UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Estatística

Caio Mateus dos Santos Carvalho

Percolação de Palavras na Rede Hipercúbica

Belo Horizonte
2025

Caio Mateus dos Santos Carvalho

Percolação de Palavras na Rede Hipercúbica

Versão Final

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Roger William Câmara Silva

Belo Horizonte
2025

2025, Caio Mateus dos Santos Carvalho.
Todos os direitos reservados

Carvalho, Caio Mateus dos Santos.

C331p Percolaçõo de palavras na rede hipercúbica [recurso eletrônico] / Caio Mateus dos Santos Carvalho – 2025.
1 recurso online (50 f. il., color.) : pdf.

Orientador: Roger William Câmara Silva.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística.
Referências: f. 44

1. Estatística – Teses. 2. Probabilidades – Teses 3. Percolação (Física estatística) - Teses. 4. Percolação de palavras – Teses. I. Silva, Roger William Câmara. I. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística. III. Título.

CDU 519.2(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz
CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

”Percolação de palavras na rede hipercúbica”

CAIO MATEUS DOS SANTOS CARVALHO

Dissertação submetida à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ESTATÍSTICA, como requisito para obtenção do grau de Mestre em ESTATÍSTICA, área de concentração ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE.

Aprovada em 06 de março de 2025, pela banca constituída pelos membros:

gov.br Documento assinado digitalmente
ROGER WILLIAM CAMARA SILVA
Data: 11/03/2025 21:03:00-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Roger William Câmara Silva – Orientador (EST/UFMG)

gov.br Documento assinado digitalmente
REMY DE PAIVA SANCHIS
Data: 11/03/2025 20:37:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Remy de Paiva Sanchis (MAT/UFMG)

gov.br Documento assinado digitalmente
PABLO ALMEIDA GOMES
Data: 11/03/2025 15:46:00-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Pablo Almeida Gomes (IME/USP)

Belo Horizonte, 6 de março de 2025.

Agradecimentos

Agradeço à minha família por tudo, ao meu orientador pelo apoio acadêmico e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Estudaremos o processo de percolação de palavras, originalmente proposto por Kesten e Benjamini no artigo *Percolation of Arbitrary Words* [1]. Apresentamos alguns exemplos do artigo de Kesten e, seguindo [10], examinamos a questão de se é ou não possível enxergar todas as palavras em $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 3$). Respondemos à questão afirmativamente no caso em que $p \in (p_c(d), 1 - p_c(d))$ onde $p_c(d)$ é o ponto crítico do processo de percolação de sítios em $\mathbb{Z}^d$.

Palavras-chave: probabilidade; percolação; percolação de palavras.

Abstract

We will study the problem of percolation of words, originally proposed by Kesten and Benjamini in the paper *Percolation of Arbitrary Words* [1]. We present some examples from Kesten's paper and, following [10], we examine the question of whether it is possible to see all words in $\mathbb{Z}^d$ ($d \geq 3$). We answer this question affirmatively in the case where $p \in (p_c(d), 1 - p_c(d))$, where $p_c(d)$ is the critical point for the site percolation process in $\mathbb{Z}^d$.

Keywords: probability; percolation; percolation of words.

Lista de Figuras

2.1 Ilustração do modelo de percolação de palavras. 13

3.1 Ilustração da laje $\mathbb{S}_h$ e seus subconjuntos. 24
3.2 Ilustração dos conjuntos B_n, L_n e R_n. 28
3.3 Ilustração dos conjuntos da forma B^u. 30
3.4 Ilustração esquemática dos conjuntos $B_{n,\mathrm{mic}}$, $L_{n,\mathrm{mic}}$ e $R_{n,\mathrm{mic}}$. 33
3.5 Ilustração do evento G. 38
3.6 Ilustração da ação da função f. 41

Sumário

1 Introdução **9**

2 Definições e primeiros resultados **11**

2.1 Espaço de probabilidade associado ao modelo de percolação 11

2.2 Percolação de palavras 13

2.3 Percolação da palavra aleatória 15

3 Palavras na rede hipercúbica **22**

3.1 Renormalização 23

3.1.1 Contexto Microscópico 23

3.1.2 Notação e lemas 27

3.1.3 O Procedimento de Renormalização 32

3.2 Um lema de percolação orientada 35

Referências **44**

Apêndice A Complementos Teóricos **45**

A.1 Desigualdade de Hoeffding para a distribuição binomial 45

A.2 Resultados de Topologia 46

A.3 Dominação Estocástica 49

Capítulo 1

Introdução

O modelo de percolação foi proposto por Broadbent e Hammersley em [2] para descrever o comportamento de um fluido ao se deslocar por um meio permeável. Um exemplo concreto é o de moléculas de gás entrando em contato com um sólido poroso, cujos poros podem ou não ser suficientemente grandes para permitir sua passagem. O problema fundamental consiste em determinar sob quais condições o gás pode penetrar e se difundir no interior do sólido.

Matematicamente, o processo de percolação pode ser entendido como um modelo de grafos aleatórios. Podemos pensar numa malha quadriculada onde os vértices representam os poros e os elos representam os caminhos entre os poros. Cada vértice é declarado aberto com uma certa probabilidade p, de forma independente dos demais. Um elo é dito aberto se seus dois vértices estão abertos. Os vértices que estão conectados à origem por um caminho de elos abertos formam o que chamamos de aglomerado da origem. Dizemos que a origem percola no evento em que seu aglomerado possui infinitos vértices, o que, fisicamente, corresponde ao evento em que o gás é absorvido no interior do sólido.

Cada vértice aberto é rotulado com o número 1, enquanto os vértices fechados são rotulados com o número 0. O evento em que a origem percola coincide com o evento em que existe um caminho infinito de vértices começando na origem em que a sequência $(1, 1, \ldots)$ pode ser lida.

A construção rigorosa do modelo de percolação é feita no capítulo 2, onde também mencionamos alguns resultados importantes da teoria de percolação no grafo $\mathbb{Z}^d$. Particularmente importante é o fenômeno da transição de fase, que garante a existência de um valor crítico $p_c \in (0, 1)$ tal que, se $p > p_c$ a origem percola com probabilidade positiva e se $p < p_c$ a origem não percola.

O objetivo desta dissertação é discutir uma generalização do modelo de percolação, originalmente proposta por Kesten e Benjamini [1]. Trabalhos anteriores que generalizam o problema de percolação incluem Mai e Halley [3], que estudam a percolação de sequências alternadas de zeros e uns no contexto de um problema físico, e Wierman e Appel [4], que demonstram a percolação dessas sequências em uma malha triangular. No modelo clássico de percolação, nosso objeto de estudo são os caminhos de vértices abertos (com estado 1). Aqui, mudamos de ponto de vista. Dada uma sequência $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, nos

perguntamos se é possível enxergar um caminho $(v_0, v_1, \ldots)$ em que se lê a palavra ξ, ou seja, tal que $\omega(v_i) = \xi_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Onde $\omega(v_i)$ denota o estado do vértice v_i numa certa realização ω do processo de percolação. Se todas as palavras podem ser lidas com probabilidade 1, dizemos que todas as palavras são vistas.

No conjunto de palavras $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ podemos considerar a medida produto definida por $\mu := \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mu_i$, onde $\mu_i(\{0\}) = \mu_i(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Dizemos que quase todas as palavras são vistas se o conjunto de palavras vistas tem medida μ igual a 1 com probabilidade 1. Veremos que as noções de ver todas as palavras e ver quase todas as palavras não são equivalente.

Também veremos que $\max\{P(1 \text{ seja visto no grafo}), P(0 \text{ seja visto no grafo})\} \leq P(\xi \text{ seja visto no grafo})$ para todo $\xi \in \Xi$. Onde $0 = (0, 0, \ldots,)$ e $1 = (1, 1, \ldots,)$. Esse resultado nos permite comparar a percolação de palavras arbitrárias com a percolação de zeros e uns. O que é vantajoso, já que as probabilidades de que 0 e 1 sejam vistas no grafo são monótonas em p. Particularmente, estabeleceremos que se as palavras 1 e 0 são vistas com probabilidade positiva, então quase todas as palavras são vistas. Também veremos que a recíproca dessa afirmação é verdadeira.

Em seu artigo seminal, Kesten e Benjamini provam que no grafo Z^d, se $d \geq 10$ e $p \in (p_c, 1 - p_c)$, todas as sequências binárias podem ser lidas. Os autores conjecturam que o mesmo vale para $d \geq 3$, conjectura provada por Nolin, Tassion e Teixeira em [10], que examinamos no capítulo 3.

De fato, Nolin, Tassion e Teixeira obtém um resultado mais forte: estabelecem que existe um $l = l(d, p)$ tal que, quase certamente, todas as palavras são vistas a partir da laje $\mathbb{Z}^2 \times [0, l]^{d-2}$.

Capítulo 2

Definições e primeiros resultados

2.1 Espaço de probabilidade associado ao modelo de percolação

Seja $G = (V, \mathbb{E})$ um grafo simples com uma quantidade enumerável de vértices. Se x, y são vértices adjacentes de G, denotamos o elo que os conecta por $\langle x, y\rangle$. Podemos pensar no modelo de percolação em sítios como uma forma de gerar subgrafos aleatórios de G. O procedimento é o seguinte: independentemente, classificamos cada um dos vértices de V como aberto ou fechado com respectivas probabilidades p e $1-p$ (claro que $0 \leq p \leq 1$). Após a classificação dos vértices do grafo, definimos o conjunto de elos preservados como $\mathbb{E}_* = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{E} : \ x \text{ e } y \text{ estão abertos.}\}$. O subgrafo resultante $\mathbb{G}_* = (V, \mathbb{E}_*)$ é a realização do processo de percolação. Se um vértice for declarado aberto o rotulamos com o número 1, se for declarado fechado o rotulamos com o número 0.

Prosseguimos para uma construção formal do modelo. Seja $\Omega = \{0,1\}^V$. Para cada $v \in V$ consideramos o espaço de probabilidade $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}), P_p^v)$, onde $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ e P_p^v é uma medida em $\{0,1\}$ tal que $P_p^v(\{1\}) = p$.

No espaço produto $\Omega = \{0,1\}^V$ podemos considerar a σ-álgebra $\mathcal{F} = \bigotimes_{v\in V} \mathcal{P}(\{0,1\})$ e a medida $P_p = \bigotimes_{v\in V} P_p^v$. O espaço resultante é $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$.

Dada uma configuração $\omega \in \Omega$, denotamos por $X_v(\omega)$ à projeção de ω em v (ou seja, o estado do vértice v na configuração ω). No espaço $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$, X_v possui distribuição Bernoulli(p) para todo $v \in V$ e $\{X_v\}_{v\in V}$ forma uma família de variáveis aleatórias independentes.

Sejam $u, v \in V$, se $\langle u, v\rangle \in \mathbb{E}$ escrevemos $u \sim v$. Nesse contexto, chamamos de caminho em V a uma sequência de vértices distintos $(v_1, v_2, \ldots)$ com $v_i \sim v_{i+1}$. Se existe um caminho possuindo dois vértices u e v dizemos que eles estão conectados, relação que representamos pela notação $u \longleftrightarrow v$.

Seja $v \in V$. Chamamos de aglomerado de v na configuração ω ao conjunto $C_\omega(v) = \{u : u \longleftrightarrow v \text{ na configuração } \omega\}$. Denotamos por $C(v) : \Omega \to \mathcal{P}(V)$ a função que leva ω em $C_\omega(v)$, em palavras, $C(v)$ é o aglomerado aleatório do vértice v.

Dizemos que um vértice v percola numa configuração ω se $|C_\omega(v)| = \infty$. É natural nos perguntarmos qual é a probabilidade de um dado vértice percolar. Para responder a isso, consideramos a função $\theta_v : [0,1] \to [0,1]$ definida por $\theta_v(p) = P_p(|C(v)| = \infty)$.

Proposição 2.1. *A função $\theta_v(p)$ é não decrescente em p.*

Demonstração. Seja $\{Z(v) : v \in V\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$. Dizemos que um vértice está p-aberto se $Z(v) \leq p$ (o que ocorre de forma independente para cada vértice com probabilidade p). Isso induz um espaço de probabilidade $([0,1]^V, A, \mathbb{P},)$, onde $\mathbb{P}$ é a medida produto de uniformes em $[0,1]$ e A é a σ-álgebra de Borel em $[0,1]^V$ (ver, por exemplo, [12] para uma demonstração de que esse espaço de medida está bem definido).

Note que a distribuição dos vértices p-abertos nesse modelo coincide com a distribuição dos vértices abertos no modelo de percolação em $\{0,1\}^V$ com parâmetro p. Isso nos permite comparar processos de percolação com parâmetros diferentes.

Sejam $p, p' \in [0,1]$ com $p < p'$. Considere que $C_p(v)$ e $C_{p'}(v)$ denotam, respectivamente, o aglomerado de vértices p-abertos e o aglomerado de vértices p'-abertos de v numa realização do processo de percolação acoplado. Por construção, todo vértice p-aberto está p'-aberto, implicando que $C_p(v) \subset C_{p'}(v)$, logo, $\theta_v(p) = \mathbb{P}(|C_p(v)| = \infty) \leq \mathbb{P}(|C_{p'}(v)| = \infty) = \theta_v(p')$. □

Nos concentramos agora no grafo induzido pelo conjunto $\mathbb{Z}^d = \{(x_1, x_2, \ldots, x_d) : x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, \ldots, d\}$. Seja $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, onde $\mathbb{E}^d = \{\{(x_1, \ldots, x_d), (y_1, \ldots, y_d)\} \subset \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1\}$. O grafo $\mathbb{L}^2$ pode ser visualizado como uma malha quadriculada infinita, onde os vértices correspondem aos pontos do plano cartesiano com coordenadas inteiras e os elos conectam pontos adjacentes na horizontal e na vertical. É comum abusar da notação e usar $\mathbb{Z}^d$ para denotar o grafo $\mathbb{L}^d$.

No processo de percolação de sítios em $\mathbb{Z}^d$, a distribuição de $C(v)$ é a mesma para todo vértice $v \in \mathbb{Z}^d$, portanto, não há prejuízo em usar a origem como vértice de referência. Escrevemos $C = C(0)$ e $\theta = \theta_0$.

Seja $p_c(d) = \sup\{p \in [0,1] : \theta(p) = 0\}$.

Teorema 2.1. ***Transição de fase no modelo de percolação em sítios:*** *Para $d \geq 2$ existe um número $p_c(d) \in (0,1)$ tal que:*

i) Se $p < p_c(d)$ então $\theta(p) = 0$.

ii) Se $p > p_c(d)$ então $\theta(p) > 0$.

Uma demonstração desse resultado clássico pode ser encontrada em [5] para o modelo de percolação em elos. A mesma demonstração vale para o modelo de percolação em sítios, com as adaptações necessárias.

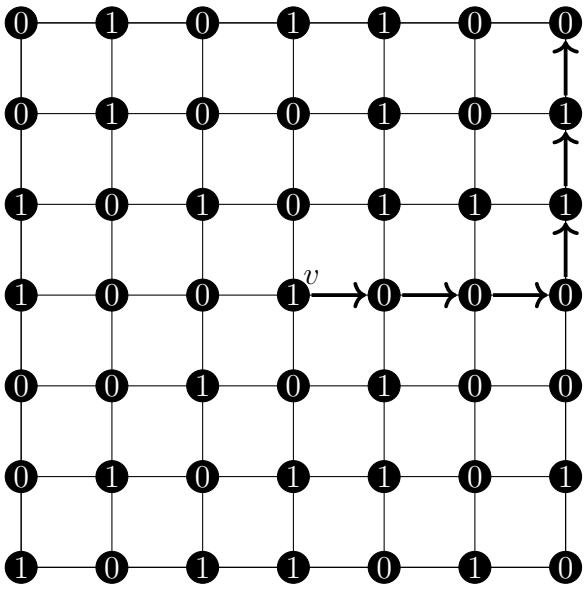
Ao acrescentar dimensões, acrescentamos possibilidades de caminho, portanto, é intuitivo que $p_c(d)$ seja não crescente em d. Isso pode ser provado embutindo $\mathbb{Z}^d$ em $\mathbb{Z}^{d+1}$. A presença de um aglomerado infinito de vértices em $\mathbb{Z}^d$ implica na presença de um aglomerado infinito de vértices em $\mathbb{Z}^{d+1}$, logo, deve haver $p_c(d+1) \leq p_c(d)$.

