor flexível em balanço suportado por mancais flexíveis, o mesmo objeto de estudo abordado por Hozic (2009), identificado em seu trabalho como motor *turbofan* NSA 2-HPT. Ao longo de sua pesquisa, Hozic (2009) explora vários tipos de motores *turbofan*, fornecendo dados cruciais sobre este

rotor e analisa a sua resposta dinâmica quando sujeito à perda de uma das paletas do *fan*, disponibilizando dados geométricos conforme apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 - Propriedades do motor *turbofan* NSA 2-HPT (Hozic, 2009).

Siglas	Descrição	Valor	Unidade
$K_{yy}$	Rigidez dos Mancais na direção <i>Y</i> e <i>Z</i>	$1,1 \times 10^8$	N/m
$K_{zz}$			
$L_1$	Distância entre Mancais	1,81	m
$L_2$	Distância do <i>fan</i> ao mancal dianteiro	0,47	
$L_T$	Comprimento total do eixo do rotor	2,28	
$\phi_A$	Diâmetro externo do eixo 1 do rotor	0,09	
$\phi_B$	Diâmetro externo do eixo 2 do rotor	0,11	
$\phi_{fan}$	Diâmetro do <i>fan</i>	1,35	
$m_{pá}$	Massa de uma paleta do <i>fan</i>	5,78	
$\rho_A$	Massa específica do eixo do rotor – Região A	$8 \times 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
$E_1$	Módulo de Young do Eixo - Região A	$1,85 \times 10^{11}$	Pa
$\rho_B$	Massa específica do eixo do rotor – Região B	$8 \times 10^3$	kg/m <sup>3</sup>
$E_2$	Módulo de Young do Eixo 2 (Região B)	$1,2 \times 10^{11}$	Pa
$\omega_{rot}$	Velocidade de operação do rotor	449	rad/s
$n$	Número de paletas do <i>fan</i>	18	-
$L_{fan}$	Largura de uma paleta do <i>fan</i>	0,05	m
$C_{fan}$	Comprimento de uma paleta do <i>fan</i>	0,62	
$t_{fan}$	Espessura de uma paleta do <i>fan</i>	0,03	

Na Figura 24 é apresentado o desenho esquemático do rotor conforme descrito na Tabela 2. Além disso, são destacados os locais dos mancais e a localização dos *fans* no sistema. Essa representação visual oferece uma visão clara da disposição dos componentes e das dimensões do sistema em questão, facilitando a compreensão de sua composição e funcionamento.

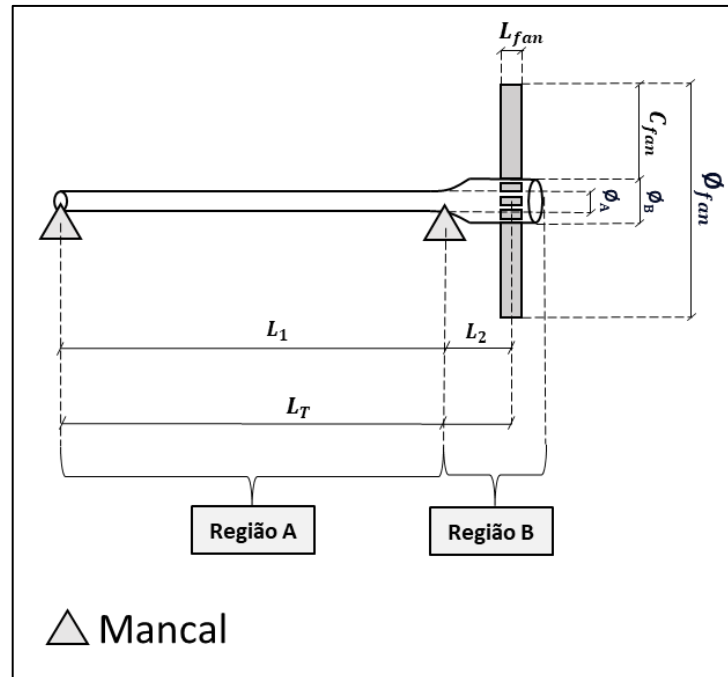


Figura 24 - Dimensões do rotor NSA 2-HPT (Hozic, 2009).

A região A e B representam as áreas que precedem o estágio de combustão, compostas por estágios responsáveis pela compressão de baixa e alta pressão do motor. É importante ressaltar que, para este estudo, são considerados os discos dos estágios de compressão para avaliar os efeitos giroscópicos. As posições dos discos estão indicadas na Figura 25.

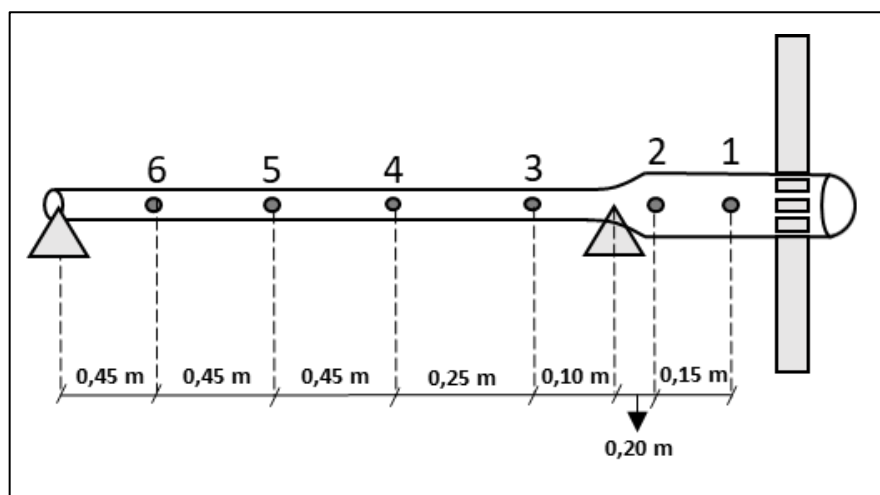


Figura 25 - Posições dos discos do rotor de baixa pressão (Hozic, 2009 - Adaptada).

Na Tabela 3 são apresentadas propriedades geométricas dos discos numerados na Figura 25, de acordo com os dados fornecidos no estudo de Hozic (2009). Por conveniência de modelagem, as espessuras dos discos mostradas na Tabela 3 são selecionadas para que haja

equivalência entre as propriedades desses discos e as propriedades das paletas do rotor do *turbofan*.

Tabela 3 - Propriedades dos discos (Hozic, 2009).

Disco	Massa (kg)	Massa Específica (kg/m <sup>3</sup> )	Espessura do disco (mm)	Diâmetro (mm)
1	17,10	7.830	3,00	280,30
2	1,60		28,70	253,50
3	6,10		33,10	220,60
4	8,30		24,50	220,60
5	7,40		12,70	223,10
6	0,60		75,81	198,00

### 3.2 Desenvolvimento do modelo de elementos finitos

A etapa de elaboração do modelo em elementos finitos consiste em representar os estágios de compressão do rotor *turbofan* com variados parâmetros citados anteriormente. O desenvolvimento do modelo em elementos finitos permite a avaliação da resposta dinâmica do sistema, inserção de proporções de falhas e aplicação das condições de contorno.

Para elaboração do modelo em elementos finitos, são utilizados elementos tetraédricos de 1<sup>a</sup> ordem, pois permitem avaliar a rigidez dos eixos e, elementos quadrangulares, para representação dos discos e *fans* do rotor, conforme descritos na Figura 26.

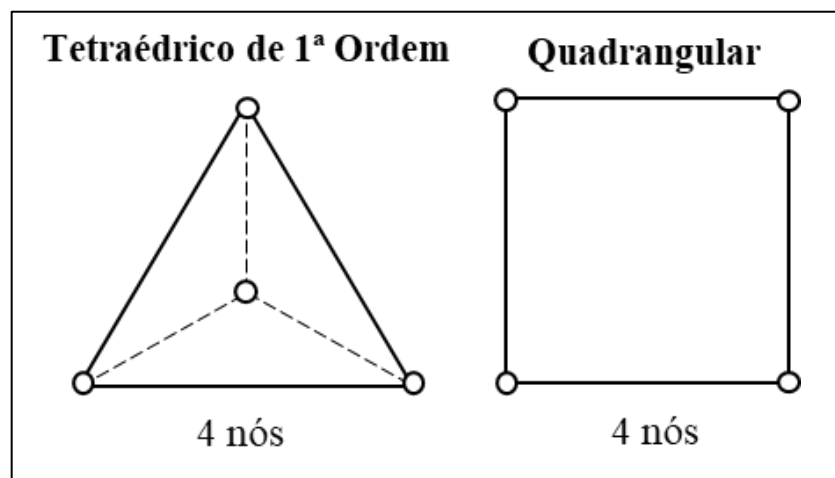


Figura 26 - Tipos de elementos finitos.

Elementos tetraédricos de 1ª ordem oferecem uma boa alternativa para representar a rigidez de perfis sólidos e são frequentemente utilizados em análises que o objeto principal do estudo é a representação da rigidez do sistema, podendo ser combinados com elementos de placa e casca. No pacote computacional utilizado, ABAQUS CAE® (2023), os elementos tetraédricos e os elementos quadrangulares permitem representar os efeitos de cisalhamento e os momentos giroscópicos do conjunto rotativo. A equação geral de movimento de um rotor em balanço é apresentada na Equação 29.

$$[M_{eixo}^e + M_{fans}^e + M_{estágios}^e + N_{eixo}^e + N_{fans}^e + N_{estágios}^e]\{\ddot{U}\} + [\omega(G_{fans}^e + G_{estágios}^e)]\{\dot{U}\} + [K_{eixo}^e + K_{fan}^e + K_{estágios}^e + K_{mancal}^e]\{U\} = \{R\} \quad (29)$$

Onde,  $[M_{eixo}^e]$ ,  $[M_{fans}^e]$  e  $[M_{estágios}^e]$  representam a matriz global de massa dos elementos finitos de cada subsistema do rotor e, quando somadas, representam a matriz global de massa do sistema.  $[N_{eixo}^e]$ ,  $[N_{fans}^e]$  e  $[N_{estágios}^e]$  retratam a matriz global de inércia rotatória do conjunto de elementos finitos de cada subsistema e, quando unificadas, representam a matriz global de inércia rotatória. A matriz global de efeito giroscópio é representada pela soma das matrizes globais de cada subsistema das *fans* e dos discos,  $[G_{fans}^e]$  e  $[G_{estágios}^e]$ , onde sofrem influência da velocidade  $\omega$ . A representação da rigidez do rotor é representada pela soma das matrizes de rigidez de cada subsistema, onde  $[K_{eixo}^e]$  representa a matriz de rigidez do eixo,  $[K_{fan}^e]$  a matriz de rigidez do *fan*,  $[K_{estágios}^e]$  a matriz de rigidez dos discos e  $[K_{mancal}^e]$  a matriz de rigidez dos mancais. Os vetores aceleração, velocidade e deslocamento são representados por  $\{\ddot{U}\}$ ,  $\{\dot{U}\}$  e  $\{U\}$ . O vetor  $\{R\}$  representa a resultante de forças atuantes no sistema.

Na modelagem dos mancais, são utilizados elementos de mola do tipo SPRINGA com rigidez de  $1 \times 10^8$  N/m na direção *Y* e *Z*, conforme apresentado na Tabela 2. Este valor de rigidez para o rotor em estudo demonstra que o sistema rotativo está apoiado em suportes extremamente rígidos. Ressalta-se que os mancais têm restrições de movimento em todos os graus de liberdade, exceto na direção de rotação do eixo (*X*).

Neste trabalho, os autovalores e autovetores do rotor do *turbofan* são estimados para diferentes condições de operação. O problema de autovalor associado à Equação 29 é resolvido pelo pacote computacional selecionado.

Após a geração da malha em elementos finitos e definição das condições de contorno, os modos de vibração ao movimento orbital do rotor selecionado são calculados considerando os efeitos de cisalhamento do eixo e os momentos giroscópicos dos componentes rotativos.

Ressalta-se que esta análise é aplicada tanto para eixos íntegros quanto para eixos com diversas proporções de trincas.

### 3.3 Verificação do modelo de elementos finitos

Esta análise, executada utilizando a solução presente no pacote computacional ABAQUS CAE® (2023), fornece os autovalores representativos dos modos de vibração orbital do rotor com eixo íntegro em 0 rad/s e em uma velocidade de rotação de 191 rad/s, que é um valor de velocidade crítica encontrado no trabalho de Hozic (2009) para o rotor em estudo. Importante notar que, após os testes de sensibilidade de malha e convergência de resultados, o modelo validado serve como referência para correlacionar resultados dos modelos com eixo íntegro e com diversas proporções de falhas.

#### 3.3.1 Teste de sensibilidade de malha

O teste de sensibilidade de malha tem como objetivo avaliar a influência do tamanho dos elementos adotados na resposta do sistema. Nesta análise, são implementados dois modelos de elementos finitos adicionais (BII e BIII), com diferentes tamanhos de elementos em comparação ao modelo padrão do pacote computacional gerado automaticamente (BI). Ao comparar as frequências naturais entre os 3 modelos, é possível avaliar a influência do tamanho de malha na resposta do sistema e avaliar a convergência da resposta. É importante observar que o modelo BII têm elementos com 1/2 do tamanho dos elementos do modelo base, BI. O modelo BIII possui elementos com 1/4 do tamanho do modelo base, conforme apresentado na Tabela 4.

Tabela 4 - Tamanho aproximado de malha para cada modelo.

Modelo	Tamanho médio dos elementos
BI	~ 10 mm
BII	~ 5 mm
BIII	~ 2,5 mm

É importante destacar que a avaliação da sensibilidade de malha é efetuada para o caso de rotor descrito na Tabela 2. A análise de sensibilidade de malha é realizada para avaliar a convergência do procedimento usado para cálculo das frequências naturais.

Essa comparação permite uma avaliação do modelo desenvolvido em relação aos dados fornecidos por Hozic (2009). Vale ressaltar que, após essa etapa, o modelo a ser utilizado nas análises é renomeado para MI com a finalidade de facilitar a compreensão das comparações a serem realizadas.

### 3.4 Elaboração do mapa de propagação de trincas

A etapa a ser descrita consiste em obter a relação do crescimento da trinca no eixo do motor *turbofan* para posteriormente definir as proporções de trincas e implementá-las no eixo do rotor. Nesse processo, a posição da trinca é determinada por meio de uma análise estática do rotor na velocidade de operação, utilizando a solução presente no pacote computacional ABAQUS CAE® (2023). Importante ressaltar que, para este caso em específico, o modelo base passa por uma modificação na ordem dos elementos. Devido à necessidade de verificar os níveis de tensão, especialmente a máxima tensão principal, todos os elementos do eixo são convertidos para a 2ª ordem, também conhecidos como elementos parabólicos. Esses elementos, que possuem nós intermediários em sua face, permitem avaliar com precisão campos de tensão e deslocamento. Na Figura 27 é apresentado a modificação a ser implementada.

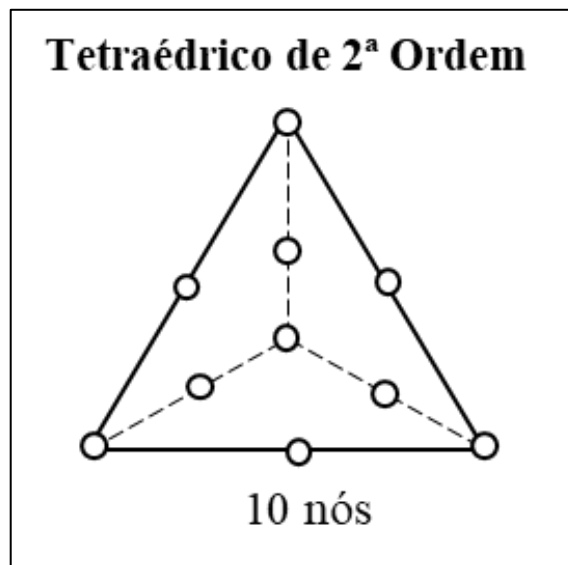


Figura 27 - Elementos de 2ª ordem.

A utilização de elementos finitos de segunda ordem permite uma representação mais precisa das trincas que são inseridas no eixo do rotor.

### 3.4.1 Determinação da máxima tensão principal

Para a obtenção da máxima tensão principal, responsável por determinar o local de nucleação da trinca, é realizada uma análise estática considerando as forças atuantes na velocidade de operação do rotor por meio da aplicação da carga denominada ROTDYNF pelo pacote computacional ABAQUS CAE® (2023). Nesta rotina, as cargas dinâmicas vinculadas à distribuição de massa do sistema rotativo são consideradas cargas estáticas. Segundo Tsai (2019), a carga ROTDYNF tem que ser definida por meio da implementação de uma análise não linear estática para levar em consideração os efeitos das cargas do sistema rotativo.

Este procedimento permite identificar os pontos críticos onde as tensões atingem valores máximos, fornecendo informações essenciais para determinar os locais mais propensos à nucleação de trincas no rotor. Ressalta-se que após a obtenção da região da máxima tensão principal, parte-se da premissa de que a nucleação da trinca tenha ocorrido, ou seja, que há a presença da nucleação da trinca por fadiga, permitindo a continuidade do estudo.

### 3.4.2 Crescimento de trinca

O mapa de propagação de trincas é gerado por meio do *software* NASGRO® (2024), que avalia a vida em fadiga do eixo para 500.000 ciclos, levando em consideração o local de nucleação da falha. A quantidade de ciclos escolhidas é determinada com base na máquina rotativa em estudo. Nessa etapa, são aplicados carregamento arbitrários no eixo do motor *turbofan* para submetê-lo à propagação da trinca.

Após obtido o mapa de propagação de trincas, determinam-se três proporções de trincas para estudos da falha. O modelo sem proporção de trinca, ou seja, com eixo íntegro, é denominado MI nesta etapa. Os modelos com diferentes proporções de trincas são denominados MII, MIII e MIV, onde as proporções de trincas de  $MII < MIII < MIV$ . Ressalta-se que as diferentes proporções de trincas a serem analisadas são implementadas no modelo MI por meio do desacoplamento dos nós da região em que a trinca se propaga, fazendo com que superfícies antes unidas, apresentem um desacoplamento de nós. As proporções de trincas determinadas para análise são representadas na Figura 28 e comentários estão apresentados na Tabela 5.

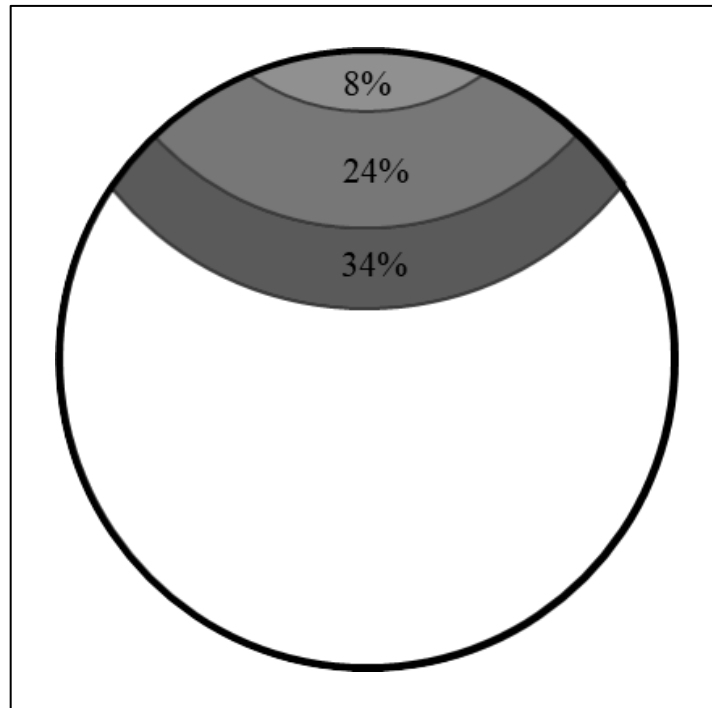


Figura 28 - Proporção da trinca no eixo.

Tabela 5 - Modelos com diferentes proporções de falha.

Modelo	Dimensão da falha na seção transversal do eixo	Comentário
MI	0 %	Eixo íntegro
MII	8 %	Eixo com falha inicial
MIII	24 %	Eixo com falha intermediária
MIV	34 %	Eixo com falha avançada

### 3.5 Avaliação do comportamento dinâmico de eixos

Após a obtenção do mapa de propagação de trincas e a definição das proporções das trincas para estudo, realiza-se uma análise do comportamento dinâmico básico do rotor nos modelos MI, MII, MIII e MIV. Esta análise se inicia com a estimativa das frequências naturais, levando em consideração a influência do efeito giroscópico. Na sequência, apresentam-se os modos de vibração orbital do rotor gerados pelo pacote computacional de elementos finitos. Para melhorar a visualização dos modos de vibração do rotor, um programa para geração de linhas de contorno desses modos é implementado no *software* MATLAB® (2023). Para auxiliar a visualização dos gráficos obtidos pelas linhas de contorno, são estabelecidos pontos no centro do eixo do rotor, conforme apresentado na Figura 29.

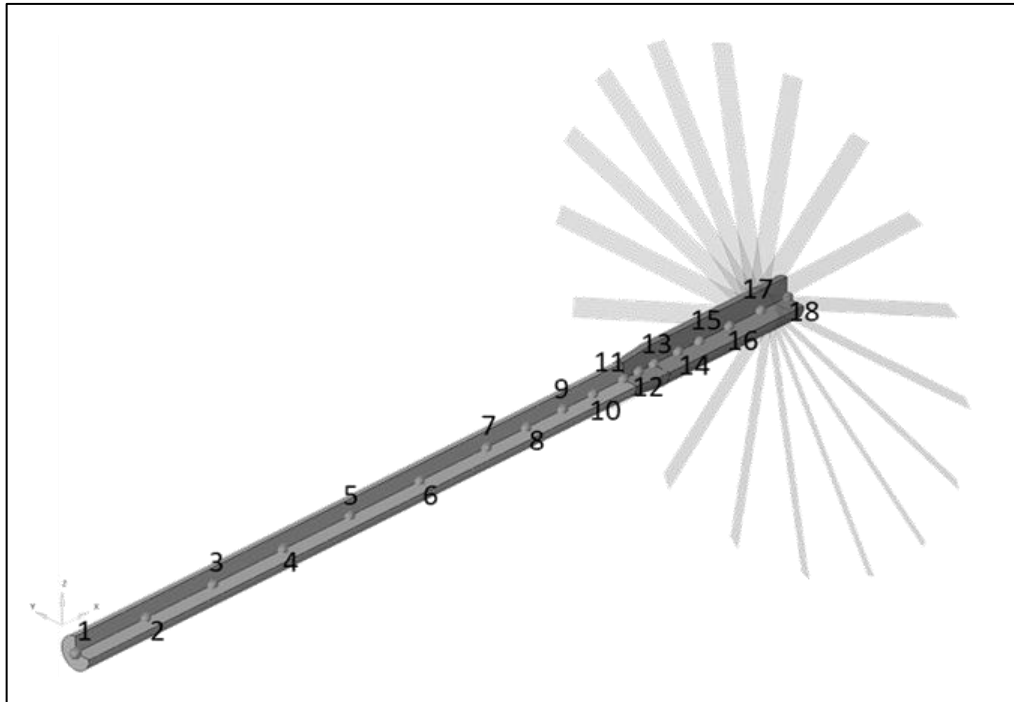


Figura 29 - Pontos de avaliação do modo.

Posteriormente, os resultados das frequências naturais do rotor íntegro e trincado são mostrados graficamente em função da velocidade de rotação. As curvas das frequências naturais associadas aos modos de vibração orbital progressivo e aos modos de vibração regressivos (ou retrógrados) são obtidas para a faixa de velocidade de operação do rotor. Os mapas de frequências naturais, ou diagramas de Campbell, são utilizados para estimar os valores das velocidades críticas de movimento orbital progressivo e movimento orbital regressivo. Para isso, avalia-se o rotor com trincas e sem trincas em diversas velocidades de rotação, apresentadas na Tabela 6.

Tabela 6 - Faixa de operação do rotor.

Velocidade (rad/s)	Comentário
0	Rotor em repouso
100	Velocidades iniciais
191	
200	
300	
400	
449	Velocidade intermediária
500	Velocidades extremas de operação
600	
700	

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, os resultados obtidos na análise linear estática de tensões do eixo e na análise dos problemas de autovalor são apresentados de forma detalhada. A análise engloba uma variedade de aspectos, começando pela descrição da geometria desenvolvida para representar o motor *turbofan* em estudo. Em seguida, são abordadas a validação do tamanho médio de malha adotada no modelo de elementos finitos, realizada por meio da correlação de frequências naturais deste modelo com frequências naturais de modelos com tamanhos de malhas inferiores. Também é feita uma comparação entre a 1ª frequência natural deste trabalho e a apresentada no estudo de Hozic (2009). Posteriormente, é detalhado o mapa de propagação de trincas no eixo do motor *turbofan*, obtido por meio de uma análise implementada em um pacote computacional a partir do local de nucleação de trinca por fadiga. Nessa análise, o local de nucleação da trinca é determinado em uma análise estática considerando os carregamentos na velocidade de 449 rad/s do rotor. Posteriormente, são discutidas as frequências naturais do rotor com e sem trincas em uma faixa de operação de velocidades, auxiliando na construção do mapa de velocidades críticas. Por fim, é apresentada a correlação de resultados, definindo o grau de influência dos resultados apresentados na resposta dinâmica de eixos trincados.

### 4.1 Representação geométrica do motor *turbofan* NSA 2-HPT

Na Figura 30 é ilustrada a geometria do rotor analisado por Hozic (2009), conforme detalhada na Tabela 2. Esta representação oferece uma visão clara dos discos do rotor, bem como a disposição das paletas do *fan*.

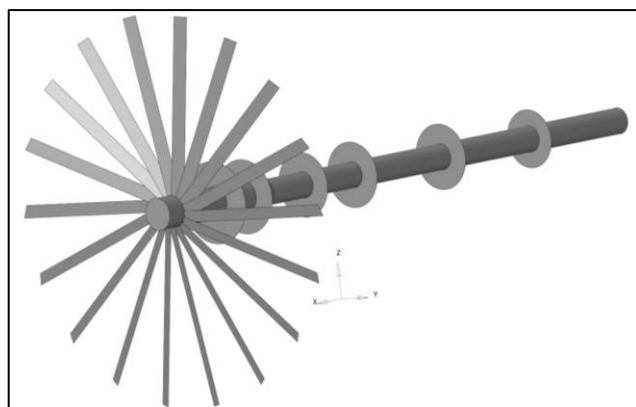


Figura 30 - Geometria do motor NSA 2-HPT.

A geometria a ser utilizada neste trabalho inclui discos adicionais relacionados aos estágios de compressão do *turbofan*, aumentando a fidelidade de geometria do sistema rotativo.

#### 4.2 Modelo de elementos finitos

Com base no rotor de Hozic (2009), apresentado na Figura 30, desenvolve-se um modelo discreto utilizando o método dos elementos finitos, conforme apresentado na Figura 31. Este modelo inclui as condições de contorno específicas e os tipos de elementos utilizados para modelar o eixo, o *fan* e os discos, fornecendo uma visualização abrangente das características constitutivas do sistema.

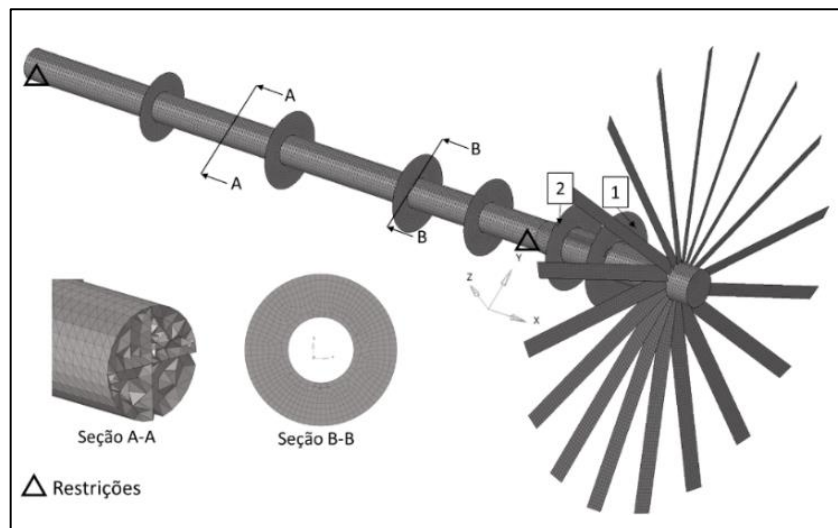


Figura 31 - Detalhes do modelo de elementos finitos.

Na Figura 31 pode-se observar que a representação do eixo é feita por elementos tetraédricos e a representação do *fan* e discos são feitas por meio de elementos quadrangulares. Na Tabela 7 são apresentados os dados do motor em elementos finitos.

Tabela 7 - Dados do modelo de elementos finitos.

Região	Tipos de Elementos Empregado	Números de Elementos	Número Total de Elementos	Número Total de Nós
Eixo	Tetraédrico	159832	168.385	39.339
<i>Fan</i>	Quadrangular	5634		
Discos	Quadrangular	2915		
Mancal	Mola	4		

### 4.3 Avaliação do modelo de elementos finitos

Nesta etapa, os resultados dos diferentes modelos de elementos finitos (BI, BII e BIII) com variados tamanhos de malha são descritos em detalhes. São fornecidas as frequências naturais do rotor para cada modelo e são apresentados os resultados relativos entre as frequências naturais desses modelos, permitindo uma análise comparativa e a avaliação do tamanho médio de malha adotado na resposta do sistema.

#### 4.3.1 Resultados do teste de sensibilidade de malha

Na Tabela 8 são apresentados os valores de frequências naturais encontrados para o rotor em estudo com as malhas em diferentes tamanhos de elementos finitos. O tamanho médio dos elementos finitos na malha BI é 10 mm, na malha BII é 5 mm e na malha BIII é 2,5 mm.

Tabela 8 - Frequências naturais do rotor com três tamanhos de malha em 0 rad//s.

Frequência Natural	BI	BII	BIII	$\Delta_{BI-BII}$	$\Delta_{BI-BIII}$	Movimento
$\omega_1$ (Hz)	-27,47	-27,45	-27,44	+0,07 %	+0,11 %	MOR
$\omega_2$ (Hz)	+27,49	+27,48	+27,48	-0,04 %	-0,04 %	MOP
$\omega_3$ (Hz)	-113,22	-113,21	-113,22	+0,01 %	+0,01 %	MOR
$\omega_4$ (Hz)	+113,23	+113,20	+113,21	-0,03 %	-0,02 %	MOP
$\omega_5$ (Hz)	-116,98	-116,95	-116,95	+0,03 %	+0,03 %	MOR
$\omega_6$ (Hz)	+117,04	+117,01	+117,02	-0,03 %	-0,02 %	MOP
$\omega_7$ (Hz)	-303,35	-303,33	-303,33	+0,01 %	+0,01 %	MOR
$\omega_8$ (Hz)	+303,62	+303,64	+303,65	-0,01 %	-0,01 %	MOP

Observa-se que o tamanho de malha escolhido para o modelo BI gera resultados muito próximos aos valores obtidos com malhas de menor tamanho (BII e BIII). A maior variação percentual, em módulo, é inferior à 0,2%. Essa concordância ressalta que os modelos analisados permitem boa precisão na determinação dos modos de vibração do sistema. Neste trabalho, utiliza-se o modelo BI para garantir a melhor acurácia dentre os modelos estudados, visto que essa malha representa uma boa convergência de resultados e necessita de um menor tempo computacional.

Outro aspecto relevante é que, na velocidade de operação do rotor de 191 rad/s, a primeira frequência natural do movimento orbital progressivo,  $\omega_2$ , que equivale a 30,28 Hz, demonstra uma variação percentual de 0,5% em relação à 1ª frequência natural obtida por Hozic (2009), de 30,45 Hz, evidenciando a convergência dos resultados. Essa correlação, com uma

discreta variação percentual, destaca a boa concordância dos resultados obtidos com o modelo desenvolvido com os dados disponíveis na literatura.

#### 4.4 Mapa de propagação de trincas

Este tópico aborda os resultados referentes à análise de fadiga implementada. Inicialmente, aborda-se a definição do local de nucleação da trinca por fadiga, analisada por meio de uma análise estática de tensões utilizando o pacote computacional ABAQUS CAE® (2023). Em seguida, é apresentada a representação do mapa de propagação de trincas obtido pelo pacote computacional NASGRO® (2024), onde o eixo é submetido à movimentos cíclicos por 500.000 ciclos para propagação de trinca.

##### 4.4.1 Nucleação da trinca

Para localização da região de nucleação da trinca, realiza-se uma análise estática pelo método dos elementos finitos do rotor *turbofan* em estudo, apoiado em mancais extremamente rígidos. Diferentemente do modelo MI, acontece a alteração de ordem dos elementos para representar de forma adequada as tensões no modelo. Checando a máxima tensão principal no modelo, é possível determinar a primeira região de nucleação de trinca, que acontece no eixo da Região B, próxima ao 1º disco, conforme apresentado na Figura 32. Este ponto é fundamental para identificar o local de nucleação da trinca, sendo a base do estudo em questão para obter-se o mapa de propagação de trincas.