Campanino e Russo verificaram em [8] que $p_c(3) < 1/2$, resultado que usaremos posteriormente.

2.2 Percolação de palavras

Denotamos por Ξ o conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e chamamos de palavra a qualquer elemento ξ desse conjunto. Dada uma realização do processo de percolação, dizemos que uma palavra ξ foi vista se existe um vértice v_0 e um caminho $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$ tal que $\omega(v_i) = \xi_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Na Figura 2.1 ilustramos o evento em que o segmento de palavra $(1,0,0,0,1,1,0)$ é visto a partir de um vértice v.

Figura 2.1: Ilustração do modelo de percolação de palavras.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Frequentemente, estudaremos eventos que dependem de segmentos finitos de palavras. Por isso, introduzimos as seguintes notações. Dado $l \in \mathbb{N}$, definimos $\Xi_l := \{0,1\}^l$. Dados $\xi \in \Xi$ e i, j inteiros com $i \leq j$, definimos $\xi_{[i,j]} := (\xi_i, \ldots, \xi_j) \in \Xi_{(j-i)+1}$. Por conveniência, denotamos $\xi_{[0,j]}$ por $\xi_{[j]}$.

Dados $v, v' \in \mathbb{Z}^d$ e $\xi \in \Xi$, escrevemos $v \overset{\xi}{\rightsquigarrow} v'$ quando existem um $n \in \mathbb{N}$ e um caminho $(v = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} = v')$ tal que $\omega(v_i) = \xi_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Quando uma palavra ξ é vista a partir de um vértice v escrevemos $v \overset{\xi}{\rightsquigarrow} \infty$.

Apresentamos outra noção de conexidade que também será útil. Dado $\xi \in \Xi_l$, escrevemos $v \xrightarrow{\xi} v'$ quando existe um caminho $(v = v_0, v_1, \ldots, v_{l-1} = v')$ tal que $\omega(v_i) = \xi_i$ para $i = 1, \ldots, l-1$.

Dados $v \in V$ e $A \subset V$ consideramos os seguintes conjuntos:

$$S(v) = \{\xi \in \Xi : v \overset{\xi}{\rightsquigarrow} \infty\},$$

$$S_A = \bigcup_{v \in A} S(v),$$

$$S_\infty = \bigcup_{v \in V} S(v).$$

Proposição 2.2. *Os seguintes eventos são mensuráveis.*

1. *Todas as palavras são vistas de um vértice v, ou seja, $\{S(v) = \Xi\}$.*
2. *Fixada uma coleção finita $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $\{S_A = \Xi\}$ é mensurável.*
3. *Todas as palavras são vistas no grafo, ou seja, $\{S_\infty = \Xi\}$.*

Demonstração. Lembremos que, por definição, a σ-álgebra $\mathcal{F}$ é gerada por eventos da forma $\{\omega : X_v(\omega) \in A_v\}$ com v variando em V e $A_v \in \mathcal{P}(\{0,1\})$. Isso nos diz que eventos que dependem apenas de uma quantidade finita de vértices são $\mathcal{F}$-mensuráveis, já que podem ser representados como união ou interseção finita de eventos do tipo $\{\omega : X_v(\omega) \in A_v\}$.

1. Fixado um vértice v, dados $n \in \mathbb{N}$ e $\eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \in \Xi_n$, considere

$$\begin{aligned} B_n(\eta) = & \\ & \{\omega \in \Omega : \text{ existe um caminho } (v, v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \\ & \text{com } \omega(v_i) = \eta_i \text{ para todo } 0 \leq i \leq n-1\} \end{aligned}$$

   O evento $B_n(\eta)$ depende apenas de uma quantidade finita de vértices, portanto, é $\mathcal{F}$-mensurável.

   Notando que

$$\{S(v) = \Xi\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\eta \in \Xi_n} B_n(\eta),$$

   concluímos que $\{S(v) = \Xi\}$ é mensurável.

2. Seja

$$\begin{aligned} B_n(\eta) = & \{\omega \in \Omega : \text{para algum } j = 1, 2, \ldots, k \text{ , existe um caminho} \\ & (w_j, v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \text{ com } \omega(v_i) = \eta_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq n-1.\}, \end{aligned}$$

note que o evento em questão depende de uma quantidade finita de vértices, portanto, o mesmo argumento do item anterior prova a validade da afirmação.

3. No conjunto Ξ consideramos a métrica

$$d(\xi, \xi') = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k - \xi'_k|}{2^k}.$$

É possível provar o espaço métrico (Ξ, d) é um espaço completo, e portanto um espaço de Baire. Sendo um espaço de Baire, sabemos que se Ξ pode ser representado como uma união contável de conjuntos, então um deles possui fecho com interior não vazio em Ξ. Apresentamos um pequeno anexo no final da dissertação (ver Anexo A.2) com uma revisão de topologia suficientemente abrangente para justificar os passos anteriores.

Fixada uma configuração ω, é possível verificar que $S(v)$ é um conjunto fechado em Ξ[1]. Se houver $S_\infty = \Xi$, pelos comentários anteriores, existe algum vértice v tal que $S(v)$ contém uma bola aberta de Ξ. Ou seja,

$$S(v) \supset C_n(\eta) = \{\xi : \xi_{[n-1]} = \eta\}.$$

Portanto,

$$\{S_\infty = \Xi\} = \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\eta \in \Xi_n} \{C_n(\eta) \subset S(v)\},$$

concluímos que $S_\infty = \Xi$ é mensurável pois $\{C_n(\eta) \subset S(v)\}$ é mensurável para todos $n \in \mathbb{N}$, $\eta \in \Xi_n$ e $v \in \mathbb{Z}^d$.

□

Está implícito na demonstração do item iii) que todas as palavras são vistas para um conjunto finito de vértices. Ou seja, se todas as palavras são vistas, existem $v_1, \ldots, v_k$ tais que $S_{\{v_1,\ldots,v_k\}} = \Xi$.

2.3 Percolação da palavra aleatória

Seja μ a medida de probabilidade em Ξ definida por $\mu := \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mu_i$, onde $\mu_i(\{0\}) = \mu_i(\{1\}) = \frac{1}{2}$. Em vez de considerarmos o evento em que todas as palavras são vistas,

[1] É possível verificar isso por um argumento do tipo Lema de Konig, como o apresentado na prova do Teorema 3.1 usando a Proposição 3.1

podemos estudar o evento em que o conjunto de palavras vistas é grande em um sentido probabilístico. A seguir, apresentamos sem demonstração alguns resultados sobre a percolação de palavras do artigo de Kesten e Benjamini [1].

Dado $\xi \in \Xi$, definimos

$$\rho(\xi) := P(\exists v \in V : \xi \text{ é vista de } v).$$

O evento $\{\exists v \in V : \xi \text{ é vista de } v\}$ é invariante por translação. Como a translação é uma transformação ergódica, vale uma lei 0-1 (para noções de teoria ergódica, ver, por exemplo, o capítulo 5 de [12]), isto é,

$$\rho(\xi) = 0 \text{ ou } 1.$$

Também é possível provar que $\rho(\xi)$ é uma variável aleatória caudal (independe de qualquer quantidade finita de vértices) para o grafo $\mathbb{Z}^d$, portanto, quase certamente constante pela lei 0-1 de Kolmogorov (capítulo 4 de [12]),

$$\mu(\{\xi : \rho(\xi) = 1\}) \in \{0, 1\}.$$

Seja

$$\Lambda := \{(\xi, \omega) : \xi \text{ é visto para algum } v \text{ na configuração } \omega.\}.$$

É possível verificar que Λ é mensurável com respeito a $C(\Omega) \times C(\Xi)$, portanto, podemos aplicar o Teorema de Fubini e estabelecer que:

$$\begin{aligned}
\mu(\{\xi : \rho(\xi) = 1\}) &= \int_{\Xi} \int_{\Omega} 1_{\Lambda} dP d\mu \\
&= \int_{\Omega} \int_{\Xi} 1_{\Lambda} d\mu dP \\
&= \int_{\Omega} \mu(S_{\infty}(\omega)) dP = \int_{\omega : \mu(S_{\infty}(\omega))=1} dP \\
&= P(\mu(S_{\infty}) = 1).
\end{aligned}$$

Observação. Utilizamos que $\mu(S_{\infty}(\omega)) \in \{0, 1\}$ para quase todo $\omega \in \Omega$, já que $\mu(\{\xi : \rho(\xi) = 1\}) \in \{0, 1\}$.

$$\mu(\{\xi : \rho(\xi) = 1\}) = P(\mu(S_{\infty}) = 1).$$

Dizemos que a palavra aleatória percola se $P(\mu(S_{\infty}) = 1) = 1$. No que segue, quando não houver risco de ambiguidade, denotaremos por 1 a sequência em Ξ com todos os termos iguais a 1.

O lema a seguir estabelece uma cota inferior para a probabilidade de vermos uma palavra ξ em termos da probabilidade de vermos a palavra 1. O resultado é intuitivo pois,

para $p \leq \frac{1}{2}$, qualquer segmento de palavra que contenha tanto zeros quanto uns aparece com maior probabilidade do que o segmento de mesmo tamanho que possui apenas uns. A primeira versão desse resultado foi provada por Wierman [14] no contexto de percolação da sequência alternada de zeros e uns.

Proposição 2.3. *(Lema de Wierman, formulação apresentada em [10]) Seja $d \geq 3$ e $p \in (p_c(d), \frac{1}{2}]$. Considere o processo de percolação de sítios em $\mathbb{Z}^d$ com parâmetro p. Sejam $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$, $S \subseteq \Lambda$ e uma família de palavras $\left(\xi^{(v)}\right)_{v \in S} \in \Xi^S$.*

a) Para todo $v' \in \Lambda$,

$$P_p\left(\exists v \in S : v \overset{\xi^{(v)}}{\rightsquigarrow} v' \text{ dentro de } \Lambda\right) \geq P_p\left(\exists v \in S : v \overset{1}{\rightsquigarrow} v' \text{ dentro de } \Lambda\right).$$

b) Seja $\xi \in \Xi$. É verdadeiro que

$$\rho(\xi) \geq \rho(1). \tag{2.1}$$

Demonstração. A ideia é a seguinte, atribuímos dois rótulos a cada vértice de $\mathbb{Z}^d$, que correspondem a dois processos de percolação que ocorrem simultaneamente. Construímos nosso espaço de probabilidade de forma que se $x \overset{1}{\rightsquigarrow} y$ no primeiro rótulo, então, necessariamente, $x \overset{\xi^{(x)}}{\rightsquigarrow} y$ no segundo rótulo.

Formalmente, consideramos o espaço mensurável $\left((\{0,1\} \times \{0,1\})^{\mathbb{Z}^d}, C\right)$, onde C é a sigma-álgebra gerada pelos cilindros de $(\{0,1\} \times \{0,1\})^{\mathbb{Z}^d}$. Dado $v \in \mathbb{Z}^d$, denotamos por $(X_v(1), X_v(2))$ a projeção de uma configuração ω no vértice v .

Em nosso auxílio, consideramos uma sequência $\{Z(v)\}_{v \in \mathbb{Z}^d}$ de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$.

Fixada uma ordenação qualquer para os vértices de Λ tomamos

$$F_0 = (A_0, B_0) = (S, \emptyset).$$

Dado $v \in S$, definimos

$$(X_v(1), X_v(2)) = \begin{cases} (1, \xi_0^{(v)}), \text{ se } Z(v) \leq p \\ (0,1), \text{ se } Z(v) > 1-p \text{ e } \xi_0^{(v)} = 0 \\ (0,0), \text{ em outros casos.} \end{cases}$$

Note que a distribuição de $X_v(1)$ e de $X_v(2)$ é Bernoulli com parâmetro p.

Seja v' o primeiro vértice em Λ, conforme a ordenação fixada, não explorado e vizinho de algum $v \in A_0$ tal que $X_v(1) = 1$ (ou seja, o primeiro rótulo de v está aberto). Tomamos:

$$F_1 = (A_0 \cup \{v'\}, B_0 \cup \{\langle v, v' \rangle\}).$$

Se tal v' não existir, tomamos $F_1 = F_0$. Além disso,

$$(\omega(v')(1), \omega(v')(2)) = \begin{cases} (1, \xi_1^{(v)}), \text{ se } Z(v') \leq p \\ (0,1), \text{ se } Z(v') > 1-p \text{ e } \xi_1^{(v)} = 0 \\ (0,0), \text{ em outros casos.} \end{cases}$$

Por indução, supomos $F_n = (A_n, B_n)$ bem definido para algum $n \in \mathbb{N}$. Novamente, seja $v' \in \Lambda$ o primeiro vértice não explorado tal que existe $u \in A_n$ com $u \sim v'$ e $X_u(1) = 1$. Se tal v' existir, tomamos

$$F_{n+1} = (A_n \cup \{v'\}, B_n \cup \{\langle u, v' \rangle\}),$$

caso contrário, definimos $F_{n+1} = F_n$.

Seja d a distância entre u e S dentro do subgrafo F_n. Seja $v \in S$ tal que $\xi_{d-1}^{(v)} = X_u(2)$, por construção, podemos garantir que tal v existe. Tomamos:

$$(\omega(v')(1), \omega(v')(2)) = \begin{cases} (1, \xi_d^{(v)}), \text{ se } Z(v') \leq p \\ (0,1), \text{ se } Z(v') > 1-p \text{ e } \xi_d^{(v)} = 0 \\ (0,0), \text{ em outros casos.} \end{cases}$$

Encerrado o procedimento de exploração, classificamos os demais rótulos conforme o processo de percolação ordinário, ou seja, dado um vértice v não explorado, fazemos $X_v(1) = X_v(2) = 1$ se $Z(v) \leq p$.

Pela nossa construção, todo vértice v' que está 1-conectado a S em Λ no primeiro rótulo, também está $\xi^{(v)}$ conectado a S em Λ no segundo rótulo, pelo que estabelecemos a).

Para estabelecermos b), basta tomarmos, na mesma construção, $\Lambda = \mathbb{Z}^d$, $S = \{x\}$, $\xi^{(x)} = \xi$ e $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Se $|A| = \infty$, então $x \overset{1}{\rightsquigarrow} \infty$ no primeiro rótulo, o que implica que $x \overset{\xi}{\rightsquigarrow} \infty$ no segundo rótulo, de onde vem

$$P_p(x \overset{1}{\rightsquigarrow} \infty) \leq P_p(x \overset{\xi}{\rightsquigarrow} \infty).$$

□

Corolário 2.1. *Para $d \geq 3$, se $p \in (p_c(d), 1 - p_c(d))$ então a palavra aleatória percola em $\mathbb{Z}^d$.*

Demonstração. Se $p \in (p_c(d), \frac{1}{2}]$, é direto da parte b) da proposição que o corolário vale. Se $p \in (\frac{1}{2}, 1 - p_c(d))$, usamos que a distribuição dos vértices fechados nesse regime é igual a distribuição dos vértices abertos no modelo de percolação com parâmetro $1 - p$ (com $p_c(d) < 1 - p < \frac{1}{2}$). Portanto,

$$P_p(x \overset{0}{\rightsquigarrow} \infty) \leq P_p(x \overset{\xi}{\rightsquigarrow} \infty),$$

pelo que concluímos que a palavra aleatória percola também nesse intervalo.

□

É imediato que se todas as palavras são vistas a palavra aleatória percola. Também verificamos que se 1 e 0 percolam, a palavra aleatória percola. No exemplo a seguir, veremos que a recíproca destas afirmações é falsa. O exemplo a seguir é uma adaptação de um exemplo dado originalmente por Kesten e Benjamini em [1]. Abaixo, fixamos $p = \frac{1}{2}$ e consideramos $P = P_{\frac{1}{2}}$. Denotamos por $\omega(v) \in \{0, 1\}$ o estado de um vértice v numa certa realização $\omega \in \Omega$ do processo de percolação.

Exemplo 2.1. ***Um grafo em que quase todas as palavras são vistas mas a palavra 1 não é vista.***

Dado $i \in \mathbb{N}$, chamamos de $G_i = (V_i, E_i)$ ao grafo completo formado pelos vértices $V_i = \{v_1^i, \ldots, v_{3i}^i\}$.

Seja G o grafo cujos vértices são $V = \cup_{i=1}^{\infty} V_i$ e os elos são $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i \cup E^*$. Onde $E^* = \{(v_j^{i-1}, v_1^i) : \forall i \in \mathbb{N} - \{0, 1\} \text{ e } j \in \{1, 2, \ldots, 3i\}\}$. Podemos visualizar G como uma sequência de grafos completos, crescentes em tamanhos, com grafos adjacentes conectados por um único vértice no grafo à direita, que está ligado a todos os vértices do grafo à esquerda.

Consideramos um processo de percolação no grafo G. Primeiro, vejamos que quase certamente a palavra 1 não é vista em G. Por construção, qualquer caminho com uma quantidade infinita de vértices em G, passa por vértices do tipo v_1^i para todo i maior ou igual que um certo $m \in \mathbb{N}$. Portanto, podemos estabelecer que

$$\{1 \text{ é visto em } G\} \subset \{\exists m \in \mathbb{N} : \omega(v_1^i) = 1 \ \forall i \geq m\}.$$

A probabilidade do evento $\{\exists m \in \mathbb{N} : \omega(v_1^i) = 1 \ \forall i \geq m\}$ é 0, já que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$P(\{\exists m \in \mathbb{N} : \omega(v_1^i) = 1 \ \forall i \geq m\}) \leq P(\cap_{i=m}^{m+n} \{\omega(v_1^i) = 1\}) \leq (1/2)^{n+1}.$$

Tomando o limite em n obtemos o resultado desejado. Vejamos agora que quase todas as palavras são vistas numa realização típica do processo de percolação em G. Primeiro, caracterizaremos essas realizações típicas.

Seja Ω_0 o conjunto de configurações $\omega \in \Omega$ tais que, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i \geq m$ todos os segmentos de palavra de tamanho i são vistos no grafo completo G_i na realização ω. Vejamos que $P(\Omega_0) = 1$.

Para que todos os segmentos de tamanho i sejam vistos no grafo completo G_i, é suficiente que nos vértices de G_i leiam-se mais que i números 1 e menos que $2i+1$ números 1. Seja X_i o número de vértices em G_i rotulados com o número 1. Lembrando que o grafo G_i tem $3i$ vértices. Temos que

$$P(|X_i - \frac{3i}{2}| \geq \frac{i}{2}) \leq 2e^{-\frac{3}{2}i}.$$

Onde aplicamos a desigualdade de Hoeffding apresentada no Anexo A.1. A expressão acima é claramente somável em i. Pelo lema de Borel Cantelli, quase certamente existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i \geq m$ vale que $|X_i - \frac{3i}{2}| \leq \frac{i}{2}$. O que nos garante que

$$P(\Omega_0) = 1. \tag{2.2}$$

Queremos ver que numa realização típica do processo de percolação em G, isto é, um $\omega \in \Omega_0$, quase todas as palavras são vistas. É suficiente verificar que $\mu(S_\infty(\omega)) > 0$, já que $\mu(S_\infty(\omega)) \in \{0, 1\}$, como observamos anteriormente.

Chamamos de Ξ_0 ao conjunto de palavras com a seguinte propriedade, $\xi \in \Xi_0$ se existe um m suficientemente grande tal que: nenhuma sequência de m uns ou zeros consecutivos é vista a partir das m primeiras coordenadas de ξ, nenhuma sequência de $m+1$ uns ou zeros consecutivos é vista a partir das $m+1$ coordenadas seguintes e assim por diante. Explicitamente, para todo $i \in \mathbb{N}$ e $x \in [(i-1)m + \frac{(i-1)i}{2}, im + \frac{i(i+1)}{2} - 1]$ o segmento $\xi_{[x,x+m+i]}$ não possui apenas uns ou zeros.

Observação Notamos que se $\xi \in \Xi_0$, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i \in \mathbb{N}$ não aparece nenhum segmento com $m+i$ uns ou zeros consecutivos nas suas primeiras $im + i(i+1)/2 - 1$ coordenadas.

Veremos que todas as palavras do conjunto Ξ_0 são vistas numa realização $\omega \in \Omega_0$ e que $\mu(\Xi_0) = 1$. Primeiro, notamos que se $\xi' \in \Xi_0^c$ então, para todo $m \in \mathbb{N}$ existe um $i \geq m$ e um $x \in [(i-1)m + \frac{(i-1)i}{2}, im + \frac{i(i+1)}{2} - 1]$ tal que o segmento $\xi_{[x,x+m+i]}$ possui apenas uns ou zeros. Dado $m \in \mathbb{N}$, é fácil verificar que

$$\mu(\Xi_0^c) \leq \sum_{m' \geq m} 2m' \left(\frac{1}{2}\right)^{m'}$$

Levando m para o infinito concluímos que $\mu(\Xi_0^c) = 0$.

A partir desse ponto, fixamos uma realização $\omega \in \Omega_0$ e uma palavra $\xi \in \Xi_0$. Tomamos um m grande o suficiente para nossos propósitos. Seja $a_1 = \omega(v_1^{m+1})$ e $n_1 = \max\{k \leq m : \xi_k = a_1\}$. Podemos produzir um caminho $W_1 = (w_1^1, \ldots, w_{n_1-1}^1) \subset G_m$ em que o segmento $\xi_{[n_1-1]}$ é visto, já que todos os segmentos de tamanho m são vistos no grafo completo G_m para uma escolha adequada de m. É inevitável que um caminho de vértices, começando em qualquer vértice de G_m, passe por v_1^{m+1}; portanto, para propagar o caminho em que se lê a palavra ξ, devemos garantir que a letra a_1 é lida dentro do segmento $\xi_{[m]}$. Mas isso é verdadeiro, já que a palavra ξ não possui m uns ou zeros consecutivos nas primeiras m coordenadas. Podemos propagar a ξ conexão para o grafo G_{m+1}, já que $\omega(v_1^{m+1}) = a_1 = \xi_{n_1}$.

Prosseguimos por indução para verificar que a palavra ξ é vista nessa configuração. Dado $i \in \mathbb{N}$, tomemos $a_i = \omega(v_1^{m+i})$ e $n_i = \max\{k \in [n_{i-1}, n_{i-1} + m + i] : \xi_k = a_i\}$. Observamos que n_i está bem definido, já que não aparecem $m + i$ zeros ou uns consecutivos num segmento de tamanho $m + i$ nas primeiras $im + \frac{i(i+1)}{2} - 1$ coordenadas de ξ e $n_{i-1} + m + i \leq im + \frac{i(i+1)}{2} - 1$, já que $n_1 \leq m$. Vamos admitir, como hipótese de indução, que somos capazes de produzir um caminho de vértices $W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_i$ com $W_k \subset G_{m+k-1}$ para todo $k = 1, 2, \ldots, i$, em que se lê o segmento $\xi_{[n_i-1]}$. Queremos estender esse caminho para um em que somos capazes de ler o segmento $\xi_{[n_{i+1}-1]}$. É suficiente apontar um caminho de vértices $W_{i+1} \subset G_{m+i}$, começando de v_1^{m+i}, em que se lê o segmento $\xi_{[n_i, n_{i+1}-1]}$. Como todos os segmentos de tamanho $m + i$ são lidos no grafo G_{m+1}, isto é possível. Concluímos que, para todo $i \in \mathbb{N}$, o segmento $\xi_{[n_i-1]}$ é visto. Podemos aplicar o Lema de Konig[2] para concluir que a palavra ξ é vista.

$\square$

[2]Ver Demonstração do Teorema 3.1, onde aplicamos o Lema de Konig num problema similar.

Capítulo 3

Palavras na rede hipercúbica

Nessa seção, provaremos que, para $d \geq 3$ todas as palavras são vistas em $\mathbb{Z}^d$ se $p \in (p_c(d), 1 - p_c(d))$. Se p está fora deste intervalo crítico, é evidente que nem todas as palavras são vistas, já que se $p < p_c(d)$ a palavra $(1, 1, \ldots)$ não é vista e se $p > 1 - p_c(d)$ a palavra $(0, 0, \ldots)$ não é vista.

Kesten e Benjamini estabelecem em [1] que todas as palavras são vistas para $d \geq 10$ no grafo $\mathbb{Z}^d$ orientado, se $p \in (p_c(d), 1 - p_c(d))$. Isso implica, em particular, que todas as palavras são vistas no grafo $\mathbb{Z}^d$ para p nesse intervalo. Posteriormente, Kesten, Zhang e Sidoravicius [6] verificaram que o mesmo vale para o grafo $\mathbb{Z}_{\text{cp}}$, obtido de $\mathbb{Z}^2$ pela adição de elos diagonais em cada face do grafo.

Para $d = 1, 2$ podemos mostrar que nem todas as palavras são vistas para qualquer valor de p. Primeiro, vejamos que a palavra aleatória não percola em $\mathbb{Z}$. Seja $\xi \in \Xi$ e $0 < p < 1$ (o caso em que $p \in \{0, 1\}$ é trivial). Dado um vértice $v \in \mathbb{Z}$, a probabilidade de que exista um caminho $(v, v_0, \ldots, v_{n-1})$ com $\omega(v_i) = \xi_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ é igual a

$$2p^{\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i}(1-p)^{n-\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i},$$

que é limitada por cima por

$$\max\left(2p^{\frac{n}{2}}, 2\,(1-p)^{\frac{n}{2}}\right).$$

Que vai para 0 quando $n \to \infty$. Portanto, concluímos que $P_p(v \overset{\xi}{\rightsquigarrow} \infty) = 0$ o que implica que $P_p(\xi \text{ é vista em } \mathbb{Z}) \leq \sum_{v \in Z} P_p(v \overset{\xi}{\rightsquigarrow} \infty) = 0$.

Para o caso $d = 2$, como $p_c(2) > \frac{1}{2}$, não há nenhum valor de p para o qual $(1, 1, \ldots)$ e $(0, 0, \ldots)$ sejam vistas com probabilidade positiva, pelo que se segue que nem todas as palavras são vistas. É um problema em aberto determinar se, apesar disso, quase todas as palavras são vistas em $\mathbb{Z}^2$.

Seguindo [10], mostraremos que todas as palavras são vistas em $\mathbb{Z}^d$ quando $p \in (p_c(d), 1 - p_c(d))$ e $d \geq 3$.

Teorema 3.1. *Seja d um número natural maior ou igual a 3 e $p \in (p_c(d), 1 - p_c(d))$.*

a) Vale que $P_p(\{S_\infty = \Xi\}) = 1$. Além disso, existe um $l = l(d, p)$ tal que, quase certamente, todas as palavras são vistas a partir da laje $\mathbb{Z}^2 \times [0, l]^{d-2}$.

b) Seja $B_m = [-m, m]^d$. Existem $k, h \in \mathbb{N}$ e $c_0 = c_0(d, p)$, tais que para todo $m \geq h$,

$$P_p(\{S_{B_{mk}} = \Xi\}) \geq 1 - e^{-c_0 m^{d-1}}.$$

Para provar o Teorema 3.1, argumentaremos que os caminhos nos quais um segmento da palavra ξ é observado se propagam com alta probabilidade. Fazemos isso a partir de um procedimento de renormalização.

3.1 Renormalização

3.1.1 Contexto Microscópico

Seja $k \geq 1$ inteiro. Consideramos os seguintes subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$:

$$\mathbb{S}_h := \mathbb{Z}^2 \times (0, hk] \times (-k, k]^{d-3}, h \geq 2,$$

$$\Lambda_n := [-kn, kn]^2 \times (0, hk] \times (-k, k]^{d-3}, n \geq 1,$$

$$\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_n := \{x \in \Lambda_n : x \sim y \text{ para algum } y \in \mathbb{S}_h \backslash \Lambda_n\}.$$

Note que $\mathbb{S}_h$ é uma laje que contém a caixa finita Λ_n. Consideramos também a fronteira de Λ_n dentro de $\mathbb{S}_h$, que denotamos por $\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_n$. Denotamos por P_p^h a medida em $\mathbb{S}_h$ correspondente ao processo de percolação de sítios com parâmetro p. Os conjuntos descritos estão ilustrados na Figura 3.1.

Tomamos

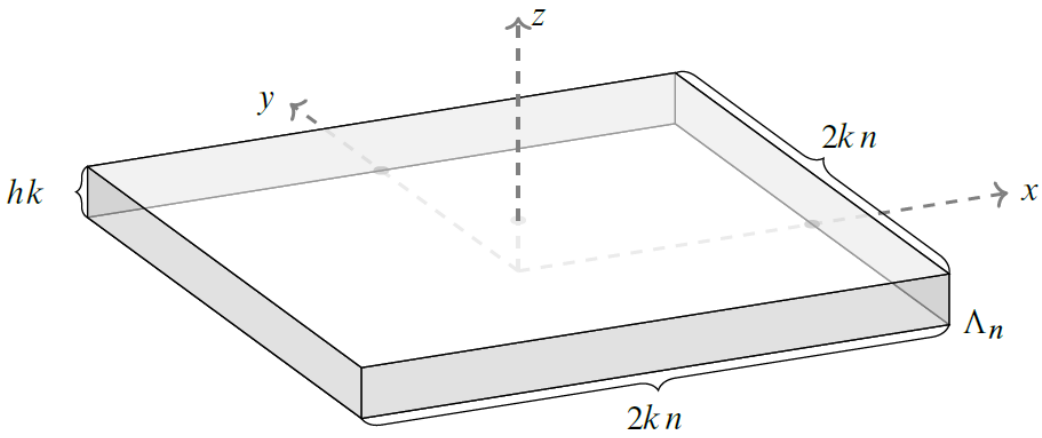
$$C := C(K) = |[-k, k]^d| = (2k + 1)^d.$$

Sejam $n, n' \in \mathbb{N}, \xi \in \Xi, T \subset \partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_n$ e $t : T \to [0, Cn]$. Dizemos que o par (T, t) ξ-propaga para (T', t'), onde $T' \subset \partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda'_n$ e $t' : T' \to [0, Cn']$ se, para todo $y \in T'$, existe um $x \in T$ tal que $x \xrightarrow{\xi_{[t_x, t'_y]}} y$ a partir de um caminho de vértices contido em Λ'_n. Denotamos esse evento por $T \overset{\xi}{\rightsquigarrow} T'$, deixando implícita a dependência que o evento tem das funções t e t'.

Intuitivamente, podemos pensar em $T \overset{\xi}{\rightsquigarrow} T'$ como o evento em que os caminhos em que um segmento da palavra ξ é visto se estendem de $\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_n$ à $\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda'_n$. As funções t e t' retêm a informação de onde nos encontramos na leitura da palavra. A exigência de que $t_x \leq Cn$ para todo $x \in T$ se justificará posteriormente.

Similarmente, dado $T \subset \partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_n$, dizemos que o evento $\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_{m+1} \overset{\xi}{\rightsquigarrow} T$ ocorreu se para todo $y \in T$ existem $x \in \partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_{m+1}$ e $t_x \leq Cn$ tais que $x \xrightarrow{\xi_{[t_x]}} y$.

Figura 3.1: Ilustração da laje $\mathbb{S}_h$ e seus subconjuntos.



Fonte: [10]

O resultado a seguir, que estabeleceremos ao longo da dissertação, garante que essas ξ-conexões se espalham com alta probabilidade.