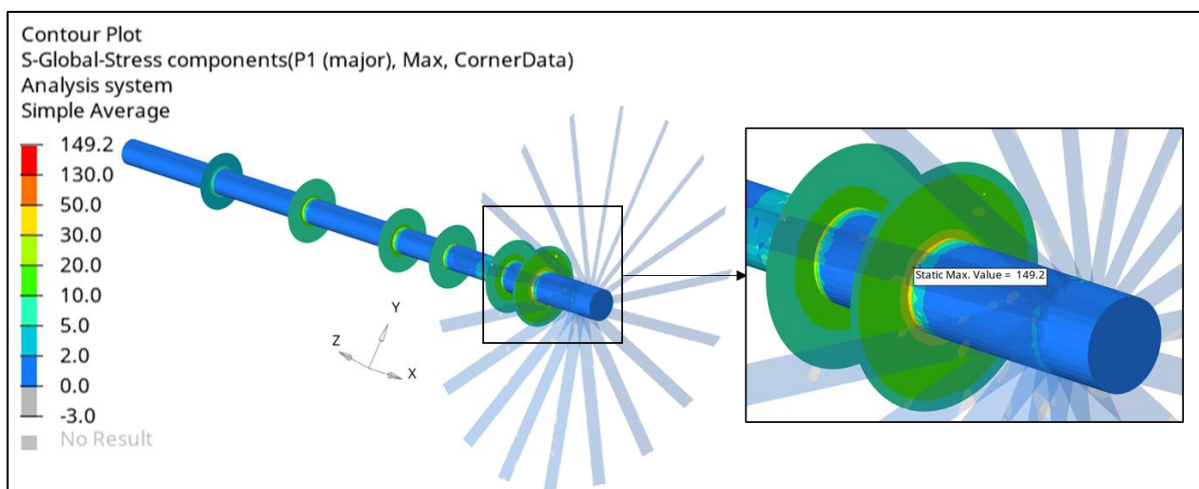


Figura 32 - Região da Máxima Tensão Principal em MPa (Hyper View®, 2024).

É indicado na Figura 32 a região que apresenta a máxima tensão principal no modelo de elementos finitos, que apresenta valor de 149,2 MPa. Essa região está entre o *fan* do rotor e o 1º disco do estágio de compressão e é uma região que apresenta um concentrador de tensão devido à transição geométrica do eixo para o disco. Neste tipo de local é comum a concentração de tensão devido às descontinuidades geométricas da região.

Na Figura 33 são definidos os planos de corte para representação dos estágios de propagação da trinca, onde, nesses planos, são inseridas as trincas no modelo em elementos finitos com as proporções presentes na Tabela 9.

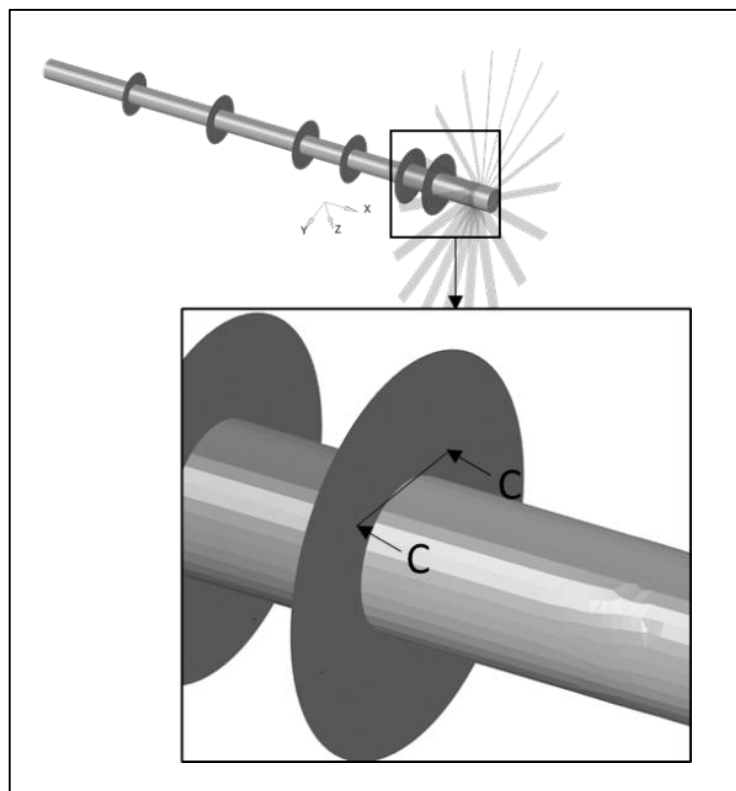


Figura 33 - Seção de Corte C-C.

O plano de corte C-C representa a região de nucleação da trinca. A trinca ocorre perpendicularmente ao eixo do rotor e próximo ao disco do disco 1. Essa região é caracterizada pela região de compressão do fluido de trabalho da máquina, onde o primeiro disco apresenta um diâmetro maior em comparação aos demais, conforme indicado na Tabela 3.

#### 4.4.2 Mapa de propagação de trinca por fadiga

O mapa de propagação de trincas, obtido por meio da inserção da nucleação da trinca do eixo do rotor no *software* NASGRO® (2024), é apresentado na Figura 34. Este mapa

apresenta a proporção de crescimento da trinca por fadiga na região C-C em função do número de ciclos. A curva é separada por regiões para auxiliar na compreensão do estágio de crescimento da trinca por fadiga, até o momento de instabilidade de crescimento e é obtida por meio de um carregamento cíclico no eixo do rotor obtido na velocidade de 449 rad/s, de forma a monitorar o crescimento da trinca, na região pré-determinada.

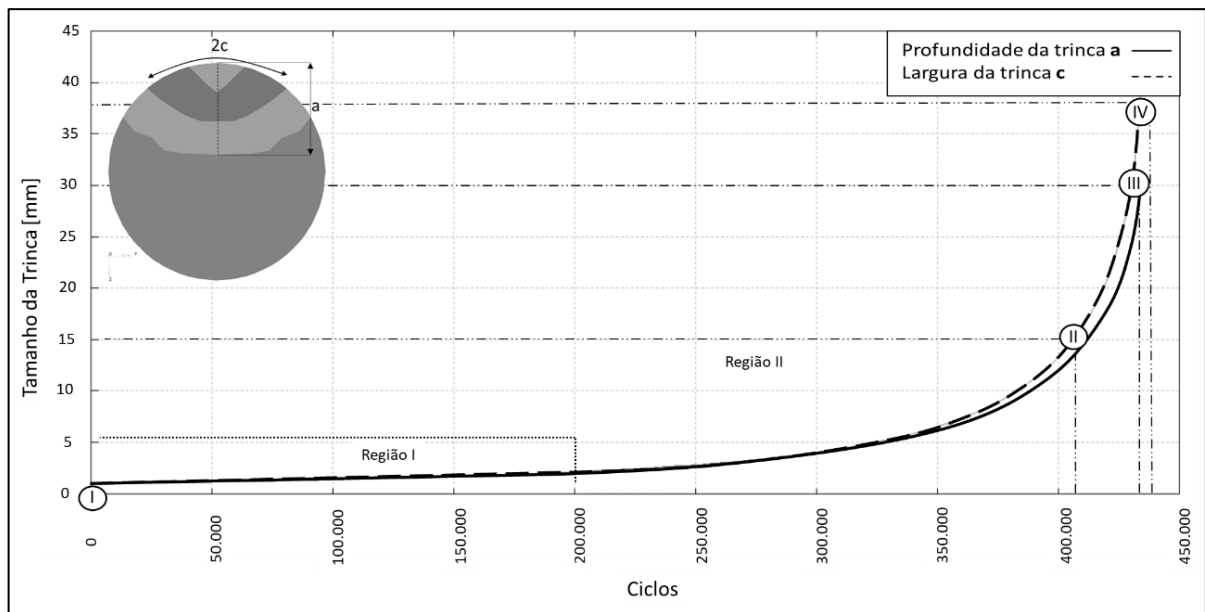


Figura 34 - Curva de crescimento da trinca transversal ( $c$ ) e trinca longitudinal ( $a$ ) x Número de Ciclos (NASGRO®, 2024).

Ao analisar o mapa de propagação de trincas, a Região I, que é delimitada por 200.000 ciclos, apresenta um comportamento linear do crescimento de trinca, onde a trinca  $a$  apresenta valor igual ao crescimento de trinca  $c$ . Na Região II, região após 200.000 ciclos até 400.000 ciclos, as trincas apresentam comportamento diferente de crescimento, de forma exponencial. Após o ponto II, a trinca apresenta um maior aumento no crescimento, tendendo a abertura instável.

Os pontos I, II, III e IV representam o comprimento de trinca a ser utilizado de acordo com os modelos da Tabela 5, onde a sua atualização é apresentada na Tabela 9. Vale ressaltar que os modelos apresentados na Tabela 9 são desenvolvidos de acordo com o item 3.5

Tabela 9 - Modelos a serem desenvolvido de acordo com a proporção de trinca.

Modelo	Largura da trinca (2c) [mm]	Profundidade de Trinca (a) [mm]	Número de Ciclos
MI	0	0	0
MII	30	15	410.000
MII	60	30	430.000
MIV	78	38	440.000

Na Figura 35 é apresentado um desenho esquemático da correlação do crescimento de trincas na face do eixo apresentada na Tabela 9. Cada região representa um modelo a ser analisado, conforme descrita de forma explícita na Figura 36.

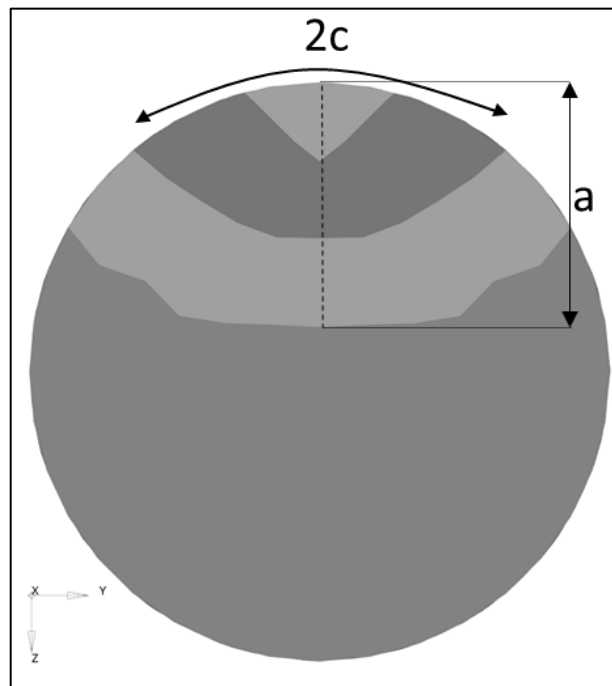


Figura 35 - Propagação de trinca no eixo de acordo com a Tabela 9 (Hyper Mesh®, 2024).

A Figura 36 representa os modelos a serem desenvolvidos na próxima etapa para avaliação dos modos e frequências naturais do sistema, bem como cada estágio de propagação da trinca, conforme especificado na Tabela 9.

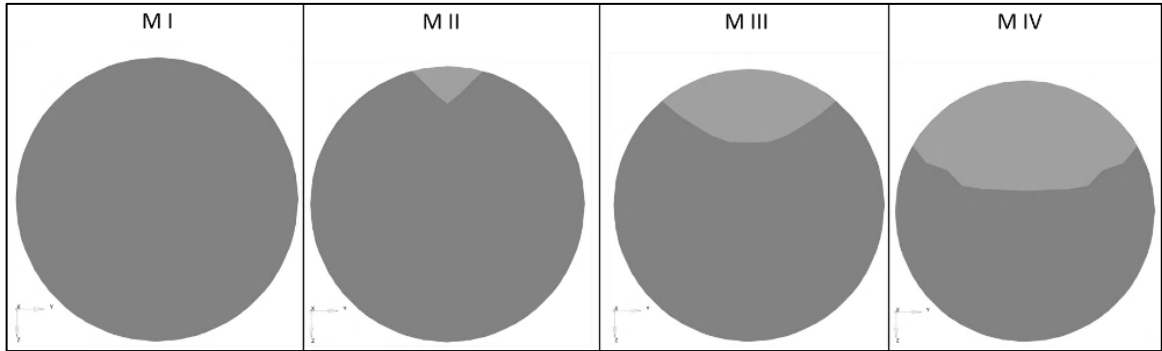


Figura 36 - Corte C-C da Figura 33 com relações de tamanho de trinca (Hyper Mesh®, 2024).

Baseado nos dados da Figura 36 e da Tabela 9, a seguir é apresentada a correlação do crescimento da largura da trinca em relação ao aumento de sua profundidade. Essa correlação auxilia na identificação da proporção de aumento da trinca nas direções transversais e longitudinais.

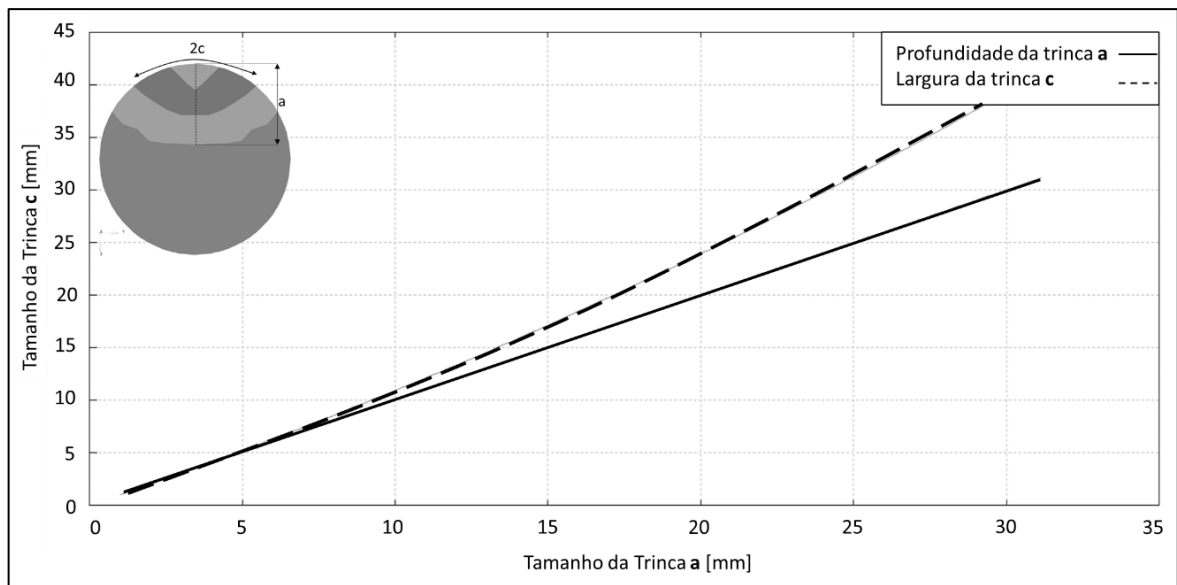


Figura 37 - Correlação do Crescimento de trinca (NASGRO®, 2024).

Observa-se que as direções das trincas exibem um comportamento linear de crescimento. Notadamente, a profundidade da trinca apresenta um avanço significativamente superior quando comparada à sua largura. Com base nos resultados acima é possível obter a curva da proporção da trinca ( $a/c$ ) em função do número de ciclos, mostrado na Figura 38.

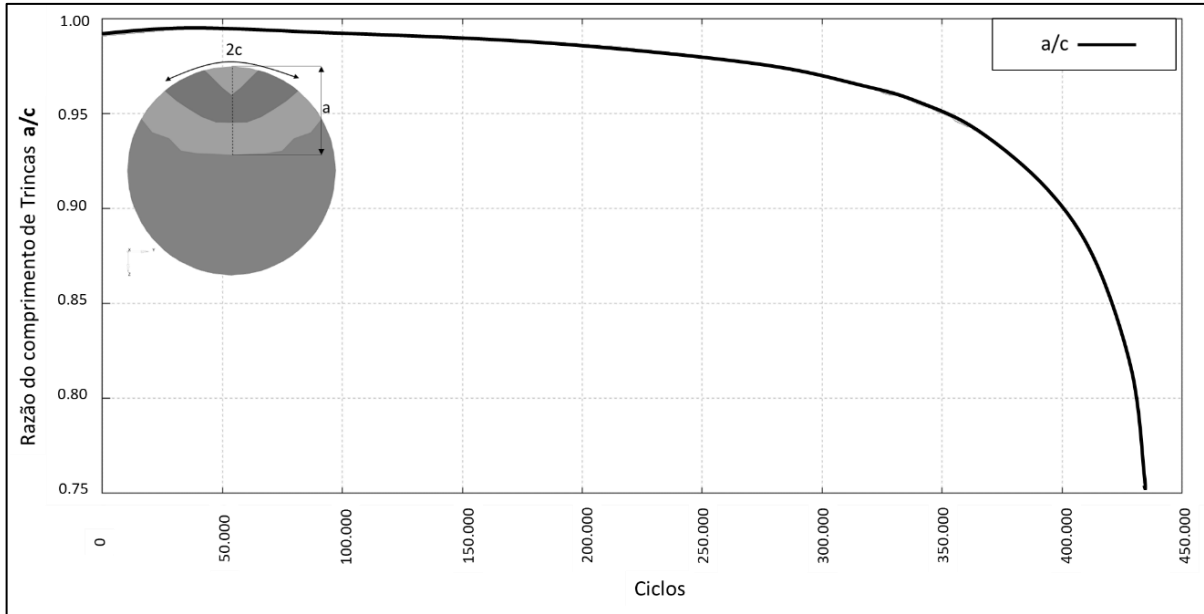


Figura 38 - Correlação do Crescimento de trinca em função do número de ciclos (NASGRO®, 2024).

Avaliando a relação do crescimento de trinca, verifica-se que a razão de crescimento de  $a/c$  se mantém fixa em até 50.000 ciclos. Após os 50.000 ciclos essa razão tende a diminuir e após 300.000 ciclos há um decrescimento logarítmico, onde observa-se que o crescimento de trinca  $c$  começa a ser mais representativo.

#### 4.5 Análise dos modos de vibração

Os modos de vibração para o eixo do rotor com e sem trinca são obtidos para diferentes condições de operação do *turbofan*. Os valores das frequências naturais podem ser utilizados para a construção do diagrama de Campbell e os modos de vibração fornecem uma ideia preliminar das características estacionárias do movimento orbital do eixo.

##### 4.5.1 Análise dos autovalores

A seguir são apresentados os resultados das análises de autovalores dos sistemas com diferentes proporções de trincas e sem trinca. Os autovalores obtidos pelo pacote de elementos finitos representam os valores das frequências naturais do rotor. Por fim, é apresentado um tópico resumindo os resultados e entendimentos das diferentes proporções de trincas na resposta do sistema quando comparado com o rotor com eixo íntegro.

#### 4.5.1.1 Autovalores do rotor com e sem trinca para velocidade de rotação nula

As frequências naturais do rotor, com diferentes proporções de trincas analisadas (MII, MIII e MIV) e sem trincas (MI), estão apresentadas na Tabela 10. Nestes casos, não há associação dos modos com o tipo de movimento, pois o rotor encontra-se em repouso.

Ressalta-se que o MI fornece os valores de referência para os cálculos percentuais, pois representa o rotor sem a presença de trincas em seu eixo. Os autovalores do rotor com velocidade de rotação nula são fundamentais para auxiliar na construção do mapa de velocidades críticas.

Na Tabela 10 são apresentados os autovalores referentes ao motor *turbofan* em análise. São apresentadas as frequências naturais do rotor sem trincas (MI) e com diferentes proporções de trincas (MII, MIII e MIV), em repouso.

Tabela 10 - Frequências naturais para modelos do rotor com trinca e sem trinca, em repouso.

0 rad/s							
	MI	MII	$\Delta_{\text{MI-MII}}$	MIII	$\Delta_{\text{MI-MIII}}$	MIV	$\Delta_{\text{MI-MIV}}$
$\omega_1$ (Hz)	-27,47	-27,39	0,29%	-26,82	2,37%	-25,43	7,43%
$\omega_2$ (Hz)	+27,49	+27,47	-0,07%	+27,42	-0,25%	+27,18	-1,13%
$\omega_3$ (Hz)	-113,22	-113,22	0,00%	-113,22	0,00%	-113,22	0,00%
$\omega_4$ (Hz)	+113,23	+113,23	0,00%	+113,23	0,00%	+113,23	0,00%
$\omega_5$ (Hz)	-116,98	-116,33	0,56%	-112,58	3,76%	-104,66	10,53%
$\omega_6$ (Hz)	+117,04	+116,98	-0,05%	+116,39	-0,56%	+114,37	-2,28%
$\omega_7$ (Hz)	-311,36	-311,36	0,00%	-311,36	0,00%	-311,36	0,00%
$\omega_8$ (Hz)	+311,40	+311,40	0,00%	+311,40	0,00%	+311,40	0,00%

As frequências naturais associadas aos modos  $\omega_1$ ,  $\omega_5$  e  $\omega_6$  apresentam maior variação percentual final ( $> 2\%$  em módulo), presentes no MIV. É notável que as variações percentuais expressivas dessas frequências começam a ocorrer a partir do MIII, devido a uma maior proporção de trinca em comparação ao MII, que possui a menor relação de trinca e suas variações percentuais são pequenas ( $< 0,6\%$  em módulo). O modo com menor variação percentual da frequência natural ( $< 2\%$  em módulo),  $\omega_2$ , não sofre tanto a influência do tamanho da trinca em repouso, possuindo pequena alteração no valor de frequência. Os modos associados às frequências  $\omega_3$ ,  $\omega_4$ ,  $\omega_7$  e  $\omega_8$  não apresentam variação nos valores dessas

frequências naturais. Ressalta-se que estes modos estão associados a deslocamentos observados na região do rotor que apresenta parte do seu eixo entre os mancais.

#### 4.5.1.2 Autovalores do rotor sem trinca em diversas velocidades de operação

Na Tabela 11 apresenta-se os resultados das frequências naturais dos modos obtidas para o modelo de rotor sem trinca, abrangendo as faixas operacionais de velocidade do rotor.

Tabela 11 - Frequências naturais para rotor sem trinca - MI.

	Velocidade de Operação (rad/s)									
	100	191	200	300	400	449	500	600	700	
$\omega_1$ (Hz)	-26,02	-24,73	-24,60	-23,25	-21,98	-21,39	-20,81	-19,75	-18,79	MOR
$\omega_2$ (Hz)	28,95	30,28	30,41	31,82	33,17	33,80	34,45	35,64	36,75	MOP
$\omega_3$ (Hz)	-113,15	-113,09	-113,09	-113,02	-112,96	-112,93	-112,90	-112,84	-112,79	MOR
$\omega_4$ (Hz)	113,30	113,37	113,37	113,45	113,53	113,57	113,62	113,70	113,79	MOP
$\omega_5$ (Hz)	-109,88	-104,11	-103,58	-98,08	-93,33	-91,26	-89,26	-85,77	-82,79	MOR
$\omega_6$ (Hz)	124,95	132,83	133,64	142,94	152,70	157,59	162,72	172,75	182,59	MOP
$\omega_7$ (Hz)	-311,80	-311,41	-311,38	-311,38	-311,05	-310,74	-310,59	-310,44	-310,14	MOR
$\omega_8$ (Hz)	312,11	312,45	312,48	312,48	312,82	313,16	313,33	313,50	313,84	MOP

Com o aumento da velocidade, observa-se um padrão de aumento na frequência natural para todos os modos. Os dados relativos à frequência natural, considerando diferentes relações de trincas, são detalhadamente apresentados nos itens subsequentes. É importante destacar que as frequências naturais do rotor com eixo íntegro servem como base para resultados comparativos das variações de frequências naturais, tendo em vista que essas frequências devem ser especificadas em fase de projeto.

#### 4.5.1.3 Autovalores do modelo MII (8% da seção do eixo com trinca) do rotor em diversas velocidades de operação

Na Tabela 12 é apresentado os resultados de frequência natural obtidos para o rotor com trinca  $a = 15$  mm e  $2c = 30$  mm, na faixa de velocidades de operação do rotor.

Tabela 12 - Frequências naturais para rotor com trinca - MII.

	Velocidade de Operação (rad/s)									
	100	191	200	300	400	449	500	600	700	
$\omega_1$ (Hz)	-25,96	-24,66	-24,54	-23,18	-21,91	-21,32	-20,74	-19,67	-18,72	MOR
$\omega_2$ (Hz)	28,91	30,24	30,37	31,79	33,14	33,78	34,42	35,62	36,73	MOP
$\omega_3$ (Hz)	-113,15	-113,09	-113,09	-113,02	-112,96	-112,93	-112,90	-112,84	-112,79	MOR
$\omega_4$ (Hz)	113,30	113,37	113,37	113,45	113,53	113,57	113,62	113,70	113,79	MOP
$\omega_5$ (Hz)	-109,54	-103,80	-103,27	-97,80	-93,07	-91,01	-89,02	-85,55	-82,59	MOR
$\omega_6$ (Hz)	124,57	132,42	133,23	142,50	152,22	157,09	162,19	172,19	181,98	MOP
$\omega_7$ (Hz)	-311,80	-311,41	-311,38	-311,05	-310,74	-310,59	-310,44	-310,14	-309,86	MOR
$\omega_8$ (Hz)	312,11	312,45	312,48	312,82	313,16	313,33	313,50	313,84	314,19	MOP

Observa-se o comportamento similar das frequências naturais quando comparadas aos resultados para um rotor sem trinca, onde todas frequências naturais tendem ao aumento de valores de acordo com o aumento da velocidade.

#### 4.5.1.4 Autovalores do modelo MIII (24% da seção do eixo com trinca) do rotor em diversas velocidades de operação

Os resultados de frequência natural obtidos para o rotor com trinca  $a = 30$  mm e  $2c = 60$  mm, em diferentes velocidades de rotação, estão mostrados na Tabela 13.

Tabela 13 - Frequências naturais para rotor com trinca - MIII.

	Velocidade de Operação (rad/s)									
	100	191	200	300	400	449	500	600	700	
$\omega_1$ (Hz)	-25,59	-24,28	-24,15	-22,77	-21,49	-20,90	-20,31	-19,25	-18,30	MOR
$\omega_2$ (Hz)	28,66	30,01	30,14	31,59	32,98	33,63	34,28	35,50	36,63	MOP
$\omega_3$ (Hz)	-113,15	-113,09	-113,09	-113,02	-112,96	-112,93	-112,90	-112,84	-112,79	MOR
$\omega_4$ (Hz)	113,30	113,37	113,37	113,45	113,53	113,57	113,62	113,70	113,79	MOP
$\omega_5$ (Hz)	-107,29	-101,80	-101,29	-96,00	-91,42	-89,42	-87,50	-84,15	-81,30	MOR
$\omega_6$ (Hz)	122,47	130,05	130,84	139,88	149,39	154,15	159,13	168,88	178,41	MOP
$\omega_7$ (Hz)	-311,80	-311,41	-311,38	-311,05	-310,74	-310,59	-310,44	-310,14	-309,86	MOR
$\omega_8$ (Hz)	312,11	312,45	312,48	312,77	313,16	313,33	313,50	313,84	314,19	MOP

Tendendo ao mesmo comportamento dos itens supracitados, as frequências naturais tanto para o movimento orbital progressivo e regressivo apresentam elevações de valores associadas a todos os modos.

#### 4.5.1.5 Autovalores do modelo MIV (34% da seção do eixo com trinca) do rotor em diversas velocidades de operação

Na Tabela 14 são apresentados os resultados de frequência natural obtidos para o rotor com trinca  $a = 38$  mm e  $2c = 78$  mm, em diversas velocidades de operação.

Tabela 14 - Frequências naturais para rotor com trinca - MIV.

	Velocidade de Operação (rad/s)									
	100	191	200	300	400	449	500	600	700	
$\omega_1$ (Hz)	-24,50	-23,21	-23,09	-21,69	-20,39	-19,79	-19,21	-18,15	-17,21	MOR
$\omega_2$ (Hz)	28,13	29,48	29,62	31,12	32,57	33,25	33,94	35,21	36,39	MOP
$\omega_3$ (Hz)	-113,15	-113,09	-113,09	-113,02	-112,96	-112,93	-112,90	-112,84	-112,79	MOR
$\omega_4$ (Hz)	113,30	113,37	113,37	113,45	113,53	113,57	113,62	113,70	113,79	MOP
$\omega_5$ (Hz)	-101,43	-96,83	-96,38	-91,65	-87,51	-85,69	-83,94	-80,90	-78,37	MOR
$\omega_6$ (Hz)	118,38	125,01	125,72	134,06	142,92	147,36	151,99	161,01	169,74	MOP
$\omega_7$ (Hz)	-311,80	-311,41	-311,38	-311,05	-310,74	-310,59	-310,44	-310,14	-309,86	MOR
$\omega_8$ (Hz)	312,11	312,45	312,48	312,82	313,16	313,33	313,50	313,84	314,19	MOP

Observa-se que para o rotor analisado com a maior trinca, ou seja, relação de trinca  $a = 38$  mm e  $2c = 78$  mm, há uma maior influência dos efeitos giroscópicos, pois ocorre uma elevação de frequência natural de acordo com o aumento de velocidade para todos os modos.

#### 4.5.1.6 Entendimento da influência das trincas nos autovalores do sistema

Ao analisar eixos com trincas inferiores a 8 % da seção transversal (ver Tabela 11, Tabela 12, Tabela 13 e Tabela 14), pode-se verificar que não há a presença de variações significativas nos autovalores do MOP e MOR. A pequena variação na flexibilidade do eixo é justificada devido à proporção relativamente pequena do tamanho da trinca.

Para o eixo com 24 % da seção comprometida com a falha, observa-se a influência significativa na variação dos autovalores do sistema da região do rotor em balanço. Isso acontece devido à influência da alteração da flexibilidade local da região da trinca, que têm um papel fundamental nessa etapa.

Quando o eixo apresenta a máxima proporção de trinca, ou seja, 34 % da seção comprometida, verifica-se a continuidade da alteração dos valores de frequências naturais de forma mais abrupta da seção do rotor em balanço.

Vale ressaltar que as diferentes proporções das trincas não impactaram as frequências  $\omega_4$ ,  $\omega_5$ ,  $\omega_7$  e  $\omega_8$ . Estas frequências estão associadas exclusivamente à região do rotor entre os mancais, onde a falha por fadiga não afeta a rigidez da região. As frequências mais afetadas estão relacionadas à região do rotor que apresenta seu eixo em balanço ( $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_5$  e  $\omega_6$ ), apresentando um aumento dos autovalores para o movimento orbital regressivo (MOR) e redução para o movimento orbital progressivo (MOP).

Quando se analisa individualmente cada autovalor do modo que sofre a influência da trinca ( $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_5$  e  $\omega_6$ ), o aumento dos autovalores associados ao MOR pode ser justificado pelo incremento da flexibilidade local do eixo, além do aumento já existente devido à presença da trinca. Isso ocorre porque o movimento de rotação no MOR é contrário ao movimento de precessão do eixo do rotor, fazendo com que a seção da trinca tenda a sofrer um cisalhamento contrário ao sentido de rotação, devido ao movimento de precessão oposto à rotação, ocasionando nesse aumento extra de flexibilidade do eixo do rotor. Para o MOP, o comportamento de avanço de trinca gera um efeito contrário nos autovalores, tendendo a diminuí-los, devido ao movimento de rotação e precessão estarem no mesmo sentido.

#### 4.5.2 Análise dos autovetores para o MOR e MOP

Nos tópicos a seguir são apresentados os resultados de autovetores para o MOR e MOP. Os autovetores representam os modos de vibração orbital do rotor. Os tópicos são divididos em 2 subseções para uma melhor compreensão dos autovetores no MOR e MOP.

##### 4.5.2.1 Autovetores associados ao MOR para os modelos MI, MII, MIII e MIV

A seguir, são apresentados os autovetores para as quatro primeiras frequências naturais do rotor associados ao MOR. Destaca-se que o comportamento dos modos é o mesmo em diferentes velocidades de operação e profundidades de trinca, variando apenas o valor de suas frequências. Outro ponto relevante é que o programa desenvolvido por meio do *software* MATLAB® (2023) para a geração das curvas dos modos de vibração está disponível no Anexo A. Também é importante ressaltar que os autovetores estão relacionados aos autovalores apresentados no tópico anterior, e por meio do pacote computacional Hyper View® (2024), é possível analisar o comportamento dinâmico básico do motor *turbofan*.

#### 4.5.2.1.1 Autovetor associado a $\omega_1$

Na Figura 39 apresenta-se o primeiro modo de vibração do rotor, que tende a descrever um movimento orbital regressivo. Nesta figura há um desenho esquemático do modo de vibração, sendo que a linha verde representa o eixo do rotor em repouso, enquanto a linha vermelha mostra a configuração do modo do eixo em um plano. Os círculos em azul fornecem uma ideia do movimento orbital associado à primeira frequência natural.

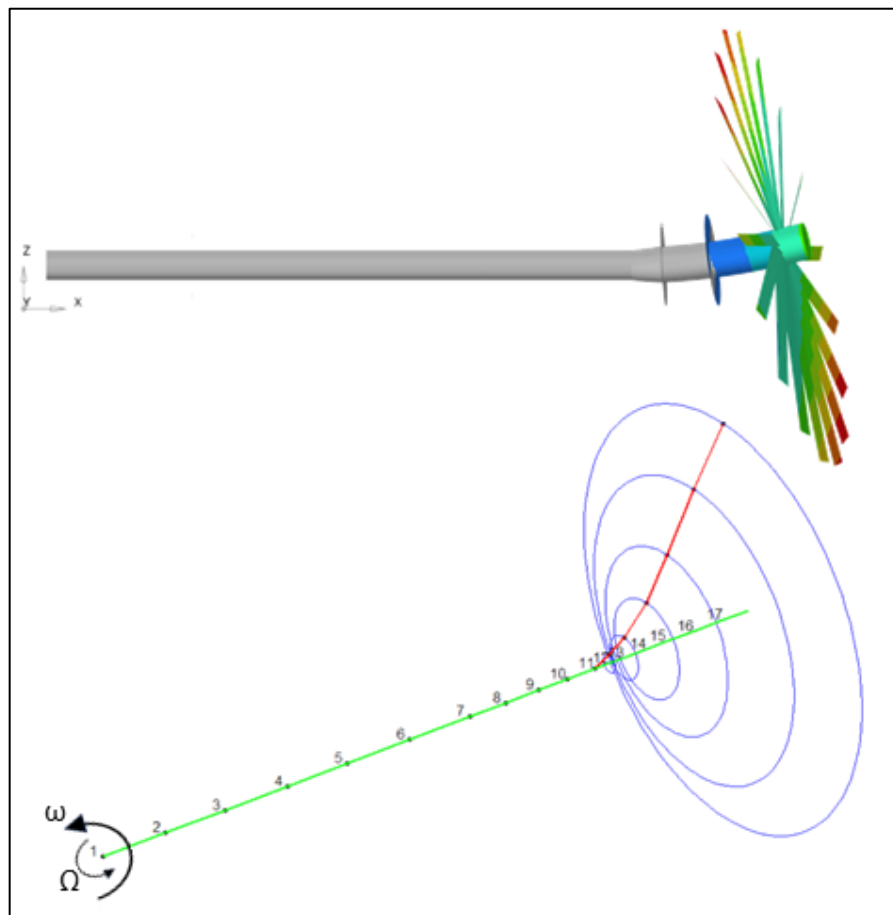


Figura 39 - Modo de vibração orbital regressivo associado a  $\omega_1$ .