Proposição 3.1. *Para todo $p \in (p_c(d), 1 - p_c(d))$, existem $\delta, c > 0$ e $k \geq 1$ tais que, para todos $n \geq 1$, $h \geq 20$, $\xi \in \Xi$ e $T \subset \partial_{\mathbb{S}_h}\Lambda_n$ com $|T| \geq 8\delta|\partial_{\mathbb{S}_h}\Lambda_n|$ vale que:*

$$P_p^h\left(\{\exists T' \subset \partial_{\mathbb{S}_h}\Lambda_{2n} \text{ tal que } |T'| \geq 8\delta|\partial_{\mathbb{S}_h}\Lambda_{2n}| \text{ e } T \overset{\xi}{\rightsquigarrow} T'\}\right) \geq 1 - e^{-chn}$$

Demonstração do Teorema 3.1. Primeiro, iremos estabelecer a partir da Proposição 3.1 que ξ-propagações mais distantes também ocorrem com alta probabilidade. Mais precisamente, verificaremos para todos $m, j \in \mathbb{N}$ vale que:

$$P_p^h\left(\{\exists T_j \subset \partial_{\mathbb{S}_h}\Lambda_{2^j m} \text{ tal que } |T_j| \geq 8\delta|\partial_{\mathbb{S}_h}\Lambda_{2^j m}| \text{ e } \partial_{\mathbb{S}_h}\Lambda_m \overset{\xi}{\rightsquigarrow} T_j\}\right) \geq 1 - e^{-2^{j-1}chm} \quad (3.1)$$

A partir da Equação (3.1) controlaremos a probabilidade de que exista um segmento de palavra em $\Xi_{C2^j m}$ que não é visto.

Tomemos $A_j(\xi) = \{\exists T_j \subset \partial_{\mathbb{S}_h}\Lambda_{2^j m} \text{ tal que } |T_j| \geq 8\delta|\partial_{\mathbb{S}_h}\Lambda_{2^j m}| \text{ e } \partial_{\mathbb{S}_h}\Lambda_m \overset{\xi}{\rightsquigarrow} T_j\}$. A Proposição 3.1 implica diretamente que

$$P_p^h(A_1(\xi)) \geq 1 - e^{-chm}$$

e

$$P_p^h(A_j(\xi)| \cap_{i=1}^{j-1} A_i(\xi)) \geq 1 - e^{-2^{j-1}chm}$$

para todo $j \in \mathbb{N} - \{1\}$. Portanto:

$$P_p^h(A_j(\xi)) \geq P_p^h\left(\cap_{i=1}^j A_i(\xi)\right) = P_p^h(A_1(\xi)) \prod_{i=2}^{j} P_p^h(A_i(\xi) | \cap_{k=1}^{i-1} A_k(\xi))$$

$$\geq \prod_{i=1}^{j}(1 - e^{-2^{i-1}chm}) = (1 - e^{-2^{j-1}chm}) \prod_{i=1}^{j-1}(1 - e^{-2^{i-1}chm})$$

$$\geq (1 - e^{-2^{j-1}chm})$$

Na última passagem, utilizamos que $\prod_{i=1}^{j-1}(1 - e^{-2^{i-1}chm}) \in (0, 1)$.

Sejam

$$A_j = \bigcap_{\xi \in \Xi_{C2^j m}} A_j(\xi)$$

e

$$B_j = \{\exists \xi \in \Xi_{C2^j m} \text{ tal que } \xi \text{ não é visto a partir de } \partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_m\}.$$

É fácil notar que $B_j \subset (A_j)^c$, já que a ocorrência de B_j implica que um certo segmento $\xi \in \Xi_{C2^j m}$ não se propaga a partir de $\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_m$, ou seja, ocorre $(A_j(\xi))^c$ para algum $\xi \in \Xi_{C2^j m}$.

Podemos estabelecer que

$$P_p^h(B_j) \leq P_p^h((A_j)^c) = P_p^h(\bigcup_{\xi \in \Xi_{C2^j m}} (A_j(\xi))^c)$$

$$\leq \sum_{\xi \in \Xi_{C2^j m}} P_p^h((A_j(\xi))^c) \leq 2^{C2^j m} e^{-2^{j-1}chm}$$

$$= \exp\left(m2^j(C \ln 2 - ch2^{-1})\right).$$

Se escolhermos h suficientemente grande, podemos garantir que:

$$P_p^h(B_j) \leq e^{-D2^j m}$$

para alguma constante $D > 0$, a qual pode ser tomada arbitrariamente grande.

Para finalizarmos a demonstração da parte a) do Teorema 3.1, é suficiente verificarmos que o evento $\{\exists \xi \in \Xi$ tal que ξ não é vista de $\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_m\}$ está contido em $\cup_{j=1}^{\infty} B_j$. Equivalentemente, $\{\forall \xi \in \Xi$ a palavra ξ é vista de $\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_m\} \supset \cap_{j=1}^{\infty} B_j^c$. Notemos que se $\cap_{j=1}^{\infty} B_j^c$ ocorre, todos os segmentos finitos de uma certa palavra ξ são vistos no grafo. Isso é suficiente para concluir que uma dada palavra ξ é vista por uma aplicação do Lema de Konig[1].

[1] O Lema de Konig garante que todo grafo infinito, localmente finito e conexo possui um caminho infinito. Podemos aplicar o Lema de Konig no grafo formado por $\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_m$ unido com todos os vértices que lhe estão ξ conectados (no sentido de que um certo segmento finito de ξ é visto num caminho que liga $\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_m$ ao vértice em questão).

$$P_p^h(\cup_{j=1}^{\infty} B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} P_p^h(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-D2^j m}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} e^{(-Dm)^j} = \frac{e^{-Dm}}{1-e^{-Dm}} \leq e^{-m}$$

se tomarmos D grande o suficiente.

Com isso, verificamos que

$$P_p^h(\{\exists \xi \in \Xi \text{ tal que } \xi \text{ não é vista de } \partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_m\}) \leq e^{-m}. \tag{3.2}$$

Tomando o limite com m indo para o infinito, podemos concluir que, com probabilidade 1, todas as palavras são vistas a partir de $\mathbb{S}_h$. Lembramos que $\mathbb{S}_h := \mathbb{Z}^2 \times (0, hk] \times (-k, k]^{d-3}$, efetuando uma translação nas últimas $d-3$ coordenadas, podemos estabelecer que todas as palavras são vistas de $\mathbb{Z}^2 \times (0, hk] \times (-0, 2k]^{d-3} \subset \mathbb{Z}^2 \times [0, hk]^{d-2}$. Em particular, quase certamente todas as palavras são vistas da laje $\mathbb{Z}^2 \times [0, hk]^{d-2}$, como afirmado no item a) do Teorema 3.1.

Também podemos utilizar a Equação (3.2) para provarmos a parte b) do Teorema 3.1 pelo seguinte raciocínio. Para alguma constante c', podemos tomar $c'm^{d-2}$ lajes disjuntas, isomorfas a S_h, cujas interseções com B_{km} formam conjuntos isomorfos a Λ_m. Denotemos o conjunto dessas lajes por A. No caso tridimensional, essa construção é intuitiva. Como as lajes em $\mathbb{Z}^3$ correspondem a uma quantidade finita de planos empilhados, podemos sobrepor lajes de mesmo tamanho até preenchermos a caixa B_{km}. Vejamos essa construção com mais detalhes. Dado $i = (i_1, i_2, \ldots, i_{d-2}) \in \mathbb{Z}^{d-2}$, tomamos o conjunto

$$\mathbb{S}_h^i = \mathbb{Z}^2 \times (i_1 hk, (i_1+1)hk] \times \prod_{j=2}^{d-2} ((2i_j - 1)k, (2i_j + 1)k].$$

É direto que os conjuntos da forma $\mathbb{S}_h^i$ são disjuntos para índices distintos e isomorfos a $\mathbb{S}_h = \mathbb{S}_h^0$. Seja

$$A = \{i \in \mathbb{Z}^{d-2} : \mathbb{S}_h^i \cap B_{km} = [-km, km]^2 \times (i_1 hk, (i_1+1)hk] \times \prod_{j=2}^{d-2} ((2i_j - 1)k, (2i_j + 1)k]\}.$$

Em outras palavras, A é o conjunto de índices em $\mathbb{Z}^{d-2}$ para os quais $\mathbb{S}_h^i \cap B_{km}$ é isomorfo a Λ_m. Dado $i \in A$, seja $\Lambda_m^i = \mathbb{S}_h^i \cap B_{km}$. Cada um dos Λ_m^i, com $i \in A$, nos dá uma oportunidade de enxergar todas as palavras a partir da caixa B_{km}, com probabilidade maior ou igual a e^{-m}, como garantido pela Equação (3.2). Como os conjuntos Λ_m^i são disjuntos, temos que:

$$
\begin{aligned}
P_p(\{S_{B_{km}} \neq \Xi\}) &\leq P_p^h\left(\{\exists i \in A : \exists \xi \in \Xi \text{ tal que } \xi \text{ não é visto de } \Lambda_m^i\}\right) \\
&\leq \prod_{i \in A} P_p^h(\{\exists \xi \in \Xi \text{ tal que } \xi \text{ não é visto de } \Lambda_m^i\}) \\
&\leq (e^{-m})^{|A|}
\end{aligned}
$$

Para finalizar a demonstração, só precisamos de uma cota inferior para o tamanho do conjunto A.

Seja A_0 uma família de índices inteiros l que satisfazem, $lh \geq -m$ e $(l+1)h \leq m$, ou, o que é equivalente: $-\frac{m}{h} \leq l \leq \frac{m}{h} - 1$. Nessas condições, também vale que $(2l+1) \leq m$ e $(2l-1) \geq -m$. Não é difícil notar que todo índice $i \in (A_0)^{d-2}$ também pertence a A. Além disso, A_0 possui pelo menos cm índices para certo $c > 0$ (para $m \geq h$). Portanto, $|A| \geq |(A_0)^{d-2}| \geq c^{d-2}m^{d-2}$. Tomando $c' = c^{d-2}$, verificamos que:

$$
P_p^h(\{S_{B_{km}} \neq \Xi\}) \leq e^{-c'm^{d-1}}.
$$

□

3.1.2 Notação e lemas

Para verificar a Proposição 3.1, primeiro apresentamos a notação adequada. Consideramos o seguinte conjunto de vértices:

$$
V := \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Z}^3 : v_1 \in 2\mathbb{Z}, \frac{v_1}{2} + v_2 \in 2\mathbb{Z}, \frac{v_1}{2} + v_3 \in 2\mathbb{Z}, 0 < v_3 < h\},
$$

munido do seguinte conjunto de elos orientados:

$$
\vec{E} := \{\vec{uv} \in \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3 : v = u + (2, \epsilon, \epsilon') \text{ com } \epsilon, \epsilon' \in \{-1, 1\}\}.
$$

Chamamos de $\vec{G}$ o grafo orientado resultante.

Dado $U \subset V$ consideramos:

$$
U^+ := \bigcup_{u \in U} \{v \in V : \vec{uv} \in \vec{E}\},
$$

$$
\partial^+ U := U^+ \backslash U.
$$

Isto é, $\partial^+ U$ é a fronteira externa dos vértices de U.

Consideramos um processo de percolação em $\vec{G}$. Pensaremos nesse grafo como uma versão renormalizada da laje $\mathbb{S}_h$ através da seguinte relação, para cada vértice $u \in V$ consideramos o conjunto

$$B^u := ku + (-k, k]^d \subset \mathbb{S}_h. \tag{3.3}$$

Na expressão acima, identificamos $u = (u_1, u_2, u_3)$ como o vértice $(u_1, u_2, u_3, 0, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{Z}^d$. É possível verificar que se u e v são vértices distintos então $B^u \cap B^v = \emptyset$ e que $\bigcup_{u \in V} B^u = \mathbb{S}_h$. Por conta dessa relação, às vezes nos referimos aos grafos $\mathbb{S}_h$ e $\vec{G}$ como grafo microscópico e grafo macroscópico.

Nosso objetivo é usar um procedimento de renormalização explorando certas propriedades de conectividade do grafo $\vec{G}$ para provar que todas as palavras são vistas em $\mathbb{S}_h$.

Seja $n \geq 3$ um inteiro ímpar e $h \geq 20$ par, consideramos os seguintes subconjuntos de $\vec{G}$:

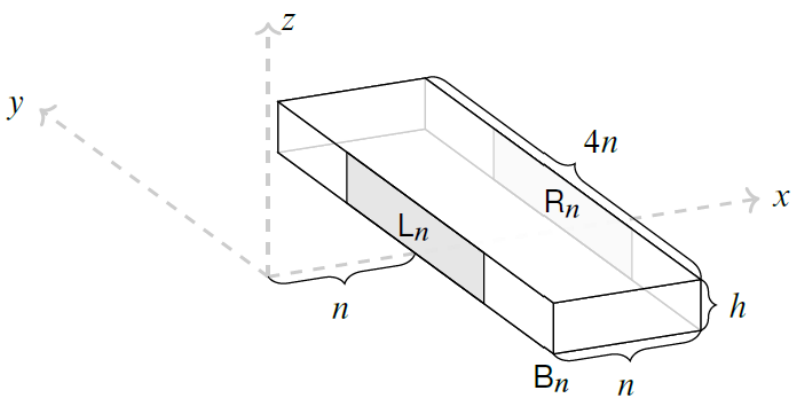
$$B_n = V \cap ((n, 2n) \times (-2n, 2n) \times (0, h)), \tag{3.4}$$

$$L_n = V \cap (\{n+1\} \times [-n, n] \times (0, h)), \tag{3.5}$$

$$R_n = V \cap (\{2n-2\} \times [-n, n] \times (0, h)). \tag{3.6}$$

Isso é, B_n é um paralelepípedo, L_n é um segmento de sua face esquerda e R_n um segmento de sua face direita, como ilustrado na Figura 3.2.

Figura 3.2: Ilustração dos conjuntos B_n, L_n e R_n.



Fonte: [10]

Consideramos uma ordenação qualquer para os vértices de B_n. Fixado um subconjunto $S \subset L_n$, usamos o seguinte procedimento para determinar o aglomerado de vértices ligados ao conjunto S [2]. Sejam $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sequências crescentes de vértices em B_n com $U_0 = S$ e $V_0 = \emptyset$. O conjunto U_i pode ser interpretado como o aglomerado de vértices de B_n, ligados a S, detectados no i-ésimo passo da exploração. O conjunto V_i representa

[2] Não estamos necessariamente explorando o aglomerado de vértices 1-conectados com S, apenas vértices ligados a S por algum critério.

a fronteira externa desse aglomerado, detectada no i-ésimo passo da exploração. Seja $X_i = (U_i, V_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Dizemos que X_i é uma sequência de exploração em B_n se

$$U_{i+1} = U_i \cup z_i,\ \ V_{i+1} = V_i$$

ou

$$U_{i+1} = U_i,\ \ V_{i+1} = V_i \cup z_i.$$

Onde z_i é o primeiro vértice de B_n conforme a ordenação fixada tal que $z_i \in \partial^+ U_i \backslash V_i$. Se não existir um z_i nessas condições, definimos $X_{i+1} = X_i$. Também tomamos

$$U_\infty := \lim_{i\to\infty} U_i.$$

O U_∞ representa o aglomerado de vértices ligados ao conjunto S ao final do procedimento de exploração.

Lema 3.1. *Sejam $h \geq 20$ e $\delta > 0$. Seja $S \subset L_n$ com $|S| \geq \delta |L_n|$ e $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de exploração em B_n a partir de S. Existem $\zeta < 1$ e $c > 0$ dependendo de δ tais que, se para todo $i \geq 0$*

$$P(U_{i+1} = U_i \cup z_i | X_0, \ldots, X_i) \geq \zeta \text{ quase sempre,} \tag{3.7}$$

então

$$P\left(|U_\infty \cap R_n| \geq \frac{1}{1000}|R_n|\right) \geq 1 - e^{-chn}.$$

A Equação (3.7) indica que em cada passo do procedimento de exploração do aglomerado de S, independente da história do processo, a probabilidade de acrescentar um vértice ao aglomerado é maior do que ζ. Se vale isso, é alta a probabilidade de que pelo menos $\frac{1}{1000}$ dos vértices de R_n estejam no aglomerado de vértices ligados a S. A demonstração do Lema 3.1 será feita na Seção 3.2.