Este modo, caracterizado pela vibração orbital em sentido oposto ao movimento de rotação, é representado pela “guinada” da ponta do eixo, onde a extremidade do eixo apresenta maior amplitude de movimento relativo. Na Figura 39 é possível observar que o eixo entre mancais (ponto 1 ao ponto 11) não apresenta movimento relativo relevante quando comparado aos demais pontos, fazendo com que o modo descreva o movimento do segmento em balanço do eixo.

#### 4.5.2.1.2 Autovetor associado a $\omega_3$

Na Figura 40 é apresentado o segundo modo de movimento orbital regressivo do rotor. A linha verde representa o eixo do rotor em repouso, enquanto a linha vermelha mostra a configuração do modo do eixo em um plano. Os círculos em azul fornecem uma ideia do movimento orbital do eixo.

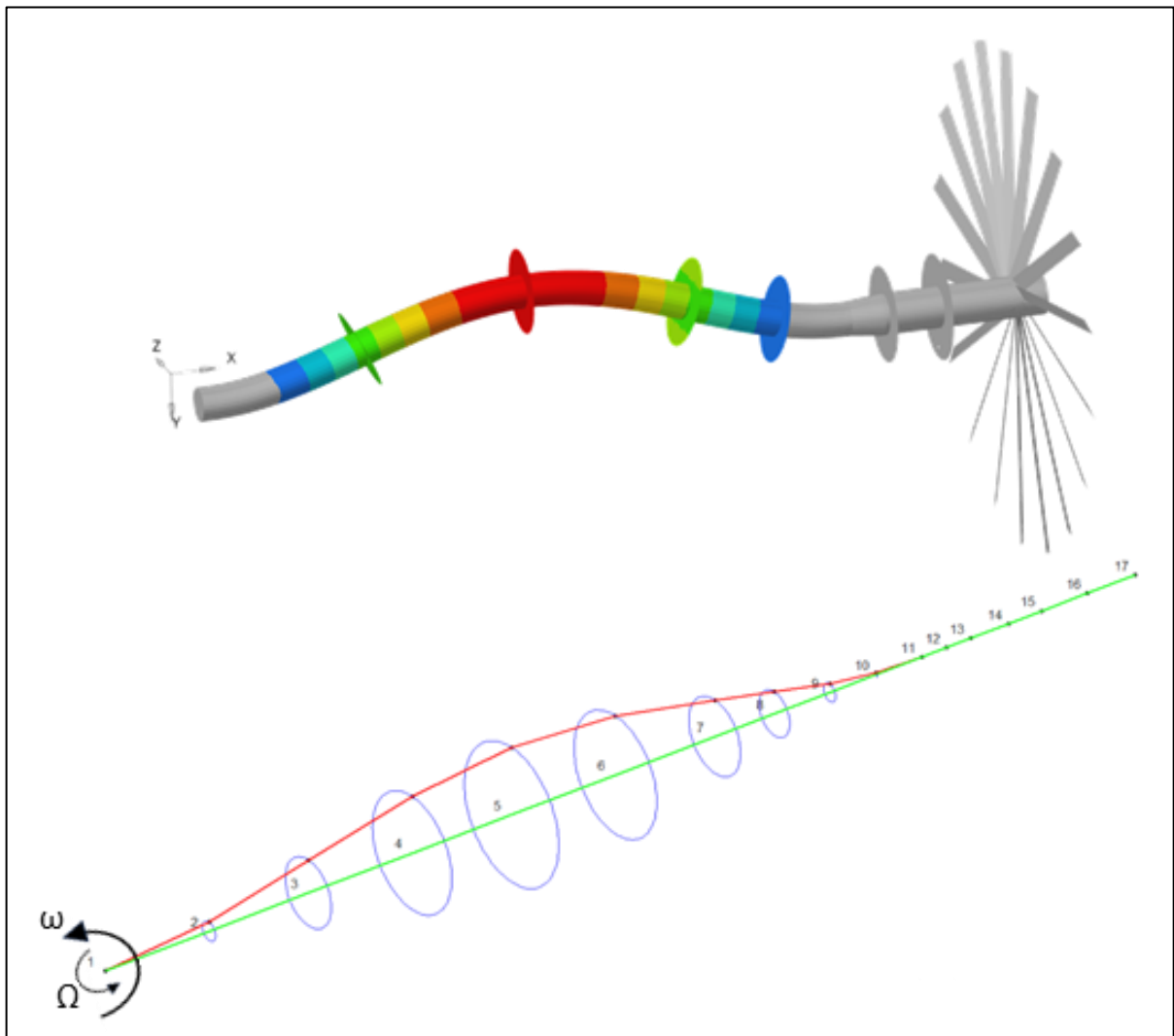


Figura 40 - Modo de vibração orbital regressivo associado a  $\omega_3$ .

Este modo é caracterizado pela flexão simétrica do eixo entre mancais, onde a maior amplitude de deslocamento acontece no ponto médio do eixo entre mancais. A representação por linhas da Figura 40 permite observar o comportamento citado, assim como a diferença no sentido da vibração orbital e a rotação.

#### 4.5.2.1.3 Autovetor associado a $\omega_5$

Na Figura 41 é apresentado o terceiro modo de vibração orbital regressivo, assim como o diagrama de linhas para uma melhor visualização dos deslocamentos relativos mostrados neste modo.

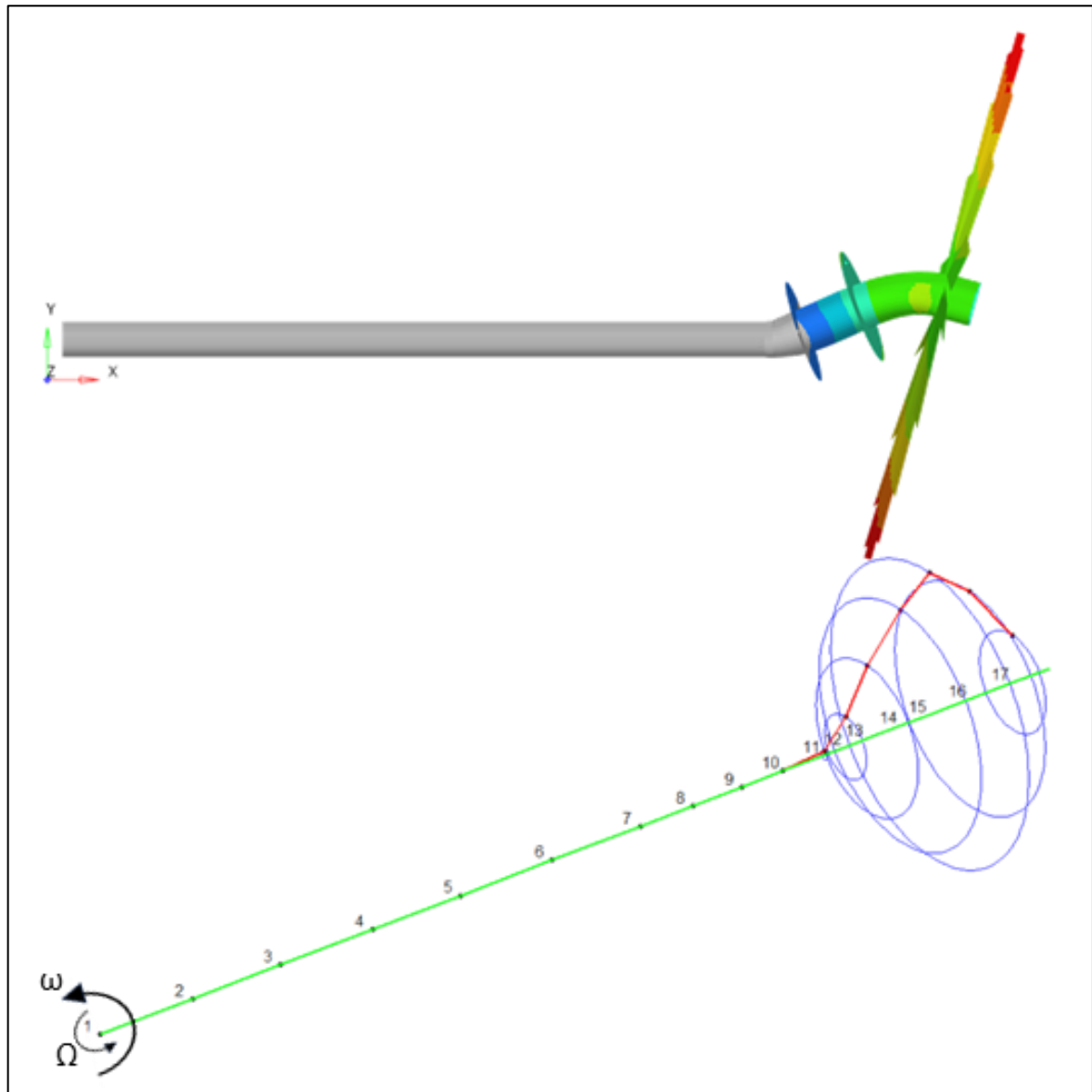


Figura 41 - Modo de vibração orbital regressivo associado a  $\omega_5$ .

Observando o modo da Figura 41, é possível observar que o modo está associado exclusivamente ao deslocamento da ponta do eixo em balanço. Observa-se uma inflexão da ponta do eixo, sendo que o maior deslocamento relativo acontece no ponto médio do segmento do eixo em balanço.

#### 4.5.2.1.4 Autovetor associado a $\omega_7$

A Figura 42 apresenta o quarto modo de vibração orbital regressivo do eixo do motor *turbofan* analisado, juntamente com um digrama de linhas coloridas para melhor visualização da forma deste modo.

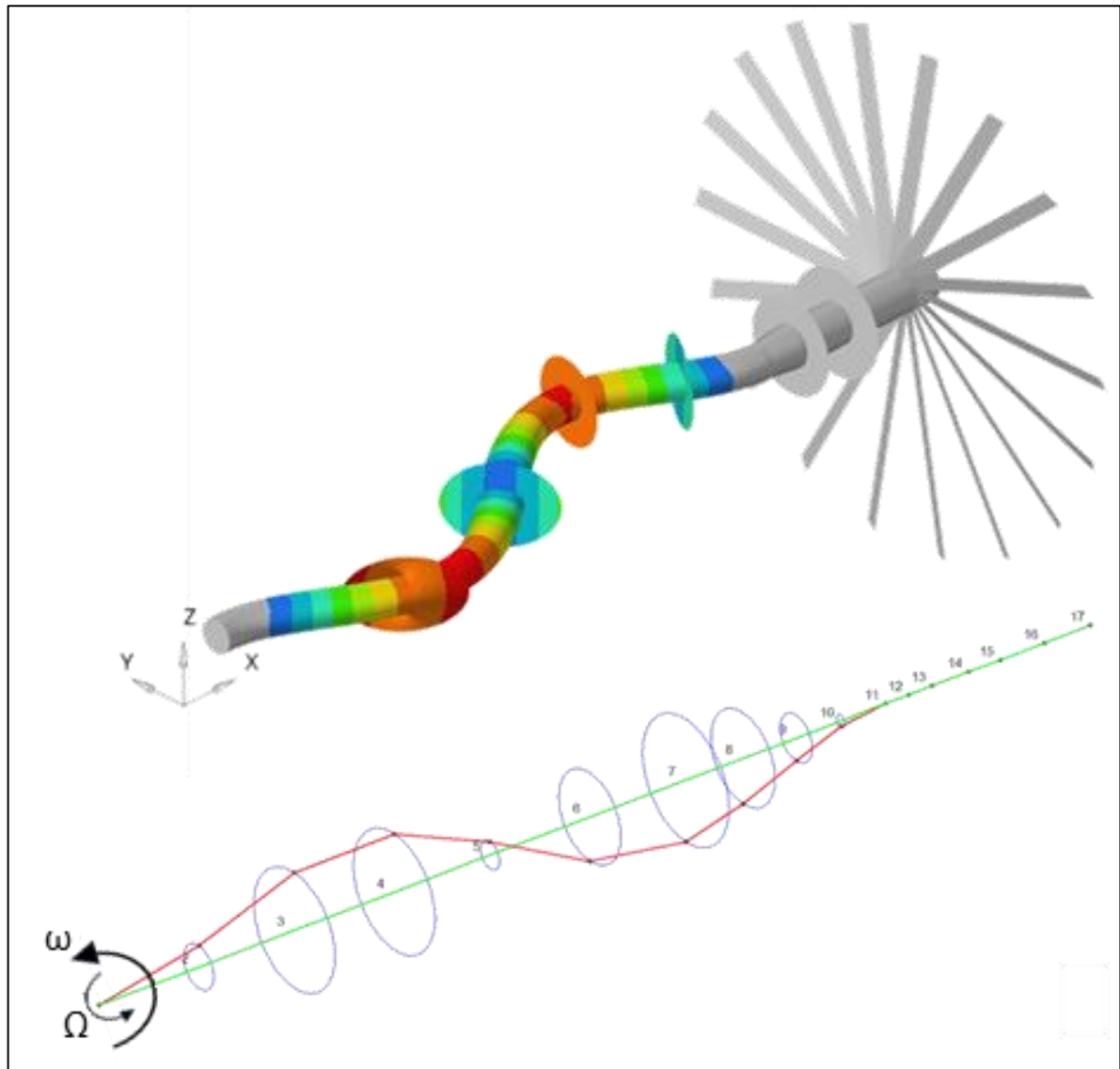


Figura 42 - Modo de vibração orbital regressivo associado a  $\omega_7$ .

O modo de vibração mostra um comportamento do deslocamento relativo lateral na forma de uma flexão antissimétrica do eixo. Entre os mancais, constata-se o maior valor de deslocamento lateral relativo, com sentido oposto ao deslocamento relativo máximo observado no segmento em balanço do rotor.

#### 4.5.2.2 Autovetores associados ao MOP para os modelos MI, MII, MIII e MIV

A seguir são apresentados os autovetores para as quatro primeiras frequências naturais do rotor associadas aos modos de vibração orbital progressiva. Ressalta-se que o comportamento modal é o mesmo em diferentes velocidades de operação e profundidade de trinca, alterando apenas o valor de sua frequência. A concepção das imagens acontece por meio da análise dos modos realizada com auxílio do pacote computacional Hyper View® (2024).

##### 4.5.2.2.1 Autovetor associado a $\omega_2$

De forma similar às figuras do item anterior, a Figura 43 mostra o primeiro modo de vibração orbital progressivo, na qual existe um diagrama de linhas para facilitar a visualização do modo.

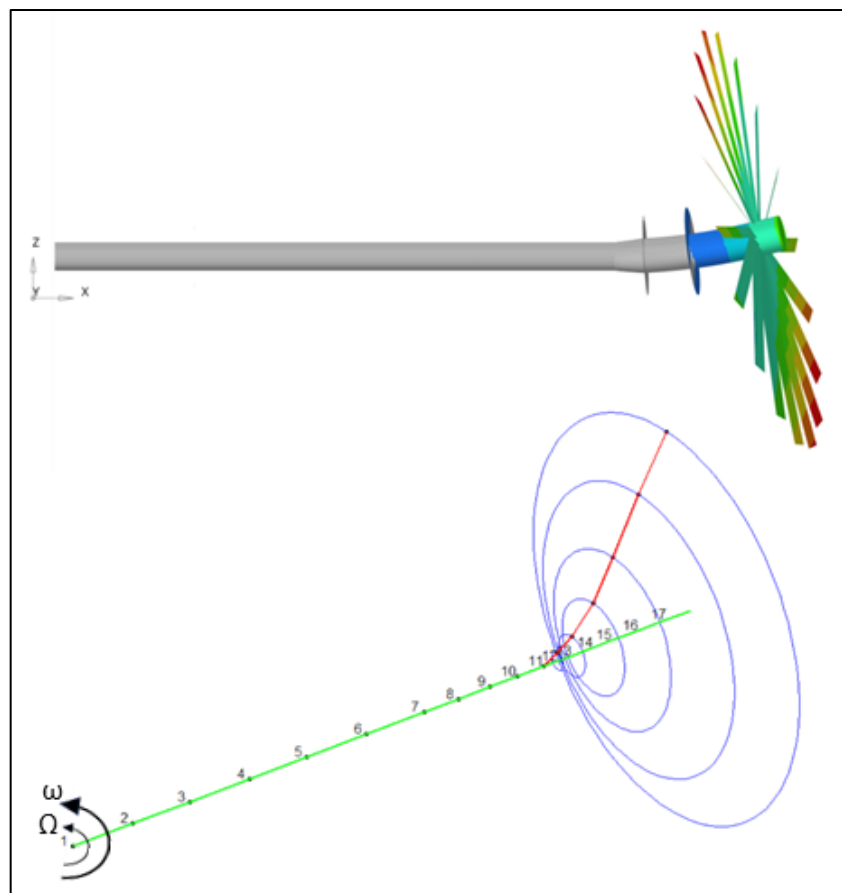


Figura 43 - Modo de vibração orbital progressivo associado a  $\omega_2$ .