Dado $u \in V$, associamos

$$F^u = ku + \{-k\} \times (-k, k]^{d-1}$$

em $\mathbb{Z}^d$. Notemos que F^u e B^u (dado pela Equação (3.3)) são disjuntos. Além disso, se $\vec{uv} \in \vec{E}$ então $F^v \cap B^u \neq \emptyset$. A Figura 3.3 ilustra a relação entre os conjuntos B^u e F^v.

Dados $\delta \in (0, 1)$ e $u \in V$, chamamos de δ-semente para u a um par (S, t) tal que

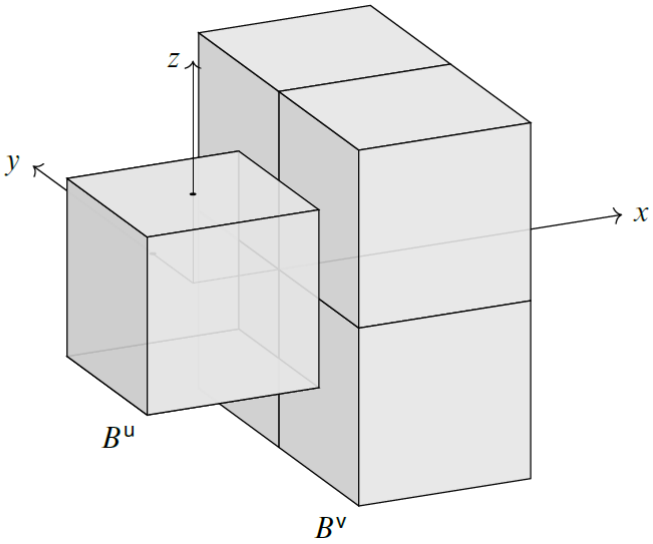
$$S \subset F^u \text{ com } |S| \geq \delta F^u$$

e

$$t = \{t_x\}_{x\in S} \text{ é um sequência de inteiros com } t_x \leq C|u_1|.$$

O inteiro t_x representa o momento em que atingimos o vértice x na leitura da palavra ξ. Denotamos por $\mathcal{S}^u_\delta$ o conjunto de δ-sementes para u.

Figura 3.3: Ilustração dos conjuntos da forma B^u.



Fonte: [10]

Procedemos da seguinte forma, dado $L \subset \mathbb{Z}^d$, exploramos os vértices que podem ser alcançados enquanto lemos a palavra ξ examinando caixas da forma B^u. Quando nosso procedimento de exploração atingir uma caixa B^u, vai existir um conjunto de vértices $S \subset F^u$ tal que todo vértice de S está ξ-conectado a algum vértice de L sem usar vértices de B^u. Se o conjunto S for suficientemente grande, a ponto de garantir que o procedimento de exploração continue com alta probabilidade, chamamos S de semente.

Sejam $u \in V$, $\delta \in (0, \frac{1}{64000})$ e $\xi \in \Xi$. Seja também (S^u, t^u) uma δ-semente para u. Consideramos o seguinte evento

$$G_u^\xi(S^u, t^u) = \bigcap_{v \in \{u\}^+} \{\text{Existe uma } 64000\delta\text{-semente para } v \text{ tal que: } \forall y \in S^v, \tag{3.8}$$

$$\exists x \in S^u \text{ com } x \xrightarrow{\xi_{[t_x^u, t_y^v]}} y \text{ por vértices de } F^u \cup B^u.\} \tag{3.9}$$

O resultado a seguir garante que a probabilidade de prosseguir com o procedimento de exploração é alta, dado que k seja grande o suficiente.

Proposição 3.2. *Sejam $p \in (p_c(d), 1 - p_c(d))$ e $\zeta < 1$. Existem $\delta = \delta(d, p)$, com $0 < \delta < \frac{1}{64000}$, e $k = k(d, p, \zeta) \geq 1$ tais que para quaisquer $\xi \in \Xi, u \in V$ e $(S, t) \in \mathcal{S}_\delta^u$*

$$P_p(G_\xi^u(S, t)) \geq \zeta.$$

Observação. Durante a demonstração vai ficar claro que a escolha de δ não depende de ζ, o que será importante posteriormente.

Demonstração. Dado $v \in \{u\}^+$, seja $T(v) = \{y \in F^v : y$ está 1-conectado a S dentro de $B^u\}$. Pela Desigualdade de Wierman vale que:

$$P_p(G^u_\xi(S,t)) \geq P_p\left(\bigcap_{v\in\{u\}^+} \{|T(v)| \geq 64000\delta|F^v|\}\right).$$

Portanto, é suficiente provar que existem δ e k tais que

$$P_p\left(\bigcap_{v\in\{u\}^+} \{|T(v)| \geq 64000\delta|F^v|\}\right) \geq \zeta.$$

Mais do que isso, por simetria e usando a Desigualdade FKG (os eventos em questão são crescentes) basta provarmos que

$$P_p\left(|T(v)| \geq 64000\delta|F^v|\right) \geq \zeta^{\frac{1}{|\{u\}^+|}}$$

para um $v \in \{u\}^+$ fixado.

Como ilustrado na Figura 3.3, os conjuntos F^v e B^u se interceptam num quadrado com o lado de tamanho k. Seja $\hat{F}$ o terço central dessa interseção, ou seja, o conjunto de vértices de $F^v \cap B^u$ que está a uma distância de no mínimo $\frac{k}{3}$ das arestas do quadrado $F^v \cap B^u$.

O Teorema 1 de [11] garante que numa caixa de tamanho k a probabilidade de que existam duas componentes conexas distintas com tamanho maior que $\sqrt{k}$ vai para 0 quando k vai para o infinito .

Iremos argumentar que a probabilidade de que pelo menos $64000\delta|F|$ pontos de $\hat{F}$ estejam 1-conectados a uma distância $\frac{k}{3}$ dentro de B^u vai para 1 quando k vai para o infinito. Também argumentaremos que para qualquer escolha de semente S a probabilidade de que pelo menos um vértice em S esteja 1-conectado a uma distância $\sqrt{k}$ dentro de $B^u \cap F^u$ vai para 1 quando k vai para o infinito. Portanto, os distintos aglomerados (muitos saindo de $\hat{F}$ e pelo menos um saindo de S) se encontram com uma probabilidade que vai para 1 quando k vai para o infinito. Quando esses aglomerados se encontram é claro que pelo menos $64000\delta|F^v|$ vértices de $\hat{F}$ estão conectados a S.

Sejam

$$F' = \{x \in \hat{F} : x \text{ está 1-conectado a uma distância } \frac{k}{3} \text{ dentro de } B^u \cup F^u\}$$

e

$$S' = \{x \in S : x \text{ está 1-conectado a uma distância } \sqrt{k} \text{ dentro de } B^u\}.$$

Por tudo o que foi discutido anteriormente, é suficiente provarmos que

$$P_p(|F'| \geq 64000\delta|F|) \xrightarrow{k\to\infty} 1 \tag{3.10}$$

e

$$\inf_{S\in\mathcal{S}^u_\delta} P_p(|S'|\geq 1) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1. \tag{3.11}$$

Vejamos primeiro (3.10). Para todo $x\in\hat{F}$, o conjunto $B(x,\frac{k}{3})\cap B^u$ é isomorfo a $B(0,\frac{k}{3})\cap\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^2$ (note que essa afirmação não vale para todo vértice de F, por isso nos restringimos a $\hat{F}$).

Seja $\theta>0$ a probabilidade de que 0 esteja num aglomerado infinito num processo de percolação em $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^2$ (é conhecido que os parâmetros críticos em $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^{d-1}$ e $\mathbb{Z}^d$ coincidem, ver [5]). A probabilidade de que um vértice x esteja 1-conectado a uma distância $\frac{k}{3}$ dentro de $B^u\cup F^u$ é maior do que a probabilidade de que um vértice x esteja conectado num aglomerado infinito no *half-space* $\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^2$, que é θ. Portanto, F' domina estocasticamente uma variável aleatória com distribuição Binomial com parâmetros $|\hat{F}|$ e θ, que denotaremos por Z.

$$P_p(|F'|\geq\theta|\hat{F}|/2)\geq P(Z\geq\frac{\theta}{2}|\hat{F}|)$$

que vai para 1 quando k vai para o infinito, pela lei dos grandes números.

Podemos tomar k suficientemente grande tal que $\delta|\hat{F}|/2\geq 64000\delta|\hat{F}|$ (perceba que a escolha de k não depende de ζ). De onde vem (3.10).

Para verificar (3.11), notamos que $P_p(|S'|\geq 1)$ depende estritamente do tamanho de $|S|$ e é crescente como função de $|S|$. Portanto, como $|S|\geq\delta|F^u|$ é fácil concluir que

$$P_p(|S'|\geq 1)\geq 1-(1-\theta)^{|\delta||F^u|}$$

para todo $S\in\mathcal{S}^u_\delta$, de onde segue (3.11). □

3.1.3 O Procedimento de Renormalização

Fixamos $p\in(p_c(d),1-p_c(d))$. Seja $\delta=\delta(d,p)$ dado pela Proposição 3.2 (note que δ não depende de ζ, o que é fundamental) e ζ correspondente dado pelo Lema 3.1 [3]. Voltando à Proposição 3.2, tomamos k correspondente a ζ.

Provaremos a Proposição 3.1 no caso em que $n=4n'+3$ para algum $n'\in\mathbb{N}$. É fácil notar que esse caso é suficiente para verificar a Proposição 3.1.

Consideramos as versões renormalizadas (microscópicas) dos conjuntos definidos em (3.4), (3.5) e (3.6) (são subconjuntos de $\mathbb{S}_h$):

$$B_{n,\text{mic}}=[kn,2kn]\times(-2kn,2kn]\times(0,hk]\times(-k,k]^{d-3}, \tag{3.12}$$

[3] Adicionalmente, exigimos que o ζ escolhido funcione também para $\frac{\delta}{2}$ por motivos que farão sentido depois.

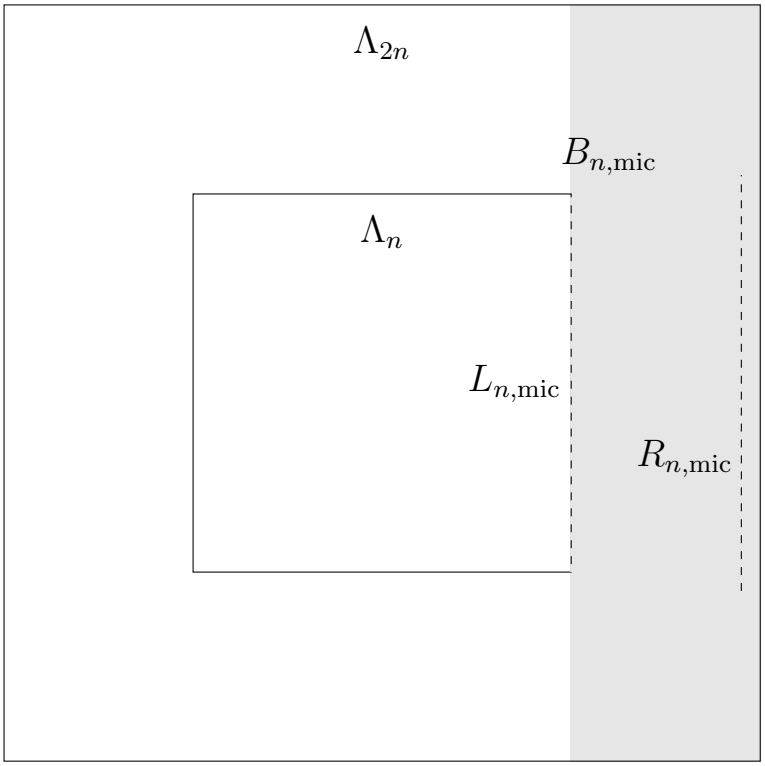
$$L_{n,\text{mic}} = \bigcup_{u \in L_n} F^u = \{kn\} \times (-kn, kn] \times (0, hk] \times (-k, k]^{d-3} \tag{3.13}$$

e

$$R_{n,\text{mic}} = \bigcup_{u \in \partial^+ R_n} F^u = \{(2n-1)k\} \times (-kn-k, kn+k] \times (0, hk] \times (-k, k]^{d-3}. \tag{3.14}$$

O conjunto $B_{n,\text{mic}}$ precisa ser um pouco maior que $\cup_{u \in B_n} B^u$ (que não inclui $L_{n,\text{mic}}$) para o raciocínio funcionar. Notemos que $L_{n,\text{mic}}$ é um quadrante de $\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_n$ e $R_{n,\text{mic}}$ um quadrante de $\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_{2(n-1)}$, ambos contidos em $B_{n,\text{mic}}$. Na Figura 3.4 apresentamos uma ilustração esquematizada dos conjuntos em questão. Os segmentos tracejados representam $L_{n,\text{mic}}$ e $R_{n,\text{mic}}$. O retângulo sombreado representa $B_{n,\text{mic}}$.

Figura 3.4: Ilustração esquemática dos conjuntos $B_{n,\text{mic}}$, $L_{n,\text{mic}}$ e $R_{n,\text{mic}}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para provar a Proposição 3.1, é suficiente verificar que, dados $\xi \in \Xi$, $T \subset L_{n,\text{mic}}$ com $|T| \geq 2\delta |L_{n,\text{mic}}|$ e $t : T \to [0, Cn]$ o evento

$$A(T) = \{\exists T' \subset R_{n,\text{mic}} \text{ com } |T'| \geq 8\delta \cdot |\partial_{\mathbb{S}_h} \Lambda_{2(n-1)}| \text{ e existe } t' : T' \to [0, 2Cn] \text{ tal que}$$
$$\text{para todo } y \in T', \exists x \in T \text{ tal que } x \overset{\xi_{[t_x, t'_y]}}{\longrightarrow} y \text{ por vértices de } B_{n,\text{mic}}\}$$

é tal que:

$$P_p(A(T)) \geq 1 - e^{-chn}. \tag{3.15}$$

Demonstração da Equação (3.15). Sejam $T \subset L_{n,\text{mic}}$ com $|T| \geq 2\delta|L_{n,\text{mic}}|$ e $t : T \to [0, Cn]$. Consideramos

$$T_{\text{mac}} = \{u \in L_n : |T \cap F^u| \geq \delta|F^u|\}.$$

Podemos garantir que

$$|T_{\text{mac}}| \geq \delta|L_n|. \tag{3.16}$$

Ora, se houvesse $|T_{\text{mac}}| < \delta|L_n|$ então

$$\begin{aligned} |T| &= \sum_{u \in T_{\text{mac}}} |F^u \cap T| + \sum_{u \in L_n \setminus T_{\text{mac}}} |F^u \cap T| \\ &< \delta|F^u||L_n| + \delta|F^u||L_n| = 2\delta|L_{n,\text{mic}}|. \end{aligned}$$

O que seria uma contradição.

Seja ω uma realização de um processo de percolação com parâmetro p em $B_{n,\text{mic}}$. Dado $U \subset B_n$ consideramos

$$B^U := \bigcup_{u \in U} B^u.$$

Dado $v = (v_1, v_2, v_3) \in U^+$ consideramos os seguintes conjuntos (definidos com respeito a ω):

$$S^v(U) := \{y \in F^v : \exists x \in T \text{ tal que } x \xrightarrow{\xi_{[t_x,t]}} y \text{ em } B^U \text{ para algum } t \leq Cv_1\}$$

e para $y \in S^v(U)$:

$$t^v_y(U) := \min\{t \leq Cv_1 : \exists x \in T \text{ tal que } x \xrightarrow{\xi_{[t_x,t]}} y \text{ em } B^U\}.$$

Vamos definir uma sequência de exploração aleatória $\{X_i = (U_i, V_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ em B_n mensurável com respeito a ω e tal que para todo $i \geq 0$

$$\forall v \in U_i^+, (S^v(U_i), t^v(U_i)) \text{ é uma } \delta\text{-semente para } v. \tag{3.17}$$

Onde $t^v(U_i) : S^v(U_i) \to [0, Cv_1]$ é a função que leva y em $t^v_y(U_i)$.