Este modo de vibração orbital progressivo é muito semelhante ao modo de vibração orbital regressiva mostrado na Figura 39. Poderá ocorrer movimento lateral expressivo somente no segmento em balanço do eixo.

#### 4.5.2.2.2 Autovetor associado a $\omega_4$

Na Figura 44, apresenta-se o segundo modo de vibração orbital progressivo. Este modo mostra que o movimento relativo mais expressivo ocorre no segmento do eixo entre mancais.

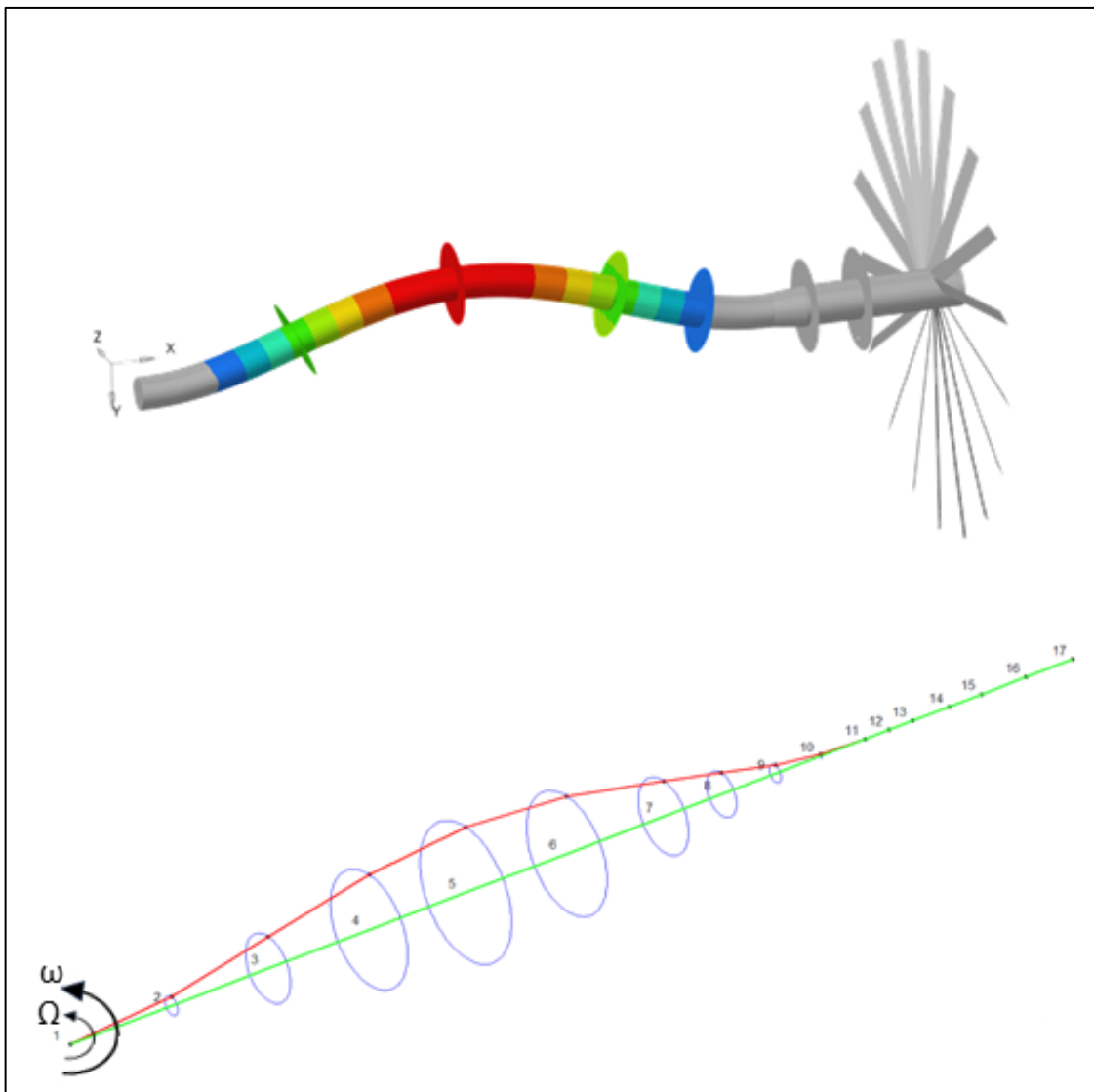


Figura 44 - Modo de vibração orbital progressivo associado a  $\omega_4$ .



#### 4.5.2.2.4 Autovetor associado a $\omega_8$

O quarto modo de vibração orbital progressiva está mostrado na Figura 46. Este modo é similar ao modo de vibração orbital regressiva apresentado na Figura 42.

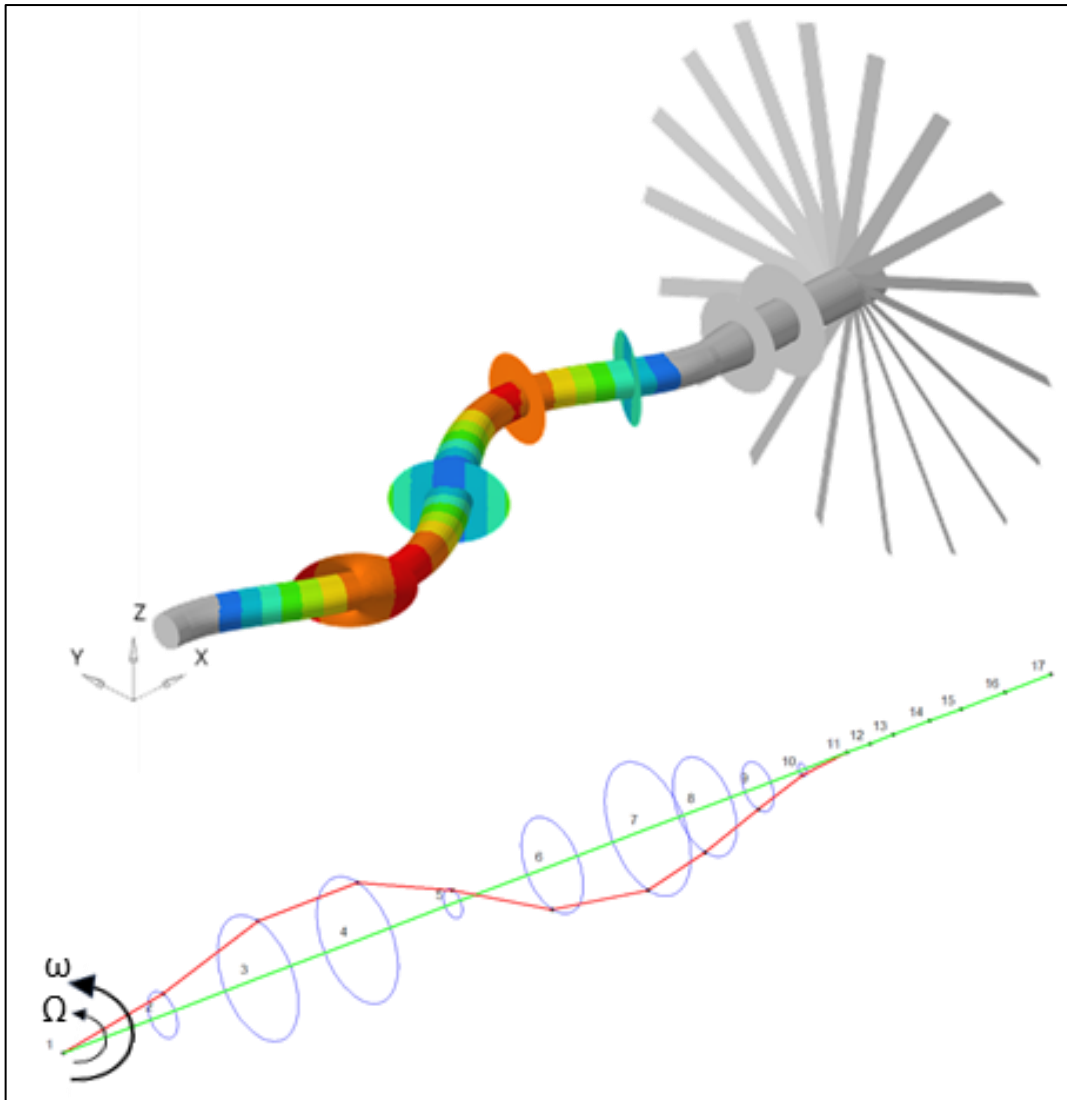


Figura 46 - Modo de vibração orbital progressivo associado a  $\omega_8$ .

Pode-se observar que os modos de vibração progressivos e regressivos apresentam simetria. Em suma, os efeitos giroscópicos provocam a bifurcação do espectro de frequência, sendo que os modos regressivos e progressivos são o espelhamento um do outro. Ressalta-se que há evidências experimentais que indicam que os modos de vibração orbital regressiva não são excitados pelas forças de desbalanceamento, que são a fonte mais comum de excitação em máquinas rotativas (VANCE, ZEIDAN e MURPHY, 2010).

#### 4.5.3 Mapa de velocidades críticas

A seguir são apresentados os diagramas de Campbell em variadas velocidades para o MOR e MOP, sendo possível mapear abrangentemente as respostas dinâmicas do rotor, identificando as velocidades críticas e mapeando a influência do efeito giroscópico no rotor. Este mapa é desenvolvido com base nos autovalores obtidos na etapa anterior em diferentes proporções de trincas e faixas de velocidades do rotor *turbofan*.

##### 4.5.3.1 Mapa de velocidades críticas - MI

Na Figura 47 é apresentado o diagrama de Campbell em diversas velocidades de operação (0 a 700 rad/s) com a finalidade de observar o comportamento do motor *turbofan* e definir as suas velocidades críticas de operação para o rotor sem falha estrutural, ou seja, sem a presença de trincas. Ressalta-se que as linhas em verde representam as frequências relacionadas ao MOP e as linhas em laranja o MOR.

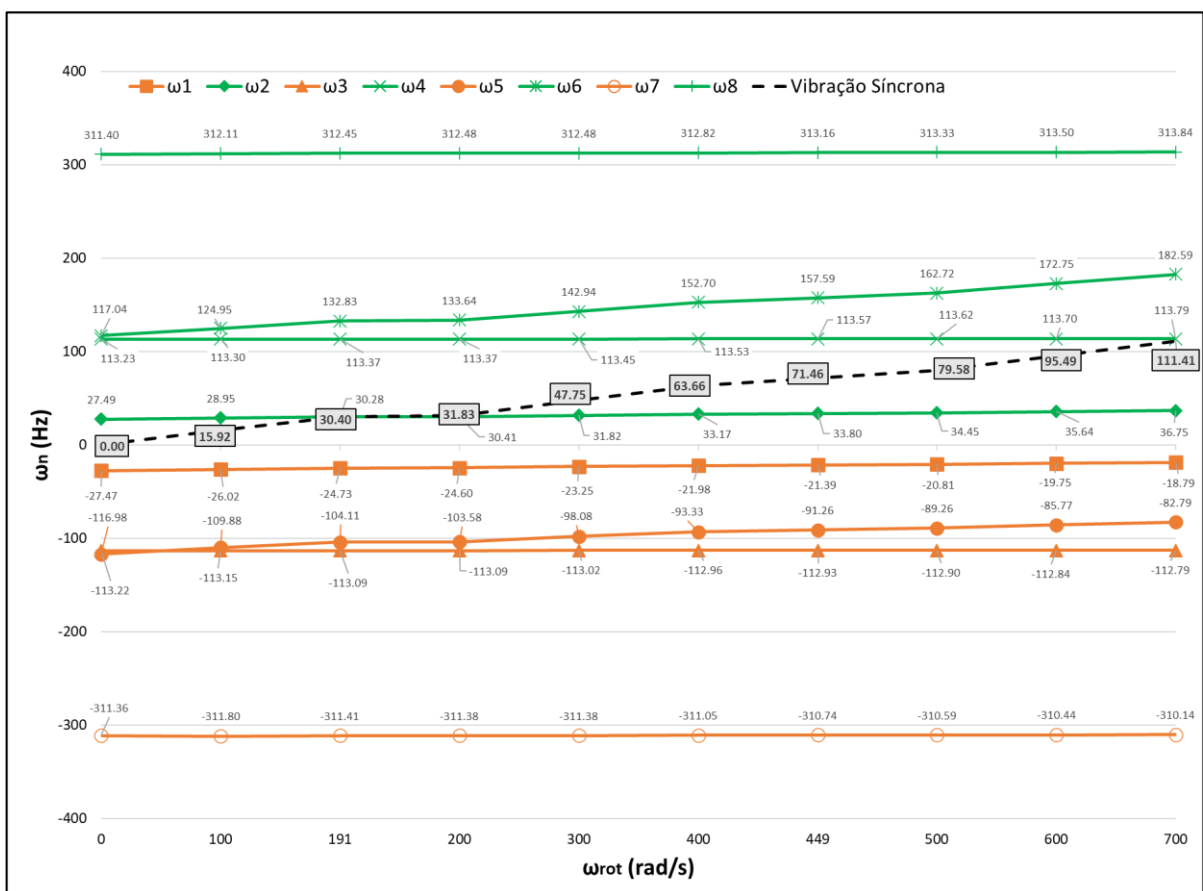


Figura 47 - Mapa de velocidades críticas - MI.

Ao avaliar a Figura 47, para o MOR, representado pelos conjuntos de retas em laranja, observa-se que não há presença de velocidades críticas. O encontro entre as linhas de velocidade de rotação do rotor ( $\omega$ ) com a velocidade de precessão do modo ( $\Omega$ ) representa um ponto de velocidade crítica.

Ainda avaliando MOR, para o modo  $\omega_1$ , observa-se uma tendência tênue de aumento das velocidades críticas constatando uma pequena influência do efeito giroscópico. Para os modos  $\omega_3$  e  $\omega_5$ , observa-se que suas duas primeiras frequências naturais tendem a ficar próximas. Com o avanço de velocidade,  $\omega_5$  tem uma tendência de crescimento maior quando comparado à  $\omega_1$ , enquanto  $\omega_3$  tende a uma pequena influência do efeito giroscópico, onde acontece uma pequena elevação das suas frequências naturais. Para  $\omega_7$ , observa-se uma pequena tendência de crescimento, sendo este modo pouco influenciado pelo efeito giroscópico.

Ao avaliar o MOP, representado pelas retas em verde, verifica-se no gráfico que o 1º modo,  $\omega_2$ , apresenta 2 velocidades críticas de operação, sendo elas 191 rad/s e 200 rad/s. Essas velocidades críticas são observadas pela interseção da linha de vibração síncrona com a linha de autovalores dos modos. Os modos  $\omega_4$  e  $\omega_6$  apresentam valores similares quando o rotor encontra-se em repouso. Após isso,  $\omega_4$  tende à um aumento suave de suas frequências naturais conforme acontece o aumento de velocidade e em 700 rad/s apresenta sua velocidade crítica. Para o 3º modo do MOP ( $\omega_6$ ), observa-se um aumento significativo de suas frequências naturais, sofrendo grande influência do efeito giroscópico.

O último modo analisado para o MOP,  $\omega_8$ , apresenta uma pequena tendência de aumento de frequências naturais ao longo do avanço de velocidades, sofrendo uma pequena influência do efeito giroscópico.

#### 4.5.3.2 Mapa de velocidades críticas - MII

Na Figura 48 é apresentado o diagrama de Campbell para o rotor com a primeira proporção de falha em seu eixo, ou seja, com 8% da seção do eixo comprometida. Este gráfico apresenta os 4 primeiros modos associados ao MOR e MOP, avaliado em uma faixa de velocidades.