Primeiro, definimos

$$U_0 = \{u \in T_{\text{mac}} : G^u_\xi(T \cap F^u, t|_{T \cap F^u}) \text{ ocorre}\} \text{ e } V_0 = \emptyset.$$

A definição acima faz sentido pois $(T \cap F^u, t|_{T \cap F^u})$é uma $\delta-$semente para u, pela definição de T_{mac}. Prosseguimos a demonstração por indução: supomos que $X_0, X_1, \ldots, X_i$ estão definidos para algum $i \in \mathbb{N}$. Seja z_i o primeiro vértice de $\partial^+ U_i$ que não está em V_i, se tal vértice não existir, tomamos $X_{i+1} = X_i$. Pela hipótese de indução, $(S^v(U_i), t^v(U_i))$ é uma δ-semente para v, portanto, podemos definir

$$U_{i+1} = U_i \cup z_i, V_{i+1} = V_i \text{ caso } G^v_\xi(S^v(U_i), t^v(U_i)) \text{ ocorra}$$

e

$$U_{i+1} = U_i, V_{i+1} = V_i \cup z_i \text{ caso contrário.}$$

Pela Proposição 3.2, segue que

$$P_p(U_{i+1} = U_i \cup z_i | X_0, \ldots, X_{i-1}) \geq \zeta$$

A variável $|U_0|$ domina uma variável aleatória com distribuição Binomial $(\lfloor \delta |L_n| \rfloor, \zeta)$. Podemos aplicar a Desigualdade de Hoeffding (ver Anexo) para estabelecer que

$$P_p(|U_0| \geq \frac{\delta}{2}|L_n|) \geq 1 - e^{-c'hn} \tag{3.18}$$

para alguma constante c'. Aplicando o Lema 3.1, o que é possível por causa da nossa escolha de ζ, podemos concluir que

$$P_p\left(|U_\infty \cap R_n| \geq \frac{1}{1000}|R_n| \;\middle|\; |U_0| \geq \frac{\delta}{2}|L_n|\right) \geq 1 - e^{c''hn}$$

para alguma constante c''. Multiplicando a expressão acima por $P_p(|U_0| \geq \frac{\delta}{2}|L_n|)$ e aplicando (3.18) segue que existe uma constante c tal que

$$P_p\left(|U_\infty \cap R_n| \geq \frac{1}{1000}|R_n|\right) \geq 1 - 2e^{-chn}.$$

Seja $T' := \bigcup_{v \in U_\infty^+ \cap \partial^+ R_n} S^v(U_\infty)$. O conjunto T' satisfaz $|T'| \geq 64000\delta|F| \cdot |U_\infty^+ \cap \partial^+ R_n|$, pela definição de semente e pela hipótese em (3.17). Sob o evento $|U_\infty \cap R_n| \geq \frac{1}{1000}|R_n|$ vale que

$$\begin{aligned} |T'| &\geq 64000\delta|F| \cdot |U_\infty^+ \cap \partial^+ R_n| \\ &\geq 64\delta|F| \cdot |R_n| \\ &\geq 64\delta|R_{n,\text{mic}}| \geq 8\delta|\partial_{\mathbb{S}_h}\Lambda_{2(n-1)}|. \end{aligned}$$

Além disso, pela construção da sequência de exploração, para todo $y \in T'$ existe $t'_y \leq 2Cn$ e um $x \in T$ tal que: $x \xrightarrow{\xi_{[t_x, t'_y]}} y$ em $B_{n,\text{mic}}$. Isso prova a Equação (3.15), finalizando a demonstração. □

3.2 Um lema de percolação orientada

Provaremos o Lema 3.1. Consideramos um processo de percolação em sítios em $\vec{G}$ e os conjuntos B_n, L_n, R_n como definidos em (3.4), (3.5) e (3.6). Provaremos o Lema 3.1 como consequência da seguinte proposição.

Proposição 3.3. *Para todos $\delta \in (0,1)$, $h \geq 20$, n grande e $S \subset L_n$ com $|S| \geq \delta |L_n|$ existem $\gamma \in (0,1)$ e $c > 0$ tais que:*

$$P_\gamma \left(|\{v \in R_n : S \to v\}| \leq \frac{1}{1000}|R_n| \right) \leq e^{-chn}.$$

Onde $\{S \to v\} = \{\exists x \in S :$ existe um caminho orientado entre x e $v.\}$

Demonstração do Lema 3.1 a partir da Proposição 3.3. Construiremos uma sequência de exploração $\{X'_i = (U'_i, V'_i)\}$ com a mesma distribuição da sequência de exploração $\{X_i = (U_i, V_i)\}$ do Lema 3.1, dominando um processo de percolação em B_n com parâmetro ζ.

Primeiro, definimos

$$X'_0 = (U'_0, V'_0) = (S, \emptyset).$$

Declaramos todos os vértices de S como verdes. Seja z o primeiro vértice de B_n conforme a ordenação fixada tal que $z \in \partial^+ U_0$. Seja

$$\zeta_z = P(X_1 = (S \cup \{z\}, \emptyset) | X_0 = X'_0 = (S, \emptyset)).$$

Ou seja, ζ_z é a probabilidade de acrescentar um vértice no primeiro passo da sequência de exploração $\{X_i\}$. Por hipótese, $\zeta_z \geq \zeta$ quase certamente. Seja $\{Y_z\}_{z \in B_n}$ uma sequência de variáveis aleatória i.i.d com distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$. Definimos:

$$X'_1 = \begin{cases} (S \cup \{z\}, \emptyset), & \text{caso } Y_z \leq \zeta_z, \\ (S, \{z\}), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Declaramos z como um vértice verde no primeiro caso e vermelho no segundo. Notemos que, por construção, os pares (X'_0, X'_1) e (X_0, X_1) têm a mesma distribuição. Como hipótese de indução, assumimos que $X'_0, X'_1, \ldots, X'_i$ estão bem definidos para $i \in \mathbb{N}$ e são tais que $(X'_0, X'_1, \ldots, X'_i)$ tem a mesma distribuição que $(X_0, X_1, \ldots, X_i)$.

Seja z o primeiro vértice em $\partial^+ U'_i \backslash V'_i$. Caso tal vértice não exista, tomamos $X'_{i+1} = X'_i$, encerramos o procedimento de exploração e declaramos todos os vértices não explorados como vermelhos. Caso exista, definimos:

$$\zeta_z = P(X_{i+1} = (U_i \cup \{z\}, V_i) | X_0 = X'_0, X_1 = X'_1, \ldots, X_i = X'_i).$$

Novamente, ζ_z é maior que ζ por hipótese. Definimos:

$$X'_{i+1} = \begin{cases} (U'_i \cup \{z\}, V'_i) & \text{caso } Y_z \leq \zeta_z, \\ (U'_i, V'_i \cup \{z\}) & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

No primeiro caso z é declarado verde, e no segundo, vermelho. Por construção, os processos X' e X têm a mesma distribuição, e o conjunto de vértices verdes domina um

processo de percolação Bernoulli com parâmetro ζ. Seja $S \overset{\text{verde}}{\to} v$ o evento em que existe um caminho orientado de vértices verdes conectando algum vértice de S a v. Aplicando a Proposição 3.3, podemos tomar ζ próximo de 1 tal que

$$P_\zeta\left(|\{v \in R_n : S \overset{\text{verde}}{\to} v\}| \leq \frac{1}{1000}|R_n|\right) \leq e^{-chn}.$$

Todo vértice v ligado a S por um caminho orientado de vértices verdes é também um vértice alcançado pela sequência de exploração (pertence a U'_∞). Portanto,

$$P(|U'_\infty \cap R_n| \geq \frac{1}{1000}|R_n|) \geq 1 - e^{-chn},$$

o que completa a demonstração. □

O resto da seção é dedicado a provar a Proposição 3.3.

Consideramos o grafo $\vec{G}_{\text{proj}}$ definido como a projeção de $\vec{G}$ nas duas primeiras coordenadas. Mais precisamente, $\vec{G}_{\text{proj}}$ é o grafo que tem como vértices:

$$V_{\text{proj}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x \in 2\mathbb{Z}, \frac{x}{2} + y \in 2\mathbb{Z}\}$$

e tem como elos:

$$\vec{E} = \{(u, u + (2, e)) : u \in V_{\text{proj}}, e \in \{-1, 1\}\}.$$

O grafo $\vec{G}_{\text{proj}}$ é isomorfo ao $\mathbb{Z}^2$ orientado, por exemplo, pela relação: $f : \mathbb{Z}^2 \to V_{\text{proj}}$ definida por $f(x, y) = (2(x + y), x - y)$.

Consideramos um processo de percolação de sítios em $\vec{G}_{\text{proj}}$ com parâmetro γ. Sejam $n \in 2\mathbb{N}$, $A \subset \{0\} \times \mathbb{Z}$ e $m \geq 5n$. Definimos:

$$\xi_m^A = \{y \in [-n, n] : A \to (m, y)\}.$$

Onde $A \to v$ significa que existe um vértice de A conectado a v por um caminho orientado. Se $A \subset B \subset \{0\} \times \mathbb{Z}$ então $\xi_m^A \subset \xi_m^B$.

Lema 3.2. *Para todo $0 < \delta < \frac{1}{10}$ existe um $\gamma = \gamma(\delta) \in (0, 1)$ tal que: para todos $n \geq 2$ par, $S \subset \{0\} \times [-n, n]$ com $|S| \geq \delta n$ e $m \geq 5n$ divisível por 4, ξ_m^S domina a medida produto em $\{-n, -n + 2, \ldots, n\}$ com parâmetro $\frac{1}{2}$. Ou seja, para todo $y \in \{-n, -n + 2, \ldots, n\}$ a probabilidade de que $y \in \xi_m^S$ é maior ou igual que $\frac{1}{2}$.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, por [13] (Teorema 1.1) podemos tomar γ próximo de 1 tal que $\xi_m^{\mathbb{Z}} := \xi_m^{\{0\} \times \mathbb{Z}}$ domina a medida produto em $\{-n, -n + 2, \ldots, n\}$ com parâmetro $1 - \epsilon$. Construiremos um evento G que ocorre com probabilidade próxima de 1 e tal que, sob G, $\xi_m^S = \xi_m^{\mathbb{Z}}$. O que nos permitirá usar a dominação estocástica válida para $\xi_m^{\mathbb{Z}}$.

Seja

$$S' := S \cap (\{0\} \times [-n + \frac{\delta}{4}n, n - \frac{\delta}{4}n]).$$

Como $|S| \geq \delta n$, temos que $|S'| \geq \frac{\delta}{2}n$. Seja G o evento em que:

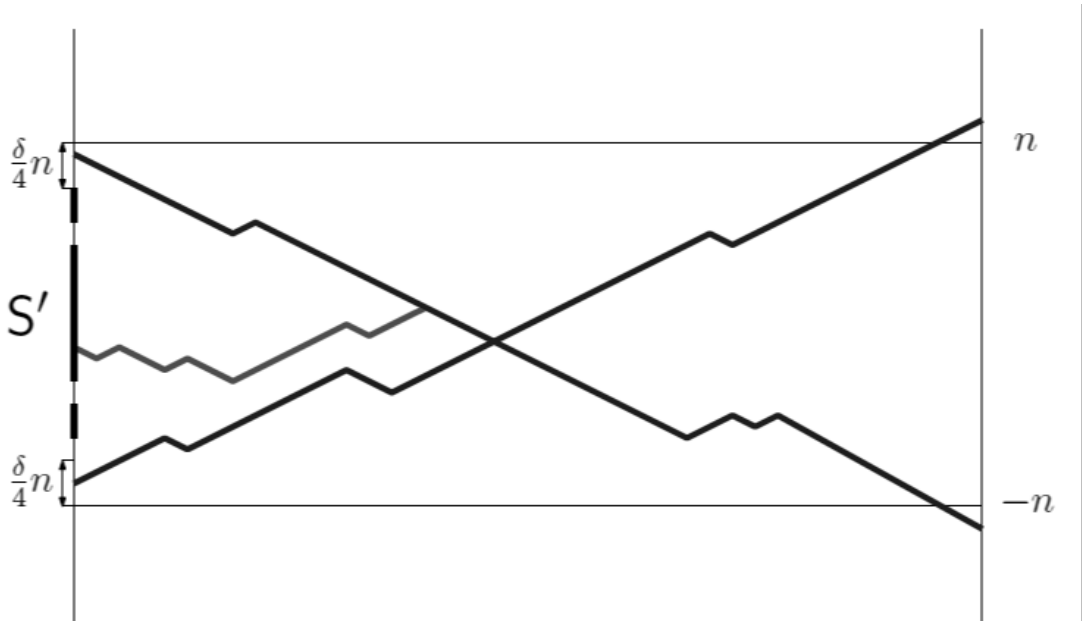
i) $S' \to v$ para algum $v \in \{m\} \times \mathbb{Z}$.

ii) Existe um caminho orientado de $\{0\} \times [-n, -n + \frac{\delta}{4}n]$ a $\{m\} \times [n, \infty)$.

iii) Existe um caminho orientado de $\{0\} \times [n - \frac{\delta}{4}n, n]$ a $\{m\} \times (-\infty, -n]$.

Evento ilustrado na Figura 3.5.

Figura 3.5: Ilustração do evento G.



Fonte: [10]

Por simetria, a probabilidade de $S' \to v$ para algum $v \in \{m\} \times \mathbb{Z}$ é igual a probabilidade de $\{0\} \times \mathbb{Z} \to v'$ para algum $v' \in S' + (m, 0)$. Mais precisamente, é igual a probabilidade de que pelo menos um dos vértices de $S' + (m, 0)$ pertença a $\xi_m^{\mathbb{Z}}$. Podemos tomar γ suficientemente próximo de 1 tal que:

$$\begin{aligned} P_\gamma(S \to v \text{ para algum } v \in \{m\} \times \mathbb{Z}) &= 1 - P_\gamma(\xi_m^{\mathbb{Z}} \cap (S' + (m, 0)) = \emptyset) \\ &\geq 1 - \epsilon^{\frac{\delta n}{2}}. \end{aligned}$$

É possível verificar que os itens ii) e iii) ocorrem com probabilidade $\geq 1 - \frac{1}{3}4^{-n}$ por um argumento do tipo Peierls. Tomando ϵ suficientemente pequeno, tal que a probabilidade do item i) seja maior ou igual que $1 - \frac{1}{3}4^{-n}$, podemos concluir que:

$$P(G) \overset{\text{FKG}}{\geq} (1 - \frac{1}{3}4^{-n})^3 \geq 1 - 4^{-n}.$$

Assumindo que G ocorreu, seja $v \in \{m\} \times [-n, n]$ um vértice que pode ser alcançado por um caminho orientado iniciado em $\{0\} \times \mathbb{Z}$. Sob G, os três caminhos orientados obtidos garantem que podemos construir um caminho de S' a v. Portanto:

$$\xi_m^{\mathbb{Z}} \subset \xi_m^{S'} \subset \xi_m^{S} \subset \xi_m^{\mathbb{Z}} \Rightarrow \xi_m^{\mathbb{Z}} = \xi_m^{S}.$$

Prosseguimos com um argumento de dominação estocástica. Seja $\eta = (\eta_{-n}, \eta_{-n+2}, \ldots, \eta_n)$ um vetor de variáveis aleatórias independentes entre si e independentes da configuração do processo de percolação, todas com distribuição Bernoulli($\frac{3}{4}$). Para verificar o lema, basta provarmos que ξ_m^S domina estocasticamente $\eta \cdot \xi_m^{\mathbb{Z}} = (\eta_{-n}\mathbb{1}_{\xi_m^{\mathbb{Z}}}(-n), \eta_{-n+2}\mathbb{1}_{\xi_m^{\mathbb{Z}}}(-n+2), \ldots, \eta_n \mathbb{1}_{\xi_m^{\mathbb{Z}}}(n))$. Pois $\eta \cdot \xi_m^{\mathbb{Z}}$ domina a medida produto em $\{-n, -n+2, \ldots, n\}$ com parâmetro $\frac{1}{2}$.

Seja $X := \{0,1\}^{\{-n,-n+2,\ldots,n\}}$ munido com a ordem do dicionário[4] e $f : X \to \mathbb{R}_+$ não decrescente com $f(0) = 0$.

$$\begin{aligned}
E[f(\xi_m^S)] &\overset{f\geq 0}{\geq} E[f(\xi_m^S)\mathbb{1}_G] \\
&= E[f(\xi_m^{\mathbb{Z}})\mathbb{1}_G] \\
&\overset{\text{FKG}}{\geq} E[f(\xi_m^{\mathbb{Z}})]P_\gamma(G) \\
&\geq E[f(\xi_m^{\mathbb{Z}})](1 - 4^{-n}) \\
&= E[f(\xi_m^{\mathbb{Z}})]P_\gamma(\eta \neq 0) \\
&= E[f(\xi_m^{\mathbb{Z}})\mathbb{1}_{\eta\neq(0,0,\ldots,0)}] \\
&\geq E[f(\eta \cdot \xi_m^{\mathbb{Z}})].
\end{aligned}$$

Usamos que f é crescente na passagem da penúltima para a última linha. Fica verificada a dominação estocástica usando o critério apresentado no Anexo A.3 □

Aplicaremos o lema anterior no grafo $\vec{G}$. Seja $h \geq 20$. Consideramos um processo de percolação com parâmetro γ em $\vec{G}$. Para inteiros $n \geq m \geq h$, consideramos:

$$B_{n,m} := V \cap ((n, 2n) \times (-2m, 2m) \times (0, h)),$$

$$L_{n,m} := V \cap (\{n+1\} \times [-m, m] \times (0, h)),$$

$$R_{n,m} := V \cap (\{2n-2\} \times [-m, m] \times (0, h)).$$

São análogos aos conjuntos definidos em (3.4), (3.5), (3.6), com um alcance menor no eixo y. Estendemos a definição para o caso em que m não é inteiro tomando $B_{n,m} = B_{n,\lceil m\rceil}$ e analogamente para $L_{n,m}$ e $R_{n,m}$.

[4]Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ e $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in X$. Dizemos que $x < y$ na ordem do dicionário se vale uma das seguintes n afirmações: $x_1 < y_1$ ou $x_1 = y_1$ e $x_2 < y_2$ ou $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ e $x_3 < y_3 \ldots$ ou $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1}$ e $x_n = y_n$. A ordem do dicionário é uma ordem total no conjunto X.

Por exemplo, na topologia do dicionário em $\mathbb{R}^2$ vale que $(1, 100) < (2, 0) < (2, 2)$.

Lema 3.3. *Para todo $\delta > 0$, existe um $\gamma = \gamma(\delta) \in (0,1)$ tal que: para todos $n \geq h \geq 20$ e $S \subset L_{n,\frac{n}{h}}$ com $|S| \geq \delta n$, existe $c > 0$ com:*

$$P\left(N > \frac{1}{20}n\right) \geq 1 - e^{-cn}.$$

Onde N é o número de vértices $v \in R_{n,\frac{n}{h}}$ que satisfazem $S \to v$ em $B_{n,\frac{n}{h}}$.

Demonstração. Verificaremos a existência de uma função injetiva $f : V_{\text{proj}} \cap ([0, n-2] \times [\frac{-n}{2}, \frac{n}{2}]) \to B_{n,\frac{n}{h}}$ tal que:

i) Pelo menos $\frac{\delta}{10}n$ vértices $u \in \{0\} \times [\frac{-n}{6}, \frac{n}{6}]$ são tais que $f(u) \in S$.

ii) Para todo vértice $u \in \{n-3\} \times [\frac{-n}{6}, \frac{n}{6}]$ vale que $f(u) \in R_{n,\frac{n}{h}}$.

iii) Se (u, v) é um elo de $\vec{G}_{\text{proj}}$ então $(f(u), f(v))$ é um elo de $\vec{G}$.

Assumindo a existência de tal injeção provamos o lema da seguinte forma. Consideramos os seguintes conjuntos:

$$S' := \{v \in S : v = f(u) \text{ para algum } u \in \{0\} \times \left[\frac{-n}{6}, \frac{n}{6}\right]\},$$

$$T' = \{v \in R_{n,\frac{n}{h}} : v = f(u) \text{ para algum } u \in \{n-2\} \times \left[\frac{-n}{6}, \frac{n}{6}\right]\},$$

$$N' = |\{v \in T' : S' \to v\}|.$$

Por construção, $N \geq N'$. Além disso, pelo lema anterior, N' domina uma variável aleatória com distribuição Binomial$(\frac{n}{6}, \frac{1}{2})$. Aplicando a Desigualdade de Hoeffding:

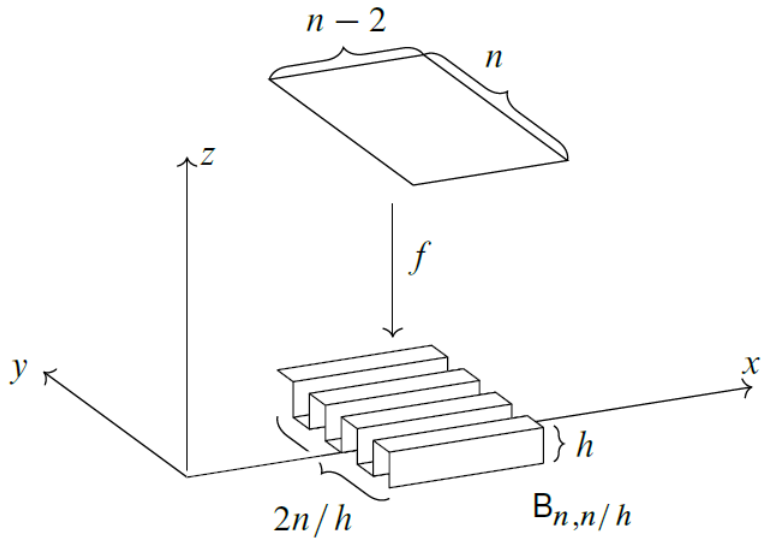
$$\begin{aligned} P\left(N \geq \frac{1}{20}n\right) &\geq P\left(N' \geq \frac{1}{20}n\right) \\ &\geq P\left(\text{Binomial}(\frac{n}{6}, \frac{1}{2}\right) \geq \frac{1}{20}n) \\ &\geq 1 - e^{-cn}. \end{aligned}$$

Agora, construiremos uma função f que age em $V_{\text{proj}} \cap [0, n-2] \times [\frac{-n}{2}, \frac{n}{2}]$ como ilustrado na Figura 3.6.

Seja $a \in [0, n-2] \cap 2\mathbb{Z}$, definiremos f de forma que $f(V_{\text{proj}} \cap \{a\} \times [\frac{-n}{2}, \frac{n}{2}])$ coincida com a interseção do "acordeão" com o plano $x = n + 1 + a$. Assumimos que h e $n+1$ são pares para simplificar as contas. Tomamos:

$$f(a, b) := (n + 1 + a, f_2(a, b), f_3(a, b)).$$

Figura 3.6: Ilustração da ação da função f.



Fonte: [10]

Se a for múltiplo de 4, b vai pertencer ao intervalo $[\frac{-n}{2}, \frac{n}{2}] \cap 2\mathbb{Z}$. Podemos escrever $b = i \cdot 2(h-2) + j$ para algum $i \in \mathbb{Z}$ e $j \in [0, 2(h-2)) \cap 2\mathbb{Z}$. Definimos:

$$f_2(a,b) = 2 \cdot \left\lfloor \frac{b}{h-2} \right\rfloor = \begin{cases} 4i, j \leq h-2 \\ 2 \cdot (2i+1), j > h-2 \end{cases},$$

$$f_3(a,b) = \begin{cases} 2+j, j = 0, 2, \ldots, h-4 \\ 2(h-2) - j, j = h-2, h, \ldots, 2h-6 \end{cases}$$

No caso em que a não é múltiplo de 4, $b \in [\frac{-n}{2}, \frac{n}{2}] \cap (2\mathbb{Z}+1)$. Podemos escrever $b = i \cdot 2(h-2) + j$ para algum $i \in \mathbb{Z}$ e $j \in [0, 2(h-2)) \cap (1+2\mathbb{Z})$. Definimos:

$$f_2(a,b) = 1 + 2 \cdot \left\lfloor \frac{b}{h-2} \right\rfloor = \begin{cases} 1+4i, j \leq h-2 \\ 1+2 \cdot (2i+1), j > h-2 \end{cases},$$

$$f_3(a,b) = \begin{cases} 2+j, j = 1, 3, \ldots, h-3 \\ 2(h-2) - j, j = h-1, h+1, \ldots, 2h-5 \end{cases}.$$

É possível verificar que f definida dessa forma satisfaz as condições i), ii) e iii). □

Demonstração da Proposição 3.3. Seja

$$I_i = V \cap \left(\{n+1\} \times \left[\frac{in}{5}, \frac{in}{5} + \frac{n}{5} \right] \times (0,h) \right),$$

definido para $i = -5, 4, \ldots, 4$. Temos que $L_n = I_{-5} \cup I_{-4} \cup \ldots \cup I_4$. Por suposição, $|S| \geq \delta |L_n| = \delta n \left(\frac{h}{2} - 1\right)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$|S \cap I_0| \geq \frac{\delta n (\frac{h}{2} - 1)}{10} \tag{3.19}$$

pelo princípio da casa dos pombos.

Primeiro, vamos verificar que o conjunto S está conectado ao meio da caixa $\{x = \frac{3(n+1)}{2}\}$ com elevada probabilidade e alcance esparso no eixo y. Consideramos um coleção de retângulos $J_1, J_2, \ldots, J_{\frac{h}{30}} \subset V \cap \left(\{\frac{3(n+1)}{2}\} \times \left[0, \frac{n}{10}\right] \times (0,h)\right)$ definidos por

$$J_i = V \cap \left(\left\{\frac{3(n+1)}{2}\right\} \times \left[j_i - \frac{n}{h}, j_i + \frac{n}{h}\right] \times (0,h)\right)$$

e tais que a distância entre J_i e J_k é maior ou igual que $\frac{2n}{h}$ e $J_i \neq \emptyset$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, \frac{h}{30}$. Isso é possível se tomarmos n suficientemente grande.

Dizemos que um conjunto J_i é ruim se

$$|u \in J_i : S \to u| \leq \frac{\delta}{100}.$$

Primeiro, verificaremos que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$P_\gamma\left(\text{Pelo menos } \frac{h}{60} \text{ conjuntos } J_i \text{ são ruins}\right) \leq e^{-chn}.$$

Escrevemos $I_0 = C_2 \cup C_4 \cup \ldots C_{h-2}$ onde $C_i = V \cap \left(\{n+1\} \times [0, \frac{n}{5}] \times \{i\}\right)$. Vale que

$$\begin{aligned} |S \cap I_0| &\leq \frac{\delta n}{20}\left|\left\{i : |S \cap C_i| < \frac{\delta n}{20}\right\}\right| + n \cdot \left|\left\{i : |S \cap C_i| \geq \frac{\delta n}{20}\right\}\right| \\ &\leq \frac{\delta n(\frac{h}{2} - 1)}{20} + n \cdot \left|\left\{i : |S \cap C_i| \geq \frac{\delta n}{20}\right\}\right|. \end{aligned}$$

Simplificando a expressão acima obtemos que

$$\left|\left\{i : |S \cap C_i| \geq \frac{\delta n}{20}\right\}\right| \geq \frac{\delta(\frac{h}{2} - 1)}{20}. \tag{3.20}$$

Dizemos que uma coluna i é boa se $|S \cap C_i| \geq \frac{\delta n}{20}$. Denotamos por $G \subset \{2, 4, \ldots, h-2\}$ o conjunto de colunas boas.

Seja

$$S' = V \cap \left(\left\{\frac{3(n+1)}{2}\right\} \times \left[0, \frac{n}{10}\right] \times G\right).$$

Primeiro, vamos verificar que por aplicação do Lema 3.2 podemos tomar γ próximo de 1 tal que $\{u \in S' : S \to u \text{ em } V \cap \left([n+1, \frac{3(n+1)}{2}] \times [0, \frac{n}{10}] \times (0,h)\right)\}$ domina a medida produto em S' com parâmetro $\frac{1}{2}$. Seja C_i uma coluna boa. Sabemos que $V \cap \left([n+1, \frac{3(n+1)}{2}] \times [0, \frac{n}{10}] \times \{i\}\right)$ é isomorfo a um subgrafo de $\vec{G}_{\text{proj}}$. Podemos aplicar o Lema 3.2 [5] para produzir γ tal que:

$$\{u \in S' \cap V \cap \left(\left\{\frac{3(n+1)}{2}\right\} \times [0, \frac{n}{10}] \times \{i\}\right) : S \cap V \cap \left(\{n+1\} \times [0, \frac{n}{10}] \times \{i\}\right) \to u\}$$

[5] Nos restringimos a um pedaço de L_n, I_0, precisamente para utilizar esse lema.

domina a medida produto em $S' \cap V \cap \left(\{\frac{3(n+1)}{2}\} \times [0, \frac{n}{10}] \times \{i\}\right)$ com parâmetro 1/2, de onde segue nossa afirmação inicial.

Como $|G| \geq \frac{\delta}{20}(\frac{h}{2} - 1)$, concluímos que:

$$|J_i \cap S'| \geq \frac{\delta}{20}|J_i \cap V|,$$

pois S' tem pelo menos uma fração $\frac{\delta}{20}$ de colunas em comum com J_i. Portanto,

$$\begin{aligned} P(J_i \text{ é ruim}) &\leq P\left(\text{Bin}\left(\frac{\delta}{20}|J_i \cap V|, \frac{1}{2}\right) \leq \frac{\delta}{100}|J_i \cap V|\right) \\ &\leq e^{-c_0 n}, \end{aligned}$$

para alguma constante $c_0 > 0$ pela Desigualdade de Hoeffding. Segue que

$$\begin{aligned} P\left(\text{Pelo menos } \frac{h}{60} \text{ dos } J_i \text{ são ruins}\right) &\leq \sum_{D \subset \{0,\ldots,\frac{h}{30}\}, |D| \geq \frac{h}{60}} P(J_i \text{ é ruim } \forall i \in D) \\ &\leq \sum_{D \subset \{0,\ldots,\frac{h}{30}\}, |D| \geq \frac{h}{60}} \left(e^{-c_0 n}\right)^{\frac{h}{60}} \\ &\leq 2^{\frac{h}{30}} \left(e^{-c_0 n}\right)^{\frac{h}{60}} = e^{-chn}. \end{aligned}$$

Vamos assumir que pelo menos $\frac{h}{60}$ dos J_i são bons. Para J_i bom, sejam

$$S_i = \{u \in J_i : S \to u\}$$

e

$$K_i = \left[\frac{3(n+1)}{2}, 2n\right) \times \left[j_i - \frac{2n}{h}, j_i + \frac{2n}{h}\right] \times (0, h).$$

Como $|S_i| \geq \frac{\delta}{100}|J_i|$, podemos aplicar o Lema 3.3 para tomar γ tal que

$$P\left(|\{u \in R_n : S_i \to u \text{ em } K_i\}| \geq \frac{1}{20}n\right) \geq 1 - e^{-cn}.$$

Dizemos que uma caixa K_i é boa se $|\{u \in R_n : S_i \to u \text{ em } K_i\}| \geq \frac{1}{20}n$. Como as caixas K_i são disjuntas, os eventos em questão são independentes. Vale que

$$\begin{aligned} P\left(\text{Pelo menos } \frac{h}{100} \text{ caixas } K_i \text{ são boas}\right) &\geq P\left(\text{Bin}(\frac{h}{60}, 1 - e^{-cn}) \geq \frac{h}{100}\right) \\ &\geq 1 - e^{-c'hn} \end{aligned}$$

para alguma constante $c' > 0$. Por fim,

$$\begin{aligned} P_\gamma\left(|\{v \in R_n : S \to v\}| \geq \frac{h}{100} \cdot \frac{1}{20}n\right) &\geq (1 - e^{-chn}) + (1 - e^{c'hn}) - (1 - e^{-chn})(1 - e^{c'hn}) \\ &= 1 - e^{-chn}e^{-c'hn}. \end{aligned}$$

Como $\frac{h}{100} \cdot \frac{1}{20}n \geq \frac{1}{1000}(\frac{h}{2} - 1) \cdot n = \frac{|R_n|}{1000}$ segue o resultado. □

Referências

[1] I. Benjamini e H. Kesten. Percolation of arbitrary words in {0,1}. *Annals of Probability*, 23(03):1024–1060, 1995.