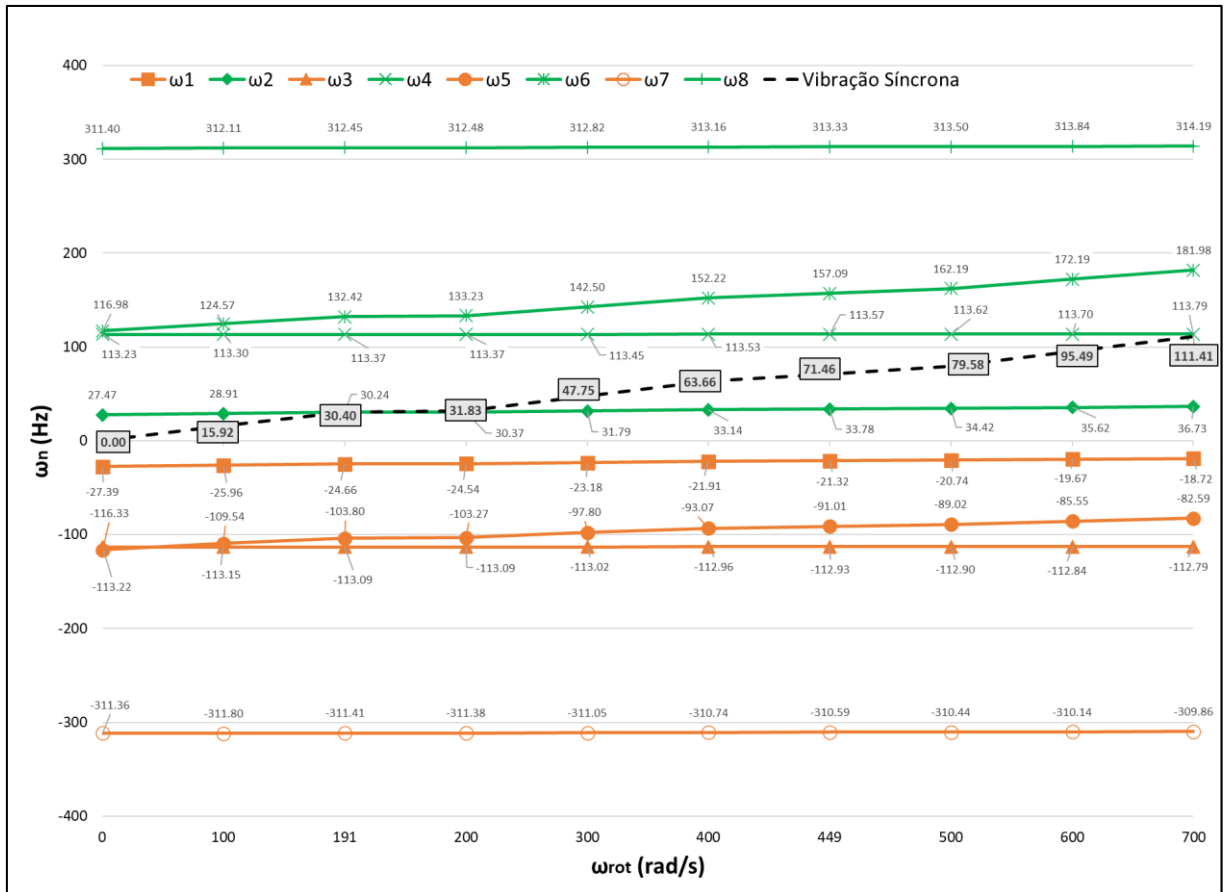


Figura 48 - Mapa de velocidades críticas - MII.

Pode-se observar na Figura 48 que, para o MOR, representado pelo conjunto de linhas em laranja, não há presença de velocidades críticas nessa faixa de operação do rotor para o movimento orbital regressivo. Outro ponto a se destacar é que a interpolação entre velocidades é feita de forma linear, de modo a simplificar o processo de transição de velocidades.

Os modos  $\omega_1, \omega_3, \omega_5$  e  $\omega_7$  tendem ao mesmo comportamento do MI (modelo sem trinca). Ressalta-se que o eixo  $X$  apresenta a velocidade de operação em rad/s e o eixo  $Y$  apresenta valores em Hz. Essa diferença de unidade de medida é comumente utilizada neste tipo de análise devido a associação do movimento orbital com a velocidade de rotação do rotor.

Para o MOP, o mapa de velocidades críticas apresentado acima apresenta 3 velocidades críticas associadas a 2 modos diferentes,  $\omega_2$  e  $\omega_4$ . Para 1º modo do MOP,  $\omega_2$ , observa-se uma elevação tênue das frequências naturais com o avanço de velocidade e a presença de duas velocidades críticas conforme citado acima. As velocidades críticas deste modo acontecem em 191 e 200 rad/s, sendo comprovado pela interseção das linhas de vibração síncrona com a linha dos valores de frequências naturais deste modo.

O 2º modo para o MOP,  $\omega_4$ , apresenta uma pequena tendência de aumento em seus valores com sua velocidade crítica em 700 rad/s. Outro ponto a se destacar é que ao realizar a

comparação deste modo com  $\omega_6$ , observa-se que, quando o rotor está em repouso, as frequências naturais destes modos tendem a estar próximas. O modo  $\omega_6$ , apresenta um comportamento de crescimento íngreme de suas frequências naturais com o avanço de velocidade devido ao efeito giroscópico ser mais influente neste modo, porém não há a presença de velocidades críticas neste modo. O último modo analisado,  $\omega_8$ , apresenta comportamento similar ao mesmo modo no modelo sem trinca (MI), onde tende a ter um crescimento pequeno dos autovalores.

#### 4.5.3.3 Mapa de velocidades críticas - MIII

A seguir é apresentado o mapa de velocidades críticas (Diagrama de Campbell) para a rotor com 2º estágio do avanço de trinca por fadiga, conforme apresentado na Figura 36. Conforme apresentado anteriormente, são exibidos os 4 primeiros modos de vibração para o rotor em MOR e MOP.

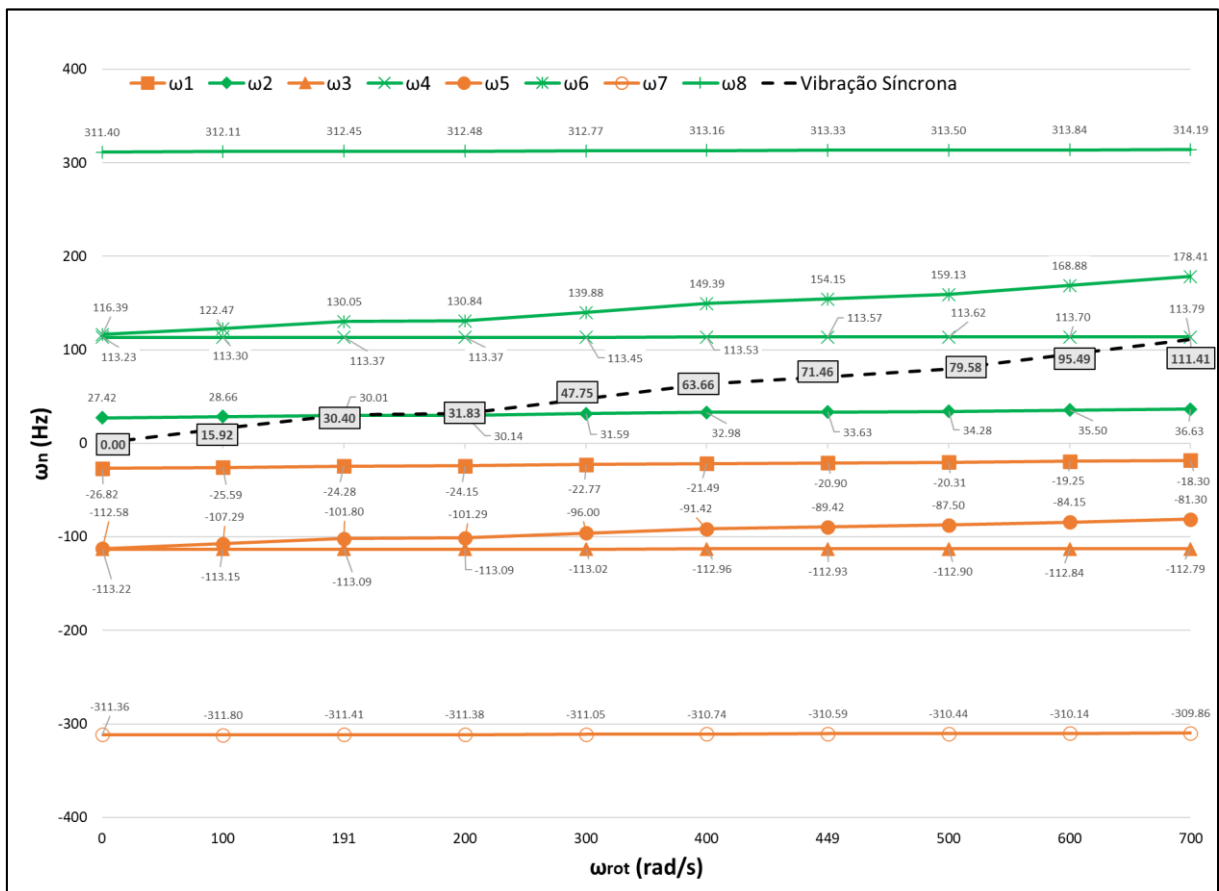


Figura 49 - Mapa de velocidades críticas - MIII.

Ao avaliar a Figura 49, verifica-se um comportamento similar dos 1º e 2º modos para o MOR, onde não há a presença de velocidades críticas devido a não interseção das linhas dos modos com a linha de vibração síncrona.

Pode-se observar que, o modo  $\omega_1$  tende ao aumento ténue de suas frequências naturais com o avanço de velocidade. Isso representa a influência do efeito giroscópico neste modo de forma abrandada, alterando os valores de frequências naturais em menor valor. O 2º modo ( $\omega_3$ ) e o 3º modo ( $\omega_5$ ) apresentam valores similares até 100 rad/s e, posteriormente, há um distanciamento das frequências naturais quando acontece o avanço de velocidade onde, para  $\omega_3$ , há uma maior elevação dos valores dos modos e  $\omega_5$  apresenta uma menor tendência de crescimento das frequências naturais. O modo  $\omega_7$  apresenta uma pequena tendência de crescimento das frequências naturais com o avanço das velocidades, sofrendo pequena influência do efeito giroscópico.

Para o MOP há a presença de 3 velocidades críticas, onde ocorrem em dois modos distintos. As duas primeiras velocidades críticas acontecem no 1º modo,  $\omega_2$ , nas velocidades de operação de 191 e 200 rad/s. Analisando este modo, verifica-se o aumento ténue das frequências naturais com o avanço das velocidades de rotação do sistema. A terceira velocidade crítica acontece no 2º modo,  $\omega_4$ , em 700 rad/s. Este modo apresenta um comportamento similar ao apresentado no MII, onde acontece um pequeno aumento de suas frequências naturais com o avanço de velocidade. Os demais modos,  $\omega_6$  e  $\omega_8$ , não apresentam velocidades críticas. O 3º modo para o MOP,  $\omega_6$ , apresenta um aumento de suas frequências naturais de forma significativa com o avanço de velocidades. Isso acontece devido à influência do efeito giroscópico no rotor. O 4º modo,  $\omega_8$ , apresenta comportamento similar ao mesmo modo relatados nos tópicos 4.5.3.2 e 4.5.3.1

#### 4.5.3.4 Mapa de velocidades críticas - MIV

A seguir é apresentado o mapa de velocidades crítica para o rotor com maior proporção de trinca, conforme apresentado na Figura 36. Este rotor apresenta maior proporção da trinca transversal com a trinca longitudinal do seu eixo, chegando a aproximadamente 34% da seção transversal do eixo comprometida com a trinca.

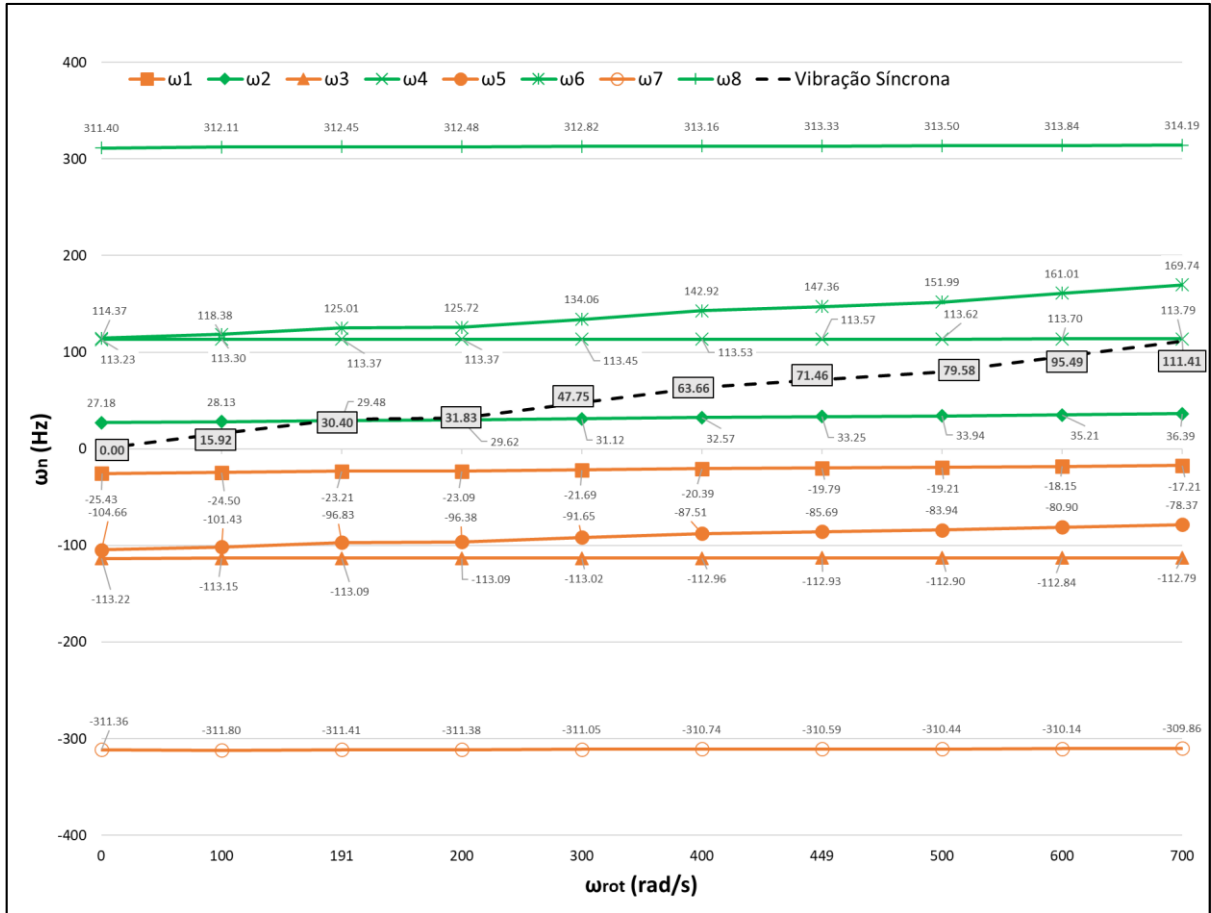


Figura 50 - Mapa de velocidades críticas - MIV.

Na Figura 50 é possível observar que não há a presença de velocidades críticas no rotor para o movimento orbital regressivo, representados pelas retas em laranja. O modo  $\omega_1$  apresenta aumento das frequências naturais com o aumento da velocidade de forma tênue. Observa-se para este modo um aumento linear das frequências naturais com o aumento das velocidades de rotação do motor.

Os modos  $\omega_3$  e  $\omega_5$  apresentam o afastamento da 1ª e 2ª frequências naturais em velocidade de operação de 0 e 100 rad/s e, após 100 rad/s, apresenta um comportamento similar ao MIII, onde  $\omega_3$  apresenta uma tendência de elevação do modo com o avanço da velocidade e  $\omega_5$  apresenta uma tendência dos modos aumentarem de forma mais abrandada. Ressalta-se que  $\omega_5$  representa o modo em que acontece a flexão da ponta do eixo em balanço.

Para  $\omega_7$ , modo associado a flexão oposta do eixo entre mancais, observa-se uma tendência do aumento das frequências naturais a partir de 100 rad/s. Isso acontece devido à influência do efeito giroscópico no rotor. A região entre mancais apresenta diversos discos do estágio de compressão do motor.

Ao avaliar o MOP, representado pelas linhas em verde, observa-se o mesmo comportamento de velocidades críticas apresentado nos tópicos anteriores, constatando-se a presença de 3 velocidades críticas no rotor em dois modos diferentes. As duas primeiras velocidades críticas estão presentes no 1º modo,  $\omega_2$ , onde acontecem em 191 e 200 rad/s. É possível observar tendência ao afastamento da 2ª velocidade crítica, ocasionando uma pequena alteração do valor da frequência natural, devido a alteração da flexibilidade local do eixo por apresentar maior proporção da trinca quando comparado aos modelos anteriores. Observando este modo é possível verificar também uma tendência à elevação dos valores de frequências naturais do rotor.