[2] S.R. Broadbent e J.M. Hammersley. Percolation processes i. crystals and mazes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53(03):629–641, 1957.

[3] T. Mai e J.W. Halley. Ab percolation on a triangular lattice. *Ordering in Two Dimensions, North-Holland, Amsterdam*, pages 369–371, 1980.

[4] J.C. Wierman e M.J. Appel. Infinite ab percolation clusters exist on the triangular lattice. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 20(09):2533–2537, 1987.

[5] G. Grimmett. *Percolation*. Springer, 1999.

[6] Y. Zhang H. Kesten, V. Sidoravicius. Percolation of arbitrary words on the close-packed graph of $\mathbb{Z}^2$. *Electronic Journal of Probability*, 6(09):27 pp., 2001.

[7] R. Hofstad. *Random Graphs and Complex Networks*. Cambridge University Press, 2016.

[8] L. Russo M. Campanino. An upper bound on the critical percolation probability for the three- dimensional cubic lattice. *Annals of Probability*, 13(02):478–491, 1985.

[9] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 130, 2000.

[10] A. Teixeira P. Nolin, V. Tassion. No exceptional words for bernoulli percolation. *Journal of the European Mathematical Society*, 2022.

[11] A. Pisztora. Surface order large deviations for ising, potts and percolation models. *Probability Theory and Related Fields*, 104:427–466, 1996.

[12] A. N. Shiryaev. *Probability*. Springer New York, NY, 1996.

[13] J. E. Steif T. M. Liggett. Stochastic domination: the contact process, ising models and fkg measures. *Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics*, 42:223–243, 2006.

[14] J.C. Wierman. Ab percolation: a brief survey. *Combinatorics and Graph Theory*, 25:241–251, 1989.

Apêndice A

Complementos Teóricos

A.1 Desigualdade de Hoeffding para a distribuição binomial

Seja Y uma variável aleatória com distribuição binomial com parâmetros n e p, e seja $\delta > 0$. Nesta seção, estabeleceremos as seguintes desigualdades:

$$P(Y \geq (1+\delta)EY) \leq e^{-2p^2\delta^2 n}, \tag{A.1}$$

$$P(Y \leq (1-\delta)EY) \leq e^{-2p^2\delta^2 n}. \tag{A.2}$$

Demonstração: Seja X uma variável aleatória com distribuição Bernoulli p. Vamos verificar que:

$$E\left[e^{\lambda(X-EX)}\right] \leq e^{\frac{1}{8}\lambda^2} \tag{A.3}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Notemos que

$$\begin{aligned} E\left[e^{\lambda(X-EX)}\right] &= pe^{\lambda(1-p)} + (1-p)e^{-\lambda p} \\ &= e^{\ln\left(pe^{\lambda(1-p)}+(1-p)e^{-\lambda p}\right)}. \end{aligned}$$

Seja $L(\lambda) = \ln\left(pe^{\lambda(1-p)} + (1-p)e^{-\lambda p}\right)$, então:

$$L(0) = L'(0) = 0, \tag{A.4}$$

e

$$L''(\lambda) = \frac{p(1-p)e^{\lambda(1-p)-\lambda p}}{(pe^{\lambda(1-p)} + (1-p)e^{-\lambda p})^2}$$

A equação acima é menor ou igual que $\frac{1}{4}$ pela desigualdade das médias (a média aritmética é sempre maior ou igual que a média geométrica), portanto:

$$L''(\lambda) \leq \frac{1}{4}, \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{A.5}$$

Pelo Teorema de Taylor, existe um $\theta \in [0,1]$ tal que

$$L(\lambda) = L(0) + \lambda L'(0) + \frac{\lambda^2}{2} L''(h\theta).$$

Aplicando (A.4) e (A.5) concluímos que

$$L(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{8}.$$

De onde vem (A.3).

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d com distribuição Bernoulli p e $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Sabemos que Y possui distribuição Binomial n e p. Dados t e λ positivos:

$$\begin{aligned} P(Y - EY \geq t) &= P(\lambda(Y - EY) \geq \lambda t) \\ &= P(e^{\lambda(Y-EY)} \geq e^{\lambda t}) \\ &\leq E\left[e^{\lambda(Y-EY)}\right] e^{-\lambda t} \\ &= \prod_{i=1}^{n} E\left[e^{\lambda(X_i - EX_i)}\right] e^{-\lambda t} \\ &\leq e^{\frac{\lambda^2}{8} n} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Onde usamos a Desigualdade de Markov na passagem da segunda para a terceira linha, e a Equação (A.3) na passagem da penúltima para a última linha. Minimizando a expressão acima em λ obtemos que

$$P(Y - EY \geq t) \leq e^{\frac{-2t^2}{n}}.$$

Que implica em (A.1) tomando $t = \delta EY = \delta np$.

Podemos estabelecer

$$P(Y - EY \leq -t) \leq e^{\frac{-2t^2}{n}}$$

de forma análoga. Começamos com a expressão $P(Y - EY \leq -t) = P(\lambda(Y - EY) \geq \lambda t)$, onde $\lambda < 0$, e aplicamos o mesmo raciocínio. A equação acima implica em (A.2) tomando $t = -\delta EY = -\delta np$.

A.2 Resultados de Topologia

Definição A.1 (Espaço Topológico)**.** *Um espaço topológico é um par (X, τ) formado por um conjunto arbitrário X e uma família de conjuntos $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ tal que:*

1. *X e $\emptyset$ pertencem a τ.*

2. *Se $\{A_i\}_{i\in T} \subset \tau$ então $\bigcup_{i\in T} A_i \in \tau$. Onde T é uma família arbitrária de índices, possivelmente não enumerável.*

3. *Dados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pertencentes a τ, temos que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.*

Os elementos de τ são chamados de abertos da topologia. Dizemos que um conjunto F é fechado na topologia τ se $F = A^c$ para algum $A \in \tau$.

Exemplo A.1. *Consideramos o par $(\mathbb{R}, \tau_{\mathbb{R}})$. Onde $A \in \tau_{\mathbb{R}}$ se, e somente se, para todo $x \in A$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \in A$. Não é difícil notar que a família $\tau_{\mathbb{R}}$ tem todas as propriedades de uma topologia.*

Exemplo A.2. *Seja o par $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$. Onde $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. A família $\mathcal{P}(\{0,1\})$ define uma topologia em $\{0,1\}$. A topologia $\mathcal{P}(\{0,1\})$ é também chamada de topologia discreta, já que torna todos os conjuntos abertos.*

Definição A.2 (Espaço Métrico)**.** *Um espaço métrico é um par (X, d), formado por um conjunto arbitrário X e uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$, chamada métrica, que satisfaz:*

1. *Para todos $x, y \in X$, vale que $d(x, y) \geq 0$ com igualdade se, e somente se, $x = y$.*

2. *Para todos $x, y \in X$, vale que $d(x, y) = d(y, x)$*

3. *Para todos $x, y, z \in X$, vale que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.*

Dado um espaço métrico (X, d), para $x \in X$ e $\epsilon > 0$ definimos:

$$B_d(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}.$$

Definição A.3 (Topologia induzida pela métrica)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico arbitrário. Chamamos de topologia induzida pela métrica à seguinte família de conjuntos*

$$\tau_d = \{A \in \mathcal{P}(X) : \forall a \in A, \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } B_d(a, \epsilon) \subset A\} \cup \emptyset.$$

Definição A.4 (Espaço Metrizável)**.** *Um espaço topológico (X, τ) é chamado metrizável se existe uma métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$, tal que a topologia induzida pela métrica d coincide com τ. Ou seja, $\tau_d = \tau$.*

Exemplo A.3. *O espaço topológico $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ é metrizável com a distância $d : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ definida por $d(0,1) = d(1,0) = 1$ e $d(0,0) = d(1,1) = 0$. É fácil ver que, na topologia induzida pela métrica, os conjuntos $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$ são abertos. A métrica d é chamada métrica discreta.*

Seja o espaço $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Queremos construir uma topologia nesse espaço a partir da estrutura topológica de cada uma de suas componentes. Como vimos num exemplo anterior, podemos considerar a topologia discreta em $\{0,1\}$. A partir dela, podemos definir uma topologia em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ chamada de topologia produto. Fazemos isso da seguinte forma: consideramos todos os conjuntos do tipo $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ onde $A_i \in \mathcal{P}(\{0,1\})$ porém $A_i \neq \{0,1\}$ apenas para uma quantidade finita de índices. Chamemos de $\mathcal{A}$ a família de tais conjuntos. Podemos considerar a menor topologia que contém todos os conjuntos desse tipo, chamada topologia gerada por $\mathcal{A}$ (podemos garantir que essa topologia existe por resultados bem conhecidos de topologia). Chamamos essa topologia de topologia produto.

Teorema A.1. *O espaço topológico $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \tau)$ munido com a topologia produto é metrizável com a distância $d : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d(\xi, \xi') = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\xi_k - \xi'_k|}{2^k}.$$

Definição A.5 (Sequência de Cauchy em espaços métricos)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico arbitrário e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência X. A sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é dita Cauchy se para todo $\epsilon > 0$ existe um $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que: $d(x_n, x_m) < \epsilon$ para todos $n, m \geq n_0(\epsilon)$.*

Definição A.6 (Espaço Completo)**.** *Um espaço métrico (X, d) é chamado completo se toda sequência de Cauchy em (X, d) converge. Ou seja, se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy, então existe um $x \in X$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale que $d(x_n, x) < \epsilon$.*

É um resultado bem conhecido que o espaço $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ é completo. Também não é difícil verificar que o espaço $(\{0,1\}, d)$, onde d é a métrica discreta, é um espaço completo.

Definição A.7 (Espaço Compacto)**.** *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que X é compacto se, para toda família de abertos $\{U_i\}_{i\in I}$ com $\bigcup_{i\in I} U_i = X$, existem $i_1, \ldots, i_k$ tais que $X = \bigcup_{j=1}^{k} U_{i_j}$.*

Teorema A.2. *Todo espaço métrico compacto é completo.*

Teorema A.3 (Tychonoff)**.** *Sejam $\{X_i, \tau_i\}_{i\in I}$ espaços topológicos compactos. O espaço $(\prod_{i\in I} X_i, \tau)$ (onde τ é a topologia produto) é compacto.*

Como corolário do Teorema de Tychonoff, podemos estabelecer que $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \tau)$ é um espaço topológico compacto.

Definição A.8 (Espaços de Baire)**.** *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $F \subset X$ tem interior vazio se F não contém nenhum aberto de X. O espaço topológico (X, τ) é chamado de espaço de Baire se, para toda família enumerável $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos fechados na topologia τ com interior vazio, vale que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ tem interior vazio.*

Teorema A.4 (Teorema de Baire)**.** *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Então (X, d) é um espaço de Baire.*

Corolário A.1. *Pelos resultados anteriores, o espaço $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é compacto e métrico, portanto, completo. Pelo Teorema de Baire, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ é um espaço de Baire.*

Para essas e outras demonstrações sugerimos [9].

A.3 Dominação Estocástica

Durante a dissertação, constantemente nos referimos ao conceito de dominação estocástica. Nesse curto apêndice, apresentamos uma introdução ao assunto, que acreditamos ser suficiente para acompanhar as demonstrações do texto.

Pelo resto desse anexo Ω' denota um conjunto totalmente ordenado com uma ordem $\geq$. Se para $x, y \in \Omega'$ vale que $x \geq y$ sem que $x = y$, escrevemos $x > y$.

Sejam $X : \Omega_X \to \Omega'$ e $Y : \Omega_Y \to \Omega'$ funções mensuráveis definidas em certos espaços de medida, digamos P_X e P_Y. Dizemos que X domina estocasticamente Y se

$$P_X(X > z) \geq P_Y(Y > z) \ \forall z \in \Omega'. \tag{A.6}$$

Tomando $F_X(z) = P_X(X \leq z)$ e $F_Y(z) = P_Y(Y \leq z)$ podemos reescrever a definição (A.6) como:

$$F_X(z) \leq F_Y(z) \ \forall z \in \Omega'.$$

Uma definição mais intuitiva para dominação estocástica pode ser dada em termos de acoplamento. Um acoplamento entre duas funções mensuráveis X e Y é um espaço de probabilidade sobre $\Omega_X \times \Omega_Y$ onde estão definidas funções mensuráveis $X', Y' : \Omega_X \times \Omega_Y \to \Omega'$ tais que:

$$P_X(X \in A) = P(X' \in A) \text{ e } P_Y(Y \in A) = P(Y' \in A)$$

para todo conjunto A que é Ω'-mensurável. Onde P é a medida de probabilidade do espaço sobre $\Omega_X \times \Omega_Y$. Ou seja, um acoplamento é um espaço de probabilidade em que as duas funções mensuráveis vivem juntas.

Ainda usando a notação apresentada anteriormente na definição de acoplamento, dizemos que uma função X domina estocasticamente uma função Y se existe um acoplamento entre as duas funções tal que

$$P(X' \geq Y') = 1.$$

A equivalência das definições apresentadas pode ser vista em [7].

Exemplo A.4. *Dados $n, m \in \mathbb{N}$, sejam $X \sim Bin(n+m, p)$ e $Y \sim Bin(n, p)$. Vejamos que X domina estocasticamente Y.*

Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+m}$ variáveis aleatórias independentes com distribuição Bernoulli p. Definimos $X' := \sum_{i=1}^{n+m} Y_i$ e $Y' := \sum_{i=1}^{n} Y_i$. É claro que $X' \sim \mathrm{Bin}(n+m, p)$ e $Y' \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, por construção, $X = Y + \sum_{i=n+1}^{n+m} Y_i \geq Y$. □

Exemplo A.5. *Sejam $p, p' \in [0, 1]$ com $p' > p$ e $n \in \mathbb{N}$. Vejamos que $X \sim$ Bin(n,p') domina estocasticamente $Y \sim$ Bin(n,p).*

Sejam $Z_1, \ldots, Z_n$ variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Definimos $X' := \sum_{i=1}^{n} 1_{Z_i \leq p'}$ e $Y' := \sum_{i=1}^{n} 1_{Z_i \leq p}$. É claro que $X' \sim$ Bin(n,p') e $Y' \sim$ Bin(n,p). Além disso, $1_{Z_i \leq p'} \geq 1_{Z_i \leq p}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, de onde segue que $X' \geq Y'$. □

Usamos o seguinte critério de dominação estocástica na prova do Lema 3.2.

Proposição A.1. *Admitamos que exista $0 \in \Omega'$, tal que, para todo $x \in \Omega'$ vale que $x \geq 0$. Se para toda $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ não decrescente com $F(0) = 0$ vale que*

$$E(f(X)) \geq E(f(Y))$$

então X domina estocasticamente Y.

A prova é direta, basta percebermos que $1_{(z,\infty)}$ é uma função não decrescente com $1_{(z,\infty)}(0) = 0$ para todo $z \in \Omega'$. O que implica em A.6.