No 2º e 3º modo é possível observar que acontece a aproximação das frequências naturais quando o rotor se encontra com velocidade de rotação nula. O 2º modo,  $\omega_4$ , apresenta uma tendência tênue ao aumento dos valores de frequências naturais e permanecendo com sua velocidade crítica em 700 rad/s. O 3º modo,  $\omega_6$ , apresenta incrementos avançados de frequências naturais, sofrendo grande influência do efeito giroscópico.

O último modo,  $\omega_8$ , apresenta um comportamento diferentes dos modelos MI, MII e MIII. O seu autovalor tende a aumenta de uma forma um pouco maior. Isso acontece devido a alteração da flexibilidade local na região da trinca.

#### 4.5.3.5 Entendimento da influência das trincas nas velocidades críticas

Este tópico tem como objetivo apresentar o estudo resumido da correlação de resultados obtidos nas análises dos eixos com e sem trincas, abordadas anteriormente. Com essa correlação de resultados, é possível definir de forma mais sucinta a influência da trinca nas velocidades críticas do motor. É importante destacar que, neste tópico, são analisados os resultados nas velocidades de 191, 200 e 700 rad/s para o MOP pois, conforme apresentado na Figura 47, são as velocidades críticas do sistema com eixo íntegro. Na Tabela 15 são apresentadas as frequências naturais nessas velocidades para o MI, MII, MIII, MIV e as variações percentuais para melhor entendimento.

Tabela 15 - Velocidades críticas para o motor *turbofan* com trincas e sem trinca.

Modo	Velocidade Crítica (V.C.)	MI	MII		MIII		MIV	
		FN (Hz)	FN (Hz)	$\Delta_{MI-MII}$	FN (Hz)	$\Delta_{MI-MIII}$	FN (Hz)	$\Delta_{MI-MIV}$
$\omega_2$	1ª V.C.	30,28	30,24	-0,13%	30,01	-0,89%	29,48	-2,64%
$\omega_2$	2ª V.C.	30,41	30,24	-0,56%	30,14	-0,89%	29,62	-2,60%
$\omega_4$	3ª V.C.	113,79	113,79	0,00%	113,79	0,00%	113,79	0,00%

Pode-se observar que, para a 1ª e 2ª velocidades críticas, na primeira proporção de trinca, 8% da seção do eixo comprometida, a 2ª velocidade crítica sofre uma maior influência da trinca, porém ambas velocidades apresentam pequena variação percentual. Quando a trinca apresenta 24% da seção do eixo, as duas primeiras velocidades críticas apresentam variação percentual igual dos autovalores em porcentagem, tendendo à uma diminuição dos valores dos autovalores.

Para a trinca com máximo tamanho, 34% da seção do eixo comprometida, as variações percentuais para a 1ª e 2ª velocidade crítica apresentam uma maior variação percentual, de aproximadamente 2,6 %.

A 3ª velocidade crítica não apresenta variação dos valores de frequências por estar associada aos modos da seção do rotor entre mancais, onde não apresenta trinca.

## 5 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve por finalidade avaliar o comportamento dinâmico de um motor *turbofan* com eixo trincado, cujas trincas apresentam diferentes profundidades e larguras. Para isso, implementou-se um procedimento de elementos finitos para a realização da análise vibratória do rotor do *turbofan*, por meio de pacotes computacionais. São implementados 4 modelos de eixo para o mesmo rotor, inserindo diversas relações de trincas transversais em seus eixos, visando avaliar a influência do tamanho da proporção de trinca transversal pela trinca longitudinal na resposta dinâmica do sistema rotativo. Os resultados apresentados ajudam a entender a influência da proporção da trinca na resposta dinâmica desses eixos, onde é possível por meio de mapas de velocidades críticas, avaliar a influência de efeitos giroscópicos no rotor e a variação de velocidades críticas de acordo com a proporção da trinca.

Nos tópicos de fundamentação de conceitos essenciais, são apresentadas equações de movimentos de um rotor biapoiado e um rotor em balanço, tendo em vista que o rotor em estudo apresenta parte do seu eixo biapoiado e outra parte em balanço. Por meio dessas equações, é possível obter as equações dinâmicas referentes aos modos do motor e elucidar a influência do efeito giroscópio na variação dos autovalores. Após isso, o rotor é modelado com diferentes profundidades de trincas para estudar a influência de sua proporção na variação dos autovetores, autovalores e velocidades críticas do motor. Os resultados mostram de forma clara a importância de avaliar as proporções das trincas nesses sistemas, analisando a resposta dinâmica dos rotores e sua influência na variação dos autovalores do sistema rotativo.

Este estudo é de fundamental importância para analisar a resposta dinâmica básica de eixos com diferentes relações de trincas em sua seção transversal, considerando o efeito giroscópio e o cisalhamento do eixo. Sua relevância está na contribuição para o avanço do entendimento dos casos de estudo em motores aeronáuticos com falhas, sujeitos a diversas velocidades de operação. Em pesquisas futuras, será essencial investigar a resposta dinâmica do rotor ao longo do tempo, a fim de compreender com maior precisão a influência deste tipo de falha na órbita do rotor durante transições de velocidades e sua resposta ao desbalanceamento. Também é importante o estudo da parte fluidodinâmica, considerando o fluxo de ar nos discos e as variações de temperaturas no motor. Essa abordagem mais abrangente permitirá um aprofundamento maior na análise do comportamento dinâmico de eixos trincados em motores aeronáuticos, contribuindo para o desenvolvimento de estratégias mais eficazes durante a fase de projeto, manutenção e garantia de segurança.

## REFERÊNCIAS

- AAINSQATSI, K. **Schematic diagram illustrating the operation of a 2-spool, high-bypass turbofan engine**. Disponível em: [commons.wikimedia.org/wiki/File:Turbofan\\_operation.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Turbofan_operation.svg). 2011. Acesso em: 02 jan. 2024.
- ALTAIR. **HYPER MESH®**. Versão 2019. [Brasil]: Windows, c2024.
- ALTAIR. **HYPER VIEW®**. Versão 2019. [Brasil]: Windows, c2024.
- BALLI, O.; CALISKAN, H. Turbofan engine performances from aviation, thermodynamic and environmental perspectives. **Energy**, v. 232, p. 121031, 2021.
- BRANT, Bruno de Freitas. **Análise por elementos finitos da influência de descontinuidades geométricas sobre o comportamento dinâmico de rotores flexíveis**. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.
- CHEN, K.; HUANGFU, Y.; ZHAO, Z.; MA, H.; DONG, Z. Dynamic modeling of the gear-rotor systems with spatial propagation crack and complicated foundation structure. **Mechanism and Machine Theory**, v. 172, p. 104827, 2022.
- DONG, G. M.; CHEN, J. Z. Parameter identification of a rotor with an open crack. **European Journal of Mechanics**, v. 23, n. 2, p. 325-333, 2003.
- DOWLING, Norman E. **Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture, and Fatigue**. 4. ed. Boston: Pearson Education Limited, 2013.
- FARIA, Lucas Brant Pimenta de. **Análise de vibrações em eixos rotativos com fissuras transversais**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.
- GASCH, R. A survey of the dynamic behaviour of a simple rotating shaft with a transverse crack. **Journal of Sound and Vibration**, v.2, p. 313-332, 1993.
- GASCH, R. Dynamic behavior of a simple rotor with a cross-sectional crack. **IMEchE Conference on Vibration in Rotating Machinery**, p. 123-128, 1976.
- GASCH, R. Dynamic behavior of the Laval rotor with a transverse crack. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v.22, n. 4, p.790-804, 2007.
- GRABOWSKI, B. Shaft vibrations in turbomachinery excited by cracks. In: NASA Conference Publication 2250, 1982, Texas. **Rotordynamic Instability Problems in High Performance Turbomachinery**, Texas, NASA, 1982. p. 81-97
- HOZIC, Dzenan. **Mechanical loads on a turbofan engine structure at blade-off**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Espacial) – Departamento de Física Aplicada e Engenharia Mecânica, Universidade de Tecnologia de Lulea, Lulea, 2009.

HUANG, S. C.; HUANG, Y. M.; SHIEH, S. M. Vibration and stability of a rotating shaft containing a transverse crack. **Journal of Sound and Vibration**, v. 162, n. 3, p.387-401, 1993.

JEFFCOTT, H. The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed - The effect of want of balance. **Philosophical Magazine**, v. 37, n. 219, p. 304-314, 1919.

KARIMI, J.; NEJATI, H. R.; AHMADI, M. Application of digital image correlation to derive Paris' law constants in granite specimens. **Theoretical and Applied Fracture Mechanics**, v. 128, p. 104166-104294, 2023.

KU, D. -M. Finite element analysis of whirl speeds for rotor-bearing systems with internal damping. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 12, n. 5, p. 599-610, 1998.

KUMAR, C.; RASTOGI, V. A brief review on dynamics of a cracked rotor. **International Journal of Rotating Machinery**, v. 2009, n. 1, p. 327-333, 2009.

KUMAR, D. Rotordynamic analysis using 3D elements in fixed and rotating reference frame. **ASME 2016 International Mechanical Engineering Congress and Exposition**, California, 2016.

KRISHNA, B. V. R. V.; MUDGALA, S.; SETH, D. A comparative dynamic analysis of rotor involving three engineering materials applying finite element analysis (FEA) simulation. **Material Today: Proceedings**, v. 47, p. 4003-4014, 2021.

LEE, Yung-Li. **Fatigue Testing and Analysis: Theory and Practice**. Amsterdam: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

LI, H.; BAI, E.; MI, M.; YAN, Y. Identification of Euler angles of permanent magnet spherical motor rotor based on hall sensors array. **Measurement**, v. 199, p. 111500, 2022.

LIN, Y.; CHU, F. Numerical and experimental investigations of flexural vibrations of a rotor system with transverse or slant crack. **Journal of Sound and Vibration**, v. 324, n. 1-2, p. 107-125, 2009.

LOPES, V. S. C.; FARIA, M. T. C. Determinação das frequências naturais em eixos trincados utilizando o método de elementos finitos. *In: CONEMI: Alternativas energéticas, sustentabilidade e impactos para as gerações futuras*, 23., 2023, Vitória. **Congresso Internacional de Engenharia Mecânica e Industrial**. Vitória, 2023.

MATHWORKS. **MATLAB®**. Versão R2013a. [Brasil]: Windows, c2023.

MAYES, I. W.; DAVIES, W. G. R. Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design**, v. 106, n. 1, p. 139-145, 1984.

MILOVANOVIC, N.; DJORDJEVIC, B.; SEDMAK, S.; GRBOVIC, A.; MARTIC, I. Some problems of xFEM modelling of surface crack growth in a turbine shaft. **Structural Integrity Procedia**, v. 42, p. 362-367, 2022.

NANDI, A.; NEOGY, S. Modelling of rotors with three-dimensional solid finite elements. **The Journal of Strain Analysis for Engineering Design**, v. 36, n. 4, p. 359-371, 2001.

NELSON, H. D.; NATARAJ, C. The dynamics of a rotor system with a cracked shaft. **Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design**, v. 108, n. 2, p. 189-196, 1986.

PEDERSEN, E. Rotordynamics and bond graph: basic models. **Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems: Methods, Tools and Applications in Engineering and Related Sciences**, v. 15, n. 4, p. 337-352, 2009.

PIMENTEL-JUNIOR, G. L. S.; OLIVEIRA, F. B.; FARIA, M. T. C. On the bump tests of cracked shafts using acoustic emission techniques. **Engineering**, v. 8, n. 9, p. 572-581, 2016.

ROY, A; PALIT, P.; DAS, S.; MUKHYOPADYAY, G. Investigation of torsional fatigue failure of a centrifugal pump shaft. **Engineering Failure Analysis**, v. 112, p. 104511, 2020.

SAWICKI, J. T.; GYENKENYESI, J. P.; BAALKINI, G. Y.; GYEKENYESI, A. L. Dynamic Analysis of a Dual Rotor-Bearing System in Support of the TF-41 Seeded-Fault Testing. In: International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery Honolulu, 9., Hawaii, ASME, 2005.

SIMULIA. **ABAQUS CAE®**. Versão 2017. [Providence]: Windows, c2023.

SOUTHWEST RESEARCH INSTITUTE. **NASGRO®**. Versão 10.01. [San Antonio]: Windows, c2024.

STEPHENSON, R. W.; ROUCH, K. E. Modeling rotating shafts using axisymmetric solid finite elements with matrix reduction, **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 115, n. 4, p. 484-489, 1993.

SZODRUCH, J.; GRIMME, W.; BLUMRICH, F.; SCHMID, R. Next generation single-aisle aircraft – requirements and technological solutions. **Journal of Air Transport Management**, v. 17, n. 1, p. 33-39, 2010.

TSAI, Sunghan. **Structural modification of stationary rotor systems for dynamic performance**. 2019. Tese (Doutorado em Filosofia) – Universidade de Liverpool e Universidade Nacional de Tsing Hua, Liverpool, 2019.

VANCE, John. **Rotordynamics of Turbomachinery**. New York: John Wiley, 1988.

VANCE, John; ZEIDAN, Fouad; MURPHY, Brian. **Machinery Vibration and Rotordynamics**. New York: John Wiley, 2010. 419 p.

VISNADI, L. B.; FILHO, R. R. G.; CASTRO, H. F. Influence of tooth crack parameters on bearing vibration signal of a geared rotor. **Engineering Failure Analysis**, v. 141, p. 106700, 2022.

WANG, S.; ZHU, R.; JINFENG. Study on load sharing behavior of coupling gear-rotor-bearing system of GTF aero-engine based on multi-support of rotors. **Mechanism and Machine Theory**, v. 147, p. 103764, 2020.

YU, L.; CHEN, H.; ZHOU, J.; YIN, H.; HUANG, H.Z. Fatigue life prediction of low pressure turbine shaft of turbojet engine. **International Journal of Turbo & Jet-Engines**, vol. 34, n. 2, p 149-154, 2015.

ZHANG, X.; YANG, Y.; SHI, M.; MING, A.; WANG, P. Novel energy identification method for shallow cracked rotor system. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 186, p. 109886, 2022.

## ANEXO A – Programa em MATLAB para representação dos autovetores

```

% Novos valores de X, Y
% entrar com os valores de deslocamento nodais no vetor y
x = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 30, 51, 74, 92];
y = [0, 230, 450, 680, 900, 1130, 1350, 1480, 1600, 1700, 1800, 1850, 1900, 1980, 2050,
2148, 2252, 2340];

% Número de pontos na órbita
num_points = 100;

% Inicialização da figura com fundo branco
figure('Color', 'w');

% Loop para criar e plotar as linhas dos círculos
for i = 1:length(x)
    % Parâmetro angular para criar o círculo
    theta = linspace(0, 2*pi, num_points);

    % Coordenadas da órbita (rotação em torno do eixo X)
    orbit_x = x(i) * sin(theta);
    orbit_y = (y(i) + i * 5) * ones(1, num_points); % Adiciona um espaçamento proporcional
    ao índice i
    orbit_z = x(i) * cos(theta);

    % Encontrar ponto tangente ao topo do círculo
    top_point_y = (y(i) + i * 5);
    top_point_z = x(i);
    top_point_x = 0;

    % Plotar as linhas do círculo sem pontos
    plot3(orbit_y, orbit_z, orbit_x, '-');
    hold on;

    % Armazenar os centros dos círculos para posterior conexão
    circle_centers(i, :) = [top_point_y, top_point_z, top_point_x];

    % Adicionar ponto preto pequeno em cada coordenada
    plot3(top_point_y, 0, top_point_z, 'ko', 'MarkerSize', 3, 'MarkerFaceColor', 'k');
end

% Conectar os pontos superiores externos dos círculos com uma curva em vermelho
for i = 1:length(x)-1
    % Encontrar ponto superior externo do círculo atual
    top_point_y_current = (y(i) + i * 5);
    top_point_z_current = x(i);

    % Encontrar ponto superior externo do próximo círculo
    top_point_y_next = (y(i+1) + (i+1) * 5);

```

```

top_point_z_next = x(i+1);

% Plotar linha vermelha
plot3([top_point_y_current, top_point_y_next], [0, 0], [top_point_z_current,
top_point_z_next], 'r-', 'LineWidth', 2);
end

% Conectar os centros dos círculos com uma linha verde em X com Y = 0
line_green = plot3(circle_centers(:, 1), zeros(size(circle_centers, 1), 1), circle_centers(:, 3), 'g-
', 'LineWidth', 2);

% Adicionar números sequenciais aos pontos da linha verde com tamanho de fonte
aumentado
for i = 1:length(x)
    text(circle_centers(i, 1), 40, circle_centers(i, 3), num2str(i), 'Color', 'k', 'FontSize', 12,
'HorizontalAlignment', 'center');
end

% Configurações adicionais
xlabel("");
ylabel("");
zlabel("");

% Remover as linhas de grade
grid off;

% Remover eixos
axis off;

% Exibir a figura
axis equal;

```